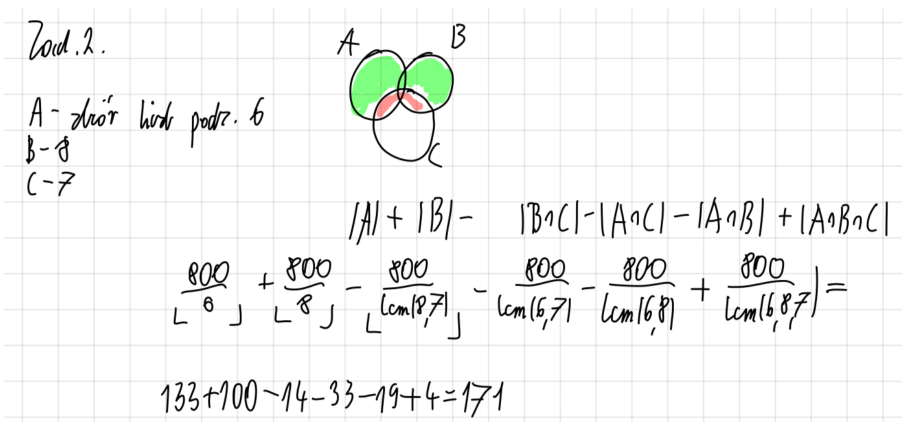
MDL 21.10

Dominik Szczepaniak

October 26, 2023

Zrobione:	1D	2	3	4	5	6	7D	8	9	11	12
	N	Y	Y	Y	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y

1 Zadanie 2



2 Zadanie 3

Łącznie - wszystkieA - wszystkieB - wszystkieC - wszystkieAiB - wszystkie BiC - wszystkie AiC + wszystkie AiBiC

Łączna liczba opcji:
$\frac{9!}{4!*3!*2!}$
wszystkieA (9-4+1)
$\frac{6!}{3!*2!}$
wszystkieB (9-3+1)

$\frac{7!}{4!*2!}$
wszystkieC (9-2+1)
$\frac{8!}{4!*3!}$
wszystkieAiB (9-4-3+2)
$\frac{4!}{2!}$
wszystkieBiC (9-3-2+2)
$\frac{6!}{4!}$
wszystkieAiC (9-4-2+2)
$\frac{5!}{3!}$
wszystkieAiBiC (9-4-3-2+3)
$\frac{3!}{3!}$
$\frac{9!}{4!*3!*2!} - \frac{6!}{3!*2!} - \frac{7!}{4!*2!} - \frac{8!}{4!*3!} - \frac{4!}{2!} - \frac{6!}{4!} - \frac{5!}{3!} + \frac{3!}{3!} = 754$

3 Zadanie 4

Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony przynajmniej raz.

Zapraszać 7 przyjaciół każdego dnia może na P($\binom{7}{3}$, 7) sposobów.

Jeśli chcemy omijać jednego przyjaciela, to mamy $\binom{7}{1}$ opcji na wybranie przyjaciela i $P(\binom{6}{3}, 7)$ wyboru spośród reszty, więc łącznie $\binom{7}{1} * P(\binom{6}{3}, 7)$.

Dwóch przyjaciół możemy omijać na $\binom{7}{2} * P(\binom{5}{3}, 7)$ sposobów.

Trzech przyjaciół możemy omijać na $\binom{4}{3} = 4$ możliwe grupy 3 osobowe, a potrzebujemy przynajmniej 7 (jedna na każdą noc), więc to możemy pominąć i dalsze kroki też

Łączny wynik wynosi więc:
$P(\binom{7}{3}, 7) - \binom{7}{1} * P(\binom{6}{3}, 7) + \binom{7}{2} * P(\binom{5}{3}, 7) =$
$\frac{35!}{28!} - 7 * \frac{20!}{13!} + 21! * \frac{10!}{3!} =$
5109094220286611520 0

4 Zadanie 5

Udowodnijmy, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n + 1) \times (n + 1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

Krok na pole (i, j) można zrobić z (i-1, j) lub (i, j-1). Czyli albo idąc w góre albo w prawo. Ten proces zajmuje więc 2n kroków, gdzie n kroków to kroki w górę, a n kroków to kroki w prawo. Zatem liczba dróg to $\binom{2n}{n}$. I tyle równa się zwinięta suma.

Obliczmy teraz ilość dróg do górnego pola licząc najpierw drogi z (0, 0) do (k, n-k) a później z (k, n-k) do (n, n). Zauważmy, że każda z tych dróg ma długość n. k $\in 1, 2, 3, ..., n$

Zauważmy, że ilość dróg do (k, n-k) jest równa $\binom{n}{k}$, bo możemy wybrać dowolną ilość kroków k w dowolną stronę. Droga z (k, n-k) do (n, n) będzie liczyć n-k kroków w prawo i k kroków w góre. Czyli liczba możliwych dróg jest równa $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Także całkowita liczba kroków z (0,0) do (n,n) która przechodzi przez (k, n-k) jest równa iloczynowi możliwych dróg z (0,0) do (k, n-k) i dróg z (k, n-k) do (n,n). Także jest równa $\binom{n}{k} * \binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$.

Sumowanie po wszystkich możliwych k $\in 1, 2, 3, ..., n$ daje nam łączną liczbę dróg, czyli:

$\sum_{k=0}^{n}[\binom{n}{k}^2]$ co jest równe $\binom{2n}{n}$

5 Zadanie 6

Trzy punkty mogą być pokolorowane dwoma kolorami na 8 sposobów, więc jeśli wybierzemy 9 linii to muszą być dwie linie pokolorwane w ten sam sposób. Połączmy te linie pionową kreską i mamy prostokąt.

ZZZ
ZZC
ZCZ
ZCC
CZZ
CZC
CCZ
CCC

6 Zadanie 7

Wybieramy n+1 liczb spośród kolejnych 2n liczb naturalnych.

Zauważmy, że każda liczba jest zapisana jako albo 2^k * liczba nieparzysta. Liczby nieparzyste są ze zbioru 1,3,5,...,2n-1. Więc co najwyżej możemy wziąc n takich wartości.

Teraz włóżmy nasze n+1 liczb do odpowiednich szufladek która mówi o największym nieparzystym dzielniku. Zauważmy, że jeśli wzięliśmy n+1 liczb to musi istnieć szufladka, która ma co najmniej 2 elementy.

Wejdźmy więc do tej szufladki. Obie te liczby są postaci $2^k * l$, gdzie l to ta największa liczba nieparzysta, która dzieli tą liczbę.

Pierwszą liczbą niech będzie $2^k * l$, a drugą $2^m * l$ i niech k>m (równie nie mogą być, bo każda liczba ma być różna).

Oznaczmy te liczby jako a i b.

Więc

a = $2^k * l$,

b = $2^m * l$

$\frac{a}{b} = \frac{2^k * l}{2^m * l} => a = 2^{k-m} * b$

Także b dzieli a.

7 Zadanie 8

Mamy przypadek ze stars and bars. Możemy zapisać przedmioty jako gwiazdki i rozdzielic do 10 miejsc.

Mamy więc 50+9 przedmiotów i 9 miejsc do rozdzielenia, odpowiedzią jest więc

$\binom{59}{9}$

Ogólny wzór dla n przedmiotów i k szuflad (rozróżnialnych) to:

$\binom{n+k-1}{k-1}$

8 Zadanie 9

wszystkich opcji: $\binom{100+4-1}{4-1}$

x1+x2+x3+x4=100

x1, x2 <= 29

x3, x4 <= 39

$Wynik = N - N_{x1>29} - N_{x2>29} - N_{x3>39} - N_{x4>39} - N_{x1>29 and x2>29} - N_{x1>29 and x3>39} - N_{x1>29 and x4>39} - N_{x2>29 and x3>39} - N_{x2>29 and x4>39} - N_{x3>39 and x4>39} -$

$N_{x1>29andx2>29andx3>39} - N_{x1>29andx2>29andx4>39} - N_{x1>29andx3>39andx4>39} - N_{x2>29andx3>39andx4>39} + N_{x1>29andx2>29andx3>39andx4>39}$

$N = \binom{103}{3}$

$N_{x1>29} = \binom{73}{3}$

$N_{x2>29} = \binom{73}{3}$

$N_{x3>39} = \binom{63}{3}$

$N_{x4>39} = \binom{63}{3}$

$N_{x1>29andx2>29} = \binom{43}{3}$

$N_{x1>29andx3>39} = \binom{33}{3}$

$N_{x1>29andx4>39} = \binom{33}{3}$

$N_{x2>29andx3>39} = \binom{33}{3}$

$N_{x2>29andx4>39} = \binom{33}{3}$

$N_{x3>39andx4>39} = \binom{23}{3}$

$N_{x1>29andx2>29andx3>39} = \binom{4}{3}$

$N_{x1>29andx2>29andx4>39} = \binom{4}{3}$

$N_{x1>29andx3>39andx4>39} = 0$

$N_{x2>29andx3>39andx4>39} = 0$

$N_{x1>29andx2>29andx3>39andx4>39} = 0$

Więc razem mamy:

$\binom{103}{3} - 2 * \binom{74}{3} - 2 * \binom{64}{3} - 4 * \binom{35}{3} - \binom{25}{3} - \binom{45}{3} - 2 * \binom{16}{3} - 2 * \binom{6}{3} = 140,400$

9 Zadanie 10

$10^6 \equiv 1 (mod 7)$

$10^{100000 mod 6} = 10^4$

$10^4 \equiv 4 (mod 7)$

$10^{100000} - 4 dzieli sie na 7$

10 Zadanie 11

Liczba naturalna a, której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 wtw gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} a_{2i-1} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i}$ dzieli się przez 11.

Jest to prawdziwe stwierdzenie. Mamy, że

$\sum_{i=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} a_{2i-1} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} \equiv 0 (mod 11)$

co jest równoważne

$\sum_{i=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} a_{2i-1}(mod 11) \equiv \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i}(mod 11)$

Weźmy dowolną liczbę naturalną k. Możemy ją zapisać jako

$k = \sum_{i=0}^{l} a_i * 10^i$ gdzie $a_i \in 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ oraz l jest największą liczbą naturalną, która spełnia $10^l \leq k$.

Zauważmy, że $10 \equiv -1(mod 11)$

Więc

$k = 10^l * a_l + 10^{l-1} * a_{l-1} + ... + 10^1 * a_1 + 10^0 * a_0 \equiv (-1)^l * a_l + (-1)^{l-1} * a_{l-1} + ... + (-1)^1 * a_1 + (-1)^0 * a_0 \equiv \sum_{i=0}^{l} (-1)^i * a_i(mod 11)$

Jeśli więc rozdzielimy tą sumę na liczby parzyste i nieparzyste mamy:

$\sum_{i=0}^{l} (-1)^i * a_i(mod 11) \equiv \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} a_{2i} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil} a_{2i+1}(mod 11)$

Także aby powyższa suma się dzieliła to musi być równa 0 modulo 11, czyli

$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} a_{2i}(mod 11) \equiv \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil} a_{2i+1}(mod 11)$

A to jest to co chcieliśmy pokazać.

11 Zadanie 12

Liczbe 74^{74} mozemy zapisac jako 74^{64+8+2}

$74 \equiv 71 mod 100$

$74^2 \equiv 76 mod 100$

$74^4 \equiv 76 * 76 mod 100 \equiv 76 mod 100$

$74^8 \equiv 76 * 76 mod 100 \equiv 76 mod 100$

...

$74^{64} \equiv 76 mod 100$

$74^{64+8+2} \equiv 76 * 76 * 76 mod 100 \equiv 76 mod 100$