MDL 10 30.11

Dominik Szczepaniak

January 4, 2024

1 Zadanie 1

Toposort:

```
int n;
vector<vector<int>> adj;
vector<bool> visited(n, false);
vector<int> ans;

void dfs(int v) {
    visited[v] = true;
    for (int u : adj[v]) {
        if (!visited[u])
            dfs(u);
    }
    ans.push_back(v);
}

void topological_sort() {
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (!visited[i]) {
            dfs(i);
        }
    }
    reverse(ans.begin(), ans.end());

}
```

Czemu O(n+m) - bo odwiedzamy kazdy wierzcholek maksymalnie raz (visited) i przegladamy kazda krawedz maksymalnie raz stad N+M.

Czemu porzadkuje tak jak chce zadanie?

Jesli odpalimy jakiegos dfs dla wierzcholka v to najpierw dojdziemy do wszystkich wierzcholkow w jego poddrzewie. Nazwijmy dowolny z tych wierzcholkow u. Tak więc dodamy u przed v. Także jesli dajemy push back, to v będzie gdzieś dalej niż u. Także jeśli istnieje jakaś krawędź (i, j) to i>j bo j nalezy do poddrzewa i, więc jest dalej w grafie, więc jest blizej poczatku tablicy, czyli wystarczy odwrocic tablice aby sie zgadzalo.

2 Zadanie 2

Ścieżką powiększającą nazwiemy ścieżkę prostą p taką, że jej krawędzie są na przemian skojarzone i wolne, a końce są wolne.

Dla grafu dzwudzielnego G = $(V_1 \cup V_2, E)$ oraz skojarzenia M zdefiniujmy skierowany graf $G_M = (V_1 \cup V_2, E_T)$ jako:

$E_M = \{(v_1, v_2) \in E, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \cup \{(v_2, v_1) \in T, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$

Czyli jest to zbior wszystkich krawedzi z $V_1 do V_2$ + zbior krawedzi skojarzonych z $V_2 do V_1$

DLA KAZDEJ KRAWDZI $(v_1, v_2) musi zachodzic v_1 < v_2$

Algorytm:

1. $V_1' - zbior wierzcholkow wolnych w V_1$
2. $V_2' - zbior wierzcholkow wolnych w V_2$
3. skonstruuj graf skierowany $G_M = (V_1 \cup V2, E_T)$
4. znajdz sciezke p z $V_1' do V_2' w G_T$
5. jeśli p nie istnieje to:

zwróć null (brak ścieżki)

6. usuń cykle z p tak, aby p była ścieżką prostą
7. zwróć p (p to ścieżka powieszkająca w G)

Przykład:

Dostajemy graf:

1 2

1 4

2 3

3 4

4 5

5 6

5 8
6 7
7 8
$V1 = \{(1,3,5,7)\}$
$V2 = \{(2,4,6,8)\}$
$M = \{(2,3),(4,5),(7,8)\}$
$V_1'\{1\}$
$V_2'\{6\}$
Wtedy $G_M = \{(1,2),(1,4),(3,4),(5,6),(5,8),(7,8)\} \cup \{(4,5)\}$
ścieżka 1->6 w $G_M = (1,4)(4,5)(5,6)$
cykli nie ma
jest to sciezka powiekszajaca :)

Lemat:

Powyższy algorytm znajduje ścieżkę p wtedy i tylko wtedy gdy w G istnieje ścieżka powiększająca względem M, ponadto znaleziona ścieżka jest powiększająca.

Dowód:

Załóżmy, że ścieżka p istnieje. Z konstrukcji algorytmu wiemy, że jest to ścieżka która

a) zaczyna się w wierzchołku wolnym bo zaczynamy w wierzcholku wolnym

b) Z V_1 do V_2 idzie krawędzią wolną bo $V_1' i V_2'$ zawiera tylko wierzcholki wolne, wiec nie moze byc miedzy nimi skojarzenia

c) Z V_2 do V_1 wraca krawędzią skojarzoną, bo w G_M sa tylko krawedzie skojarzone z $V_2 do V_1$

d) kończy się w V_2 krawędzią wolną, bo konczymy w wierzcholku wolnym

Ścieżka p spełnia wszystkie warunki dla ścieżki powiększającej oprócz bycia ścieżką prostą. Jeżeli p przechodzi dwa razy przez ten sam wierzchołek $v \in V_1$ to wchodzi do niego dwa razy krawędzią skojarzoną (bo jest to graf dwudzielny, a krawdzie z V_2 do V_1 sa tylko skojarzone w G_M), a wychodzi krawędzią nieskojarzoną (bo krawedzie z $V_1 do V_2 w G_M$ sa tylko nieskojarzone). Jeżeli teraz usuniemy kawałek ścieżki pomiędzy tymi dwoma wejściami do v (linia 7) to powyższe cztery warunki nadal będą zachodzić. Możemy więc, zachowując je, zamienić ścieżkę p na ścieżkę prostą.

3 Zadanie 3

Minimalne cięcie to podzbiór krawędzi których usunięcie rozspaja graf a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Czyli to taki zbiór, że jeśli zdecydujemy się usunąć wszystkie krawędzie z tego zbioru oprócz jednej to graf dalej będzie spójny. Czyli rozspoimi graf wtedy i tylko wtedy gdy usuniemy wszystkie krawędzie z minimalnego cięcia, inaczej dalej będzie spójny.

Mamy pokazać, że graf spójny ma cykl Eulera wtw gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

L=>P:

Załóżmy, że w grafie spójnym jeśli graf zawiera cykl Eulera to minimalne cięcie ma parzystą ilość krawędzi.

Jeśli graf zawiera cykl Eulera to stopień każdego wierzchołka musi być parzysty. Z wykładu to wiemy.

Załóżmy nie wprost, że ilość krawędzi w minimalnym cięciu jest nieparzysta.

a) Załóżmy, że istnieje tylko jedna krawędź w minimalnym cięciu. Wtedy jeśli ją usuniemy i dostaniemy dwie spójne składowe S1 i S2 to jeśli nasz cykl Eulera przebiegał przez tą krawędź z S1 do S2 to nie wrócimy już z S2 do S1, więc nie może istnieć cykl Eulera.

b) Załóżmy teraz ogólnie, że ilość krawędzi jest nieparzysta. Wtedy mamy podobny przypadek co wyżej - w ostatnim kroku (jeśli jest 2n+1 krawędzi, to po 2n krokach zostaje jedna krawędź) nie wrócimy do spójnej składowej w której zaczęliśmy, więc nie zrobimy cyklu, także ilość krawędzi musi być parzysta.

P=>L:

Załóżmy, że jeżeli w grafie spójnym minimalne cięcie ma parzystą ilość krawędzi to graf zawiera cykl Eulera.

nie wiem kurwa nie da sie chyba tego

4 Zadanie 5

1. Równy stopień wejścia i wyjścia dla każdego wierzchołka.

2. Wszystkie wierzchołki muszą należeć do tej samej silnej spójnej składowej.

Ad.2

Załóżmy, że są jakieś dwa wierzchołki między którymi nie istnieje ścieżka (czyli nie są w silniej spójnej składowej). Jeśli zaczniemy w jednym z nich to w szczególności nie odwiedzimy drugiego, czyli nie stworzymy cyklu Eulera.

L => P

Pokażmy, że istnieje cykl Eulera w grafie skierowanym to stopień wejścia i wyjścia każdego wierzchołka jest równy.

Jeśli istnieje cykl to mamy albo opcje taką, że cykl składa się ze ścieżki albo z drogi.

Jeśli składa się ze ścieżki to stopnie są równe 1.

Jeśli składa się z drogi to jest jakaś część tego cyklu w której wierzchołki są powtórzone. Jeśli usuniemy wierzchołki w tej części drogi to podzielimy graf na dwa podgrafy w których mamy cykle eulera. Teraz znowu jeśli te cykle składają się ze ścieżki to można je po prostu podzielić znowu na dwa, i tak w nieskończoność aż otrzymamy jakąś ilość (bo ilość krawędzi jest skończona) ścieżek, a w ścieżce wszystkie wierzchołki mają stopnie równe 1.

Czyli jak mamy:

v1 v2 v3 v4 v2 v5 v6 v2 v7 v8 v1

to dzielimy na:

v1 v2 v5 v6 v2 v7 v8 v1

v2 v3 v4 v2

dzielimy teraz pierwszy znowu na:

v1 v2 v7 v8 v1

v2 v5 v6 v2

v2 v3 v4 v2

i wtedy każdy ma stopień 1 czyli równe w każdym grafie, czyli suma jest równa dalej.

L <= P

Jeśli dla każdego v jest, że stopnie wejścia i wyjścia są równe to istnieje cykl Eulera.

Jeśli dla każdego v stopnie wyjścia i wejścia są równe to musi istnieć droga z v do v. (Dowód niżej). Zakładając, że to jest prawdziwe weźmy dowolne v i znajdźmy cykl C1 który kończy się w v. Usuńmy wszystkie krawędzie które należą do tego cyklu z naszego grafu. W naszym nowym grafie dalej zachodzi, że indeg(v) = outdeg(v), więc weźmy kolejny wierzchołek v', taki że jego cykl C2 przechodzi przez jakiś punkt C1 i znowu usuńmy krawędzie z grafu. Róbmy tak tak długo aż nie będzie żadnej krawędzi w grafie.

Czyli znajdujemy cykl C1, później kolejny cykl C2, C3, ..., Cn i łączymy je w taki sposób, że idziemy cyklem C1 później przechodzimy cykl C2, wracamy na C1 albo przechodzimy C3 jeśli C3 był w C2 i tak w kółko aż przejdziemy wszystkie cykle.

Dowód

Zacznijmy w v i wybierzmy jakąkolwiek wychodząca krawędź (v, u), jeśli indeg(u) = outdeg(u) to wybierzmy jakąś wychodzącą krawędź u i kontynuujmy odwiedzane krawędzi. Za każdym razem gdy wybieramy jakąś krawędź usuwajmy ją. Dla każdego wierzchołka (oprócz v) mamy tak, że wchodząc usuwamy krawędź wchodzącą do niego, a wychodząc usuwamy krawędź wychodzącą, więc dalej indeg(x) = outdeg(x) dla jakiegoś wierzchołka x. Ponieważ zawsze istnieje krawędź wychodząca ostatnią krawędzią będzie krawędź wchodząca do v, ponieważ gdy zaczynaliśmy nie usunęliśmy krawędzi do v.

5 Zadanie 6

Nie ma takich digrafów.

Zauważmy, że takie grafy możemy rozumieć jako permutację, w której nie ma cyklu. W permutacji mamy, że dla każdej liczby przypisujemy jej inną liczbę - czyli jedna krawędź wyjściowa, oraz, że każda liczba jest przypisana innej liczbie - jedna krawędź wejściowa.

No ale jeśli w permutacji nie ma cyklu, to nie możemy wybrać żadnej takiej permutacji, ponieważ aby permutacja nie miała cyklu to jakaś liczba musi nie wystąpić, a to jest niemożliwe bo w permutacji każda liczba ma jedno przypisanie.

Zauważmy, że dla

1 2 3

1 2 3

Jest cykl, bo 1->1 tworzy cykl.

6 Zadanie 7

Nie.

Koń zawsze przebywa 3 kwadraty pionowo i jeden poziomo albo 3 poziomo i jeden pionowo. Skoro przebywa 3 pionowo/poziomo zachowuje ten sam kolor, ale idac jeden obok zmienia kolor. Czyli zawsze skacze z czarnego pola na białe albo na odwrót. No a skoro mamy 25 pól planszy to jeśli zaczniemy ruch z pola którego jest mniej (jednego jest 13, innego 12), to po 11*2 ruchach zabraknie nam pola którego nie odwiedziliśmy.

7 Zadanie 8

W treści zadania brakuje, że ilość wierzchołków jest parzysta, więc załóżmy to, bo jeśli nie to dla 3 wierzchołków nie będzie perfekcyjnego matchingu.

Pokażmy najpierw, że istnieje skojarzenie największe.

Weźmy jakiś podzbiór wierzchołków A i oznaczmy go przez A'. Oznaczmy przez E'_A krawędzie które mają jakiś koniec w A. Każda krawędź która ma koniec w A, ma też koniec w N(A), niech $E_{N(A)}$ oznacza krawędzie które mają koniec w N(A). Zauważmy, że N(A) jest podzbiorem B, a A' podzbiorem A, więc pierwsza cześć warunku Halla jest spełniona.

Ponieważ graf jest k-regularny to $E_A = k * |A|$ oraz $E_{N(A)} = k * |N(A)|$, no ale E_A zawiera się w $E_{N(A)}$, więc $|A| \leq |N(A)|$ a z tego mamy wszystko spełnione wszystkie warunki warunku Halla, więc mamy skojarzenie doskonałe.

8 Zadanie 9

Przekształcamy prostokąt na graf G $= (A \cup B, E)$,

gdzie A to zbiór liczb $\{1, 2, 3, ..., n\}$ (numery kolumn)

a B to zbiór liczb $\{1, 2, ..., n\}$ (liczby którymi wypełnimy nowy wiersz)

$a \in A$ łączy krawędź z $b \in B$ gdy liczba b nie wystąpiła w kolumnie a, więc

$\forall a \in A(N(a)) = n - m >= 1$

Zauważmy, że liczbę możemy wpisać w kolumny w których jeszcze nie wystąpiła, czyli n-m.

Zatem warunek Halla:

$\forall A' \in A|N(A')| >= |A'|$ oraz $\forall B' \in B|N(B')| >= |B'|$

jest spełniony, więc istnieje skojarzenie doskonałe, czyli wypełniony prostokąt.

9 Zadanie 10

Dowód indukcyjny: Dla dowolnego turnieju o n wierzchołkach istnieje ścieżka hamiltona.

Indukcja po ilości wierzchołkow (n):

Dla n=1 mamy po prostu jeden wierzchołek, więc to jest ścieżka hamiltona.

Załóżmy, że dla n zachodzi, pokażmy dla n+1:

Ponieważ dla n wierzchołków z założenia była ścieżka hamiltona, a nowy (n+1) wierzchołek jest w turnieju połączony z każdą parą wierzchołków krawędzią a do b lub b do a, to mamy trzy opcje:

a) ten wierzchołek ma tylko krawędzie wychodzące - to znaczy żadna krawędź nie wchodzi do niego - wtedy ten wierzchołek będzie pierwszym wierzchołkiem w ścieżce hamiltona - pójdziemy nim do pierwszego wierzchołka w ścieżce hamiltona dla n wierzchołków (ścieżki z założenia indukcyjnego)

b) ten wierzchołek ma tylko krawędzie wchodzące - wtedy przedłużamy naszą ścieżkę o ten wierzchołek.

c) ten wierzchołek ma krawędzie wychodzące i wchodzące:

Niech V_a oznacza zbiór wierzchołków, gdzie istnieje krawędź skierowana z naszego nowego wierzchołka do wierzchołka w zbiorze, a przez V_b wierzchołki które mają krawędź skierowaną do naszego nowego wierzchołka. Ponieważ $|V_a| <$ n oraz $|V_b| <$ n (bo założenie, że te zbiory nie są równe n). Zauważmy, że zbiory V_a oraz V_b tworzą turnieje - pomiędzy wszystkimi wierzchołkami w tym zbiorze istnieje krawędź (v_i, v_j) lub (v_j, v_i). Także z indukcji wiemy, że istnieje ścieżka hamiltona zarówno w V_a oraz V_b. W takim razie skonstruujmy nową ścieżkę w taki sposób, że przedłużymy ścieżkę hamiltona w V_b o nasz nowy wierzchołek, a później dodamy ścieżke hamiltona z V_a.