

# Zadanie egzaminacyjne 3 Rachunek Prawdopodobieństwa

Dominik Szczepaniak 337456

May 5, 2024

## 1 Treść

Rozkład wykładniczy  $Exp(\lambda)$  ma gęstość określoną wzorem  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  dla  $x > 0$ .

## 2 Podpunkt 1. Wyznaczyć MGF tego rozkładu

$$M(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{t-\lambda} (0 - 1) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$$

Co zachodzi dla  $t < \lambda$ .

## 3 Podpunkt 2. Niech $X \sim Exp(\lambda)$ . Wyznaczyć oszacowania dla $P(X \geq \lambda a)$ wynikające z nierówności Markova, Chebysheva i Chernoffa.

### 3.1 Oszacowanie Markova

$$P(X \geq \lambda a) \leq \frac{E(X)}{\lambda a} = \frac{1}{(\lambda)^2 a}$$

### 3.2 Oszacowanie Chebysheva

$$P(X \geq \lambda a) = P(|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \lambda a - \frac{1}{\lambda}) \leq \frac{1}{(\lambda^2 a - 1)^2}$$

### 3.3 Oszacowanie Chernoffa

$$P(X \geq \lambda a) = P(\exp(x) \geq \exp(\lambda a)) \leq \frac{\lambda}{\lambda-t} \exp(-t\lambda a) = \exp(\ln(\frac{\lambda}{\lambda-t}) - t\lambda a)$$

$$\text{Niech } f(t) = \ln(\frac{\lambda}{\lambda-t}) - t\lambda a$$

$$f'(t) = \frac{1}{\lambda-t} - \lambda a$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \lambda - \frac{1}{\lambda a}$$

Teraz jeśli wstawimy to do poprzedniej nierówności mamy:

$$P(X \geq \lambda a) = P(\exp(x) \geq \exp(\lambda a)) \leq \frac{\lambda}{\lambda-t} \exp(-t\lambda a) = \exp(\ln(\frac{\lambda}{\lambda-t}) - t\lambda a) = \exp(\ln(\frac{\lambda}{\lambda - \frac{1}{\lambda a}}) - \lambda^2 a + 1) = a\lambda^2 \exp(-\lambda^2 a + 1)$$

#### 4 Podpunkt 3. Sporządzić tabelę z wartościami dokładnymi i oszacowaniami

$$k = 337456 \bmod 10 = 6$$

$$m = \frac{337456-6}{10} \bmod 10 = 5$$

$$\lambda = 6 + 5 + 1 = 12$$

$$a \in \{3, 4, 6, 10\}$$

$a$	$P(X \geq \lambda a)$	Markov	Chebyshev	Chernoff
3	$2.425402 * 10^{-188}$	0.0023148	$5.3832 * 10^{-6}$	$2.8481446 * 10^{-185}$
4	$7.02066 * 10^{-251}$	0.0017361	$3.02457 * 10^{-6}$	$2.05388 * 10^{-247}$
6	0	0.0011574	$1.342698 * 10^{-6}$	0
10	0	0.000694	$4.829235 * 10^{-7}$	0