

MDL DOMOWE 10 20.12

Dominik Szczepaniak

December 20, 2023

1 Zadanie 4

Dowód indukcyjny:

Co iterację drzewo T jest jakimś podgrafem MST M , dla ilości wierzchołków $= 1$ to jest prawda, bo nie zawiera żadnych krawędzi.

Założmy teraz indukcyjnie, że dla n wierzchołków T jest podgrafem MST M i algorytm Prima wybiera krawędź e do dodania do T . Jeśli $e \in M$ to skoro T jest podgrafem M to po dodaniu krawędzi e , T jest dalej podgrafem M .

Założmy więc, że e nie należy do M . Dodajmy więc e do M i tworzymy jakiś cykl. Skoro e ma jeden punkt końcowy w T i drugiego końca nie mamy (bo dodajemy tą krawędź algorytmem Prima) to musi być jakaś inna krawędź e' w tym cyklu, która ma tylko jeden punkt końcowy w T (bo drzewo rozpinające jeszcze nie jest skończone). Więc algorytm Prima mógł dodać e' , ale zamiast tego wybrał e , więc $w(e) \leq w(e')$. Więc jeśli dodamy e do M i usuniemy krawędź e' to dostajemy nowe drzewo rozpinające M' , gdzie $w(M') \leq w(M)$ i zawiera T z krawędzią e , co dalej podtrzymuje indukcję, bo T jest podgrafem jakiegoś MST.

(Zauważmy, że $w(e') = w(e)$, bo w przeciwnym przypadku $w(M') < w(M)$, więc M nie byłoby M)