MDL 5 7.11

Dominik Szczepaniak

November 16, 2023

Zrobione:

2	4	6	7D	8	9	10	11	12
Y	Y	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y

1 Zadanie 2

Załóżmy, że mamy już n linii i chcemy podzielić płaszczyzne kolejną linią na jak najwięcej części. Wtedy w najlepszym wypadku przetniemy każdą z n-1 linii w nowym miejscu przecięcia. Przetniemy więc najpierw pierwszy region (zanim jakąkolwiek linie) na dwa, a później dla każdej przeciętej linii będziemy dzielić jakiś region na dwa.

W takim razie mamy
$p_n = p_{n-1} + 2 * (n-1) + 1$
$p_n - p_{n-1} + 2n - 2 + 1 = 0$
$p_n - p_{n-1} + 2n - 1 = 0$
$p_{n+1} - p_n + 2n + 1 = 0$
$p_{n+1} - p_n => (E-1)$
$2n + 1 => (E-1)^2$
$(E-1)^3 < p_n >= 0$
$p_n = \alpha * 1^n + \beta * n * 1^n + \gamma * n^2 * 1^n = \alpha + n\beta + n^2\gamma$
$p_0 = 1 = \alpha$
$p_1 = 2 = \alpha + \beta + \gamma$
$p_2 = 4 = \alpha + 2\beta + 4\gamma$

$1 + \beta + \gamma = 2$
$\beta = 1 - \gamma$

$1 + 2 - 2\gamma + 4\gamma = 4$
$2\gamma = 1$
$\gamma = \frac{1}{2}$
$\beta = \frac{1}{2}$
$p_n = 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$

2 Zadanie 4

Podpunkt a

a0 = 1
a1 = 1
$a2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$a3 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$
$a4 = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$
$a_n = \sqrt{fib(n+1)}$
Z pdf'a wiemy, ze
$Fib(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} * (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$
W takim razie
$a_n = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}} * (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} * (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}$
Podpunkt b
$b_{n+1} = \sqrt{{b_n}^2 + 3}, b_0 = 8$
$b_{n+1} = \left|\sqrt{{b_n}^2 + 3}\right| = \left|\sqrt{\left|\sqrt{b_{n-1}^2 + 3}\right|^2 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_{n-1}^2 + 3 + 3}\right| = \left|\sqrt{\left|\sqrt{b_{n-2}^2 + 3}\right|^2 + 3 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_{n-2}^2 + 3 + 3 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_{n-3}^2 + 3 + 3 + 3 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_{n-4}^2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_0^2 + 3n}\right| = \left|\sqrt{64 + 3n}\right|$
Podpunkt c
$c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2 + n)c_{n-1}, c0 = 0, c1 = 1$
$c_2 = 2 * 1 + 2 * 0 = 2$
$c_3 = 3 * 2 + 6 * 1 = 12$
$c_4 = 4 * 12 + 12 * 2 = 72$
$c_5 = 5 * 72 + 20 * 12 = 600$
$\vdots$
$c_n = n! * F_n$
Dla $n = 0$ mamy

$c_0 = 0! * fib0 = 1 * 0 = 0$, czyli sie zgadza

Załóżmy, że dla n zachodzi, wtedy chcemy pokazać indukcyjnie, że dla $n + 1$ też zachodzi:

$c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1} = (n+1)*n!*F_n + (n^2+n)*(n-1)!*F_{n-1} = (n+1)*n!*F_n + (n+1)*n*(n-1)!*F_{n-1} = (n+1)!*F_n + (n+1)!*F_{n-1} = (n+1)!(F_n + F_n - 1) = (n+1)! * F_{n+1}$

Czyli się zgadza

3 Zadanie 6

Chcemy pokazać, że $a * (a+1) * (a+2) * \cdots * (a+k-1)$ dzieli się przez $k!$

$\binom{n}{k} = \frac{n*(n-1)*\cdots*(n-k+1)}{k*(k-1)*\cdots*1}$

Mamy w takim razie góre która wygląda jak nasz iloczyn. Dzieli się przez k!, więc chcemy pomnożyć i mamy to samo.

$a * (a+1) * (a+2) * \cdots * (a+k-1) = \binom{a+k-1}{k} * k!$

$\binom{a+k-1}{k} \in \mathbb{Z}$

więc dzieli się przez k!

4 Zadanie 7

$D_0 = 1$

$D_1 = 0$

$D_{n+1} = n * (D_n + D_{n-1})$

$D_{n+1} - nD_n - nD_{n-1} = 0$

$(E^2 - nE - n) * < D_n >= 0$

$(E - (\frac{1}{2} * (n - \sqrt{n} * \sqrt{n+4})))(E - (\frac{1}{2} * (n + \sqrt{n} * \sqrt{n+4}))) * < D_n >= 0$

$D_n = \alpha * (\frac{1}{2} * (n - \sqrt{n} * \sqrt{n+4}))^n + \beta * (\frac{1}{2} * (n + \sqrt{n} * \sqrt{n+4}))^n$

$D_0 = 1 = \alpha + \beta => \alpha = 1 - \beta$

$D_1 = 0 = (1 - \beta) * (\frac{1}{2} * (1 - \sqrt{1} * \sqrt{5})) + \beta * (\frac{1}{2} * (1 + \sqrt{1} * \sqrt{5}))$

$= (\frac{1}{2} * (1 - 1 * \sqrt{5})) - \beta * (\frac{1}{2} * (1 - 1 * \sqrt{5})) + \beta * (\frac{1}{2} * (1 + 1 * \sqrt{5}))$

$= \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \beta * (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) + \beta * \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$

$\beta(-\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta(\sqrt{5}) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\beta(\sqrt{5}) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0$

$\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2*\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+5}{10}$

$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2*\sqrt{5}}$

$\beta = \frac{1}{2} - \frac{25}{12 * \sqrt{21}}$
$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 * \sqrt{5}}$
$D_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 * \sqrt{5}} * (\frac{1}{2} * (n - \sqrt{n} * \sqrt{n+4}))^n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 * \sqrt{5}} * (\frac{1}{2} * (n + \sqrt{n} * \sqrt{n+4}))^n$

5 Zadanie 8

$a_{n+1}^2 = 2a_n^2 + 1$

$a_{n+1}^2 - 2a_n^2 - 1 = 0$

$b_n = a_n^2$

$b_{n+1} - 2b_n - 1 = 0$

$b_{n+1} - 2b_n \Rightarrow (E-2)$

$-1 \Rightarrow (E-1)$

$(E-2)(E-1)\langle a_n \rangle = 0$

$b_n = \alpha \cdot 2^n + \beta$

$b_0 = a_0^2 = 4 = \alpha + \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5$

$b_1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9 = 2\alpha + \beta \quad \beta = -1$

$b_n = 5 \cdot 2^n - 1 \quad a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$

6 Zadanie 9

Wyraz złożony z 0 liter zawiera 0 liter a, a więc parzystą ilość także $a_0 = 1$.

Dla wyrazów złożonych z 1 litery mamy 24 wyrazy bez litery a. Czyli $a_1 = 24$

Dla ogólnego przypadku n liter:

$a_n = 24 * a_{n-1} + (25^{n-1} - a_{n-1}) = 25^{n-1} + 23 * a_{n-1}$

$24 * a_{n-1}$ - a nie będzie ostatnią literą, więc rozpatrujemy ciągi o długości n-1 zawierające parzystą liczbę wystąpień a

$(25^{n-1} - a_{n-1})$ - a będzie ostatnią literą, więc rozpatrujemy ciągi długości n-1 zawierające nieparzystą liczbę a

$a_n = 25^{n-1} + 23 * a_{n-1}$
$a_n - 23 * a_{n-1} - 25^{n-1} = 0$
$a_{n+1} - 23 * a_n - 25^n = 0$
$a_{n+1} - 23 * a_n => (E - 23)$
$-25^n => (E - 25)$
$(E - 23) * (E - 25) < a_n >= 0$
$a_n = \alpha * 23^n + \beta * 25^n$

$a_0 = 1 = \alpha + \beta$
$a_1 = 24 = \alpha * 23^1 + 25^1 * \beta$

$\alpha = 1 - \beta$
$24 = 23 - 23\beta + 25\beta$
$1 = 2\beta$
$\beta = \frac{1}{2}$
$\alpha = \frac{1}{2}$
$a_n = \frac{1}{2} 23^n + 25^n \frac{1}{2}$

7 Zadanie 10

10. a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n - 3^n + 1 = 0$

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \Rightarrow E^2 - 2E + 1$

$-3^n \Rightarrow (E-3)$

$-1 \Rightarrow (E-1)$

$(E^2 - 2E + 1)(E-3)(E-1)\langle a_n \rangle = (E-1)^3(E-3)$

$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 1^n + \gamma \cdot n^2 \cdot 1^n + \delta \cdot 3^n = \alpha + \beta + \gamma n^2 + \delta 3^n$

b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n \to E^2 - 4E + 4$

$-n 2^{n+1} \to (E-2)^2$

$(E^2 - 4E + 4)(E-2)^2 \langle a_n \rangle = (E-2)^4 \langle a_n \rangle = 0$

$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta n 2^n + \gamma n^2 2^n + \delta n^3 2^n$

c) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n \Rightarrow (E^2 + 2E + 1)$

$-\frac{1}{2^{n+1}} = -2^{(n+1)\cdot -1} \Rightarrow (E - 2^{-1}) = (E - \frac{1}{2})$

$(E+1)^2 (E - \frac{1}{2}) \langle a_n \rangle = 0$

$a_n = \alpha(-1)^n + \beta n(-1)^n + \gamma \frac{1}{2}^n$

$a_2 = \frac{1}{2} - 2 - 1 = -\frac{5}{2}$

$a_0 = 1 \quad = \alpha + \gamma \quad \Rightarrow \alpha = \frac{7}{9}$

$a_1 = 1 \quad = -\alpha - \beta + \frac{1}{2}\gamma \quad \Rightarrow \beta = -\frac{5}{3}$

$a_2 = -\frac{5}{2} \quad = \alpha + 2\beta + \frac{1}{4}\gamma \quad \Rightarrow \gamma = \frac{2}{9}$

$a_n = \frac{7}{9} \cdot (-1)^n - \frac{5}{3} \cdot (-1)^n \cdot n + \frac{2}{9} \cdot (\frac{1}{2})^n$

$\alpha = 1 - \gamma$

$-1 + \gamma - \beta + \frac{1}{2}\gamma = 1$

$\frac{3}{2}\gamma - \beta = 2$

$\beta = \frac{3}{2}\gamma - 2$

$\alpha = \frac{7}{9}$

$\beta = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$

$1 - \gamma + 3\gamma - 4 + \frac{1}{4}\gamma = -\frac{5}{2}$

$-3 + 2\gamma + \frac{1}{4}\gamma = -\frac{5}{2}$

$\frac{9}{4}\gamma = \frac{1}{2}$

$9\gamma = 2$

$\gamma = \frac{2}{9}$

8 Zadanie 11

$c_0 = 1$

Jeśli chcemy nie mieć dwóch następujących po sobie zer lub jedynek, to poprzedni ciąg możemy przedłużyć jedną z dwóch cyfr, bo ta trzecia będzie kolejną taką samą, jeśli skończyliśmy ostatni ciąg na 0 lub 1 albo możemy przedłużyć o 2 jeśli skończyliśmy na 2.

dp[i][0] - kończone na 0/1
dp[i][1] - kończone na 2

dp[1][0] = 2
dp[1][1] = 1

dp[i+1][0] = dp[i][0] + 2*dp[i][1]
dp[i+1][1] = (dp[i][0] + dp[i][1])

dp[i][0] = dp[i-1][0] + 2*dp[i-1][1]
dp[i][1] = (dp[i-1][0] + dp[i-1][1])

dp[i+1][0] = dp[i-1][0] + 2*dp[i-1][1] + 2dp[i-1][0] + 2dp[i-1][1] = 3dp[i-1][0] + 4dp[i-1][1]
dp[i+1][1] = dp[i-1][0] + 2*dp[i-1][1] + dp[i-1][0] + dp[i-1][1] = 2dp[i-1][0] + 3dp[i-1][1]

dp[i+2][0] = dp[i+1][0] + 2*dp[i+1][1]
dp[i+1][1] = dp[i+1][0] + dp[i+1][1]

dp[i+2][0] = 7dp[i-1][0] + 10dp[i-1][1]
dp[i+2][1] = 5dp[i-1][0] + 7dp[i-1][1]

dp[i] = 2dp[i-1][0] + 3dp[i-1][1]
dp[i+1] = 5dp[i-1][0] + 7dp[i-1][1]
dp[i+2] = 12dp[i-1][0] + 17dp[i-1][1]
dp[i+3] = 29dp[i-1][0] + 41dp[i-1][1]

Niech i = 2
dp[0] = 1
dp[1] = 2 + 1 = 3
dp[2] = 4 + 3 = 7
dp[3] = 10 + 7 = 17
dp[4] = 24 + 17 = 41
dp[5] = 58 + 41 = 99

Zauważmy, że dp[i] = 2*dp[i-1] + dp[i-2]
W takim razie
Dla n mamy
$c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2}$
$c_{n+1} - 2c_n - c_{n-1} = 0$
$(E^2 - 2E - 1) < c_n >= 0$
$(E - 1 + \sqrt{2})(E - 1 - \sqrt{2}) < c_n >= 0$
$c_n = \alpha * (1 - \sqrt{2})^n + \beta * (1 + \sqrt{2})^n$
$c_0 = 1 = \alpha + \beta => \alpha = 1 - \beta$
$c_1 = 3 = \alpha * (1 - \sqrt{2}) + \beta * (1 + \sqrt{2})$

$\alpha * (1 - \sqrt{2}) + \beta * (1 + \sqrt{2}) = 3$
$(1 - \beta) * (1 - \sqrt{2}) + \beta * (1 + \sqrt{2}) = 3$
$(1 - \sqrt{2}) - \beta * (1 - \sqrt{2}) + \beta * (1 + \sqrt{2}) = 3$
$(1 - \sqrt{2}) - \beta + \beta\sqrt{2} + \beta + \beta\sqrt{2} = 3$
$(1 - \sqrt{2}) + 2\beta\sqrt{2} = 3$
$2\beta\sqrt{2} = 3 - 1 + \sqrt{2}$
$2\beta\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$
$2\beta = \frac{2\sqrt{2}}{2} + 1$
$\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$
$\alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$
$c_n = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) * (1 - \sqrt{2})^n + (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) * (1 + \sqrt{2})^n$

9 Zadanie 12

$a)1 * 4^{n-1}$
$b)2^n$
$c)4^{n-2}$
$d)3^n$
$e)\lfloor 4^{n-4} \rfloor$