Punkty: 7/11 (-2 za 1, -2 za 5)

1 Zadanie 1 2P

a) Jeśli x^3 jest ujemne i wartości x^3 i $\sqrt(x^6 + 2023^2)$ są bliskie sobie. Wtedy odjęcie może spowodować utrate liczb znaczących.

Czyli mamy rownosc

$x^3 + \frac{x^6 - 2023^2}{\sqrt{x^6 - 2023^2}}$

Dla bardzo dużej liczby ujemnej x dostajemy wartości takie same, ale jednak nie jest to problematyczne, ponieważ funkcja pow(0, -1) zwróci nam infinity, czyli dość prawdziwą wartość.

b) Jeśli $log_2 x$ jest bliskie 2. Wtedy odejmowanie utnie cyfry znaczące i możemy dostać 0.

$log_2 x - 2$ traci wartości znaczące dla $x = 2^2 + \epsilon$ dla małego ϵ.

Wtedy możemy do rozpisać jako:

$log_2 x - 2 = log_2 x - log_2 2^2 = \frac{ln(x)}{ln(2)} - \frac{ln(2^2)}{ln(2)} = \frac{ln(x) - ln(2^2)}{ln(2)} = ln(\frac{x}{2^2}) * \frac{1}{ln(2)}$

c) Problemem może się okazać, gdy wartość $\pi/2 - x - arctan(x)$ będzie bardzo bliska 0, ale nie będzie równa 0, wtedy cyfry znaczące zostaną ucięte przy odejmowaniu, co da nam wynik 0, a tak naprawde nie będzie zerem.

Oczywiście dla $\pi/2$ nie mamy poprawnego skończenia dziesiętnego, więc jeśli x będzie bardzo bliskie $\pi/2$ to wynik będzie bardzo bliski 0, ale nie będzie równy 0.

2 Zadanie 2 1P

Używanie wzoru $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ nie jest optymalne, poniewaz dla wysokich wartosci b i malych wartosci a, c wartosc pod pierwiastkiem bedzie równa b. W takim przypadku utracimy cyfry znaczące dla $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ (bo wynik będzie bardzo bliski zera). Możemy więc liczyć rozwiązanie za pomocą wzorów Viete'a:

x1 $= -b - \sqrt{b^2 - 4ac}$

$x1x2 = \frac{c}{a} => x2 = \frac{c}{a * x1} = \frac{c}{-ab - a\sqrt{b^2 - 4ac}}$

3 Zadanie 3 1P

Względna zmiana danych jest dana wzorem:

$|\frac{(x+\delta)-x}{x}| = |\frac{\delta}{x}|$

Względna zmiana wyniku jest dana wzorem:

$|\frac{f(x+\delta)-f(x)}{f(x)}|$

Wskaźnik uwarunkowania:

Cond(x) $= \frac{\text{względna zmiana wyniku}}{\text{względna zmiana danych}} = |\frac{f(x+\delta)-f(x)}{f(x)}| * |\frac{x}{\delta}| = |\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}| * |\frac{\delta}{f(x)}| * |\frac{x}{\delta}|$
$= |\frac{x*f'(x)}{f(x)}|$

4 Zadanie 4 2P

Zadanie jest zle uwarunkowane jeśli lim Cond(f(x)) $= \infty$

a) $f(x) = (x+2023)^7$

$f'(x) = 7(x+2023)^6$

$Cond(f(x)) = |\frac{x*7(x+2023)^6}{(x+2023)^7}| = |\frac{7x}{x+2023}|$

zadanie źle uwarunkowane dla $x = -2023$

b) $f(x) = cos(3x)$

$f'(x) = -3sin(3x)$

$Cond(f(x)) = |\frac{x*-3*sin(3x)}{cos(3x)}| = |-3x*tan(3x)|$

zadanie źle uwarunkowane dla $x = \frac{\pi}{6} + k*\pi$ dla k $\in Z$

c) $f(x) = (1+x^6)^{-1}$

$f'(x) = \frac{6*x^5}{(1+x^6)^2}$

$Cond(f(x)) = |\frac{x*\frac{6*x^5}{(1+x^6)^2}}{(1+x^6)^{-1}}| = |\frac{6x^6}{1+x^6}| = |\frac{6}{\frac{1}{x^6}+1}|$

Dla x dążącego do ∞ wyrażenie dąży do 6.

Dla x dążącego do $-\infty$ wyrażenie dąży do 6.

Dla x dążącego do 0 wyrażenie dąży do $\frac{6}{\infty+1} = 0$.

Także zadanie jest dobrze uwarunkowane.

5 Zadanie 5 2P

6 Zadanie 6 1P

Czy poniższy algorytm obliczania wartości wyrażenia

$w(x) := x + 4x^{-1}(x \neq 0)$ jest algorytmem numerycznie poprawnym:

$u := x;$

$v := 4/x;$

$return(u+v)$
$x+\frac{4}{x} => (x+\frac{4+\epsilon_1}{x})(1+\epsilon_2)$
$(x+\frac{4+\epsilon_1}{x})$ - błąd wprowadzania danych
$(1+\epsilon_2)$ - błąd wyniku
Dla poprawnego numerycznie wyniku mamy:
$(x+\frac{4}{x})(1+E) = (x+\frac{4+\epsilon_1}{x})(1+\epsilon_2)$
Po wpisaniu danych nasz błąd wynosi:
$x+\frac{4+\epsilon_1}{x} = (x+\frac{4}{x})(1+\delta)$
$x+\frac{4}{x}+\frac{\epsilon}{x} = x+\frac{4}{x}+\delta(x+\frac{4}{x})$ / : $(x+\frac{4}{x})$
$\frac{\epsilon}{x} = \delta(x+\frac{4}{x}) => \delta = \frac{\epsilon}{x} * \frac{1}{x+\frac{4}{x}}$
$\delta \leq 2^{-t} * \frac{1}{x+\frac{4}{x}} \leq 2^{-t}$
Wraz ze wzrostem x błąd maleje, podobnie dla malejących x

Wiemy więc, że błąd na "na wejściu" jest niewiększy niż 2^{-t}, oznacza to, że:

$(x+\frac{4+\epsilon_1}{x})(1+\epsilon_2) = (x+\frac{4}{x})(1+\delta)(1+\epsilon_2) = (x+\frac{4}{x})(1+\theta)$, gdzie $|\theta| \leq 2*2^{-t}$

Wykazaliśmy więc, że wynik wejściowy jest bliski dokładnemu wynikowi, więc algorytm jest poprawny numerycznie.

7 Zadanie 7 2P

Algorytm jest numerycznie poprawny jeśli wynik jego działania w arytmetyce zmiennoprzecinkowej może być zinterpretowany jako mały zaburzony wynik dokładny dla mało zaburzonych danych wejściowych.

Chcąc wyznaczyć wartość A(a) w świecie liczb zmiennopozycyjnych otrzymamy

$fl(A(a)) = (A(a*(1+\beta))*(1+\alpha))$

gdzie $(1+\beta)$ oznacza małe zaburzenie danych, a $(1+\alpha)$ małe zaburzenie wyniku

Mamy w zadaniu podany algorytm liczący iloczyn liczb maszynowych x1, x2, ..., xn

$rd(x_k) = x_k$, $1 \leq k \leq n$
I = x[n]
for(int k = n-1; k>=1; k–)
I = I * x[k];
return I
Mamy więc

$fl(x_n * x_{n-1} * ... * x_2 * x_1) = x_1 * x_2(1+\delta_2) * x_3 * (1+\delta_3) * ... * x_n * (1+\delta_n)$
gdzie
$|\delta_k| \leq 2^{-t}$
stąd mamy, że:
$|fl(x_1 * x_2 * x_3 * ... * x_n) - x_1 * x_2 * ... * x_n| = \epsilon|x_1 * x_2 * ... * x_n|$
gdzie
$\epsilon = |(1+\delta_2)(1+\delta_3)...(1+\delta_n) - 1|$
$(-1$ bo $x_1)$
stąd mamy, że
$\epsilon \leq (1+2^{-t})^{n-1} - 1$

Przyjmijmy j = n-1 i załóżmy, że $j*2^{-t} < 0.1$ (co jest oczywiście sensowne, bo n musiałoby być naprawdę bardzo bardzo duże, żeby ta nierówność nie zachodziła) Wtedy:

$ln(1+2^{-t})^j = j * ln(1+2^{-t}) < j2^{-t}$
więc, jak zdejmiemy logarytm to
$(1+2^{-t})^j < e^{j*2^{-t}}$
Weźmy teraz szereg taylora z liczby e:
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{x^n}{n!}] = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$
Mamy:
$(1+2^{-t})^j - 1 < j * 2^{-t} + \frac{(j*2^{-t})^2}{2!} + \frac{(j*2^{-t})^3}{3!} + ...$
$(1+2^{-t})^j - 1 < j * 2^{-t}(1 + \frac{1}{2} * j * 2^{-t} + (\frac{1}{2} * j * 2^{-t})^2 + ...)$
$(1+2^{-t})^j - 1 < j * 2^{-t} * (1 + \frac{0.05}{1-0.05}) < 1.06 * j * 2^{-t}$
Tak więc mamy:
$\epsilon < 1.06 * (n-1) * 2^{-t}$, jeśli $(n-1) * 2^{-t} < 0.1$

Także algorytm jest numerycznie poprawny dopóki powyższa równość zachodzi.

No ale skoro $rd(x_k) = x_k$, a z def rd(x) mamy:
$|\frac{x - rd(x)}{x}| < 2^{-t}$
to mamy, że:
$|\frac{x_k - x_k}{x_k}| < 2^{-t}$
czyli
$|\frac{0}{x_k}| < 2^{-t}$
czyli
$0 < 2^{-t}$
co jest prawidzwe, także algorytm jest numerycznie poprawny.