

# Problem plecakowy

Wyobraźmy sobie następujący problem optymalizacyjny (zwany problemem plecakowym). Mamy zbiór przedmiotów każdy o określonej wadze oraz wartości. Mamy też plecak, który może pomieścić przedmioty o określonej wadze sumarycznej (bo inaczej się urwie). Zagadnienie polega na tym, by wybrać do plecaka takie przedmioty, by ich sumaryczna wartość była jak największa.

Jest to dość popularne zagadnienie optymalizacyjne. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że rozmiar plecaka jest liczbą naturalną.

## Proste ale niekoniecznie optymalne metody rozwiązywania: Algorytm zachłanny

Ogólnie algorytm zachłanny szuka najbardziej optymalnego rozwiązania w danej chwili (w każdym kroku). W tym przypadku sortujemy rzeczy po cenie malejąco i dodajemy do plecaka kolejno rzeczy o największej wartości aż dodanie kolejnej rzeczy przekroczyłoby dopuszczalną masę sumaryczną. To nie zawsze jest najlepsze rozwiązanie. Załóżmy że mamy trzy rzeczy i plecak o pojemności do 50kg.

- 1) Waga 20 Wartość 10
- 2) Waga 40 Wartość 15
- 3) Waga 25 Wartość 8

Opisany wyżej algorytm zachłanny doda do plecaka rzecz drugą o wartości 15 (i masie 40). Więcej już się nie zmieści. Optymalne rozwiązanie to spakować rzecz 1 i 3 co da łączną wartość 18.

Inna wersja: policzyć dla każdej rzeczy stosunek wartości do masy i pakować rzeczy wg wartości tego stosunku. To też nie zawsze jest optymalne rozwiązanie.

Właściwe rozwiązanie to

## Algorytm dynamiczny

Jego pseudokod można znaleźć (pod nazwą Knapsack Problem) np. w angielskiej wersji Wikipedii:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem)

Problem rozwiązuje się tak.

- 1) Tworzymy macierz  $X$  o tylu kolumnach ile wynosi dopuszczalna masa jaką pomieści plecak +1 (np. dopuszczalna masa to 15kg to macierz ma 16 kolumn). Liczbę kolumn określamy jako  $N$ . Liczba wierszy w macierzy to liczba przedmiotów +1 (dodanie dodatkowego wiersza ułatwi dalsze obliczenia, gdyż będzie można bezpiecznie odwoływać się do wiersza wcześniejszego).
- 2) W pierwszym wierszu (indeks zerowy) dodajemy same zera
- 3) Każdy kolejny wiersz odpowiada za dodawanie poszczególnych dostępnych przedmiotów. Załóżmy że  $i$ -ty przedmiot ma wagę (masę)  $W_i$  oraz wartość (cenę)  $C_i$ . Kolumny indeksujemy literą  $j$ .
- 4) Gdy dodajemy pierwszy przedmiot (wiersz numer 1) to dla kolumn o  $W_i > j$  dajemy 0 a dla  $W_i \leq j$  dajemy  $C_i$ . (innymi słowy, przedmiot możemy włożyć do plecaka, tylko wtedy gdy plecak „wytrzyma” ciężar większy lub równy  $W_i$ . Kolumny określają właśnie maksymalny ciężar jaki wytrzyma plecak.

- 5) Teraz sprawdzamy kolejne przedmioty. W kolejnych wierszach (indeksowanych przez  $i$ ) w kolumnie  $j$ -ej
  - a. ) Sprawdzamy czy  $W_i > j$ , jeśli tak to  $X[i, j] = X[i-1, j]$  (innymi słowy do plecaka z kolumny  $j$ -ej przedmiot się nie zmieści -nawet jeśli plecak jest pusty- , przepisujemy zatem „wartość” zawartości plecaka z komórki leżącej o jedno pole wyżej).
  - b. Jeśli  $W_i \leq j$  dajemy maksimum z ( $X[i-1, j]$  oraz  $X[i-1, j-W_i] + c_i$ ) Oznacza to co następuje:
 

Podpunkt a) Jeśli kolejny przedmiot jest cięższy od maksymalnej masy jaką można trzymać w plecaku, to nie możemy go dodać. Wtedy optymalne rozwiązanie to rozwiązanie dla plecaka bez tego przedmiotu (komórka o jeden wiersz wyżej)

Podpunkt b) Jeśli przedmiot „mieści” się w plecaku, to trzeba sprawdzić, czy jego dodanie się opłaca. W tym celu szukamy maksimum z dwóch liczb, wartości „optymalnego” plecaka bez przedmiotu (komórka nad aktualną komórką czyli  $X[i-1, j]$ ), oraz wartości plecaka z komórki  $X[i-1, j-W_i]$  powiększonej o wartość  $C_i$
- 6) Finalnie gdy przeanalizujemy wszystkie dostępne przedmioty optymalna „wartość” plecaka jest w prawym dolnym rogu tabeli  $X$ .

Przykład. Maksymalna wartość zawartości plecaka o „rozmiarze” 20kg wypełnionego przedmiotami z pliku PlecakTest.txt to 590.

Zadanie. Ile wynosi maksymalna wartość przedmiotów w plecaku o rozmiarze 24kg, jeśli wypełnimy go przedmiotami z pliku PlecakZadanie.txt. Które to będą przedmioty (proszę podać np. które linijki z pliku tekstowego lub kombinacje masa-wartość).