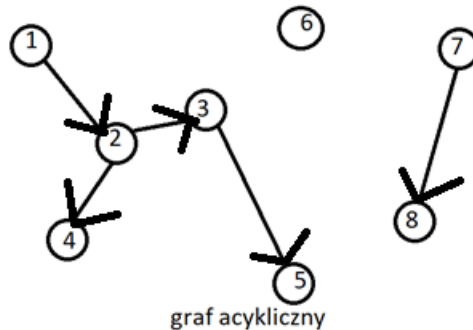
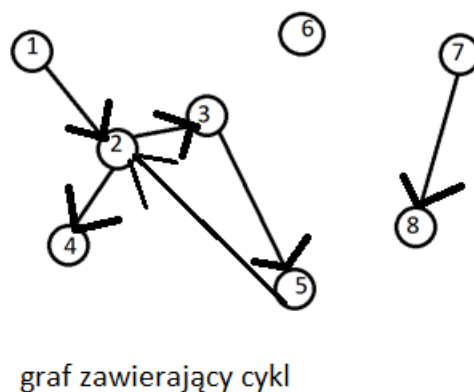


Co to jest graf acykliczny?

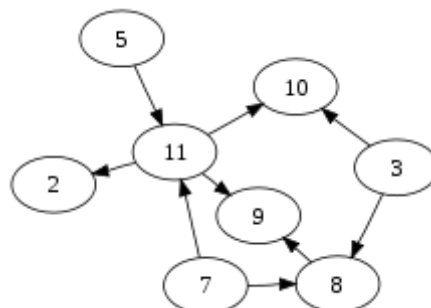
W grafie acyklicznym nie istnieje żaden wierzchołek, dla którego istniałaby ścieżka, która rozpoczynałaby się w tymże wierzchołku i pozwalałaby do niego wrócić. Na rysunku poniżej mamy przykład skierowanego grafu acyklicznego.



Natomiast na poniższym rysunku mamy graf zawierający cykl (wierzchołki 2,3,5). Zatem nie jest to graf acykliczny.



Poniższy graf skierowany jest acykliczny (zdjęcie z Wikipedii):



Co to jest sortowanie topologiczne?

- 1) Sortować topologicznie możemy jedynie skierowane grafy acykliczne.
- 2) Sortowanie topologiczne polega na uporządkowaniu (wszystkich) wierzchołków grafu wg pewnego schematu przy czym często wiele rozwiązań spełnia ten schemat.
- 3) **Jeśli istnieje krawędź łącząca wierzchołki x oraz y to po sortowaniu topologicznym wierzchołek x znajdzie się przed y (innymi słowy w wyniku y nie znajdzie się przed x)**

Sortowanie topologiczne można sobie wyobrazić jako tworzenie kolejności instalacji pakietów w linuxie. Wiadomo, że istnieją pakiety, które do swojego działania wymagają pakietów zależnych. Zatem nie można ich zainstalować przed zainstalowaniem tychże pakietów zależnych.

Weźmy taki przykład. Chcemy zainstalować pakiety A, B, C. Pakiet A wymaga do działania pakietu D (który sam wymaga pakietu F). Pakiet B wymaga do działania pakietu E. Pakiet C nie wymaga żadnych dodatkowych pakietów. Zatem możemy bezproblemowo instalować pakiety m.in. w następujących kolejnościach:

F, D, A, E, B, C

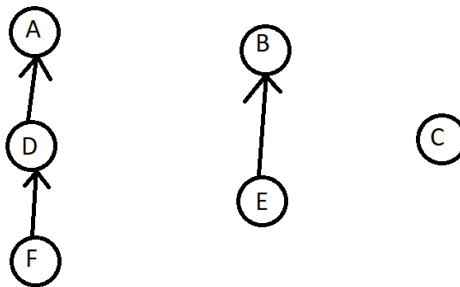
C, F, D, A, E, B

C, E, F, D, B, A (itd.)

Natomiast kolejność

D, A, E, B, C, F jest zła, bo pakiet D wymaga pakietu F, który teraz jest na końcu.

Poniżej grafowa reprezentacja wyżej opisanej zależności:



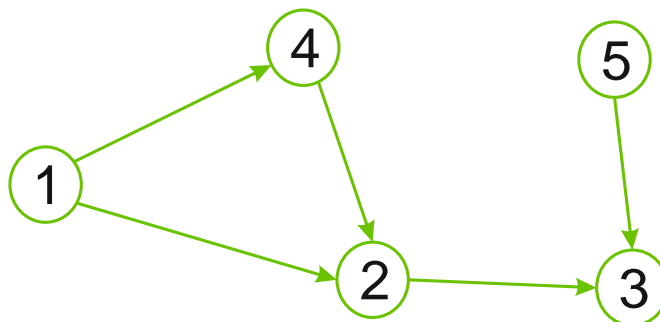
Istnieje kilka implementacji takiego sortowania. Poniżej jedna z nich.

- 1) Dla każdego wierzchołka grafu policzmy, ile krawędzi do niego WCHODZI (to jest coś nowego, dotychczas raczej interesowały nas krawędzie wychodzące z wierzchołkami a nie do niego wchodzące).
- 2) Utwórzmy kolejkę Q, w której umieścimy wszystkie wierzchołki, do których nie wchodzi żadna krawędź.
- 3) Dopóki kolejka nie jest pusta:

- a) Usuwaemy pierwszy element kolejki (wklejając go do listy wyników sortowania), nazwijmy go elementem A.
- b) Dla każdego z sąsiadów usuwanego elementu (A) obniżmy liczbę wchodzących do niego krawędzi o 1. Sprawdźmy też, ile krawędzi (po zmniejszeniu) wchodzi do tego sąsiedniego wierzchołka. Jeśli 0, to dodajmy ten sąsiedni wierzchołek na koniec kolejki.
- 4) Jeśli po opróżnieniu kolejki liczba elementów w wyniku sortowania jest równa liczbie wierzchołków grafu, to mamy wynik sortowania topologicznego. Jeśli jest mniejsza, to w grafie są cykle 😊

Przykład

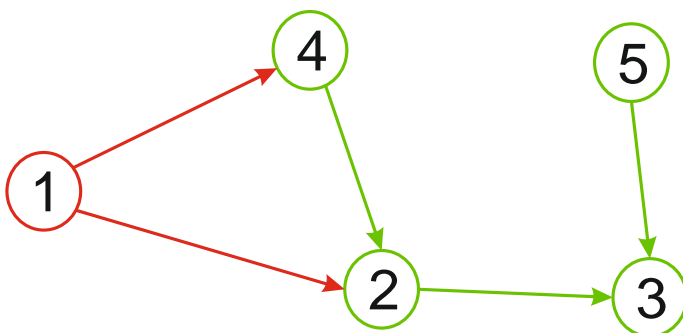
Weźmy taki graf



Wierzchołek	1	2	3	4	5
Liczba krawędzi wchodzących	0	2	2	1	0

Zatem kolejka wierzchołków bez krawędzi wchodzących to $Q = \{1, 5\}$.

Usuwaemy z kolejki 1 (przenosimy do wyniku sortowania $W = \{1\}$). Teraz na grafie niżej na czerwono zaznaczę wierzchołek oraz krawędzie, które są usuwane z dalszej analizy (innymi słowy czerwone krawędzie nie są wliczane do krawędzi wchodzących).

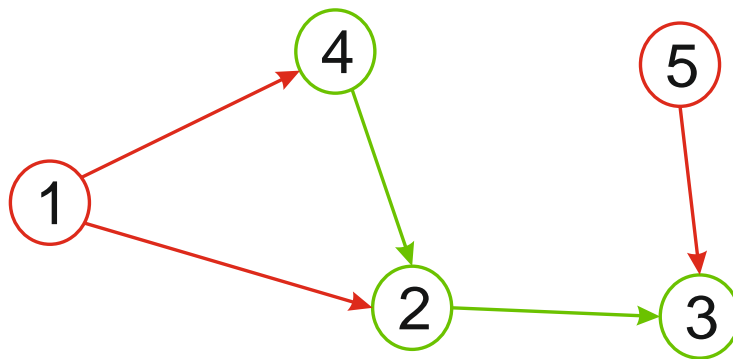


Teraz nowa tabelka będzie wyglądać tak

Wierzchołek	1	2	3	4	5
Liczba krawędzi wchodzących	0	1	2	0	0

Teraz liczba krawędzi wchodzących do 4 jest równa 0 więc dodajemy ten wierzchołek do kolejki (w kolejce nie ma już 1 bo ją usunęliśmy wcześniej) $Q = \{5, 4\}$.

Usuwanie z kolejki 5. Zatem $W = \{1, 5\}$. Teraz graf ma postać

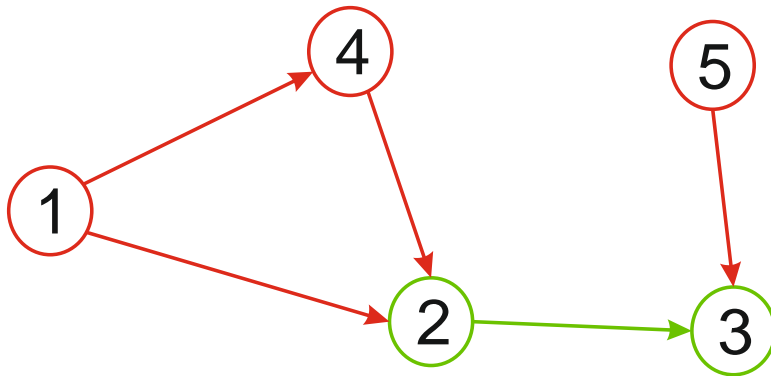


Teraz tabelka wygląda tak

Wierzchołek	1	2	3	4	5
Liczba krawędzi wchodzących	0	1	1	0	0

$Q = \{4\}$.

Usuwanie zatem 4 z kolejki $W = \{1, 5, 4\}$.

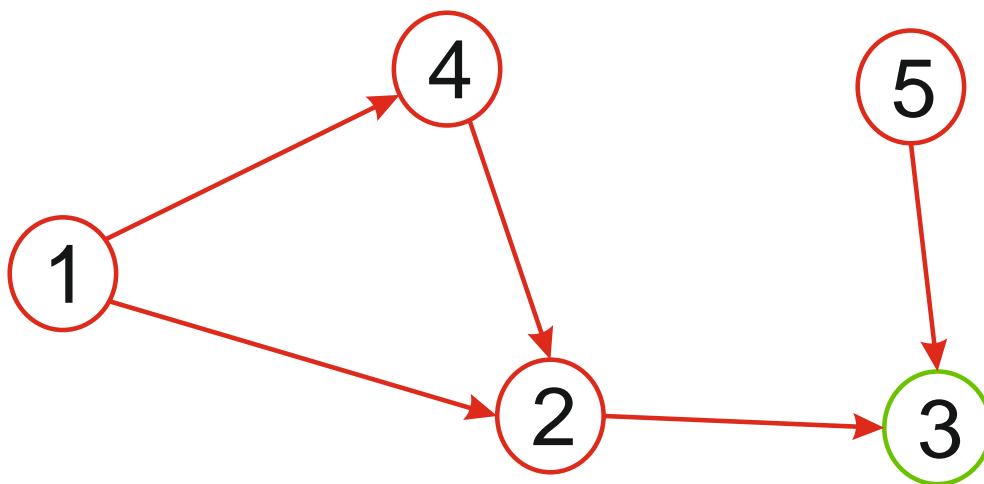


Tworzymy nową tabelkę

Wierzchołek	1	2	3	4	5
Liczba krawędzi wchodzących	0	0	1	0	0

Do kolejki wchodzi 2

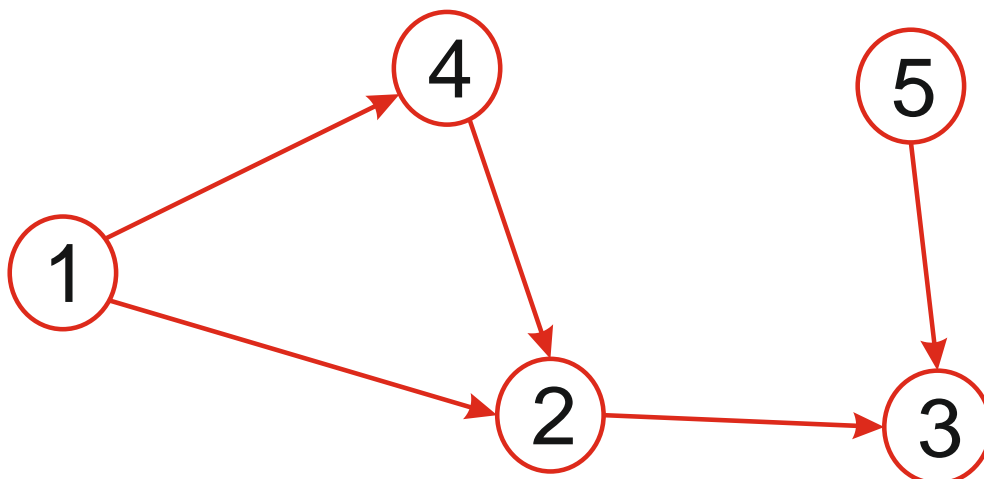
$Q = \{2\}$, którą usuwamy $W = \{1, 5, 4, 2\}$.



Wierzchołek	1	2	3	4	5
Liczba krawędzi wchodzących	0	0	0	0	0

Do kolejki wchodzi 3

$Q = \{3\}$, którą usuwamy $W = \{1,5,4,2,3\}$.



Wierzchołek	1	2	3	4	5
Liczba krawędzi wchodzących	0	0	0	0	0

Nie mamy już co dodawać do kolejki. Jest więc ona pusta a zgodnie z algorytmem w kolejnym kroku próbujemy ją opróżnić a nie ma już z czego. Zatem algorytm się skończył. Na liście W mamy 5 elementów, graf też miał 5 elementów więc jest acykliczny. Przykład wyniku sortowania topologicznego tego grafu to 1,5,4,2,3.