

Projekt: budownictwo

Dominika Ochalik

2024-01-18

SPIS TREŚCI

Temat projektu	1
1. Wymiary pokoju i warianty umieszczenia grzejnika	1
Równanie i założenia	2
Równanie opisujące rozchodzenie się temperatury	2
Warunki brzegowe i funkcja opisująca temperaturę na dworze	3
Temperatura grzejnika	3
Schemat numeryczny	4
Wykresy: porównanie umiejscowień grzejnika	5
Wykresy: porównanie temperatury, gdy zmieniamy temperaturę grzejnika	7
Wnioski	8

Temat projektu

Projekt nr 1 z Modelowania Deterministycznego dotyczy ogrzewania pokoju zimą. Zostały rozpatrzone dwie propozycje umieszczenia grzejnika, a następnie używając równania ciepła ustalono, w którym przypadku pokój jest lepiej ogrzewany. Następnie dla pokoju, który był lepiej ogrzewany przeanalizowano, jak wpłynie na jakość ogrzewania zmiana temperatury grzejnika w ciągu dnia.

1. Wymiary pokoju i warianty umieszczenia grzejnika

Przyjmujemy następujące wymiary:

- długość pokoju: 4.5m,
- szerokość pokoju: 2.5m,
- szerokość okna: 1.5m,
- szerokość grzejnika: 1m.

Pokój wyobrażamy sobie jako płaszczyznę $[0 ; 2.5] \times [0 ; 4.5]$. Położenie grzejnika będziemy opisywać poprzez podanie położenia środka grzejnika, analogicznie położenie okna.

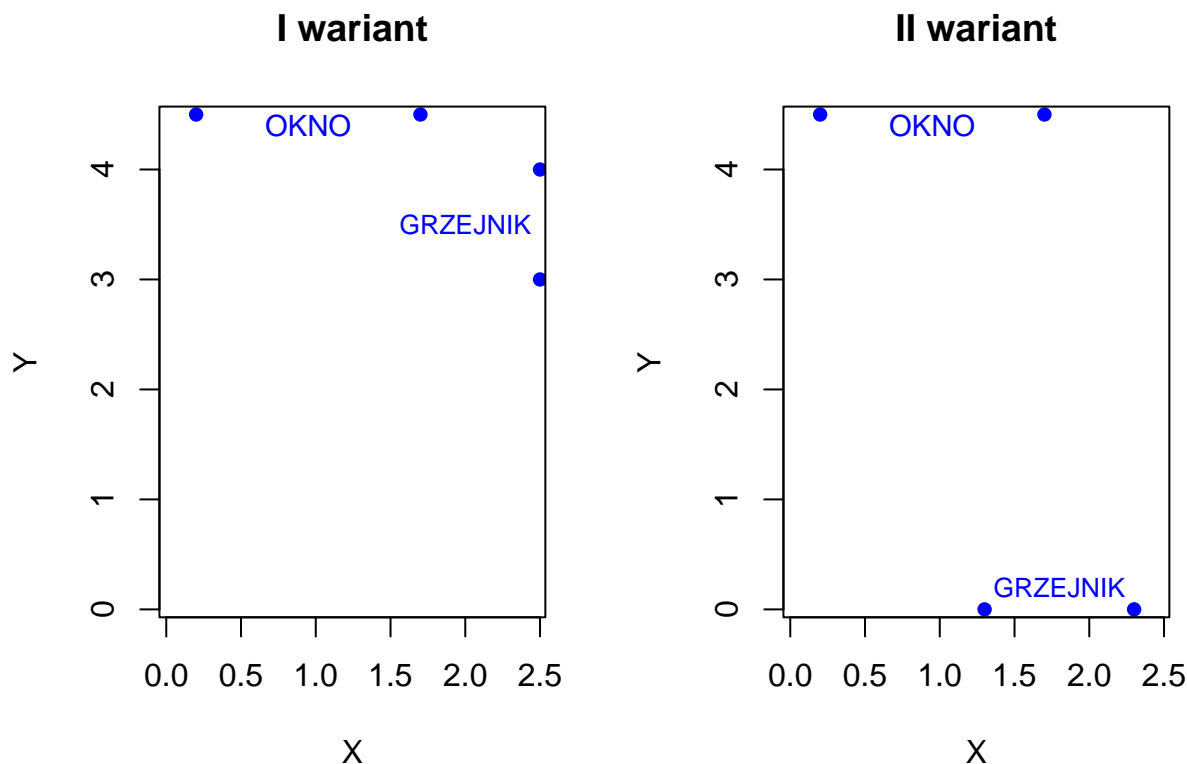
Położenie okna jest stałe i równe $[0.95 ; 4.5]$.

Położenie grzejnika:

- I wariant: $[2.5 ; 3.5]$,

- II wariant: $[1.8, 0]$ (grzejnik jest na ścianie naprzeciwko okna).

Zobaczmy to na ilustracji:



Równanie i założenia

Równanie opisujące rozchodzenie się temperatury

Niech $u = u(x, y, t)$ będzie funkcją temperatury w położeniu $[x, y]$ i chwili t .

Mamy następujące równanie przewodnictwa cieplnego:

$$u_t = D \cdot \Delta u$$

Można je zapisać równoważnie:

$$u_t = D \cdot (u_{xx} + u_{yy})$$

D to stała, która opisuje, jak szybko rozchodzi się temperatura. W tym projekcie przyjmujemy, że $D = 1$.

Warunek początkowy opisujący temperaturę w pokoju w chwili $t=0$:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

Zakładamy, że $u_0(x, y) = 15$.

Warunki brzegowe i funkcja opisująca temperaturę na dworze

Warunki brzegowe:

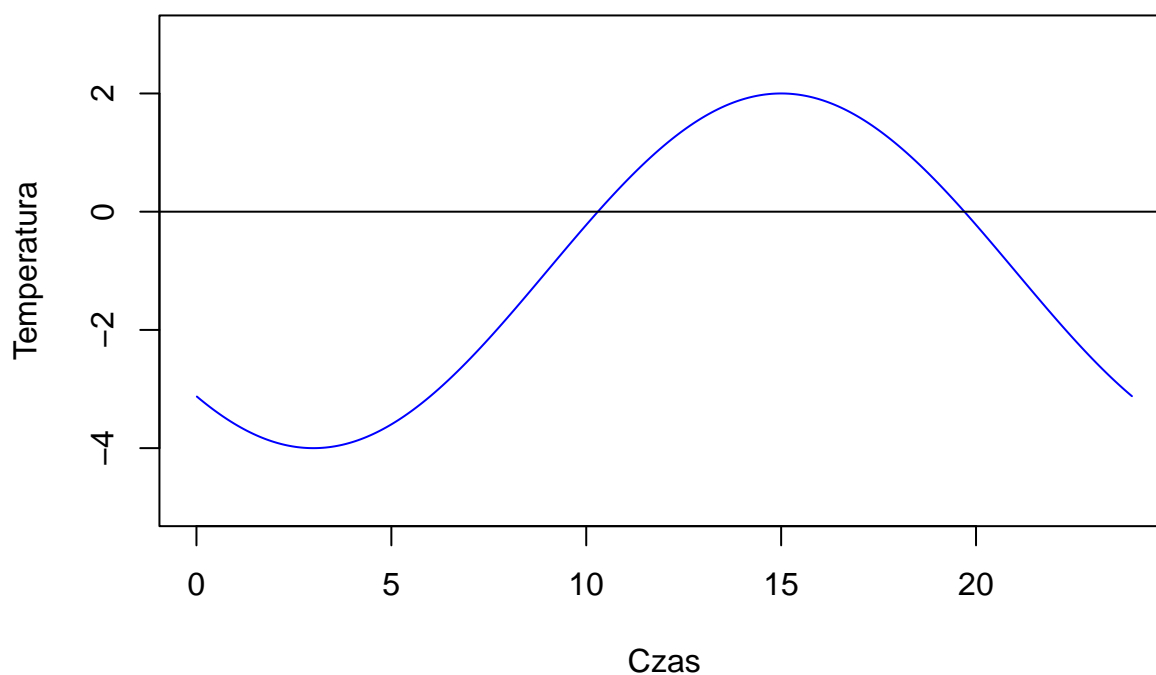
- przepływ temperatury przez ściany jest równy 0, co zapisujemy jako $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$,
- okna mają temperaturę $g(t) + 15$, gdzie $g(t)$ to funkcja opisująca temperaturę na dworze.

W tym projekcie zakładamy, że temperaturę mierzymy w skali Celsjusza, a także, że $g(t)$ wyraża się wzorem:

$$g(t) = 3 \cdot \sin\left(\frac{t\pi}{12} - \frac{3\pi}{4}\right) - 1$$

Zobaczmy wykres funkcji $g(t)$ na przedziale $[0, 24]$:

Wykres zmiany temperatury na dworze



Przedział $[0, 24]$ odpowiada jednej dobie.

Mając wzór funkcji, możemy wywnioskować, że:

- dla $t = 3$ funkcja osiąga najmniejszą wartość równą -4,
- dla $t = 12$ funkcja osiąga największą wartość równą 2.

Temperatura grzejnika

Na początku zakładamy, że temperatura grzejnika jest stała przez cały dzień i równa 30 stopni Celsjusza.

Następnie zobaczymy, jak zmieni się temperatura w pokoju, gdy będziemy zmieniać temperaturę grzejnika.

Schemat numeryczny

Ze schematu Eulera otrzymujemy następujące przybliżenie u_t :

$$u_t = \frac{u(x, y, t + h_t) - u(x, y, t)}{h_t}$$

Podstawiając do równania ciepła, otrzymujemy:

$$u(x, y, t + h_t) = u(x, y, t) + h_t(u_{xx} + u_{yy})$$

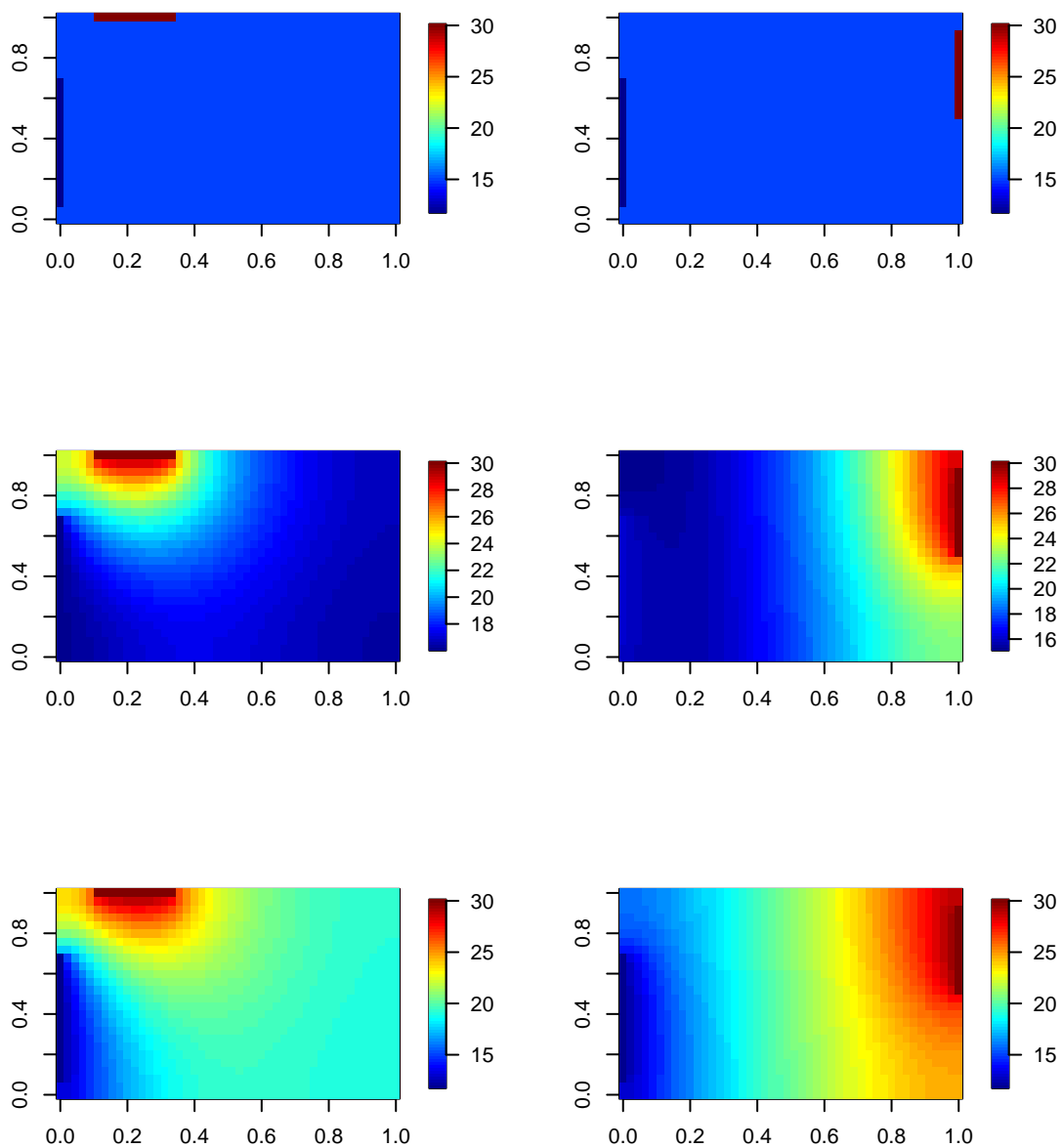
Pochodne u_{xx} i u_{yy} przybliżamy następująco:

$$u_{xx} = \frac{u(x + h_x, y, t) + u(x - h_x, y, t) - 2u(x, y, t)}{(h_x)^2}$$

$$u_{yy} = \frac{u(x, y + h_y, t) + u(x, y - h_y, t) - 2u(x, y, t)}{(h_y)^2}$$

Wykresy: porównanie umiejscowień grzejnika

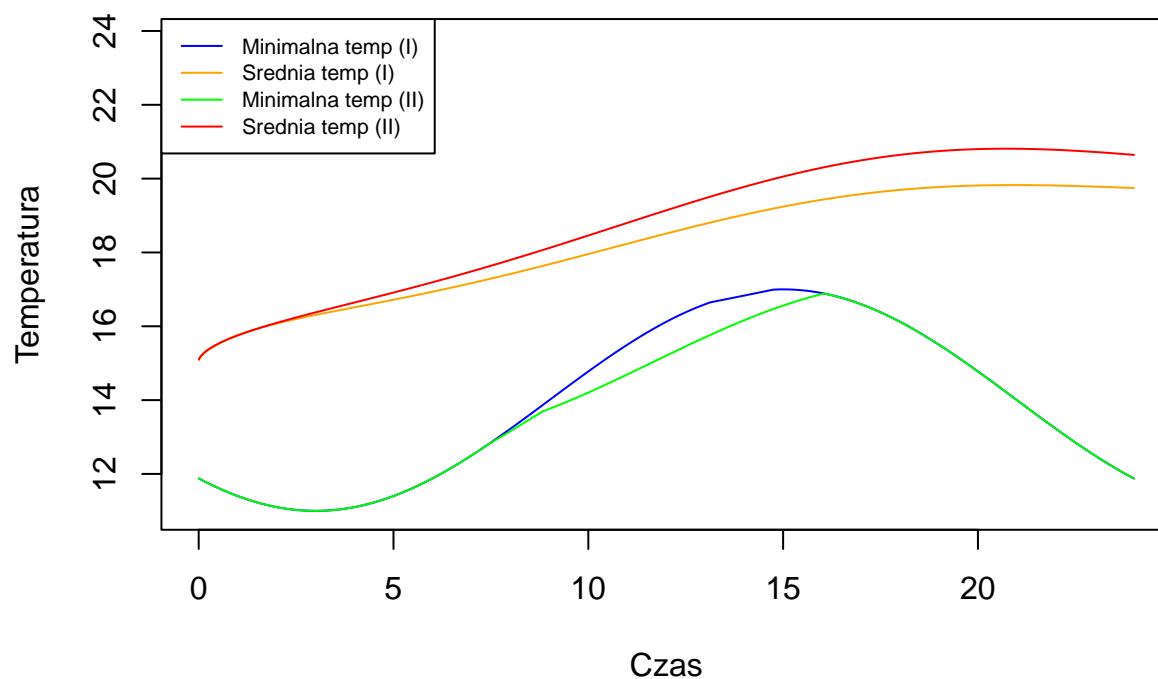
Zobaczmy mapy ciepła dla obu ustawień grzejnika w chwili $t=0$ (pierwszy wiersz), $t=12$ (drugi wiersz) oraz $t=24$ (osttani wiersz):



Widzimy, że dla $t=12$, w przypadku umieszczenia grzejnika naprzeciwko okna, najniższa temperatura nie jest przy oknie. W przypadku drugiego wariantu najniższa temperatura jest przy oknie. To ciekawe zjawisko zobaczymy też na wykresie minimalnej i średniej temperatury.

Zobaczmy teraz wykresy temperatury 3D, najpierw dla obu pokoi w chwili $t=0$ (pierwszy wiersz), a następnie dla $t=24$:

Spójrzmy jeszcze na wykresy minimalnej i średniej temperatury w pokoju:



Minimalna temperatura przez większy okres czasu jest taka sama. Jednak przez pewien czas (od ok 8 do 15) minimalna temperatura w pokoju z II wariantem faktycznie jest niższa niż w pokoju z I wariantem.

Patrząc na mapy ciepła przedstawione na poprzednich stronach, możemy wywnioskować, że najniższa temperatura w pokoju I utrzymuje się tam, gdzie jest okno. Zatem niebieski wykres możemy interpretować jako wykres temperatury okna. W drugim wariantcie przez pewien okres czasu temperatura przy oknie jest wyższa niż w innych miejscach pokoju, dlatego widzimy, że zielony wykres przestaje się pokrywać z niebieskim.

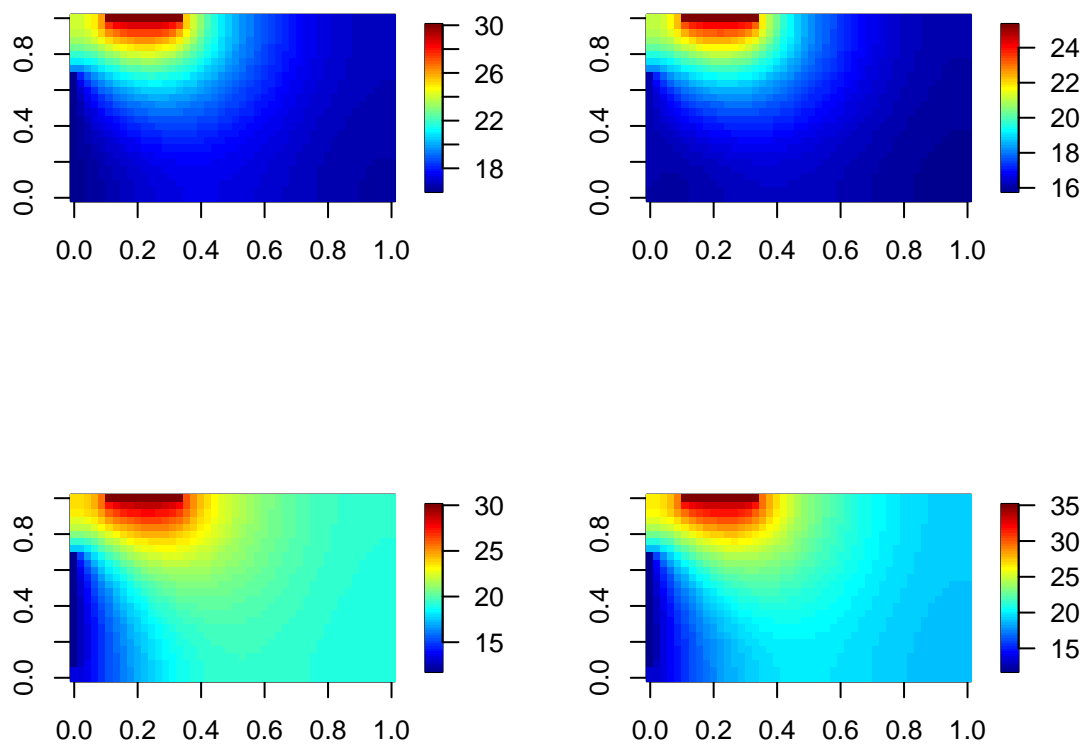
Średnia temperatura w obu pokojach rośnie, co świadczy o tym, że pokoje się nagrzewają. Wraz z upływem czasu tempo wzrastania średniej temperatury maleje, co oznacza, że temperatura się stabilizuje. Dla drugiego wariantu położenia grzejnika (dalej od okna) widzimy, że średnia temperatura w pokoju jest wyższa. Patrząc na wcześniejsze wykresy można zauważyć, że temperatura jest bardziej zróżnicowana niż w sytuacji, gdy grzejnik jest blisko okna.

Na tym etapie możemy wyciągnąć wnioski, że **I wariant ustawienia grzejnika (bliżej okna) jest lepszy**, ponieważ powoduje mniejsze różnice temperatur w pokoju, a średnia temperatura jest niewiele niższa od tej w drugim wariantcie.

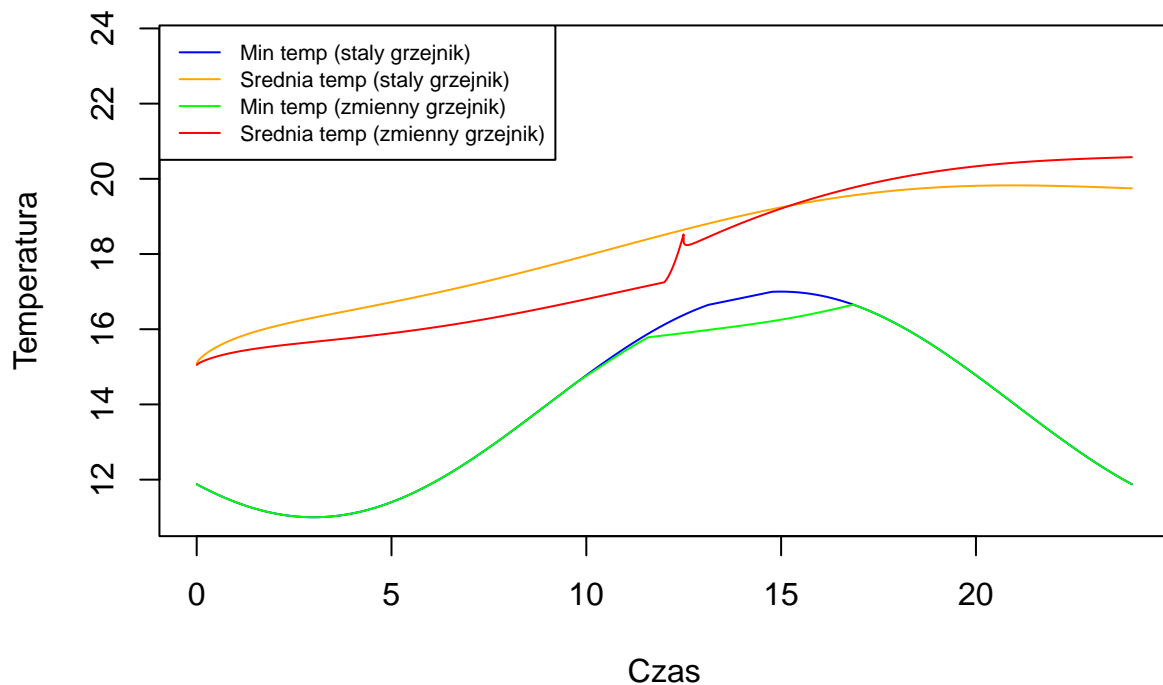
Wykresy: porównanie temperatury, gdy zmieniamy temperaturę grzejnika

Grzejnik ma najpierw stałą temperaturę równą 25 stopni, a następnie w połowie dnia zwiększamy temperaturę do 35 stopni. Zakładamy, że grzejnik stopniowo się nagrzewa i po pół godzinie osiągnie temperaturę 35 stopni.

Zobaczmy mapy ciepła dla I ustawienia grzejnika w chwili $T=12$ (przed zwiększeniem temperatury grzejnika) oraz $T=24$. Mapy po lewej stronie są dla stałej temperatury grzejnika, a po prawej dla zmiennej.



Spójrzmy jeszcze na wykresy minimalnej i średniej temperatury w pokoju:



W pierwszej połowie dnia średnia temperatura jest wyższa w przypadku stałej temperatury grzejnika równej 30 stopni, co jest dosyć oczywiste. Pod koniec dnia średnia temp jest wyższa dla zmiennej temperatury grzejnika.

Analizując wykresy minimalnej temperatury, zauważamy podobne zjawisko, co w poprzednio analizowanym przypadku: w pewnym przedziale czasowym (wtedy, gdy temperatura na dworze jest wysoka w skali doby), minimalna temperatura w pokoju ze zmienną temperaturą grzejnika jest mniejsza, niż w przypadku stałej temperatury. Analizując mapy ciepła widzimy, że o godzinie 12:00 najniższa temperatura nie jest przy oknie, tylko po drugiej stronie pokoju, która przy temp grzejnika 25 stopni nie nagrzała się na tyle, aby osiągnąć temp wyższą niż temp na dworze w tamtym momencie.

Wnioski

Najbardziej korzystnym rozwiązaniem jest umieszczenie grzejnika przy oknie ze stałą temperaturą równą 30 stopni. Zapewnia to możliwie najmniejsze amplitudy temperatur w pokoju, a także pozwala utrzymać pokój odpowiednio ogrzany.