# Wycena i analiza opcji w modelu dwumianowym

Marta Gacek, Dominika Ochalik

## 1. Wstęp

Niniejszy projekt dotyczy opcji europejskich i amerykańskich put oraz call. Celem jest ich wycena oraz analiza, a także porównanie między nimi. Zakładamy dwumianowy model rynku. Oznacza to, że akcja, która będzie przedmiotem transakcji, mająca w danej chwili pewną wartość, może w kolejnym "kroku" przyjąć jedną z dwóch możliwych wartości. W modelu zostanie przyjęte założenie o braku dywidend oraz o możliwości zainwestowania lub pożyczenia pieniędzy.

Projekt będzie się składać z kilku etapów. Pierwszym i kluczowym zadaniem jest implementacja wyceny opcji w drzewie dwumianowym oraz porównanie w tej kwestii opcji europejskich z amerykańskimi. Ważne jest również sprawdzenie w których momentach (węzłach drzewa) jest opłacalne wykonanie opcji amerykańskich.
Kolejnym etapem jest analiza wrażliwości cen opcji na zmianę różnych stosowanych w modelu parametrów, w tym na liczbę kroków. Wrażliwość sprawdzana jest dla każdego z czterech rodzajów badanych opcji.
Ostatni element projektu stanowi konstrukcja portfela zabezpieczającego wyceniane opcje.

W celu klarownego określenia wszystkich założeń opiszemy parametry, które zostaną użyte. Jak wiadomo z definicji tego typu modelu, akcja warta $S_t$ może w następnym kroku zyskać lub stracić na wartości, co odzwierciedlają parametry *u* oraz *d.* Innymi słowy, możemy uzyskać wielkość $uS_t$ lub $dS_t$, gdzie $u > 1,\ d < 1$. Parametr *r* określa stopę procentową wolną od ryzyka w oprocentowaniu ciągłym. Z kolei $\Delta t$ symbolizuje czas mijający podczas jednego kroku. Kolejne oznaczenia w modelu są zgodne ze standardowym nazewnictwem w dziedzinie wyceny opcji: $S_0$ jest określeniem ceny spot aktywa, $K$ to cena wykonania opcji, natomiast $T$ oznacza zapadalność (w latach).

Cała praktyczna część projektu (symulacje, tworzenie wizualizacji) zostanie przeprowadzona w środowisku R.

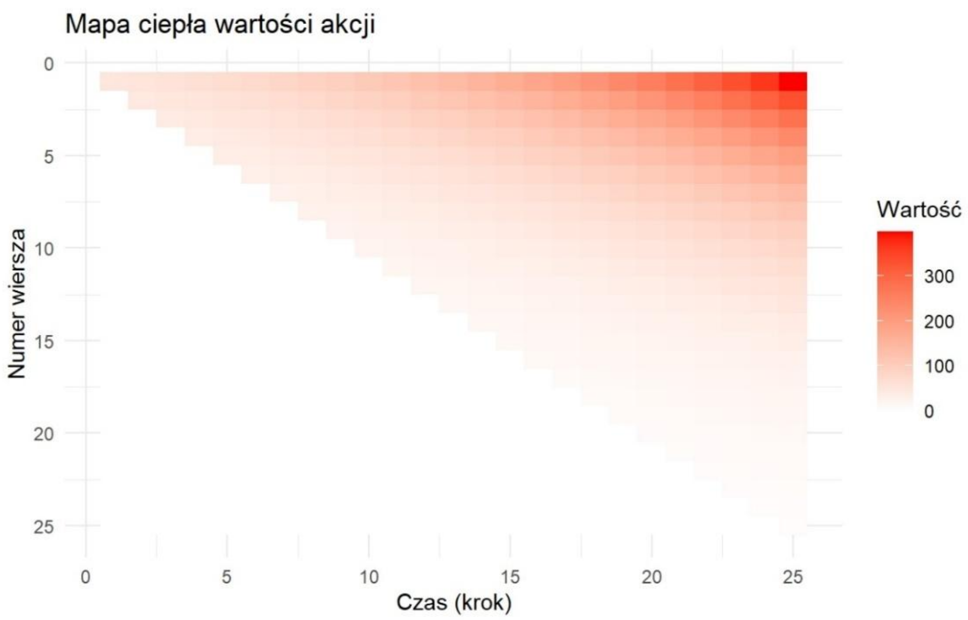
# 2. Wycena opcji

Zgodnie z powyższym planem rozpoczynamy od wyceny wszystkich czterech rodzajów opcji. Zostanie ona przeprowadzona przy użyciu następujących wartości parametrów:

- $S_0 = 50$;
- $K = 48$;
- $T = 2$;
- $r = 0.02$;
- $\Delta t = \frac{1}{12}$;
- $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$;
- $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$;
- $\sigma = 0.3$.

Po stworzeniu implementacji drzewa dwumianowego i przeprowadzeniu wyceny otrzymujemy w rezultacie macierz z wynikami. W celu jej przejrzystego zobrazowania posłużymy się mapą ciepła. Poniżej przedstawione są wizualizacje dla poszczególnych opcji.

## 2.1. Wartość akcji



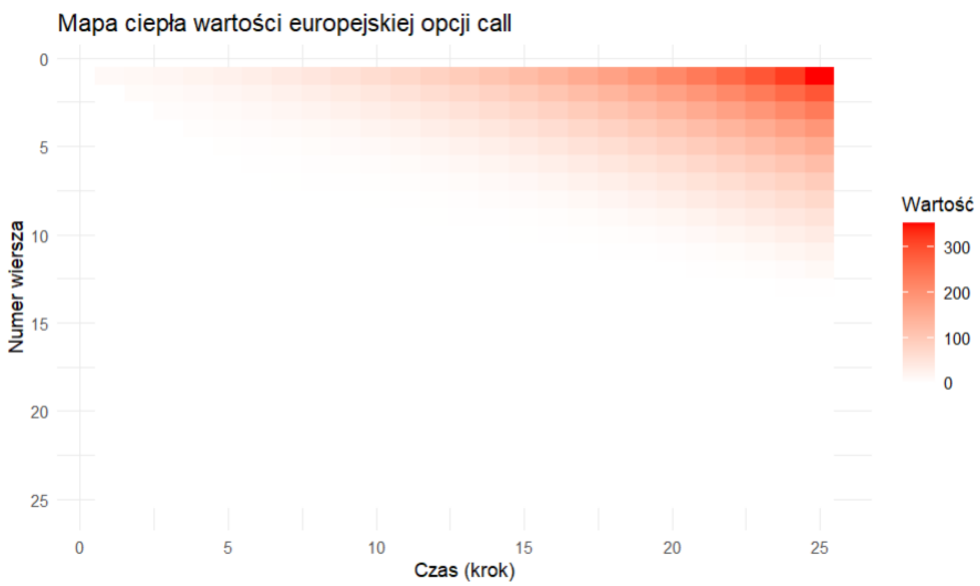

Ilustracja 1 – mapa ciepła dla wartości akcji

Analizując powyższą mapę ciepła widzimy, że wraz z liczbą ruchów w górę rośnie cena akcji. Najwyższą wartość osiąga w prawym górnym rogu i wynosi prawie **400**. Ponadto wiemy również, że wraz z upływem czasu zwiększa się różnica między największą a najmniejszą możliwą wartością akcji, co można zaobserwować na powyższym wykresie.

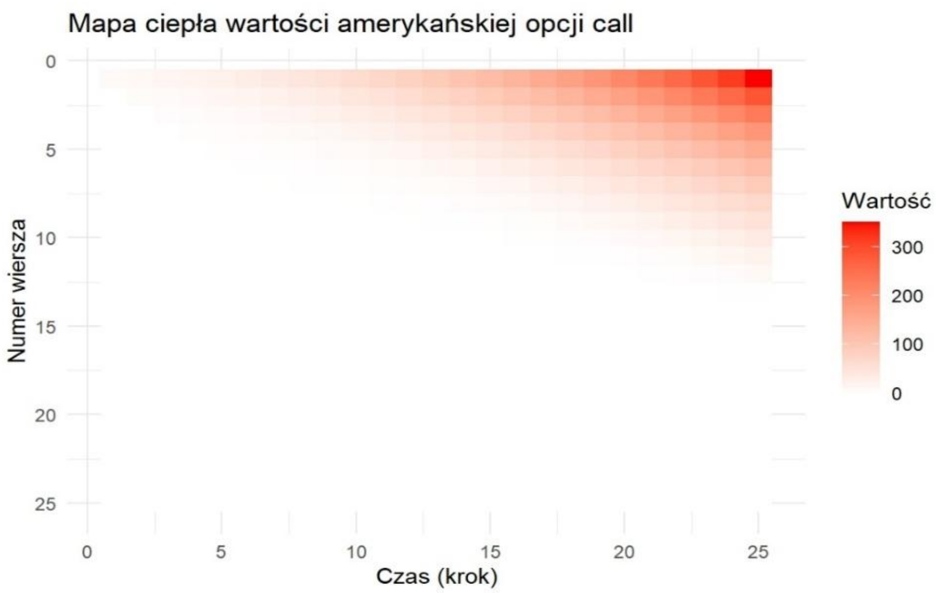
Wiedząc, jak zmienia się cena akcji, przystępujemy do wyceny opcji: najpierw europejskich i amerykańskich call, a następnie obu opcji put.

## 2.2. Opcje europejskie i amerykańskie call - porównanie

Poniżej przedstawione są dwie mapy ciepła, odnoszące się do wartości kolejno opcji europejskiej oraz amerykańskiej call.




Ilustracja 2 – mapa ciepła dla opcji europejskiej call



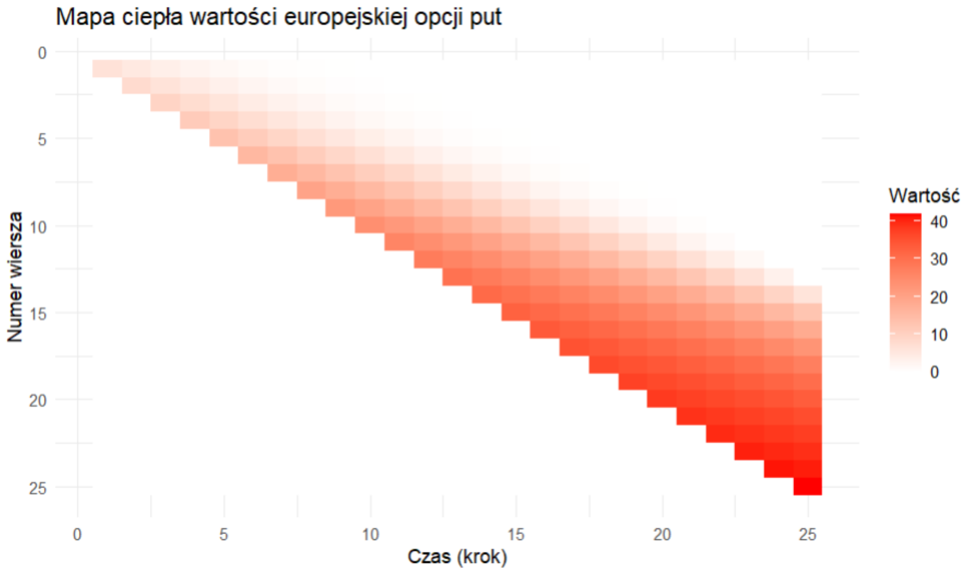

Ilustracja 3 – mapa ciepła dla opcji amerykańskiej call

Widzimy, że mapa ciepła wartości amerykańskiej opcji call jest taka sama jak dla opcji europejskiej. Porównując konkretne wartości uzyskane w każdym kroku możemy potwierdzić, że są one dokładnie takie same dla obu opcji, a w chwili 0 wynoszą w przybliżeniu **10.19**. Oznacza to, że opcję amerykańską call opłaca się wykonać dopiero w chwili T, zatem zachowuje się tak samo jak opcja europejska, której nie możemy wcześniej wykonać.

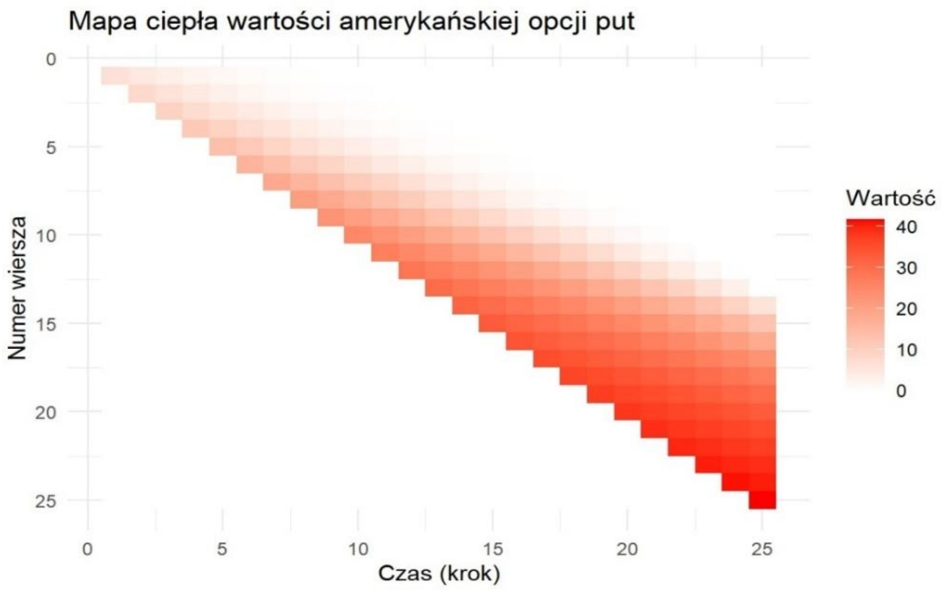
Jak wyraźnie widać, w obu przypadkach uzyskane wyniki tworzą macierz górnotrójkątną, której wartości są coraz większe im większy jest krok i im wyżej posuwamy się w wierszach. Jest to odzwierciedlenie zachowania modelu, w którym - jak wiemy – wraz z liczbą ruchów w górę rosną ceny. W dolnej części macierzy wypłata jest równa zero, ponieważ taka jest wartość dla opcji call przy $S_t < K$.

## 2.3. Opcje europejskie i amerykańskie put - porównanie

Zestawimy teraz ze sobą mapy ciepła będące efektami wyceny opcji put – europejskiej oraz amerykańskiej.




Ilustracja 4 - mapa ciepła dla opcji europejskiej put

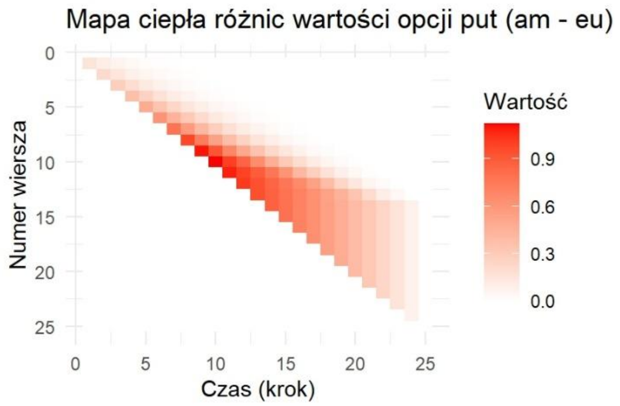



Ilustracja 5 – mapa ciepła dla opcji amerykańskiej put

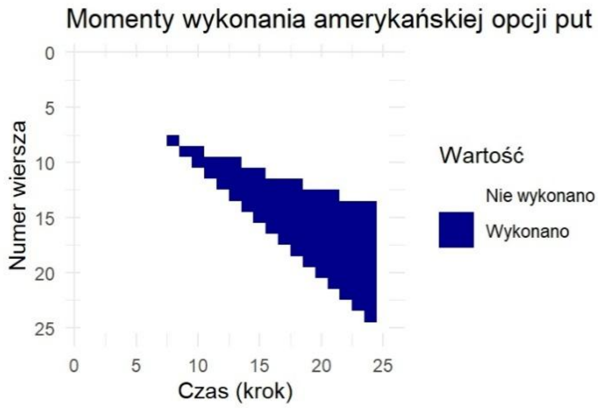
W tym przypadku wyniki również tworzą macierz górnotrójkątną, jednak największe wartości znajdują się w prawej dolnej części wykresu. Wynika stąd, że wartość opcji put jest tym większa, im niższa jest cena aktywa $S_t$.

Porównując obie mapy ciepła nie widzimy istotnych różnic między nimi, jednak sprawdzając dokładne wartości wiemy, że wartość amerykańskiej opcji put wynosi **6.47**, natomiast europejskiej opcji put: **6.31**. Oznacza to, że opcję amerykańską opłaca się wykonać wcześniej niż w chwili T.

Sprawdźmy zatem, jak wygląda mapa ciepła różnic wartości opcji oraz kiedy wykonano opcję amerykańską put:




Ilustracja 6 – mapa ciepła różnic wartości opcji put




Ilustracja 7 – momenty wykonania opcji amerykańskiej put

Analizując Ilustrację 6 możemy zauważyć, że największe różnice w wartościach opcji są w środkowej części wykresu. Możemy podejrzewać, że właśnie wtedy wykonujemy opcję amerykańską, co znajduje swoje odzwierciedlenie na wykresie momentów wykonania opcji. Wartości obu opcji są takie same w prawej górnej części wykresu, czyli wtedy, kiedy wartości opcji są równe 0 i kiedy cena aktywa jest duża.

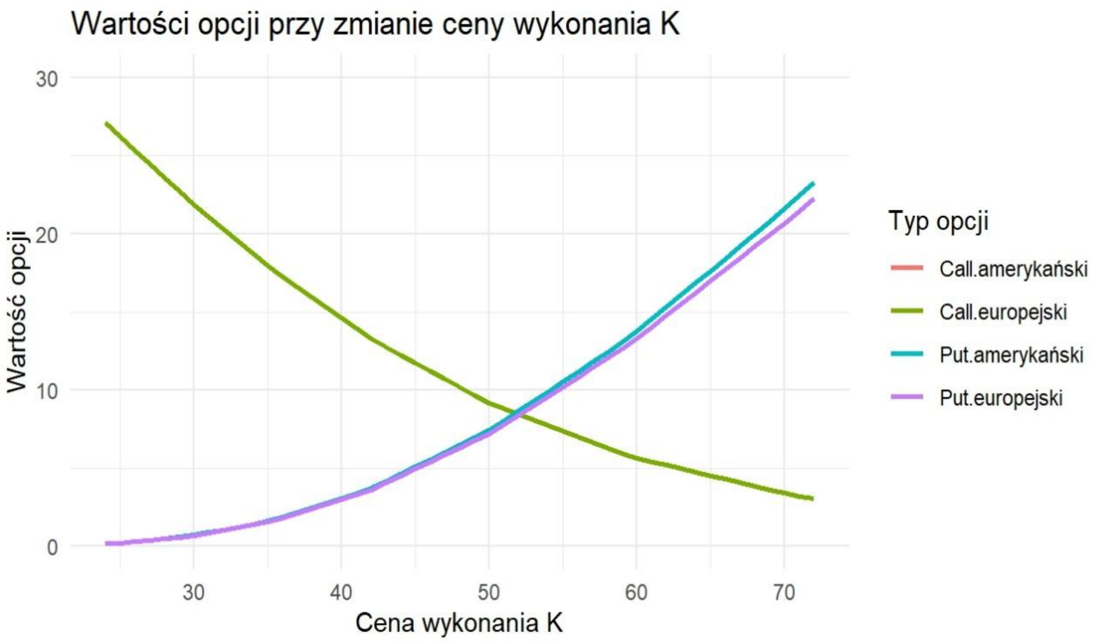
Gdy wykonujemy opcję amerykańską put, to znaczy, że zysk natychmiastowy ze sprzedaży aktywa jest większy niż wartość oczekiwana z trzymania jej dalej. Wiemy już, że wraz z poruszaniem się w dół drzewka cena akcji maleje. Możemy zatem wywnioskować, że wykonujemy opcję amerykańską put w momencie, kiedy cena aktywa jest dostatecznie mała: wtedy wartość opcji wykonanej w chwili t jest równa $\max(K - S_t, 0)$. Faktycznie: im mniejsza cena akcji w chwili t, tym większy jest zysk natychmiastowy z wykonania opcji put.

# 3. Analiza wrażliwości ceny wszystkich rozważanych opcji

Wiedząc już, jakie są wartości poszczególnych opcji, przystępujemy do ważnej części projektu: badania wrażliwości cen opcji ze względu na zmiany wartości parametrów $K, T, S_0, \sigma, r,$ a także długość jednego kroku w modelu, czyli $\Delta t$.

## 3.1. Analiza wrażliwości ze względu na cenę wykonania K

Rozpoczniemy od zbadania w jakim stopniu zmiana ceny wykonania może wpłynąć na wartość opcji. Sprawdzimy to na każdym z czterech omawianych rodzajów.



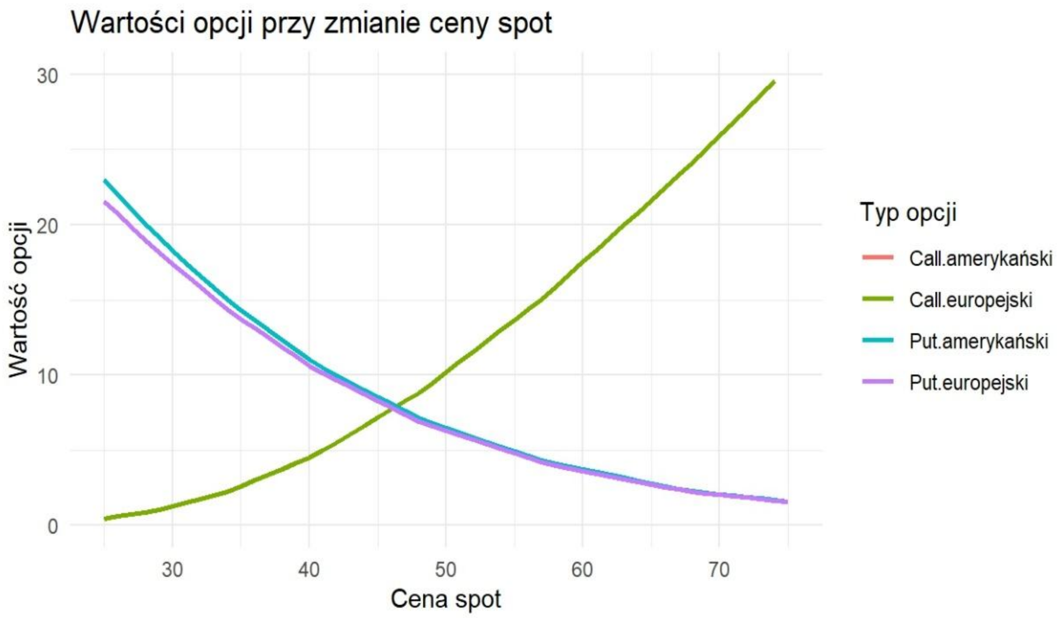

Ilustracja 8 - wartości opcji w zależności od ceny wykonania

Ze względu na takie same wartości opcji call w obu wersjach, zarówno na tym, jak i na wszystkich następnych wykresach odpowiadające im linie się pokrywają. Jak można zauważyć, wartości opcji call maleją. Jest to spowodowane strukturą i sposobem działania tych opcji. Z perspektywy osoby kupującej im niższa jest cena, tym lepiej. Zatem opcja coraz bardziej traci dla nas wartość w miarę wzrostu ceny.

Z analogicznego powodu wartości obu opcji put wzrastają. Strona sprzedająca chce zarobić jak najwięcej, więc wysoka cena wykonania oznacza większe zyski. Można zaobserwować, że put amerykański przyjmuje nieco większe wartości od europejskiego, a różnica ta wzrasta w miarę wzrostu ceny wykonania. Jest to naturalnym zjawiskiem, ponieważ opcje amerykańskie z zasady są nieco więcej warte, a więc droższe.

## 3.2. Analiza wrażliwości ze względu na cenę spot

Sprawdzimy teraz wrażliwość wartości opcji pod względem ceny spot.



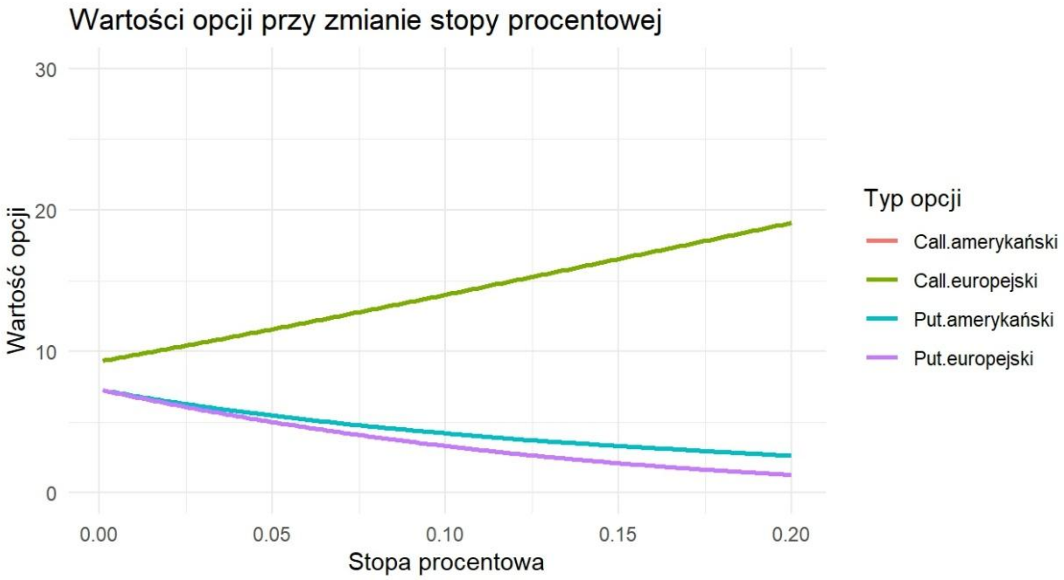

Ilustracja 9 - wartości opcji w zależności od ceny spot

Powyższy wykres wygląda jak lustrzane odbicie wykresu z poprzedniego podpunktu względem prostej $x = S_0 = 50$. Poprzednio zmienialiśmy parametr K, natomiast teraz badamy wpływ zmienności parametru $S_0$, od którego zależy przyszła cena akcji $S_T$. Przypomnijmy, że payoff opcji call wyraża się wzorem

$\max(S_T - K, 0)$, natomiast dla opcji put jest to $\max(K - S_T, 0)$.
Łatwo wywnioskować, że parametry K i $S_0$ mają przeciwstawny wpływ na wartości opcji. Wraz ze wzrostem ceny spot wartość opcji call rośnie, ponieważ jest wtedy większa szansa, że $S_T > K$. Odwrotnie jest w przypadku opcji put: im wyższa cena spot, tym mniejsza szansa, że w chwili T zajdzie $S_T < K$.

## 3.3. Analiza wrażliwości ze względu na stopę procentową

Zajmiemy się teraz wpływem wysokości stopy procentowej na wartości opcji.



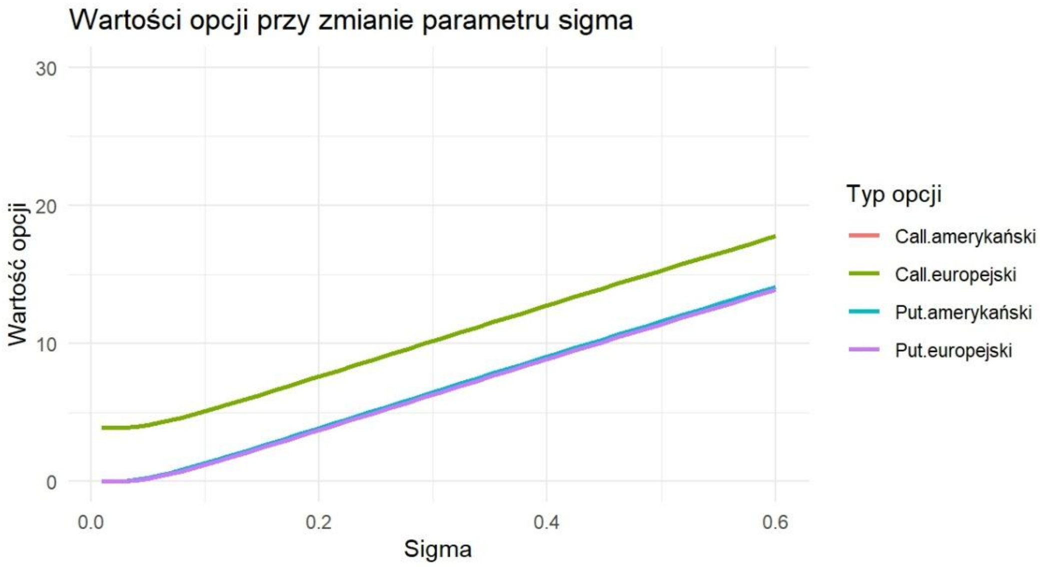

Ilustracja 10 - wartości opcji w zależności od stopy procentowej

Wiemy, że prawdopodobieństwo wzrostu ceny akcji w pojedynczym kroku opisuje parametr p zadany wzorem: $p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$. Widzimy, że jest to funkcja rosnąca względem parametru r, zatem wraz ze wzrostem stopy procentowej (i tym samym wzrostem wartości p), cena akcji będzie rosnąć z większym prawdopodobieństwem. Ponadto, większa cena akcji przy ustalonej cenie wykonania K oznacza większy zysk dla osoby kupującej. Zatem opcja call zyskuje wartość w miarę wzrostu ceny akcji. Możemy także powołać się na wzór opisujący payoff opcji call: jest to $\max(S_T - K, 0)$, czyli niemalejąca funkcja zmiennej $S_T$.

Widzimy, że opcja put zachowuje się odwrotnie: jej wartość maleje wraz ze wzrostem stopy procentowej. Z perspektywy osoby sprzedającej im większa wartość akcji przy ustalonej cenie wykonania K, tym mniejszy zysk. Nasze wnioski możemy poprzeć wzorem: payoff opcji put wyraża się poprzez $\max(K - S_T, 0)$, czyli nierosnącą funkcję względem parametru $S_T$.

## 3.4. Analiza wrażliwości ze względu na parametr sigma

Kolejnym parametrem, który przeanalizujemy, jest występujący we wzorach na $u$ oraz $d$ parametr $\sigma$, który opisuje zmienność przyszłych cen aktywa.




Ilustracja 11 - wartości opcji w zależności od parametru sigma

Zarówno wartości opcji call, jak i opcji put rosną wraz ze wzrostem parametru $\sigma$. Przypomnijmy, że $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ oraz $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Są to parametry, od których zależy jak bardzo cena akcji może wzrosnąć lub zmaleć w pojedynczym kroku. Możemy zaobserwować, że im większa zmienność, tym większa wartość parametru $u$, a zatem wartość akcji może być coraz wyższa. Wiemy już, że im większa cena akcji, tym wyższa wartość opcji call. Ponadto, patrząc na payoff opcji call, $\max(S_T - K, 0)$, widzimy, że rosnąca cena aktywa może dać nieograniczony zysk osobie kupującej.

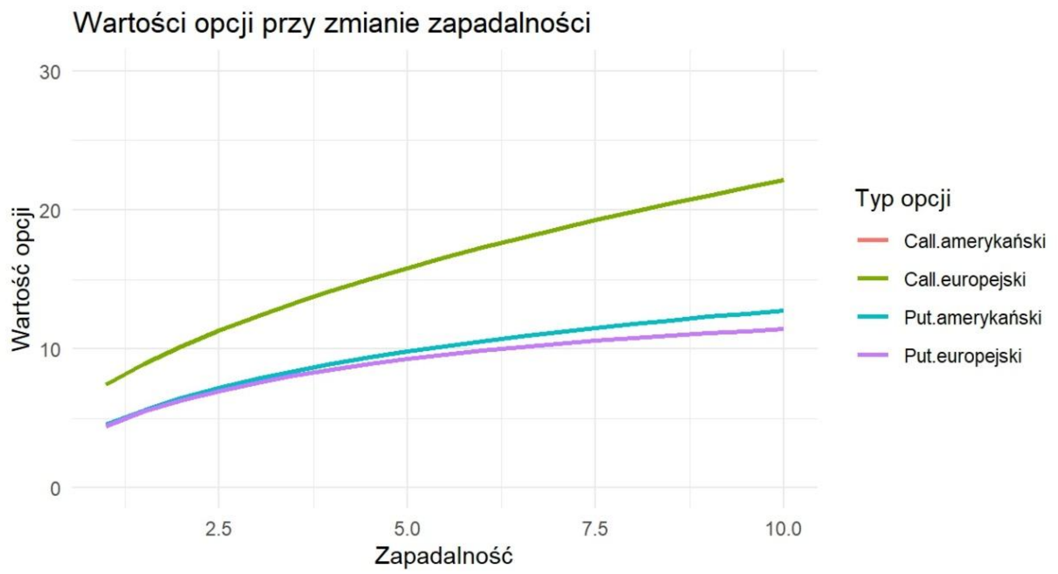
Widzimy też, że wraz ze wzrostem zmienności $\sigma$ wartość parametru *d* maleje, zatem cena aktywa może być coraz niższa (przy poruszaniu się w dół drzewka). Wiemy już, że im mniejsza cena akcji, tym wyższa wartość opcji put. Wnioskujemy zatem, że wzrost wartości $\sigma$ wpływa na korzyść wszystkich rozważanych opcji.

Co ciekawe, widzimy, że ceny wszystkich opcji rosną prawie równolegle. Dla opcji europejskich możemy to uzasadnić, powołując się na parytet Put-Call: $C_E - P_E = S_0 - K\, e^{-rT}$. Prawa strona równości nie zależy od $\sigma$, zatem jest stała niezależnie od wartości $\sigma$. Oznacza to, że różnica $C_E - P_E$ również musi być stała.

Istotne jest zauważenie, że opcje call osiągają wyższe wartości niż opcje put. Wiąże się to z tym, że opcja call może dać w rozważanym przypadku potencjalnie nieograniczony zysk, natomiast payoff opcji put może być co najwyżej równy K dla $S_T = 0$.

## 3.5. Analiza wrażliwości ze względu na zapadalność

Zajmiemy się jeszcze jednym ważnym parametrem, czyli zapadalnością opcji.




Ilustracja 12 - wartości opcji w zależności od zapadalności

Możemy zaobserwować, że wartości wszystkich rodzajów opcji rosną wraz z wydłużaniem zapadalności, jednak w nieco inny sposób niż w przypadku zmiany parametru zmienności. Wraz ze wzrostem T cena aktywa może przyjąć coraz większe albo coraz mniejsze wartości. Oznacza to większą wartość opcji call w przypadku wzrostu ceny akcji oraz większą wartość opcji put w przypadku spadku ceny akcji.

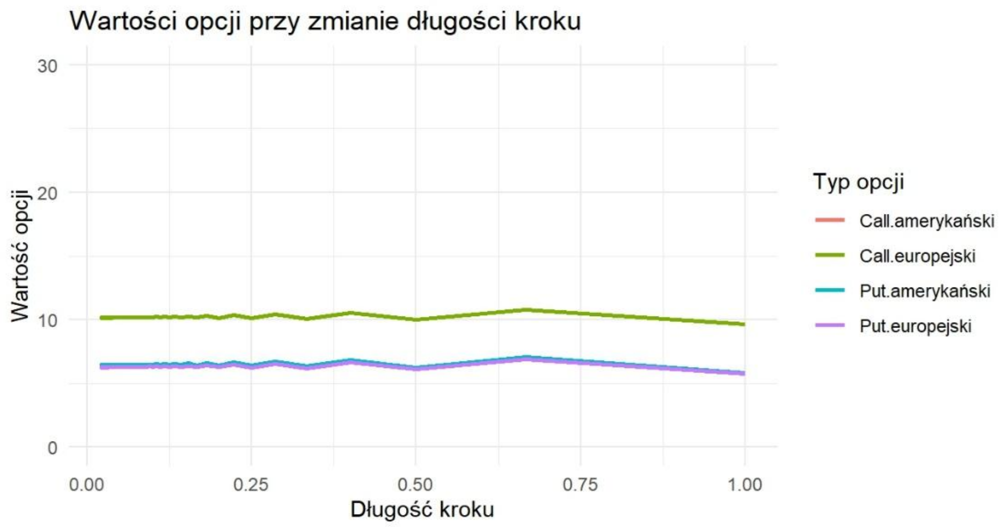
Widzimy również, że wartości opcji call przyjmują większe wartości niż opcje put, a także rosną szybciej. Wynika to z faktu, że potencjalny wzrost ceny akcji $S_T$ może dać kupującemu nieograniczony zysk, natomiast spadek ceny akcji może dać zysk sprzedającemu co najwyżej równy K dla $S_T = 0$. Ponadto, powołując się na parytet Put-Call dla opcji europejskich, czyli $C_E - P_E = S_0 - K\ e^{-rT}$,
widzimy, że wraz ze wzrostem T wartość lewej strony równania rośnie, zatem rośnie też różnica $C_E - P_E$.

Możemy zauważyć, że wraz z wydłużaniem zapadalności T opcja amerykańska put staje się coraz więcej warta w porównaniu do europejskiej opcji put, ponieważ wzrost T powoduje, że jest więcej momentów, w których można wykonać opcję.

## 3.6. Analiza wrażliwości ze względu na liczbę kroków w modelu

Ostatnim parametrem, którego wpływ na wartość opcji chcemy sprawdzić, jest liczba kroków i ich długość.

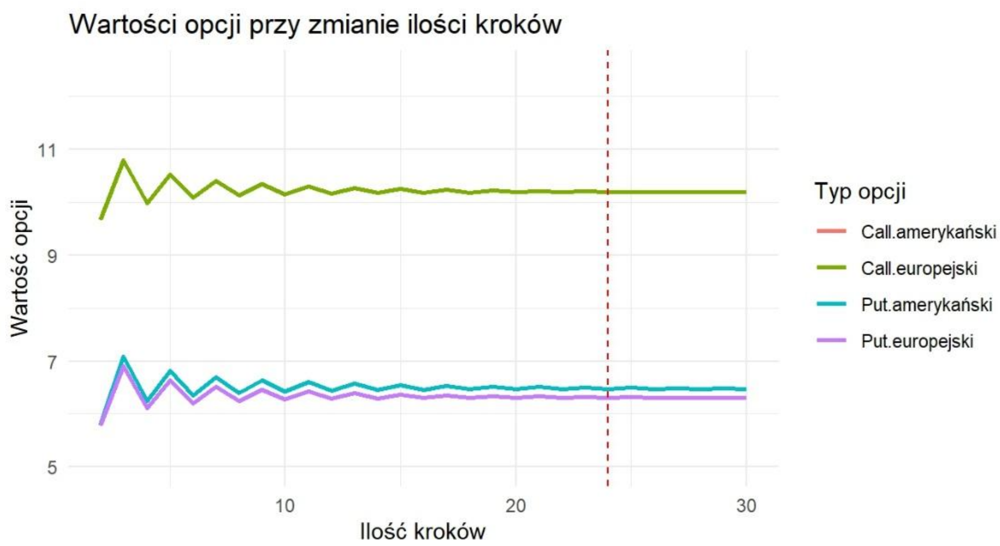

Ilustracja 13 – wartość opcji w zależności od ilości kroków




Ilustracja 14 – wartość opcji w zależności od długości kroków

Długość kroku, czyli wielkość parametru $\Delta t$, w oczywisty sposób wpływa na ilość kroków w modelu: im większa długość kroku, tym mniej kroków robimy w modelu. Analogicznie: im mniejsza długość kroku, tym więcej kroków w modelu.

Przyjrzyjmy się powyższemu wykresowi z bliska wraz z zaznaczoną ilością kroków równą 24, której używaliśmy do obliczeń w projekcie:




Ilustracja 15 – wartość opcji w zależności od ilości kroków

Możemy zauważyć, że wraz ze zmniejszaniem długości kroku ceny opcji się stabilizują. Wraz ze zmniejszaniem parametru $\Delta t$ liczba kroków rośnie, zatem czas do momentu zapadalności (czyli 2 lata) dzielimy na coraz mniejsze kawałki. Wyceny opcji w modelu dwumianowym są zbieżne do wycen z modelu Blacka – Scholesa, w którym czas jest ciągły. Rozważana ilość kroków równa 24 (odpowiadająca długości kroku $\Delta t = \frac{1}{12}$) wydaje się być optymalnym rozwiązaniem, ponieważ ceny opcji osiągają wtedy małe wahania, a liczba kroków wynosi jedynie 24.

Widzimy, że opcje call są droższe od opcji put. Dla opcji europejskich możemy to wyjaśnić, powołując się na parytet Put-Call: $P_E - C_E = K\,e^{-rT} - S_0$.

Łatwo zauważyć, że $K\,e^{-rT} < K$, zatem $Ke^{-rT} - S_0 < K - S_0 < 0$, ponieważ $K = 48$, $S_0 = 50$, co daje nam $P_E - C_E < 0$, czyli $C_E > P_E$.

Pozostaje wyjaśnić, dlaczego cena opcji amerykańskiej put jest niższa od ceny opcji amerykańskiej call. Zauważmy, że w chwili 0 wartość wewnętrzna opcji amerykańskiej call wynosi: $\max(S_0 - K,\ 0) = S_0 - K = 50 - 48 = 2$, natomiast dla opcji amerykańskiej put: $\max(K - S_0,\ 0) = 0$. Możemy stąd wywnioskować, że $P_A < C_A$.

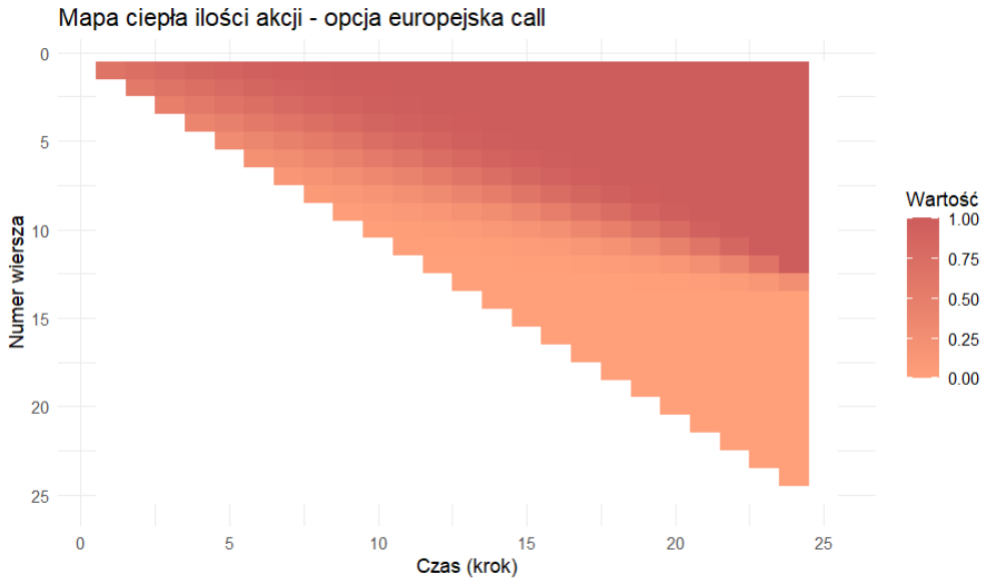
# 4. Portfel zabezpieczający

Skonstruujemy teraz tak zwany portfel zabezpieczający wyceniane opcje. Składa się on z pewnej liczby akcji oraz odpowiedniej ilości gotówki w postaci inwestycji wolnej od ryzyka, takiej jak obligacje, lokata czy pożyczka. Ideą portfela zabezpieczającego jest fakt, że jego wartość po jednym okresie zmieni się tak samo jak wartość opcji - niezależnie od stanu rynku. W każdym wierzchołku drzewa dwumianowego skład takiego portfela jest inny.

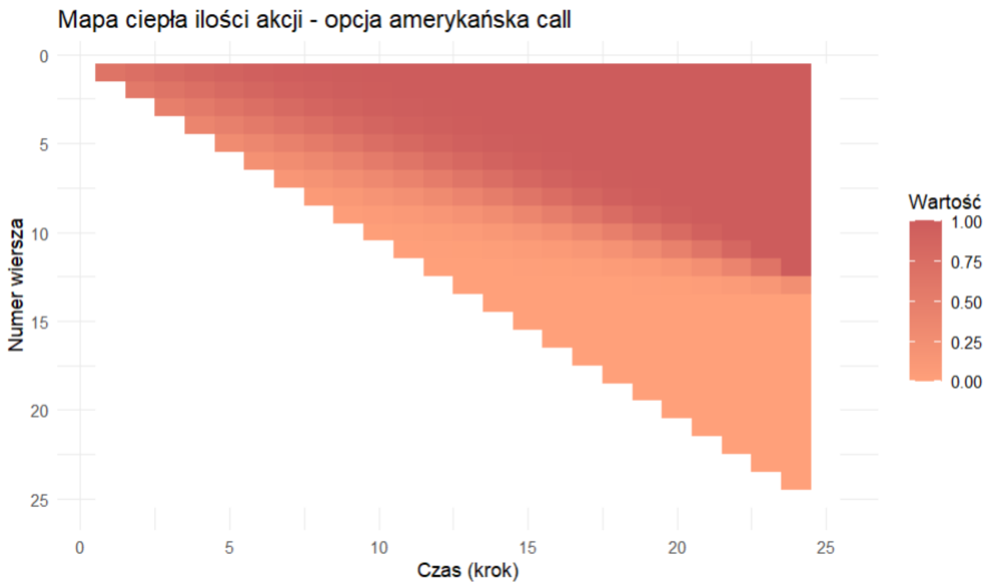
By umożliwić jak najbardziej przejrzyste obserwacje, dla każdego z czterech rodzajów opcji stworzymy po dwie macierze z wynikami – w jednej z nich zawarte będą ilości akcji w poszczególnych wierzchołkach drzewa, natomiast w drugiej - odpowiadające ilości gotówki. Efekty zwizualizujemy w postaci map ciepła.

## 4.1. Opcje europejskie i amerykańskie call - porównanie

Zestawimy ze sobą mapy ciepła dla opcji europejskich i amerykańskich call. Pierwsze dwie ilustracje przedstawiają ilości akcji, z kolei dwie następne dotyczą ilości gotówki.




Ilustracja 16 - ilość akcji w portfelu dla opcji europejskiej call



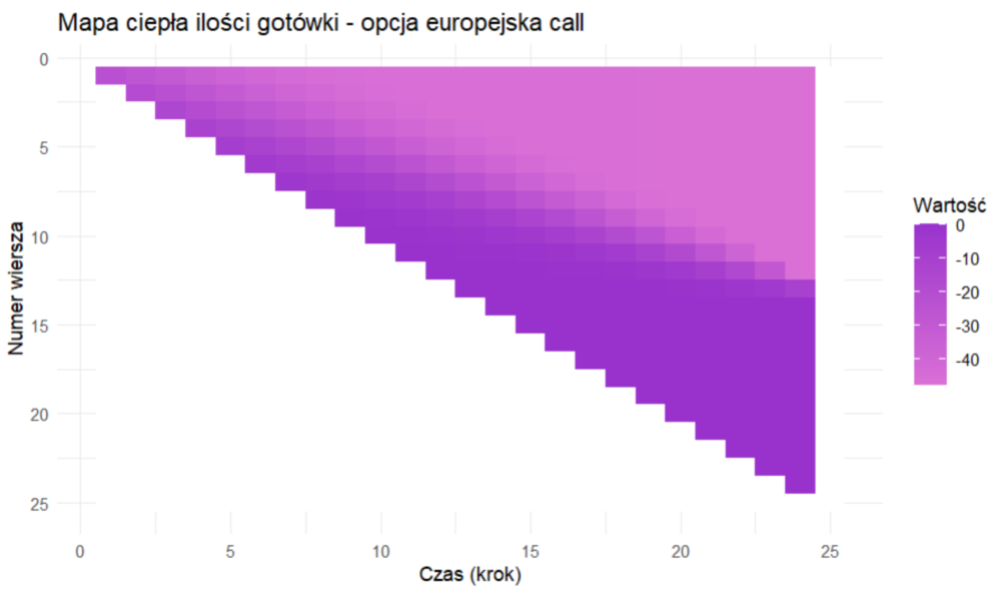

Ilustracja 17 - ilość akcji w portfelu dla opcji amerykańskiej call

Jak możemy zauważyć, nie widać praktycznie żadnej różnicy między opcjami, co jest logiczne, biorąc pod uwagę nasze wcześniejsze obserwacje o ich identyczności. W wyższych partiach drzewa w miarę upływu czasu coraz więcej obszaru map zajmują wartości równe 1. Są to miejsca, w których znajdują się wyższe wartości opcji (można je porównać z ilustracjami w Rozdziale 2). Gdy wartość akcji jest duża, opcja call zostanie wykonana (będzie to opłacalne), zatem powinniśmy mieć wówczas aktywa w portfelu, by móc zreplikować odpowiednią wartość.

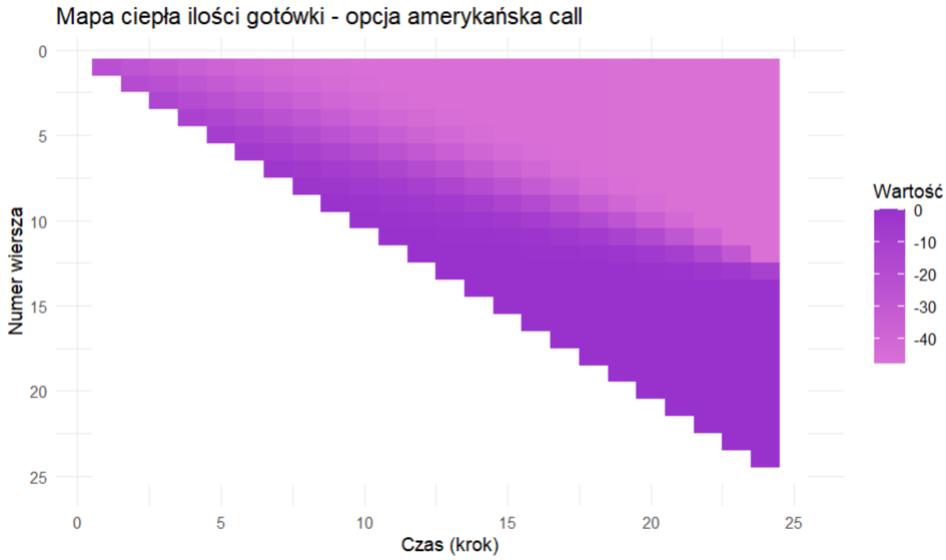
Analogicznie w obszarach, gdzie wartości opcji wynosiły 0, znajduje się zerowa liczba akcji. Skoro akcja nie ma wystarczającej wartości, to oznacza brak wykonania opcji, czyli aktywa w portfelu są niepotrzebne.

Najbardziej zróżnicowane ilości akcji przypisane są do środkowej części mapy. Widzimy tutaj płynne przejścia kolorów, czyli rozmaite ilości aktywa.

Zobaczmy, jak prezentuje się ilość gotówki w portfelu:




Ilustracja 18 - ilość gotówki w portfelu dla opcji europejskiej call




Ilustracja 19 - ilość gotówki w portfelu dla opcji amerykańskiej call

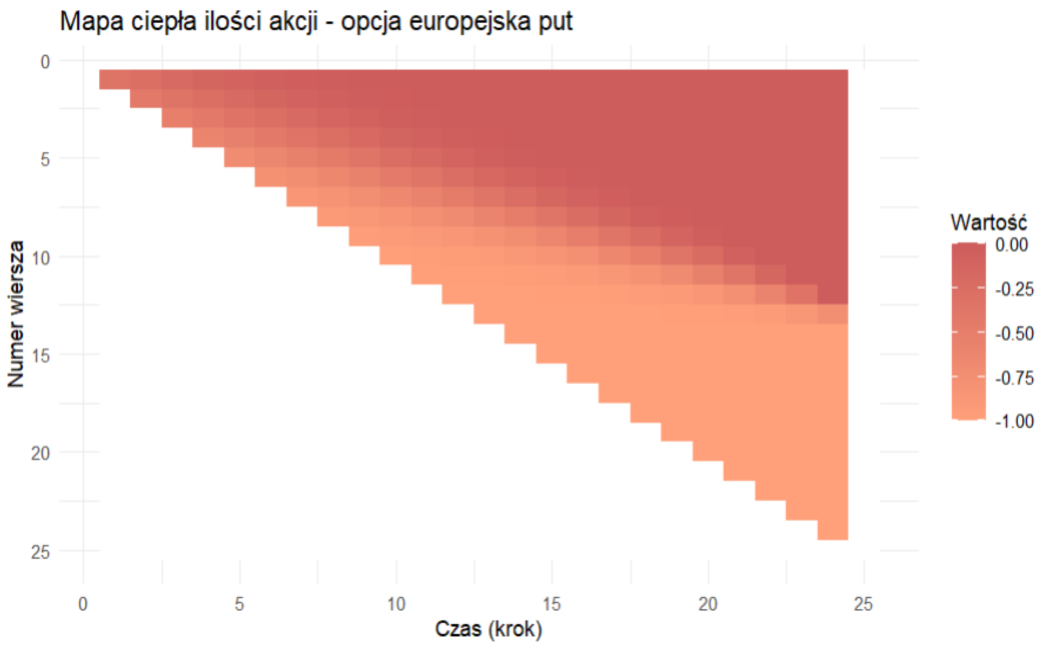
Rezultaty nie są zaskakujące - otrzymaliśmy takie same wyniki. Rozkład ilości gotówki jest dopasowany do rozłożenia ilości akcji, przez co mapy wyglądają bardzo podobnie do wcześniejszych (Ilustracje 12 i 13). Zwróćmy jednak uwagę na skalę - pomimo analogicznego rozmieszczenia kolorów na mapie, w tym miejscu pojawia się znacząca różnica: wartości są niedodatnie.

Jak wiemy, gotówka “dopełnia” odpowiednio portfel w stosunku do aktywa. Gdy delta jest w przybliżeniu równa 0, nie mamy w portfelu akcji (tak jak widzieliśmy na Ilustracjach 12 i 13). Wartość opcji także jest bliska 0. Z tego wynika, że ilość gotówki w tej sytuacji jest zerowa.

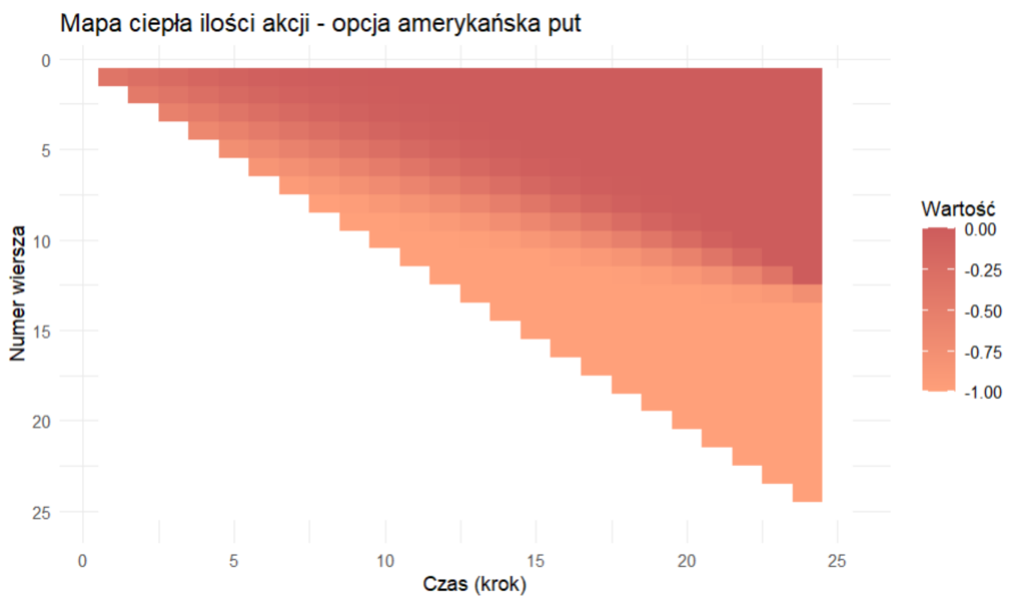
Gdy cena akcji jest większa, mamy w portfelu dodatnią liczbę akcji. Wartość wykonanej opcji call wynosi S-K, gdzie S to wartość aktywa, a K to cena wykonania. Z tego względu nasza określona ilość akcji w portfelu jest warta więcej niż payoff, zatem w gotówce jesteśmy “na minusie” - możemy uznać tę sytuację za pożyczkę.

## 4.2. Opcje europejskie i amerykańskie put - porównanie

Zajmiemy się teraz opcjami put - ponownie w wersji europejskiej i amerykańskiej. Najpierw przyjrzyjmy się aktywom.



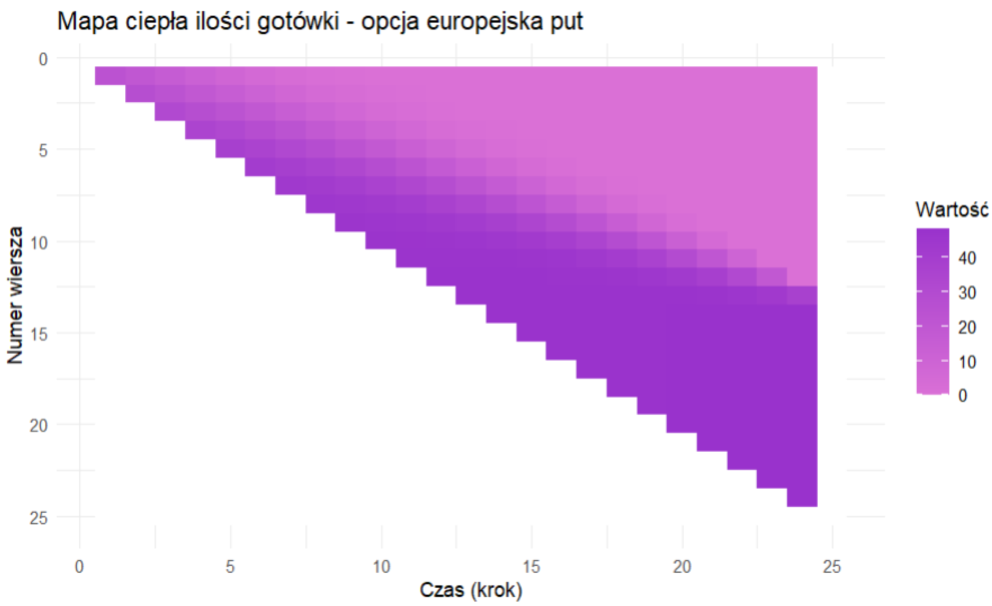

Ilustracja 20 - ilość akcji w portfelu dla opcji europejskiej put



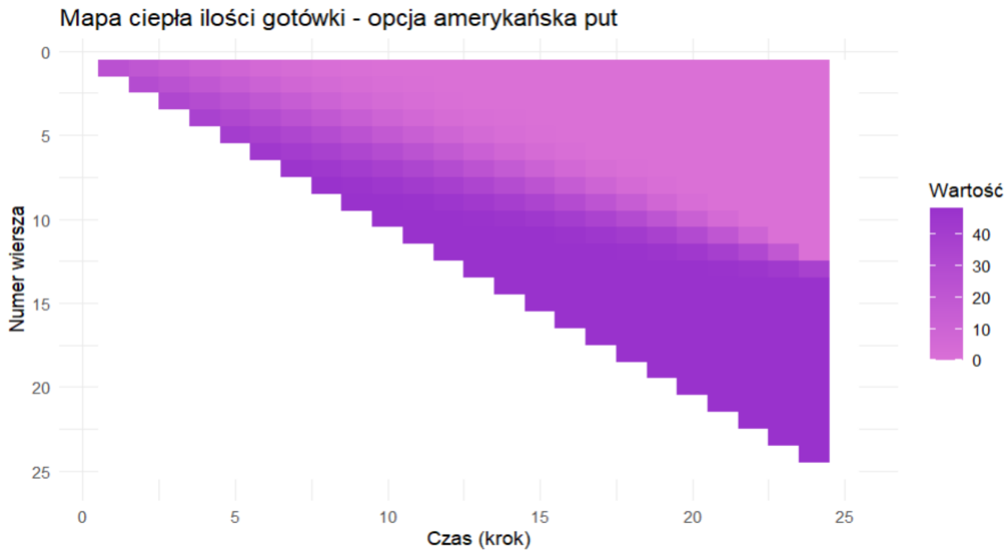

Ilustracja 21 - ilość akcji w portfelu dla opcji amerykańskiej put

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że mapy wyglądają identycznie jak dla opcji call. Zwróćmy jednak uwagę na skalę, przedstawioną z boku. O ile w przypadku opcji call mieliśmy do czynienia z przedziałem wartości od 0 do 1, o tyle w tym przypadku sytuacja jest odwrotna - przedział obejmuje zakres od –1 do 0.

Układ kolorów odzwierciedla wartości opcji (patrz: Ilustracje 4 i 5). Jak wiemy, opcja put zarabia na spadku ceny aktywa (im niższa cena akcji, tym więcej warty jest put, bo payoff jest większy). Liczba akcji w portfelu jest więc niedodatnia, ponieważ tylko wtedy możemy zarobić na spadku ceny aktywa. Sprawdźmy jeszcze, jak wygląda sprawa w kwestii gotówki.



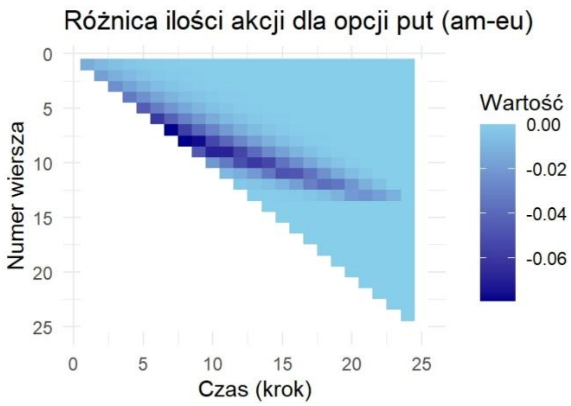

Ilustracja 22 - ilość gotówki w portfelu dla opcji europejskiej put

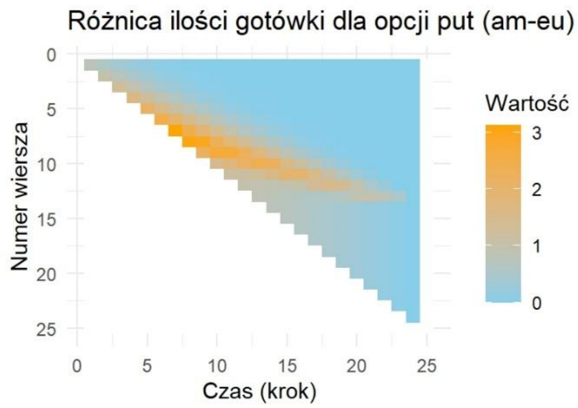



Ilustracja 23 - ilość gotówki w portfelu dla opcji amerykańskiej put

Opcja put stanowi przeciwieństwo opcji call, dlatego mamy tutaj do czynienia z ujemną liczbą akcji i dodatnią ilością gotówki. Zauważmy, że gdy mamy w portfelu jedynie niedodatnią liczbę akcji, jego wartość nie może być większa niż 0.  Z drugiej strony payoff opcji put nie może być ujemny, zatem potrzebna jest dodatnia ilość gotówki w portfelu, aby jego payoff był taki sam, jak payoff opcji put. Możemy zauważyć, że gotówka jest równa 0 tam, gdzie liczba akcji w portfelu również jest równa 0. Dotyczy to sytuacji, kiedy cena aktywa jest wysoka, zatem nie wykonujemy opcji put, czyli payoff takiej opcji wynosi 0. W takim razie payoff portfela replikującego również jest równy 0, czyli nie zawiera ani gotówki, ani akcji.

Spójrzmy jeszcze na mapy ciepła różnic w składzie portfeli zabezpieczających dla opcji amerykańskiej i europejskiej put:




*Ilustracja 24: różnica liczby akcji w portfelu zabezpieczającym opcji put*

*Ilustracja 25: różnica ilości gotówki w portfelu zabezpieczającym opcji put*

Widzimy, że największe różnice są w środkowej części wykresu. Zauważmy pewną prawidłowość na powyższych ilustracjach: jeżeli różnica w ilości akcji jest ujemna, to różnica w gotówce jest dodatnia.

# 5. Podsumowanie

Pierwsza część projektu polegała na wycenie opcji amerykańskich oraz europejskich call i put przy zadanych parametrach $S_0, K, T, r, \Delta t, \sigma, u, d$. Najwięcej warte okazały się obie opcje call: ich wartości są takie same i równe **10.19**. Najmniej warta jest opcja europejska put: **6.31**. Opcja amerykańska put jest nieco droższa i warta **6.47**, co jest zgodne z tym, że opcje amerykańskie zazwyczaj są droższe od europejskich.

Najważniejszą częścią projektu było badanie wrażliwości cen opcji na zmiany parametrów: $S_0, K, T, r, \Delta t\ oraz\ \sigma$. Wartościom opcji call sprzyjał wzrost wszystkich parametrów oprócz K oraz $\Delta t$, przy którym obserwowaliśmy stabilizację cen wraz ze zmniejszaniem tego parametru. Wartości opcji put rosły wraz ze wzrostem parametrów $K, \sigma, T$, natomiast malały przy wzroście $S_0\ oraz\ r$. Wraz ze zmniejszaniem parametru $\Delta t$ wartości każdej z opcji stabilizowały się do cen z modelu Blacka - Scholesa.

Ostatnim elementem projektu było zbadanie składu portfela zabezpieczającego we wszystkich węzłach każdej z rozważanych opcji. W przypadku opcji call portfel zawiera nieujemną liczbę akcji i niedodatnią ilość gotówki, natomiast w przypadku opcji put sytuacja jest odwrotna: mamy niedodatnią liczbę akcji (czyli ich krótką sprzedaż) oraz nieujemną ilość gotówki.

Poniżej przedstawiona jest tabela powiązań między ilustracjami zawartymi w projekcie a funkcjami, które zostały użyte do ich wygenerowania. Wymienione są jedynie funkcje napisane samodzielnie.

| Numer ilustracji | Wykorzystane funkcje |
|---|---|
| 1 | st_tree |
| 2 | st_tree, european_call |
| 3 | st_tree, american_call |
| 4 | st_tree, european_put |
| 5 | st_tree, american_put |
| 6 | st_tree, american_put, european_put |
| 7 | st_tree, american_put |
| 8 | st_tree, european_call, american_call, european_put, american_put |
| 9 | st_tree, european_call, american_call, european_put, american_put |
| 10 | st_tree, european_call, american_call, european_put, american_put |
| 11 | st_tree, european_call, american_call, european_put, american_put |
| 12 | st_tree, european_call, american_call, european_put, american_put |
| 13 | st_tree, european_call, american_call, european_put, american_put |
| 14 | st_tree, european_call, american_call, european_put, american_put |
| 15 | st_tree, european_call, american_call, european_put, american_put |
| 16 | st_tree, european_call, portfel |
| 17 | st_tree, american_call, portfel |
| 18 | st_tree, european_call, portfel |
| 19 | st_tree, american_call, portfel |
| 20 | st_tree, european_put, portfel |
| 21 | st_tree, american_put portfel |
| 22 | st_tree, european_put, portfel |
| 23 | st_tree, american_put, portfel |

| | |
|---|---|
| 24 | st_tree, american_put, european_put, portfel |
| 25 | st_tree, american_put, european_put, portfel |