Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 2

Początek zapisów: **16 listopada 2015 r.**

Termin realizacji: **13 grudnia 2015 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): ***7-12 punktów***

Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez trzy osoby (trzy zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P2.2, P2.21) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P2.1. 10 punktów Współrzędne planety na orbicie eliptycznej w czasie t można obliczyć wzorem

$$\left(a(\cos x - e),\ a\sqrt{1-e^2}\sin x\right),$$

gdzie a jest półosią wielką elipsy, natomiast e to mimośród orbity. Kąt x, zwany anomalią mimośrodową, możemy obliczyć z równania Keplera,

$$x - e\sin x = M \qquad (0 < |e| < 1),$$

gdzie M to anomalia średnia, która jest dana wzorem $M = 2\pi t/T$, przy czym T oznacza okres orbitalny.

a) Pokaż, że dla każdych e, M rozwiązanie $x = \alpha$ spełnia $M - |e| \leqslant \alpha \leqslant M + |e|$. Czy można poprawić to oszacowanie?

b) Zaprogramuj prostą metodę iteracyjną,

$$x_{n+1} = e\sin x_n + M, \quad x_0 = 0.$$

c) Zastosuj metodę Newtona do równania Keplera. Jak wybrać przybliżenie startowe?

Wykonaj testy i porównaj zbieżność metod (b) oraz (c). Dane dotyczące planet Układu Słonecznego znajdziesz w Internecie.

P2.2. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Aby ustalić położenie obiektu na powierzchni Ziemi, system GPS wykorzystuje 4 satelity i rozwiązuje układ równań nieliniowych następującej postaci:

$$\begin{aligned}
(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 &= [C(t_1 - T)]^2\\
(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 &= [C(t_2 - T)]^2\\
(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 + (z-c_3)^2 &= [C(t_3 - T)]^2\\
(x-a_4)^2 + (y-b_4)^2 + (z-c_4)^2 &= [C(t_4 - T)]^2,
\end{aligned}$$

gdzie zmiennymi są szukane współrzędne x, y, z oraz błąd T zegara urządzenia odbiorczego. Pozostałe wielkości są znane. Dla i-tego satelity, a_i, b_i, c_i opisują jego lokalizację w chwili wysłania sygnału; t_i jest czasem transmisji sygnału. C jest prędkością światła. Do wyznaczenia pozycji (x, y, z) teoretycznie potrzebne są 3 satelity, ponieważ trzeba obliczyć 3 współrzędne. Niestety w praktyce zegar urządzenia odbiorczego nie jest w pełni zsynchronizowany z zegarami satelitów, więc potrzebne jest czwarte równanie, powstałe w wyniku pomiaru czasu dotarcia sygnału z czwartego satelity. Zadanie polega na opracowaniu metody rozwiązywania powyższego układu. Metodę należy przetestować w praktyce.

P2.3. 8 punktów Niech $p_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(-1 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant 1)$. Obliczyć błąd $e_{nr} := \max_{x\in D_r} |f(x) - p_n(x)|$, gdzie D_r jest zbiorem r (np. 100) punktów przedziału $[-1, 1]$, dla

a) węzłów równoodległych,

b) węzłów będących zerami $(n+1)$-go wielomianu Czebyszewa,

c) losowo wybranych węzłów.

Przedstawić wnioski z obliczeń dla funkcji $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$ i $f_3(x) = \max(0, 1 - 4x)$.

P2.4. 8 punktów Zrealizować algorytm obliczania ***współczynników postaci potęgowej*** wielomianu $p_n \in \Pi_n$:

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

który przyjmuje w danych (parami różnych) punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ te same wartości, co funkcja f.

P2.5. $\boxed{\text{7 punktów}}$ Zrealizować algorytm, który dla danej liczby naturalnej N i danych liczb rzeczywistych: x, $\varepsilon > 0$, $x_0, x_1 \ldots, x_N$ ($x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$), $y_0, y_1, \ldots, y_N$ znajduje takie najmniejsze n ($n < N$), że $|p_n(x) - p_{n-1}(x)| < \varepsilon$, gdzie $p_m \in \Pi_m$ ($0 \leqslant m \leqslant N$) jest wielomianem spełniającym warunki $p_m(x_k) = y_k$ ($k = 0, 1, \ldots, m$).

P2.6. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Niech dane będą parami różne węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}$) oraz odpowiadające im wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n$, dla których obliczamy wielomiany pomocnicze P_{ij} ($0 \leqslant i \leqslant n$; $0 \leqslant j \leqslant i$) według następującego schematu:

$$P_{i0}(x) := y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$$P_{i,j+1}(x) := \frac{(x - x_j)P_{ij}(x) - (x - x_i)P_{jj}(x)}{x_i - x_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, i - 1).$$

Wykaż, że wielomian P_{nn} jest n-tym wielomianem interpolacyjnym dla danych (x_k, y_k) ($k = 0, 1, \ldots, n$), tj.

$$P_{nn} \in \Pi_n, \qquad P_{nn}(x_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Wykonując odpowiednie testy numeryczne zbadać, jak podany wyżej sposób konstrukcji wielomianu interpolacyjnego sprawdza się w praktyce. Przedstawić wnioski z obliczeń, m.in. dla:
a) węzłów równoodległych,
b) węzłów będących zerami $(n + 1)$-go wielomianu Czebyszewa,
c) losowo wybranych węzłów
oraz dla funkcji: $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$ i $f_3(x) = \max(0, 1 - 4x)$.

P2.7. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Wielomian $L_n \in \Pi_n$, spełniający dla danych parami różnych liczb $t_0, t_1, \ldots, t_n$ i liczb $y_0, y_1, \ldots, y_n$ warunki $L_n(t_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$), można zapisać w ***postaci Lagrange'a***

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \sigma_i y_i \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (t - t_j), \tag{1}$$

gdzie

$$\sigma_i := 1 \Big/ \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (t_i - t_j) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Na przykładach m. in. y_i określonych jako wartości funkcji $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$ i $f_3(x) = \max(0, 1 - 4x)$ porównać algorytmy obliczania wartości wielomianu L_n, stosujące
a) postać (1);
b) ***postać barycentryczną*** tego wielomianu:

$$L_n(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i}{t - t_i} y_i \Big/ \sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i}{t - t_i} & (t \notin \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}, \\ y_k & (t = t_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n). \end{cases}$$

P2.8. $\boxed{\text{7 punktów}}$ Skonstruować wielomiany przybliżające funkcje $f(x) = \arcsin x$ i $g(x) = \arccos x$ w przedziale $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ jako wielomiany interpolacyjne stopnia piętnastego, z odpowiednio dobranymi węzłami. Sprawdzić eksperymentalnie, jaka jest dokładność przybliżenia. Napisać podprogramy, obliczające przybliżone wartości $\arcsin x$ i $\arccos x$ dla dowolnego $x \in [-1, 1]$.

P2.9. $\boxed{\text{12 punktów}}$ Wielomian interpolacyjny Lagrange'a $L_n \in \Pi_n$, przyjmujący w węzłach $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [-1, 1]$ takie same wartości, co funkcja f, można wyrazić wzorem

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\lambda_i(t), \quad \text{gdzie} \quad \lambda_i(t) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1). \tag{2}$$

Wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości wielomianu (2) określamy wzorem

$$K_n := \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i(t)|.$$

Obliczyć wartość K_n dla

a) węzłów równoodległych $t_i := \dfrac{2i}{n} - 1$ lub $t_i := \dfrac{2i+1}{n+1} - 1$ $(i = 0, 1, \dots, n)$,

b) węzłów będących zerami $(n+1)$-go wielomianu Czebyszewa,

c) losowo wybranych węzłów.

Przedstawić wnioski, w szczególności dotyczące związku wartości wskaźnika z dokładnością przybliżenia funkcji f za pomocą wielomianu L_n (wykresy funkcji błędu $e_n := f - L_n$ mile widziane); w roli funkcji testowych można m. in. wziąć $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$ i $f_3(x) = \max(0, 1 - 4x)$.

P2.10. 10 punktów Obliczyć przybliżoną wartość pochodnej $f'(x)$ dla dowolnego $x \in [a, b]$ przy założeniu, że znane są tylko wartości f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Wykonać obliczenia kontrolne dla kilku wartości n i m. in. dla funkcji sin, ln i exp.

P2.11. 10 punktów Niech dane będą: liczba naturalna k, liczby $m_0, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ parami różne węzły $x_0, x_1, \dots, x_k$ oraz wielkości rzeczywiste $y_i^{(j)}$ $(i = 0, 1, \dots, k;\ j = 0, 1, \dots, m_k - 1)$. Przyjmijmy $n := m_0 + m_1 + \ldots + m_k - 1$. Udowodnij, że istnieje dokładnie jeden wielomian H_n stopnia co najwyżej n, nazywany *wielomianem interpolacyjnym Hermite'a*, spełniający następujące warunki:

$$H_n^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \qquad (i = 0, 1, \dots, k;\ j = 0, 1, \dots, m_k - 1).$$

Następnie, zaproponuj efektywny pod względem numerycznym i złożoności obliczeniowej algorytm konstrukcji wielomianu H_n. Wykonaj odpowiednie testy i wyciągnij wnioski dotyczące m.in. użyteczności wielomianu interpolacyjnego Hermite'a w praktyce obliczeniowej.

P2.12. 11 punktów Zaproponuj algorytm przybliżający zadany łuk okręgu,

$$c(\alpha;\, t) = (r\cos t,\, r\sin t) \qquad (-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha),$$

gdzie α, $r > 0$, krzywą wielomianową w wybranej postaci. Uogólnij opracowane podejście, aby rozwiązać problem przybliżania zadanej helisy,

$$h(\alpha;\, t) = (r\cos t,\, r\sin t,\, pt) \qquad (-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha),$$

gdzie α, r, $p > 0$, krzywą wielomianową w wybranej postaci. Jakie cechy powinny posiadać dobre rozwiązania tych problemów? Przetestuj opracowane algorytmy. Zobacz [1] i artykuły tam cytowane.

Literatura:

[1] L. Lu, On polynomial approximation of circular arcs and helices, Computers and Mathematics with Applications 63 (2012), 1192–1196.

P2.13. 8 punktów Skonstruować ***naturalną funkcję sklejaną III stopnia*** s, interpolującą daną funkcję f w $n+1$ równoodległych punktach przedziału $[a,\, b]$. Obliczyć błąd

$$\hat{E}_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - s(x)|,$$

gdzie D_N jest zbiorem N równoodległych punktów przedziału $[a,\, b]$. Wykonać obliczenia dla kilku par wartości n i N oraz dla funkcji (a) $f(x) = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; (b) $f(x) = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 4$; (c) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$, $x \in [-5, 5]$; (d) $f(x) = x/(x^2 + \frac{1}{4})$, $x \in [-\pi,\, \pi]$.

P2.14. 9 punktów Dla danej krzywej parametrycznej $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ możemy skonstruować następującą ***krzywą sklejaną interpolacyjną***. Dla wybranych: $n \in \mathbb{N}$ oraz $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ obliczamy $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, n$, a następnie konstruujemy naturalne funkcje sklejane interpolujące III stopnia $s_x(t)$, $s_y(t)$. Poszukiwana krzywa sklejana ma przedstawienie parametryczne $x = s_x(t)$, $y = s_y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Wykonać obliczenia m.in. dla krzywej zwanej *serpentyną*: $x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} t$, $y = \sin 2t$ $(-\frac{1}{2}\pi \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi)$.

P2.15. 10 punktów Dla danej liczby naturalnej n, danych węzłów $x_0, x_1, \dots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ i danej funkcji f istnieje dokładnie jedna funkcja $\tilde{s} \in C^2[a, b]$, zwana ***okresową funkcją sklejaną interpolacyjną III stopnia***, spełniająca następujące warunki:

1^o w każdym z podprzedziałów $[x_{k-1},\, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ funkcja $\tilde{s}$ jest identyczna z pewnym wielomianem stopnia co najwyżej trzeciego;

2^o $\tilde{s}(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \dots, n;\ f(x_n) = f(x_0))$;

3^o $\tilde{s}^{(i)}(a + 0) = \tilde{s}^{(i)}(b - 0) \qquad (i = 0, 1, 2)$.

Skonstruować funkcję sklejaną $\tilde{s}$ dla kilku wartości n, równoodległych węzłów oraz m. in. dla funkcji $f(x) = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$. W każdym wypadku obliczyć błąd

$$\mathcal{E}_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - \tilde{s}(x)|,$$

gdzie D_N jest zbiorem N równoodległych punktów przedziału $[a, b]$.

P2.16. 10 punktów Wartości funkcji f znane są jedynie w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Zaproponuj, jak wykorzystać naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia do znalezienia przybliżonych wartości wszystkich ekstremów lokalnych funkcji f leżących w przedziale $[x_0, x_n]$. Wykonując odpowiednie testy numeryczne, m. in. dla funkcji

$$f(x) = \sin(4\pi^2 x^2) \quad (x \in [0,1]), \qquad f(x) = \ln\left(\frac{3}{2} + xT_6(x)\right) \quad (x \in [-1,1]),$$

gdzie T_6 to wielomian Czebyszewa stopnia 6, zbadać, czy pomysł ten sprawdza się w praktyce.

P2.17. 10 punktów Niech dane będą: liczba naturalna n, węzły $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b)$ oraz funkcja f określona w przedziale $[a, b]$. Punkty

$$\tau_0 := t_1, \quad \tau_i := \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1}) \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \quad \tau_n := t_n$$

nazywamy ***przegubami***. Dowodzi się, że istnieje dokładnie jedna taka ***interpolująca funkcja sklejana II stopnia*** $\sigma \in C^1[a, b]$, że 1^o w każdym podprzedziale $[t_i, t_{i+1}]$ jest $\sigma \equiv q_i \in \Pi_2$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ oraz że 2^o $\sigma(\tau_k) = f(\tau_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Dla $x \in [t_i, t_{i+1}]$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ funkcja σ wyraża się wzorem

$$\sigma(x) = f(\tau_i) + \frac{1}{2}(m_{i+1} + m_i)(x - \tau_i) + \frac{1}{2h_i}(m_{i+1} - m_i)(x - \tau_i)^2,$$

gdzie $h_i := t_{i+1} - t_i$, a wielkości $m_i := \sigma'(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ stanowią rozwiązanie układu równań

$$h_{i-1}m_{i-1} + 3(h_{i-1} + h_i)m_i + h_i m_{i+1} = 8(f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

(Przyjmujemy, że $h_0 := h_n := m_0 := m_{n+1} := 0$). Skonstruować funkcję sklejaną σ dla kilku wartości n oraz m. in. dla funkcji (a) $f(x) = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; (b) $f(x) = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 4$; (c) $f(x) = (x^2+1)^{-1}$, $x \in [-5, 5]$; (d) $f(x) = x/(x^2 + \frac{1}{4})$, $x \in [-\pi, \pi]$. W każdym wypadku obliczyć błąd $\Delta_N^{(n)} := \max\limits_{x \in D_N} |f(x) - \sigma(x)|$, gdzie D_N jest zbiorem N (np. 101) równoodległych (lub wybranych losowo) punktów przedziału $[a, b]$.

P2.18. 10 punktów Zrealizować i porównać na przykładach dwie poznane metody konstrukcji wielomianów ortogonalnych $P_0, P_1, \ldots, P_r$ na danym zbiorze $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$ z wagą p:
a) metodę Grama-Schmidta ortogonalizacji układu $1, x, \ldots, x^r$;

b) sposób korzystający ze związku rekurencyjnego, spełnianego przez $P_0, P_1, \ldots, P_r$.
Wykonać obliczenia i zinterpretować wyniki **między innymi** dla zbioru punktów $\{u_0, u_1, \ldots, u_r\}$, gdzie $u_k := \cos\frac{k\pi}{r}$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$, oraz takiej wagi p, że

$$p(u_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0, r), \\ 1 & (1 < k < r). \end{cases}$$

P2.19. 12 punktów O funkcji $f \in C[0,1]$ wiadomo, że $f(0) = a$, a $f(1) = b$. Opracuj efektywny algorytm wyznaczania wielomianu $w_n^* \in \widehat{\Pi}_n$ $(n \geqslant 2)$ spełniającego warunek

$$||f - w_n^*||_2 = \min_{w_n \in \widehat{\Pi}_n} ||f - w_n||_2,$$

gdzie $\widehat{\Pi}_n := \{w \in \Pi_n \,:\, w(0) = a,\ w(1) = b\}$, a $||g||_2^2 := \displaystyle\int_0^1 [g(x)]^2\,\mathrm{d}x$. Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności zaproponowaną metodę.

P2.20. 10 punktów Zrealizować następujący *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} w_k P_k,$$

gdzie współczynniki $w_0, w_1, \ldots, w_n$ są dane, a $\{P_k\}$ jest ciągiem wielomianów, spełniającym związek rekurencyjny postaci

$$P_0(x) = a_0, \qquad P_1(x) = (a_1 x - b_1)P_0(x),$$
$$P_k(x) = (a_k x - b_k)P_{k-1}(x) - c_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

przy czym a_k, b_k, c_k są danymi stałymi.

Obliczamy pomocnicze wielkości $B_0, B_1, \ldots, B_{n+2}$ według wzorów

$$B_k = w_k+(a_{k+1}x-b_{k+1})B_{k+1}-c_{k+2}B_{k+2} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0),$$

gdzie $B_{n+1} = 0$, $B_{n+2} = 0$. Wówczas jest $s_n(x) = a_0B_0$.

Zaproponować algorytm obliczania wartości pochodnej wielomianu s_n. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla wielomianów w postaci kombinacji wielomianów Czebyszewa.

P2.21. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Niech $b_0, b_1, \ldots, b_n$ będzie bazą przestrzeni P_n z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle : P_n \times P_n \longrightarrow \mathbb{R}$. Funkcje $d_0^{(n)}, d_1^{(n)}, \ldots, d_n^{(n)}$ stanowią bazę dualną przestrzeni P_n względem iloczynu skalarnego $\langle\cdot,\cdot\rangle$, jeżeli spełniają następujące warunki:

$$\begin{cases} \operatorname{span}\left\{d_0^{(n)}, d_1^{(n)}, \ldots, d_n^{(n)}\right\} = P_n, \\ \left\langle b_i, d_j^{(n)} \right\rangle = \delta_{ij} \qquad (0 \leqslant i, j \leqslant n), \end{cases} \tag{3}$$

gdzie δ_{ij} wynosi 1, jeżeli $i = j$ oraz 0 w przeciwnym wypadku. Dla danej bazy $b_0, b_1, \ldots, b_n$, należy opracować algorytm wyznaczania bazy dualnej $d_0^{(n)}, d_1^{(n)}, \ldots, d_n^{(n)}$, spełniającej warunki (3). Następnie, pokaż w jaki sposób wykorzystać własności baz dualnych do znalezienia elementu optymalnego p^* przestrzeni P_n, dla funkcji f, w sensie normy średniokwadratowej,

$$||f - p^*|| = \min_{p \in P_n} ||f - p||,$$

gdzie $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. W sprawozdaniu należy podać przykłady zastosowania opracowanej metody.

Literatura:

[1] P. Woźny, Construction of dual bases, Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013), 75–85.

[2] P. Woźny, Construction of dual B-spline functions, Journal of Computational and Applied Mathematics 260 (2014), 301–311.