

Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 3

Początek zapisów: 14 grudnia 2015 r.

Termin realizacji: 22 stycznia 2016 r.

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): 7–12 punktów

Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez trzy osoby (trzy zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P3.6 i P3.21) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P3.1. 9 punktów Zrealizować algorytm, który dla danej funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$, liczby naturalnej n oraz układu $n + 2$ punktów $D_n := \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\} \subset [a, b]$ wyznacza n -ty wielomian optymalny w_n^* w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na zbiorze D_n . Wykonać obliczenia dla wybranych funkcji f i wartości n w wypadku, gdy

$$(i) x_k = a + k \frac{b-a}{n+1}; \quad (ii) x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1).$$

Naszkicować wykres funkcji $e_n := f - w_n^*$ w przedziale $[a, b]$.

P3.2. 12 punktów Zrealizować algorytm Remeza, który dla danej funkcji $f \in C[a, b]$, konstruuje ciąg wielomianów zbieżny do wielomianu optymalnego w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na przedziale $[a, b]$. W k -tym kroku algorytmu należy wyznaczyć n -ty wielomian optymalny $w_k^* \in \Pi_n$ w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na zbiorze dyskretnym $X_k = \{x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}\}$. W pierwszym kroku algorytmu rozważyć zbiór $n + 2$ punktów $X_0 = \{x_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$:

$$(i) x_j^{(0)} = a + j \frac{b-a}{n+1}; \quad (ii) x_j^{(0)} = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{j\pi}{n+1} \quad (j = 0, 1, \dots, n+1).$$

W celu znalezienia zbioru X_{k+1} należy wyznaczyć ekstremum funkcji $f - w_k^*$ w przedziale $[a, b]$, dla którego osiągnięta jest norma maksimum $\|f - w_k^*\|$. Wykonać obliczenia dla wybranych funkcji f i wartości n . Naszkicować wykresy funkcji $e_k := f - w_k^*$ w przedziale $[a, b]$ dla kolejnych k .

P3.3. 10 punktów Wielomian $I_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w węzłach

$$t_{n+1,k} = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

można zapisać w postaci

$$I_n(x) = \frac{2}{n+1} \sum'_{i=0} \left(\sum_{j=0}^n f(t_{n+1,j}) T_i(t_{n+1,j}) \right) T_i(x),$$

a wielomian J_n o własności $J_n(u_{n-1,k}) = f(u_{n-1,k})$ ($k = 0, 1, \dots, n$), gdzie $u_{n-1,k} = \cos(k\pi/n)$, ($k = 0, 1, \dots, n$), można zapisać wzorem

$$J_n(x) = \frac{2}{n} \sum'_{j=0} \left(\sum''_{k=0} f(u_{n-1,k}) T_k(u_{n-1,j}) \right) T_j(x).$$

Wielomian $K_n \in \Pi_n$ podany wzorem

$$K_n(x) = \frac{2}{n+1} \sum'_{j=0} \left(\sum''_{k=0} f(u_{nk}) T_k(u_{nj}) \right) T_j(x)$$

jest n -tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na zbiorze

$$\{u_{n0}, u_{n1}, \dots, u_{n,n+1}\},$$

gdzie $u_{nk} = \cos(k\pi/(n+1))$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$). Dla wybranych funkcji f i wartości n obliczyć (w przybliżeniu) błędy aproksymacji jednostajnej funkcji f za pomocą I_n , J_n i K_n , w przedziale $[-1, 1]$.

Uwaga. Symbol \sum' oznacza sumę, której pierwszy składnik należy podzielić przez 2, a \sum'' – sumę, której pierwszy i ostatni składnik należy podzielić przez 2.

P3.4. 10 punktów Dla danej liczby naturalnej n , danych węzłów x_0, x_1, \dots, x_n ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$), danej liczby rzeczywistej τ i danej funkcji f istnieje dokładnie jedna taka funkcja S_τ , zwana **hiperboliczną funkcją sklejaną interpolacyjną**, że 1° $S_\tau \in C^2[a, b]$, 2° $S_\tau(x_k) = f(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$); 3° w każdym z podprzedziałów (x_k, x_{k+1}) ($k = 0, 1, \dots, n-1$) funkcja S_τ spełnia warunek $S_\tau^{(4)}(x) - \tau^2 S_\tau''(x) = 0$; 4° $S_\tau''(a) = S_\tau''(b) = 0$. Można wykazać, że dla $x \in [x_k, x_{k+1}]$ ($0 \leq k \leq n-1$) funkcja S_τ wyraża się wzorem

$$S_\tau(x) = \frac{\{M_k \sinh[\tau(x_{k+1} - x)] + M_{k+1} \sinh[\tau(x - x_k)]\}}{\sinh(\tau h_k)} + [f(x_k) - M_k](x_{k+1} - x)/h_k + [f(x_{k+1}) - M_{k+1}](x - x_k)/h_k,$$

gdzie $h_k := x_{k+1} - x_k$, a wartości $M_i := S_\tau''(x_i)/\tau^2$ ($i = 0, 1, \dots, n$) otrzymuje się jako rozwiązanie układu równań

$$\alpha_{i-1}M_{i-1} + (\beta_{i-1} + \beta_i)M_i + \alpha_iM_{i+1} = \gamma_i - \gamma_{i-1} \quad (1 \leq i \leq n-1; M_0 = M_n = 0),$$

gdzie z kolei

$$\alpha_i := 1/h_i - \tau/\sinh(\tau h_i), \quad \beta_i := \tau \cosh(\tau h_i)/\sinh(\tau h_i) - 1/h_i, \quad \gamma_i := f[x_i, x_{i+1}].$$

Zrealizować powyższy algorytm i sprawdzić go dla wielu wartości parametru τ (im większe τ , tym krzywa $y = S_\tau$ jest mocniej naprężona; jeśli $\tau \approx 0$, krzywa ta przypomina wykres naturalnej funkcji sklejanej interpolującej).

Literatura: D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005, s. 333–335.

P3.5. 9 punktów Opracować algorytmy przekształcenia postaci potęgowej wielomianu $p \in \Pi_n$, tj.

$$p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$$

na postać Béziera

$$p(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i B_i^n(t),$$

jak również przekształcenia odwrotnego. Porównać te dwa algorytmy na przykładach pod względem efektywności oraz odporności na zaburzenia danych.

P3.6. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów (Realizacja zadania wymaga umiejętności przekształcania obrazu (bitmapy) o 256 odcieniach szarości na tablicę liczb, i odwrotnie.) Załóżmy, że dany jest obraz o rozdzielczości M_x na M_y punktów. Zadanie polega na przekształceniu go do obrazu o rozdzielczości N_x na N_y punktów. Ponieważ zmiana rozmiaru odbywać się ma w poziomie i w pionie niezależnie od siebie, więc – dla uproszczenia – opis algorytmu ogranicza się jedynie do obrazów o rozmiarze M na 1 punktów. Obraz taki można traktować jako ciąg wartości kolorów w punktach $t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_M = M$. Zmiana rozmiaru polega na wyznaczeniu wartości koloru $K(\cdot)$ w punktach $p_i = 1 + (i-1)\frac{M-1}{N-1}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), gdzie N jest nowym rozmiarem obrazu. Można to zrobić na kilka sposobów:

- metodą najbliższego sąsiedztwa, wyznaczając wartości $K(p_i)$ w sposób następujący: $K(p_i) := K(\text{round}(p_i))$ ($i = 1, 2, \dots, N$),
- skonstruować taką funkcję sklejającą S pierwszego stopnia, że $S(t_i) = K(t_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, M$, a następnie przyjąć $K(p_i) := S(p_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$),
- skonstruować taką naturalną funkcję sklejającą Z trzeciego stopnia, że $Z(t_i) = K(t_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, M$, a następnie przyjąć $K(p_i) := Z(p_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), przy czym wartości wykraczające poza przedział dopuszczalnych wartości dla koloru są zastępowane końcami tego przedziału (np. wartość -2 zostanie zastąpiona przez 0, a 256 przez 255; zakładamy przy tym, że *kolor* jest liczbą całkowitą z przedziału $[0, 255]$).

W wypadku obrazów, których oba wymiary są większe od 1, zmieniamy rozdzielczość najpierw w pionie, a następnie w poziomie (albo najpierw w poziomie, a potem w pionie). Należy

- przetestować trzy podane wyżej metody zmiany rozdzielczości obrazka,
- sprawdzić, czy istotne jest to, w którym kierunku obraz jest najpierw przeskalowywany; można np. generować „obraz różnicy” o kolorach $|K^{(1)}(\cdot, \cdot) - K^{(2)}(\cdot, \cdot)|$, gdzie $K^{(1)}$ jest kolorem otrzymanym pierwszym sposobem, a $K^{(2)}$ – drugim (warto rozważyć też sytuacje, w których jeden wymiar jest zwiększany, a drugi zmniejszany),
- porównać czasy działania trzech podanych wyżej algorytmów,
- (nieobowiązkowe) porównać (wizualnie) najlepszy z powyższych algorytmów z profesjonalnym programem obróbki obrazów,
- (nieobowiązkowe) zastosować najlepszy z algorytmów do zmiany rozmiaru obrazów kolorowych (obraz kolorowy, to w istocie nałożone na siebie trzy obrazy jednobarwne); powtórzyć punkt (iv) dla kolorowych obrazków.

P3.7. 10 punktów Węzły równoodległe używane w kwadraturach Newtona-Cotesa bywają użyteczne dla wielomianów niskich stopni, ale mogą się okazać złym wyborem, gdy stopień jest wysoki. Należy rozważyć kwadratury dla całek postaci

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

z węzłami interpolacyjnymi będącymi:

- zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

- ii) zerami wielomianu Czebyszewa drugiego rodzaju $U_{n-1}(x)$, które są punktami ekstremalnymi $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$(1) \quad x_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1);$$

- iii) wartościami danymi wzorem (1) wraz z $x_0 = 1$ i $x_n = -1$.

Podaj jawne wzory na wagi kwadratur w każdym z wymienionych wypadków. Przetestuj uzyskane kwadratury dla kilku wybranych funkcji f .

- P3.8.** 8 punktów Zrealizować następującą metodę obliczania przybliżonej wartości całki

$$I := \int_a^b f(x) dx.$$

Podzielić przedział całkowania na N podprzedziałów o równej długości, a następnie zastosować do obliczenia całki w każdym z podprzedziałów — po uprzedniej liniowej zamianie zmiennej całkowania — dwupunktową kwadraturę Gaussa-Legendre'a

$$Q_1(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Przybliżenie całki I daje suma przybliżeń całek w podprzedziałach. Powtórzyć czynności dla $N := 2N$ i porównać otrzymane wyniki. Wykonać obliczenia kontrolne m. in. dla funkcji podcałkowych podanych w zadaniu **P3.11**.

- P3.9.** 8 punktów Obliczyć **przybliżoną wartość całki** $\int_a^b f(x) dx$ przy założeniu, że znane są tylko wartości f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Zastosować co najmniej dwie różne metody! Wykonać obliczenia kontrolne dla kilku wybranych funkcji podcałkowych.

- P3.10.** 9 punktów Zrealizować następującą metodę obliczenia przybliżonej wartości całki nieoznaczonej

$$I(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{dla } a \leq x \leq b,$$

przy założeniu, że znane są tylko wartości funkcji f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

(i) Wyznaczyć naturalną funkcję sklejającą III stopnia s , interpolującą f w punktach t_0, t_1, \dots, t_n .

(ii) Przyjąć $I(x) \approx \int_a^x s(t) dt$.

Oceń dokładność metody na podstawie wykonanych obliczeń kontrolnych.

- P3.11.** 8 punktów Zadanie polega na realizacji metody Romberga obliczania całki $I := \int_a^b f(x) dx$. Dla danych a, b, f i $\varepsilon > 0$ należy skonstruować K początkowych wierszy tablicy Romberga $\{T_{mk}\}$, gdzie K jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$|T_{K0} - T_{K-1,0}| < \varepsilon |T_{K0}|.$$

Zapewnić możliwość drukowania pełnej tablicy błędów $\{|I - T_{mk}|/|I|\}$. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla następujących całek:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{1 + x^4} dx, \quad \int_0^1 \frac{2}{2 + \sin(10\pi x)} dx.$$

- P3.12.** 10 punktów W zadaniu chodzi o realizację wariantu metody Romberga obliczania całki $\int_a^b f(x) dx$, w którym stosuje się rozbięcie przedziału całkowania na podprzedziały, uwzględniające charakter zmienności funkcji f . Niech będą dane $h > 0$ i d . W znany sposób konstruujemy dla przedziału $[a, a+h]$ początkowy fragment tablicy Romberga $\{T_{mk}\}$, zawierający nie więcej niż 4 wiersze (tj. $m, k \leq 4$). Jeśli dla pewnego $m \leq 4$ T_{m0} i $T_{m-1,0}$ zgadzają się z dokładnością do d cyfr, to akceptujemy T_{m0} jako wartość całki $\int_a^{a+h} f(x) dx$ i przechodzimy do przedziału $[a+h, a+2h]$ (wartość h można przy tym zwiększyć, jeśli $m = 1$, lub zmniejszyć – w wypadku $m = 4$). Jeśli T_{40} i T_{30} nie pokrywają się z dokładnością do d cyfr, to zmniejszamy krok h i powtarzamy opisane czynności dla skróconego podprzedziału. Przykładowe całki podano w zadaniu **P3.11**.

- P3.13.** 10 punktów Wyprowadź wzory na współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

- i) z dwoma węzłami (*wzór trapezów*),
- ii) z trzema węzłami (*wzór Simpsona*),
- iii) z czterema węzłami itd.

Następnie wykorzystaj otrzymane wzory do skonstruowania odpowiednich kwadratur złożonych. Przeprowadź eksperymenty numeryczne m.in. dla całek typu

$$\int_a^b P(x) dx, \quad \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad \int_a^b R(\sin x, \cos x) dx,$$

gdzie P i Q są wielomianami, a R – funkcją wymierną dwu zmiennych. Wyciągnij wnioski.

- P3.14.** 12 punktów Wykorzystując poznane metody numerycznego obliczania całek oznaczonych, zaproponuj i zrealizuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki podwójnej

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Przeprowadź eksperymenty numeryczne m.in. dla całki

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy dx}{x^2 + y^2 + 1} = 0.639510351870311001962693085427323679 \dots$$

Literatura:

- [1] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz. 1*, WNT, 1988, str. 164–166.
 [2] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971, str. 139–140.

- P3.15.** 8 punktów Wyznaczyć rozkład danej macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ na iloczyn czynników trójkątnych. Korzystając z powyższego wyniku rozwiązać układ równań $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Wykonać obliczenia m.in. dla **macierzy Hilberta** $A = [a_{ij}]$, gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

i **macierzy Pei**

$$A := \begin{bmatrix} d & 1 & \dots & 1 \\ 1 & d & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & d \end{bmatrix}$$

(Zauważmy, że dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!) Omówić wyniki, podając wartość $\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\mathbf{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

- P3.16.** 12 punktów Załóżmy, że znany jest rozkład LU macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. W wielu zadaniach praktycznych należy wyznaczyć rozkład LU macierzy A^* danej wzorem $A^* := A + \mathbf{u}\mathbf{v}^t$, gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ są danymi wektorami. Patrz np. [1, §6.3]. Zaproponuj szybki algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy A^* . Wykonaj odpowiednie testy numeryczne sprawdzające jego stabilność i skuteczność.

Literatura:

- [1] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1992.

- P3.17.** 10 punktów Układ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ warto niekiedy zmodyfikować, wprowadzając nowe zmienne $y_i = d_i x_i$, gdzie d_i są dodatnie. W symbolice macierzowej mamy tu wzór $\mathbf{y} = D\mathbf{x}$, gdzie D jest macierzą przekątniową, o elementach d_1, d_2, \dots, d_n na przekątnej. Nowym układem równań jest $AD^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Jeśli $d_j = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ij}|$, to przekształcenie nazywamy *wyważaniem kolumn*. Napisać program rozwiązujący układ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodą eliminacji z pełnym wyborem elementów głównych,

- i) bez dodatkowych przekształceń układu,
- ii) z zastosowaniem wyważania kolumn,
- iii) z zastosowaniem analogicznie określonego wyważania wierszy.

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając dla każdego z wariantów wartość $\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\mathbf{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

- P3.18.** 12 punktów Niech A będzie macierzą nieosobliwą oraz niech $\{X_k\}$ dla $k = 0, 1, \dots$ będzie ciągiem macierzy spełniających

$$X_{k+1} := X_k + X_k(I - AX_k),$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. Udowodnij, że:

- i) przy założeniu $\|I - AX_0\| < 1$, gdzie $\|\cdot\|$ jest normą macierzową indukowaną przez normę wektorową, zachodzi zbieżność $\{X_k\}$ do A^{-1} . Ponadto, dla $E_k := I - AX_k$, pokaż że $E_{k+1} = E_k E_k$;

ii) powyższa metoda jest lokalnie zbieżna kwadratowo;

iii) przy założeniu $AX_0 = X_0A$ zachodzi $AX_k = X_kA$ dla $k \geq 0$.

Na podstawie wybranych macierzy A , sprawdź działanie powyższej metody iteracyjnej Schulza w praktyce. W jaki sposób wybrać X_0 ? Czy metoda jest szybsza niż znane metody bezpośrednie odwracania macierzy?

P3.19. 10 punktów Stosując metodę eliminacji z wyborem częściowym elementów głównych obliczyć wyznacznik macierzy A . Zauważyć, że dla uniknięcia nadmiaru lub niedomiaru warto informację o $\det A$ podać w postaci:

$$\sigma, \quad \log |\det A|,$$

gdzie $\sigma := \operatorname{sgn} \det A$. Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla macierzy Pei i Hilberta oraz omówić wyniki, przyjmując różne wartości parametrów n i d (w tym $d \approx 1$).

P3.20. 10 punktów Za pomocą metod iteracyjnych Jacobiego i Seidela wyznaczyć przybliżone rozwiązanie $\tilde{\mathbf{x}}$ układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$), przyjmując $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x}^{(k)}$, gdzie k jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty / \|\mathbf{x}^{(k)}\|_\infty < \varepsilon.$$

Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla macierzy Pei i Hilberta oraz omówić wyniki, podając wartość $\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\mathbf{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem, jak również przyjmując $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-7}$ oraz różne wartości parametrów n i d . Można założyć, że rozwiązaniem dokładnym jest wektor $\mathbf{e} := [1, 1, \dots, 1]^T$ lub, inaczej mówiąc, że $\mathbf{b} := A\mathbf{e}$.

P3.21. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 11 punktów Porównać na wybranych przykładach cztery warianty metody eliminacji rozwiązywania układów równań liniowych – pod względem dokładności wyników:

i) bez wyboru elementów głównych,

ii) z pełnym wyborem elementów głównych,

iii) z wyborem elementów głównych w kolumnach,

iv) z wyborem elementów głównych w wierszach.

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając dla każdego z wariantów wartość $\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\mathbf{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.