

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania P.3.11

Jarosław Dzikowski 273233

Wrocław, 12 stycznia 2016

1 Uwagi techniczne

Program można uruchomić normalnie z wiersza poleceń. Nie wypisuje on dużo, ponieważ wyniki doświadczeń są zamieniane na wykresy. Program ma zakomentowane wywołania funkcji produkującej dane do sporządzenia wykresu przez gnuplot'a.

Sprawozdanie należy kompilować z wiersza poleceń będąc wewnątrz katalogu doc. Do skompilowania sprawozdania wymagana jest obecność folderu „wykresy” z wykresami w formacie eps, które następnie będą zamieszczone w sprawozdaniu. Folder „wykresy” znajduje się w folderze „doc”.

2 Wstęp

W tym zadaniu zbadamy metodę Romberga całkowania numerycznego. Zbadamy jej zachowanie oraz porównamy jej rezultaty z innymi metodami.

3 Wprowadzenie

Zagadnienie całkowania nie jest nikomu obce. Często chcielibyśmy policzyć wartość jakiejś całki, lecz nie zawsze jest to takie proste. Funkcja może być zbyt trudna do całkowania lub możemy chcieć całkować wiele funkcji, których wzorów oraz przedziałów całkowania nie znamy zawczasu. Wtedy musimy skorzystać z jakiejś uniwersalnej metody obliczania przybliżonej wartości całki. Jedną z takich metod jest metoda Romberga.

3.1 Kwadratury liniowe

Zacznijmy od wprowadzenia pojęcia kwadratury. Niech $\mathbb{F} = \mathbb{F}[a, b]$ będzie zbiorem funkcji całkowalnych w przedziale $[a, b]$. Jeśli f jest ciągła w $[a, b]$, to $f \in \mathbb{F}$.

Jeśli f jest funkcją ograniczoną i ma skończenie wiele punktów nieciągłości w $[a, b]$, to $f \in \mathbb{F}$. Całka $I : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym.

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

W przypadku całki z daną funkcją wagową p mamy

$$I_p(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx$$

Oczywiście, z własności całki wiemy, że I spełnia następujące własności:

$$(1) I(f + g) = I(f) + I(g)$$

$$(2) I(\alpha f) = \alpha I(f)$$

Definicja 1 (Kwadratura liniowa). Funkcjonał $Q_n : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad (1)$$

gdzie $A_k \in \mathbb{R}$, oraz $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ są parami różnymi punktami, nazywamy kwadraturą liniową. A_k nazywamy współczynnikami kwadratury, natomiast x_k węzłami kwadratury.

Kwadratura jest zdefiniowana za pomocą A_k i x_k . Każda kwadratura Q_n jest w pewnym stopniu oddalona od całki.

Definicja 2 (Reszta kwadratury). Resztą kwadratury Q_n nazywamy

$$R_n(f) = I(f) - Q_n(f) \quad (2)$$

Niektóre kwadratury potrafią dawać dokładne wyniki całkowania dla wielomianów pewnego stopnia. Dlatego wprowadzono pojęcie rzędu kwadratury.

Definicja 3 (Rząd kwadratury). Powiemy, że Q_n jest rzędu r , jeśli

$$i) \forall q \in \Pi_{r-1} Q_n(q) = I(q)$$

$$ii) \exists q \in \Pi_r Q_n(q) \neq I(q)$$

Każda kwadratura ma swoje limity i nie potrafi dokładnie scałkować każdego wielomianu.

Twierdzenie 1 (Maksymalny rząd kwadratury). Rząd kwadratury Q_n nie przekracza $2n + 2$.

Dowód. Niech $w(x) = [(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)]^2 \in \Pi_{2n+2}$. Mamy

$$Q_n(w) = \sum_{k=0}^n A_k w(x_k) = 0 \neq I(w) = \int_a^b w(x) dx > 0$$

Podaliśmy przykład wielomianu stopnia $2n + 2$, dla którego kwadratura Q_n nie osiąga dokładnej wartości całki. \square

3.2 Kwadratury interpolacyjne

Jak już wiemy, kwadratury zależą od doboru współczynników A_k oraz węzłów x_k kwadratury. Co gdyby zamiast całkować funkcję f spróbować scałkować wielomian interpolujący tę funkcję? Ponieważ wielomian interpolujący jest swego rodzaju przybliżeniem f , liczymy na to, że całka z tego wielomianu będzie bliska całce z funkcji f .

Definicja 4 (Kwadratura interpolacyjna). *Kwadraturą interpolacyjną nazwiemy kwadraturę Q_n , taką że*

$$Q_n(f) = I(L_n),$$

gdzie L_n jest wielomianem interpolacyjnym stopnia $\leq n$ dla funkcji f .

Wiemy, czym jest kwadratura interpolacyjna. Niestety dalej nie znamy jej współczynników ani węzłów.

Twierdzenie 2 (Współczynniki oraz węzły kwadratury interpolacyjnej). *Niech L_n będzie n -tym wielomianem interpolacyjnym dla funkcji f wyrażającym się wzorem*

$$L_n = \sum_{k=0}^n f(x_k) \lambda_k$$

Wtedy Q_n wyraża się wzorem

$$Q_n = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

gdzie

$$A_k = \int_a^b \lambda_k(x) dx = \int_a^b \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \right) dx$$

a x_k są węzłami interpolacji wielomianu L_n .

Dowód. Ponieważ $Q_n(f) = I(L_n)$, wiemy, że $Q_n(L_n) = I(L_n)$, więc

$$\begin{aligned} Q_n(L_n) &= I(L_n) = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) \lambda_k(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b \lambda_k(x) dx \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 3. *Q_n jest kwadraturą interpolacyjną wtedy i tylko wtedy, gdy rząd Q_n jest równy co najmniej $n + 1$.*

Dowód. \Rightarrow :

$Q_n(f) = I(L_n[f])$. Jeśli $f \in \Pi_n$, to $f = L_n[f]$. Stąd mamy rząd przynajmniej $n + 1$.

\Leftarrow :

Niech A_k będą współczynnikami Q_n , a x_k węzłami Q_n i Q_n ma rząd $r \geq n + 1$. Zdefiniujemy λ_k w sposób następujący

$$\lambda_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \in \Pi_n$$

Zatem $Q_n(\lambda_k) = I(\lambda_k)$. Weźmy dowolne f . $L_n = \sum_{k=0}^n f(x_k) \lambda_k$ interpoluje f w węzłach kwadratury. $Q_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$. Całka z λ_k okazuje się być równa k-temu współczynnikowi kwadratury Q_n .

$$I(\lambda_k) = Q_n(\lambda_k) = \sum_{j=0}^n A_j \lambda_k(x_j) = A_k$$

Znając A_k możemy wstawić je do wzoru na $Q_n(f)$.

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^n I_n(\lambda_k) f(x_k) = I(L_n[f])$$

Skoro $Q_n(f) = I(L_n[f])$, to Q_n jest kwadraturą interpolacyjną. \square

3.3 Kwadratury Newtona-Cotesa

Kwadratury interpolacyjne, tak samo jak wielomiany interpolacyjne, zależą od doboru węzłów interpolacji. Kwadratury Newtona-Cotesa używają najprostszych węzłów - węzłów równoodległych.

Definicja 5 (Kwadratura Newtona-Cotesa). *Kwadraturą Newtona-Cotesa nazywamy kwadraturę interpolacyjną o węzłach równoodległych.*

$$Q_n^{NC}(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

gdzie $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$, $A_k = \int_a^b \lambda_k(x) dx$.

Okazuje się, że dla kwadratury Newtona-Cotesa, współczynniki A_k da się zapisać nieco inaczej

Twierdzenie 4 (Współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa). *Niech $h = \frac{b-a}{n}$ będzie odległością między sąsiednimi węzłami. Wtedy współczynniki A_k kwadratury Newtona-Cotesa Q_n^{NC} wyrażają się wzorem*

$$A_k = h \cdot (-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{k!(n-k)!} \cdot \int_a^b \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \right) dt$$

Dowód. Dowód dorzucę jeśli trzeba, było na ćwiczeniach. \square

Dowodzi się, że błąd kwadratur Newtona-Cotesa wyraża się następująco

$$R_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b p_{n+1}(x) dx & \text{dla } 2 \nmid n \\ \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+1)!} \int_a^b x p_{n+1}(x) dx & \text{dla } 2|n \end{cases}$$

gdzie $p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Wniosek: Kwadratura Newtona-Cotesa Q_n^{NC} jest rzędu $\begin{cases} n+1 & \text{dla } 2 \nmid n \\ n+2 & \text{dla } 2|n \end{cases}$.

Najbardziej znaną kwadraturą Newtona-Cotesa jest ta dla $n = 1$. Q_1^{NC} z węzłami $x_0 = a, x_1 = b, h = b - a$ nazywamy *wzorem trapezów*. Mamy $A_0 = A_1 = \frac{h}{2}$.

$$T(f) = Q_1^{NC}(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \quad (3)$$

Za pomocą wzoru trapezów jesteśmy w stanie poprawnie scałkować każdą funkcję stałą oraz liniową. Błąd wzoru trapezów $R_1(f)$ jest równy

$$R_1(f) = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

Dla $n = 2$ otrzymujemy *wzór Simpsona*:

$$h = \frac{b-a}{2}, \quad x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b,$$

$$A_0 = A_2 = \frac{h}{3}, \quad A_1 = 4\frac{h}{3}$$

$$S(f) = Q_2^{NC}(f) = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)] \quad (4)$$

Rząd wzoru Simpsona wynosi 4, więc możemy poprawnie scałkować nawet wielomian trzeciego stopnia. Błąd wzoru Simpsona wynosi

$$\begin{aligned} R_2(f) &= \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_a^b x \cdot (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx = \\ &= -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \end{aligned}$$

Wykazuje się, że istnieją takie funkcje ciągłe, dla których ciąg kwadratur Newtona-Cotesa nie jest zbieżny do całki $\int_b^a f$. Między innymi z tego powodu nie stosuje się w praktyce kwadratur Newtona-Cotesa wyższych rzędów. Na ogół bardziej celowy jest podział przedziału całkowania $[a, b]$ na n równych podprzedziałów $[t_k, t_{k+1}]$, wyznaczony przez punkty $t_k = a + kh (k = 0, 1, \dots, n)$,

gdzie $h = \frac{b-a}{n}$, a następnie zastosowanie w każdym z nich kwadratury Newtona-Cotesa niskiego rzędu. Otrzymujemy w ten sposób *kwadratury złożone* Newtona-Cotesa, służące do obliczania całki w całym przedziale $[a, b]$.
Jeśli w każdym z podprzedziałów $[t_k, t_{k+1}]$ użyć wzoru trapezów

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(t_k) + f(t_{k+1})] - \frac{h^3}{12}f''(\xi_k),$$

gdzie $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$, to otrzymamy

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = T_n(f) + R_n^T(f),$$

gdzie T_n jest kwadraturą nazywaną *złożonym wzorem trapezów*, określoną wzorem

$$T_n(f) = h \sum_{k=0}^n {}'' f(t_k),$$

gdzie \sum' oznacza sumę z pierwszym składnikiem podzielonym przez dwa, a sum'' oznacza sumę z pierwszym i ostatnim składnikiem podzielonym przez dwa.

R_n^T jest resztą tej kwadratury, równą

$$R_n^T(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k) = -n \frac{h^3}{12} f''(\xi) = -(b-a) \frac{h^2}{12} f''(\xi)$$

dla pewnego $\xi \in (a, b)$, pod warunkiem, że $f \in C^2[a, b]$.

Niech n będzie liczbą parzystą, $n = 2m$. Załóżmy, że $f \in C^4[a, b]$ i podzielmy przedział całkowania na m podprzedziałów $[t_k, t_{k+1}]$ o długości $2h$, a następnie zastosujmy do całki w każdym podprzedziale wzór Simpsona

$$\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)dx = \frac{2h}{6}[f(t_{2k}) + 4f(t_{2k+1}) + f(t_{2k+2})] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta_k),$$

gdzie $\eta_k \in (t_{2k}, t_{2k+2})$. W efekcie otrzymujemy

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)dx = S_n(f) + R_n^S(f),$$

gdzie $S_n(f)$ jest *złożonym wzorem Simpsona*:

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{h}{3}[f(t_0) + 4f(t_1) + 2f(t_2) + 4f(t_3) + 2f(t_4) + \dots + 2f(t_{2m-2}) + 4f(t_{2m-1}) + f(t_{2m})] = \\ &= \frac{h}{3}[2 \sum_{k=0}^m {}'' f(t_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^m f(t_{2k-1})], \end{aligned}$$

a $R_n^S(f)$ jest resztą tego wzoru

$$R_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=0}^{m-1} f^{(4)}(\eta_k) = -m \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) = -(b-a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\eta),$$

gdzie $\eta \in (a, b)$.

Ze wzorów na reszty złożonych wzorów trapezów i Simpsona wynika, że dla dostatecznie regularnych funkcji f całka $I(f)$ może być przybliżona dowolnie blisko za pomocą $T_n(f)$ lub $S_n(f)$, pod warunkiem, że weźmiemy dostatecznie małe h . Zachodzi zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = I(f)$$

Problemem dla kwadratur Newtona-Cotesa są funkcje, dla których przedział całkowania nie zawiera się w dziedzinie funkcji. Przykładem jest następująca całka $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Ponieważ w punktach $x = -1$ oraz $x = 1$ funkcja jest nieokreślona, nie możemy zastosować kwadratur Newtona-Cotesa.

4 Metoda Romberga

W tej sekcji posłużymy się poznanymi już złożonymi kwadraturami Newtona-Cotesa do wyprowadzenia metody Romberga całkowania numerycznego.

4.1 Twierdzenie Eulera - Maclaurina

Oznaczmy przez B_k k-tą liczbę Bernoulliego. Przypomnijmy:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

Definicja 6 (Twierdzenie Eulera - Maclaurina). *Niech $f \in C^{2m+2}[a, b]$. Wtedy reszta złożonego wzoru trapezów wyraża się wzorem*

$$R_n^T(f) = \frac{c_1}{n^2} + \frac{c_2}{n^4} + \frac{c_3}{n^6} + \dots + \frac{c_m}{n^{2m}} + \frac{d(n)}{n^{2m+2}} \quad (n \rightarrow \infty), \quad (5)$$

gdzie $d(n)$ jest funkcją ograniczoną, tzn. $\exists_M \forall_n |d(n)| < M$ oraz

$$c_k = \frac{(b-a)^{2k}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)]$$

Sprawdźmy na jakimś przykładzie, jak bardzo potrafimy przyspieszyć zbieżność metody trapezów. Niech $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 3$.

$$I(f) = \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln 3 \approx 1.098612$$

Teraz policzmy tę samą całkę złożoną metodą trapezów dzieląc przedział całkowania na 64 podprzedziały. Wydawałoby się intuicyjne, że jeśli podzielimy przedział całkowania na dwa razy więcej przedziałów, to uzyskamy dużo lepszy wynik. Niestety okazuje się, że tak nie jest.

$$T_{64} = \mathbf{1.098685} \quad T_{128} = \mathbf{1.098630}$$

Złożona metoda trapezów dla podwojonej liczby przedziałów nie dała większej liczby cyfr dokładnych. Spójrzmy na błąd złożonej metody trapezów przy podziale na n przedziałów

$$R_n^T(f) = \frac{c_1}{n^2} + \frac{c_2}{n^4} + \dots + \frac{d(n)}{n^{2m+2}} \quad R_n^T = I - T_n$$

A następnie na błąd przy podziale na $2n$ przedziałów

$$R_{2n}^T(f) = \frac{c_1}{4n^2} + \frac{c_2}{16n^4} + \dots \quad R_{2n}^T = I - T_{2n}$$

Spróbujmy usunąć $\frac{c_1}{n^2}$ - najbardziej znaczący ze składników reszty $R_n^T(f)$

$$4R_{2n}^T(f) - R_n^T(f) = -\frac{3}{4}c_2 \frac{1}{n^4} - \frac{15}{16}c_3 \frac{1}{n^{16}} - \dots \quad 4R_{2n}^T - R_n^T = 3I - (4T_{2n} - T_n)$$

Zatem dla

$$T'_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

zachodzi

$$R'_n = I - T'_n = -\frac{c_2}{4n^4} - \frac{5}{16n^6} + \dots$$

Sprawdźmy teraz, jaki efekt otrzymamy w porównaniu do wcześniej wyliczonych T_{64} i T_{128} .

$$T'_{64} = \frac{4T_{128} - T_{64}}{3} = \mathbf{1.098612\dots}$$

Widać, że zwiększyliśmy liczbę cyfr dokładnych.

4.2 Tablica Romberga

Skoro udało nam się wyeliminować najbardziej znaczący składnik błędu złożonego wzoru trapezów R_n^T , to dlaczego mielibyśmy zatrzymać się w tym miejscu? W analogiczny sposób jak poprzednio możemy usunąć kolejny najbardziej znaczący składnik reszty: $\frac{1}{n^4}$. Następnie możemy usuwać kolejne najbardziej znaczące składniki. W ten właśnie sposób działa metoda Romberga.

W metodzie tej skonstruujemy trójkątną tablicę kolejnych „przyspieszeń” złożonego wzoru trapezów. Niech

$$T_{0,k} = T_{2^k}$$

Pierwsza kolumna tablicy wypełniona jest złożonymi wzorami trapezów dla podziału przedziału całkowania na 2^k równych części. Niech $h_k = \frac{b-a}{2^k}$ oznacza

długość podprzedziału.

Kolejne kolumny tablicy konstruujemy poznaną przez nas metodą:

$$T_{m,k} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1} \quad (6)$$

W efekcie otrzymujemy następującą tablicę:

$T_{0,0}$					
$T_{0,1}$	$T_{1,0}$				
$T_{0,2}$	$T_{1,1}$	$T_{2,0}$			
$T_{0,3}$	$T_{1,2}$	$T_{2,1}$	$T_{3,0}$		
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
$T_{0,k}$	$T_{1,k-1}$	$T_{2,k-2}$	$T_{3,k-3}$	\dots	$T_{k,0}$

Tablica 1: Tablica Romberga.

Twierdzenie 5 (Druga kolumna tablicy Romberga). *W drugiej kolumnie tablicy Romberga znajdują się złożone wzory Simpsona dla $n = 2^i$, ($i = 0, 1, \dots$), tj.*

$$T_{1,k} = S_{2^{k+1}}$$

Dowód. Niech $n = 2m$. Rozwińmy wzór na S_n .

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{h}{3} [f(t_0) + 4f(t_1) + 2f(t_2) + 4f(t_3) + 2f(t_4) + \dots + 2f(t_{2m-2}) + 4f(t_{2m-1}) + f(t_{2m})] = \\ &= \frac{h}{3} [2 \sum_{k=0}^m {}''f(t_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^m f(t_{2k-1})] = \\ &= \frac{h}{3} [4 \sum_{k=0}^m {}''f(t_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^m f(t_{2k-1})] - \frac{h}{3} 2 \sum_{k=0}^m {}''f(t_{2k}) = \\ &= \frac{4T_n(f) - T_m(f)}{3} \end{aligned}$$

Widzimy, że otrzymany wzór jest taki sam jak wzór na drugą kolumnę w tablicy Romberga. Stąd

$$S_{2^{k+1}} = \frac{4T_{2^{k+1}} - T_{2^k}}{3} = \frac{4T_{0,k+1} - T_{0,k}}{3} = T_{1,k}$$

□

Przy obliczaniu pierwszej kolumny, czyli złożonych wzorów trapezów dla $n = 2^i$ możemy wykonać małą optymalizację, która pozwoli nam policzyć wszystkie $T_{0,0}, T_{0,1}, \dots, T_{0,k}$ czyli de facto T_1, T_2, \dots, T_{2^k} dodając wartość funkcji całkowanej w każdym z 2^k węzłów tylko jeden raz. Niech $h_i = \frac{b-a}{2^i}$.

$$T_{2^{i+1}} = \frac{1}{2} T_{2^i} + \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{2^i} f\left(a + kh_i - \frac{h_i}{2}\right)$$

W załączonym programie pierwsza kolumna tablicy Romberga obliczana jest właśnie w taki sposób.

Należy wspomnieć, że ponieważ w metodzie Romberga wykorzystujemy kwadraty dla węzłów równoodległych, nie możemy scałkować funkcji, dla których przedział całkowania nie zawiera się w ich dziedzinach.

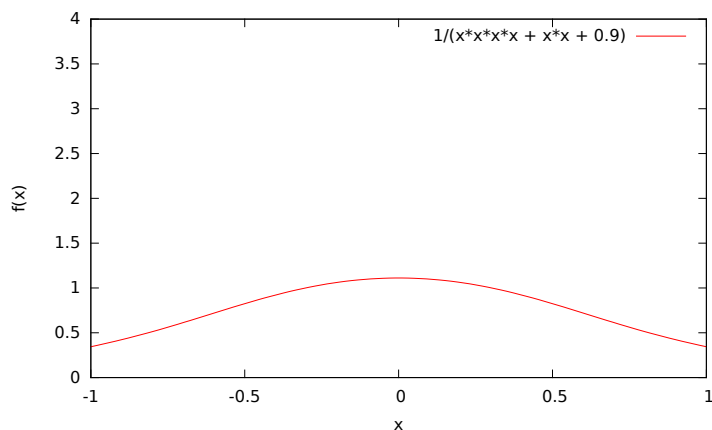
5 Doświadczenia

Przejdźmy teraz do prezentacji wyników doświadczeń. Zbadamy działanie metody Romberga na pięciu funkcjach. Tak jak polecono w zadaniu, liczenie kolejnych wierszy tablicy Romberga przerwiemy w momencie, gdy dla pewnego $K > 0$

$$|T_{K,0} - T_{K-1,0}| < \epsilon |T_{K,0}|$$

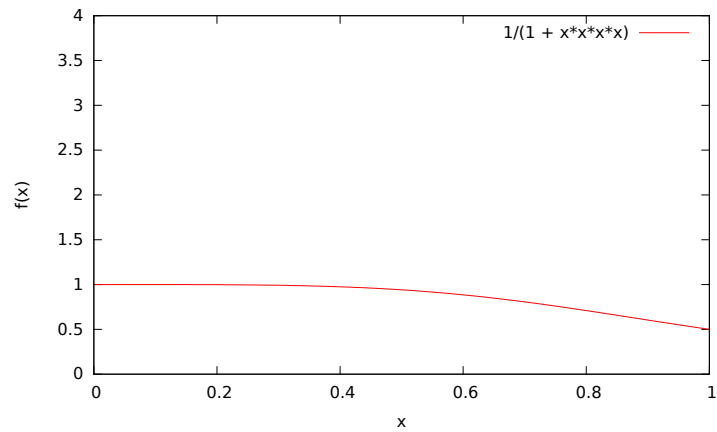
Dodatkowo policzymy pełną tablicę Romberga oraz przedstawimy pełną tablicę błędów. Dla każdej funkcji obliczono wartość całki za pomocą wbudowanej w Julii funkcji `quadgk()`, która oblicza całkę używając kwadratur Gaussa-Konroda.

$$1. \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^4+x^2+0.9}dx \approx 1.5822329637296728$$



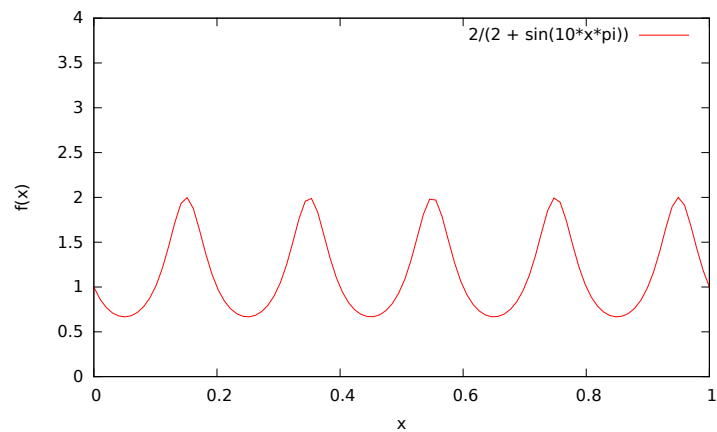
Rysunek 1: $f(x) = \frac{1}{x^4+x^2+0.9}$

$$2. \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx \approx 0.866972987339911$$



Rysunek 2: $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{2+\sin(10\pi x)}dx \approx 1.1547005383792308$$

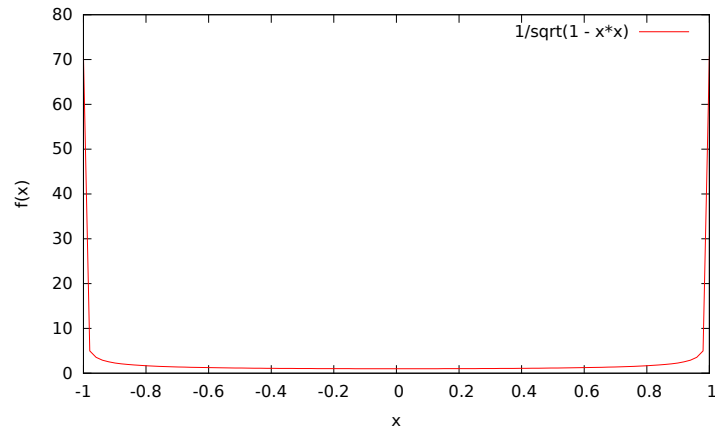


Rysunek 3: $f(x) = \frac{2}{2+\sin(10\pi x)}$

$$4. \int_a^b f(x)dx = \int_{-200}^{200} \cos\left(\frac{200}{1+x^2}\right)dx \approx 364.56214839923837$$

Dla tej funkcji zbyt trudno narysować wykres, ponieważ w przedziale $[-1, 1]$ cosinus „wariuje”. Natomiast przy $x \rightarrow \pm\infty$ funkcja f dąży do jedynki.

$$5. \int_a^b f(x)dx = \int_{-0.9999}^{0.9999} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx 3.113308146635046$$



Rysunek 4: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6 Wnioski

Literatura

- [1] Dahlquist, G., Björck, A. *Numerical Methods in Scientific Computing, Volume I*, Society for Industrial and Applied Mathematics (September 4, 2008), 354-360.
- [2] Cheney, E. W., Light, W. A. *A Course in Approximation Theory*, American Mathematical Soc., 2009, 11-22.
- [3] Erdős, P. *Problems and results on the theory of interpolation, II*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 12 (1961), 235-244.
- [4] Brutman, L. *On the Lebesgue function for polynomial interpolation*. SIAM J. Numerical Analysis 15 (1978), 694-704.
- [5] Rivlin, T.J. *Chebyshev Polynomials* Wiley, New York, 1974. 2nd Edition, 1990.
- [6] Turetskii, A. H. *The bounding of polynomials prescribed at equally distributed points*. Proc. Pedag. Inst. Vitebsk 3 (1940), 117-127.
- [7] Faber, G. *Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen*. Jahresber. Deutsch. Math. Verein., 23 (1914), 191-200.
- [8] Vertesi, P. *Optimal Lebesgue constant for Lagrange interpolation*. SIAM J. Numerical Analysis Vol. 27 (1990), 1322-1331.