สาระการเรียนรู้

1. สมการลอจิก
2. ตารางค่าความจริง
3. ลอจิกเกต
4. การเขียนสมการพีชคณิตจากวงจรลอจิก
5. การเขียนวงจรลอจิกจากสมการพีชคณิต
6. การสร้างตารางค่าความจริงเพื่อหาเอาต์พุตของสมการลอจิก
7. วงจรเชิงจัดหมู่

1. สมการลอจิก (logic expression)

การทำงานของระบบดิจิตอล สามารถอธิบายได้โดยใช้สมการพีชคณิตลอจิก (logic equation) ซึ่งประกอบด้วย ตัวแปรลอจิก (logic variable) เป็นตัวแปรที่รับค่าเพียงสองค่า หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ตัวแปรสองสถานะ (Bi-State variable) โดยมีข้อกำหนดคือ สามารถมีสถานะได้เพียงสองสถานะเท่านั้น และจะอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งเท่านั้น จะอยู่พร้อมกันทั้งสองสถานะในเวลาเดียวกันไม่ได้ สถานะดังกล่าวอาจแทนความหมายต่าง ๆ เช่น เปิด-ปิด, สูง-ต่ำ, หนึ่ง-ศูนย์ เป็นต้น

ตัวกระทำทางลอจิก (logic operators) เป็นตัวรับเอาตัวแปรลอจิกมาดำเนินการเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ โดยผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกระทำและสถานะของตัวแปรลอจิกที่ถูกกระทำ เขียนแทนด้วยไดอะแกรมได้ดังภาพ

ภาพที่ 1 บล็อกไดอะแกรมของตัวกระทำทางลอจิก

ตัวแปรอินพุท 1 ตัว สามารถทำให้เกิดสถานะที่แตกต่างกันได้ 2 กรณี เช่น ตัวแปร A มีสถานะที่แตกต่างกันได้ 2 กรณี คือ A = 0 หรือ A = 1 เมื่อเพิ่มจำนวนตัวแปรอินพุทเป็น 2 ตัว เช่น A และ B สถานะที่แตกต่างกันจะเพิ่มเป็น 4 กรณี หรือ 2^2 กรณี คือ A = 0, B = 0 หรือ A = 0, B = 1 หรือ A = 1, B = 0 และ A = 1, B = 1

ดังนั้นถ้ามีตัวแปรอินพุทจำนวน n ตัว จะสถานะที่แตกต่างกันทั้งหมด 2^n กรณี ตัวกระทำทางลอจิกพื้นฐานได้แก่ AND, OR, NOT, NAND, NOR, XOR และ XNOR

2. ตารางค่าความจริง

เป็นตารางที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรลอจิกอินพุทและเอาท์พุทที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่เกิดจากสมการลอจิก ตารางค่าความจริงจะประกอบด้วย ค่าสถานะของตัวแปรลอจิกทางด้านอินพุทที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2^n กรณี เมื่อ n คือ จำนวนตัวแปรลอจิกด้านอินพุท และสถานะของตัวแปรลอจิกด้านเอาท์พุทที่เกิดจากการกระทำทางลอจิกระหว่างตัวแปรทางด้านอินพุทค่าต่างๆ

Truth table สำหรับตัวแปรอินพุท 2 ตัว ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอินพุท A, B และเอาท์พุท Y ดังแสดงในตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 ให้เขียนตารางค่าความจริงของสมการลอจิกที่มีตัวแปรอินพุต 1, 2 และ 3 ตัวแปรตามลำดับ

Input		Output
A	B	Y = f(A,B)
0	0	Y = f(A,B) = f(0,0)
0	1	Y = f(A,B) = f(0,1)
1	0	Y = f(A,B) = f(1,0)
1	1	Y = f(A,B) = f(1,1)

เช่น สมการลอจิก $Y = \overline{AB} + \overline{AB}$ เขียนแทนด้วย truth table ได้ดังนี้

Input		Output
A	B	Y = f(A,B)
0	0	f(A,B) = f(0,0) = 0
0	1	f(A,B) = f(0,1) = 1
1	0	f(A,B) = f(1,0) = 0
1	1	f(A,B) = f(1,1) = 1

3. ลอจิกเกต (Logic Gate)

คืออุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่มีการทำงานเหมือนสวิตช์ (switch) นั่นคือ มีสถานะเปลี่ยนแปลงไปมาได้เพียง 2 สถานะ โดยใช้ระดับแรงดันไฟฟ้าในการแทนสถานะของตัวแปรลอจิก โดยแรงดันไฟฟ้าสูง (High : H) และแรงดันไฟฟ้าต่ำ (Low : L) ลอจิกเกตพื้นฐานที่ควรศึกษาได้แก่

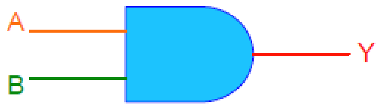
3.1 AND Gate

การกระทำ AND จะให้เอาท์พุทออกมาเป็นลอจิก 1 หรือแรงดัน H เมื่อตัวแปรอินพุทมีสถานะเป็นลอจิก 1 หรือมีแรงดัน H ทั้งหมด การ AND แสดงด้วยสัญลักษณ์ • ระหว่างตัวแปรลอจิก การ AND ระหว่างตัวแปร A และ B แสดงด้วยสมการลอจิกเป็น

$$Y = f(A, B) = A \cdot B$$

เมื่อ Y คือ เอาท์พุทที่ได้จากการ AND และการกระทำ AND แสดงได้ดังบล็อกไดอะแกรม (ภาพที่ 2)

สัญลักษณ์



สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = A \cdot B$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	f(A,B) = A•B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ภาพที่ 2 บล็อกไดอะแกรมของการกระทำ AND

3.2 OR Gate

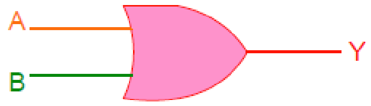
การกระทำ OR จะให้เอาท์พุทออกมาเป็นลอจิก 0 หรือแรงดัน L เมื่อตัวแปรอินพุทมีสถานะเป็นลอจิก 0 หรือมีแรงดัน L ทั้งหมด

การกระทำ OR แสดงด้วยสัญลักษณ์ + ระหว่างตัวแปรลอจิก การ OR ระหว่างตัวแปร A และ B แสดงด้วยสมการลอจิกเป็น

$$Y = f(A, B) = A+B$$

เมื่อ Y คือ เอาท์พุทที่ได้จากการ OR และการกระทำ OR แสดงได้ดังบล็อกไดอะแกรม (ภาพที่ 3)

สัญลักษณ์



สมการพีชคณิตลอจิก Y = f(A,B) = A+B

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	f(A,B) = A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ภาพที่ 3 บล็อกไดอะแกรมของการกระทำ OR

3.3 NOT Gate (Inverters)

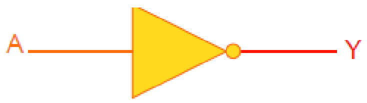
การกระทำ NOT จะให้เอาท์พุทออกมาเป็นลอจิกที่มีสถานะตรงข้ามกับสถานะลอจิกของตัวแปรอินพุทการ NOT แสดงด้วยสัญลักษณ์ ¯ เหนือตัวแปรลอจิกอินพุท เรียกว่าเครื่องหมาย complement หรือ Bar

การกระทำ NOT ของตัวแปร A แสดงด้วยสมการลอจิกเป็น

$$Y = f(A) = \overline{A}$$

เมื่อ Y คือ เอาท์พุทที่ได้จากการ NOT และ การกระทำ NOT แสดงได้ดังบล็อกไดอะแกรม (ภาพที่ 4)

สัญลักษณ์



สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = \overline{A}$

ตารางค่าความจริง

Input	Output
A	$f(A,B) = \overline{A}$
0	1
1	0

ภาพที่ 4 บล็อกไดอะแกรมของการกระทำ NOT

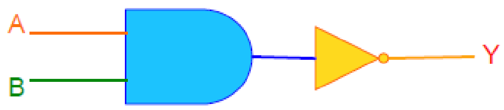
3.4 NAND Gate

การกระทำ NAND เกิดจากการนำตัวแปรด้านเอาท์พุทที่ได้จากการกระทำ AND มาผ่านการกระทำ NOT ทำให้ผลลัพธ์ของตัวแปรที่ได้จากการกระทำ NAND มีสถานะตรงข้ามกับการกระทำ AND นั่นคือ การกระทำ NAND จะทำให้ตัวแปรลอจิกทางด้านเอาท์พุทมีสถานะเป็น 0 เมื่อตัวแปรลอจิกทางด้านอินพุทที่เข้าสู่การกระทำ NAND มีสถานะเป็น 1 ทั้งหมด เราสามารถอธิบายการกระทำ NAND โดยใช้สมการลอจิกดังนี้

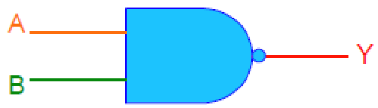
$$Y = f(A,B) = \overline{A \cdot B}$$

เมื่อ A•B คือ ผลลัพธ์ที่ได้จากการกระทำ AND และ การกระทำ NAND แสดงได้ดังบล็อกไดอะแกรม (ภาพที่ 5)

สัญลักษณ์



หรือ



สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = \overline{A \cdot B}$

ตารางค่าความจริง

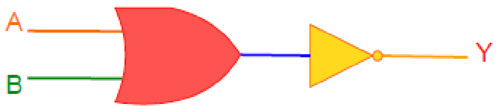
Input		Output
A	B	$f(A,B) = \overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ภาพที่ 5 บล็อกไดอะแกรมของการกระทำ NAND

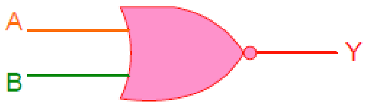
3.5 NOR Gate

เกิดจากการนำ inverter มาต่อกับเกต “AND” ทำให้ค่าผลลัพธ์ที่ได้จากเกตชนิดนี้มีค่าตรงกันข้ามกับเกต “AND” และการกระทำ NOR Gate แสดงได้ดังบล็อกไดอะแกรม (ภาพที่ 6)

สัญลักษณ์



หรือ



สมการพีชคณิตลอจิก Y = f(A) = $\overline{A+B}$

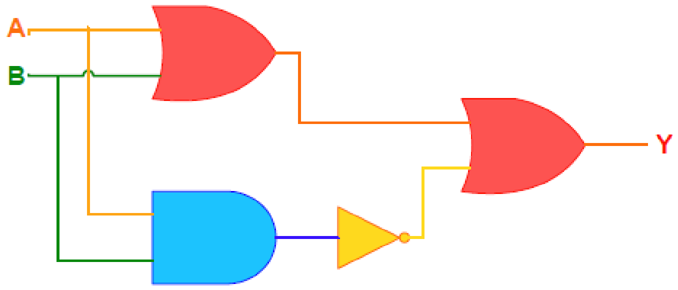
ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	f(A,B) = $\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

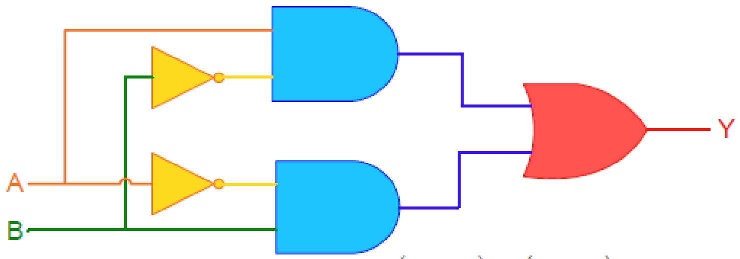
ภาพที่ 6 บล็อกไดอะแกรมของการกระทำ NOR Gate

3.6 Exclusive - OR Gate

เป็นการนำเกตพื้นฐานมาประยุกต์ใช้งาน จะให้ผลลัพธ์เป็น “1” เมื่ออินพุตมีค่าตรงกันข้ามกัน และการกระทำ OR Gate แสดงได้ดังบล็อกไดอะแกรม (ภาพที่ 7)

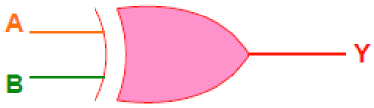


Y = f(A) = $A \oplus B = (A + B) \cdot \overline{(A \cdot B)}$



Y = f(A) = $A \oplus B = (A \cdot \overline{B}) + (\overline{A} \cdot B)$

สัญลักษณ์



สมการพีชคณิตลอจิก Y = f(A) = $A \oplus B$

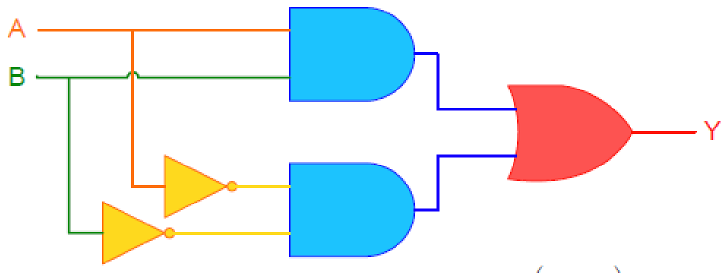
ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	f(A,B) = $A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ภาพที่ 7 บล็อกไดอะแกรมของการกระทำ OR Gate

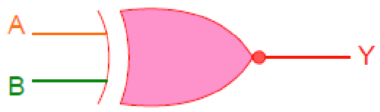
3.7 Exclusive – NOR Gate (XNOR Gate)

เกิดจากการนำ Inverter มาต่อกับ XOR Gate ทำให้ค่าผลลัพธ์ที่ได้เกตชนิดนี้ มีค่าตรงกันข้ามกับ XOR Gate ทันที ดังนั้น เกตชนิดนี้จึงมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า “Comparator” และการกระทำ OR Gate แสดงได้ดังบล็อกไดอะแกรม (ภาพที่ 8)



Y = f(A,B) = $\overline{A \oplus B} = \left(A \cdot B\right) + \left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right)$

สัญลักษณ์



สมการพีชคณิตลอจิก Y = f(A,B) = $\overline{A \oplus B}$

ตารางค่าความจริง

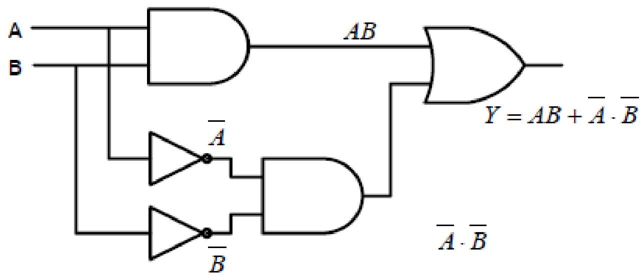
Input		Output
A	B	f(A,B) = $\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ภาพที่ 8 บล็อกไดอะแกรมของการกระทำ XOR Gate

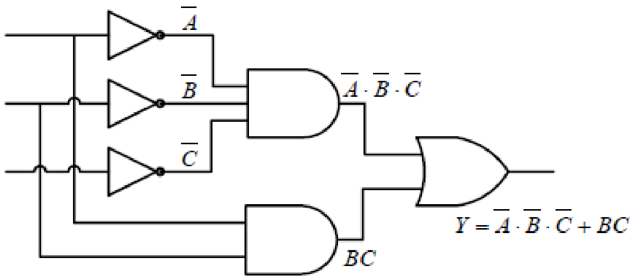
4. การเขียนสมการพีชคณิตจากวงจรลอจิก

การเขียนสมการพีชณิตจากวงจรลอจิกจะใช้หลักการพิจารณารูปวงจรลอจิกทีละส่วน โดยเริ่มจากด้านอินพุต แล้วพิจารณาไปทางเอาต์พุตตามลำดับ แล้วนำสมการในแต่ละเกตมารวมกันตามคุณสมบัติของเกตนั้น ๆ ดังตัวอย่าง

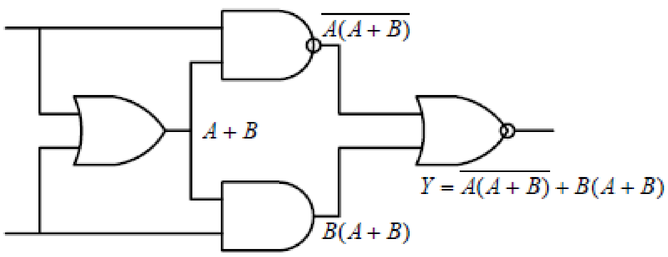
ตัวอย่างที่ 2 ให้เขียนสมการพีชคณิตของวงจรลอจิกต่อไปนี้



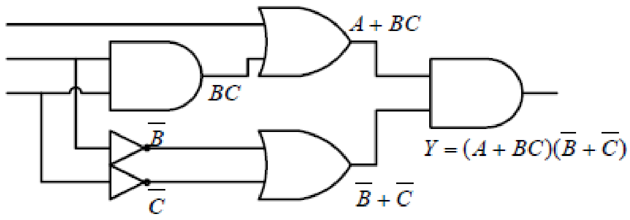
$Y = AB + \overline{AB}$ ....Ans.



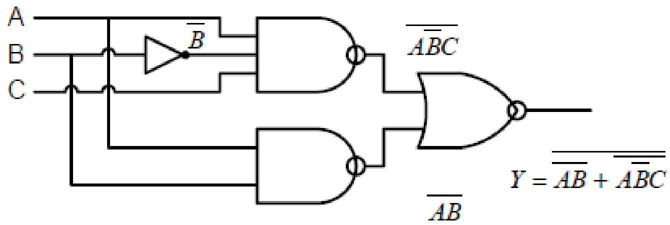
$Y = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + BC$ ....Ans.



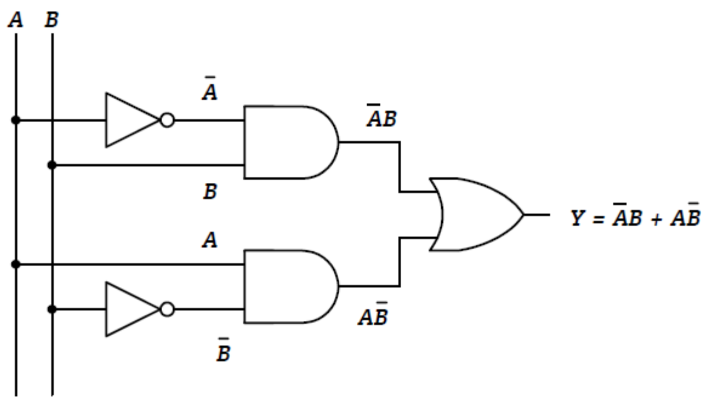
$Y = \overline{A(A+B)} + B(A+B)$ ....Ans.



$Y=(A+BC)(\overline{B}+\overline{C})$ ....Ans.



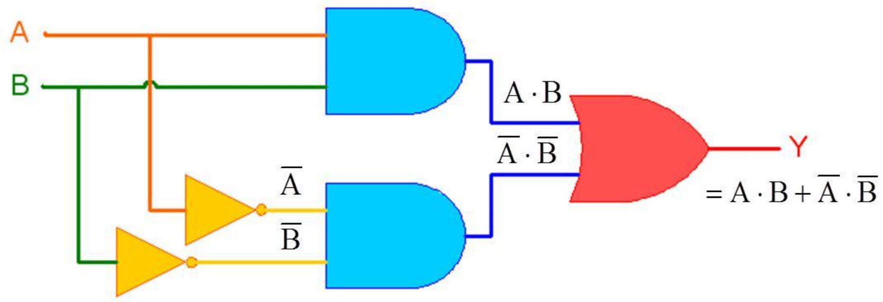
$Y=\overline{\overline{AB}+\overline{A\overline{B}C}}$ ....Ans.



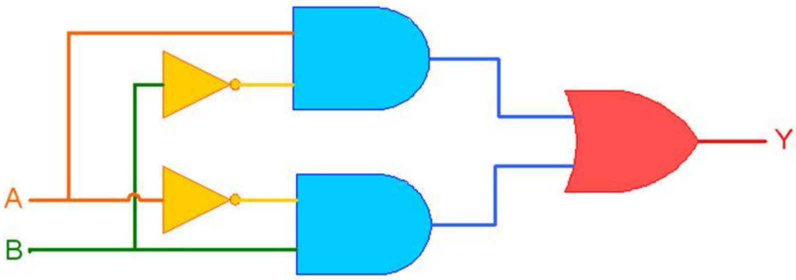
5. การเขียนวงจรลอจิกจากสมการพีชคณิต

การเขียนวงจรลอจิกจากสมการพีชคณิตนั้นต้องพิจารณาถึงสมการเป็นส่วน ๆ โดยเขียนจากส่วนย่อยไปหาส่วนใหญ่ (ตัวอย่างที่ 3)

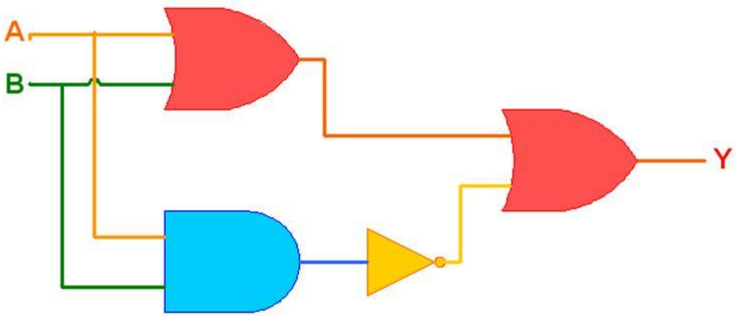
ตัวอย่างที่ 3 ให้เขียนวงจรลอจิกจากสมการพีชคณิตต่อไปนี้



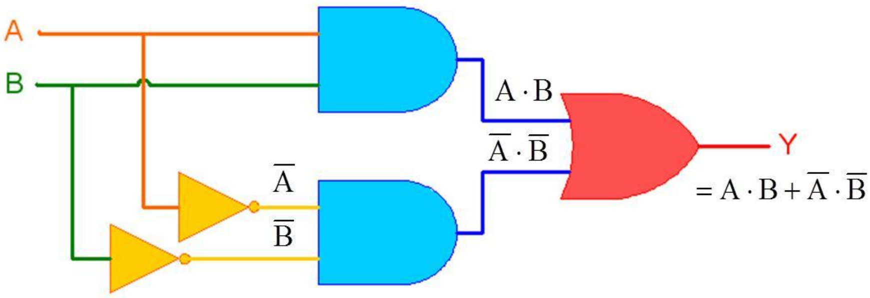
$$Y = f(A,B) = \overline{A \oplus B} = (A \cdot B) + (\overline{A} \cdot \overline{B})$$



$$Y = f(A) = A \oplus B = (A \cdot \overline{B}) + (\overline{A} \cdot B)$$



$$Y = f(A) = A \oplus B = (A + B) \cdot \overline{(A \cdot B)}$$



$$Y = f(A,B) = \overline{A \oplus B} = (A \cdot B) + (\overline{A} \cdot \overline{B})$$

6. การสร้างตารางค่าความจริงเพื่อหาเอาต์พุตของสมการลอจิก

การเขียนตารางค่าความจริงของสมการลอจิกนั้น ต้องพิจารณาจำนวนตัวแปรอินพุต โดยกำหนดสถานะของอินพุตเพียง 2 สถานะเท่านั้น คือ “0” และ “1” ดังนั้น ตารางค่าความจริงจะมีจำนวนเอาต์พุตเป็นเท่าใด ขึ้นอยู่กับจำนวนอินพุต คือ จะได้ทั้งหมด 2^n เมื่อ n คือ จำนวนอินพุต

ตัวอย่างที่ 4 ให้เขียนตารางค่าความจริงของสมการพีชคณิตต่อไปนี้

(1) $Y = \overline{A}B + A\overline{B}$ โดยที่มีตัวแปรอินพุต 2 ตัว ดังนั้น จึงมีเอาต์พุตทั้งหมด $2^2 = 4$ กรณี

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$Y = \overline{A}B + A\overline{B}$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

(2) $Y = AB + \overline{C}$ มีตัวแปรอินพุต 3 ตัว ดังนั้น จึงมีเอาต์พุตทั้งหมด $2^3 = 8$ กรณี

A	B	C	AB	$\overline{C}$	$Y = AB + \overline{C}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

(3) $Y = \overline{B}(\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{C})$ มีตัวแปรอินพุต 3 ตัว ดังนั้น จึงมีเอาต์พุตทั้งหมด $2^3 = 8$ กรณี

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$(\overline{A}+B)$	$(\overline{A}+\overline{C})$	$Y=\overline{B}(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{C})$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0

(4) $Y = (A+ \overline{B}C)C$ มีตัวแปรอินพุต 3 ตัว ดังนั้น จึงมีเอาต์พุตทั้งหมด $2^3 = 8$ กรณี

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{B}C$	$A+\overline{B}C$	$Y=(A+\overline{B}C)C$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1

(5) $Y = \overline{AB + CD}$ มีตัวแปรอินพุต 3 ตัว ดังนั้น จึงมีเอาต์พุตทั้งหมด $2^4 = 16$ กรณี

A	B	C	D	AB	CD	AB+CD	$Y = \overline{AB + CD}$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

7. วงจรเชิงจัดหมู่

วงจรดิจิตอลจะประกอบด้วยการนำเกตต่าง ๆ มาต่อรวมกันให้สามารถทำงานได้ตามข้อมูลที่เข้าไปทางอินพุต โดยทั่วไปแล้วจะมีสองประเภท คือ

1. วงจรเชิงจัดหมู่ (combination logic circuits) เป็นวงจรที่สถานะทางเอาต์พุตขึ้นอยู่กับสถานะทางอินพุตหรือวงจรคอมไบเนชัน

2. วงจรเชิงลำดับ (sequential logic circuits) วงจรที่เอาต์พุตจะขึ้นอยู่กับสัญญาณนาฬิกาทางอินพุตด้วย

สมการลอจิกเกตและวงจรลอจิกเกตของวงจรแบบ combination logic มีจำนวนลอจิกเกตที่ต่ออยู่ในวงจรเป็นจำนวนมาก ส่งผลให้วงจรที่สร้างได้มีขนาดใหญ่ ทำ ให้ยุ่งยากต่อการสร้างและทำ ให้ต้นทุนในการผลิตสูง นอกจากนี้ยังทำ ให้การวิเคราะห์วงจรเป็นไปอย่างยากลำบาก การลดรูปสมการลอจิกเกตให้มีรูปแบบที่ง่ายและประหยัด (minimization) จึงเป็นวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าว ซึ่งจะส่งผลให้วงจรลอจิกที่สร้างได้มีจำนวนลอจิกเกตลดลง ลดต้นทุนในการผลิต และทำให้การวิเคราะห์ง่ายขึ้น ในส่วนนี้จะกล่าวถึงวิธีในการลดรูปวงจรลอจิกเกตที่สำคัญก่อน 2 วิธี ได้แก่ การลดรูปโดยใช้พีชคณิต (boolean algebra) และการใช้แผนผัง Kanaugh (Kanaugh Map หรือ K’s Map)

7.1 Boolean Algebra Method

เป็นพีชคณิตที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรแบบลอจิก โดยอาศัยตัวดำเนินการทางลอจิกต่าง ๆ ค้นพบ โดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ จอร์ช บลู (George Boole, 1815-1864) กฎของพีชคณิตบูลีน (Law of Boolean Algebra) ที่สำคัญได้แก่

1. กฎการตรงกันข้าม (Complement Law)

$$A \cdot \overline{A} = 0 \qquad A + \overline{A} = 1$$

2. คุณสมบัติของศูนย์

$$0 \cdot A = 0 \qquad 0 + A = A$$

3. คุณสมบัติของหนึ่ง

$$1 \cdot A = 1 \qquad 1 + A = 1$$

4. กฎการสลับที่ (Commutative Laws)

$$A + B = B + A \qquad AB = BA$$

5. กฎการจัดหมู่ (Associative Laws)

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C$$

6. กฎการกระจาย (Distributive Law)

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A + (BC) = (A + B)(A + C)$$

7. กฎของเอกลักษณ์ (Identify Law)

$$A + A + ... = A \qquad AA.... = A$$

8. กฎการลบล้าง (Negation)

$$\overline{A} = \overline{A} \qquad \overline{\overline{A}} = A$$

9. กฎการลดทอน (Redundancy Law)

$$A + AB = A \qquad A + \overline{A}B = A + B$$

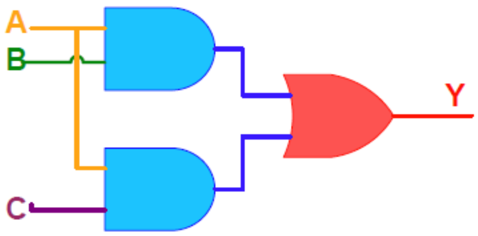
$$A(A + B) = A \qquad A(\overline{A} + B) = AB$$

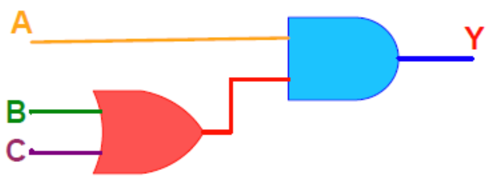
10. ทฤษฎีของดีมอร์แกน (Demorgan's Theorems)

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B} \qquad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

จากกฎพื้นฐานของพีชคณิตเหล่านี้ เราสามารถนำไปช่วยในการลดรูปของสมการลอจิกได้ ทำให้วงจรลอจิกที่ได้มีขนาดเล็กลง และต้นทุนในการผลิตต่ำ ทั้งยังส่งผลให้สามารถทำงานได้รวดเร็วขึ้น เนื่องจากสัญญาณอินพุตผ่านลอจิกเกตจำนวนน้อยก่อนการเกิดเป็นสัญญาณเอาท์พุต

ตัวอย่างการใช้ Boolean Algebra เพื่อหาวงจรไฟฟ้าที่เหมือนกัน แต่ใช้จำนวนเกตน้อยกว่า พิจารณาตารางค่าความจริงสำหรับสมการลอจิก $AB + BC$ ในภาพ a และสมการลอจิก $A(B + C)$ ในภาพ b ซึ่งได้จากการลดรูปสมการลอกจิกโดยใช้ Boolean Algebra (ภาพที่ 9)





$AB + BC$

A	B	C	AB	AC	$AB+BC$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

$A(B+C)$

A	B	C	A	$B+C$	$A(B+C)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

ภาพที่ 9 การลดรูปสมการลอกจิกโดยใช้ Boolean Algebra

ตัวอย่างที่ 5 ให้ลดรูปสมการพีชคณิตลอจิกต่อไปนี้

(1) $Y = A(B+C)\overline{A}+D$

$Y = A(B+C)\overline{A}+D$

$= A\overline{A}(B+C)+D$ ....*กฎการสลับที่*

$= 0\ (B+C)+D$ .... *กฎการตรงกันข้าม*

$= 0 + D$ ....*คุณสมบัติของศูนย์*

$= D$ ....*คุณสมบัติของศูนย์*

(2) $Y = \overline{\overline{A+B}+\overline{C}}$

$Y = \overline{\overline{A+B}+\overline{C}}$

$= \overline{\overline{(A+B)}}\cdot\overline{\overline{C}}$ ....*ทฤษฎีของดีมอร์แกน*

$= \overline{\overline{(A+B)}}\cdot C$ ....*กฎการลบล้าง*

$= \overline{\overline{A}\,\overline{B}}\cdot C$ ....*ทฤษฎีของดีมอร์แกน*

$= (\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}})\cdot C$ ....*ทฤษฎีของดีมอร์แกน*

$= (A+B)C$ ....*กฎการลบล้าง*

(3) $Y = A + \overline{A}B + A\overline{B}$

Y	$= A + \overline{A}B + A\overline{B}$	
	$= (A + \overline{A}B) + A\overline{B}$	.... กฎการจัดหมู่
	$= (A + B) + A\overline{B}$	.... กฎการลดทอน
	$= A + (B + A\overline{B})$	.... กฎการจัดหมู่
	$= A + (B + A)$	.... กฎการลดทอน
	$= A + B$	.... กฎของเอกลักษณ์

(4) $Y = \overline{B}(\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{C})$

Y	$= \overline{B}(\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{C})$	
	$= (\overline{BA} + \overline{B}B)(\overline{A} + \overline{C})$	.... กฎการกระจาย
	$= (\overline{BA} + 0)(\overline{A} + \overline{C})$	.... กฎการตรงกันข้าม
	$= (\overline{BA})(\overline{A} + \overline{C})$	.... คุณสมบัติของศูนย์
	$= \overline{B}\,\overline{AA} + \overline{B}\,\overline{AC}$	.... กฎการกระจาย
	$= \overline{B}\,\overline{A} + \overline{B}\,\overline{A}\,\overline{C}$	.... กฎของเอกลักษณ์
	$= \overline{B}\,\overline{A}(1 + \overline{C})$	.... กฎการกระจาย
	$= \overline{B}\,\overline{A}(1)$	.... คุณสมบัติของหนึ่ง
	$= \overline{B}\,\overline{A}$	.... คุณสมบัติของหนึ่ง

(5) $Y = (ABC + \overline{A})(A + \overline{C})$

Y	$= (ABC + \overline{A})(A + \overline{C})$	
	$= ABCA + ABC\overline{C} + \overline{A}A + \overline{AC}$	.... กฎการกระจาย
	$= ABC + ABC\overline{C} + \overline{A}A + \overline{AC}$	.... กฎของเอกลักษณ์
	$= ABC + AB \cdot 0 + 0 + \overline{A}\,\overline{C}$	.... กฎการตรงกันข้าม
	$= ABC + \overline{AC}$	.... คุณสมบัติของศูนย์

7.2 รูปแบบมาตรฐานของสมการลอจิก (standard form of logic expression)

สมการลอจิก มีรูปแบบมาตรฐาน 2 แบบคือ ผลรวมของผลคูณ (Sum of Products Equation, SOP) และ ผลคูณของผลรวม (Product of Sum Equation, POS)

7.2.1 สมการลอจิกแบบผลรวมของผลคูณ (Sum of Products Equation, SOP)

เป็นการแสดงค่าผลคูณของพีชคณิตลอจิกของตัวแปรตั้งแต่สองตัวขึ้นไปด้วยฟังก์ชัน AND (เรียกได้ว่าเป็น “Product Term”) แล้วนำผลคูณแต่ละส่วนมารวมกันโดยใช้ฟังก์ชัน OR เช่น

$$Y = f(A, B, C, D) = AB + ABC + AB\overline{CD} \qquad (a)$$

Product Term ที่เกิดจากการ AND กันของตัวแปรทุกตัวแปรที่เกี่ยวข้องในสมการ เรียกว่า “Minterm”

สมการที่มีทุกเทอมเป็น Minterm เรียกสมการนี้ว่า “Canonical Sum”

สมการ (a) ประกอบด้วย Minterm เพียงเทอมเดียวคือ *ABCD* ส่วนอีก 2 เทอม คือ *AB* และ *ABC* ไม่เป็น Minterm เนื่องจากมีตัวแปรไม่ครบ ดังนั้น สมการ (a) จึงไม่เป็น Canonical Sum ตัวอย่างเช่น สมการลอจิกของ 3 ตัวแปรแบบ SOP ที่เป็น Canonical Sum ได้แก่ สมการ *(b)*

$$y = f(A, B, C) = A\overline{BC} + A\overline{B}C\ \overline{A}BC + ABC \qquad (b)$$

สมการลอจิกจะประกอบด้วย Minterm กี่เทอมก็ได้ โดยที่จำนวน Minterm สูงสุด = 2^n เมื่อ n คือ จำนวนตัวแปรทั้งหมดของสมการ

สมการลอจิกที่อยู่ในรูป Canonical Sum สามารถเขียนแทนด้วยเลขฐานสอง (Binary Code) โดยมีข้อตกลงดังนี้

Uncomplement Variable เช่น *A, B, C,...* เขียนแทนด้วย 1

Complement Variable เช่น $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$,... เขียนแทนด้วย 0

นอกจากนี้ ยังสามารถเขียน Minterm ในรูปของ Minterm Number โดยแทนด้วยตัวอักษรย่อ mi เมื่อ i คือ เลขฐานสิบที่มีค่าเท่ากับ Binary Code ของ Minterm นั้น จากสมการ (b) เราสามารถเขียน Minterm ในรูปแบบต่าง ๆ ได้ดังตาราง

Minterm	Binary Code	Minterm Number
$A\overline{BC}$	100	m_4
$A\overline{B}C$	101	m_5
$\overline{A}BC$	011	m_3
ABC	111	m_7

ดังนั้น สมการลอจิกของ 3 ตัวแปร เขียนได้เป็น *f (A,B,C)* = 011+100 +101+111 หรือ *f(A,B,C)* = $\Sigma m(3,4,5,7)$ และสามารถเขียนตารางค่าความจริงของสมการลอจิกแบบ SOP ข้างต้น ได้ดังนี้

m_i	Input			m_3	m_4	m_5	m_7	Output
	A	B	C	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	ABC	$f(A,B,C)$
m_0	0	0	0	0	0	0	0	0
m_1	0	0	1	0	0	0	0	0
m_2	0	1	0	0	0	0	0	0
m_3	0	1	1	1	0	0	0	1
m_4	1	0	0	0	1	0	0	1
m_5	1	0	1	0	0	1	0	1
m_6	1	1	0	0	0	0	0	0
m_7	1	1	1	0	0	0	1	1

จากตารางค่าความจริง จะเห็นว่า Minterm ที่ให้ผลลัพธ์เป็นลอจิก 1 คือ Minterm ที่เกี่ยวข้องในสมการลอจิก ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการลอจิกแบบ SOP ของ Minterm ได้จากการรวม Minterm ที่ให้ผลลัพธ์เป็นลอจิก 1 จากตารางค่าความจริง

สมการลอจิกแบบ SOP ที่จะเป็นสมการแบบ Canonical sum นั้น ต้องเป็นสมการลอจิกที่ในแต่ละเทอมมีตัวแปรครบทุกตัวเท่านั้นการเปลี่ยนสมการ SOP ทั่วไปเป็นสมการมาตรฐาน ทำได้โดย “คูณเทอมที่ตัวแปรยังไม่ครบด้วยตัวแปรที่ขาดหายไป และมีค่าลอจิกเป็น 1 เช่น (A+ A)”

ตัวอย่างที่ 6 สมการใดต่อไปนี้เป็นสมการ SOP แบบ Canonical sum

(1) $y = f(A,B,C) = A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$

สมการนี้เป็นสมการ SOP แบบ Canonical Sum เนื่องจากทุกเทอมมีตัวแปรครบทุกตัว

(2) $y = f(A,B,C,D) = AB + ABC + AB\overline{C}\overline{D}$

สมการนี้ไม่เป็นสมการ SOP แบบ Canonical Sum เนื่องจากในเทอมที่ 1 ไม่มีตัวแปร C,D และเทอมที่ 2 ไม่มีตัวแปร D ดังนั้น จึงต้องคูณเทอมดังกล่าวด้วย $C+\overline{C}$ และ $D+\overline{D}$ ตามลำดับ

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C,D) &= AB + ABC + AB\overline{C}\overline{D} \\
&= AB + ABC(D+\overline{D}) + AB\overline{C}\overline{D} \\
&= AB + ABCD + ABC\overline{D} + AB\overline{C}\overline{D} \\
&= AB(C+\overline{C}) + ABCD + ABC\overline{D} + AB\overline{C}\overline{D} \\
&= ABC + AB\overline{C} + ABCD + ABC\overline{D} + AB\overline{C}\overline{D} \\
&= ABC(D+\overline{D}) + AB\overline{C}(D+\overline{D}) + ABCD + ABC\overline{D} + AB\overline{CD} \\
&= ABCD + ABC\overline{D} + AB\overline{C}D + AB\overline{CD} + ABCD + ABC\overline{D} + AB\overline{CD} \\
&= ABCD + ABC\overline{D} + AB\overline{C}D + AB\overline{CD}
\end{aligned}
$$

(3) $y = f(A,B,C) = AB + ABC + BC$

สมการนี้ไม่เป็นสมการ SOP แบบ Canonical Sum เนื่องจากในเทอมที่ 1 ไม่มีตัวแปร C และเทอมที่ 3 ไม่มีตัวแปร A ดังนั้น จึงต้องคูณเทอมดังกล่าวด้วย $A+\overline{A}$ และ $C+\overline{C}$ ตามลำดับ

$$\begin{aligned} f(A,B,C,D) &= A\overline{B} + ABC + \overline{B}C \\ &= A\overline{B}(C+\overline{C}) + ABC + (A+\overline{A})\overline{B}C \\ &= A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC + A\overline{B}C + \overline{AB}C \end{aligned}$$

$= A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC + \overline{A}\overline{B}C$ .... <u>Ans.</u>

7.2.2 สมการลอจิกแบบผลคูณของผลรวม (Product of Sum Equation, POS)

เป็นการแสดงค่าผลรวมของพีชคณิตลอจิกของตัวแปรตั้งแต่สองตัวขึ้นไปด้วยฟังก์ชัน OR (เรียกได้ว่าเป็น “Sum Term”) แล้วนำผลคูณแต่ละส่วนมาคูณกันโดยใช้ฟังก์ชัน AND ดัง สมการ *(c)*

$$y = f(A,B,C) = (A + B)(A + \overline{B} + C) \qquad (c)$$

Sum Term ที่เกิดจากการ OR กันของตัวแปรทุกตัวแปรที่เกี่ยวข้องในสมการ เรียกว่า “Maxterm” สมการที่มีทุกเทอมเป็น Maxterm เรียกว่า “Canonical Product”

สมการ (c) ประกอบด้วย Maxterm เพียงเทอมเดียวคือ *(A + B + C)* ส่วนอีกเทอม คือ *(A + B)* ไม่เป็น Maxterm เนื่องจากมีตัวแปรไม่ครบ ดังนั้น สมการ *(c)* จึงไม่เป็น Canonical Product

ตัวอย่างเช่น สมการลอจิกของ 3 ตัวแปรแบบ POS ของ Maxterm แสดงได้เป็น\

$$y = f(A, B, C) = (A + \overline{B} + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)(A + B + C) \qquad (d)$$

สมการลอจิกจะประกอบด้วย Maxterm กี่เทอมก็ได้ โดยที่จำนวน Maxterm สูงสุด = 2^n เมื่อ n คือ จำนวนตัวแปรทั้งหมดของสมการ

สมการลอจิกที่อยู่ในรูป Canonical Prodict สามารถเขียนแทนด้วยเลขฐานสอง (Binary Code) โดยมีข้อตกลงดังนี้

Uncomplement Variable เช่น *A, B, C,...* เขียนแทนด้วย 1

Complement Variable เช่น $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$,... เขียนแทนด้วย 0

นอกจากนี้ ยังสามารถเขียน Maxterm ในรูปของ Maxterm number โดยแทนด้วยตัวอักษรย่อ Mi เมื่อ i คือ เลขฐานสิบที่มีค่าเท่ากับ binary code ของ Maxterm นั้น และจากสมการ *(d)* เราสามารถเขียน Maxterm ในรูปแบบต่าง ๆ ได้ดังตาราง

Minterm	Binary Code	Maxterm Number
$(A+\overline{B}+\overline{C})$	011	M_3
$(A+\overline{B}+C)$	010	M_2
$(\overline{A}+B+C)$	100	M_4
$(A+B+C)$	000	M_0

ดังนั้น สมการลอจิกของ 3 ตัวแปร เขียนได้เป็น

$$f(A, B, C) = (000)(010)(011)(100)$$

หรือ

$$f(A, B, C) = \Pi M(0,2,3,4)$$

และสามารถเขียนตารางค่าความจริงของสมการลอจิกแบบ POS ข้างต้น ได้ดังนี้

Mi	Input			M_0	M_2	M_3	M_4	Output
	A	B	C	$(A+B+C)$	$(A+\overline{B}+C)$	$(A+\overline{B}+\overline{C})$	$(\overline{A}+B+C)$	$f(A,B,C)$
M_0	0	0	0	0	1	1	1	0
M_1	0	0	1	1	1	1	1	1
M_2	0	1	0	1	0	1	1	0
M_3	0	1	1	1	1	0	1	0
M_4	1	0	0	1	1	1	0	0
M_5	1	0	1	1	1	1	1	1
M_6	1	1	0	1	1	1	1	1
M_7	1	1	1	1	1	1	1	1

จากตารางค่าความจริงจะเห็นว่า Maxterm ที่ให้ผลลัพธ์เป็นลอจิก 0 คือ Maxterm ที่เกี่ยวข้องในสมการลอจิก ดังนั้นสามารถเขียนสมการลอจิกแบบ POS ของ Maxterm ได้จากการรวม Maxterm ที่ให้ผลลัพธ์เป็นลอจิก 0 จากตารางค่าความจริง

สมการลอจิกแบบ POS ที่จะเป็นสมการในรูปแบบมาตรฐานนั้น ต้องเป็นสมการลอจิกที่ในแต่ละเทอมมีตัวแปรครบทุกตัวเท่านั้นการเปลี่ยนสมการ POS ทั่วไปเป็นสมการมาตรฐาน ทำได้โดย “บวกเทอมที่ตัวแปรยังไม่ครบด้วยตัวแปรที่ขาดหายไป และมีค่าลอจิกเป็น 0 เช่น $(A\overline{A})$ โดยจัดรูปแบบด้วยคุณสมบัติ

$$A + BC = (A+B)(A+C)$$

ตัวอย่างที่ 7 สมการใดต่อไปนี้เป็นสมการ POS แบบ Canonical product

(1) $y = f(A,B,C) = (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

สมการนี้เป็นสมการ POS แบบ Canonical Product เนื่องจากทุกเทอมมีตัวแปรครบทุกตัว

(2) $y = f(A,B,C) = (A+B)(A+\overline{B}+C)$

สมการนี้ไม่เป็นสมการ POS แบบ Canonical Product เนื่องจากในเทอมที่ 1 ไม่มีตัวแปร C ดังนั้น จึงต้องบวกเทอมดังกล่าวด้วย $C\overline{C}$

$$\begin{aligned} f(A,B,C) &= (A+B)(A+\overline{B}+C) \\ &= (A+B+C\overline{C})(A+\overline{B}+C) \\ &= ((A+B)+C\overline{C})(A+\overline{B}+C) \\ &= ((A+B)+C)((A+B)+\overline{C})(A+\overline{B}+C) \\ &= (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C) \end{aligned}$$ .... *Ans.*

(3) $y = f(A,B,C) = (A+\overline{B})(A+B+C)(\overline{B}+C)$

สมการนี้ไม่เป็นสมการ POS แบบ Canonical Product เนื่องจากในเทอมที่ 1 ไม่มีตัวแปร C และเทอมที่ 3 ไม่มีตัวแปร A ดังนั้น จึงต้องบวกเทอมดังกล่าวด้วย $C\overline{C}$ และ $A\overline{A}$,

$$\begin{aligned} f(A,B,C,D) &= (A+\overline{B})(A+B+C)(\overline{B}+C) \\ &= (A+\overline{B}+C\overline{C})(A+B+C)(\overline{B}+C) \\ &= (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(A+B+C)(\overline{B}+C) \\ &= (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(A+B+C)(A\overline{A}+\overline{B}+C) \\ &= (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C) \\ &= (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(A+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C) \end{aligned}$$ .... *Ans.*

ตัวอย่างที่ 8 ให้เขียนฟังก์ชันและตารางค่าความจริงของสมการต่อไปนี้

(1) $f(A,B,C) = \sum m(0,1,4,5,6)$

$= 000 + 001 + 100 + 101 + 110$

$= \bar{A}\overline{BC} + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$

Input			m_0	m_1	m_4	m_5	m_6	Output
A	B	C	$\bar{A}\overline{BC}$	$AB\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$f(A,B,C)$
0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0

(2) $f(A,B,C) = \prod M(0,1,4)$

$= (000)(001)(100)$

$= (A+B+C)(A+B+\bar{C})(\bar{A}+B+C)$

Input			M_0	M_1	M_4	Output
A	B	C	$(A+B+C)$	$(A+B+\bar{C})$	$(\bar{A}+B+C)$	$f(A,B,C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

(3) $f(A,B,C,D) = \sum m(0,3,5,13)$

$= 0000 + 0011 + 0101 + 1101$

$= \bar{A}\overline{BC}\bar{D} + \overline{AB}CD + \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D$

Input				m_0	m_3	m_5	m_{13}	Output
A	B	C	D	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}CD$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$AB\overline{C}D$	$f(A,B,C,D)$
0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0

(4) $f(A,B,C,D) = \Pi M(2,4,8,15)$

$$= (0010)(0100)(1000)(1111)$$

$$= (A+B+\overline{C}+D)(A+\overline{B}+C+D)(\overline{A}+B+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$$

Input				M_2	M_4	M_8	M_{15}	Output
A	B	C	D	$(A+B+\overline{C}+D)$	$(A+\overline{B}+C+D)$	$(\overline{A}+B+C+D)$	$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$	$f(A,B,C,D)$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1

Input				M_2	M_4	M_8	M_{15}	Output
A	B	C	D	$(A+B+\overline{C}+D)$	$(A+\overline{B}+C+D)$	$(\overline{A}+B+C+D)$	$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$	$f(A,B,C,D)$
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	**0**	**0**

7.2.3 การแปลงรูประหว่าง SOP และ POS

การแปลงรูประหว่าง SOP และ POS สามารถทำได้โดยอาศัยกฎของพีชคณิตบูลีน ดังต่อไปนี้

SOP → POS A+BC = (A+B)(A+C)

POS → SOP A(B+C) = AB+AC

ตัวอย่างที่ 9 สมการลอจิกใดเป็นสมการแบบ SOP หรือ POS โดยมีเงื่อนไข คือ หากเป็นแบบ SOP ให้แปลงเป็น POS และหากเป็น POS ให้แปลงเป็น SOP

(1) $f(A,B,C) = (A+\overline{B})(A+B+C)(\overline{B}+C)$

สมการข้างต้นเป็นสมการแบบ POS

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= (A+\overline{B})(A+B+C)(\overline{B}+C) \\
&= \left((A+\overline{B})(A+B+C)\right)(\overline{B}+C) \\
&= \left(AA+AB+AC+A\overline{B}+B\overline{B}+\overline{B}C\right)(\overline{B}+C) \\
&= \left(A+AB+AC+A\overline{B}+\overline{B}C\right)(\overline{B}+C) \\
&= \left(A+AC+A\overline{B}+\overline{B}C\right)(\overline{B}+C) \\
&= \left(A+A\overline{B}+\overline{B}C\right)(\overline{B}+C) \\
&= \left(A+\overline{B}C\right)(\overline{B}+C) \\
&= \left(A+\overline{B}C\right)(\overline{B}+C) \\
&= A\overline{B}+AC+\overline{B}C\overline{B}+\overline{B}CC \\
&= A\overline{B}+AC+\overline{B}C+\overline{B}C \\
&= A\overline{B}+AC+\overline{B}C \text{ .... } \textit{Ans.}
\end{aligned}
$$

(2) $f(A,B,C) = A\overline{B} + ABC + \overline{B}C$

สมการข้างต้นเป็นสมการแบบ SOP

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= A\overline{B} + ABC + \overline{B}C \\
&= A\overline{B} + ABC + AC + \overline{B}C \\
&= (A\overline{B} + AC) + \overline{B}C \\
&= A(\overline{B} + C) + \overline{B}C \\
&= (A + \overline{B}C)\left((\overline{B} + C) + \overline{B}C\right) \\
&= (A + \overline{B})(A + C)\left((\overline{B} + C) + \overline{B}C\right) \\
&= (A + \overline{B})(A + C)(\overline{B} + C + \overline{B})(\overline{B} + C + C) \\
&= (A + \overline{B})(A + C)(\overline{B} + C)(\overline{B} + C) \\
&= (A + \overline{B})(A + C)(\overline{B} + C)
\end{aligned}
$$
.... *Ans.*

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า วิธีการนี้เป็นวิธีการที่ยุ่งยากและไม่เหมาะสมกับสมการที่มีความซับซ้อน วิธีการที่นิยมนำมาใช้ในการแปลงรูปสมการ คือ การขยายสมการลอจิกให้เป็น Canonical sum หรือ Canonical product ก่อน จึงทำการแปลงรูปตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. สมการลอจิกต้องอยู่ในรูป Canonical sum หรือ Canonical product เท่านั้น
2. หาจำนวนเทอมสูงสุดของสมการลอจิก

จำนวนเทอมสูงสุดของสมการลอจิก = 2^n

เมื่อ n คือจำนวนตัวแปรของสมการ

3. แปลงรูประหว่าง Maxterm และ Minterm โดยตรง โดยเขียนเฉพาะเทอมที่ไม่มีในอีกรูปแบบหนึ่งเท่านั้น ทั้งนี้จำนวนเทอมทั้งหมดจะต้องไม่เกินจำนวนเทอมในข้อที่ 2

ตัวอย่างที่ 10 สมการลอจิกใดต่อไปนี้เป็นสมการแบบ SOP หรือ POS โดยมีเงื่อนไข คือ หากเป็นแบบ SOP ให้แปลงเป็น POS และหากเป็น POS ให้แปลงเป็น SOP

(1) $f(A,B,C) = (A+\overline{B})(A+B+C)(\overline{B}+C)$

ขยายสมการให้เป็น Canonical Product

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= (A+\overline{B})(A+B+C)(\overline{B}+C) \\
&= (A+\overline{B}+C\overline{C})(A+B+C)(A\overline{A}+\overline{B}+C) \\
&= (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C) \\
&= (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(A+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C) \\
&= (010)(011)(000)(110) \\
&= \prod M(0,2,3,6)
\end{aligned}
$$

จำนวนเทอมสูงสุด = 2^3

= 8 เทอม

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= \overline{\prod M(0,2,3,6)} \\
&= \sum m(1,4,5,7)
\end{aligned}
$$
.... *Ans.*

(2) $f(A,B,C) = AB + ABC + BC$

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= A\overline{B} + ABC + \overline{B}C \\
&= A\overline{B}(C+\overline{C}) + ABC + (A+\overline{A})\overline{B}C \\
&= A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C \\
&= A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC + \overline{A}\overline{B}C \\
&= (101)+(100)+(111)+(001) \\
&= \sum m(1,4,5,7)
\end{aligned}
$$

จำนวนเทอมสูงสุด = 2^3

= 8 เทอม

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C) &= \overline{\sum m(1,4,5,7)} \\
&= \prod M(0,2,3,6)
\end{aligned}
$$
.... *Ans.*

แบบฝึกหัด

1. จงเขียนตารางค่าความจริงและลอจิกเกต (Logic Gate)
   - 1.1 $X = (AB) + (C\overline{A})$
   - 1.2 $X = [\ A + (\overline{B} + C)]\overline{B}$
   - 1.3 $X = A(B+C) + \overline{B}(A+\overline{C})$
2. ลดทอนรูปสมการต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบูลีน
   - 2.1 $Y = ABC[AB+C(BC+A\overline{C})]$
   - 2.2 $Y = AB + BC(B + C)$
   - 2.3 $Y = (B+BC)(B+\overline{B}C)(B+D)$
3. พิสูจน์สมการต่อไปนี้และเขียนตารางค่าความจริงของ $A + B(A + C) + AC = A + BC$
4. จงลดทอนสมการต่อไปนี้ 6 คะแนน
   - 4.1 $f(A,B,C) = \overline{AB + CD}$
   - 4.2 $f(A,B,C) = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}+ \overline{A}C + \overline{ABC}$
   - 4.3 $f(A,B,C) = \overline{\overline{A+BC}+\overline{A\overline{B}}}$
5. จงเขียนตารางค่าความจริงและลอจิกเกต (Logic Gate) 20 คะแนน
   - 5.1 $Y = ABC[AB+\overline{C}(BC+AC)]$
   - 5.2 $Y = AB + BC(B + C)$
   - 5.3 $Y = (A+BC)(B+\overline{D})$
   - 5.4 $Y = \overline{R}(\overline{PQ} + PR)$
   - 5.5 $Y = \overline{C}(A+C) + \{\overline{BC}(A+B)\}$