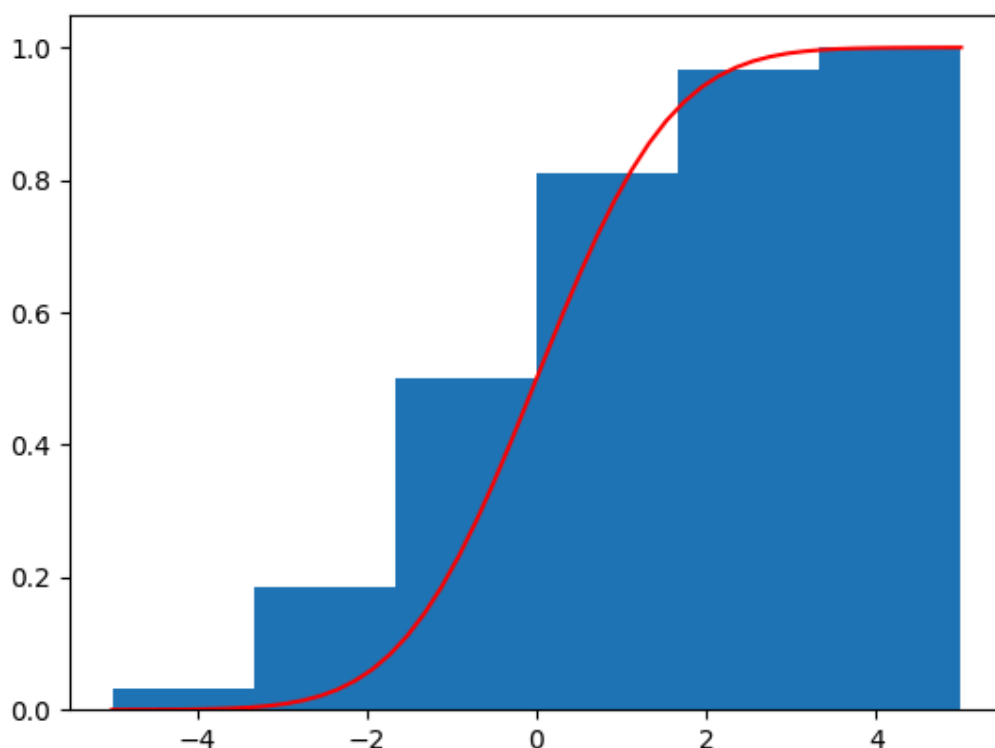


Metody Probabilistyczne i Statystyka

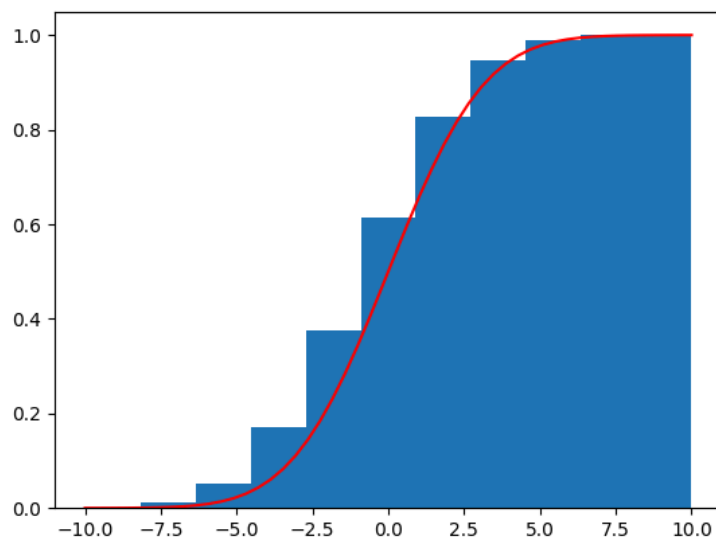
Zadanie Domowe 4

Autor: Dominik Gerlach

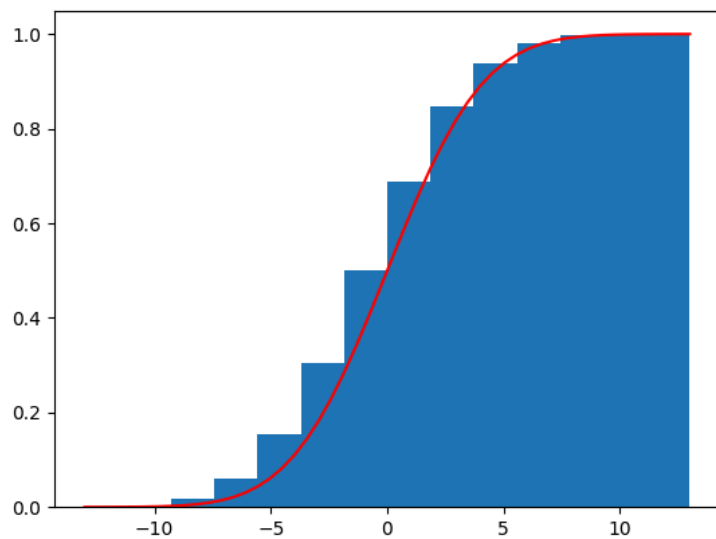
Część 1: Błądzenie losowe na liczbach całkowitych



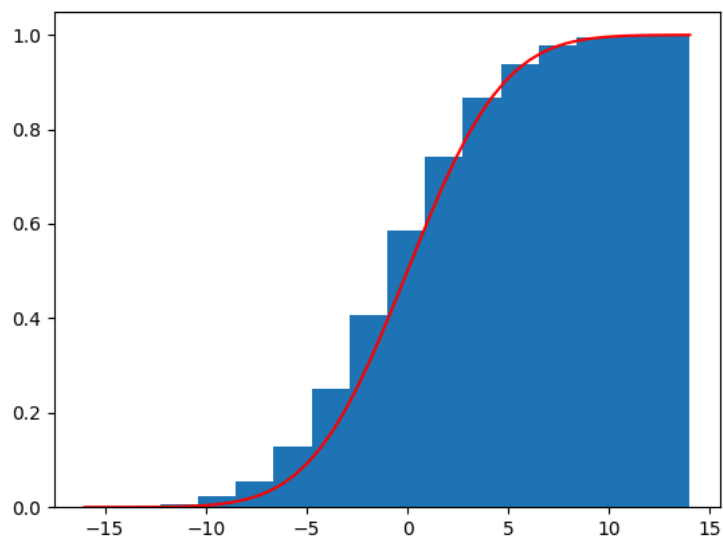
Rysunek 1: Niebieski histogram obrazuje dystrybuantę empiryczną S_5 . Czerwona linia reprezentuje dystrybuantę rozkładu normalnego.



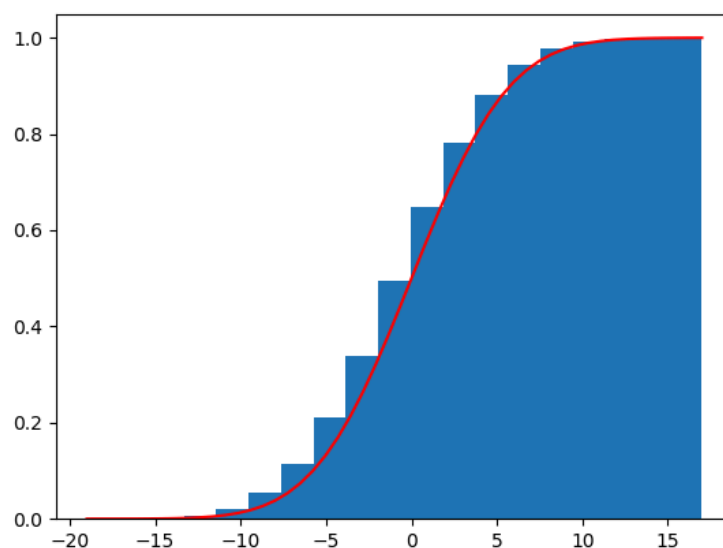
Rysunek 2: Niebieski histogram obrazuje dystrybuantę empiryczną S_{10} . Czerwona linia reprezentuje dystrybuantę rozkładu normalnego.



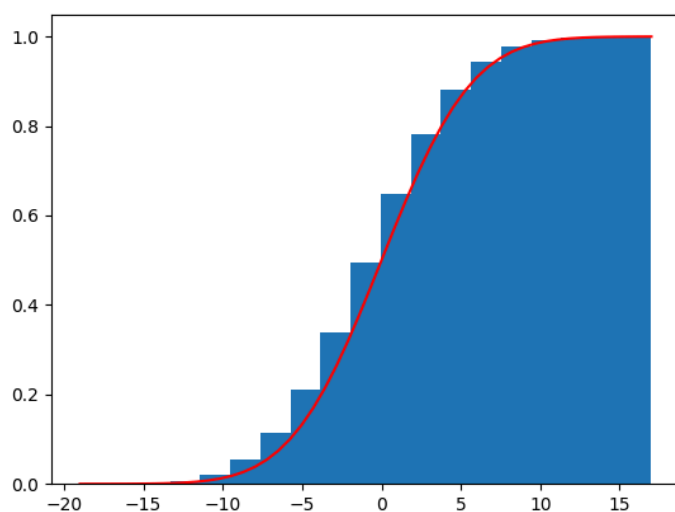
Rysunek 3: Niebieski histogram obrazuje dystrybuantę empiryczną S_{15} . Czerwona linia reprezentuje dystrybuantę rozkładu normalnego.



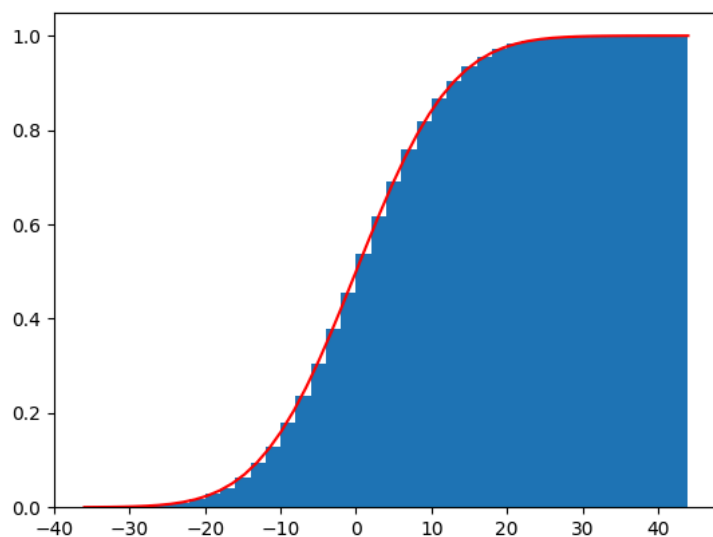
Rysunek 4: Niebieski histogram obrazuje dystrybuantę empiryczną S_{20} . Czerwona linia reprezentuje dystrybuantę rozkładu normalnego.



Rysunek 5: Niebieski histogram obrazuje dystrybuantę empiryczną S_{25} . Czerwona linia reprezentuje dystrybuantę rozkładu normalnego.



Rysunek 6: Niebieski histogram obrazuje dystrybuantę empiryczną S_{30} . Czerwona linia reprezentuje dystrybuantę rozkładu normalnego.



Rysunek 7: Niebieski histogram obrazuje dystrybuantę empiryczną S_{100} . Czerwona linia reprezentuje dystrybuantę rozkładu normalnego.

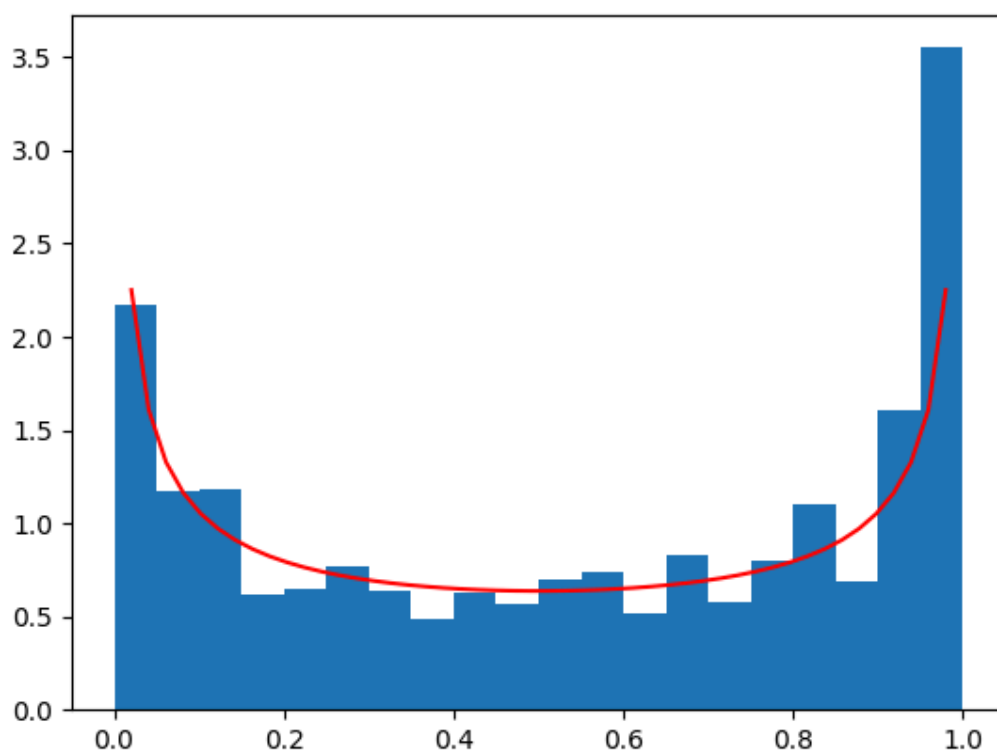
Definicje:

- $S_n = \sum_{n=1}^N X_n$, gdzie zmienne losowe X_n , $1 \leq n \leq N$, są niezależne i każda przyjmuje wartość 1 oraz -1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

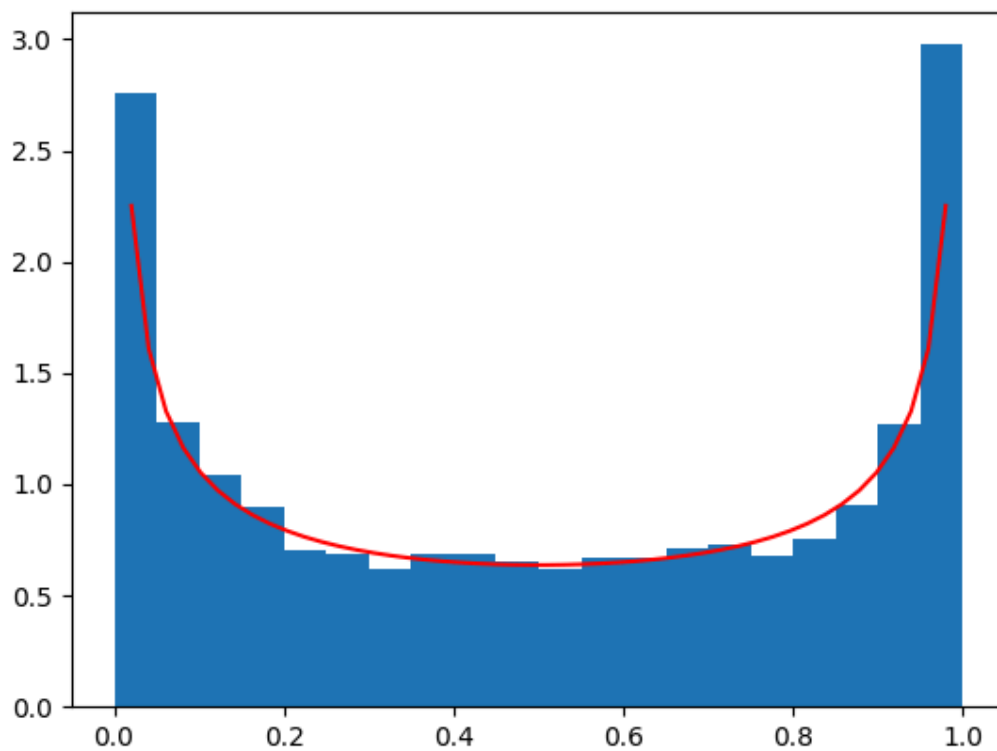
Wnioski:

Wraz z rosnącym n dystrybucja empiryczna zmiennej losowej S_n aproksymuje dystrybucję rozkładu normalnego, o wartości oczekiwanej 0, z coraz większą dokładnością. Zgodnie z rozkładem normalnym zmienna S_n najczęściej przyjmuje wartość przybliżoną do wartości oczekiwanej, czyli 0.

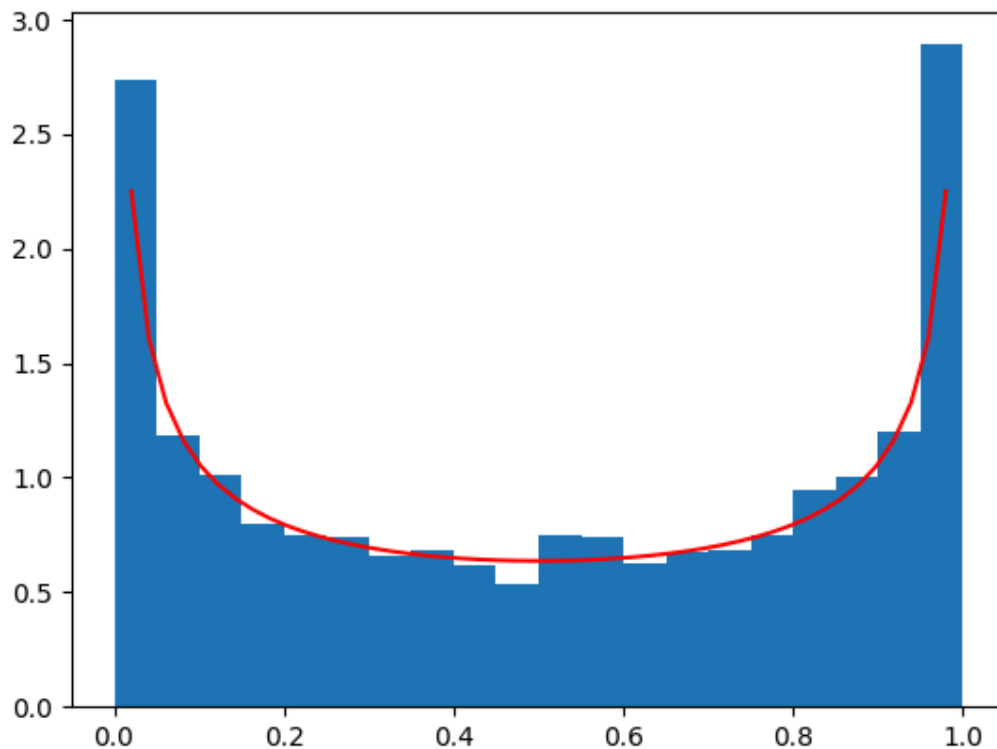
Część 2: Błądzenie losowe na \mathbb{Z} - rozkład “czasu spędzonego na osi OX”



Rysunek 1: Niebieski histogram przedstawia estymację funkcji gęstości prawdopodobieństwa będącą frakcją czasu, która błądzenie losowe “spędziła nad osią OX” dla zmiennej losowej P100. Czerwonym kolorem przedstawiono wykres gęstości rozkładu arcusa sinusa.



Rysunek 2: Niebieski histogram przedstawia estymację funkcji gęstości prawdopodobieństwa będącą frakcją czasu, która błądzenie losowe “spędziła nad osią OX” dla zmiennej losowej P1000. Czerwonym kolorem przedstawiono wykres gęstości rozkładu arcusa sinusa.



Rysunek 3: Niebieski histogram przedstawia estymację funkcji gęstości prawdopodobieństwa będącą frakcją czasu, która błądzenie losowe "spędziła nad osią OX" dla zmiennej losowej P10000. Czerwonym kolorem przedstawiono wykres gęstości rozkładu arcusa sinusa.

Wnioski:

Wraz z rosnącym N funkcja gęstości prawdopodobieństwa będąca frakcją czasu, która błądzenie losowe "spędziła nad osią OX" coraz lepiej estymuje funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej o rozkładzie arcusa sinusa.

Część 3: Testowanie generatorów liczb pseudolosowych

| Tests Start Test | | |
|--|--|--------|
| Test name | Result value (P-value) | Status |
| 1. Frequency (Monobit) Test | 0.8430450637304735 | Passed |
| 2. Frequency Test within a Block | 1 | Passed |
| 3. Runs Test | 0 | Failed |
| 4. Test for the Longest Run of Ones in a Block | 6.322158928691938e-29 | Failed |
| 5. Binary Matrix Rank Test | 0.14501890262000497 | Passed |
| 6. Non-overlapping Template Matching Test | 2.571344866742978e-109 | Failed |
| 7. Overlapping Template Matching Test | 7.735093737089001e-78 | Failed |
| 8. Maurer's "Universal Statistical" Test | 1.0188438193088175e-94 | Failed |
| 9. Linear Complexity Test | 0.3789568511360741 | Passed |
| 10. Serial Test | P-value 1: 0 | Failed |
| | P-value 2: 0 | |
| 11. Approximate Entropy Test | 0 | Failed |
| 12. Cumulative Sums (Cusum) Test | P-value Forward: 0.8612753253997925 | Passed |
| | P-value Reverse: 1 | |
| 13. Random Excursions Test | 0.0017509104434183 | Failed |
| 14. Random Excursions Variant Test | 0.14382630244864691 | Passed |

Rysunek 1: Wyniki ze [strony Zsolta Molnara](#) po wcześniejszym wygenerowaniu ciągu bitów używając LCG (Linear Congruential Generator).

Tests Start Test

| Test name | Result value (P-value) | Status |
|--|--|--------|
| 1. Frequency (Monobit) Test | 0.7964069072245956 | Passed |
| 2. Frequency Test within a Block | 0.8412406977101538 | Passed |
| 3. Runs Test | 1.6087109949117968 | Failed |
| 4. Test for the Longest Run of Ones in a Block | 0.46383016256291565 | Passed |
| 5. Binary Matrix Rank Test | 0.10128201534878495 | Passed |
| 6. Non-overlapping Template Matching Test | 0.5489615743243386 | Passed |
| 7. Overlapping Template Matching Test | 0.550611660991439 | Passed |
| 8. Maurer's "Universal Statistical" Test | 0.6985807692757903 | Passed |
| 9. Linear Complexity Test | 0.9216955147827822 | Passed |
| 10. Serial Test | P-value 1: 0.670554699089664 P-value 2: 0.3919978096237875 | Passed |
| 11. Approximate Entropy Test | 0.38474468811361473 | Passed |
| 12. Cumulative Sums (Cusum) Test | P-value Forward: 0.8138649106273603 P-value Reverse: 0.9806025374805509 | Passed |
| 13. Random Excursions Test | 0.31821964656230833 | Passed |
| 14. Random Excursions Variant Test | 0.24223487746076344 | Passed |

Rysunek 2: Wyniki ze [strony Zsolta Molnara](#) po wcześniejszym wygenerowaniu ciągu bitów używając MT (Mersenne Twister).

| <div>Tests</div> <div>Start Test</div> | | |
|--|---|--------|
| Test name | Result value (P-value) | Status |
| 1. Frequency (Monobit) Test | 0.03468644929647846 | Passed |
| 2. Frequency Test within a Block | 0.26336804611475345 | Passed |
| 3. Runs Test | 1.7924354168882375 | Failed |
| 4. Test for the Longest Run of Ones in a Block | 0.5926921600026744 | Passed |
| 5. Binary Matrix Rank Test | 0.5413437713518995 | Passed |
| 6. Non-overlapping Template Matching Test | 0.844595239170289 | Passed |
| 7. Overlapping Template Matching Test | 0.8158571922662735 | Passed |
| 8. Maurer's "Universal Statistical" Test | 0.9603720232608751 | Passed |
| 9. Linear Complexity Test | 0.20645463469155706 | Passed |
| 10. Serial Test | P-value 1: 0.04983329221300795 | Passed |
| | P-value 2: 0.2149754331642716 | |
| 11. Approximate Entropy Test | 0.16422730377649838 | Passed |
| 12. Cumulative Sums (Cusum) Test | P-value Forward: 0.05338300422740461 | Passed |
| | P-value Reverse: 0.5344299470924612 | |
| 13. Random Excursions Test | | Error |
| 14. Random Excursions Variant Test | | Error |

Rysunek 3: Wyniki ze [strony Zsolta Molnara](#) używając generatora Radioactive decay RNG.

| <div>Tests</div> <div>Start Test</div> | | |
|--|--|--------|
| Test name | Result value (P-value) | Status |
| 1. Frequency (Monobit) Test | 0.09179579935937321 | Passed |
| 2. Frequency Test within a Block | 0.7066194830947097 | Passed |
| 3. Runs Test | 0.0630487035539421 | Passed |
| 4. Test for the Longest Run of Ones in a Block | 0.40458888231451623 | Passed |
| 5. Binary Matrix Rank Test | 0.3349984012265513 | Passed |
| 6. Non-overlapping Template Matching Test | 0.5564634084314057 | Passed |
| 7. Overlapping Template Matching Test | 0.467595963365371 | Passed |
| 8. Maurer's "Universal Statistical" Test | 0.9471396383630935 | Passed |
| 9. Linear Complexity Test | 0.8695248004242504 | Passed |
| 10. Serial Test | P-value 1: 0.04312441365851936 | Passed |
| | P-value 2: 0.06345355489796273 | |
| 11. Approximate Entropy Test | 0.08200942752745037 | Passed |
| 12. Cumulative Sums (Cusum) Test | P-value Forward: 0.024629108816083045 | Passed |
| | P-value Reverse: 0.09608325436892251 | |
| 13. Random Excursions Test | | Error |
| 14. Random Excursions Variant Test | | Error |

Rysunek 4: Wyniki ze [strony Zsolta Molnara](#) używając generatora ADC noise RNG.

| <div>Tests</div> <div>Start Test</div> | | |
|--|--|--------|
| Test name | Result value (P-value) | Status |
| 1. Frequency (Monobit) Test | 0.9792573384519855 | Passed |
| 2. Frequency Test within a Block | 0.4514440370036904 | Passed |
| 3. Runs Test | 1.7712554667212221 | Failed |
| 4. Test for the Longest Run of Ones in a Block | 0.38912027398061727 | Passed |
| 5. Binary Matrix Rank Test | 0.8693434243274492 | Passed |
| 6. Non-overlapping Template Matching Test | 0.13126123413305363 | Passed |
| 7. Overlapping Template Matching Test | 0.531969506583697 | Passed |
| 8. Maurer's "Universal Statistical" Test | 0.024845255071293537 | Passed |
| 9. Linear Complexity Test | 0.2366492766864677 | Passed |
| 10. Serial Test | P-value 1: 0.4936097765485157 | Passed |
| | P-value 2: 0.23483344772948722 | |
| 11. Approximate Entropy Test | 0.8413511436687772 | Passed |
| 12. Cumulative Sums (Cusum) Test | P-value Forward: 0.7402217883070414 | Passed |
| | P-value Reverse: 0.764505357626124 | |
| 13. Random Excursions Test | | Error |
| 14. Random Excursions Variant Test | | Error |

Rysunek 5: Wyniki ze [strony Zsolta Molnara](#) używając generatora JavaScript pseudo RNG.

Wnioski:

Wyniki generatora MT nie są takie same dla kolejnych losowych ciągów bitów. Jednak MT w większości przypadków przeszedł wszystkie testy pozytywnie. W moim przypadku LCG zawsze nie zaliczał testów nr: 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13. Z tych mini-testów wynika więc, że MT jest skuteczniejszy od LCG, lecz jego skuteczność nie jest krystaliczna.