

VERIFICA SPERIMENTALE E APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI CAUCHY VERIFICA DELLE LEGGI D'INTERFERENZA TRAMITE UN RETICOLO

Laura TROMBETTA
Alessandro Maria TURTURIELLO
Federico VENTUROLI

Eseguita il giorno: 21 aprile 2022
Gruppo T2A-4: Trombetta Laura
Turturiello Alessandro Maria
Venturoli Federico

Sommario

Lo scopo della relazione consiste nel verificare la legge di Cauchy determinandone i fattori di proporzionalità tramite l'utilizzo di una sorgente luminosa nota. Utilizzando tali parametri si sfrutta la legge per risalire alla natura del gas ignoto contenuto in lampade che fungono da sorgente usando la relazione tra indice di rifrazione del prisma n e la lunghezza d'onda λ .

Indice

1	Introduzione e descrizione dell'apparato sperimentale	2
2	Messa a fuoco	3
3	Studio attraverso il prisma	3
4	Studio attraverso il reticolo	4
4.1	Raccolta e analisi dati	5
4.2	Correzione sull'angolo	6
4.3	Verifica della legge di diffrazione	6
4.3.1	Altri reticoli	7
5	Studio gas ignoto	8
5.1	Prima sorgente ignota	8
5.2	Seconda sorgente ignota	8
5.3	Considerazioni sui gas determinati	9
6	Conclusioni	10

1 Introduzione e descrizione dell'apparato sperimentale

Lo scopo principale di questa esperienza è stato quello di verificare la validità della legge di Cauchy, determinare il passo di un reticolo di diffrazione e identificare la natura del gas ignoto contenuto in differenti lampade.

Per condurre gli esperimenti ci siamo serviti di uno spettrometro, strumento composto da una lente in grado di collimare un fascio di luce e da una seconda lente che permette di osservare il raggio stesso, eventualmente scomposto per mezzo di un oggetto analizzatore, come un prisma o, permette di osservare i massimi di una figura di interferenza realizzata attraverso l'utilizzo di un reticolo. Di reticoli ce ne sono a disposizione diversi ognuno con un passo differente. Uno step fondamentale per la buona riuscita dell'esperienza è quello di allineare i due cannocchiali, in quanto l'angolo di riferimento per le successive misurazioni è proprio quello a cui i due cannocchiali sono allineati. Nella Figura 1 e, per il resto della relazione, l'angolo di allineamento è indicato con ϑ_0 . La seconda lente è mobile e la sua posizione viene mappata da un goniometro che utilizza la scala di Venier. Come sorgenti luminose abbiamo fatto uso di lampade ad arco, solitamente costituite da ampole oppure tubi di quarzo o di vetro. Queste, attraverso due elettrodi, ionizzano gli atomi del gas contenuto nel tubo, provocando la conseguente emissione di radiazione luminosa.

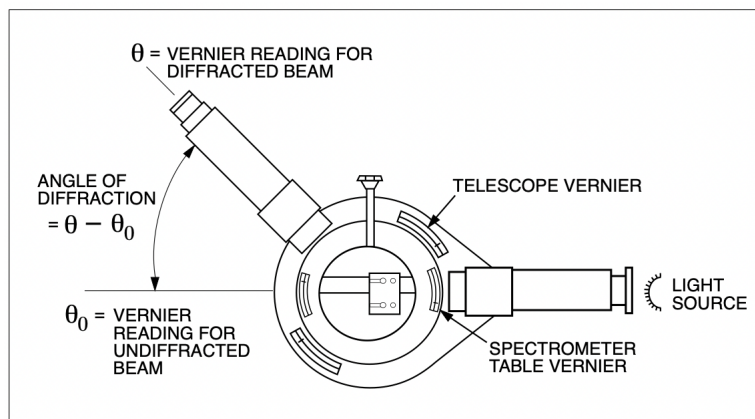


Figura 1 Rappresentazione dell'apparato sperimentale

Utilizzando come oggetto analizzatore un prisma a base triangolare, abbiamo studiato il fenomeno della dispersione, che si verifica quando la luce attraversa un mezzo dielettrico otticamente trasparente. Il fascio collimato, attraversando il prisma, nel nostro caso caratterizzato dalla presenza di due facce ottiche, viene scomposto in componenti di diverse lunghezze d'onda. Questo ci ha permesso di verificare la legge di Cauchy, che descrive il fenomeno della dispersione mettendo in relazione l'indice di rifrazione e la lunghezza d'onda attraverso la relazione:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (1)$$

La forma approssimata che si andrà a verificare è

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Successivamente abbiamo lavorato con il reticolo, oggetto analizzatore composto da un insieme di fenditure equistanziate di uguale ampiezza. Esso ci ha permesso di studiare il fenomeno della diffrazione, poichè ci consente di osservare un'immagine costituita da massimi e minimi di intensità con posizioni angolari differenti. La legge riportata sotto è quella che abbiamo utilizzato e serve a descrivere il fenomeno nel caso di incidenza del raggio perpendicolare al reticolo:

$$d \sin(\theta) = n\lambda \quad (2)$$

Per quanto riguarda lo studio del gas ignoto abbiamo utilizzato due lampade ad arco, i due differenti mezzi analizzatori e le rispettive leggi.

2 Messa a fuoco

Prima di procedere con gli esperimenti è stato necessario mettere a fuoco il telescopio. Dopo averlo puntato dalla finestra del laboratorio verso un punto di riferimento abbastanza lontano, abbiamo calibrato l'oggetto in modo da avere simultaneamente nitidi la croce di puntamento e il punto di riferimento stesso. Poichè non era possibile bloccare la componente del telescopio, determinati movimenti dello spettrometro hanno più volte modificato la messa a fuoco, rendendo necessaria la ricalibrazione dello strumento più volte durante l'esperienza.

3 Studio attraverso il prisma

In primo luogo abbiamo fatto incidere il fascio collimato, proveniente da una lampada a Hg, su una delle facce ottiche del prisma e abbiamo ruotato l'oggetto analizzatore fino ad osservare l'angolo di inversione. Prima di procedere è stato però necessario misurare l'angolo al vertice del prisma, ovvero l'angolo tra le due facce ottiche, riportandone la base su un foglio e osservando la congruenza di tutti i lati a meno di un errore di un millimetro. L'angolo al vertice è risultato, quindi, essere di $\alpha = 60^\circ$. Preso come zero l'angolo di allineamento, ovvero l'angolo per cui le due lenti permettevano una visione nitida del raggio luminoso, abbiamo proceduto misurando l'angolo di minima deviazione per ogni linea distinguibile:

ϑ	angolo totale δ (rad)
90° 0'	0,854
90° 20'	0,860
90° 40'	0,866
91° 20'	0,877
91° 23'	0,878
92° 24'	0,896
93° 20'	0,912
93° 35'	0,916

Tabella 1

Da questi valori abbiamo ricavato l'indice di rifrazione per ogni lunghezza d'onda attraverso la formula:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta + \alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (3)$$

Dall'Eq. 3 si può stimare l'incertezza su n propagando l'errore sull'angolo

$$\sigma_n^2 = \left| \frac{\partial n}{\partial \delta} \right|^2 \sigma_\delta^2$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - n^2 \right) \sigma_\delta^2 \quad (4)$$

La seguente tabella mostra i risultati ottenuti

n	$\lambda(\text{\AA})$	$\sigma_n (10^{-5})$
1,6276	4046,56	94
1,6309	4339,22	94
1,6343	4347,49	93
1,6410	4358,33	91
1,6415	5460,73	91
1,6515	5769,60	89
1,6607	5790,66	87
1,6631	7081,90	86

Tabella 2 Indici di rifrazione con relativo errore

Infine abbiamo realizzato un fit lineare dei parametri al fine di stimare i coefficienti della legge di Cauchy al secondo ordine. I risultati del fit sono riportati di seguito. Avendo una probabilità di χ^2 maggiore di 0.05, il fit viene considerato accettabile, la legge di Cauchy viene considerata verificata ed i parametri che la descrivono vengono stimati come:

$$A = 1,609 \pm 0,003 \quad B = (92,26 \pm 8,184) \times 10^4 \text{\AA}^{-2} \quad \rho_{AB} = 1.2527 \times 10^{-5}$$

4 Studio attraverso il reticolo

Quando della luce incide perpendicolarmente su un reticolo di diffrazione, si viene a creare una figura di interferenza simmetrica rispetto alla direzione di incidenza. La posizione dei punti di interferenza costruttiva (detti massimi) segue la legge 2. La luce però non era perfettamente incidente, è dunque possibile considerare l'angolo α di incidenza e scrivere

$$\sin(\vartheta - \alpha) = n \frac{\lambda}{d}$$

Misurando gli angoli che compaiono in questa relazione, è possibile stimare il passo del reticolo oppure il suo reciproco, di cui in questo caso si conosce il valore con precisione assoluta.

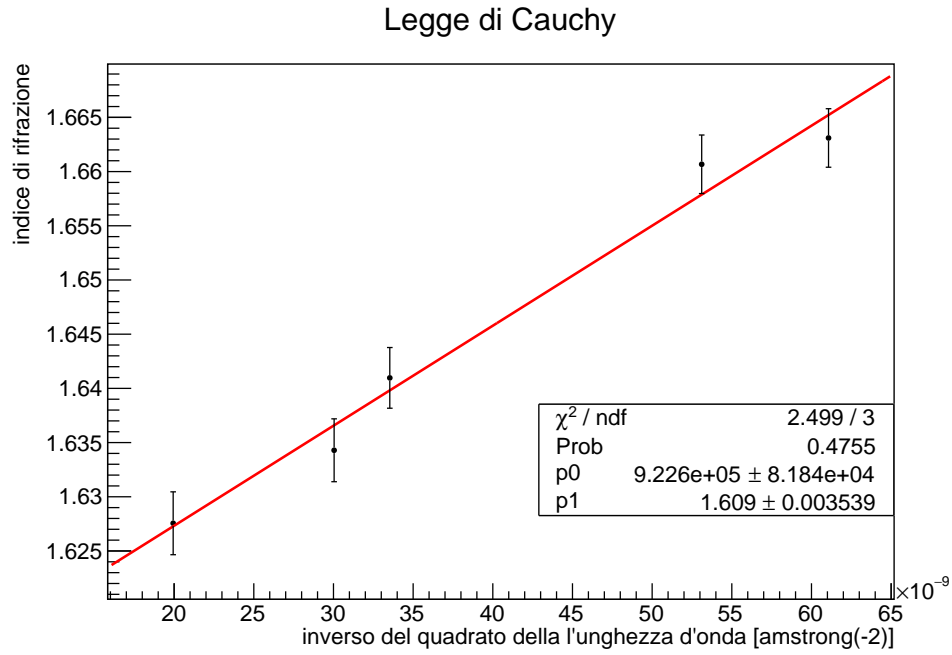


Figura 2 Il parametro A della legge di Cauchy qui è riportato come p1, mentre B come p0.

4.1 Raccolta e analisi dati

Per svolgere l'esperienza sono stati utilizzati reticoli di diversa densità di fenditure, precisamente 300, 600 e 1200 fenditure per millimetro (questi valori corrispondono all'inverso del passo del reticolo).

Per ognuno di essi è stato necessario calibrare lo spettrometro in modo che gli angoli dei massimi dello stesso ordine fossero alla stessa distanza angolare dal riferimento $\vartheta_0 = 63^\circ 35'$ nel limite di incertezze sperimentali. La seguente tabella riassume le misure di calibrazione. Dopo questa operazione abbiamo misurato gli angoli dei massimi

Reticolo	$\vartheta_{max} (dx/sx) - \vartheta_0$
300	$32^\circ 30'$ $-32^\circ 30'$
600	$46^\circ 0'$ $-45^\circ 17'$
1200	$45^\circ 10'$ $-45^\circ 2'$

Tabella 3

di interferenza meglio individuabili. La seguente tabella mostra i dati raccolti in questa fase

Reticolo	1° ordine	2° ordine	3° ordine
300	73° 48'	84° 38'	96° 5'
600	84° 32'	109° 35'	
1200	108° 35'		

Tabella 4

4.2 Correzione sull'angolo

La non perpendicolarità della luce incidente può essere corretta introducendo l'angolo α il cui valore viene ricavato da considerazioni ottico geometriche da cui si giunge alla seguente relazione

$$\tan \alpha = \frac{\sin \theta_+ + \sin \theta_-}{2 - \cos \theta_+ - \cos \theta_-} \quad (5)$$

dove θ_{\pm} sono gli angoli, a destra e a sinistra, a cui si trovano i massimi della figura di interferenza. Da questa relazione può essere ricavata l'incertezza relativa a questa grandezza che si trova essere

$$\sigma_{\alpha}^2 = \frac{(2 \cos \theta_+ - \cos (\theta_+ - \theta_-) - 1)^2 + (2 \cos \theta_- - \cos (\theta_+ - \theta_-) - 1)^2}{(1 + \tan^2 \alpha)^2 (2 - \cos \theta_+ - \cos \theta_-)^4} \sigma_{\theta}^2 \quad (6)$$

La seguente tabella riassume i risultati raccolti

Reticolo	α	σ_{α}
300	0'	5'
600	50'	2'
1200	7'	2'

Tabella 5

4.3 Verifica della legge di diffrazione

Siccome utilizzando il reticolo da 300 $\frac{\text{fend.}}{\text{mm}}$ è possibile ricavare massimi di tre ordini differenti, la stima del suo passo può essere effettuata interpolando l'equazione

$$\sin(\vartheta - \alpha) = n \frac{\lambda}{d}$$

In questo modo si verifica anche la legge stessa. Chiamato $\beta = \vartheta - \alpha$ l'angolo effettivo del massimo rispetto alla normale del reticolo, si può dire che

$$\sigma_{\beta}^2 = \sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\vartheta}^2$$

per poi effettuare il fit riportato nella Fig. 3. Da tale interpolazione si stima il valore caratteristico del reticolo dividendo per λ

$$\frac{1}{d} = 303,8 \pm 0,5 \frac{\text{fend.}}{\text{mm}}$$

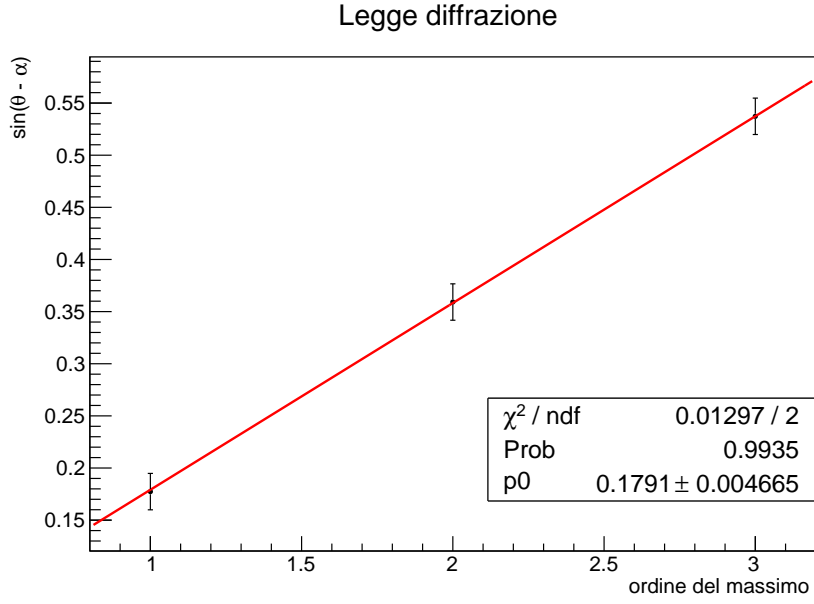


Figura 3

Il valore ricavato di $1/d$ non è compatibile con il valore atteso di $300 \frac{\text{fend.}}{\text{mm}}$ in quanto eseguendo il t -test di Student si trova che

$$t_s = \frac{\hat{\vartheta} - \vartheta_t}{\sigma_{\vartheta}} = 7,6$$

Questo fa presumere che la legge di diffrazione sia esatta (i dati sperimentali seguono effettivamente una proporzionalità lineare), ma che ci sia un errore nella stima del valore cercato. L'ipotesi più attendibile riguarda un errore nella stima di α : dato che una sua variazione di pochi primi comporta un'importante variazione dei risultati, e dato che il supporto del reticolo non era vincolato in modo rigido ma libero di muoversi, si può supporre che nell'atto di misurazione degli angoli tale reticolo si sia leggermente spostato.

4.3.1 Altri reticoli

Siccome per gli altri reticoli non disponevamo di sufficienti misure per effettuare un'interpolazione affidabile abbiamo proceduto stimando i parametri in maniera diretta

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{n\lambda} \sin(\theta - \alpha)$$

$$\sigma_{\frac{1}{d}} = \frac{1}{n\lambda} \cos(\theta - \alpha) \sqrt{\sigma_{\theta}^2 + \sigma_{\alpha}^2}$$

I risultati sono raccolti nella seguente tabella

In questo caso i valori sono accettabilmente compatibili con quelli attesi e ci permette di confermare la validità della legge di diffrazione, a discapito dell'errata stima fatta in precedenza.

Reticolo ($\frac{\text{fend.}}{\text{mm}}$)	$1/d$ ($\frac{\text{fend.}}{\text{mm}}$)	$\sigma_{\frac{1}{d}}$ ($\frac{\text{fend.}}{\text{mm}}$)
600	599,2	0,4
1200	1200,3	0,8

Tabella 6

5 Studio gas ignoto

Sostituendo la sorgente nota con una incognita, ci è stato possibile sfruttare la legge di Cauchy appena verificata per risalire al valore delle lunghezze d'onda che abbiamo osservato. La procedura sperimentale è identica e consiste nella stima degli indici di rifrazione associati alle righe di emissione più intense della sorgente incognita.

5.1 Prima sorgente ignota

La seguente tabella riassume le misure raccolte

n	λ (Å) (10^{-5})
1,66423	95
1,64990	96
1,64197	98
1,63546	99
1,63463	996
1,63295	100
1,63211	100
1,62992	101
1,62992	101

Tabella 7

A questo punto invertendo la legge di Cauchy è possibile risalire a λ e la sua incertezza

$$\lambda = \sqrt{\frac{B}{n - A}} \quad (7)$$

$$\sigma_{\lambda}^2 = \frac{1}{4(n - A)^2} \left(\lambda^2 (\sigma_A^2 + \sigma_n^2) + 2\sigma_{AB}^2 + \frac{\sigma_B^2}{\lambda^2} \right) \quad (8)$$

I risultati del fit sono riportati nella Figura 4.

5.2 Seconda sorgente ignota

La tabella 8 riassume le misure raccolte. Successivamente tramite le Eq. 7 e 8 si ricavano i valori di λ e σ_{λ}^2 . I risultati del confronto sono riportati nella Figura 5.

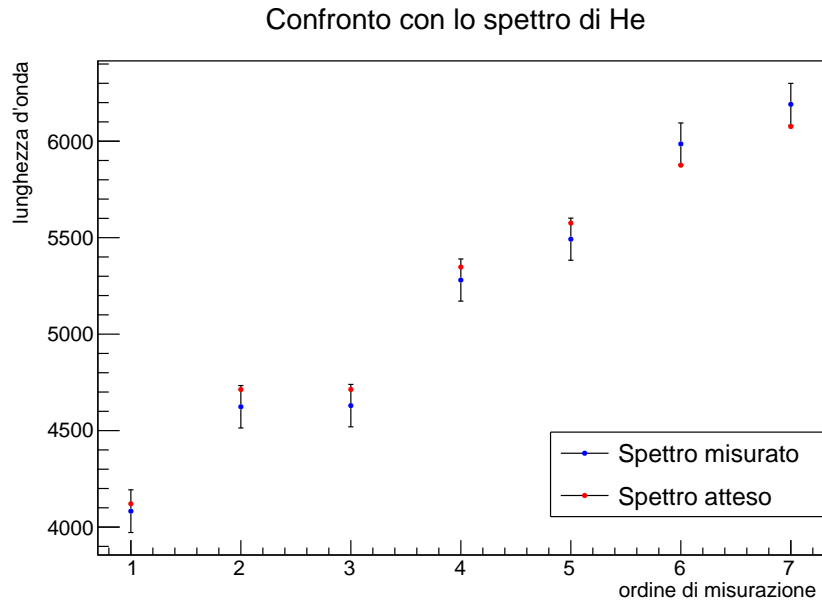


Figura 4

n	λ (Å)
1,6350	5946,74
1,6370	5730,32
1,6450	5056,89
1,6587	4301,91
1,6613	4194,11
1,6662	4012,93
1,6734	3782,16

Tabella 8

5.3 Considerazioni sui gas determinati

Confrontando i valori ottenuti con quelli tabulati per i gas nobili, si osserva una forte compatibilità con le righe di emissione dell'Elio e del Sodio, seppur con un certo bias. Si nota infatti che non è presente una regolarità nell'andamento della posizione della λ misurata, se sopra se sotto, rispetto a ciò che ci si attende. Il seguente grafico mostra qualitativamente tale bias.

La natura di questo bias non è pienamente chiara: potrebbe trattarsi di una stima errata di ϑ_0 o di α , presente, quindi, fin dall'inizio dell'esperienza. Dato che abbiamo cercato di effettuare le misure nel modo più preciso possibile, un'ipotesi che è possibile avanzare riguarda la struttura geometrica del prisma: infatti, la presenza di vertici smussati potrebbe aver fatto sì che la luce non incidesse su uno spigolo perfettamente verticale ma su una superficie lievemente irregolare. Questa ipotesi può trovare conferma nella forma righe di emissione che, viste dal telescopio, sono risultate essere incurvate e non perfettamente verticali. Ciò nonostante, dare una stima quantitativa di questa perturbazione risulta essere difficoltoso e quindi la misura viene giudicata

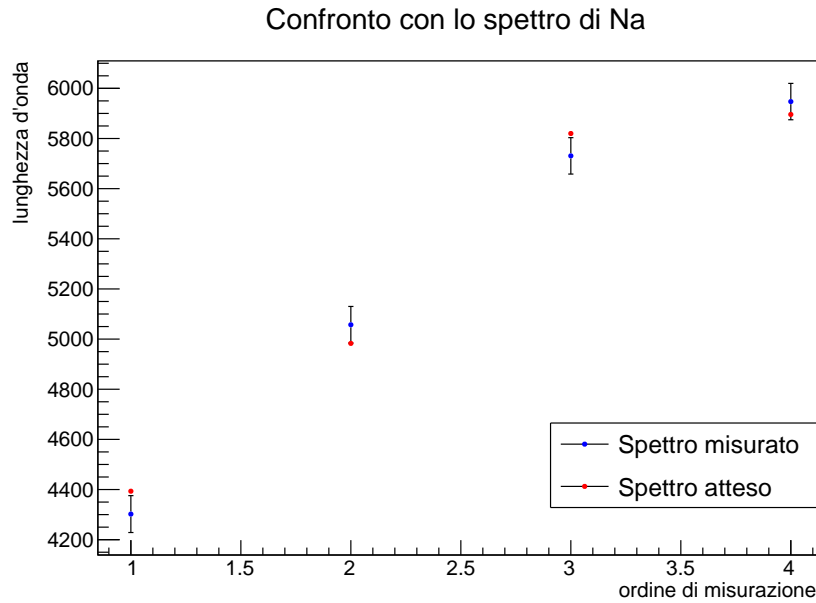


Figura 5

allo stesso modo accettabile.

6 Conclusioni

Lo scopo di questo esperimento è stato quello di studiare e verificare diverse misure legate alla spettrometria attraverso l'utilizzo di due diversi oggetti analizzatori, un prisma e un reticolo dotato di diverse fenditure. Con entrambi gli strumenti abbiamo in primo luogo verificato una legge generale dell'ottica geometrica, la legge di Cauchy, nel caso del prisma, e la legge che descrive la diffrazione, nel caso del reticolo, e in secondo luogo, usando il prisma, abbiamo cercato di stimare la natura della sorgente di alcune lampade ad arco. Abbiamo condotto questa scelta perchè, come già visibile nel Paragrafo 4.3, nonostante la relazione risulti verificata, il valore caratteristico del reticolo non risulta confrontabile con quello reale e non è stato possibile individuare la natura di questi errori.

Abbiamo supposto come natura degli errori, in primis, il fatto che sia il supporto del reticolo che la componente per il fuoco del telescopio non fossero fissati rigidamente, e che, quindi, anche piccoli movimenti errati abbiano potuto provocare spostamenti di uno dei due o di entrambi, modificando le condizioni in cui sono stati raccolti i dati. Abbiamo cercato di mitigare questa inesattezza aggiungendo un termine che cercasse di correggere possibili errori nella mancata perpendicolarità tra lente e reticolo. Inoltre, sempre a causa di un malfunzionamento dello strumento, non era possibile chiudere, oltre a un certo limite, la fenditura. Ciò ha reso difficile l'osservazione dell'esperimento nel caso in cui è stato necessario tenere la lampada il più vicino possibile allo strumento, com'era stato consigliato. Abbiamo, quindi, dovuto allontanare la lampada dallo spettrometro per rendere possibile la misurazione, ma perdendo così precisione nella presa dati. Infine, le misure erano conducibili soltanto con il reticolo da $300 \frac{\text{fend.}}{\text{mm}}$, in quanto

scegliendo reticoli con un numero di fenditure maggiori non era possibile acquisire più di due dati.

Le misure condotte sulle lampade a sorgente ignota sono state più soddisfacenti e, attraverso i valori dei parametri ricavati nella verifica della legge di Cauchy, siamo arrivati a immaginare che potessero essere lampade a sodio e ad elio. D'altra parte, anche in questo caso, era presente un'inaccuratezza che supponiamo possa essere causata o, come in precedenza, dalla non voluta mobilità della componente addetta al fuoco dello strumento, oppure dalle condizioni del prisma, il quale, a causa di diversi vertici rotti o smussati, portava righe di emissione non totalmente dritte, ma leggermente incurvate.

Un'altra fonte d'errore potrebbe essere un stima errata di ϑ_0 o di α , in questo caso però il bias dovrebbe essere presente in tutto l'esperimento, cosa che, invece, non è stata riscontrata. Nonostante tutto l'esperimento è stato soddisfacente in quanto è stato possibile verificare come le relazioni di entrambe le leggi fossero corrette e che il lavoro condotto sulle lampade ignote abbia portato un risultato coerente con lo spettro di emissione di due gas nobili.