

Circuiti 2

L. Trombetta, A. Turturiello, F. Venturoli

maggio, 2022

Abstract

Lo scopo dell'esperienza è stato quello di studiare il funzionamento di circuiti RC , RL e RLC in corrente impulsata, ricavandone i parametri caratteristici dallo studio delle loro equazioni differenziali.

Indice

1	Introduzione e descrizione dell'apparato	2
2	Circuiti RC e RL in corrente impulsata	3
2.1	Configurazione circuito RC	3
2.2	Configurazione circuito RL	3
3	Circuito RLC in corrente impulsata	4
3.1	Regime di sottosmorzato	4
3.2	Regime di sovrasmorzamento	4
3.3	Regime smorzamento critico	5
4	Discussione errori	5
5	Conclusioni	5
Appendice A	Algoritmo Try & Catch	7

1. Introduzione e descrizione dell'apparato

Per condurre l'esperienza ci siamo serviti di una Breadboard dotata di due boccole e di una griglia di fori in cui inserire i reperi. La griglia è caratterizzata dalla presenza di quattro colonne indicate con i simboli "+" e "-", ciascuna equipotenziale, e altre venti colonne equipotenziali riga per riga, indicate con delle lettere, come mostrato nella figura sottostante.

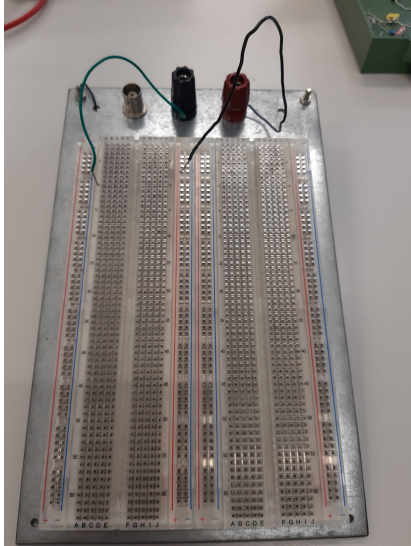


Figura 1

Lo strumento ci ha permesso di realizzare i circuiti su cui abbiamo condotto le diverse misure. Le componenti di circuito di cui ci siamo serviti sono state una resistenza, un condensatore, un induttore e un partitore resistivo, composto da boccole e da interruttori in grado di modificare la resistenza dello strumento. Abbiamo fatto uso di un generatore di segnali ad onde quadre, delle quali era possibile modificare la tensione e l'offset, e di un oscilloscopio, in grado di misurare i segnali di tensione ai capi delle componenti. Abbiamo articolato l'esperienza in 2 parti. In primo luogo abbiamo studiato l'andamento della differenza di potenziale ai capi delle componenti di due differenti circuiti, sollecitati da un segnale ad onda quadra; nel primo caso ai capi di resistenza e capacità, nel secondo caso ai capi di resistenza ed induttanza.

Per lo studio dei circuiti RC ed RL abbiamo proceduto analizzando le equazioni differenziali associate, così da ottenere le relazioni tra le differenze di potenziale ai capi della resistenza ed il tempo.

Per il circuito RC, attraverso le leggi di Kirchhoff, siamo giunti alle equazioni differenziali. Per la scarica si trova

$$RI + \frac{I}{C} = 0 \quad (1)$$

mentre per la carica

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0 \quad (2)$$

Dalle quali abbiamo ottenuto le rispettive equazioni:

$$V_R(t) = -V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

$$V_R(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4)$$

Dove τ è la costante di tempo caratteristica del circuito ed è definita come $\tau = RC$.

Per il circuito RL, attraverso le leggi di Kirchhoff, si giunge alle due equazioni differenziali per carica e scarica. Per la carica risulta essere

$$RI + L\dot{I} = V_0 \quad (5)$$

mentre per la scarica

$$RI + L\dot{I} = 0 \quad (6)$$

Risolviendo queste equazioni differenziali si giunge alle leggi che governano i due fenomeni, rispettivamente

$$V_R(t) = V_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (7)$$

$$V_R(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8)$$

Dove τ è la costante di tempo caratteristica del circuito ed è definita come $\tau = \frac{L}{R}$.

Per quanto riguarda la seconda parte dell'esperienza si è proceduto in maniera analoga nello studio del circuito. Utilizzando i valori ricavati in precedenza per C ed L , abbiamo analizzato il circuito RLC nei suoi tre diversi regimi, *sottosmorzamento*, *sovrasmorzamento* e *smorzamento critico*. Tali regimi possono essere identificati grazie al rapporto tra le due costanti caratteristiche, ricavabili studiando la seguente equazione differenziale:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0 \quad (9)$$

Messa in luce l'analogia con l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato, abbiamo riscritto l'equazione usando lo stesso formalismo:

$$\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega_0^2(Q - CV_0) = 0 \quad (10)$$

A seconda del valore di $\Delta = \gamma^2 - \omega_0^2$ è, dunque, possibile identificare tre differenti regimi. La relazione che lega i parametri è

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Per il regime sottosmorzato $\gamma < \omega_0$, per il regime sovrasmorzato $\gamma > \omega_0$, per il regime di smorzamento critico $\gamma = \omega_0$.

2. Circuiti RC e RL in corrente impulsata

Per la prima parte dell'esperimento ci siamo posti come scopo quello di ricavare i valori del condensatore e dell'induttore, rispettivamente in un circuito RC ed in un circuito RL.

Prima di procedere abbiamo proceduto controllando la calibrazione delle sonde necessarie per misurare il segnale di tensione, attraverso l'uso dell'Oscilloscopio.

Per entrambe le configurazioni abbiamo utilizzato una resistenza di $R = 10,1\Omega$. Tale scelta è stata motivata dal fatto che la resistenza dovesse essere molto inferiore a quella interna dell'Oscilloscopio di circa $1M\Omega$, per simulare nella realtà una resistenza infinita e, quindi, per non dividere i percorsi della corrente.

Per quanto riguarda la capacità abbiamo, invece, scelto un valore molto maggiore della capacità d'ingresso dell'Oscilloscopio di circa $20pF$.

In entrambi i casi abbiamo montato il circuito come in figura, ponendo al posto di Z prima il condensatore e successivamente l'induttore.

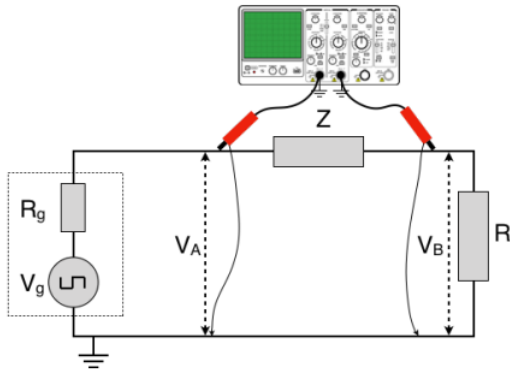


Figura 2: Configurazione circuiti RC e RL

2.1. Configurazione circuito RC

Dopo aver sistemato le componenti del circuito, abbiamo misurato il segnale di tensione ai capi di R e C mediante l'utilizzo di due sonde posizionate come nella figura sopra citata. Abbiamo, quindi, raccolto i dati servendoci di una chiavetta USB, scaricando dall'oscilloscopio i valori di tensione misurati con una frequenza di campionamento di $\frac{1}{0,001 s}$.

Il fit dei dati è stato fatto linearizzando l'Eq. 8 ricavando quindi l'equazione di una retta. Il fit ed il calcolo dei parametri è esposto di seguito. I parametri ricavati risultano quindi essere:

$$V_0 = (1,479 \pm 0,0136) V$$

$$\tau = (0,211 \pm 0,001) s$$

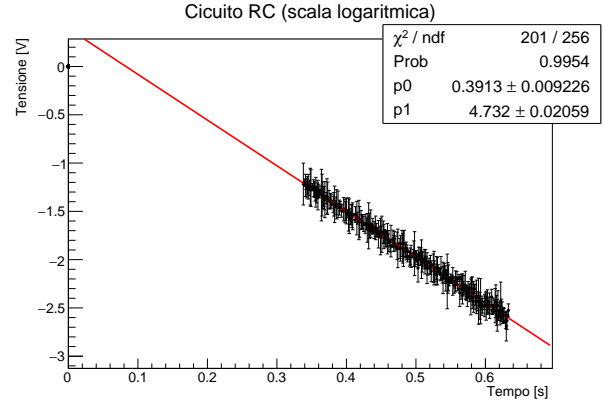


Figura 3: La funzione che è stata usata per effettuare il fit è: $y = A - Bt$. Il parametro A è associato a $p0$, mentre $p1$ rappresenta il parametro B

Il parametro che caratterizza il circuito è la costante di tempo $\tau = RC$. Nota R e ricavato il valore di τ dai dati presi con l'oscilloscopio, abbiamo, dunque, ricavato il valore della capacità del condensatore; essa risulta essere

$$C = \frac{\tau}{R} = (20,891 \pm 0,229) mF$$

l'errore è stato calcolato tramite la propagazione degli errori.

2.2. Configurazione circuito RL

Dopo aver modificato le componenti del circuito, abbiamo misurato il segnale di tensione ai capi di R e L mediante l'utilizzo di due sonde posizionate come nella figura citata in precedenza. Anche in questo caso i dati sono stati raccolti direttamente dallo strumento con la stessa frequenza di campionamento utilizzata in precedenza.

In questo caso si è preferito non linearizzare la funzione con cui si sono interpolati i dati. Tale funzione è riportata nell'introduzione nell'Eq. 7. Riportiamo quindi di seguito i risultati e la discussione del fit.

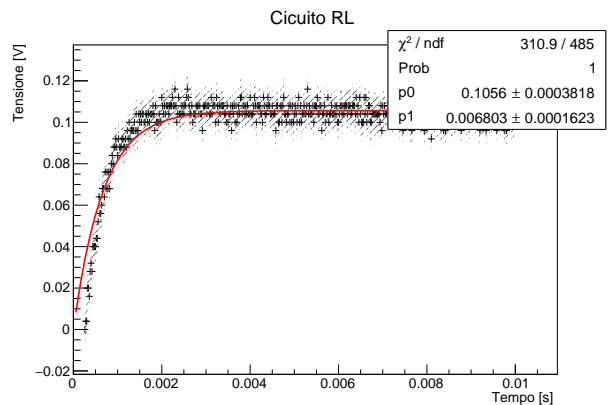


Figura 4

Il parametro che caratterizza il circuito è la costante di tempo $\tau = \frac{L}{R}$. Nota R e ricavato il valore di τ dai dati presi con l'oscilloscopio, abbiamo, dunque, ricavato il valore dell'induttanza; essa risulta essere pari

$$\tau = (6,80 \pm 0,16) \times 10^{-3}$$

Da questo valore si ricava che l'induttanza risulta essere pari a

$$L = (68,68 \pm 1,753) \text{ mH}$$

3. Circuito RLC in corrente impulsata

In questa parte di esperienza abbiamo avuto come scopo quello di studiare l'andamento della differenza di potenziale ai capi delle componenti di un circuito RLC, sollecitato da un segnale ad onda quadra.

In primo luogo abbiamo montato il circuito come in figura, sollecitandolo da un segnale ad onda quadra:

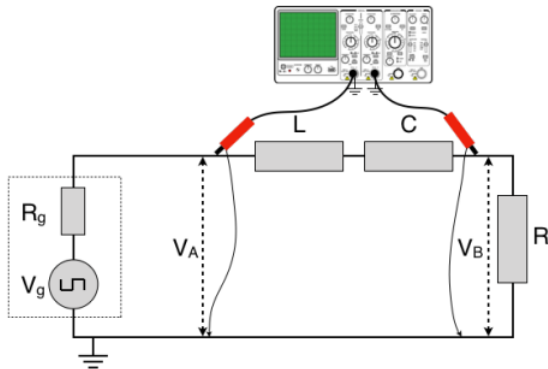


Figura 5: Configurazione circuito RLC

Successivamente abbiamo misurato il segnale di tensione ai capi della resistenza mediante una sonda, posta come indicato.

Per l'analisi del circuito abbiamo dimensionato la configurazione in modo da avere un regime sottosmorzato, uno sovrasmorzato e uno con smorzamento critico.

3.1. Regime di sottosmorzato

Nel caso sottosmorzato abbiamo scelto una frequenza tale da vedere nell'Oscilloscopio almeno 5 massimi e affinché il terzo massimo di $V_R(t)$ sia non meno di $\frac{1}{10}$ dal primo. Di seguito, in Fig. 6, viene esposto il grafico con relativo fit e vengono ricavati i parametri di interesse.

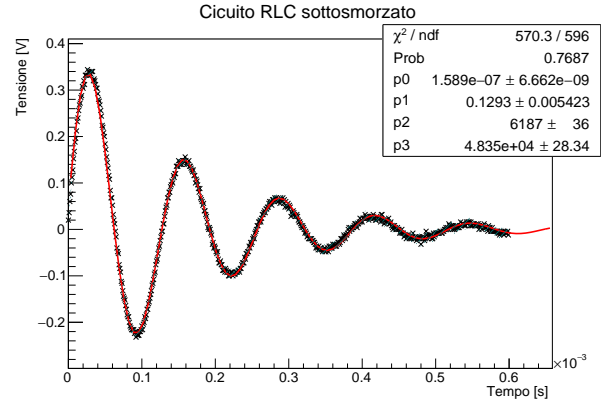


Figura 6: RLC sottosmorzato

Parametro	Valore corrispondente
p0	C
p1	V_0
p2	γ
p3	ω

Tabella 1

Si ricava per cui che i parametri di tale circuito sono:

$L(\text{mH})$	$C(\text{F})$
$32,32 \pm 1,63$	$1,589 \pm 6,67 \times 10^{-3}$

Tabella 2

3.2. Regime di sovrasmorzamento

Nel caso sovrasmorzato abbiamo scelto una frequenza tale da vedere nell'Oscilloscopio $V_R(t)$ almeno di $\frac{1}{10}$ del suo valore.

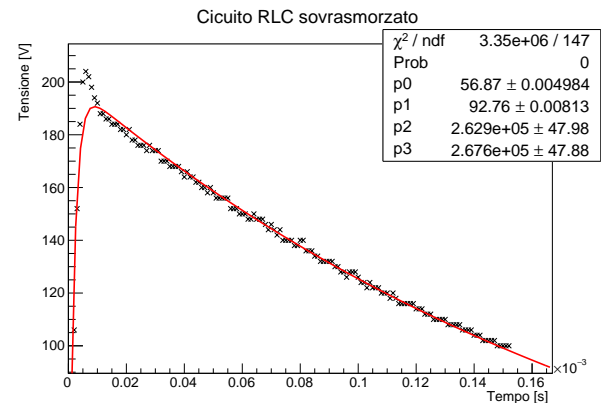


Figura 7: RLC sovrasmorzato

Parametro	Valore corrispondente
p0	Q_0
p1	ω_0^2
p2	β
p3	γ

Tabella 3

Si ricava per cui che i parametri di tale circuito sono:

$L(mH)$	$C(mF) \times 10^{-7}$
$37,37 \pm 1,86$	$288,48 \pm 0,51$

Tabella 4

3.3. Regime smorzamento critico

Come nel caso di regime sovrasmorzato, per lo smorzamento critico abbiamo scelto una frequenza tale da vedere nell'Oscilloscopio $V_R(t)$ almeno di $\frac{1}{10}$ del suo valore.

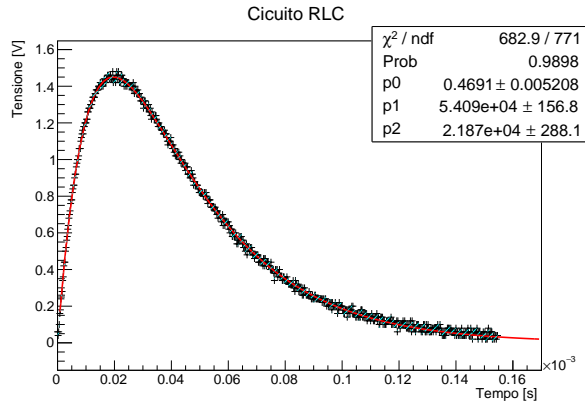


Figura 8: Smorzamento critico

Parametro	Valore corrispondente
p0	I_0
p1	γ
p2	β

Tabella 5

Si ricava per cui che i parametri di tale circuito sono:

$L(mH)$	$C(F) \times 10^{-9}$
$46,21 \pm 4,63$	$8,84 \pm 7,57 \times 10^{-3}$

Tabella 6

4. Discussione errori

L'errore associato ad ogni misura è stato generato tramite un algoritmo per la generazione di numeri pseudocasuali. Infatti, eseguendo una misura del segnale senza elementi circuitali inseriti, si osserva che è sempre presente un segnale di disturbo che quindi va ad intaccare ogni misurazione variando l'intensità del segnale misurato.

Siccome è presente in ogni misurazione abbiamo ritenuto plausibile considerarlo come la principale fonte di errore, inoltre a questa fonte si deve aggiungere l'errore sistematico intrinseco dello strumento. Tale errore è stato valutato come la sensibilità dello strumento. Un ulteriore elemento a favore di questa ipotesi è che le misure sono state raccolte direttamente dallo strumento tramite una chiavetta USB per cui, a meno di errori dovuti a malfunzionamenti interni della strumentazione impossibili da identificare, possibili fonti esterne di errore sono da scartare.

Analizzando il segnale di disturbo si è notata la presenza di valori misurati di tensione distribuiti in maniera casuale. Per tale ragione si è utilizzato un algoritmo di generazione di numeri pseudocasuali distribuiti secondo una *pdf* gaussiana.

La scelta della *pdf* è motivata dal fatto che i valori di tensione osservati erano meno densi agli estremi dell'intervallo mentre la densità aumentava gradualmente spostandosi nel centro dello stesso.

5. Conclusioni

Lo scopo di questa esperienza è stato quello di studiare le relazioni che governano circuiti composti da condensatori, induttanze e resistenze. Abbiamo studiato circuiti RC, RL e RLC in tutti i suoi stati possibili. Il fine delle misurazioni era quello di riottenere i valori di C e L attraverso la verifica delle leggi ottenute dallo studio teorico sui circuiti. L'unica configurazione in cui abbiamo riscontrato difficoltà a fittare i dati è stata quella del circuito RC, in cui abbiamo, quindi, optato per un fit in scala logaritmica. Il circuito RC è anche l'unico in cui il valore stimato di C, non corrisponde con il valore che potevamo aspettarci, in quanto doveva essere dell'ordine dei nanofarad. Riteniamo che la causa di questo errore possa essere attribuita sia alla scelta della resistenza sia alla maniera con cui abbiamo interpolato i dati, in quanto abbiamo dovuto selezionare una parte delle misure collezionate. Infine abbiamo condotto un *t*-test per verificare la confrontabilità dei valori di L e C ricavati dalle diverse configurazioni RC/RL e RLC nei suoi diversi stati. Abbiamo condotto dei *t*-test per verificare la confrontabilità dei diversi metodi per l'acquisizione dei parametri. Nel caso di L, nonostante solo

un t-test risulti accettabile con una distanza di 4 sigma tra i 2 valori, nelle configurazioni risultano grandezze dell'ordine di grandezza aspettato (una decina di mH). La legge risulta sempre verificata, tranne nel caso nello sovrasmorzamento, nel quale riteniamo che l'errore nel fit sia dovuto ad un errore dell'algoritmo, a causa della quantità di dati. Diversamente avviene per C, in cui solo in 2 casi i risultati sono nell'ordine di grandezza aspettato (circa tra 10^{-7} e 10^{-9}). La causa di tale errore può essere riconducibile a due diversi motivi. In primis, crediamo che in configurazioni come RC e RLC (sovrasmorzamento) l'utilizzo di una diversa resistenza possa migliorare l'accuratezza e la precisione delle misure. Riteniamo, in secondo luogo, anche che la scelta della scala dei tempi utilizzata per prendere le misurazioni tramite la chiavetta possa essere modificata per ottenere misure più precise.

Appendice A. Algoritmo Try & Catch

```
double fgaus (double x, double mean,
             double sigma)
{
    double esponente = (-0.5 * (x -
                             mean) * (x - mean) / (sigma *
                                                     sigma));
    double termine_proporzionalita = 1 /
        (sqrt(2 * M_PI) * sigma);
    return termine_proporzionalita *
        exp(esponente);
}

double rand_range (double min, double
                  max)
{
    return min + (max - min) * rand () /
        static_cast<double> (RAND_MAX);
}

double rand_TAC_gaus (double mean,
                     double sigma)
{
    double x = 0. ;
    double y = 0. ;
    do {
        x = rand_range (mean - 4 * sigma,
                        mean + 4 * sigma);
        y = rand_range (0, fgaus (mean,
                                mean, sigma));
    } while (y > fgaus (x, mean,
                       sigma));
    return x;
}
```

Listing 1: Algoritmo utilizzato per generare errori

L'algoritmo utilizzato è basato sul metodo *try and catch*. Tale metodo risulta molto utile nel caso in cui si debbano generare numeri pseudocasuali che seguano una determinata *pdf*, in questo caso gaussiana. La funzione `rand()` genera coppie di numeri pseudocasuali (x, y) distribuiti secondo una *pdf* uniforme. Di tale coppia di numeri il valore che andremo a considerare come *r.v.* distribuita secondo tale *pdf* è la coordinata x . Tale coordinata è ritenuta valida se e solo se $y_i < f(x_i)$, dove la funzione $f(x)$ è la *pdf* che si è scelta, in questo caso una gaussiana definita nella funzione `fgaus()`.

Un algoritmo di questo tipo presenta sia vantaggi che svantaggi. Il vantaggio principale consiste nel fatto che non è necessario che la *pdf* sia nota analiticamente, infatti è sufficiente riuscire a esprimerla in termini di funzione nel linguaggio di pro-

grammazione scelto ed inoltre è facilmente estendibile a dimensioni maggiori di 1. Lo svantaggio principale riguarda il costo computazionale caratteristico questo algoritmo. Infatti per la generazione di una *r.v.* distribuita secondo la *pdf* richiesta è necessario generare sicuramente almeno due valori pseudocasuali, spesso ne sono necessari molti di più in quanto molti punti sul piano vengono scartati.