高数 1-2　12-13 B

一、选择题（每题 3 分，24 分）

1. 设 $z=\ln\left(x^2y\right)$，则 $dz=\underline{\dfrac{2xy}{x^2y}dx+\dfrac{1}{y}dy}$

2. 设 $f\left(x,y\right)=3xy+x^y$，则 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(e,1\right)$ 处的梯度为 $\underline{\left(4,4e\right)}$

3. 方程 $x+2y+z=\sin\left(xz\right)$ 确定 $z=z\left(x,y\right)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{\dfrac{1-z\cos\left(xz\right)}{x\cos\left(xz\right)-1}}$

4. 空间曲线 $x=t+1$ ， $y=t^2$ ， $z=3t$ 在点 $t=1$ 处的切线方程为

$\underline{\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{3}}$

5. 交换二次积分的积分次序 $I=\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f\left(x,y\right)dy$，得 $I=\underline{\int_0^2 dy\int_1^{2-y} f\left(x,y\right)dx}$

6.微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $\underline{y=e^{-x}\left(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x\right)}$

7. 设 L 为抛物线 $x=y^2$ 上从点 $A\left(1,1\right)$ 到 $B\left(4,2\right)$ 的弧段，则 $\int_L\dfrac{2y^2}{\sqrt{1+4x}}ds=\underline{\dfrac{14}{3}}$

8. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n+1}x^n$ 的收敛域为 $\underline{\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)}$

二、选择题

1.平面 $4x+6y-z=\lambda$ 是曲面 $z=2x^2+3y^2$ 在点 $\left(1,1,5\right)$ 处的切平面，则 $\lambda=$ （ B ）

A. 4　　B. 5　　C. 2　　D. -5

2. 函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 点两个一阶偏导数存在是函数在该点可微分的（ A ）

A. 必要条件　B. 充分条件　C. 充要条件　D. 既非充分又非必要

3. 设积分区域 $D:0\le y\le\sqrt{x-x^2}$ ，则二重积分 $\iint\limits_D d\sigma=$ （ D ）

A. π　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{8}$

4. 下列级数中条件收敛的是（ B ）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n n!}{2^n}$　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{n+1}$　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\sin\dfrac{\pi}{5^n}$　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n^2}$

三. 解答题

1. 求二元函数 $f\left(x,y\right)=x^3-2y+3x^2+y^2-9x$ 的极值，并说明是极大值还是极小值？（7分）

解：$\begin{cases} f_x=3x^2+6x-9=0 \\ f_y=-2+2y=0 \end{cases}$ 解得驻点为$\left(-3,1\right)$ 和$\left(1,1\right)$.

$f_{xx}=6x+6$ ， $f_{xy}=0$ ， $f_{yy}=2$

在点$\left(-3,1\right)$处， $A=-12,B=0,C=2,AC-B^2<0$ 无极值.

在点$\left(1,1\right)$处， $A=12,B=0,C=2,AC-B^2>0,A>0$ 有极小值.

极大值为 $f\left(1,1\right)=1-2+3+1-9=-6$.

2. 设函数 $z=f\left(xy,e^{x+y}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.（7 分）

解：令 $u=xy,v=e^{x+y}$ **，则** $z=f\left(u,v\right)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\frac{\partial u}{\partial y}=x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=e^{x+y},\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot e^{x+y}=yf_1'+e^{x+y}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(yf_1'+e^{x+y}f_2'\right)=f_1'+y\frac{\partial f_1'}{\partial y}+e^{x+y}f_2'+e^{x+y}\frac{\partial f_2'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_1'}{\partial y}=f_{11}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial v}{\partial y}=xf_{11}''+e^{x+y}f_{12}''$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial y}=f_{21}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial v}{\partial y}=xf_{21}''+e^{x+y}f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left(xf_{11}''+e^{x+y}f_{12}''\right)+e^{x+y}f_2'+e^{x+y}\left(xf_{21}''+e^{x+y}f_{22}''\right)$$

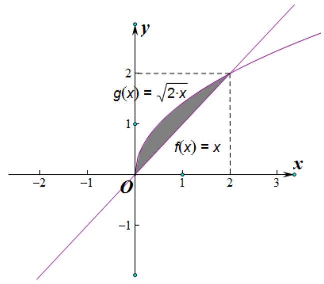
$$=f_1'+e^{x+y}f_2'+xyf_{11}''+e^{x+y}yf_{12}''+xe^{x+y}f_{21}''+\left(e^{x+y}\right)^2 f_{22}''$$

$\because f$ 具有二阶连续偏导数，$\therefore f_{12}''=f_{21}''$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+e^{x+y}f_2'+xyf_{11}''+e^{x+y}\left(y+x\right)f_{12}''+e^{2(x+y)}f_{22}''$$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2 ydxdy$，其中 D 是以曲线 $y^2=2x$，与直线 $y=x$ 所围成的平面区域.（7 分）

解：X 型



$$\iint\limits_D x^2 ydxdy=\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{2x}} x^2 ydy \quad =\int_0^2 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{\sqrt{2x}} d$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\left(2x-x^2\right)dx \quad =\frac{1}{2}\int_1^2\left(2x^3-x^4\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(8-\frac{32}{5}\right)=\frac{4}{5}$$

4. 将函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$ 展开成 $x+1$ 的幂级数，并写出可展区间.（7 分）

解：$\dfrac{1}{x^2+2x-3}=\dfrac{1}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-2+(x+1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x+1}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} \quad ,(-3<x<1)$$

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2+(x+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x+1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x+1}{2}\right)^n$$

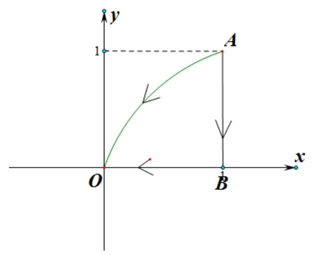
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^{n+1}} \quad ,(-5<x<3)$$

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{4}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}-\left(\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^{n+1}}\right)\right]=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+3}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+3}}\right)(x+1)^n$$

可展区间为 $(-3<x<1)$

5. 计算曲线积分 $I=\int_L\left(x^3+3y\right)dx+\left(3x+ye^{-y}\right)dy$，其中 L 为曲线 $y=\sqrt{x}$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的弧段.（7 分）

解：设 $P=x^3+3y$ ， $Q=3x+ye^{-y}$



$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3-3=0$$

此曲线积分与路径无关

取新的路径：线段 AO

有向线段 AO： $y=x,x:1\to 0$

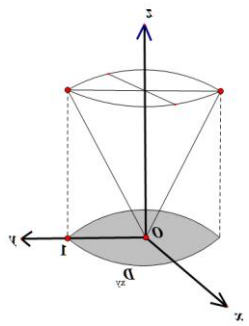
$$I=I_{AO}=\int_{A0}\left(x^3+3y\right)dx+\left(3x+ye^{-y}\right)dy=\int_1^0\left[\left(x^3+3x\right)+\left(3x+xe^{-x}\right)\cdot 1\right]dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+3x^2\right]_1^0-\int_1^0 xde^{-x}=-\frac{1}{4}-3-\left[xe^{-x}\right]_1^0+\int_1^0 e^{-x}dx$$

$$=-\frac{13}{4}+e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_1^0=-\frac{13}{4}+e^{-1}-1+e^{-1}=-\frac{17}{4}+\frac{2}{e}$$

（注：也可取路径为线段 AB,BO）

6. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}2xz^2dydz+y\left(z^2+1\right)dzdx+\left(2-z^3\right)dxdy$ ，其中 Σ 为曲面与 $z=\sqrt{x^2+y^2}\left(0\le z\le 1\right)$ 的下侧.（8 分）



解：设 $P=2xz^2$， $Q=y\left(z^2+1\right)$， $R=2-z^3$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2z^2+z^2+1-3z^2=1$$

设平面 Σ_1 ： $x^2+y^2\le 1,z=1$

$$I_{\Sigma_1}=\iint\limits_{\Sigma_1}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\left[2-(1)^3\right]dxdy=\pi$$

由高斯公式得

$$I+I_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}1dxdydz$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 1=\frac{1}{3}\pi \quad \text{(圆锥体积公式)}$$

$$\therefore I=\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{2}{3}\pi$$

7. 求微分方程 $y'-\frac{y}{x}=1-2\ln x$ 满足初始条件 $y\big|_{x=e}=e$ 的特解.（7 分）

解：此为一阶非齐次线性方程，

设 $P(x)=-\frac{1}{x},Q(x)=1-2\ln x$

由公式知，此方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int(1-2\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{\ln|x|}\left(\int(1-2\ln x)e^{-\ln|x|}dx+C\right)=x\left(\int(1-2\ln x)\frac{1}{x}dx+C\right)$$

$$=x\left(\int(1-2\ln x)d\ln x+C\right)=x\left[\ln x-(\ln x)^2+C\right]$$

当 $y\big|_{x=e}=e$ 时，$e=e(1-1+C),C=1$

此方程满足初始条件 $y\big|_{x=e}=e$ 的特解为 $y==x\left[\ln x-(\ln x)^2+1\right]$

8. 求微分方程 $y''-y'-2y=e^{2x}$ 的通解.（8 分）

解：此为二阶常系数非齐次线性微分方程，$P_m(x)=1$，$\lambda=2$

原方程对应的齐次方程为 $y''-y'-2y=0$ （1）

其特征方程为 $r^2-r-2=0$，根为 $r_1=-1,r_2=2$

（1）式的通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

$\because$ $\lambda=2$ 是特征方程的单根，

$\therefore$ 设原方程的特解为 $y^*=Q(x)e^{2x},Q(x)=xb_0$

代入方程 $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)=P_m(x)$，

得 $3b_0=1$ 比较等式两端同次幂的系数得：

得 $b_0=\frac{1}{3}$ $\therefore Q(x)=\frac{x}{3},y^*=\frac{x}{3}e^{2x}$

从而所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+\frac{x}{3}e^{2x}$

四、（6 分）求满足$\int_0^x \varphi(t)\,dt=\frac{x^2}{2}+\int_0^x t\varphi(x-t)\,dt$ 的可微函数$\varphi(x)$

证明：设$u=x-t$ ，则

$$\int_0^x t\varphi(x-t)\,dt=\int_x^0 (x-u)\varphi(u)\,d(x-u)=\int_0^x (x-u)\varphi(u)\,du$$

$$=\int_0^x (x-u)\varphi(u)\,du=\int_0^x x\varphi(u)\,du-\int_0^x u\varphi(u)\,du=x\int_0^x \varphi(u)\,du-\int_0^x u\varphi(u)\,du$$

原方程变为$\int_0^x \varphi(t)\,dt=\frac{x^2}{2}+x\int_0^x \varphi(u)\,du-\int_0^x u\varphi(u)\,du$

方程两边关于x 求导，得$\varphi(x)=x+\int_0^x \varphi(u)\,du+x\varphi(x)-x\varphi(x)$

即 $\varphi(x)=x+\int_0^x \varphi(u)\,du$ 记为（1）式

方程两边再关于x 求导，得$\varphi'(x)=1+\varphi(x)$

令$y=\varphi(x)$ ，上式变为 $y'-y=1$

此为一阶非齐次线性微分方程，由通解公式得其通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)=e^{\int dx}\left(\int e^{-\int dx}dx+C\right)$$

$$=e^x\left(-e^{-x}+C\right)=Ce^x-1$$

（1）式中令$x=0$ 得，$\varphi(0)=0$ ，$0=C-1,C=1$

$\therefore \varphi(x)=e^x-1$