高数 1-2　13-14 A

一、选择题（每题 3 分，24 分）

1. 方程 $z=e^{2x-z}+2y$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，则 $dz=$ ______________

分析： $dz=de^{2x-z}+d(2y)=2e^{2x-z}dx-e^{2x-z}dz+2dy$

整理得 $\underline{dz=\dfrac{2e^{2x-z}}{1+e^{2x-z}}dx+\dfrac{2}{1+e^{2x-z}}dy}$

2. 曲线 $x=t-\cos t$，$y=3+\sin 2t$，$z=1+\cos 3t$ 在点 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为_______

分析：切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$

在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处，$x_0=\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}, y_0=3+\sin\pi=3, z_0=1+\cos\dfrac{3\pi}{2}=1$

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1+\sin t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1+\sin\frac{\pi}{2}=2 \quad , \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(2\cos 2t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=2\cos\pi=-2$$

$z'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=(-3\sin 3t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=-3\sin\dfrac{3\pi}{2}=3$　　切线方程为 $\underline{\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{3}}$

3. 函数 $u=\ln\left(x+y^2+z^2\right)$ 在点A(1,0,1)沿 A 点指向B(3,2,2)方向的方向导数为_________

分析：$f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处沿着方向 $\vec{e}_l=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

$\overrightarrow{AB}=\{2,2,1\},\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$　$\cos\alpha=\dfrac{2}{3},\cos\beta=\dfrac{2}{3},\cos\gamma=\dfrac{1}{3}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,0,1)}=\frac{1}{x+y^2+z^2}\Big|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2},\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,0,1)}=\frac{2y}{x+y^2+z^2}\Big|_{(1,0,1)}=0$$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,0,1)}=\dfrac{2z}{x+y^2+z^2}\Big|_{(1,0,1)}=1$　　$\underline{\therefore\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\cdot 0+\dfrac{1}{3}\cdot 1=\dfrac{2}{3}}$

4. 交换二次积分 $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}f(x,y)dy+\int_{1}^{2}dx\int_{x}^{2}f(x,y)dy$ 的积分次序，得 $I=$_________

答案：$\underline{\int_{1}^{2}dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}f(x,y)dx}$　（自己画图吧）

5. 设 L 为连接 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 两点的直线段，则 $\int_L (x+y+2)ds =$ ____________________

分析：第一类曲线积分公式： $f(x,y)$ 在曲线： $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \le t \le \beta$ 的曲线积分公式： $\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

L 的参数方程为 $x=t, y=1-t, 0\le t\le 1$

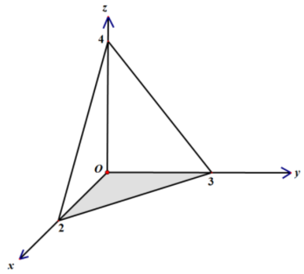
$$\int_L (x+y+2)ds = \int_0^1 (t+1-t+2)\sqrt{(-1)^2+1^2}dt = \int_0^1 3\sqrt{2}dt = \underline{3\sqrt{2}}$$

6. 设 Σ 是平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint_\Sigma \left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)dS =$ ____________

第一类曲面积分计算公式（书本 130 页）：$\Sigma \quad z=z(x,y)$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$

此题中， $z=4-2x-\frac{4y}{3}$ ，



$$\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)} = \sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{3}$$

$$\iint_\Sigma \left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)dS = \iint_{D_{xy}} \left(2x+\frac{4}{3}y+4-2x-\frac{4y}{3}\right)\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$

$$=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_{D_{xy}} dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = \underline{4\sqrt{61}}$$

7. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$ 的收敛域为________________________

（书 179 页定理 2）

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\frac{2^n}{n^2+1}}\right| = 2 \quad , \quad R=\frac{1}{l}=\frac{1}{2} \quad ,$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛，当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ 收敛。

所以收敛域为 $\underline{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}$

8. 二阶微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为 ________________

书本 231 页：特征方程为 $r^2+2r+1=0$ ，根为 $r_1=r_2=-1$

原方程的通解为 $\underline{y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}}$

二、选择题 1.C 2.C 3.C 4.D

三. 解答题

1. 求函数 $f\left(x,y\right)=3xy-x^3-y^3+4$ 的极值，并说明是极大值还是极小值？（7 分）

解：$\begin{cases} f_x=3y-3x^2=0 \\ f_y=3x-3y^2=0 \end{cases}$ 解得驻点为 $\left(0,0\right)$ 和 $\left(1,1\right)$.

$f_{xx}=-6x$ ， $f_{xy}=3$ ， $f_{yy}=-6y$

在点 $\left(0,0\right)$ 处， $A=0,B=3,C=0,AC-B^2<0$ 无极值.

在点 $\left(1,1\right)$ 处， $A=-6,B=3,C=-6,AC-B^2>0,A<0$ 有极大值.

极大值为 $f\left(1,1\right)=3-1-1+4=5$.

2. 设函数 $z=f\left(ye^x,x^2+y^2\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.（7 分）

解：令 $u=ye^x,v=x^2+y^2$ ，则 $z=f\left(u,v\right)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ye^x,\frac{\partial u}{\partial y}=e^x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2x,\frac{\partial v}{\partial y}=2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot ye^x+f_2'\cdot 2x=ye^x f_1'+2xf_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(ye^x f_1'+2xf_2'\right)=e^x f_1'+ye^x\frac{\partial f_1'}{\partial y}+2x\frac{\partial f_2'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_1'}{\partial y}=f_{11}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial v}{\partial y}=e^x f_{11}''+2yf_{12}''$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial y}=f_{21}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial v}{\partial y}=e^x f_{21}''+2yf_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x f_1'+ye^x\left(e^x f_{11}''+2yf_{12}''\right)+2x\left(e^x f_{21}''+2yf_{22}''\right)$$

$$=e^x f_1' + ye^{2x} f_{11}'' + 2y^2 e^x f_{12}'' + 2xe^x f_{21}'' + 4xyf_{22}''$$

$\because f$ 具有二阶连续偏导数，$\therefore f_{12}'' = f_{21}''$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x f_1' + ye^{2x} f_{11}'' + \left(2y^2 e^x + 2xe^x\right) f_{21}'' + 4xyf_{22}''$$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} d\sigma$，其中 D 是以直线 $y=x$ 和曲线 $y=\sqrt{x}$ 为边界的曲边三角形区域.（7 分）

分析：此题用 X 型算不出来，只能用 Y 型来做。

$$I=\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} d\sigma = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}\left(y-y^2\right) dy = \int_0^1 \sin y dy - \int_0^1 y \sin y dy$$

$$\int_0^1 \sin y dy = \left[-\cos y\right]_0^1 = -\cos 1 - \left(-\cos 0\right) = -\cos 1 + 1$$

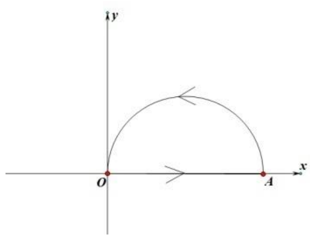
$$\int_0^1 y \sin y dy = -\int_0^1 y d\cos y = \left[-y\cos y\right]_0^1 + \int_0^1 \cos y dy = -\cos 1 + \left[\sin y\right]_0^1 = -\cos 1 + \sin 1$$

$$I = -\cos 1 + 1 - \left(-\cos 1 + \sin 1\right) = 1 - \sin 1$$

4. 计算曲线积分 $\int_L \left(e^x \sin y - ky + 1\right) dx + \left(e^x \cos y - k\right) dy$，其中 L 为上半圆周 $y=\sqrt{Rx-x^2}$ 上从点 $(R,0)$ 到点 $(0,0)$ 的弧段 $(R>0)$.（8 分）

解：设 $P=e^x \sin y - ky + 1$ ， $Q = e^x \cos y - k$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - \left(e^x \cos y - k\right) = k$$



记 $O(0,0)$， $A(R,0)$ ，

有向线段 OA： $y=0, x:0 \to R$

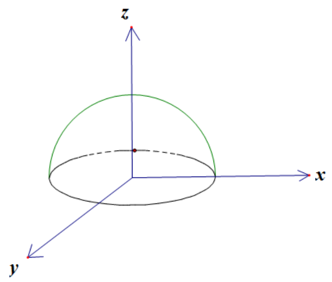
$$I_{OA} = \int_{OA} \left(e^x \sin y - ky + 1\right) dx + \left(e^x \cos y - k\right) dy = \int_0^R (0+0+1) dx = R$$

由格林公式知

$$I = \int\limits_L Pdx + Qdy = \oint\limits_{L+OA} Pdx + Qdy - \int\limits_{OA} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy - I_{OA}$$

$$= \iint\limits_D k dxdy - R \quad = k \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi - R = \frac{kR^2 \pi}{8} - R$$

5. **计算曲面积分** $I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3\left(z^2-1\right)dxdy$**，其中** $\sum$ **为曲面** $z=1-x^2-y^2\left(z\geq 0\right)$ **的上侧.（8 分）**



解：设平面 $\sum_1$ ： $z=0,x^2+y^2\leq 1$ ，取下侧.

设 $P=2x^3$， $Q=2y^3$， $R=3\left(z^2-1\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=6\left(x^2+y^2+z\right)$$

$$I_{\Sigma_1}=\iint\limits_{\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(0+0+3\left(0-1\right)\right)dxdy=3\pi$$

由高斯公式得

$$I+I_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}6\left(x^2+y^2+z\right)dxdydz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_0^{1-x^2-y^2}6\left(x^2+y^2+z\right)dz=\iint\limits_{D_{xy}}\left[6\left(x^2+y^2\right)z+3z^2\right]_0^{1-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[6\left(x^2+y^2\right)\left(1-x^2-y^2\right)+3\left(1-x^2-y^2\right)^2\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[-3\left(x^2+y^2\right)^2+3\right]dxdy=-3\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)^2dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}3dxdy$$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^4\cdot rdr+3\cdot\pi=-\pi+3\pi=2\pi$$

$$\therefore I=2\pi-3\pi=-\pi$$

6. 将函数 $\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$ **展开成** $x+4$ **的幂级数，并写出可展区间.（7 分）**

解： $\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

$$\frac{2}{x+1}=\frac{2}{-3+\left(x+4\right)}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{3}}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x+4\right)^n}{3^{n+1}}\quad,\left(-7<x<-1\right)$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-2+(x+4)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^{n}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^{n}}{2^{n+1}}\quad ,(-6<x<-2)$$

$$\frac{x+3}{x^{2}+3x+2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^{n}}{3^{n+1}}-\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^{n}}{2^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x+4)^{n}$$

可展区间为$(-6<x<-2)$

7. 求微分方程 $xy'-y=x^{2}+1$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解.（7 分）

方法一：公式法

解：$y'-\dfrac{y}{x}=x+\dfrac{1}{x}$ ，此为一阶非齐次线性方程，

设 $P(x)=-\dfrac{1}{x},Q(x)=x+\dfrac{1}{x}$

由公式知，此方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)\ =e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{\ln|x|}\left(\int\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{-\ln|x|}dx+C\right)=x\left(\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx+C\right)$$

$$=x\left(\int\left(1+\frac{1}{x^{2}}\right)dx+C\right)=x\left(x-\frac{1}{x}+C\right)=x^{2}-1+Cx$$

当 $y\big|_{x=1}=1$ 时，$1=1-1+C,C=1$

此方程满足初始条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=x^{2}-1+x$

方法二：常数变异法

解：　　$y'-\dfrac{y}{x}=x+\dfrac{1}{x},(1)$ ，

此为一阶非齐次线性方程，其对应的齐次方程为

$y'-\dfrac{y}{x}=0,(2)$

即 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$ ，分离变量得 $\dfrac{1}{y}dy=-\dfrac{1}{x}dx$ 两边积分得

$$\ln|y|=-\ln|x|+C_{1},y=\pm e^{-\ln|x|+C_{1}}=Cx,\left(C=\pm e^{C_{1}}\right)$$

经检验，$y=0$也是（2）的解，所以（2）式的通解为

$y=Cx$ ，（C 为任意常数）

由常数变异法，令$C=u(x)$ ，则$y=u(x)x$ ，$y'=u'(x)x+u(x)$ 带入（1）式，得

$u'(x)x=x+\dfrac{1}{x}$ ，$u'(x)=1+\dfrac{1}{x^2},u(x)=\displaystyle\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=x-\frac{1}{x}+C$

(1)式的通解为$y=x\left(x-\dfrac{1}{x}+C\right)=x^2-1+Cx$

当$y\big|_{x=1}=1$ 时，$1=1-1+C,C=1$

此方程满足初始条件$y\big|_{x=1}=1$的特解为$y=x^2-1+x$

8. 求微分方程$y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$的通解.（8 分）

解：此为二阶常系数非齐次线性微分方程，$P_m(x)=x+1$ ，$\lambda=3$

原方程对应的齐次方程为 $y''-6y'+9y=0$ （1）

其特征方程为 $r^2-6r+9=0$，根为$r_1=r_2=3$

（1）式的通解为$Y=(C_1+C_2x)e^{3x}$

$\because$ $\lambda=3$ 是特征方程的二重根， $\therefore$ 设原方程的特解为$y^*=x^2(b_0x+b_1)e^{3x}$

代入原方程，得 $6b_0x+2b_1=x+1$ 比较等式两端同次幂的系数得：

$\begin{cases}6b_0=1\\2b_1=1\end{cases}$ ，解得 $b_0=\dfrac{1}{6}$ ，$b_1=\dfrac{1}{2}$求得一个特解为 $y^*=x^2\left(\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{2}\right)e^{3x}$

从而所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+x^2\left(\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{2}\right)e^{3x}$

四. 应用题（5 分）

设$y=f(x)$是第一象限内连接点$B(1,0)$，$A(0,1)$的一段连续曲线，$M(x,y)$为该曲线上任意一点，点C为点M 在x轴上的投影，O为坐标原点；若梯形$OCMA$的面积与曲边三角形CBM 的面积之和为$\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$，试建立 $f(x)$所满足的微分方程，并求 $f(x)$的表达式.

解：根据题意得 $\frac{1}{2}x\left[1+f\left(x\right)\right]+\int_x^1 f\left(x\right)dx=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}$

等式两边关于 x 求导，得：$\frac{1}{2}\left[1+f\left(x\right)\right]+\frac{1}{2}xf'\left(x\right)-f\left(x\right)=\frac{x^2}{2}$

即 $\frac{1}{2}[1+y]+\frac{1}{2}xy'-y=\frac{x^2}{2}$ 即 $xy'-y=x^2-1$ 即 $y'-\frac{y}{x}=x-\frac{1}{x}$

此为一阶非齐次线性微分方程，由通解公式得其通解为

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=x\left(\int\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx+C\right)=x\left(x+\frac{1}{x}+C\right)$$

根据题意，$y=f\left(x\right)$ 过 $B\left(1,0\right)$ ，则 $C=-2$

$$\therefore y=x\left(x+\frac{1}{x}-2\right)=x^2-2x+1$$