高数 1-2　12-13 A

一、选择题（每题 3 分，24 分）

1. 设 $z=\ln\left(1+x^2+y\right)$，则 $dz=\underline{\dfrac{2x}{1+x^2+y}dx+\dfrac{1}{1+x^2+y}dy}$

2. 已知 $z=z\left(x,y\right)$ 由方程 $yz+xe^z+1=0$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{-\dfrac{e^z}{y+xe^z}}$

3. 曲线 $x=t-\sin t$ ，$y=1-\cos t$ ，$z=4\sin\dfrac{t}{2}$ 在点 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为

$$\underline{\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

4. 交换二次积分 $I=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f\left(x,y\right)dx$ 的积分次序，得 $I=\underline{\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f\left(x,y\right)dy}$

5. 设 L 为连接 $A\left(1,0\right)$ 和 $B\left(0,1\right)$ 两点的直线段，则 $\int_L\left(x+y+1\right)ds=\underline{2\sqrt{2}}$

6. 设 Σ 是平面 $x+2y+z=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(z+x+2y\right)dS=\underline{\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$

7. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域为 $\underline{\left[-2,2\right)}$

8. 二阶齐次线性微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解为 $\underline{y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-2x}}$

二、选择题

1.曲面 $x^2+2y^2+3z^2=12$ 在点 $\left(1,-2,1\right)$ 处的切平面方程（ D ）

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-8}=\dfrac{z-1}{6}$　　B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{-3}$

C. $x+4y-3z=12$　　D. $x-4y+3z=12$

2. 二元函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处偏导数存在是它在该点可微分的（ A ）

A. 必要条件　B. 充分条件　C. 充要条件　D. 既非充分又非必要

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于，则下列级数发散的是（ D ）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2u_n$　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n+\dfrac{1}{2^n}\right)$　C. $2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{u_n}$

4. 下列级数中条件收敛的是（ C ）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{4^n}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}$

三. 解答题

1. 求函数 $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$ 的极值，并说明是极大值还是极小值？（7 分）

解：$\begin{cases} f_x=3y-3x^2=0 \\ f_y=3x-3y^2=0 \end{cases}$ 解得驻点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

$f_{xx}=-6x$ ， $f_{xy}=3$ ， $f_{yy}=-6y$

在点 $(0,0)$ 处， $A=0,B=3,C=0,AC-B^2<0$ 无极值.

在点 $(1,1)$ 处， $A=-6,B=3,C=-6,AC-B^2>0,A<0$ 有极大值.

极大值为 $f(1,1)=3-1-1=1$.

2. 设函数 $z=f\left(x-2y,xy^2\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.（7 分）

解：令 $u=x-2y,v=xy^2$ **，则** $z=f(u,v)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=-2 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=y^2,\frac{\partial v}{\partial y}=2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y^2=f_1'+y^2f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+y^2f_2'\right)=\frac{\partial f_1'}{\partial y}+2yf_2'+y^2\frac{\partial f_2'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_1'}{\partial y}=f_{11}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial v}{\partial y}=-2f_{11}''+2xyf_{12}''$$

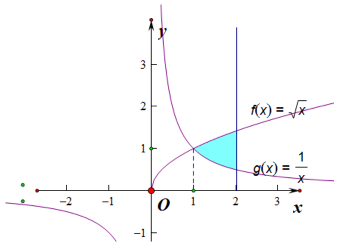
$$\frac{\partial f_2'}{\partial y}=f_{21}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial v}{\partial y}=-2f_{21}''+2xyf_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(-2f_{11}''+2xyf_{12}''\right)+2yf_2'+y^2\left(-2f_{21}''+2xyf_{22}''\right)$$

$$=2yf_2'-2f_{11}''+2xyf_{12}''-2y^2f_{21}''+2xy^3f_{22}''$$

$\because$ f 具有二阶连续偏导数，$\therefore$ $f_{12}''=f_{21}''$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yf_2' - 2f_{11}'' + \left(2xy - 2y^2\right) f_{12}'' + 2xy^3 f_{22}''$$



3. 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2 ydxdy$，其中 D 是以直线 $y=\sqrt{x}$，$y=\frac{1}{x}$ 与直线 $x=2$ 所围成的区域.（7 分）

解：X 型

$$\iint\limits_D x^2 ydxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} x^2 ydy \quad = \int_1^2 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx \quad = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x^3 - 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - x\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{4} - 1\right) = \frac{11}{8}$$

4. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并写出可展区间.（7 分）

解：$f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$$

$-1 < -\frac{x-1}{2} < 1$ ，可展区间为 $-1 < x < 3$

5. 求微分方程 $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = x^2 + x^4$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 1$ 的特解. （7 分）

解：公式法，原方程可化为

$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = x^2$ ，此为一阶非齐次线性方程，

设 $P(x) = -\frac{2x}{1+x^2}, Q(x) = x^2$

由公式知，此方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left(\int x^2e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{\int\frac{1}{1+x^2}d\left(1+x^2\right)}\left(\int x^2e^{-\int\frac{1}{1+x^2}d\left(1+x^2\right)}dx+C\right)=e^{\ln\left(1+x^2\right)}\left(\int x^2e^{-\ln\left(1+x^2\right)}dx+C\right)$$

$$=\left(1+x^2\right)\left(\int\frac{x^2}{1+x^2}dx+C\right)=\left(1+x^2\right)\left(\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx+C\right)$$

$$=\left(1+x^2\right)\left(\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx+C\right)=\left(1+x^2\right)\left(x-\arctan x+C\right)$$

当 $y\big|_{x=0}=1$ 时，$1=0+0+C,C=1$

此方程满足初始条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y==\left(1+x^2\right)\left(x-\arctan x+1\right)$

6. 求微分方程 $y''+y'-2y=4xe^{2x}$ 的通解.（8 分）

解：此为二阶常系数非齐次线性微分方程，$P_m(x)=4x$ ，$\lambda=2$

原方程对应的齐次方程为 $y''+y'-2y=0$ （1）

其特征方程为 $r^2+r-2=0$ ，根为 $r_1=1,r_2=-2$

（1）式的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$

$\because$ $\lambda=2$ 不是特征方程的根，

$\therefore$ 设原方程的特解为 $y^*=Q(x)e^{2x},Q(x)=b_0x+b_1$

代入方程 $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)Q(x)=P_m(x)$ ，

得 $5b_0+4(b_0x+b_1)=4$ 比较等式两端同次幂的系数得：

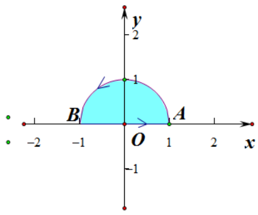
$\begin{cases}4b_0=4\\5b_0+4b_1=0\end{cases}$ ，解得 $b_0=1$ ，$b_1=-\frac{5}{4}$

$\therefore Q(x)=x-\frac{5}{4},y^*=\left(x-\frac{5}{4}\right)e^{2x}$

从而所求通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\left(x-\frac{5}{4}\right)e^{2x}$

7. 计算曲线积分 $\int_L \left(2xy-y^2\right)dx+\left(x^2+x-y\right)dy$，其中 L 是圆 $x^2+y^2=1$ 从点 $A(1,0)$ 沿上半圆周到点 $B(-1,0)$ 的弧段.（8 分）

解：设 $P=2xy-y^2$ ， $Q=x^2+x-y$



$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x+1-(2x-2y)=1+2y$$

有向线段 BA： $y=0,x:-1\to 1$

$$I_{OA}=\int_{OA}\left(2xy-y^2\right)dx+\left(x^2+x-y\right)dy=\int_{-1}^{1}0dx=0$$

由格林公式知

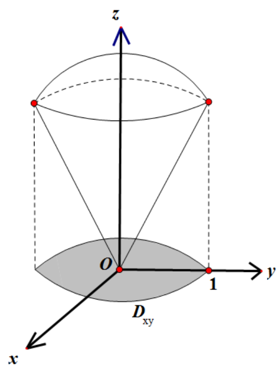
$$I=\int\limits_L Pdx+Qdy=\oint\limits_{L+BA} Pdx+Qdy-\int\limits_{BA} Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-I_{BA}$$

$$=\iint\limits_D(1+2y)dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1(1+2r\sin\theta)rdr=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{2}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\pi+\frac{4}{3}$$

8. 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}4xzdydz-y^2dzdx+2yzdxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$ 所围成的立体的表面外侧.（8 分）

解：设 $P=4xz$， $Q=-y^2$， $R=2yz$



$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=4z-2y+2y=4z$$

由高斯公式得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}4zdxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^2 4\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\bullet\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\bullet\int_0^2 4\rho^3 d\rho$$

$$=2\pi\bullet\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\bullet\left[\rho^4\right]_0^2=2\pi\bullet\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\bullet 2^4=4\pi$$

四、证明题

证明：$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2}\ f(y)dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}\ f(y)dy$

提示：交换积分次序

证明：$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2}\ f(y)dy=\int_a^b dy\int_a^x (x-y)^{n-2}\ f(y)dx$

$$=\int_a^b f(y)dy\int_a^x (x-y)^{n-2}dx=\int_a^b f(y)\left[\frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\right]_x^b dy$$

$$=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}\ f(y)dy$$

题目得证