高数 1-2 13-14 B

一、选择题（每题 3 分，24 分）

1. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ ，则 $dz=$ $\underline{\dfrac{x}{x^2+y^2}dx+\dfrac{y}{x^2+y^2}dy}$

分析: $z=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$ ，$dz=\dfrac{1}{2}\dfrac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}dx+\dfrac{y}{x^2+y^2}dy$

2.函数 $f\left(x,y\right)=2xy+x^3+\dfrac{y^2}{2}$ 在点 $M\left(1,-1\right)$ 处的最大方向导数为 $\underline{\sqrt{2}}$

分析：方向导数在梯度方向上取得最大，最大值为梯度的模长。（书 35 页）

梯度：$\overrightarrow{grad}\, f\left(x,y\right)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

3. 方程 $z=x^2y+\sin z$ 确定了函数 $z=z\left(x,y\right)$ ，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{\dfrac{2xy}{1-\cos z}}$

分析：方程两边关于 $x$ 求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+\cos z\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \quad ,\left(1-\cos z\right)\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy}{1-\cos z}$$

4. 曲面 $3z=x^2+2y^2$ 在点 $\left(1,1,1\right)$ 处的切平面方程为 $\underline{2\left(x-1\right)+4\left(y-1\right)-3\left(z-1\right)=0}$

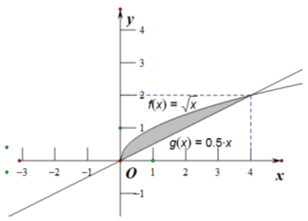
分析：切平面方程（书本 40 页）曲面 $F\left(x,y,z\right)=0$ 在点 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 处切平面方程为

$$F_x\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(x-x_0\right)+F_y\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(y-y_0\right)+F_y\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(z-z_0\right)=0$$

令 $F\left(x,y,z\right)=x^2+2y^2-3z$ $F_x\left(1,1,1\right)=2$ ，$F_y\left(1,1,1\right)=4$，$F_z\left(1,1,1\right)=-3$

切平面方程为 $2\left(x-1\right)+4\left(y-1\right)-3\left(z-1\right)=0$

5. 交换二次积分 $I=\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f\left(x,y\right)dx$ 的积分次序，得 $\underline{I=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f\left(x,y\right)dy}$



6. 微分方程 $y''+3y'=0$ 的通解为 $\underline{y=C_1+C_2e^{-3x}}$

书本 231 页：特征方程为 $r^2+3r=0$ ，根为 $r_1=0,r_2=-3$

原方程的通解为 $\underline{y=C_1+C_2e^{-3x}}$

7. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n-1}\sqrt{n}}$ 的收敛域为 $\underline{[0,4)}$

（书 179 页定理 2）设 $y=x-2$，原级数变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{2^{n-1}\sqrt{n}}$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{n}}}\right|=\frac{1}{2}\ ,\quad R=\frac{1}{l}=2\ ,$$

当 $y=2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{2^{n-1}\sqrt{n}}$ 变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ 发散，

当 $y=-2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{2^{n-1}\sqrt{n}}$ 变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\sqrt{n}}$ 收敛。

所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{2^{n-1}\sqrt{n}}$ 收敛域为 $[-2,2)$ ，$\therefore -2\le x-2<2, 0\le x<4$

原级数的收敛域为 $[0,4)$

8. 设 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=ax$ ，则 $\oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\underline{\ 2a^2\ }$

分析：第一类曲线积分公式： $f(x,y)$ 在曲线： $x=\varphi(t),y=\psi(t),\alpha\le t\le\beta$ 的曲线积分公式：$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

$L$ 的参数方程为 $x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t, y=\frac{a}{2}\sin t, 0\le t\le 2\pi$

$$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\cos t)}\cdot\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}dt=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}\left(2\cos^2\frac{t}{2}\right)}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du=2a^2$$

二、选择题　1.B　　2.A　　3.D　　4.D

三. 解答题

**1.** 求函数 $f(x,y)=x^2+y^3+4x-3y+4$ 的极值，并说明是极大值还是极小值？（7 分）

解：$\begin{cases} f_x=2x+4=0 \\ f_y=3y^2-3=0 \end{cases}$ 解得驻点为 $(-2,1)$ 和 $(-2,-1)$ .

$f_{xx}=2$ ，$f_{xy}=0$ ，$f_{yy}=6y$

在点 $(-2,1)$ 处，$A=2,B=0,C=6,AC-B^2>0,A>0$ 有极小值.

极小值为 $f(2,1)=4+1-8-3+4=-2$

在点 $(-2,-1)$ 处，$A=2,B=0,C=-6,AC-B^2<0$ .无极值

**2.** 设函数 $z=f\left(x+2y,\dfrac{y}{x}\right)$，其中 $f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ .（7 分）

**解：令** $u=x+2y,v=\dfrac{y}{x}$ **，则** $z=f(u,v)$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=2 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=f_1'-\frac{y}{x^2}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'-\frac{y}{x^2}f_2'\right)=\frac{\partial f_1'}{\partial y}-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f_2'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_1'}{\partial y}=f_{11}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial v}{\partial y}=2f_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial y}=f_{21}''\frac{\partial u}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial v}{\partial y}=2f_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(2f_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right)-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}\left(2f_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}f_2'+2f_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''-\frac{2y}{x^2}f_{21}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''$$

$\because$ $f$ 具有二阶连续偏导数，$\therefore$ $f_{12}''=f_{21}''$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f_2'+2f_{11}''+\left(\frac{1}{x}-\frac{2y}{x^2}\right)f_{12}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''$$

**3.** 利用极坐标计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma$，其中 $D$ 是圆形闭区域：$x^2+y^2\le 4$ .（7 分）

解：$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{r^2}\cdot rdr=\int_0^{2\pi}d\theta\bullet\frac{1}{2}\int_0^2 e^{r^2}dr^2=2\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]\Big|_0^2=\pi\left[e^4-1\right]$

4. 将函数 $f(x)=\ln(x+3)$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并写出可展区间.（7 分）

分析：已知 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},(-1<x\le 1)$

解：$f(x)=\ln(x+3)=\ln(4+(x-1))=\ln 4\left(1+\frac{x-1}{4}\right)=\ln 4+\ln\left(1+\frac{x-1}{4}\right)$

$$=\ln 4+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{x-1}{4}\right)^{n+1}}{n+1}=\ln 4+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{x-1}{4}\right)^{n+1}}{n+1}=\ln 4+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}$$

可展区间为 $-1<\frac{x-1}{4}\le 1$ ，即 $-3<x\le 5$

解：方法二：

$$f'(x)=\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{4}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{4}\right)^n$$

$=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}$ ，$-1<\frac{x-1}{4}<1$ ，即 $-3<x<5$

$$f(x)=\int_1^x f'(x)dx+f(1)=\int_1^x\left(\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}\right)dx+\ln 4$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\int_1^x(x-1)^n dx+\ln 4=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_1^x+\ln 4$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}+\ln 4$$

可展区间为 $-3<x<5$ ，当 $x=5$ 时，$f(5)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)}+\ln 4$ 也收敛，

所以可展区间为 $-3<x\le 5$

5. 求微分方程 $xy'+2y=\cos\left(x^2\right)$ 的通解. （7 分）

解： $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{1}{x}\cos\left(x^2\right)$ ，此为一阶非齐次线性方程，

设 $P\left(x\right)=\dfrac{2}{x},Q\left(x\right)=\dfrac{1}{x}\cos\left(x^2\right)$

由公式知，此方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\left(\frac{1}{x}\cos\left(x^2\right)\right)e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-2\ln|x|}\left(\int\left(\frac{1}{x}\cos\left(x^2\right)\right)e^{2\ln|x|}dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\int\left(\frac{1}{x}\cos\left(x^2\right)\right)x^2dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\int x\cos\left(x^2\right)dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}\int\cos\left(x^2\right)dx^2+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}\sin x^2+C\right)$$

6. 求微分方程 $y''-10y'+25y=xe^{5x}$ 的通解. （8 分）

解：此为二阶常系数非齐次线性微分方程， $P_m\left(x\right)=x$ ， $\lambda=5$

原方程对应的齐次方程为 $y''-10y'+25y=0$ （1）

其特征方程为 $r^2-10r+25=0$ ，根为 $r_1=r_2=5$

（1）式的通解为 $Y=\left(C_1+C_2x\right)e^{5x}$

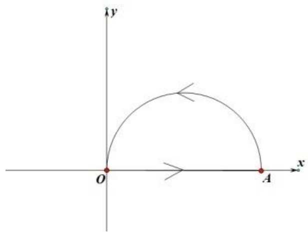
$\because$ $\lambda=5$ 是特征方程的二重根， $\therefore$ 设原方程的特解为 $y^*=x^2\left(b_0x+b_1\right)e^{5x}$

代入原方程，得 $6b_0x+2b_1=x$ 比较等式两端同次幂的系数得：

$\begin{cases}6b_0=1\\2b_1=0\end{cases}$ ，解得 $b_0=\dfrac{1}{6}$ ， $b_1=0$ 求得一个特解为 $y^*=\dfrac{x^3}{6}e^{5x}$

从而所求通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{5x}+\dfrac{x^3}{6}e^{5x}$

7. 计算曲线积分$\int_L\left[e^x\sin y-b(x+y)\right]dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$，其中$a,b$ 均为正常数，$L$ 为从点$A(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到原点$O(0,0)$的有向弧段.（8 分）




解：设$P=e^x\sin y-b(x+y)$ ，　$Q=e^x\cos y-ax$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-a-\left(e^x\cos y-b\right)=b-a$$

有向线段$OA$：$y=0,x:0\to 2a$

$$I_{OA}=\int_{OA}\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy=\int_0^{2a}(0-bx)dx=-2a^2b$$

由格林公式知

$$I=\int_L Pdx+Qdy=\oint_{L+OA}Pdx+Qdy-\int_{OA}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-I_{OA}$$

$$=\iint_D(b-a)dxdy-\left(-2a^2b\right)=(b-a)\cdot\frac{1}{2}a^2\pi+2a^2b=\frac{1}{2}a^2(b-a)\pi+2a^2b$$

8. 计算曲面积分$I=\oiint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中$\sum$为柱面$x^2+y^2=1$ 及 $z=0,z=3$ 围成的空间区域$\Omega$ 的整个边界曲面的外侧. （8 分）

解： 设$P=(y-z)x$，$Q=0$，$R=x-y$

$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=y-z$ 由高斯公式得

$$I=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint_{\Omega}(y-z)dxdydz$$

$$=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_0^3(y-z)dz=\iint_{D_{xy}}\left[yz-\frac{1}{2}z^2\right]_0^3dxdy=\iint_{D_{xy}}\left[3y-\frac{9}{2}\right]dxdy$$

$$=3\iint_{D_{xy}}ydxdy-\frac{9}{2}\iint_{D_{xy}}dxdy=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\sin\theta\cdot rdr-\frac{9}{2}\pi$$

$$=3\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\bullet\int_0^1 r^2dr-\frac{9}{2}\pi=3\left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi}\bullet\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1-\frac{9}{2}\pi=-\frac{9}{2}\pi$$

四. 证明题：可微函数$f(x)$ 满足：$f(x)=1-\int_{\frac{1}{x}}^1 f(xt)dt$　$(t>0)$ ，证明：

$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ （5 分）

证明： $f\left(x\right)=1-\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{1}f\left(xt\right)d\left(xt\right)$

令 $u=xt$ ，得 $f\left(x\right)=1-\frac{1}{x}\int_{1}^{x}f\left(u\right)d\left(u\right)$

等式两边关于 $x$ 求导，得

$f'\left(x\right)=\frac{1}{x^2}\int_{1}^{x}f\left(u\right)d\left(u\right)-\frac{1}{x}f\left(x\right)$ 又 $\int_{1}^{x}f\left(u\right)d\left(u\right)=x\left[1-f\left(x\right)\right]$

$\therefore f'\left(x\right)=\frac{1}{x^2}x\left[1-f\left(x\right)\right]-\frac{1}{x}f\left(x\right)$

$\therefore y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x}$ （1），由一阶线性微分方程的通解公式知，此方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\frac{1}{x}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-2\ln|x|}\left(\int\frac{1}{x}e^{2\ln|x|}dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\int\frac{1}{x}x^2dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)=\frac{1}{2}+\frac{C}{x^2}$$

在 $f\left(x\right)=1-\int_{\frac{1}{x}}^{1}f\left(xt\right)dt$ 中令 $x=1$ ，则 $f\left(1\right)=1$ ，带入通解，得 $C=\frac{1}{2}$

（1）式的特解为 $y=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ ，即 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$