

Repaso matemáticas general

Sandra Mingo Ramírez
2024/25

Índice general

1	Álgebra lineal	2
1.1	Notación general	2
1.2	Operaciones de matrices	2
1.3	Propiedades de la multiplicación de matrices	4
2	Ecuaciones diferenciales	5
2.1	Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)	5
2.2	Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)	5
2.3	Orden de una ecuación diferencial	5
2.4	Solución de una ecuación diferencial	5
3	Probabilidad y Combinatoria	7
3.1	Introducción	7
3.2	Probabilidad condicional	9
3.3	Variables aleatorias	10

1. Álgebra lineal

1.1. Notación general

Se denota un **vector** \mathbf{x} como $x \in \mathbb{R}^n$ con n entradas, donde $x_i \in \mathbb{R}$ es la entrada i -ésima. Un vector se puede ver como una matriz de dimensiones $n \times 1$ y se denomina también como vector-columna.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Se denota una **matriz** \mathbf{A} como $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con n columnas y m filas, donde $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ es la entrada en la fila i -ésima y columna j -ésima.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \dots & & \dots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Una **matriz de identidad** $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuadrada con 1 en la diagonal principal y 0 en el resto. Para cualquier matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se cumple que $\mathbf{A} \times \mathbf{I} = \mathbf{I} \times \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Operaciones de matrices

Multiplicación vector-vector Hay dos tipos de productos vector-vector:

- **Producto interno (inner product):** Dados dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ de la misma dimensión, el producto interno es un escalar (un sólo número). Se usa en cálculos que involucran proyecciones, determinación de ortogonalidad, etc. El producto interno puede aplicarse en cualquier dimensión.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$$

- **Producto externo (outer product):** Dados dos vectores, no necesariamente de la misma dimensión, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, el producto externo es una matriz de $m \times n$.

$$\mathbf{x} \mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \dots & & \dots \\ x_m y_1 & \dots & x_m y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

El producto externo tiene las siguientes aplicaciones en bioinformática:

- **Álgebra lineal**
 - **Matrices de Covarianza:** Se utiliza en la construcción de matrices de covarianza, que son fundamentales en estadística y análisis de datos.
 - **Representación de Transformaciones:** Ayuda a representar transformaciones lineales y rotaciones en el espacio.
- **Análisis de Datos y Machine Learning**

- **Modelos de Regresión:** En algunos métodos de regresión, como la regresión de mínimos cuadrados, se utiliza el producto externo para construir matrices de diseño.
- **Métodos de Factorización:** Se aplica en técnicas como la factorización de matrices y la descomposición en valores singulares (SVD), que son esenciales en la reducción de dimensionalidad y análisis de componentes principales (PCA).

Multiplicación matriz-vector Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y un vector $x \in \mathbb{R}^n$, el producto es un vector del tamaño \mathbb{R}^m . El proceso consiste en multiplicar cada fila de la matriz A por el vector x y sumar los resultados.

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \dots + A_{1,n}x_n \\ \dots \\ A_{m,1}x_1 + A_{m,2}x_2 + \dots + A_{m,n}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{matrix} A & \times & x & & y \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] & \times & \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \\ \text{m x n matrix} & & \text{n x 1 matrix} & & \text{m-dimensional} \\ \text{(m rows,} & & \text{(n-dimensional} & & \text{vector} \\ \text{n columns)} & & \text{vector)} & & \end{matrix}$$

Entre las aplicaciones de la multiplicación matriz-vector se encuentran:

■ Álgebra lineal y matemáticas puras

- **Sistemas de Ecuaciones Lineales:** Resolver sistemas de ecuaciones de la forma $Ax = b$.
- **Transformaciones Lineales:** Representar y aplicar transformaciones lineales como rotaciones, escalamientos y reflexiones.

■ Computación y Algoritmos

- **Algoritmos de Optimización:** Implementar métodos de optimización como gradiente descendente.
- **Análisis de Gráficos:** Procesar datos en grafos y redes, como algoritmos de PageRank.
- **Compresión de Datos:** Utilizar en algoritmos de compresión de datos y análisis de componentes principales (PCA).

■ Machine Learning e Inteligencia Artificial

- **Regresión Lineal:** Resolver problemas de regresión lineal para ajustar modelos a datos.
- **Redes Neuronales:** Calcular activaciones y actualizar pesos en redes neuronales.

■ Bioinformática

- **Análisis de Datos Genómicos:** Procesar y analizar grandes volúmenes de datos genómicos y de secuenciación.

Multiplicación matriz-matriz Dadas dos matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, el producto es una matriz de tamaño $\mathbb{R}^{m \times p}$.

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{1,k}B_{k,1} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{1,k}B_{k,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{m,1}B_{k,1} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{m,k}B_{k,p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \times & B = C \\
 \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] & \times & \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \\
 \begin{array}{c} m \times n \text{ matrix} \\ (m \text{ rows,} \\ n \text{ columns}) \end{array} & & \begin{array}{c} n \times p \text{ matrix} \\ (n \text{ rows,} \\ p \text{ columns}) \end{array} & & \begin{array}{c} m \times p \\ \text{matrix} \end{array}
 \end{array}$$

1.3. Propiedades de la multiplicación de matrices

No conmutatividad: En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir, $A \times B \neq B \times A$. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

En el caso de multiplicar una matriz con una matriz de identidad, sí es conmutativa.

Matriz inversa Si A es una matriz cuadrada $m \times m$, y tiene inversa, entonces

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Transposición de matriz Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, su transpuesta A^T : es una matriz $n \times m$ donde $\forall i, j, (A^T)_{ij} = A_{ji}$. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función con sus derivadas. En otras palabras, describe cómo cambia una cantidad en función de otra (por ejemplo, cómo cambia la concentración de una proteína en función del tiempo). La ecuación diferencial más básica es:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Aquí, y es la función que queremos encontrar, t es la variable independiente (como el tiempo), y $f(t, y)$ es una función que describe cómo cambia y con respecto a t .

2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Estas ecuaciones involucran una sola variable independiente, y la función desconocida depende solo de esa variable. **Ejemplo:** modelar el crecimiento de una población:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde $P(t)$ es la población en el tiempo t , y k es una constante de crecimiento.

2.2. Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

Las EDP involucran múltiples variables independientes, de forma que la función desconocida depende de varias variables. **Ejemplo:** modelar la difusión de una sustancia en un medio:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = D \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$$

donde $u(x, t)$ es la concentración de la sustancia en la posición x y el tiempo t , y D es el coeficiente de difusión.

2.3. Orden de una ecuación diferencial

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

- **Primer orden:** solo involucra la primera derivada

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- **Segundo orden:** involucra la segunda derivada

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + by = 0$$

2.4. Solución de una ecuación diferencial

Resolver una ecuación diferencial significa encontrar la función $y(t)$ que satisface la ecuación. La **solución general** es una familia de soluciones que incluye constantes arbitrarias. La **solución particular** se obtiene al asignar valores específicos a las constantes, generalmente usando condiciones iniciales o de contorno.

Dependiendo del tipo de ecuación, existen diferentes métodos de resolver las ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son más complejas y suelen requerir métodos avanzados como separación de variables, transformadas de Fourier o métodos numéricos. Para las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), se pueden seguir los siguientes pasos:

1. **Separacion de variables:** se usa cuando la ecuación se puede separar en términos que dependen solo de y y solo de t .

$$\frac{dy}{dt} = ky \rightarrow \frac{dy}{y} = kdt$$

Integrando ambos lados:

$$\ln|y| = kt + C \rightarrow y(t) = Ce^{kt}$$

2. **Ecuaciones lineales de primer orden:** se resuelven usando un factor integrante.

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$$

3. **Ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes:** se resuelven asumiendo una solución de la forma $y(t) = e^{rt}$, donde r es una constante a determinar.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0$$

3. Probabilidad y Combinatoria

3.1. Introducción

- S o Ω - eEspacio muestral: El conjunto de todos los resultados *posibles* **de un experimento**.
- E o A - Evento: Cualquier subconjunto del espacio muestral se conoce como un evento. Es decir, un evento es un conjunto que consta de posibles resultados del experimento. Si el resultado del experimento está contenido en E , entonces decimos que E ha ocurrido. Para cada evento E , denotamos $P(E)$ como la probabilidad del evento E ocurriendo.

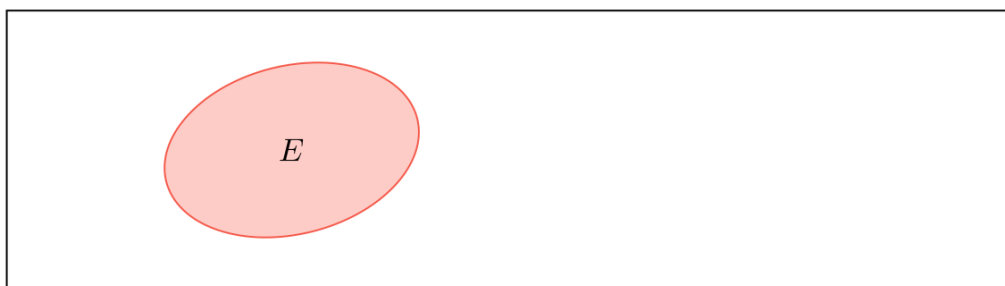
3.1.1. Axiomas de la probabilidad (Kolmorov)

Estos axiomas proporcionan una base sólida para el cálculo de probabilidades y son fundamentales en la teoría de la probabilidad.

1. Axioma de no negatividad:

$$P(A) \geq 0$$

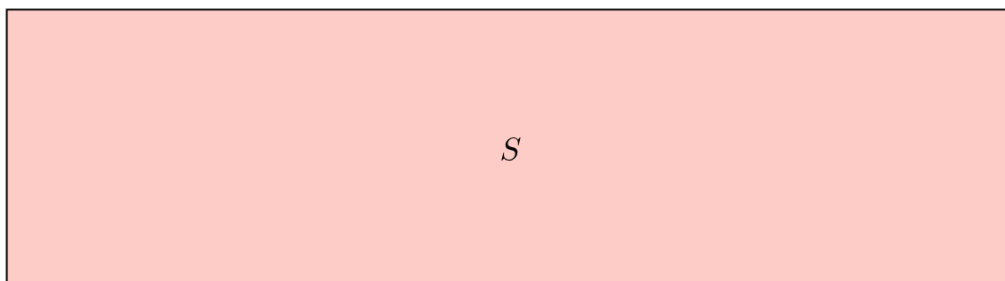
Para cualquier evento A , la probabilidad de A es un número **no** negativo. Esto significa que la probabilidad de cualquier evento no puede ser negativa.



2. Axioma de la certeza:

$$P(S) = 1$$

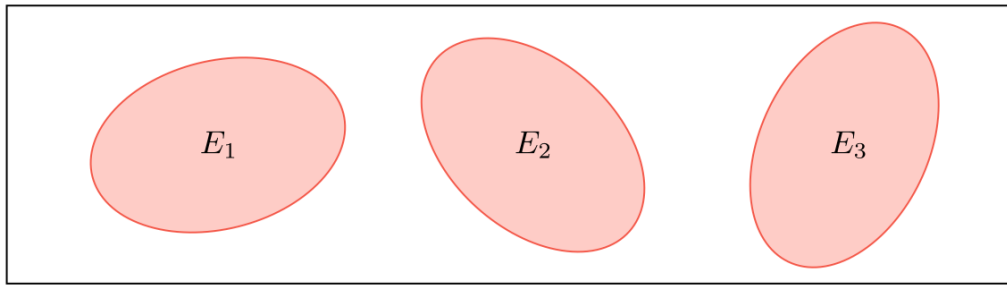
La probabilidad del espacio muestral S es igual a 1. Esto significa que la probabilidad de que ocurra algún evento en el espacio muestral es 100 %.



3. Axioma de aditividad:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Para cualquier secuencia de eventos mutuamente excluyentes $[A_1, A_2, \dots, A_n]$, la probabilidad de la unión de estos eventos (A_i) es igual a la suma de las probabilidades de cada evento individual. Esto



es que, si varios eventos que no pueden ocurrir simultáneamente, la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos es la suma de las probabilidades de cada uno de esos eventos. Teniendo en cuenta que $P(A_i) \leq P(S) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$, entonces: $0 \leq P(A) \leq 1$ para un evento A_i .

3.1.2. Combinatoria

1. **Permutación:** es una disposición de r objetos de un conjunto de n objetos, **en un orden específico**. En otras palabras, es una forma de organizar o reordenar los elementos de un conjunto. Por ejemplo, si tienes un conjunto de tres letras: A, B y C, las posibles permutaciones de estas letras serían: [ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA]. La fórmula para calcular el número de permutaciones se da por:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

donde:

- $P(n, r)$ es el número de permutaciones.
- n es el número total de objetos en el conjunto.
- r es el número de objetos que se seleccionan.
- $n!$ (factorial de n) es el producto de todos los números enteros positivos hasta n .

Por ejemplo, si tienes un conjunto de 5 objetos y quieres seleccionar 3 de ellos en un orden específico, el número de permutaciones sería: $P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$

2. **Combinación:** Una combinación es una selección de r objetos de un conjunto de n objetos, donde el orden no importa. La fórmula para calcular el número de combinaciones se da por:

$$C(n, r) = \frac{n!}{n!(n - r)!}$$

donde:

- $C(n, r)$ es el número de permutaciones.
- n es el número total de objetos en el conjunto.
- r es el número de objetos que se seleccionan.
- $n!$ (factorial de n) es el producto de todos los números enteros positivos hasta n .
- $r!$ (factorial de r) es el producto de todos los números enteros positivos hasta r .

Por ejemplo, si tienes un conjunto de 4 nucleótidos (A, T, C, G) y quieres seleccionar 3 de ellos sin importar el orden, el número de combinaciones sería: $C(4, 3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 1} = 4$. Esto significa que hay 4 combinaciones posibles de 3 nucleótidos a partir de un conjunto de 4 nucleótidos.

3.2. Probabilidad condicional

3.2.1. Regla de Bayes

Para eventos A y B , tal que $P(B) > 0$:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}$$

Nota: $P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = P(A | B)P(B)$.

3.2.2. Partición

Sea una colección de n conjuntos A_i donde cada conjunto no es vacío; expresado como $\{A_i, i \in [1, n]\}$ tal que para todo i , $A_i \neq \emptyset$. En otras palabras, cada conjunto A_i contiene al menos un elemento.

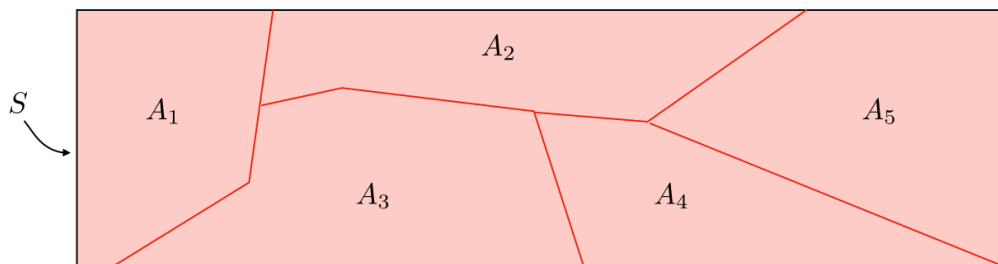
Verbosamente: Para una colección de n conjuntos A_i , donde i varía en un rango desde 1 hasta n para cada uno de los conjuntos A_i en la colección, se da la condición de que cada conjunto A_i no es vacío.

Decimos que $\{A_i\}$ es una partición si se cumplen las siguientes condiciones:

$$(i) \quad \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \quad (ii) \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

- **Mutuamente excluyentes:** Para todo $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Esto significa que los conjuntos A_i y A_j no tienen elementos en común.
- **Cobertura completa:** La unión de todos los conjuntos A_i es igual al conjunto original S , es decir, $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$.

En resumen, una partición de un conjunto S es una colección de subconjuntos no vacíos, mutuamente excluyentes, cuya unión es el conjunto original S .



3.2.3. Forma extendida de la regla de Bayes

Esta fórmula nos permite calcular la probabilidad de un evento A_k dado que ha ocurrido otro evento B , teniendo en cuenta todas las posibles particiones del espacio muestral.

La forma extendida de la regla de Bayes se utiliza cuando tenemos una partición del espacio muestral. Si

$A_i, i \in [1, n]$ es una partición del espacio muestral, entonces la forma extendida de la regla de Bayes se expresa como:

$$P(A_k | B) = \frac{P(B | A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)}$$

donde:

- $P(A_k | B)$ es la probabilidad de que ocurra el evento A_k dado que ha ocurrido el evento B .
- $P(B | A_k)$ es la probabilidad de que ocurra el evento B dado que ha ocurrido el evento A_k .
- $P(A_k)$ es la probabilidad de que ocurra el evento A_k .
- $\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)$ es la suma de las probabilidades de que ocurra el evento B dado cada uno de los eventos A_i multiplicadas por las probabilidades de que ocurra cada uno de los eventos A_i . Esta suma ponderada representa la probabilidad total de que ocurra el evento B , considerando todas las posibles particiones del espacio muestral.

Independencia Dos eventos A y B son independientes si y solo si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Esto significa que la probabilidad de que ambos eventos ocurran simultáneamente es igual al producto de sus probabilidades individuales.

3.3. Variables aleatorias

