Matemáticas

Sandra Mingo Ramírez

2024/25

Índice general

1. Álgebra lineal

1.1. Vectores

Un vector es una cantidad que tiene tanto magnitud como dirección. En el contexto de álgebra lineal, un vector es una lista ordenada de números. Un vector se puede representar como:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Suma de vectores Dos vectores del mismo tamaño se pueden sumar componente a componente.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \dots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Multiplicación por un escalar Un vector se puede multiplicar por un número (escalar) multiplicando cada componente por ese número.

$$c\mathbf{v} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \dots \\ cv_n \end{pmatrix}$$

Producto punto (o producto escalar) Dados dos vectores **u** y **v**, su producto punto es:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

El producto punto es útil para calcular ángulos entre vectores y para proyectar un vector sobre otro.

1.2. Matrices

Una matriz es una disposición rectangular de números en filas y columnas. Las matrices son fundamentales en álgebra lineal y se utilizan para representar transformaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, y más. Una matriz **A** de tamaño $m \times n$ se representa como:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde a_{ij} es el elemento en la fila i y la columna j.

Suma de matrices Dos matrices del mismo tamaño se pueden sumar elemento a elemento.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicación por un escalar Una matriz se puede multiplicar por un escalar multiplicando cada elemento de la matriz por ese escalar.

$$c\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices Dadas dos matrices $\mathbf{A}$ de tamaño $m \times n$ y $\mathbf{B}$ de tamaño $n \times p$, su producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ es una matriz de tamaño $m \times p$ donde cada elemento c_{ij} se calcula como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

La multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ en general.

1.3. Transpuesta de una matriz

La transpuesta de una matriz $\mathbf{A}$, denotada como $\mathbf{A}^T$, se obtiene intercambiando filas por columnas.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.4. Determinante de una matriz

El determinante es un valor escalar que se puede calcular a partir de los elementos de una matriz cuadrada. Es útil para determinar si una matriz tiene inversa y en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Para una matriz 2×2:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Para matrices más grandes, el cálculo del determinante es más complejo y se puede hacer mediante expansión por cofactores.