DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 2 Cálculo III, Forma B
9 de mayo de 2022

1. Considere las expresiones

$$3xy^2 + xz^2 + 2u - 4uv - 2u^2 = 0, \qquad 2x^3 + y^3 - z^3 - 3uv^2 + v = 0.$$

Demuestre que estas expresiones definen implícitamente funciones $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ en una vecindad del punto $(u, v, x, y, z) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Encuentre las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ en $(1, 1, 1)$.

Solución. Definimos

$$\begin{aligned} F(u, v, x, y, z) &= 3xy^2 + xz^2 + 2u - 4uv - 2u^2, \\ G(u, v, x, y, z) &= 2x^3 + y^3 - z^3 - 3uv^2 + v. \end{aligned}$$

Luego estas funciones son polinomios en $\mathbb{R}^5$ que por definición son de clase $C^1(\mathbb{R}^5)$. Observemos también que

$$\begin{aligned} F(1, 1, 1, 1, 1) &= 0, \\ G(1, 1, 1, 1, 1) &= 0. \end{aligned}$$

Ahora calculando,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 - 4v - 4u & -4u \\ -3v^2 & -6uv + 1 \end{vmatrix},$$

que evaluado en $(1, 1, 1, 1, 1)$ sería

$$\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_{(1,1,1,1,1)} = \left.\begin{vmatrix} 2 - 4v - 4u & -4u \\ -3v^2 & -6uv + 1 \end{vmatrix}\right|_{(1,1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 18 \neq 0.$$

Por consiguiente se cumplen todas las condiciones del teorema de la función implícita, por lo cual es posible definir de manera implícita u y v en términos de (x, y, z) alrededor del punto $(1, 1, 1)$ en una bola abierta $B_r(1, 1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$.
Ahora para poder definir las derivadas parciales debemos calcular

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = \begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6xy & -4u \\ 3y^2 & -6uv + 1 \end{vmatrix},$$

que evaluado en $(1,1,1,1,1)$ sería

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\right|_{(1,1,1,1,1)} = \left.\begin{vmatrix} 6xy & -4u \\ 3y^2 & -6uv+1 \end{vmatrix}\right|_{(1,1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -18$$

De igual forma tenemos

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-4v-4u & 3y^2+z^2 \\ -3v^2 & 6x \end{vmatrix},$$

que evaluado en $(1,1,1,1,1)$ sería

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\right|_{(1,1,1,1,1)} = \left.\begin{vmatrix} 2-4v-4u & 3y^2+z^2 \\ -3v^2 & 6x \end{vmatrix}\right|_{(1,1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -24$$

Finalmente reemplazando, obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,1,1,1,1) = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}(1,1,1,1,1)}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(1,1,1,1,1)} = -\frac{\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}} = -\frac{-18}{18} = 1.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1,1,1,1,1) = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}(1,1,1,1,1)}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(1,1,1,1,1)} = -\frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}} = -\frac{-24}{18} = \frac{4}{3}.$$

□

2. Para la función $f(x,y) = (1+e^x)\cos(y) - xe^x$ calcule todos sus puntos críticos y clasifíquelos.

Solución. Las ecuaciones que caracterizan los puntos críticos son:

$$\begin{aligned} e^x\cos(y) - e^x - xe^x &= 0 \\ -(1+e^x)\operatorname{sen}(y) &= 0, \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se tiene que $(1+e^x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto necesariamente $\operatorname{sen}(y) = 0$, lo cual se cumple si $y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene que $x = \cos(n\pi) - 1 = (-1)^n - 1$. Luego los puntos críticos son de la forma

$$p = (x_n, y_n) = ((-1)^n - 1, n\pi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

Para clasificarlos se considera la matriz hessiana de f

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x(\cos(y) - x - 2) & -e^x \operatorname{sen}(y) \\ -e^x \operatorname{sen}(y) & -(1+e^x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

La cual evaluada en los puntos críticos queda

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} -e^{(-1)^n - 1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1}(1 + e^{(-1)^n - 1}) \end{pmatrix}$$

para $n = 2k$, se tiene $p_1 = (x_{2k}, y_{2k})$, $k \in \mathbb{Z}$. Luego

$$H_f(p_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y como $\det(H_f(p_1)) = 2 > 0$ y $f_{xx}(p_1) = -1 < 0$ entonces se tiene que p_1 son máximos locales . Por otra parte, para $n = 2k+1$, se tiene $p_2 = (x_{2k+1}, y_{2k+1})$, $k \in \mathbb{Z}$. Luego

$$H_f(p_2) = \begin{pmatrix} -e^{-2} & 0 \\ 0 & 1 + e^{-2} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante evaluado en estos puntos es $\det(H_f(p_2)) = -e^{-2}(1 + e^{-2}) < 0$, es decir, para los puntos de la forma p_2, se tiene que son puntos silla .

$\square$

3. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dados por $u(x,y,z) = xy + z^2$, $v(x,y,z) = x^2 + yz$. Sea $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $w(u,v) = (u+v)^2$. Defina $f(x,y,z) = w(u(x,y,z), v(x,y,z))$. Determine los valores λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(1,1,1) = \lambda_1 \nabla u(1,1,1) + \lambda_2 \nabla v(1,1,1).$$

Solución. Tenemos

$$\begin{gathered} f(x,y,z) = (xy + z^2 + x^2 + yz)^2 = \\ = (xy + z^2)^2 + 2(xy + z^2)(x^2 + yz) + (x^2 + yz)^2 = \\ = x^2y^2 + 2xyz^2 + z^4 + 2x^3y + 2xy^2z + 2z^2x^2 + 2yz^3 + x^4 + 2x^2yz + y^2z^2 \end{gathered}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy^2 + 2yz^2 + 6x^2y + 2y^2z + 4xz^2 + 4x^3 + 4xyz$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2x^2y + 2xz^2 + 2x^3 + 4xyz + 2z^3 + 2x^2z + 2yz^2$$

$$
\begin{aligned}
&& \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 4xyz+4z^3+2xy^2+4zx^2+6yz^2+2x^2y+2zy^2 \\
\Rightarrow && \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) &= 2+2+6+2+4+4+4=24 \\
&& \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) &= 2+2+2+4+2+2+2=16 \\
&& \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) &= 4+4+2+5+6+2+2=24 \\
\Rightarrow && \nabla f(1,1,1) &= (24,16,24)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)=y; & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)=x & \dfrac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)=2z \\
\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y,z)=2x; & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y,z)=z & \dfrac{\partial v}{\partial z}(x,y,z)=y
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \quad \nabla u(1,1,1)=(1,1,2), \quad \nabla v(1,1,1)=(2,1,1)
$$

Buscamos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $(24,16,24)=\lambda_1(1,1,2)+\lambda_2(2,1,1)$.

Tenemos $24=\lambda_1+2\lambda_2$, $\lambda_1+\lambda_2=16$, $2\lambda_1+\lambda_2=24$. Entonces $\lambda_1=\lambda_2=8$. Por lo tanto, los valores buscados son $\lambda_1=\lambda_2=8$. .

$\square$