DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

# Taller 1 Cálculo III
## Grupo II
## 25 de mayo de 2023

**Problema 1.** Dado $a > 0$, y dada

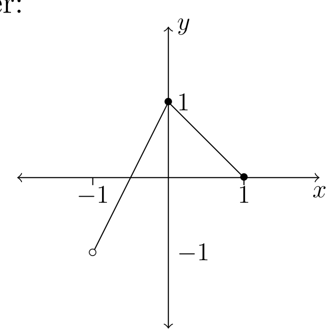
$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & -a < x \leq 0 \\ a - x & \phantom{-}0 < x < a. \end{cases}$$

*a*) Determine su serie de Fourier.

*b*) Determine el valor al que converge

**Solución.**

a) Serie Fourier:




$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

$$I = [-1, 1] \quad \Rightarrow \quad L = 1$$

**(0.5 pts.)**

**(0.5 pts.)**

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{0} (2x+1)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,dx \\ &= \left[x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**(1.0 pts.)**

$$a_n = \int_{-1}^{0} (2x+1)\cos(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\cos(n\pi x)\,dx.$$

$$\begin{array}{llll} u = 2x+1 & du = 2\,dx & u = 1 - x & du = -dx \\ dv = \cos(n\pi x)\,dx & v = \dfrac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x) & dv = \cos(n\pi x)\,dx & v = \dfrac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x) \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{2x+1}{n\pi}\right]\Bigg|_{-1}^{0} \\ &+ \left[\frac{1-x}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x) - \frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}[1 - (-1)^n] - \frac{1}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}[1 - (-1)^n] + \frac{1}{n^2\pi^2}\left[1 - (-1)^n\right] \\ &= \frac{3}{n^2\pi}[1 - (-1)^n] \quad n \text{ impar}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{6}{(2n-1)^2\pi^2} \qquad \textbf{(1 pts.)}$$

$$b_n = \int_{-1}^{0} (2x+1)\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,dx$$

$$\begin{array}{llllll} u = 2x+1 & \Rightarrow & du = 2\,dx & & u = 1-x, & du = -dx \\ dv = \mathrm{sen}(n\pi x)\,dx & \Rightarrow & v = \dfrac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}(n\pi x) & & dv = \mathrm{sen}(n\pi x)\,dx, & v = -\dfrac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) \end{array}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \left[(2x+1)\left(-\frac{1}{n\pi}\right)\cos n\pi x\right]_{-1}^{0} + 0 + \left[\frac{-1}{n\pi}(1-x)\cos(n\pi x)\right]_{0}^{1} + 0 \\ &= \frac{-1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n\pi} = \frac{1}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad \textbf{(1 pts.)} \\ S(x) &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\,\mathrm{sen}(n\pi x). \end{aligned}$$

b) Estudiar la serie para $x = 0$:
Si $x = 0$,

$$\begin{aligned} S(0) &= 1 \\ 1 &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)^2\pi^2} \\ \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

Luego el valor de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ es $\frac{\pi^2}{8}$. **(2 pts.)**

□

**Problema 2.** Considere la función $f$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^6 + (x^2-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

I) Determine si $f$ es continua en $(0,0)$.

II) Demuestre que para todo $(x,y)$ con $x \neq 0$ e $y \neq x^2$, $\nabla f(x,y)$ es un vector no nulo paralelo a $(x^2-3y, x)$.

III) Calcule $\nabla f(0,0)$.

**Solución.**

a) Debemos ver si existe o no $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: Para esto veamos este límite por trayectorias.
Usando la trayectoria $C_1 : y = x^2$, tenemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_1}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x^6} = 1.\textbf{(1 punto)}$$

En cambio si se usa la trayectoria $C_2 : y = 0$, tenemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^4(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+1} = 0.\textbf{(1 puntos)}$$

Luego $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe y, por lo tanto $f$ no es continua en $(0,0)$ **(0.5 puntos)**.

b) Bajo la condición $x \neq 0$, $y \neq x^2$, se tiene que $(x,y)$ es un punto interior a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y por lo tanto $f(x,y) = \frac{x^6}{x^6+(x^2-y)^2}$ y se pueden emplear reglas de derivación para calcular $\nabla f(x,y)$. **(0.5 pts.)** Se tiene que

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{(x^6+(x^2-y)^2)6x^5 - x^6(6x^5+2(x^2-y)(2x))}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} \\ &= \frac{(x^6+x^4-2x^2y+y^2)6x^5 - x^6(6x^5+4x^3-4xy)}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} \\ &= \frac{6x^{11}+6x^9-12x^7y+6y^2x^5-6x^{11}-4x^9+4x^7y}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} \\ &= \frac{2x^9-8x^7y+6y^2x^5}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} \\ &= \frac{2x^5(x^4-4x^2y+3y^2)}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} \\ &= \frac{2x^5(x^2-y)(x^2-3y)}{(x^6+(x^2-y)^2)^2}. \qquad \textbf{(0.5 pts.)} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$f_y(x,y) = \frac{2x^6(x^2-y)}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} = \frac{2x^5(x^2-y)x}{(x^6+(x^2-y)^2)^2}. \qquad \textbf{(0.5 pts.)}$$

Por lo tanto, $\nabla f(x,y) = \frac{2x^5(x^2-y)}{(x^6+(x^2-y)^2)^2}(x^2-3y, x)$, que es múltiplo no nulo de $(x^2-3y, x)$ y por lo tanto es un vector paralelo a éste. **(1 pto.)**

c) Se tiene que

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^6}{h(h^6-(h^2-0)^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{h^6}{h^7+h^5} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h^2+1} = 0. \qquad \textbf{(0.5 pts.)} \end{aligned}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0. \qquad \textbf{(0.5 pts.)}$$

□

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 80 minutos.