DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA Y CIENCIA DE
LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Taller 2 Cálculo III
Grupo III
6 de julio de 2023

Problema 1. *(versión inicial)*. Sea D el rectángulo cuyos vértices son $(-1,0),(0,-1),(1,0)$ y $(0,1)$, determine el valor de

$$\iint_D (x^2 - 2x^2y + x^2y^2)dA.$$

Solución. Usando el cambio de variables:

$$u = x + y, \tag{1}$$
$$v = x - y. \tag{2}$$

La transformación lineal $T(x,y) = (x+y, x-y)$ satisface que $T(1,0) = (1,1), T(-1,0) = (-1,-1), T(0,1) = (1,-1), T(0,-1) = (-1,1)$. **(1.5 pts.)** Además, sumando (1), (2), se tiene $2x = u+v$; asimismo, restando (2) a (1), se tiene $2y = u - v$. De este modo,

$$x = \frac{1}{2}(u+v),$$
$$y = \frac{1}{2}(u-v).$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2} \qquad \textbf{(1.5 pts.)}$$

Luego el valor absoluto del jacobiano es $\frac{1}{2}$.

Tenemos entonces que:

$$\iint_D (x^2 - 2x^2y + x^2y^2)dA = \iint_E \left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \left(\frac{u-v}{2}\right) + \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \right) \cdot \frac{1}{2} dA,$$

donde $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u \leq 1; -1 \leq v \leq 1\}$, **(1.5 pts.)** entonces:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \left(\frac{u-v}{2}\right) + \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \right) dvdu =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(u^2 + 2uv + v^2 - u^3 - u^2v + uv^2 + v^3 + \frac{u^4}{4} - \frac{u^2v^2}{2} + \frac{v^4}{4} \right) dvdu$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} \left(\frac{u^4}{2} - 2u^3 + \frac{5}{3}u^2 + \frac{2}{3}u + \frac{23}{30} \right) du$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5} + \frac{10}{9} + \frac{23}{15} \right) = \frac{16}{45}. \qquad \textbf{(1.5 pts.)}$$

$\square$

(Versión corregida) Sea D el rectángulo cuyos vértices son $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ y $(1,-1)$, determine el valor de

$$\iint_D (x^2 - 2x^2y + x^2y^2)dA.$$

Solución. En resumen, tenemos que calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2 - 2x^2y + x^2y^2)dxdy$ o que es lo mismo que calcular:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2 - 2x^2y + x^2y^2)dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2(1-y)^2 dxdy \ \textbf{(2 puntos)} \\
&= \left[\int_{-1}^{1} x^2 dx\right] \cdot \left[\int_{-1}^{1} (1-y)^2 dy\right] \ \textbf{(2 puntos)} \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right] \cdot \left[y - y^2 + \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right] \\
&= \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] \cdot \left[1 - 1 + \frac{1}{3} + 1 + 1 + \frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} \\
&= \frac{16}{9}. \ \textbf{(2 puntos)}
\end{aligned}$$

□

Problema 2. Dado $z = f(x, y)$, una buena aproximación del volumen entre esta superficie y el plano XY sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, donde el intervalo $[a, b]$ está dividido en n sub-intervalos de igual longitud y el intervalo $[c, d]$ está dividido en m sub-intervalos de igual longitud, está dada por:

$$V = \iint_R f(x, y)dA \approx \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}, \overline{y_j})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j),$$

donde $\overline{x_i}$ es el punto medio de $[x_{i+1}, x_i]$ y $\overline{y_j}$ es el punto medio de $[y_{j+1}, y_j]$. Este método se conoce como la **regla del punto medio**.

Usando la regla del punto medio, aproxime

$$\iint_R \ln(x^2 + y^2)dA$$

para $R = [-1, 1] \times [2, 4]$, con $n = 2$ y $m = 2$.

Solución. Lo primero es dividir el intervalo $[-1, 1]$ en $n = 2$ intervalos que tengan la misma longitud, o sea: $[-1, 0]$ y $[0, 1]$ donde, $\overline{x_1} = -\frac{1}{2}$ y $\overline{x_2} = \frac{1}{2}$ son sus respectivos puntos medios. **(1 punto)**

Luego, hay que dividir el intervalo $[2, 4]$ en $m = 2$ intervalos que tengan la misma longitud, o sea: $[2, 3]$ y $[3, 4]$, donde $\overline{y_1} = \frac{5}{2}$ y $\overline{y_2} = \frac{7}{2}$ son sus respectivos puntos medios. **(1 punto)**

Por lo tanto, y dado el hecho de que $(x_{i+1} - x_i) = (y_{j+1} - y_j) = 1$ **(1 punto)**, una aproximación de esta integral es:

$$\iint_R f(x, y)dA \approx \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} f(\overline{x_i}, \overline{y_j})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

$$= f(\overline{x_1}, \overline{y_1}) + f(\overline{x_2}, \overline{y_1}) + f(\overline{x_1}, \overline{y_2}) + f(\overline{x_2}, \overline{y_2}) \ \textbf{(2 puntos)}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4} + \frac{25}{4}\right) + \ln\left(\frac{1}{4} + \frac{25}{4}\right) + \ln\left(\frac{1}{4} + \frac{49}{4}\right) + \ln\left(\frac{1}{4} + \frac{49}{4}\right)$$

$$= 2\ln\left(\frac{325}{4}\right). \ \textbf{(1 punto)}$$

□

Problema 3. El valor promedio de una función de dos variables $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to R$ se define de la siguiente forma:

$$f_{\text{promedio}} = \frac{\iint_R f(x,y)dA}{\iint_R dA}.$$

Encuentre el valor promedio de la función $f(x,y) = y\sec^2(xy)$, donde $R = [1,2] \times \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

Solución. Aquí tenemos que:

$$\begin{aligned}
f_{\text{promedio}} =& \frac{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_1^2 y\sec^2(xy)dxdy}{\text{Área}(R)} \quad \textbf{(2 puntos)} \\
=& \frac{\int_0^{\frac{\pi}{6}} [\tan(xy)]\big|_1^2 \, dy}{1 \cdot \frac{\pi}{6}} \\
=& \frac{\int_0^{\frac{\pi}{6}} [\tan(2y) - \tan(y)] \, dy}{\frac{\pi}{6}} \quad \textbf{(2 puntos)} \\
=& \frac{6}{\pi} \cdot \left[-\frac{1}{2}\ln(\cos(2y)) + \ln(\cos(y)) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \right] \\
=& \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
=& \frac{3}{\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right). \quad \textbf{(2 puntos)}
\end{aligned}$$

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 80 minutos.