# Curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

*RESPUESTAS A EJERCICIOS IMPARES AL FINAL.*

**E.1** ¿En qué instantes del intervalo $0 \leq t \leq \pi$ son los vectores de velocidad y aceleración del movimiento $\vec{r}(t) = \hat{\imath} + (5\cos t)\hat{\jmath} + (3\operatorname{sen} t)\hat{k}$ perpendiculares?

**E.2** Sea $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria regular tal que $\vec{r}(t) \neq (0,0,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- I) Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que la curva descrita alcanza su distancia mínima al origen en el punto $\vec{r}(t_0)$. Pruebe que $\vec{r}(t_0)$ es perpendicular a $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$.
- II) Usando lo anterior, hallar los puntos de la trayectoria $\vec{r}(t) = (t+1, 3t-2, 2t-1)$ que se encuentran más cerca del origen. Justifique su respuesta.

**E.3** Encuentre una parametrización de la curva resultante al intersectar las superficies $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + z^4 = 4 + y^2$, considerando que $z \geq 0$.

**E.4** Considérese la hélice descrita por la ecuación vectorial $\vec{r}(t) = a\cos(\omega t)\hat{\imath} + a\operatorname{sen}(\omega t)\hat{\jmath} + b\omega t\hat{k}$, donde $\omega$ es una constante positiva. Demostrar que la recta tangente forma un ángulo constante con el eje $z$ y que el coseno de ese ángulo es $b/\sqrt{a^2+b^2}$.

**E.5** Sea la curva regular $\Gamma$ cuya parametrización está dada por $\vec{r} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t, \beta(t))$, donde $a, b > 0$ y $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Describa las funciones $\beta$ que hacen que $\Gamma$ esté contenida en un plano. Bosqueje la curva resultante bajo estas hipótesis.

**E.6** Encuentre el valor de las constantes $a$ y $b$ para que la curvatura y la torsión de la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$ coincidan.

**E.7** Una partícula se mueve en el espacio con vector posición $\vec{r}(t) = t\vec{A} + t^2\vec{B} + 2(\frac{2}{3}t)^{\frac{3}{2}}\vec{A} \times \vec{B}$, $t \in [0, +\infty[$, donde $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores unitarios que forman un ángulo de $\pi/3$. Determinar en cuánto tiempo recorre la partícula una distancia de 12 unidades de longitud de arco desde su posición en $t = 0$. Especifique además su posición final en el espacio.

**E.8** Sea $C$ la curva, conocida como tractriz, parametrizada por $\vec{r} : ]0, \pi/2[ \to \mathbb{R}^2$, donde

$$\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t + \log(\tan(t/2))).$$

Pruebe que la longitud del segmento de la tangente a la curva $C$ que va desde el punto de tangencia a $C$ hasta el eje $Y$ es constante e igual a 1.

**E.9** Considere las curva $C$ parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Suponga que, partiendo desde el punto $(1,0,0)$ se recorre una longitud de arco $\sqrt{2}$ sobre la curva. ¿En qué punto nos encontramos?

**E.10**

a) Demostrar que en el vértice de una parábola, el radio de curvatura alcanza su valor mínimo.

b) Dados dos vectores unitarios $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman un ángulo $\theta$, siendo $0 < \theta < \pi$. La curva con vector posición $\vec{r}(t) = t\vec{A} + t^2\vec{B}$ es una parábola situada en el plano generado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Determinar (en función de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\theta$) el vector posición del vértice de esa parábola. Puede utilizarse la propiedad de la parábola establecida en la parte a).

**E.11** Un tramo de un ferrocarril está pendiente de ser construido, y debe unir dos tramos rectos de ferrocarril que pueden ubicarse en un plano cartesiano de tal modo que el primer tramo se encuentra sobre el eje X negativo, terminando en el origen, y el segundo tramo se encuentra sobre la semirrecta $\{(x, x) : x \geq 1\}$, a partir de $(1, 1)$. Se necesita que el tramo que une los dos tramos rectos complete un ferrocarril cuyo trayecto sea continuo, regular y tenga también curvatura continua. Para conseguir este objetivo, el trayecto a construir debe tener la forma de la gráfica de una función

$$y = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F.$$

Determine los valores de las constantes $A, B, C, D, E, F$ para que el ferrocarril cumpla con las condiciones requeridas. Justifique.

**E.12** La astroide es la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t, a\,\mathrm{sen}^3\, t)$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$. Usando un argumento de simetría, bosqueje la curva y calcule su longitud.

**E.13** Sea $C \subseteq R^3$ la curva que resulta de intersectar los cilindros de ecuación $x^2 = 1 - y$ y $z^2 = y$, con $z \geq 0$.

a) Obtener una parametrización $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ de la curva.

$(ii)$ Calcular los vectores unitarios $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$, la curvatura $\kappa$ y la torsión $\tau$ en el punto $(0, 1, 1)$.

**E.14** Considere la curva parametrizada por la función

$$\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

I) Encuentre los planos osculadores a la curva en los puntos $P_1 = \vec{r}(0), P_2 = \vec{r}(1)$ y $P_3 = \vec{r}(2)$.

II) Pruebe que los tres planos se intersectan simultáneamente en un solo punto $Q$, y que los 4 puntos $P_1, P_2, P_3, Q$ pertenecen al mismo plano.

*Respuestas a impares:*

**E1.** $t = 0, t = \frac{\pi}{2}$ ó $t = \pi$.

**E3.** $x = 2\cos t, y = 2\,\mathrm{sen}\, t, z = 2^{\frac{3}{4}}\sqrt{|\,\mathrm{sen}\, t|}, \;\; 0 \leq t \leq 2\pi$.

**E5.** $\beta(t) = M + N\cos t + P\operatorname{sen} t$. La gráfica de la función vectorial será la elipse de intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y un plano no vertical.

**E7.** $t = 3$. Posición final: $\vec{r}(3) = 3\vec{A} + 9\vec{B} + 4\sqrt{2}\vec{A} \times \vec{B}$.

**E9.** $(\sqrt{2}, 1, \ln(1 + \sqrt{2}))$.

**E11.** $A = 3, B = -8, C = 6, D = 0, E = 0, F = 0$.

**E13.** $\vec{T} = (1, 0, 0), \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, -1), \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2), \kappa = \sqrt{5}, \tau = 0$.