DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 2 Cálculo III
Versión A
7 de julio de 2022

Problema 1. Si $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es el conjunto encerrado por las parábolas $y = 3x^2, \quad y = 4 - x^2$

a) Exprese $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$, como una integral iterada en los dos órdenes posibles

b) Calcule el área de D

c) Si $f(x,y) = 4 - 2x + 3y$, calcule $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ y diga qué representa este número.

d) Si $B = \{(x,y,z) \ : (x,y) \in D, \quad 0 \leq z \leq 4 - 2x + 3y\}$

Calcule el volumen de B

Solución.

a) Las parábolas se intersectan en los puntos $(-1,3)$ y $(1,3)$

Por lo tanto, integrando con respecto a y y luego a x , se tiene :

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{3x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy\right)dx$$

integrando con respecto a x y luego a y , se tiene :

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^3\left(\int_{-\sqrt{\frac{y}{3}}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dx\right)dy + \int_3^4\left(\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx\right)dy$$

b) Área de $D = \displaystyle\int_D 1dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{3x^2}^{4-x^2} 1dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(4 - 4x^2\right)dx =$

$$= \left(4x - \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$$

c) $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy = \int_D (4 - 2x + 3y)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{3x^2}^{4-x^2}(4 - 2x + 3y)dy\right)dx$

$$\int_{3x^2}^{4-x^2}(4 - 2x + 3y)dy = \left(4y - 2xy + \frac{3}{2}y^2\right)\Bigg|_{3x^2}^{4-x^2} = 40 - 8x - 28x^2 + 8x^3 - 12x^4$$

y por lo tanto,

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} \left(40 - 8x - 28x^2 + 8x^3 - 12x^4\right) dx = \frac{848}{15}$$

Puesto que la ecuación $9x^2 - 2x + 4 = 0$ no tiene soluciones, entonces la curva de nivel $4 - 2x + 3y = 0$ no tiene intersecciones con la parábola $y = 3x^2$, cuya concavidad está dirigida hacia arriba. Por lo tanto, la función continua $f(x,y) = 4 - 2x + 3y$ tiene un único signo dentro de la región D, y puesto que $\int_D f(x,y)dxdy > 0$, entonces dicho signo es positivo. De este modo, $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ representa el volumen bajo la superficie $z = 4 - 2x + 3y$ y sobre la región D dentro del plano coordenado XY.

d) Volumen de $B = \displaystyle\int_B 1dxdydz$

$$= \int_B 1dxdydz = \int_D \left(\int_0^{4-2x+3y} dz\right) dxdy = \int_D (4 - 2x + 3y)dxdy = \frac{848}{15}$$

$\square$

Problema 2. Calcule la integral

$$\iiint\limits_V \left(2zx^2 + 2zy^2\right) dxdydz$$

donde V es el sólido exterior a la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z \geq 0$.

Solución. La intersección del cono con el cilindro es:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \to \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1$$

El conjunto V será el conjunto descrito por:

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

Haciendo el cambio a coordenadas cilíndricas $T(\rho, \varphi, z) = (x, y, z)$ dado por

$$\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi \\ z = z \end{array}$$

se obtiene que

$$T^{-1}(V) = \{(\rho, \varphi, z) \in U : 0 < \rho \leq 1, 0 < \varphi < 2\pi, 0 \leq z \leq \rho\} = U.$$

Por tanto, haciendo la integral con este cambio de variable obtenemos:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V \left(2zx^2+2zy^2\right) dxdydz &= \iiint\limits_U 2z\rho^2\rho d\rho d\varphi dz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\rho} 2z\rho^3 dz\right) d\varphi\right] d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} z^2\rho^3\Big|_{z=0}^{z=\rho} d\varphi\right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^5 d\varphi\right) d\rho = 2\pi\, \frac{\rho^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

$\square$

Problema 3. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left(2a^2xy - \frac{y^3}{3} + b\right)\widehat{\imath} + (x^2 - c^2xy^2 + d)\,\widehat{\jmath}$, donde a, b, c y d son valores constantes.

a) ¿Para qué valores positivos de a, b, c y d el campo $\vec{F}$ es conservativo?

b) Usando los valores encontrados en *a*), encuentre un potencial $\phi(x,y)$ de $\vec{F}$.

c) Usando las partes *a*) y *b*), calcule $\displaystyle\int_C \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle$ a lo largo de la curva C, cuya parametrización es $\vec{r} = (\operatorname{sen}(2t)\cos(t), \operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen}(t))$, para $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución.

a) Si hacemos $\vec{F} = (P,Q)$, para $\vec{F}$ sea conservativo se tiene que cumplir que $Q_x - P_y = 0$ **(0,5 puntos)**, entonces $Q_x - P_y = 2x(1-a^2) + y^2(1-c^2)$ **(0,5 puntos)**, por lo tanto, para que $\vec{F}$ sea conservativo y como $a, c > 0$, $a = 1$ y $c = 1$. , siendo b, d arbitrarios.

b) Usando los valores obtenidos: $a = 1 = c$, tenemos que:

$$\vec{F}(x,y) = \left(2xy - \frac{y^3}{3} + b\right)\widehat{\imath} + \left(x^2 - xy^2 + d\right)\widehat{\jmath}.$$

Como $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy - \frac{y^3}{3} + b$, entonces $\phi(x,y) = x^2y - x\frac{y^3}{3} + bx + f(y)$, con f una función que depende de y. Además, tenemos que $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 - xy^2 + \frac{df}{dy} = x^2 - xy^2 + d$, entonces $\frac{df}{dy} = d$, o sea que $f(y) = dy + k$, siendo k una constante. Por lo tanto:

$$\phi(x,y) = x^2y - x\frac{y^3}{3} + bx + dy + k.$$

c) Dado que la curva C cumple con:

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\right| &= ||(2\cos(2t)\cos(t) - \operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen}(t), 2\cos(2t)\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(2t)\cos(t))|| \\ &= \sqrt{4\cos^2(2t) + \operatorname{sen}^2(2t)} \\ & \sqrt{1 + 3\cos^2(2t)} > 0,\end{aligned}$$

y $\vec{r}(0) = \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, o sea, C es regular, cerrada y como $\vec{F}$ es conservativo, entonces:

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \oint_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = 0.$$

$\square$