DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

Control Cálculo III
8 de junio de 2023

Problema 1. Si a partir de $f = f(u, v, w)$, diferenciable en $\mathbb{R}^3$, definimos
$F(x, y, z) = f(x + y - z,\ x^2 - y^2,\ y^2 + z^2\ )$, y sabemos que $\nabla f(1, 0, 2) = (2, -1, 2)$
obtenga $\nabla F(1, 1, 1)$.

Solución. Usando regla de la cadena

$F_x(x, y, z) = f_u(x + y - z,\ x^2 - y^2,\ y^2 + z^2) \bullet 1 + f_v(x + y - z,\ x^2 - y^2,\ y^2 + z^2) \bullet 2x+$
$+\ f_w(x + y - z,\ x^2 - y^2,\ y^2 + z^2) \bullet 0 =$
$= f_u(x + y - z,\ x^2 - y^2,\ y^2 + z^2) + f_v(x + y - z,\ x^2 - y^2,\ y^2 + z^2) \bullet 2x$

Evaluando en $(1, 1, 1)$, tenemos :

$$F_x(1, 1, 1) = f_u(1, 0, 2) + f_v(1, 0, 2)2 = 2 + (-1)2 = 0 \qquad \textbf{(2.0 pts.)}$$

(2 puntos por al menos una de las tres derivadas, evaluada en $(1, 1, 1)$*)*

Analogamente

$F_y(x, y, z) = f_u(x+y-z,\ x^2-y^2,\ y^2+z^2) \bullet 1 + f_v(x+y-z,\ x^2-y^2,\ y^2+z^2) \bullet (-2y)+$
$+\ f_w(x + y - z,\ x^2 - y^2,\ y^2 + z^2) \bullet 2y$

Evaluando en $(1, 1, 1)$, tenemos :

$$F_y(1, 1, 1) = f_u(1, 0, 2)+f_v(1, 0, 2)(-2)+f_w(1, 0, 2)2 = 2+(-1)(-2)+2\bullet 2 = 8 \quad \textbf{(1.5 pts.)}$$

Por último

$F_z(x, y, z) = f_u(x+y-z,\ x^2-y^2,\ y^2+z^2) \bullet (-1) + f_v(x+y-z,\ x^2-y^2,\ y^2+z^2) \bullet 0+$

$$+\ f_w(x + y - z,\ x^2 - y^2,\ y^2 + z^2) \bullet 2z =$$

$$= -f_u(x + y - z,\ x^2 - y^2,\ y^2 + z^2) + f_w(x + y - z,\ x^2 - y^2,\ y^2 + z^2) \bullet 2z$$

$$\text{Evaluando en } (1, 1, 1)\ ,\ tenemos\ :$$

$$F_z(1, 1, 1) = -f_u(1, 0, 2) + f_w(1, 0, 2)2 = -2 + 2 \bullet 2 = 2 \qquad \textbf{(1.5 pts.)}$$

Por lo tanto $\nabla F(1, 1, 1) = (0, 8, 2)$ **(1 pto.)**

□

Problema 2.

a) **(1 punto.)** Demuestre que la ecuación

$$xe^x + ye^y + ze^z - 3e = 0$$

define a z como una función implícita $z = f(x, y)$ en una vecindad alrededor del punto $(1, 1, 1)$.

b) **(2 puntos.)** Para la función f del inciso a), calcule $\nabla f(1, 1)$.

c) **(3 puntos.)** Para f del inciso a), calcule $\nabla(f_x)(1, 1)$.

Solución.

a) Si $F(x, y, z) = xe^x + ye^y + ze^z - 3e$, entonces $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3)$, $F(1, 1, 1) = 0$, y $\frac{\partial F}{\partial z} = e^z + ze^z$ y $F_z(1, 1, 1) = 2e \neq 0$. Luego la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como función de (x, y). **(1 pto.)**

b) Se tiene que

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{e^x + xe^x}{e^z + ze^z} = -\frac{e^x(1 + x)}{e^z(1 + z)} \qquad \textbf{(1 pto.)}$$

y $f_x(1, 1) = -1$. Por otro lado, $f_y(x, y) = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^y + ye^y}{e^z + ze^z}$. Luego $f_y(1, 1) = -1$. De este modo, $\nabla f(1, 1) = (-1, -1)$. **(1 pto.)**

c) Se tiene que $\nabla(f_x)(1, 1) = (f_{xx}(1, 1), f_{xy}(1, 1))$. Por lo tanto calculamos

$$f_{xx}(x, y) = -\frac{(e^z + ze^z)(e^x(1 + x) + e^x) - (e^x(1 + x))(e^z(1 + z) + e^z)z_x}{(e^z(1 + z))^2}$$

(1 pto.)

$$f_{xy}(x, y) = -\frac{e^x(1 + x)(e^z(1 + z) + e^z)}{(e^z(1 + z))^2} z_y, \qquad \textbf{(1 pto.)}$$

$$\Rightarrow \quad f_{xx}(1, 1) = -\frac{(2e)(3e) - (2e)(3e)(-1)}{(2e)^2} = -\frac{12e^2}{4e^2} = -3$$

$$f_{xy}(1, 1) = -\frac{(2e)(3e)}{(2e)^2}(-1) = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, $\nabla(f_x)(1, 1) = \left(-3, -\frac{3}{2}\right)$. **(1 pto.)**

□

Problema 3. Determine las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie

$$\frac{x^2}{2} + y^2 + 7z^2 = \frac{83}{2}$$

que son ortogonales a la recta tangente en $(2, 1, 6)$ a la curva intersección de las superficies

$$z = x^2 + 2y^2$$
$$z = 2x^2 - 3y^2 + 1$$

Solución.

$$S_1 : \quad -x^2 - 2y^2 + z = 0$$
$$S_2 : \quad -2x^2 + 3y^2 - 1 + z = 0.$$

$$\nabla S_1 = (-2x, -4y, 1) \quad \Rightarrow \quad \nabla S_1(2, 1, 6) = (-4, -4, 1)$$
$$\nabla S_2 = (-4x, 6y, 1) \quad \Rightarrow \quad \nabla S_2(2, 1, 6) = (-8, 6, 1) \qquad \textbf{(0.5 pts.)}$$

$\vec{v}$ vector director de la recta.

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & -4 & 1 \\ -8 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-10, -4, -56) \qquad \textbf{(1 pto.)}$$

$\vec{v} = (5, 2, 28)$ vector normal del plano tangente a la superficie en $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (x_0, 2y_0, 14z_0)$ paralelo a $\vec{v}$. **(0.5 pts.)**

$$(x_0, 2y_0, 14z_0) = \lambda(5, 2, 28) \qquad \textbf{(1 pto.)}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 5\lambda \\ 2y_0 &= 2\lambda \\ 14z_0 &= 28\lambda \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} P_0 &= (5\lambda, \lambda, 2\lambda) \\ \frac{25\lambda^2}{2} + \lambda^2 + 7\left(4\lambda^2\right) &= \frac{83}{2} \\ \frac{83}{2}\lambda^2 &= \frac{83}{2} \\ \lambda^2 &= 1. \end{aligned}$$

Luego $\lambda = \pm 1$. **(1 pto.)** Entonces los puntos P_0 obtenidos son:

$$\begin{aligned} P_0 &= (5, 1, 2) && \textbf{(0.5 pts.)} \\ P_0' &= (-5, -1, -2) && \textbf{(0.5 pts.)} \end{aligned}$$

con lo que hay dos planos que solucionan el problema, a saber:

$$\begin{aligned} \pi_1 : (5, 2, 28) \cdot (x - 5, y - 1, z - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 5(x - 5) + 2(y - 1) + 28(z - 2) &= 0 \\ 5x + 2y + 28z &= 83 \end{aligned}$$

(1 pto.)

$$\begin{aligned} \pi_2 : (5, 2, 28) \cdot (x + 5, y + 1, z + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 5(x + 5) + 2(y + 1) + 28(z + 2) &= 0 \\ 5x + 2y + 28z &= -83 \end{aligned}$$

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 80 minutos.