DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

**PEP 1 Cálculo III**
**Grupo I**
**15 de junio de 2023**

**<u>IMPORTANTE: debe resolver cada problema en hojas separadas</u>.**

Al final, debe entregar <u>tres</u> (3) hojas, que tengan como mínimo: nombre, código de sección, y número de problema a resolver.

**Problema 1.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $f_x(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$, y

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\,\mathrm{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2} & \text{, si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Pruebe que $f$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

**Solución.** Hemos visto que si una función tiene derivadas parciales continuas en un conjunto abierto, entonces dicha función es diferenciable en dicho conjunto, por lo que si probamos que la función $f$ tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2$ se concluye que la función es diferenciable en todo su dominio. **(1 punto)**
Ya está dado que $f_x(x,y)$ es continua, por lo que restaría verificar si $f_y(x,y)$ es continua.

Primero notemos que en el punto $(x,y) \neq (0,0)$: la función $xy\,\mathrm{sen}(x^2+2xy+y^2)$ es continua, pues es un producto entre un polinomio y la composición entre dos funciones continuas; y la función $x^2+y^2$ también es continua, pues es un polinomio. Además, en el punto $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene que $x^2+y^2 \neq 0$, por lo que la función

$$f_y(x,y) = \frac{xy\,\mathrm{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2},$$

es continua en todo $(x,y) \neq (0,0)$. **(2 puntos)**
Para probar que $f_y$ es continua en $(0,0)$, basta demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = f_y(0,0). \qquad \textbf{(1 punto)}$$

Lo anterior es equivalente a demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,\mathrm{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2} = 0,$$

lo cual puede realizarse de las siguientes maneras:

- Por estimación cartesiana: se tiene que

$$|f_y(x,y) - 0| = \left| \frac{xy\,\mathrm{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2} - 0 \right|$$

(puesto que $|\,\mathrm{sen}\,\alpha| \leq |\alpha| \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$)

$$\leq \frac{|x||y||x^2+2xy+y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x||y|(x^2+2|x||y|+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= |x||y|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{2|x||y|}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$$

Como $x^2 \leq x^2+y^2$, $y^2 \leq x^2+y^2$, y por desigualdad de Young, $2|x||y| \leq x^2+y^2$:

$$\begin{aligned} &\leq |x||y|\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right) \\ &= 3|x||y|. \end{aligned}$$

**(1 pto.)**

Luego, por teorema de compresión,

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f_y(x,y)-0| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|x||y| = 3\cdot 0\cdot 0 = 0,$$

de donde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = 0 = f_y(0,0)$ y entonces $f_y(0,0)$ es continua en $(0,0)$. **(1 punto)**

*(Puntaje total: 6 puntos)*

- O bien, por coordenadas polares:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy\operatorname{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2}\right| &= \lim_{r\to 0^+}\left|\frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}((r\cos\theta+r\operatorname{sen}\theta)^2)}{r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}\right| \\ &= \lim_{r\to 0^+}\left|\frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(r(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta+2\cos\theta\operatorname{sen}\theta))}{r^2}\right| \end{aligned}$$

**(1 punto)**

(puesto que $|\operatorname{sen}\alpha| \leq 1$ y $|\cos\alpha| \leq 1$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$)

$$\leq \lim_{r\to 0^+} r^2\cdot\left|\frac{\operatorname{sen}(r^2(1+\operatorname{sen}(2\theta)))}{r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}\right|$$

(puesto que $|\operatorname{sen}\alpha| \leq |\alpha|$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$)

$$\leq \lim_{r\to 0^+} r^2\cdot\frac{r^2|1+\operatorname{sen}(2\theta)|}{r^2}$$

(puesto que $|1+\operatorname{sen}(2\theta)| \leq 2$)

$$\leq \lim_{r\to 0} 2r^2 = 0,$$

luego por teorema de Compresión, se sigue que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\operatorname{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2} = 0.$ **(1 punto)**

*(Puntaje total: 6 puntos)*

□

**Problema 2.** Considere el sistema

$$xy^2+xzu+yv^2 = 3,$$

$$u^3yz+2xv-u^2v^2 = 2.$$

Determine si es que es posible escribir $u$ y $v$ en términos de $(x,y,z)$ cerca del punto $(x,y,z,u,v) = (1,1,1,1,1)$. Calcule el valor de $\dfrac{\partial u(1,1,1)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v(1,1,1)}{\partial x}$.

**Solución.**
Primero que todo podemos considerar el par de funciones:

$$F_1(x, y, z, u, v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3,$$

$$F_2(x, y, z, u, v) = u^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2,$$

Y así, definir una nueva función:

$$F(x, y, z, u, v) = (F_1(x, y, z, u, v), F_2(x, y, z, u, v)).$$

**(0.5 puntos)**

Una vez hemos definido estas funciones se procede a verificar las hipótesis del teorema de la función implícita.

Primero que todo, $F$ es $C^1$ , pues tanto $F_1$ y $F_2$ son de clase $C^1$ al ser polinomios con exponentes naturales **(0.5 puntos)** .
Segundo, claramente el punto $(1, 1, 1, 1, 1)$ satisface que $F(1, 1, 1, 1, 1) = (0, 0)$. **(0.5 punto)**
Finalmente: si $D_{u,v}(F)$ es la matriz jacobiana de $F$ respecto de las variables $u$ y $v$, entonces

$$det(D_{u,v}(F)) = \begin{pmatrix} xz & 2yv \\ 3u^2yz - 2uv^2 & 2x - 2vu^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$det(D_{u,v}(F(1, 1, 1, 1, 1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Así, el teorema de la función implícita asegura que es posible escribir $u$ y $v$ en términos de $(x, y, z)$ cerca del punto $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$. **(1.5 puntos)**

Para la segunda parte del ejercicio, dado que alrededor del $(1, 1, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F_1(x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z))}{\partial x}, \\ &= y^2 + zu(x, y, z) + xz\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + 2yv(x, y, z)\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Reemplazando en $(1, 1, 1)$ se obtiene que

$$0 = 2 + \frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial x} + 2\frac{\partial v(1, 1, 1)}{\partial x}.$$

**(1 punto)**

De manera análoga:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F_2(x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z))}{\partial y}, \\ &= 3yzu^2(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + 2v(x, y, z) + 2x\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} - 2v^2u\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \\ &- 2u^2v\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \end{aligned}$$

Y sustituyendo $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= 3\frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial x} + 2 + 2\frac{\partial v(1, 1, 1)}{\partial x} - 2\frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial x} - 2\frac{\partial v(1, 1, 1)}{\partial x}. \\ &= \frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial x} + 2. \end{aligned}$$

**(1 punto)**

Por lo tanto, resolviendo este sistema de ecuaciones, se concluye que $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = -2$ y $\frac{\partial v(1,1,1)}{\partial x} = 0$. **(1 punto)**

□

**Problema 3.** Mediante optimización en varias variables, encuentre los puntos del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que están más próximos al punto $(4, 2, 0)$.

**Solución.** *Solución irrestricta:* Se tiene a minimizar la distancia a $(4, 2, 0)$, o equivalentemente, minimizar la distancia al cuadrado a dicho punto. En términos de $(x, y, z)$, ese cuadrado de distancia es $(x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2$; pero como $(x, y, z)$ está sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$, entonces el problema se puede reducir a:

$$\text{minimizar} \qquad g(x, y) = (x-4)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2. \qquad \textbf{(1.5 pts.)}$$

Hallamos los puntos estacionarios:

$$\nabla g(x, y) = (2(x-4) + 2x, 2(y-2) + 2y.)$$

El sistema $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ es:

$$\begin{aligned} 2(x - 4 + x) &= 0 \\ 2(y - 2 + y) &= 0 \end{aligned}$$

que implica $(x, y) = (2, 1)$. **(1.5 pts.)**

Por otro lado, el hessiano de la función es

$$Hg(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

que implica que en $(2, 1)$ hay un mínimo local.

Puesto que la gráfica de $z = g(x, y)$ es un paraboloide, entonces el mínimo es el vértice del paraboloide y es el mínimo absoluto. **(1.5 pts.)**

Finalmente, si $x = 2$ e $y = 1$, entonces $z^2 = 2^2 + 1^2 = 5$. Luego $z = \pm\sqrt{5}$. De este modo, los puntos más próximos a $(4, 2, 0)$ son $(2, 1, \sqrt{5}), (2, 1, -\sqrt{5})$. **(1.5 pts.)**

*(Puntuación total: 6 puntos)*

*Solución con restricciones:* Se tiene a minimizar la distancia a $(4, 2, 0)$, o equivalentemente, minimizar la distancia al cuadrado a dicho punto. En términos de $(x, y, z)$, ese cuadrado de distancia es $(x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2$; pero como $(x, y, z)$ está sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$, entonces el problema es

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x, y, z) = (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ \text{sujeta a} & x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{array}$$

Su lagrangiano es:

$$\mathscr{L}(x, y, z, \lambda) = (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2) \qquad \textbf{(1.5 pts.)}$$

Sistema $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} 2(x-4) + 2\lambda x &= 0 \qquad (1) \\ 2(y-2) + 2\lambda y &= 0 \qquad (2) \\ 2z - 2\lambda z &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \tag{4}$$

**(1.5 pts.)**

De (3):

$$2z(1-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0 \text{ ó } \lambda = 1.$$
$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, y = 0.$$

Candidato obtenido: $(0, 0, 0)$.

$$\lambda = 1 : 2(x-4) + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$
$$2(y-2) + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

Reemplazando en (4), se deduce que $z = \pm\sqrt{5}$. Esto origina los candidatos $(2, 1, \sqrt{5})$, $(2, 1, -\sqrt{5})$. **(1.5 pts.)**

Debiendo haber una distancia mínima, este mínimo se alcanza en por lo menos uno de los candidatos. Pero $f(0, 0, 0) = 20$, $f(2, 1, \sqrt{5}) = 4+1+5 = 9$, $f(2, 1, -\sqrt{5}) = 4+1+5 = 9$. Por lo tanto la distancia mínima se alcanza en $(2, 1, \pm\sqrt{5})$ y esta distancia mínima es $\sqrt{9} = 3$. **(1.5 pts.)** *(Puntuación total: 6 puntos)*

□

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 90 minutos.