DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 3 Cálculo III forma B
24 de noviembre de 2022

Problema 1. Sea la integral

$$I = \iint_E e^{-y^2} dydx,$$

donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq 1\}$.

a) Reescriba esta integral en el orden $dxdy$.

b) Calcule la integral I.

Solución.

a) Como E es una región del tipo I, convertiremos esta región a una del tipo II. Como $0 \leq x \leq 1$ e $x \leq y \leq 1$, entonces $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq x \leq y$, por tanto

$$I = \iint_D e^{-y^2} dydx,$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq y\}$.

b) Directamente calculamos la integral

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D e^{-y^2} dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^y e^{-y^2} dxdy \\
&= \int_0^1 e^{-y^2} \left. (x) \right|_0^y dy \\
&= \int_0^1 y e^{-y^2} dy \\
&= -\frac{1}{2} \left. \left(e^{-y^2} \right) \right|_0^1 \\
&= -\frac{1}{2} \left(e^{-1} - 1 \right) \\
&= \frac{1 - e^{-1}}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

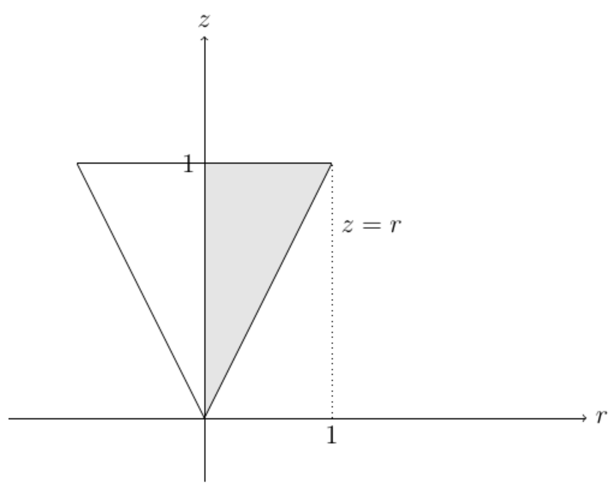
Problema 2. Para $a < 2$, determine el valor de

$$\iiint_\Omega \frac{x^2}{(x^2+y^2)^a}dxdydz,$$

donde Ω es el sólido acotado que está encerrado entre el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$.

Solución. Usaremos coordenadas cilíndricas. Primero si proyectamos el sólido en el plano XY, obtenemos una circunferencia unitaria centrada en el origen. De ahí tenemos que $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Por otro lado, si fijo θ, intersectamos el sólido Ω con el plano dado por dicho θ tenemos una región plana en rz que se ilustra a continuación:



Del dibujo, se tiene que $0 \leq z \leq 1$ y $0 \leq r \leq z$ (o bien $0 \leq r \leq 1$ y $r \leq z \leq 1$). En resumidas cuentas:

$$\Omega = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 1,\ r \leq z \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Así, usando el teorema de Cambio de Variable, tenemos

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \frac{x^2}{(x^2+y^2)^a}dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^z \frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^{2a}} r dr dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^z r^{3-2a}\cos^2(\theta) dr dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2(\theta)\left[\frac{r^{4-2a}}{4-2a}\bigg|_0^z\right] dz d\theta \\
&= \frac{1}{4-2a}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2(\theta) z^{4-2a} dz d\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4-2a}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\left[\frac{z^{5-2a}}{5-2a}\bigg|_0^1\right] d\theta$$
$$= \frac{1}{(4-2a)(5-2a)}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta$$
$$= \frac{1}{(4-2a)(5-2a)}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right]\bigg|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{\pi}{(4-2a)(5-2a)}.$$

□

Problema 3. Encuentre el área de la región del primer cuadrante acotada por las curvas $y = x^3, y = 2x^3, x = y^3, x = 4y^3$.

Solución. Sean $u = \frac{y}{x^3}, v = \frac{x}{y^3}$.

Entonces R se transforma en $R' = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$.

Su jacobiano es

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{3y}{x^4} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^3} & -\frac{3x}{y^4} \end{vmatrix} = \frac{9xy}{x^4y^4} - \frac{1}{x^3y^3} = \frac{8}{x^3y^3}.$$

Como $uv = \frac{1}{x^2y^2}$, entonces $\frac{8}{x^3y^3} = 8u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}$. Luego $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{8u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}}$. Así,

$$\text{Área}(R) = \iint\limits_R dx\,dy = \int_1^2\int_1^4 \frac{1}{8u^{\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}} dv\,du$$
$$= \frac{1}{8}\int_1^2 \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}\int_1^4 \frac{dv}{v^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{1}{8}\left[-2u^{-\frac{1}{2}}\right]_{u=1}^2 \left[-2v^{-\frac{1}{2}}\right]_{v=1}^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{8}$$

□

Tiempo: 90 minutos.

Justifique completamente sus respuestas.