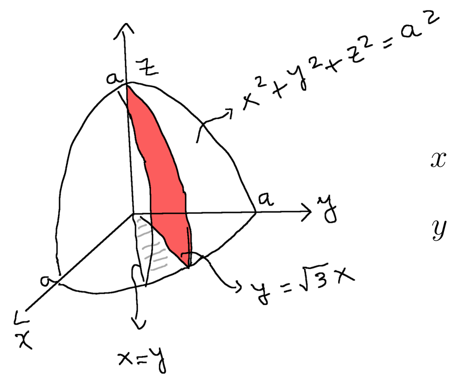
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA Y CIENCIA DE
LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Prueba Final Cálculo III forma A
22 de diciembre de 2022

Problema 1. Calcular el volumen en el primer octante, acotado por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$, $y = \sqrt{3}x$.

Solución.



$$x = y \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$
$$y = \sqrt{3}x \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho\, d\phi d\theta =$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{3} \operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta$$
$$= \frac{a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}} (-\cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$
$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)[0+1] = \frac{a^3}{3}\frac{\pi}{12} = \frac{\pi a^3}{36}.$$

□

Problema 2. Dada la integral de línea

$$I = \int_C (ay - x)\, dx + (2x - y)\, dy$$

a) Calcular el valor de a para que el campo vectorial sea conservativo, y escriba el campo.

b) Para el valor encontrado en *a*), determine I si C es el camino regular a trozos que recorre en un tramo a la curva $y = x^2 - x$ y en otro tramo a la curva $y = x$, si el punto de partida es $(1, 0)$ y el de llegada es $(1, 1)$.

c) Si $a = 1$, calcular I si C es el camino regular a trozos que recorre en un tramo a la curva $y = x^2 - x$, en otro tramo a la curva $y = x$, y es un camino cerrado, simple y recorrido en sentido antihorario.

Solución.

a)

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= ay - x \\
Q(x,y) &= 2x - y \\
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 2 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2. \\
\vec{F}(x,y) &= (2y - x, 2x - y)
\end{aligned}$$

b)

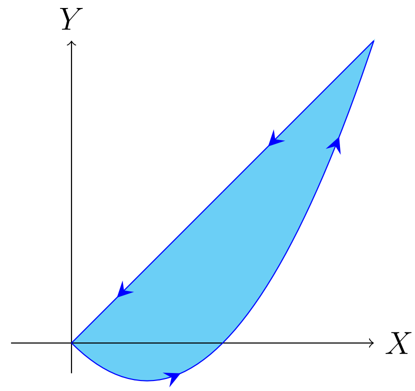
$$\phi(x,y) = \int (2x - y)\, dx = 2xy - \frac{x^2}{2} + C(y)$$

Derivando con respecto a y,

$$\begin{aligned}
2x + C'(y) &= 2x - y \\
C'(y) &= -y \\
\Rightarrow \qquad C(y) &= -\frac{y^2}{2} + k \\
\therefore \qquad \phi(x,y) &= 2xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + K \\
I &= \phi(1,1) - \phi(1,0) \\
&= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

c) Se tiene a calcular $\oint_C (y - x)dx + (2x - y)\, dy$. Aplicando el teorema de Green, vemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 1 = 1$$



De este modo, la integral es

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \int_{x^2-x}^{x} dy\, dx \\
&= \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

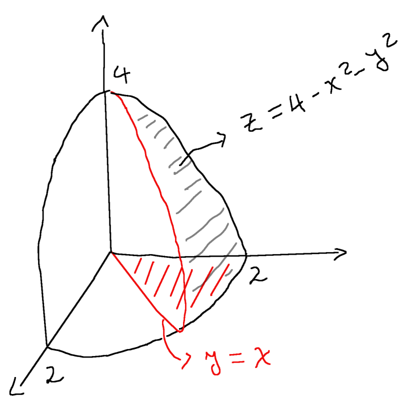
$\square$

Problema 3. Calcular $\displaystyle\iint_P \vec{F} \cdot d\mathbf{S}$ si $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, \sqrt{x^2 + y^2})$, y P es la superficie:

$$
P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ \ y \geq 0, z \geq 0, y \geq x, z = 4 - x^2 - y^2\},
$$

orientada con las normales dirigidas hacia arriba.

Solución.



$$
\begin{aligned}
R &= (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, 4 - r^2) \\
R_r &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -2r) \\
R_\theta &= (-r \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) \\
R_r \times R_\theta &= (2r^2 \cos\theta, 2r^2 \operatorname{sen}\theta, r)
\end{aligned}
$$

Así,

$$\iint\limits_P \vec{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (0,0,r) \cdot (2r^2\cos\theta, 2r^2\operatorname{sen}\theta, r)\,drd\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2\,drd\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$\square$

Tiempo: 90 minutos.

Justifique completamente sus respuestas.