DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo para Ingeniería Eléctrica, Forma B
20 de mayo de 2022

Problema 1. Considere el problema:

$$\begin{cases} \text{mín} & 2e^{x-1} + (y-x)^2 + z^2 \\ \text{tal que:} & xyz \leq 1 \\ & x + z \geq c. \end{cases}$$

¿Para que valores de c hacen que el punto $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ sea una solución óptima del problema?

Solución. En este problema tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) =& 2e^{x-1} + (y-x)^2 + z^2 \\ g_1(x,y,z) =& xyz - 1 \\ g_2(x,y,z) =& -x - z + c. \end{aligned}$$

Las condiciones KKT son las siguientes:

- Condiciones estacionarias :

$$2e^{x-1} - 2(y-x) + \mu_1 yz - \mu_2 = 0, \tag{1}$$

$$2(y-x) + \mu_1 xz = 0 \tag{2}$$

y

$$2z + \mu_1 xy - \mu_2 = 0. \tag{3}$$

- Condiciones de factibilidad :

$$xyz \leq 1 \tag{4}$$

y

$$x + z \geq c. \tag{5}$$

- Condiciones de Holgura :

$$\mu_1 \cdot [xyz - 1] = 0 \tag{6}$$

y

$$\mu_2 \cdot [-x - z + c] = 0 \tag{7}$$

- Condiciones de signo: Como se trata de encontrar el mínimo local de $f(x,y,z)$, entonces $\mu_1 \geq 0$ y $\mu_2 \geq 0$.

Ahora, dado que queremos encontrar los valores de c para que el punto $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ sea una solución óptima, reemplazamos estos valores en las condiciones estacionarias, ecuaciones (1), (2) y (3), o sea:

$$\begin{aligned} 2 + \mu_1 - \mu_2 =& 0 \\ \mu_1 =& 0 \\ 2 + \mu_1 - \mu_2 =& 0, \end{aligned}$$

por lo que $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 2$ (que concuerdan con nuestras condiciones de signo). También, como el punto $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ tiene que cumplir con las condiciones de factibilidad, ecuaciones (4) y (5), tenemos que $c \leq 2$, pero dado que $\mu_2 = 2 \neq 0$ y de la ecuación (7) de las condiciones de holgura, y si $c > 2$, esta no se cumple , por lo que solo nos resta de que $c = 2$.

$\square$

Problema 2. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por $u(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)$, $v(x, y, z) = \cos(xyz)$. Sea $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $w(u, v) = (u + v)^2$. Defina $f(x, y, z) = w(u(x, y, z), v(x, y, z))$. Determine los valores λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) =$$
$$= \lambda_1 \nabla u\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + \lambda_2 \nabla v\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Solución. Tenemos $f(x, y, z) = w(u(x, y, z), v(x, y, z))$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \Rightarrow \qquad \nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u, v) \cdot \nabla u(x, y, z) + \frac{\partial w}{\partial v}(u, v) \cdot \nabla v(x, y, z). \end{aligned}$$

Así que, en general, los valores $\lambda_1 = \frac{\partial w}{\partial u}(u, v), \lambda_2 = \frac{\partial w}{\partial v}(u, v)$ satisfacen

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla u(x, y, z) + \lambda_2 \nabla v(x, y, z), \tag{8}$$

y son los únicos valores que satisfacen esta ecuación si y sólo si ∇u y ∇v son linealmente independientes.

En el caso de $(x, y, z) = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ tenemos

$$\nabla u(x, y, z) = (yz\cos(xyz), xz\cos(xyz), xy\cos(xyz)),$$

$$\nabla u\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=(0,0,0),$$

de donde λ_1 no es único, puesto que cualquier $\lambda_1\in\mathbb{R}$ satisface (8); y

$$\begin{gathered}\nabla v(x,y,z)=(-yz\operatorname{sen}(xyz),-xz\operatorname{sen}(xyz),-xy\operatorname{sen}(xyz)),\\ \nabla v\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\left(-\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}},-\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}},-\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right),\end{gathered}$$

de donde

$$\begin{aligned}\lambda_2&=\frac{\partial w}{\partial v}(u,v)=2(u+v)=2\left(\operatorname{sen}\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)+\cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)\\&=2\left(\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)=2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores λ_1,λ_2 pedidos, son $\lambda_1\in\mathbb{R}$, $\lambda_2=2$.

Otra solución: Tenemos

$$\begin{gathered}f(x,y,z)=(\operatorname{sen}(xyz)+\cos(xyz))^2=\\=\operatorname{sen}^2(x,y,z)+2\operatorname{sen}(xyz)\cos(xyz)+\cos^2(xyz)=\\=1+2\operatorname{sen}(xyz)\cos(xyz)\end{gathered}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)&=2\cos^2(xyz)yz-2\operatorname{sen}^2(xyz)yz\\&=2yz(\cos^2(xyz)-\operatorname{sen}^2(xyz))=\\&=2yz\cos(2xyz).\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)&=2\cos^2(xyz)xz-2\operatorname{sen}^2(xyz)xz\\&=2xz(\cos^2(xyz)-\operatorname{sen}^2(xyz))\\&=2xz\cos(2xyz)\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)&=2\cos^2(xyz)xy-2\operatorname{sen}^2(xyz)xy\\&=2xy(\cos^2(xyz)-\operatorname{sen}^2(xyz))\\&=2xy\cos(2xyz)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\qquad\begin{aligned}\nabla f(x,y,z)&=(2yz\cos(2xyz),2xz\cos(2xyz),2xy\cos(2xyz))\\&=2\cos(2xyz)(yz,xz,xy).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)=\cos(xyz)yz;\quad\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)=\cos(xyz)xz,\quad\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)=\cos(xyz)xy.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(xyz)yz; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(xyz)xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(xyz)xy.$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla f\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) &= 2\cos\left(2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\\
&= 2\cos(\pi)\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\\
&= -2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1,1,1),\\
\text{y} \qquad & \lambda_1\nabla u\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + \lambda_2\nabla v\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\\
&= \lambda_1\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1,1,1) + \lambda_2\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(-1,-1,-1)\\
&= -\lambda_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1,1,1)
\end{aligned}$$

Para tener $\nabla f\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \lambda_1\nabla u\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + \lambda_2\nabla v\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$, debemos tener:

$$-2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1,1,1) = -\lambda_2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1,1,1) \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 2.$$

Así, para obtener la igualdad requerida en el punto $\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ sirve cualquier $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 = 2$.

$\square$

Problema 3. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

es:

I) continua en $\mathbb{R}^2$,

II) diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

III) no diferenciable en $(0,0)$.

Solución.

I) Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^4}$ es continua, porque es una división de funciones polinomiales con denominador que no se anula en el abierto $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Para $(x,y) = (0,0)$, se tiene $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = 0$, pues

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4} - 0\right| = \frac{x^2}{x^2+y^4}|y| \leq \frac{x^2+y^4}{x^2+y^4}|y| = |y|.$$

Luego, por el Teorema del Sandwich, como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ y $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

II) Para ver que $f(x,y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, se observa que si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^4)(2xy) - (x^2y)(2x)}{(x^2+y^4)^2}$$
$$f_y(x,y) = \frac{(x^2+y^4)(x^2) - (x^2y)(4y^3)}{(x^2+y^4)^2}.$$

Entonces $f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, y es diferenciable en este conjunto.

III) Para ver que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$, calculamos las derivadas parciales $f_x(0,0), f_y(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^2\cdot 0}{h^2+0^4}\right) = 0$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{0\cdot h^2}{0^2+h^4}\right) = 0.$$

Luego analizamos si se satisface

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}(h^2+k^4)} \end{aligned}$$

Pero si $g(h,k) = \dfrac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}(h^2+k^4)}$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 0^+} g(k,k) &= \lim_{k\to 0^+} \frac{k^3}{2^{\frac{1}{2}}k(k^2+k^4)} \\ &= \lim_{k\to 0^+} \frac{k^3}{2^{\frac{1}{2}}(k^3+k^5)} \\ &= \lim_{k\to 0^+} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}(1+k^2)} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \neq 0. \end{aligned}$$

Luego f no es diferenciable en $(0,0)$.

$\square$