Suplemento Preparación para Taller 1, semestre I-2023: Derivadas Direccionales, Aplicaciones

E1 Un campo escalar diferenciable f tiene, en el punto $(1, 2)$, las derivadas direccionales $+2$ en dirección al punto $(2, 2)$ y -2 en dirección al punto $(1, 1)$. Determinar el vector gradiente en $(1, 2)$ y calcular la derivada direccional en dirección al punto $(4, 6)$.

E2 Dado un campo escalar diferenciable en un punto $\mathbf{a}$ de $\mathbb{R}^2$, supongamos que $f'(\mathbf{a}; \mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{13}}$ y $f'(\mathbf{a}; \mathbf{v}) = \sqrt{2}$, siendo $\mathbf{u}$ unitario, en la dirección de $2i + 3j$ y $\mathbf{v}$ unitario, en la dirección de $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule $\nabla f(\mathbf{a})$.

E3 En cualquier punto del plano xy el potencial eléctrico es $V(x, y)$ voltios, y $V(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$. La distancia se mide en metros.

a) Calcule la tasa de variación del potencial en el punto $(0, \frac{\pi}{4})$ en la dirección del vector unitario $\cos \frac{\pi}{6}\mathbf{i} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\mathbf{j}$.

b) Determine la dirección y la intensidad de la máxima tasa de variación de V en $(0, \frac{\pi}{4})$.

E4 Suponga que sobre una cierta región del espacio, el potencial eléctrico V está dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

a) Encuentre la tasa de cambio del potencial en $P(3, 4, 5)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

b) ¿En cuál dirección V cambia más rápidamente en P?

c) ¿Cuál es la razón de cambio máxima en P?

E5 Una ecuación de la superficie de una montaña es

$$z = 1200 - 3x^2 - 2y^2,$$

donde la distancia se mide en metros, el eje x apunta hacia el este y el eje y hacia el norte. Una alpinista se encuentra en el punto que corresponde a $(-10, 5, 850)$.

a) ¿Cuál es la dirección de máxima inclinación?

b) Si la alpinista se desplaza en la dirección este, ¿ella asciende o desciende, y a qué tasa?

c) Si la alpinista se desplaza en la dirección suroeste, ¿ella asciende o desciende, y a qué tasa?

d) ¿En qué direcciones recorre la alpinista una curva de nivel?

E6 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciable. Suponga que una partícula P se mueve dentro de A, en una trayectoria que incrementa el valor de f de la forma más rápida posible, descrita por la función $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ con vector tangente $\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t))$ cuyo sentido coincide con el del movimiento. Demuestre que la trayectoria cumple

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)}$$

(*Indicación*: el vector tangente debe tener la dirección de crecimiento máximo).

E7 Está lloviendo, y el agua de lluvia corre hacia abajo sobre un domo elipsoidal con ecuación $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$, donde $z \geq 0$. La gravedad causa que las gotas se deslicen sobre el domo tan rápido como es posible.

a) Adapte este problema a la situación del problema **E6** para obtener una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x, y)$$

que satisfacen las coordenadas (x, y) de las trayectorias seguidas por las gotas.

b) Demuestre que para todo $C \in \mathbb{R}$, las funciones $y = Cx^{\frac{1}{4}}, x > 0$, e $y = C(-x)^{\frac{1}{4}}$ satisfacen la ecuación de la parte a).

(*Comentario:* Por el Teorema de Existencia y Unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias, las gráficas de las funciones de la parte b) deben dar las trayectorias seguidas por las gotas).