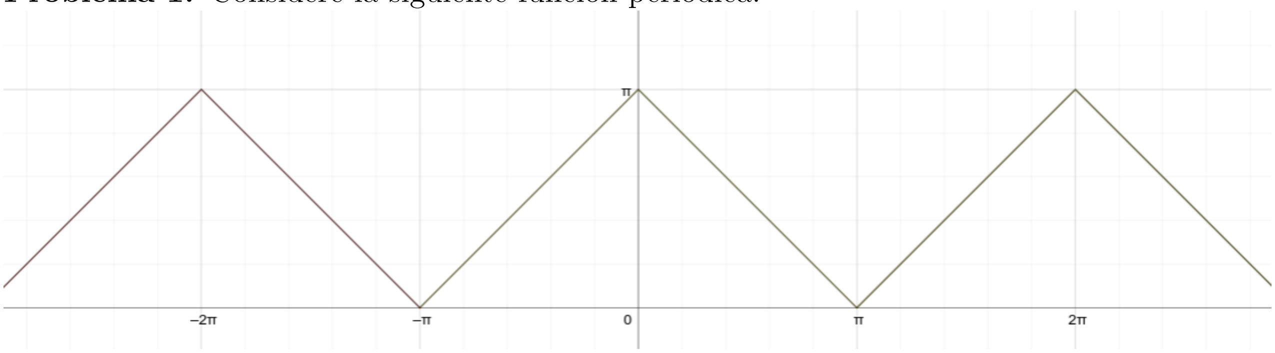
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 1 Cálculo Avanzado, Forma B
19 de abril de 2022

Problema 1. Considere la siguiente función periódica:



Utilizando la identidad de Parseval, hallar una serie para π^2

Solución. La función es la extensión periódica de $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Como es par $b_n = 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^\pi \right) = \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\cancel{-\frac{x \operatorname{sen}(nx)}{n}} + \cancel{\frac{\pi \operatorname{sen}(nx)}{n}} - \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^\pi \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

Por identidad de Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x)^2 dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2)$$

En nuestro caso:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x)^2 dx = 2a_0^2 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^\infty a_n^2$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = 2\frac{\pi^2}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 n^4}$$

$$\frac{\pi^4}{6} = 16\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\pi^4 = 96\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

HUBO UN ERROR PIDIENDO π^2, era π^4.

$\square$

Problema 2. *a*) Obtener la integral de Fourier de:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|}, \ |x| \leq \pi \\ 0, \ |x| > \pi \end{cases}$$

Solución. Debido a que la función es par: $B(\omega) = 0, \ \forall \omega \in \mathbb{R}$.

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\omega x}dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(x)e^{\omega x}dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega e^{\omega x}\cos(x)}{\omega^2+1} + \frac{e^{\omega x}\operatorname{sen}(x)}{\omega^2+1}\bigg|_0^{\pi} \right)$$
$$= -\frac{2}{\pi}\frac{\omega(e^{\pi\omega}+1)}{\omega^2+1}$$
$$f(x) \sim -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega(e^{\pi\omega}+1)}{\omega^2+1}e^{\omega x}d\omega$$

$\square$

b) Estudiar la convergencia para $x_0 = 0$ y $x_1 = \pi$.
Solución. Como $x_0 = 0$ es un punto de continuidad:

$$f(0) = 1 = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega(e^{\pi\omega}+1)}{\omega^2+1}d\omega$$

Como $x_1 = -\pi$ es un punto de discontinuidad:

$$\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = \frac{-1+e^{-\pi}}{2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega(e^{\pi\omega}+1)}{\omega^2+1}e^{\omega\pi}d\omega$$

$\square$

Problema 3. *a*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P = (a, b, c)$, que no puede tener las tres coordenadas iguales entre sí, y es perpendicular a los planos:

$$\begin{aligned} \Pi_1 : &\quad ax + by + cz = 1 \\ \Pi_2 : &\quad x + y + z = abc \end{aligned}$$

Solución. Denotemos $\mathscr{P}$ a dicho plano. Dado que $\mathscr{P}$ es perpendicular a los dos planos, entonces es paralelo a sus normales. Así tenemos que $\vec{n_1} = (a, b, c) \parallel \mathscr{P}$ y $\vec{n_2} = (1, 1, 1) \parallel \mathscr{P}$.

- Primera Solución: Como las coordenadas de (a, b, c) no pueden ser todas iguales, entonces $\vec{n_1} \nparallel \vec{n_1}$. Se tiene la siguiente ecuación vectorial:

$$\mathscr{P} : \vec{P} = (a, b, c) + t(a, b, c) + s(1, 1, 1)$$

- Segunda Solución: El producto vectorial $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ es perpendicular a $\mathscr{P}$:

$$\vec{n} = (a, b, c) \times (1, 1, 1) = (b - c, c - a, a - b)$$

$\vec{n} \neq \vec{0}$ pues las coordenadas de (a, b, c) no son todas iguales. Así la ecuación normal del plano es:

$$\mathscr{P} : \langle (b - c, c - a, a - b), \vec{P} - (a, b, c) \rangle = 0$$

(ALTERNATIVA)
Y para obtener la ecuación algebraica hacemos $\vec{P} = (x, y, z)$:

$$\langle (b - c, c - a, a - b), (x, y, z) - (a, b, c) \rangle = 0$$

Luego $\mathscr{P} : (b - c)x + (c - a)y + z(a - b) = 0$.

□

b) Determine el punto en el cual la recta

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z - 4}{2}$$

interseca al plano $\mathscr{P} : x + 2y + 2z = 22$
Solución. Si $x + 2y + 2z = 22$ entonces:

$$x + 2(y + 3 - 3) + 2(z - 4 + 4) = 22$$

$$x + 2(y + 3) - 6 + 2(z - 4) + 8 = 22$$

$$x + 2(y + 3) + 2(z - 4) = 20$$

De las ecuaciones que definen a la recta, tenemos: $2(x-2) = y+3 = z-4$. Reemplazando en la ecuación anterior:

$$x + 2(2(x-2)) + 2(2(x-2)) = 20$$

$$x + 4x + 4x - 8 - 8 = 20$$

$$9x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$$

Como $x = 4$, reemplazando en las ecuaciones de la recta tenemos: $y = 1$, $z = 8$. Así el punto de intersección es $(4, 1, 8)$.

$\square$