DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo Avanzado, Forma B
3 de noviembre de 2022

IMPORTANTE: debe resolver cada problema en hojas separadas.

Al final, debe entregar tres (3) hojas, que tengan como mínimo: nombre, código de sección, y número de problema a resolver.

Problema 1. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

a) Determine la serie de Fourier de f, periódica de periodo 2π.

b) Determine el valor al que converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ o demuestre que tal valor no existe.

c) Determine el valor al que converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ o demuestre que tal valor no existe.

Solución.

a) El semiperiodo es $L = \pi$. Se tiene que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x\,dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \left[2\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_{\pi}^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi^2}{2}\right] + \frac{1}{2\pi} \left[2\pi \cdot 2\pi - \frac{4\pi^2}{2} - 2\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right] = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\pi} \left[2\pi^2 - 2\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx\,dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \cos nx\,dx.$$

Estas integrales se hacen por integración por partes; las sustituciones para esto, respectivamente son

$$\begin{aligned} u &= x & du &= dx & \qquad u &= 2\pi - x & du &= -dx \\ dv &= \cos nx\,dx & v &= \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx & \qquad dv &= \cos nx\,dx & v &= \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \end{aligned}$$

De este modo, se tiene

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\cancel{\frac{x}{n} \operatorname{sen} nx} + \frac{1}{n^2} \cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\pi - x}{n} \operatorname{sen} nx - \frac{1}{n^2} \cos nx\right]_0^{2\pi}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi^2}[(-1)^n - 1]\right] + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi^2}[(-1)^n - 1\right] \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right].
\end{aligned}
$$

Así, si n es impar.

$$
a_n = \frac{2(-2)}{(2n-1)^2\pi} = \frac{-4}{(2n-1)^2\pi}
$$

Por otro lado,

$$
b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x)\operatorname{sen} nx\, dx.
$$

Mediante integración por partes:

$$
\begin{array}{llll}
u = x & du = dx & u = 2\pi - x & du = -dx \\
dv = \operatorname{sen} nx\, dx & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx & dv = \operatorname{sen} nx\, dx & v = \dfrac{1}{n}\cos nx,
\end{array}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \cancel{\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nx}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x-2\pi}{n}\cos nx - \cancel{\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nx}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right] + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}(-1)^n\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Entonces $S(x) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)^2\pi}\cos((2n-1)x)$.

b) Si $x = 0$, $S(x) = 0$; así,

$$
0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)^2\pi}\cos((2n-1)\cdot 0). \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.
$$

c) Por la identidad de Parseval, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2\, dx &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} \\
\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)^2\, dx &= \frac{\pi^2}{8}\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}. \\
\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{3}\right] + \frac{1}{\pi}[\frac{\pi^3}{3}] &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} \\
\left(\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\pi^2}{8}\right)\frac{\pi^2}{16} &= \frac{13\pi^4}{384} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.
\end{aligned}
$$

□

Problema 2. Un esquiador se encuentra en un cerro cuya superficie es el gráfico de una función diferenciable, digamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $z = f(x, y)$. El esquiador ha comprobado que sus coordenadas en el plano xy son $(1, 2)$. Más aún, ha logrado comprobar que:

- la pendiente de la superficie cuando se mueve en dirección a $(2,3)$ es 2, y que
- la pendiente de la superficie cuando se mueve en dirección a $(2,1)$ es -2.

a) Determine $\nabla f(1,2)$.

b) Determine la pendiente de la superficie cuando se mueve en dirección a $(3,5)$.

c) Si el esquiador de pronto decide cambiar de rubro a escalador ¿Cuál sería la dirección en la que debería ir para subir la mayor pendiente?

Solución.

a) Primero veamos que si el esquiador se mueve en dirección a $(2,3)$ entonces su vector director será
$$D_1 := (2,3) - (1,2) = (1,1),$$
y análogamente si se mueve en dirección a $(2,1)$ su vector director será
$$D_2 := (2,1) - (1,2) = (1,-1).$$
Normalizando los vectores directores se obtienen
$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{D_1}{||D_1||} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ d_2 &:= \frac{D_2}{||D_2||} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right), \end{aligned}$$
y por hipótesis que
$$\begin{aligned} \frac{\partial f(1,2)}{\partial d_1} &= f'((1,2), d_1) = 2 \\ \frac{\partial f(1,2)}{\partial d_2} &= f'((1,2), d_2) = -2 \end{aligned}$$
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que
$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$
Como f es diferenciable sabemos que tales α, β existen, más aun, se tiene que
$$\begin{aligned} 2 &= f'((1,2), d_1) = \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot d_1 \\ -2 &= f'((1,2), d_2) = \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot d_2 . \end{aligned}$$
Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene que
$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^{3/2} \end{pmatrix}$$
.

b) Sean $D_3 = (3,5) - (1,2) = (2,3)$ y
$$d_3 = \frac{D_3}{||D_3||} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Sigue que la derivada direccional en dirección a $(3,5)$
$$f'((1,2), d_3) = \nabla f(1,2) \cdot d_3 = 3\sqrt{\frac{8}{13}}.$$

c) Cuando el esquiador decide escalar en la dirección con más pendiente debe escoger necesariamente la dirección en la que la derivada direccional es máxima. Por otro lado sabemos que si $||d|| = 1$

$$f'((1,2), d) = \nabla f(1,2) \cdot d,$$

y como

$$v \cdot w = ||v|| \cdot ||w|| \cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo entre v y w, sigue que el producto punto entre vectores se maximiza cuando el ángulo entre ellos es tal que $\cos(\theta)$ se maximiza, o bien, cuando $\theta = 0$.

De lo anterior se concluye que la dirección d normalizada que maximiza la derivada direccional debe ser

$$d = \frac{\nabla f(1,2)}{||\nabla f(1,2)||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Problema 3.

a) Determine los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ en el interior de la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) Determine los puntos críticos del problema condicionado: maximizar $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a $x^2 + y^2 = 4$.

c) Con los resultados obtenidos de las partes a) y b), determine el valor máximo de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sobre la región R mencionada en la parte a)

Solución.

a) Para analizar el interior notemos que $\nabla f = (2x, 4y)$. Entonces $\nabla f = (0,0)$ si y sólo si $(x,y) = (0,0)$ Este punto pertenece al interior de la región R, y es el único punto obtenido en dicho interior.

b) Para encontrar los puntos críticos del problema condicionado, procederemos a aplicar el método de Lagrange, es decir:

max $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeto a que $g(x,y) := x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Utilizando Lagrange sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$2x = \lambda 2x,$$

$$4y = \lambda 2y,$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

De la primera ecuación de este sistema tenemos que $x = 0$ o bien $\lambda = 1$. Si $x = 0$ se tiene que $y = \pm 2$. Por otra parte si $\lambda = 1$ se tiene que $y = 0$ y por ende $x = \pm 2$.

Así, los candidatos a máximo en el borde del círculo son $\{(0, \pm 2), (\pm 2, 0)\}$.

c) Sabemos que se verifica el Teorema de Weierstrass: puesto que la región R es cerrada y acotada, y por ende compacta, entonces la función $f(x,y)$ debe alcanzar valores extremos en la región R, y tales valores extremos (en particular, el valor máximo) deben alcanzarse en los candidatos obtenidos en las partes a) y b). Evaluamos entonces la función en los candidatos, y obtenemos

$$f(0,0) = 0$$

$$f(2,0) = f(-2,0) = 4 + 2 \cdot 0 = 4.$$
$$f(0,2) = f(0,-2) = 0 + 2 \cdot 4 = 8.$$

El mayor de los valores obtenidos es 8, y por consiguiente, ese es el valor máximo buscado. De este modo, f toma valor máximo en $(0,-2)$ y en $(0,2)$.

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo:90 minutos.