Preparación para Taller 1, semestre I-2023

E1 Encuentre el límite, si existe, o demuestre que no existe:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}.$$

E2 Encuentre el límite, si existe, o demuestre que no existe:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

E3 Determine los valores de la constante c tales que

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + xy^2 + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ c & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sea continua.

E4 Determine el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ en los que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + xy + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua.

E5 Determine el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ en los que

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{|x^3| + |y^3|} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua.

E6 Decida si existe o no, y calcule su valor:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x - y}{x - y}$$

Indicación: considere una ruta con ecuación de la forma $y = x + x^\alpha$ con $\alpha > 1$.

E7

a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^n}{x-y}$$

no existe (ver indicación de ejercicio **E6**)

b) Demuestre que para todo $\epsilon > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$ la función $f(x,y) = \dfrac{x^n}{x-y}$ no es acotada en la bola $B = B((0,0);\epsilon)$.

Indicación: Suponga lo contrario (es decir, que existe $M > 0$ tal que $f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in B$), y demuestre que de esto se deduciría que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{n+1}}{x-y}$ sí existiría, contradiciendo lo mostrado en *a*).

E8 Determine todos los valores de $\alpha > 0$ tales que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x-y|^\alpha}{x^2+y^2}$$

existe, y calcule el límite para tales valores.

E9 Determine su valor, si existe, o demuestre que no existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x+y)^2}$$

E10 Sea $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x^2 < y < 2x^2 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$. Demuestre que $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ existen pero f no es diferenciable en $(0,0)$.

E11 Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

a) Determine si f es continua en $(0,0)$.

b) Decida si f es diferenciable en $(0,0)$.

c) Encuentre la condición que debe cumplir $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ con $\|\vec{v}\| = 1$ tal que la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ en la dirección de $\vec{v}$ exista.

E12 Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{y-\operatorname{sen} y} & \text{si} \quad y\neq 0\\ -1 & \text{si} \quad y=0.\end{cases}$$

Calcule si existen, o demuestre que no existen: $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$.

E13 Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(1-\cos y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Estudie la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

b) Calcule la derivada direccional de f en $(0,0)$ para cualquier dirección.

E14

a) Determine y grafique el conjunto A de puntos donde $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+xy)}{(e^x-1)\arctan y}$ es continua.

b) Determine $\partial A, \operatorname{int}(A), \operatorname{Cl}(A), A'$.[1] ¿Es A un conjunto abierto? ¿Cerrado? Justifique.

c) Si en el inciso anterior se obtuvo $(0,0)\in A'$, entonces calcule o demuestre que no existe

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y).$$

E15 Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Determine los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ tales que f sea continua en $(0,0)$.

b) Calcule f_x, f_y en $(0,0)$.

c) Determine si f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

d) ¿Qué se puede decir respecto a las derivadas direccionales de f en $(0,0)$?

E16 Determine $\frac{dw}{dt}$ si $w=xe^{y/z}$, $x=t^2$, $y=1-t$, $z=1+2t$, de las siguientes dos formas:

a) Reemplazando x,y,z por sus expresiones en t y derivando la función $w=f(t)$ obtenida, y

b) aplicando regla de la cadena en varias variables y expresando la respuesta en términos de t.

---

[1] ∂A: Frontera de A. $\operatorname{int}(A)$: Interior de A. $\operatorname{Cl}(A)$: Clausura o Adherencia de A. A': Conjunto derivado de de A.

Compruebe que se tiene el mismo resultado.

E17 Realice el mismo ejercicio que en **E16** si $w = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \tan t$.

E18 Calcule los siguientes:

a) $\frac{dz}{dt}$ si $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = e^t$.

b) $\frac{dz}{dt}$ si $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = \ln t$, $y = \cos t$.

c) $\frac{\partial w}{\partial r}$ cuando $r = 1$, $s = -1$, si $w = (x + y + z)^2$, $x = r - s$, $y = \cos(r + s)$, $z = \operatorname{sen}(r + s)$.

d) $\frac{\partial w}{\partial v}$ cuando $u = -1, v = 2$, si $w = xy + \ln z$, $x = \frac{v^2}{u}$, $y = u + v$, $z = \cos u$.

E19 El cambio de variables $x = u + v, y = uv$ transforma $f(x, y)$ en $g(u, v)$. Calcular el valor de $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto en que $u = 1$, $v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

en dicho punto.

E20 Si $z = f(u, v)$, donde $u = xy$, $v = y/x$, y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2v \frac{\partial z}{\partial v}.$$

E21 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $f(0, 0) = (0, 0)$. Suponga que la matriz jacobiana de f en $\mathbf{p} = (0, 0)$ es

$$Jf(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de f. Obtenga la matriz jacobiana de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y) = \left(3f_1(x, y) + \int_0^{f_2(x,y)} g(t)\, dt, 9f_2(x, y) - 7 \int_{f_1(x,y)}^{3} g(t)\, dt, \int_{2f_1(x,y)}^{4f_2(x,y)} g(t)\, dt \right)$$

en el origen de coordenadas, donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $g(0) = 1$.

E22 Sean $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales definidos como sigue:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + y + z)\mathbf{i} + (2x + y + z^2)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{g}(u, v, w) = uv^2 w^2 \mathbf{i} + w^2 \operatorname{sen} v \mathbf{j} + u^2 e^v \mathbf{k}.$$

a) Calcular cada una de las matrices jacobianas $D\mathbf{f}(x, y, z)$ y $D\mathbf{g}(u, v, w)$.

b) Calcular la función compuesta $\mathbf{h}(u, v, w) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(u, v, w))$.

c) Calcular la matriz jacobiana $D\mathbf{h}(u, 0, w)$ de las siguientes dos formas:

   - Directamente del resultado en b).
   - Con la regla de la cadena y los resultados de a).