DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA Y CIENCIA DE
LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 1 Cálculo III, Forma A
19 de abril de 2022

Problema 1. *a*) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores. Pruebe que los vectores $\vec{a} = ||\vec{u}||\,\vec{v} + ||\vec{v}||\,\vec{u}$ y $\vec{b} = ||\vec{u}||\,\vec{v} - ||\vec{v}||\,\vec{u}$ son ortogonales.

b) Pruebe que el vector $\vec{a} = ||\vec{u}||\,\vec{v} + ||\vec{v}||\,\vec{u}$ bisecta el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución.

a) Tenemos que probar que el producto interno entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es cero, o sea $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = 0$.

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle &= \langle ||\vec{u}||\,\vec{v} + ||\vec{v}||\,\vec{u}, ||\vec{u}||\,\vec{v} - ||\vec{v}||\,\vec{u} \rangle \\
&= \langle ||\vec{u}||\,\vec{v}, ||\vec{u}||\,\vec{v} \rangle - \langle ||\vec{u}||\,\vec{v}, ||\vec{v}||\,\vec{u} \rangle + \langle ||\vec{v}||\,\vec{u}, ||\vec{u}||\,\vec{v} \rangle - \langle ||\vec{v}||\,\vec{u}, ||\vec{v}||\,\vec{u} \rangle \\
&= ||\vec{u}||^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}|| \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - ||\vec{v}||^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \\
&= \cancel{||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2} - ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}|| \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \cancel{||\vec{v}||^2 \cdot ||\vec{u}||^2} \\
&= -\,||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}|| \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle
\end{aligned}$$

y como $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, entonces

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = -\,||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}|| \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0,$$

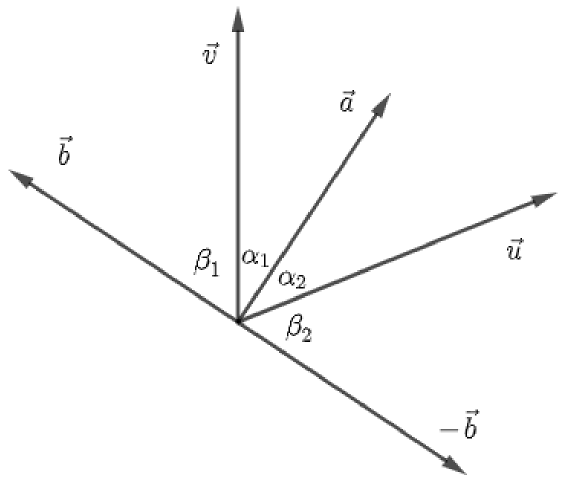
por lo tanto, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales.

b) dados que los vectores $\vec{a} = ||\vec{u}||\,\vec{v} + ||\vec{v}||\,\vec{u}$ y $\vec{b} = ||\vec{u}||\,\vec{v} - ||\vec{v}||\,\vec{u}$ son ortogonales, hacemos el siguiente esquema: Queremos probar que $\alpha_1 = \alpha_2$ y como $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 90$, entonces es suficiente con probar que $\beta_1 = \beta_2$. .
Ahora como:

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{v}, \vec{b} \right\rangle &= \langle \vec{v}, ||\vec{u}||\,\vec{v} - ||\vec{v}||\,\vec{u} \rangle \\
&= ||\vec{u}|| \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - ||\vec{v}|| \cdot \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\
&= ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||^2 - ||\vec{v}|| \cdot \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{u}, -\vec{b} \right\rangle &= \langle \vec{u}, -\,||\vec{u}||\,\vec{v} + ||\vec{v}||\,\vec{u} \rangle \\
&= -\,||\vec{u}|| \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + ||\vec{v}|| \cdot \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle
\end{aligned}$$



$$= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}|| - ||\vec{u}|| \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \,,$$

y además dado el hecho de que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$, obtenemos:

$$||\vec{u}|| \cdot \left\langle \vec{v}, \vec{b} \right\rangle = ||\vec{v}|| \cdot \left\langle \vec{u}, -\vec{b} \right\rangle = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \,.$$

También tenemos que:

$$\left\langle \vec{v}, \vec{b} \right\rangle = ||\vec{v}|| \cdot \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos(\beta_1)$$
$$\left\langle \vec{u}, -\vec{b} \right\rangle = ||\vec{u}|| \cdot \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos(\beta_2),$$

o sea,

$$||\vec{u}|| \left\langle \vec{v}, \vec{b} \right\rangle = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos(\beta_1)$$
$$||\vec{v}|| \left\langle \vec{u}, -\vec{b} \right\rangle = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos(\beta_2),$$

por lo que:

$$||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos(\beta_1) = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos(\beta_2),$$

por lo tanto, $\beta_1 = \beta_2$.

□

(Otra solución) **Solución.** (Si se hace esta demostración completa, se obtendrán los 6 puntos)

Se tiene que mostrar que $\vec{a}, \vec{u}$ y $\vec{u}$ son coplanares, pero $\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ y $\langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$, luego:

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \langle ||\vec{u}|| \, \vec{v} + ||\vec{v}|| \, \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0.$$

Así, tanto $\vec{a}$, como $\vec{u}$, como $\vec{v}$, son ortogonales a $\vec{u} \times \vec{v}$. Luego están en el mismo plano. Así, basta ver que $\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha_2)$, siendo α_1 el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{u}$ y α_2 el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{v}$, pero:

$$\cos(\alpha_1) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{u}||}; \cos(\alpha_2) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{v}||}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1) = \cos(\alpha_2) &\iff ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{v}|| \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{u}|| \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle \\ &\iff \langle \vec{a}, ||\vec{v}|| \, \vec{u} \rangle = \langle \vec{a}, ||\vec{u}|| \, \vec{v} \rangle \\ &\iff \left\langle \vec{a}, ||\vec{u}|| \, \vec{v} - \vec{b} \right\rangle = \langle \vec{a}, ||\vec{u}|| \, \vec{v} \rangle \\ &\iff \langle \vec{a}, ||\vec{u}|| \, \vec{v} \rangle = \langle \vec{a}, ||\vec{u}|| \, \vec{v} \rangle . \end{aligned}$$

□

Problema 2. Considere el valor L dado por

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y-1)^2 \ln(y)}{(y-1)^2 + x^2} \quad (*)$$

a) Establezca un valor numérico para L calculando el límite a través de curvas $\gamma_1 \neq \gamma_2$, con $(0,1) \in \gamma_1$ y $(0,1) \in \gamma_2$ (2 puntos).

b) Pruebe que el valor L calculado en *a*) es el límite de $(*)$.

Solución. A lo largo de la curva $y = 1$, tenemos:

$$\lim_{(x,1)\to(0,1)} \frac{0}{x^2} = 0.$$

A lo largo de la curva $x = 0$, tenemos:

$$\lim_{(0,y)\to(0,1)} \frac{(y-1)^2 \ln(y)}{(y-1)^2 + x^2} = \lim_{y\to 1} \ln(y) = 0.$$

Ahora, si calculamos este límite a través del camino $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\}$, tenemos:

$$\lim_{(x,x+1)\to(0,1)} \frac{x^2 \ln(x+1)}{2x^2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{2} = 0.$$

Veamos si efectivamente 0 es el límite de esta función, o sea:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(y-1)^2 \ln(y)}{(y-1)^2 + x^2} - 0 \right| = \left| \frac{(y-1)^2 \ln(y)}{(y-1)^2 + x^2} \right| &\leq \frac{\cancel{((y-1)^2 + x^2)} |\ln(y)|}{\cancel{(y-1)^2 + x^2}} \\ &\leq |\ln(y)| \end{aligned}$$

y como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \ln(y) = 0$; por el teorema del sándwich , tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y-1)^2 \ln(y)}{(y-1)^2 + x^2} = 0.$$

$\square$

Problema 3. Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, funciones diferenciables en el punto (a, b), tal que satisfacen $g(a, b) = \frac{\pi}{2}$, $h(a, b) = 0$, $\nabla g(a, b) = (1, 0)$ y $\nabla h(a, b) = (1, 2)$.
Defina la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \operatorname{sen}(g(x, y))e^{h(x,y)} + g(x, y)$.
Calcular el plano tangente al gráfico de $f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$.

Solución. Sabemos que el plano tangente del grafo de f en un punto (x_0, y_0) es

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{1}$$

por tanto calculemos las derivadas parciales de la función $f(x, y)$ evaluada en (a, b), respetando reglas de derivación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\big(\operatorname{sen}(g(x,y))e^{h(x,y)} + g(x,y)\big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen}(g(x,y)))e^{h(x,y)} + \operatorname{sen}(g(x,y))\frac{\partial}{\partial x}(e^{h(x,y)}) + \frac{\partial}{\partial x}g(x,y) \\
&= \cos(g(x,y))\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)e^{h(x,y)} + \operatorname{sen}(g(x,y))\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}e^{h(x,y)} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \cos(g(a,b))e^{h(a,b)} + \operatorname{sen}(g(a,b))e^{h(a,b)}\frac{\partial h}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \\
&= \cos(\frac{\pi}{2})e^0 + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})e^0 \cdot 1 + 1 \\
&= 1 \times 1 \times 1 + 1 \\
\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= 2
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\big(\operatorname{sen}(g(x,y))e^{h(x,y)} + g(x,y)\big) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen}(g(x,y)))e^{h(x,y)} + \operatorname{sen}(g(x,y))\frac{\partial}{\partial y}(e^{h(x,y)}) + \frac{\partial}{\partial y}g(x,y) \\
&= \cos(g(x,y))e^{h(x,y)} + \operatorname{sen}(g(x,y))\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}e^{h(x,y)} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \cos(g(a,b))e^{h(a,b)} + \operatorname{sen}(g(a,b))e^{h(a,b)}\frac{\partial h}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \\
&= \cos(\frac{\pi}{2})e^0 + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})e^0 \cdot 2 + 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \cdot 1 \cdot 2 \\
\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= 2 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

finalmente escribimos la ecuación del plano tangente en (a,b) obteniendo

$$
\begin{aligned}
z &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\
&= \operatorname{sen}(g(a,b))e^{h(a,b)} + g(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\
&= \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})e^0 + \frac{\pi}{2} + 2(x-a) + 2(y-b) \\
z &= 1 + \frac{\pi}{2} + 2(x-a) + 2(y-b) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$\square$