DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo Avanzado, Forma A. 3 de noviembre de 2022

IMPORTANTE: debe resolver cada problema en hojas separadas.

Al final, debe entregar tres (3) hojas, que tengan como mínimo: nombre, código de sección, y número de problema a resolver.

Problema 1.

a) Dada $f(x) = |1-x|$, $x \in [0,2]$, determine la serie de Fourier de f, periódica de periodo 2.

b) Determine el valor al que converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ o justifique si no converge.

c) Si $x = \frac{1}{3}$, verifique que

$$\frac{\pi^2}{24} = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{2}{81} + \dots .$$

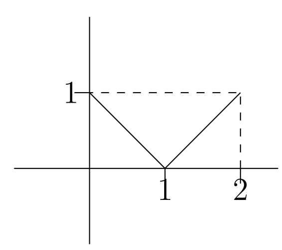
Solución.

a)

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,(x-1)\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + \frac{x^2}{2} - x\bigg|_1^2\right) = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int_0^1 (1-x)\cos n\pi x\,dx + \int_1^2 (x-1)\cos n\pi x\,dx$$

$$\begin{aligned} u &= 1-x & du &= -dx \\ h &= -1+x & dh &= dx \end{aligned}$$



$$dv = \cos n\pi x\,dx, \quad v = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{1-x}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x + \frac{1}{n\pi}\int \operatorname{sen} n\pi x\,dx\right]_0^1 + \\ &\quad \left[\frac{x-1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\int \operatorname{sen} n\pi x\,dx\right]_1^2 = \\ &= -\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\bigg|_0^1 + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\bigg|_1^2 = \\ &= -\frac{1}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] + \frac{1}{n^2\pi^2}\left[1 - (-1)^n\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi^2} = \frac{[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} = a_n,$$

n impar.

$$b_n = \int_0^1 (1-x) \operatorname{sen} n\pi x \, dx + \int_1^2 (x-1) \operatorname{sen} n\pi x \, dx.$$

$$u = 1-x, \qquad du = -dx, \qquad h = (x-1), \qquad dh = dx$$
$$dv = \operatorname{sen} n\pi x \, dx \qquad v = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{x-1}{n\pi} \cos n\pi x - \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} n\pi x \Big| + \\ & \frac{1-x}{n\pi} \cos n\pi c + \frac{1}{n^2\pi^2} \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{n\pi} + \frac{-1}{n\pi} = 0. \\ J(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} \cos(2n-1)\pi x \end{aligned}$$

b) Si $x = 0$, entonces $S(0) = 1$. Luego,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} \\ \Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

c) $S(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, pues f es continua en $x = \frac{1}{3}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{3}\right] \\ \frac{\pi^2}{24} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\tfrac{\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2} - \dots \\ \frac{\pi^2}{24} &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{2}{81} + \dots\right]. \end{aligned}$$

□

Problema 2. Considere los vectores $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ y $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Suponga que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $(1,2)$ y tal que

$$f'((1,2);\vec{u}) = 2, \;\; f'((1,2);\vec{v}) = -2.$$

Determine $\nabla f(1,2)$ y $f'((1,2);\vec{w})$, donde w es el vector unitario que va en la misma dirección que el vector $(2,3)$.

Nota: Recuerde que $f'((a,b);\vec{u})$ es la derivada direccional de f en el punto (a,b) en la dirección $\vec{u}$.

Solución. Como f es diferenciable, entonces

$$f'((1,2);u) = \langle \nabla f(1,2), u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right)$$

y

$$f'((1,2);v) = \langle \nabla f(1,2), v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right).$$

Como $f'((1,2);u) = 2$ y $f'((1,2);v) = -2$, entonces se debe satisfacer:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2\sqrt{2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2\sqrt{2}, \end{cases}$$

de donde $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2\sqrt{2}$, por lo que $\nabla f(1,2) = (0, 2\sqrt{2})$. Por otra parte el vector w unitario que va en la misma dirección que $(2,3)$ es $w = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)$. Luego

$$f'((1,2);w) = \langle \nabla f(1,2), w\rangle = \langle (0,2\sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)\rangle = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{13}}.$$

$\square$

Problema 3. Determine la menor distancia desde el origen a la recta determinada por la intersección entre los planos $x + 2y - z = 1$, $2x - 3y + 3z = 0$.

Sugerencia: Minimice el cuadrado de la distancia al origen.

Solución. La distancia desde el origen a cualquier punto (x,y,z) se expresa por

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Queremos encontrar el mínimo de esta expresión cuando (x,y,z) está en la recta.

Por lo tanto (x,y,z) debe verificar

$$x + 2y - z = 1, \quad y \quad 2x - 3y + 3z = 0$$

Encontrar el mínimo de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es equivalente a encontrar el mínimo de $x^2 + y^2 + z^2$.

Si usamos las letras $f,\ g_1,\ g_2$ para definir las expresiones

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2\ ,\ g_1(x,y,z) = x + 2y - z,\quad g_2(x,y,z) = 2x - 3y + 3z$$

El método de los multiplicadores de Lagrange dice que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g_1(x,y,z) + \mu \nabla g_2(x,y,z)$$

Pero como $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g_1(x,y,z) = (1,2,-1)$,
y $\nabla g_2(x,y,z) = (2,-3,3)$,
la igualdad anterior se expresa como

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 2, -1) + \mu(2, -3, 3)$$

O bien, $2x = \lambda + 2\mu$, $2y = 2\lambda - 3\mu$, $2z = -\lambda + 3\mu$

Despejando x, y, z tenemos que :

$x = \frac{\lambda}{2} + \mu, \quad y = \lambda - \frac{3}{2}\mu, \quad z = -\frac{\lambda}{2} + \frac{3}{2}\mu$

Pero como (x, y, z) verifica las restricciones, se tiene que

$$x + 2y - z = 3\lambda - \frac{7}{2}\mu = 1$$

y $2x - 3y + 3z = -\frac{7}{2}\lambda + 11\mu = 0$

de donde $\mu = \frac{14}{83}, \ \lambda = \frac{44}{83}$

y reemplazando en $x = \frac{\lambda}{2} + \mu, \quad y = \lambda - \frac{3}{2}\mu, \quad z = -\frac{\lambda}{2} + \frac{3}{2}\mu$

se obtiene $x = \frac{36}{83}, \quad y = \frac{23}{83}, \quad z = -\frac{1}{83}$

y por lo tanto la menor distancia buscada es

$$\sqrt{\left(\frac{36}{83}\right)^2 + \left(\frac{23}{83}\right)^2 + \left(\frac{1}{83}\right)^2} = \frac{1}{83}\sqrt{36^2 + 23^2 + 1} = \frac{\sqrt{1826}}{83}$$

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo:90 minutos.