DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Prueba de Suficiencia
Cálculo III
18 de agosto de 2023

Problema 1.

a) Encuentre el límite

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$$

si existe, o demuestre que no existe.

b) Encuentre las ecuaciones de los planos tangentes al hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ que son paralelos al plano $2x + 2y + z = 5$.

Solución.

a) Sea $f(x,y,z) = \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$. Entonces

$$\lim_{t\to 0} f(t,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

y

$$\lim_{t\to 0} f(t,t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq 0. \qquad \textbf{(1.5 pts.)}$$

Luego $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$ no existe, pues su cálculo no produce valores iguales cuando se restringe a dos trayectos que tienden a $(0,0,0)$. **(1.5 pts.)**

b) Sea $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - z^2$. Entonces $\nabla f(x,y,z) = (2x, 8y, -2z)$.

En un punto (a,b,c), $\nabla f(a,b,c) = (2a, 8b, -2c)$. **(0.6 pts.)** Como planos paralelos tienen vectores normales paralelos, y como el vector normal al plano tangente en (a,b,c) es $\nabla f(a,b,c)$, entonces buscamos (a,b,c) tal que $\nabla f(a,b,c) \parallel (2,2,1)$. Esto sucede si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(2a, 8b, -2c) = \lambda(2,2,1) = (2\lambda, 2\lambda, \lambda)$. **(0.6 pts.)** Luego al igualar las respectivas componentes se tiene

$$\lambda = -2c \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = -4c \quad \Rightarrow \quad a = -2c.$$

Por otro lado,

$$8b = 2\lambda \quad \Rightarrow \quad 8b = -4c \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{c}{2}.$$

De este modo, un punto donde el plano tangente sea paralelo, es un punto de la forma $(-2c, -\frac{c}{2}, c)$. **(0.6 pts.)**

Pero además satisfface la ecuación $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$, luego

$$\begin{aligned} & (-2c)^2 + 4(-\tfrac{c}{2})^2 - c^2 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & 4c^2 + 4(\tfrac{c^2}{4}) - c^2 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & c^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & c = 1 \text{ ó } c = -1. \end{aligned}$$ **(0.6 pts.)**

Luego un punto es $(-2, -\frac{1}{2}, 1)$, para el cual la ecuación del plano tangente es

$$2(x+2) + 2(y + \frac{1}{2}) + (z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y + z = -4;$$

y el otro punto es $(2, \frac{1}{2}, -1)$ y la ecuación del plano tangente es

$$2(x+2) + 2(y + \tfrac{1}{2}) + (z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y + z = 4.$$ **(0.6 pts.)**

□

Problema 2.

a) Una cierta función diferenciable $f(x, y)$ es tal que $\|\nabla f(x, y)\|^2 = 2$ para todo (x, y). El cambio de variables $x = uv, \ y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ transforma la función $f(x, y)$ en una función $g(u, v)$ en las nuevas variables. Encuentre el valor de $\dfrac{\|\nabla g(u, v)\|^2}{\|(u, v)\|^2}$.

b) Encuentre los puntos de la superficie $xy^2z^3 = 2$ en el primer octante que están más cerca del origen.

Solución.

a) Por regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} v + \frac{\partial f}{\partial y} u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y}(-v). \end{aligned}$$ **(1.5 pts.)**

Así

$$\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} v + \frac{\partial f}{\partial v} u\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} u - \frac{\partial f}{\partial y} v\right)^2 \tag{1}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (v^2+u^2) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (u^2+v^2) \tag{2}$$

$$= 2(u^2+v^2) \tag{3}$$

De este modo, $\dfrac{\|\nabla g(u,v)\|^2}{\|(u,v)\|^2} = 2.$ **(1.5 pts.)**

b)
- *Solución 1*: De la ecuación $xy^2z^3 = 2$ se deduce $y = \frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}}}$.

  Se tiene a minimizar la distancia al cuadrado $x^2+y^2+z^2$, que al reemplazar el valor despejado de y produce:

  $$f(x,z) = x^2 + \frac{2}{xz^3} + z^2, \quad x > 0,\ z > 0. \qquad \textbf{(0.6 pts.)}$$

  Entonces analizamos esta función:

  $$\begin{aligned}
  \nabla f(x,z) = (2x - \tfrac{2}{x^2z^3}, \tfrac{-6}{xz^4} + 2z) &&= (0,0) \qquad \textbf{(0.6 pts.)}\\
  \Rightarrow \quad x - \frac{1}{x^2z^3} = 0, && \frac{-3}{xz^4} + z = 0.\\
  \Rightarrow \quad x^3z^3 = 1, && xz^5 = 3.\\
  \Rightarrow \quad xz = 1, && xz^5 = 3.\\
  \Rightarrow \quad z^4 = 3 &&\\
  \Rightarrow \quad z = |z| = 3^{\frac{1}{4}},\ \ x = 3^{-\frac{1}{4}}. && \qquad \textbf{(0.6 pts.)}
  \end{aligned}$$

  Ahora,

  $$Hf(x,z) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^3z^3} & \frac{6}{x^2z^4} \\ \frac{6}{x^2z^4} & \frac{24}{xz^5} + 2 \end{pmatrix}$$

  $$Hf(3^{-\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}) = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 10 \end{pmatrix}.$$

  Como $f_{xx}(3^{-\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}) = 6 > 0$, y $det(Hf(3^{-\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}})) > 0$, entonces hay mínimo local en $(3^{-\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}})$. **(0.6 pts.)** Debiendo haber una distancia mínima, se deduce que en este punto se alcanza el mínimo buscado. Luego el punto más cercano es $(3^{-\frac{1}{4}}, \sqrt{2}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}})$. **(0.6 pts.)**

- *Solución 2:* Se tiene a minimizar $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sujeta a $xy^2z^3 = 2$. Lagrangiano:

  $$\mathscr{L}(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(xy^2z^3-2). \qquad \textbf{(0.5 pts.)}$$

  Sistema $\nabla\mathscr{L} = \mathbf{0}$:

  $$2x + \lambda y^2z^3 = 0 \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
2y + 2\lambda xyz^3 &= 0 && (5)\\
2z + 3\lambda xy^2z^2 &= 0 && (6)\\
xy^2z^3 - 2 &= 0. && (7)
\end{aligned}
$$

(0.5 pts.)

Tomamos $x(4) - \frac{y}{2}(5)$:

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + \lambda xy^2z^3 = 0\\
-y^2 - \lambda xy^2z^3 = 0\\
\hline
2x^2 - y^2 = 0. \quad (^*)
\end{array}
$$

Por otro lado, tomamos $z(6) - \frac{3y}{2}(5)$:

$$
\begin{array}{r}
2z^2 + 3\lambda xy^2z^3 = 0\\
-3y^2 - 3\lambda xy^2z^3 = 0\\
\hline
2z^2 - 3y^2 = 0. \quad (^{**})
\end{array}
$$

(0.5 pts.)

De $(^*)$ y $(^{**})$ se deduce $y^2 = \frac{2}{3}z^2 = 2x^2$. **(0.5 pts.)** En particular, $x^2 = \frac{z^2}{3}$, e $y^4 = \frac{4}{9}z^4$. Reemplazamos estas expresiones en el cuadrado de (7): $x^2y^4z^6 = 4$, obteniendo

$$
\begin{aligned}
&\frac{z^2}{3}\frac{4}{9}z^4z^6 = 4\\
\Rightarrow\quad & z^{12} = 3^3\\
\Rightarrow\quad & z = |z| = 3^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&x^2 = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} = 3^{-\frac{1}{2}}\\
\Rightarrow\quad & x = |x| = 3^{-\frac{1}{4}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
&y^4 = \frac{4}{9}z^4 = \frac{4}{3^2}(3^{\frac{1}{4}})^4 = \frac{4}{3}\\
\Rightarrow\quad & y = |y| = \frac{\sqrt{2}}{3^{\frac{1}{4}}}.
\end{aligned}
$$

(0.5 pts.)

Se obtiene así el punto crítico $(3^{-\frac{1}{4}}, \sqrt{2}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}})$. Debiendo haber una distancia mínima, se deduce que en este punto se alcanza el mínimo buscado. Luego el punto más cercano es $(3^{-\frac{1}{4}}, \sqrt{2}\cdot 3^{-\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}})$. **(0.5 pts.)**

$\square$

Problema 3.

a) Calcule

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2\,dz\,dx\,dy$$

b) Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{y^3}{6}\mathbf{j}+\dfrac{y^2z}{2}\mathbf{k}$ a través de la superficie

$$P=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=4, x\geq 0\}$$

orientada con normales opuestas al origen.

Sugerencia: El resultado de a) puede ayudar a resolver este inciso.

Solución.

a) Se tiene que

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2\,dz\,dx\,dy=\iiint\limits_{E} y^2\,dxdydz,$$

donde

$$E=\{(x,y,z): -2\leq y\leq 2, 0\leq x\leq\sqrt{4-y^2}, -\sqrt{4-x^2-y^2}\leq z\leq\sqrt{4-x^2-y^2}\};$$

(1 pto.)

Mediante coordenadas esféricas E se transforma en

$$E'=\{(\rho,\theta,\phi): 0\leq\rho\leq 2, -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\phi\leq\pi\},$$

de donde

$$\iiint\limits_{E} y^2\,dxdydz=\int_0^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}(\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)^2\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi d\rho d\theta \qquad \textbf{(1 pto.)}$$

$$=\int_0^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\rho^4\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi d\theta d\rho$$

$$=\int_0^2\rho^4 d\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta d\theta\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi$$

$$=\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{2} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta d\theta\int_0^{\pi}(1-\cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi\,d\phi$$

Tomando $u = \cos\phi$, $du = -\operatorname{sen}\phi\, d\phi$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(2\theta)\, d\theta \int_1^{-1} (1-u^2)(-du) \\
&= \frac{32}{5}\left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 2\int_0^1 (1-u^2)(-du) = \frac{32}{5}\left(\frac{\pi}{2}\right) 2(u - \tfrac{u^3}{3})_0^1 \\
&= \frac{32}{5}\pi(1-\tfrac{1}{3}) = \frac{64}{15}\pi \qquad \textbf{(1 pto.)}
\end{aligned}
$$

b) El flujo es $\iint\limits_P \vec{F}\cdot d\vec{S}$, que puede obtenerse de

$$
\iint\limits_P \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{P\cup T} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint\limits_T \vec{F}\cdot d\vec{S}
$$

siendo T la "tapa"de la semiesfera,

$$
T = \{(x,y,z) : y^2 + z^2 \leq 2, x = 0\},
$$

con las normales hacia atrás (sentido del eje Y negativo). **(1 pto.)** Pero

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{P\cup T} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iiint\limits_E \nabla\cdot\vec{F}\, dxdydz \\
&= \iiint\limits_E \partial_y\left(\tfrac{y^3}{6}\right) + \partial_z\left(\tfrac{zy^2}{2}\right)\, dxdydz \\
&= \iiint\limits_E \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2}\, dxdydz \\
&= \iiint\limits_E y^2 dxdydz = \frac{64}{15}\pi \qquad \textbf{(1 pto.)}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_T \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint\limits_T \vec{F}\cdot(-1,0,0)dS \\
&= \iint\limits_T (0, \frac{y^3}{6}, \frac{zy^2}{2})\cdot(-1,0,0)dS \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Así, el flujo es $\iint\limits_P \vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{64\pi}{15}$. **(1 pto.)**

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 120 minutos.