Regla de la cadena, Plano tangente, Teoremas de función implícita e inversa.

E1 Determine $\frac{dw}{dt}$ si $w = xe^{y/z}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$, de las siguientes dos formas:

a) Reemplazando x, y, z por sus expresiones en t y derivando la función $w = f(t)$ obtenida, y

b) aplicando regla de la cadena en varias variables y expresando la respuesta en términos de t.

Compruebe que se tiene el mismo resultado.

E2 Realice el mismo ejercicio que en **E1** si $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \tan t$.

E3 Calcule los siguientes:

a) $\frac{dz}{dt}$ si $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = e^t$.

b) $\frac{dz}{dt}$ si $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = \ln t$, $y = \cos t$.

c) $\frac{\partial w}{\partial r}$ cuando $r = 1$, $s = -1$, si $w = (x + y + z)^2$, $x = r - s$, $y = \cos(r + s)$, $z = \operatorname{sen}(r + s)$.

d) $\frac{\partial w}{\partial v}$ cuando $u = -1, v = 2$, si $w = xy + \ln z$, $x = \frac{v^2}{u}$, $y = u + v$, $z = \cos u$.

E4 El cambio de variables $x = u + v, y = uv$ transforma $f(x, y)$ en $g(u, v)$. Calcular el valor de $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto en que $u = 1$, $v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

en dicho punto.

E5 Si $z = f(u, v)$, donde $u = xy$, $v = y/x$, y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$x^2 \frac{\partial 2z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2v \frac{\partial z}{\partial v}.$$

E6 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $f(0, 0) = (0, 0)$. Suponga que la matriz jacobiana de f en $\mathbf{p} = (0, 0)$ es

$$Jf(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de f. Obtenga la matriz jacobiana de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y) = \left(3f_1(x, y) + \int_0^{f_2(x,y)} g(t)\, dt, 9f_2(x, y) - 7 \int_{f_1(x,y)}^{3} g(t)\, dt, \int_{2f_1(x,y)}^{4f_2(x,y)} g(t)\, dt \right)$$

en el origen de coordenadas, donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $g(0) = 1$.

E7 Sean $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales definidos como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x,y,z) &= (x^2+y+z)\mathbf{i} + (2x+y+z^2)\mathbf{j} \\ \mathbf{g}(u,v,w) &= uv^2w^2\mathbf{i} + w^2 \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2e^v\mathbf{k}. \end{aligned}$$

a) Calcular cada una de las matrices jacobianas $D\mathbf{f}(x,y,z)$ y $D\mathbf{g}(u,v,w)$.

b) Calcular la función compuesta $\mathbf{h}(u,v,w) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(u,v,w))$.

c) Calcular la matriz jacobiana $D\mathbf{h}(u,0,w)$ de las siguientes dos formas:
   - Directamente del resultado en b).
   - Con la regla de la cadena y los resultados de a).

E8 Una esfera tiene su centro en el punto $(3,4,5)$ y pasa por el origen de coordenadas. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en el origen. Obtenga también el otro plano tangente a la esfera que sea paralelo al plano hallado.

E9 Dos superficies se llaman *ortogonales* en un punto, si sus vectores normales son perpendiculares en ese punto. Demuestre que las superficies $z^2 = x^2+y^2$ y $x^2+y^2+z^2 = r^2$ son ortogonales en cada punto de intersección, y determine tales puntos.

E10 Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $z = x^2+3y^2$ en los puntos de intersección de esta con la recta que resulta de la intersección de los planos $2x-y-z=0$, $x+3y-4z=0$.

E11 Suponga que f es una función diferenciable de una variable. Demuestre que todos los planos tangentes a la superficie $z = xf(y/x)$ se intersectan en un punto común.

E12 Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$, y sea $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $F(P) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(P) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0$ y $\frac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0$.

a) Justifique que se puede tomar $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, ó $z = z(x,y)$ en una vecindad alrededor de P de modo tal que $F(x,y,z) = 0$.

b) Con las notaciones del inciso anterior, demuestre que

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = -1.$$

E13 Considere la función $z = f(x,y)$ definida implícitamente por

$$\operatorname{sen}(xy) + z + \operatorname{sen} z = 0.$$

Calcule las derivadas parciales de segundo orden de la función f.

E14 Considere las expresiones

$$uv - 3x + 2y = 0, u^4 - v^4 = x^2 - y^2.$$

Habiendo verificado que estas definen funciones $u = u(x, y), v = v(x, y)$ en los alrededores del punto $(u, v, x, y) = (1, 1, 1, 1)$, determine las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies $z = u(x, y)$, $z = v(x, y)$ en $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$.

E15 Demuestre que las expresiones

$$3x = u + v + w, \quad x^2 + y^2 = u^2 + v^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3u^3$$

definen funciones implícitas $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z)$ alrededor del punto $| = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Determine las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}$. Demuestre también que tales expresiones definen funciones implícitas $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ alrededor del punto $\mathbf{p}$, y calcule $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$ en $\mathbf{p}$.

E16 Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la expresión $F(x, y) = (x^2, xy^2)$. Demuestre que F posee inversa local alrededor de (inversa local: inversa definida en un abierto) cada punto (x, y) tal que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Calcule la diferencial de la inversa local de F en el punto $F(2, 1)$.

E17

a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas, tal que $f_x(x, y) \neq 0$ para todo (x, y) en un abierto A.

Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (f(x, y), y)$. Demuestre que g posee inversa local alrededor de cada punto de $\mathbb{R}^2$.

b) Bajo las condiciones de a), sea $g^{-1} : V \to U$ una inversa local de g, $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos. Sean $u \in \mathbb{R}, v_1 < v_2$ tales que $(u, v_1), (u, v_2) \in V$, y sean

$$(x_1, y_1) = g^{-1}(u, v_1) \tag{1}$$
$$(x_2, y_2) = g^{-1}(u, v_2) \tag{2}$$

Decida si se cumple o no: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Justifique.

c) De las ecuaciones (1) y (2), deduzca que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Concluya que f no es inyectiva.

E18 Demuestre que la función $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$ tiene inversa local en todo punto, pero no tiene inversa como función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.