DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo III Invierno
Versión B
1 de agosto de 2022

Problema 1. Sea la función $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, dada por $F(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$, donde

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} & ;(x,y)\neq(1,0)\\ 0 & ;(x,y)=(1,0)\end{cases}$$

y

$$f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} & ;(x,y)\neq(1,0)\\ 0 & ;(x,y)=(1,0)\end{cases}.$$

Determine en que puntos, esta función F es continua y diferenciable.

Solución. Primero veamos para los puntos $(x,y)\neq(1,0)$. Si determinamos que las funciones $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ son diferenciables en estos puntos, entonces la función F también es diferenciable en $(x,y)\neq(1,0)$. Y si F es diferenciable, entonces F es continua.

Como $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}=\dfrac{y^3}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ y $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}=\dfrac{(x-1)^3}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ existen y son continuas (por álgebra de funciones continuas), entonces f_1 es diferenciable en todo $(x,y)\neq(1,0)$. Del mismo modo tenemos que $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}=\dfrac{y(y^2-(x-1)^2)}{((x-1)^2+y^2)^2}$ y $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}=\dfrac{(x-1)((x-1)^2-y^2)}{((x-1)^2+y^2)^2}$ existen y son continuas (por álgebra de funciones continuas), entonces f_2 es diferenciable en todo $(x,y)\neq(1,0)$, por lo que F es diferenciable en todo $(x,y)\neq(1,0)$. Y como F es diferenciable en estos puntos , entonces F es continua en todo $(x,y)\neq(1,0)$.

Ahora veamos para el punto $(x,y)=(1,0)$. Si determinamos que si unas de las funciones f_1 o f_2 no son continuas en este punto, entonces tenemos que F no es continua en $(x,y)=(1,0)$. Y si F no es continua en este punto, concluimos que F no es diferenciable en $(x,y)=(1,0)$. Probemos entonces que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{xy-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$$

y que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}=0.$$

Para el primer límite, tenemos que como $|x-1| \leq \sqrt{(x-1)^2+y^2}$ y que $|y| \leq \sqrt{(x-1)^2+y^2}$, entonces $\frac{|xy-y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \frac{|(x-1)y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Por lo que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{|xy-y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 0,$$

y por el teorema del Sándwich, el límite existe e igual a 0, o sea que f_1 es continua en $(x,y)=(1,0)$.

Ahora, para el segundo límite, usamos el camino $C_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1} \frac{x\cdot 0 - 0}{(x-1)^2+0^2} &= \lim_{x\to1}\frac{0}{(x-1)^2}\\ &=0.\end{aligned}$$

Ahora usando el camino $C_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = y+1\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to0} \frac{(y+1)y-y}{(y+1-1)^2+y^2} &= \lim_{y\to0}\frac{y^2}{2y^2}\\ &= \lim_{y\to0}\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dado que para estos dos caminos el límite dio diferente, obtenemos que no existe el límite, o sea que la función no es continua en $(x,y)=(1,0)$, o sea que la función f_2 no es continua en este punto, por lo que F tampoco es continua , entonces F no es diferenciable en $(x,y)=(1,0)$.

□

Problema 2. Sea el problema de optimización

$$\begin{aligned}\min \quad f(x,y) &= x^2+y^2-4x-4y\\ \text{s.t.} \quad x^2 &\leq \alpha y,\\ \alpha x + y &\leq 2,\\ 0 &\leq x,\\ 0 &\leq y\end{aligned} \tag{1}$$

a) Enuncie las condiones de KKT del problema.

b) Encuentre los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ para los cuales $(1,1)$ satisface las condiciones de KKT para el problema anterior.

c) Encuentre los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $(0, 1)$ satisface las condiciones de KKT para el problema anterior.

Solución.

a) planteamos las condiciones de KKT :

- Factibilidad:

$$x^2 \leq \alpha y \tag{2}$$
$$\alpha x + y \leq 2 \tag{3}$$
$$-x \leq 0 \tag{4}$$
$$-y \leq 0 \tag{5}$$

- Optimalidad:

$$2x - 4 + 2\mu_1 x + \alpha\mu_2 - \mu_3 = 0 \tag{6}$$
$$2y - 4 - \alpha\mu_1 + \mu_2 - \mu_4 = 0 \tag{7}$$

- Holgura complementaria:

$$\mu_1(x^2 - \alpha y) = 0 \tag{8}$$
$$\mu_2(\alpha x + y - 2) = 0 \tag{9}$$
$$\mu_3 x = 0 \tag{10}$$
$$\mu_4 y = 0 \tag{11}$$

- Positividad:

$$\mu_1 \geq 0 \tag{12}$$
$$\mu_2 \geq 0 \tag{13}$$
$$\mu_3 \geq 0 \tag{14}$$
$$\mu_4 \geq 0 \tag{15}$$

b) evaluamos el punto $(1, 1)$ en las condiciones

- Factibilidad:

$$1 \leq \alpha \tag{16}$$
$$\alpha + 1 \leq 2 \tag{17}$$
$$-1 \leq 0 \tag{18}$$
$$-1 \leq 0 \tag{19}$$

- Optimalidad:

$$2 - 4 + 2\mu_1 + \alpha\mu_2 - \mu_3 = 0 \tag{20}$$
$$2 - 4 - \alpha\mu_1 + \mu_2 - \mu_4 = 0 \tag{21}$$

- Holgura complementaria:

$$\mu_1(1-\alpha) = 0 \tag{22}$$
$$\mu_2(\alpha 1 + 1 - 2) = 0 \tag{23}$$
$$\mu_3 = 0 \tag{24}$$
$$\mu_4 = 0 \tag{25}$$

- Positividad:

$$\mu_1 \geq 0 \tag{26}$$
$$\mu_2 \geq 0 \tag{27}$$
$$\mu_3 \geq 0 \tag{28}$$
$$\mu_4 \geq 0 \tag{29}$$

así obtenemos el sistema de ecuaciones desde la factibilidad que $\alpha = 1$. Verificamos que se cumplan as condiciones de optimalidad con este valor

$$-2 + 2\mu_1 + \mu_2 = 0 \tag{30}$$
$$-2 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \tag{31}$$

así obtenemos $\mu_1 = 0; \mu_2 = 2$, con lo cual se satisfacen las condiciones de KKT.

c) evaluamos el punto $(0, 1)$ en las condiciones

- Factibilidad:

$$0 \leq \alpha \tag{32}$$
$$\alpha + 1 \leq 2 \tag{33}$$
$$-0 \leq 0 \tag{34}$$
$$-1 \leq 0 \tag{35}$$

- Optimalidad:

$$-4 + \alpha - \mu_3 = 0 \tag{36}$$
$$2 - 4 - \alpha\mu_1 + \mu_2 - \mu_4 = 0 \tag{37}$$

- Holgura complementaria:

$$\mu_1(-\alpha) = 0 \tag{38}$$
$$\mu_2(1-2) = 0 \tag{39}$$
$$\mu_3 0 = 0 \tag{40}$$
$$\mu_4 = 0 \tag{41}$$

- Positividad:

$$\mu_1 \geq 0 \tag{42}$$
$$\mu_2 \geq 0 \tag{43}$$
$$\mu_3 \geq 0 \tag{44}$$
$$\mu_4 \geq 0 \tag{45}$$

así obtenemos el sistema de ecuaciones desde la factibilidad que $0 \leq \alpha \leq 1$. Verificamos que se cumplan as condiciones de optimalidad con este intervalo

$$-4 + \alpha - \mu_3 = 0 \tag{46}$$
$$-2 - \mu_1 = 0 \tag{47}$$

así obtenemos $\mu_1 = -2$ por tanto no existen valores de α con los cuales se satisfacen las condiciones de KKT.

$\square$

Problema 3. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Se define $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$, donde $u(x, y) = x + y; v(x, y) = \operatorname{sen}(x - y)$

(a) Escriba $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2$ en términos de $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$.

(b) Verifique su expresión para la función $f(u, v) = v^2 - u \operatorname{sen}^{-1} v$

Solución.

(a) Derivando

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u}1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cos(x - y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}1 - \frac{\partial f}{\partial v}\cos(x - y)\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\cos(x - y) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \cos^2(x - y) \\
&\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\cos(x - y) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \cos^2(x - y) \\
&= 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \cos^2(x - y)
\end{aligned}$$

(b) reemplazando $f(u, v) = v^2 - u \operatorname{sen}^{-1} v$ en $g(x, y)$ tenemos

$$g(x, y) = \operatorname{sen}^2(x - y) - (x + y)\operatorname{sen}^{-1}\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2(x - y) - (x + y)(x - y)$$

con eso calculamos cada lado de la igualdad obtenida en el ítem anterior, en el lado derecho

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 2\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y) - 2x\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -2\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y) + 2y\end{aligned}$$

así sumando el cuadrado de cada uno obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 &= (2\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y) - 2x)^2 + (-2\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y) + 2y)^2\\ &= 4\operatorname{sen}^2(x-y)\cos^2(x-y) - 8x\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y) + 4x^2 +\\ &\quad + 4\operatorname{sen}^2(x-y)\cos^2(x-y) - 8y\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y) + 4y^2\\ &= 8\operatorname{sen}^2(x-y)\cos^2(x-y) - 8(x+y)\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y) + 4(x^2+y^2)\end{aligned}$$

Calculamos el lado derecho, por partes

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \operatorname{sen}^{-1} v\\ \frac{\partial f}{\partial v} &= 2v - \frac{u}{\sqrt{1-v^2}}\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\cos^2(x-y) &= 2\left(\operatorname{sen}^{-1} v\right)^2 + 2\left(2v - \frac{u}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2\cos^2(x-y)\\ &= 2(x-y)^2 + 2\left(2\operatorname{sen}(x-y) - \frac{x+y}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x-y)}}\right)^2\cos^2(x-y)\\ &= 2(x^2-2xy+y^2) + 8\operatorname{sen}^2(x-y)\cos^2(x-y)\\ &\quad -8(x+y)\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y) + 2x^2 + 4xy + 2y^2\\ &= 4(x^2+y^2) + 8\operatorname{sen}^2(x-y)\cos^2(x-y)\\ &\quad -8(x+y)\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y)\end{aligned}$$

Con lo cual corroboramos la igualdad

$\square$