DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 2 Cálculo III
Forma B
27 de octubre de 2022

Problema 1. Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en dos variables con $x = u^2 + v$ e $y = v + 2u$. Sea $w(u, v, x, y) = uf(x, y)$. use la regla de la cadena para calcular $w_u + w_v$.

Solución.

$$\begin{aligned} w_u &= f(x, y) + u\frac{\partial f}{\partial u}(x, y) \\ &= f(x, y) + u\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2\right) \\ &= f(x, y) + 2u^2\frac{\partial f}{\partial x} + 2u\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_v &= u\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) \\ &= u\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1\right) \\ &= u\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Luego $w_u + w_v = f(x, y) + (2u^2 + u)\frac{\partial f}{\partial x} + 3u\frac{\partial f}{\partial y}$.

$\square$

Problema 2. ¿En cuáles puntos la recta normal a través del punto $(-1, 1, 2)$ en el elipsoide $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 13$ intersecta la superficie $z^2 = x^2 + y^2 + 11$?

Solución. Si $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 13$, entonces $\nabla f(x, y, z) = (4x, 6y, 4z)$ y el vector normal al elipsoide es $\nabla f(-1, 1, 2) = (-4, 6, 8)$, paralelo a $(-2, 3, 4)$. Las ecuaciones paramétricas de la recta normal son

$$\begin{aligned} x &= -1 - 2t, \\ y &= 1 + 3t, \\ z &= 2 + 4t. \end{aligned}$$

Esta recta intersecta la superficie para los valores de t tales que

$$\begin{aligned} (2 + 4t)^2 &= (-1 - 2t)^2 + (1 + 3t)^2 + 11 \\ 4 + 16t + 16t^2 &= 1 + 4t + 4t^2 + 1 + 6t + 9t^2 + 11 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4+16t+16t^2 &= 13t^2+10t+13\\
3t^2+6t-9 &= 0\\
t^2+2t-3 &= 0\\
(t+3)(t-1) &= 0,
\end{aligned}
$$

luego $t=-3$ ó $t=1$, de donde los puntos son$(x,y,z)=(5,-8,-10)$, $(x,y,z)=(-3,4,6)$.

$\square$

Problema 3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
u =& \frac{x}{2}(e^y+e^{-y})\\
v =& \frac{x}{2}(e^y-e^{-y}).
\end{aligned}
$$

a) Si queremos expresar (x,y) como una función diferenciable en términos de (u,v) entorno al punto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, ¿que condiciones deben cumplir a y b?

b) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}(a,b)$.

Solución.

a) Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, dada por $F(x,y)=(\frac{x}{2}(e^y+e^{-y}),\frac{x}{2}(e^y-e^{-y}))$.
Como

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{e^y+e^{-y}}{2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x(e^y-e^{-y})}{2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{e^y-e^{-y}}{2}\quad \text{y}\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x(e^y+e^{-y})}{2}
$$

existen y además son continuas, entonces F es de clase C^1 , en particular cerca del punto (a,b).
Ahora calculemos la matriz jacobiana de la función F, o sea:

$$
DF(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^y+e^{-y}) & \frac{x}{2}(e^y-e^{-y})\\ \frac{1}{2}(e^y-e^{-y}) & \frac{x}{2}(e^y+e^{-y})\end{bmatrix},
$$

entonces el jacobiano es

$$
\begin{aligned}
\det(DF(x,y)) &= \frac{x}{4}((e^y+e^{-y})^2-(e^y-e^{-y})^2)\\
&= \frac{x}{4}(e^{2y}+2+e^{-2y}-(e^{2y}-2+e^{-2y}))\\
&= \frac{x}{4}(4)=x.
\end{aligned}
$$

por lo que $\det(DF(a,b)) = a$.

Para usar el teorema de la función implícita, necesitamos que $\det(DF(a,b)) = a \neq 0$, entonces existe $F^{-1}(u,v) = (x,y)$ y (x,y) puede ser expresada por una función diferenciable en términos de (u,v) .

b) Como $DF^{-1}(F(x,y)) = (DF(x,y))^{-1}$, entonces:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^y+e^{-y}}{2} & \frac{x(e^y-e^{-y})}{2} \\ \frac{(e^y-e^{-y})}{2} & \frac{x(e^y+e^{-y})}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{x}\begin{bmatrix} \frac{x(e^y+e^{-y})}{2} & -\frac{x(e^y-e^{-y})}{2} \\ -\frac{e^y-e^{-y}}{2} & \frac{e^y+e^{-y}}{2} \end{bmatrix},$$

entonces

$$\frac{\partial x}{\partial u}(x,y) = \frac{x(e^y+e^{-y})}{2x} = \frac{e^y+e^{-y}}{2},$$

por lo que

$$\frac{\partial x}{\partial u}(a,b) = \frac{e^b+e^{-b}}{2}.$$

□

Tiempo: 90 minutos.

Justifique todas sus respuestas.