Integración Múltiple y Aplicaciones

Nota: respuestas a problemas impares al final.

E1 Evalúe $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{ye^{x^2}}{x^3}\,dx\,dy$, invirtiendo el orden de integración.

E2 Encuentre el volumen de la región limitada superiormente por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, inferiormente por el plano xy, y que está *fuera* del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

E3 Encuentre el volumen del sólido T que está bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre el triángulo R en el plano xy con vértices en $(0,0,0), (1,1,0)$ y $(2,0,0)$.

E4 Encuentre el área de la región del primer cuadrante acotada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 4y^2$.

E5 Evalúe $\displaystyle\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$, invirtiendo el orden de integración.

E6 Encuentre el volumen de la región acotada por los cilindros parabólicos $z = x^2$, $z = 2 - x^2$ y los planos $y = 0, y + z = 4$.

E7 Determine el volumen limitado por el paraboloide $y = x^2 + 3z^2$ y el cilindro parabólico $y = 4 - z^2$.

E8 Evalue la integral $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 e^{\text{máx}\{x^2,y^2\}}\,dy\,dx$.

E9 Sea R la región elíptica rotada, acotada por la gráfica de $x^2 + xy + y^2 = 3$. Sea $x = u + v$, $y = u - v$. Demuestre que

$$\iint\limits_R e^{-x^2-xy-y^2}\,dx\,dy = 2\iint\limits_S e^{-3u^2-v^2}\,du\,dv.$$

Después, sustituya $u = r\cos\theta, v = \sqrt{3}(r\,\text{sen}\,\theta)$ para evaluar la última integral.

E10 Encuentre el centroide de la región del ejercicio **E4** (recuerde: *centroide* es el centro de masa de una lámina o sólido, cuando su densidad es constante).

E11 Calcule el momento de inercia alrededor del eje x del elipsoide sólido homogéneo con densidad unitaria, y superficie de frontera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

E12 Encuentre el momento de inercia alrededor del eje z de la región homogénea con densidad unitaria que se encuentra tanto dentro de la esfera $\rho = 2$, como dentro del cilindro $r = 2\cos\theta$.

E13 En este ejercicio, el objetivo es calcular

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dy\, dx.$$

Para este fin proceda como sigue:

I) Considere $N > 0$, y descomponga la integral interior (respecto a dy) en suma de integral de 0 a N con integral de N a ∞.

II) Luego, escriba la integral *exterior* (respecto a dx) como $\lim\limits_{N\to\infty} \displaystyle\int_0^N f(x)\, dx$.

III) Descomponga la integral completa obtenida como suma de dos integrales dobles, una en región acotada, y otra en región no acotada.

IV) En la integral de región acotada, cambie el orden de integración y calcule la integral.

V) En la integral impropia de región no acotada, obtenga una integral impropia mayor que sea convergente.

VI) Concluya el ejercicio calculando el límite cuando $N \to \infty$.

E14 a) Calcule $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \displaystyle\int_\epsilon^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\, dy.$

b) Calcule $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \displaystyle\int_\epsilon^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy\, dx.$

c) ¿Contradicen los resultados anteriores el Teorema de Fubini? Justifique su respuesta.

RESPUESTAS A IMPARES:

1. $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$.

3. $\dfrac{4}{3}$

5. $2 \operatorname{sen} 4$.

7. 4π.

9. $2\pi\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

11. $\frac{4\pi}{15} abc(b^2 + c^2)$.

13. 1