UNIDAD II. LENGUAJES INDEPENDIENTES DEL CONTEXTO

1. GRAMÁTICAS INDEPENDIENTES DEL CONTEXTO (GIC)

$G = (N, \Sigma, P, S)$

$P \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^*$

$A \to \alpha \qquad A \in N$
$\qquad\qquad \alpha \in (N \cup \Sigma)^*$

1.1. SIMPLIFICACIÓN

1.1.1. ELIMINACIÓN DE PRODUCCIONES ε

Producciones ε
$A \to \varepsilon \qquad A \in N$

Anulables
$$N\varepsilon = \left\{ A \in N \,/\, A \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon \right\}$$

Algoritmo:
$NA = \varnothing$
$N\varepsilon = \{A \in N \,/\, A \to \varepsilon \in P\}$
Mientras $NA \neq N\varepsilon$ hacer
    $NA = N\varepsilon$
    $N\varepsilon = NA \cup \{A \in N \,/\, A \to \alpha \in P\ ,\ \alpha \in NA^+\}$
Fin Mientras

Observación:
$S \in N\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \in L(G)$

$G = (N, \Sigma, P, S) \qquad \Rightarrow \qquad G' = (N, \Sigma, P', S)$

$A \to X_1X_2X_3 \cdots X_i \cdots X_n \in P \quad X_i \notin N\varepsilon \quad \Rightarrow \quad A \to X_1X_2X_3 \cdots X_i \cdots X_n \in P'$

$$A \to X_1X_2X_3 \cdots X_i \cdots X_n \in P \quad X_i \in N\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} A \to X_1X_2X_3 \cdots X_i \cdots X_n \\ A \to X_1X_2X_3 \cdots X_{i-1}X_{i+1} \cdots X_n \end{array}\right\} \in P'$$

$L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$

Ejemplo:
G = ({S, A}, {a, b}, P, S)
P = {
$S \rightarrow aAb$
$A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$
}

Ejercicio 1:
G = ({S, A, B}, {a, b}, P, S)
P = {
$S \rightarrow AB$
$A \rightarrow aAA \mid \varepsilon$
$B \rightarrow bBB \mid \varepsilon$
}

Ejercicio 2:
G = ({S, X, Y}, {a, b}, P, S)
P = {
$S \rightarrow aXbS \mid bYaS \mid \varepsilon$
$X \rightarrow aXbX \mid \varepsilon$
$Y \rightarrow bYaY \mid \varepsilon$
}

Ejercicio 3:
G = ({S, P, Q}, {x, y, z}, P, S)
P = {
$S \rightarrow zPzQz$
$P \rightarrow xPx \mid Q$
$Q \rightarrow yPy \mid \varepsilon$
}

1.1.2. ELIMINACIÓN DE PRODUCCIONES UNITARIAS

Producciones unitarias

$A \rightarrow B \qquad A, B \in N$

$$G = (N, \Sigma, P, S) \quad \Rightarrow \quad G' = (N, \Sigma, P', S)$$

$$\left.\begin{matrix} A \rightarrow B \\ B \rightarrow \alpha \end{matrix}\right\} \in P \qquad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} A \rightarrow \alpha \\ B \rightarrow \alpha \end{matrix}\right\} \in P'$$

$$U(A) = \left\{ B \in N \;/\; A \overset{*}{\Rightarrow} B \right\} \qquad \forall A \in N$$

Algoritmo:
P’ = $\emptyset$
$\forall$ A $\in$ N
 $\forall$ B $\in$ U(A)
  $\forall$ B $\rightarrow \alpha \in$ P
   Si $\alpha \notin$ N entonces
    P’ = P’ $\cup$ {A $\rightarrow \alpha$}
   Fin Si

Ejemplo:
G = ({S, T}, {0, 1}, P, S)
P = {
 S $\rightarrow$ 0S | S1 | T
 T $\rightarrow$ 01 | 0T
}

1.1.3. ELIMINACIÓN DE SÍMBOLOS INÚTILES

Símbolo útil

$$S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha X \beta \overset{*}{\Rightarrow} \omega \qquad \begin{array}{c} \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^* \\ X \in (N \cup \Sigma) \\ \omega \in \Sigma^* \end{array}$$

a) $G = (N, \Sigma, P, S)$ $\quad L(G) \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad G' = (N', \Sigma, P', S)$

$$A \overset{*}{\Rightarrow} \omega \qquad \begin{array}{c} A \in N \\ \omega \in \Sigma^* \end{array}$$

Algoritmo:
$NA = \varnothing$
$N' = \{A \in N \mid A \rightarrow \omega \in P,\ \omega \in \Sigma^*\}$
Mientras $NA \neq N'$ hacer
  $NA = N'$
  $N' = NA \cup \{A \in N \mid A \rightarrow \alpha \in P,\ \alpha \in (\Sigma \cup NA)^*\}$
Fin Mientras
$P' = \{A \rightarrow \alpha \in P \mid A \in N',\ \alpha \in (N' \cup \Sigma)^*\}$

Ejemplo:
$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$
$P = \{$
  $S \rightarrow aAAA$
  $A \rightarrow aAb \mid aC$
  $B \rightarrow BD \mid Ac$
  $C \rightarrow b$
$\}$

b) $G = (N, \Sigma, P, S) \Rightarrow G' = (N', \Sigma', P', S)$

$S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha X \beta \qquad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$
$\qquad X \in (N \cup \Sigma)$

Algoritmo:
$NA = \varnothing$
$N' = \{S\}$
$\Sigma' = \varnothing$
Mientras $NA \neq N'$ hacer
$\qquad NA = N'$
$\qquad N' = NA \cup \{B \in N \ / \ A \rightarrow \alpha B \beta \in P, A \in NA, \alpha,\beta \in (N \cup \Sigma)^*\}$
$\qquad \Sigma' = \Sigma' \cup \{\sigma \in \Sigma \ / \ A \rightarrow \alpha \sigma \beta \in P, A \in NA, \alpha,\beta \in (N \cup \Sigma)^*\}$
Fin Mientras
$P' = \{A \rightarrow \alpha \in P \ / \ A \in N', \alpha \in (N' \cup \Sigma')^*\}$

Ejemplo:
$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$
$P = \{$
$\quad S \rightarrow aAAA$
$\quad A \rightarrow aAb \mid aC$
$\quad B \rightarrow BD \mid Ac$
$\quad C \rightarrow b$
$\}$

1.2. FORMA NORMAL DE CHOMSKY

G = (N, Σ, P, S)

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow BC \\ A \rightarrow \sigma \end{array}\right\} \in P \qquad \begin{array}{c} A, B, C \in N \\ \sigma \in \Sigma \end{array}$$

a) Simplificar

b) $G = (N, \Sigma, P, S) \quad \Rightarrow \quad G' = (N', \Sigma, P', S)$

$$A \rightarrow X_1X_2X_3 \cdots X_i \cdots X_n \in P \quad X_i = \sigma \quad n \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} A \rightarrow X_1X_2X_3 \cdots C_\sigma \cdots X_n \\ C_\sigma \rightarrow \sigma \end{array}\right\} \in P'$$

$$N' = N \cup \{C_\sigma\}$$

c) $G = (N, \Sigma, P, S) \quad \Rightarrow \quad G' = (N', \Sigma, P', S)$

$$A \rightarrow B_1B_2B_3 \cdots B_n \in P \quad n \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} A \rightarrow B_1D_1 \\ D_1 \rightarrow B_2D_2 \\ D_2 \rightarrow B_3D_3 \\ D_3 \rightarrow B_4D_4 \\ \cdots \\ D_{n-3} \rightarrow B_{n-2}D_{n-2} \\ D_{n-2} \rightarrow B_{n-1}B_n \end{array}\right\} \in P'$$

$$N' = N \cup \{D_1, D_2, D_3, \cdots, D_{n-2}\}$$

Ejemplo:
G = ({S, A, B}, {0, 1}, P, S)
P = {
S → BA
A → 01AB0 | 0
B → 1
}

Ejercicio:
G = ({S, A, B}, {a, b}, P, S)
P = {
S → bA | aB
A → bAA | aS | a
B → aBB | bS | b
}

1.3. OPERACIONES

1.3.1. UNIÓN

$$\begin{matrix} G_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1) \\ G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2) \end{matrix} \quad N_1 \cap N_2 = \emptyset \Rightarrow G = (N, \Sigma, P, S) \quad S \notin (N_1 \cup N_2)$$

$$\text{donde} \begin{cases} N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\} \\ \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \\ P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\} \end{cases}$$

$L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$

Ejemplo:
$L(G) = \{a^ib^j \ / \ i \neq j\} = \{a^ib^j \ / \ i > j \vee i < j\} = \{a^ib^j \ / \ i > j\} \cup \{a^ib^j \ / \ i < j\}$

$L(G_1) = \{a^ib^j \ / \ i > j\}$
$L(G_2) = \{a^ib^j \ / \ i < j\}$

$G_1 = (\{A\}, \{a, b\}, \{A \to aA \mid aAb \mid a\}, A)$
$G_2 = (\{B\}, \{a, b\}, \{B \to Bb \mid aBb \mid b\}, B)$

1.3.2. CONCATENACIÓN

$$\begin{matrix} G_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1) \\ G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2) \end{matrix} \quad N_1 \cap N_2 = \emptyset \Rightarrow G = (N, \Sigma, P, S) \quad S \notin (N_1 \cup N_2)$$

$$\text{donde} \begin{cases} N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\} \\ \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \\ P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1S_2\} \end{cases}$$

$L(G) = L(G_1)L(G_2)$

Ejemplo:
$L(G) = \{a^ib^jc^k \ / \ i, j, k \geq 0 \wedge j = i + k\} = \{a^ib^ib^kc^k \ / \ i, k \geq 0\} = \{a^ib^i \ / \ i \geq 0\} \ \{b^kc^k \ / \ k \geq 0\}$

$L(G_1) = \{a^ib^i \ / \ i \geq 0\}$
$L(G_2) = \{b^kc^k \ / \ k \geq 0\}$

$G_1 = (\{X\}, \{a, b\}, \{X \to aXb \mid \varepsilon\}, X)$
$G_2 = (\{Y\}, \{b, c\}, \{Y \to bYc \mid \varepsilon\}, Y)$

1.3.3. CLAUSURA

$G = (N, \Sigma, P, S) \Rightarrow G' = (N', \Sigma, P', S')$ donde $\begin{cases} N' = N \cup \{S'\} \\ P' = P \cup \{S' \to SS' \mid \varepsilon\} \end{cases}$

$L(G') = L(G)^*$

1.3.4. CLAUSURA POSITIVA

$G = (N, \Sigma, P, S) \Rightarrow G' = (N', \Sigma, P', S')$ donde $\begin{cases} N' = N \cup \{S'\} \\ P' = P \cup \{S' \to SS' \mid S\} \end{cases}$

$L(G') = L(G)^+$

1.3.5. TRANSPOSICIÓN

$G = (N, \Sigma, P, S) \Rightarrow G' = (N, \Sigma, P', S)$ donde $P' = \{A \to \alpha^R \,/\, A \to \alpha \in P\}$

$L(G') = L(G)^R$

Ejemplo:
$G = (\{S\}, \{+, \times, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{S \to +SS \mid \times SS \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9\}, S)$

2. AUTÓMATAS APILADORES (AA)

$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

Q : conjunto finito de estados
Σ : alfabeto de entrada
Γ : alfabeto de la pila
δ : función de transición
$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$
q_0 : estado inicial
$q_0 \in Q$
Z_0 : símbolo inicial de la pila
$Z_0 \in \Gamma$
F : conjunto de estados finales o de aceptación
$F \subseteq Q$

Movimientos

$(q, \alpha) \in \delta(p, a, Z) \Rightarrow (p, a\omega, Z\beta) \vdash (q, \omega, \alpha\beta)$

$p, q \in Q$
$a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$
$\omega \in \Sigma^*$
$Z \in \Gamma$
$\alpha, \beta \in \Gamma^*$

$\vdash$ movimiento en un paso
$\overset{i}{\vdash}$ movimiento en i pasos
$\overset{*}{\vdash}$ movimiento en cero o más pasos
$\overset{+}{\vdash}$ movimiento en uno o más pasos

2.1. LENGUAJE ACEPTADO MEDIANTE ESTADO FINAL (L(A))

$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F) \qquad F \neq \varnothing$

$L(A) = \{\omega \in \Sigma^* \ / \ (q_0, \omega, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon, \gamma) \ , \ q \in F \wedge \gamma \in \Gamma^*\}$

Ejemplo 1:
$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$
$\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$
$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$
$\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$
$\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$
$\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$
$\delta(q_0, c, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$
$\delta(q_0, c, 0) = \{(q_1, 0)\}$
$\delta(q_0, c, 1) = \{(q_1, 1)\}$
$\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

$L(A) = \{\omega c \omega^R \ / \ \omega \in \{0, 1\}^*\}$

Ejemplo 2:
$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$
$\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$
$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$
$\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$
$\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$
$\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$
$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$
$\delta(q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_1, 0)\}$
$\delta(q_0, \varepsilon, 1) = \{(q_1, 1)\}$
$\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

$L(A) = \{\omega\omega^R / \omega \in \{0, 1\}^*\}$

$\omega = 1111$

2.2. LENGUAJE ACEPTADO MEDIANTE AGOTAMIENTO DE PILA (N(A))

$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \varnothing)$

$N(A) = \{\omega \in \Sigma^* \mid (q_0, \omega, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon) , q \in Q\}$

Ejemplo 1:
$A = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \varnothing)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$
$\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$
$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$
$\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$
$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$
$\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$
$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\}$
$\delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$
$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\}$
$\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$N(A) = \{\omega c \omega^R \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$

Ejemplo 2:
$A = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \varnothing)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$
$\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$
$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB), (q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$
$\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$
$\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG), (q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$N(A) = \{\omega\omega^R / \omega \in \{0, 1\}^*\}$

$\omega = 001100$

2.3. AUTÓMATAS APILADORES DETERMINISTAS (AAD)

$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$

1. $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset \Rightarrow \delta(q, \sigma, Z) = \emptyset$ $\quad \forall\, q \in Q\, ,\, \sigma \in \Sigma\, ,\, Z \in \Gamma$
2. $\#\, \delta(q, a, Z) \leq 1$ $\quad \forall\, q \in Q\, ,\, a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})\, ,\, Z \in \Gamma$

Ejemplo:
$A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{A, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_0\})$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, AZ_0)\}$
$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_1, BZ_0)\}$
$\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$
$\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$
$\delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$

$L(A) = \{\omega \in \{a, b\}^* \,/\, |\omega|_a = |\omega|_b\}$

2.4. AUTÓMATAS APILADORES NO DETERMINISTAS (AAN)

Ejemplo 1:
$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{A, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, AZ_0)\}$
$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_1, BZ_0)\}$
$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$
$\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$
$\delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$

$N(A) = \{\omega \in \{a, b\}^* \,/\, |\omega|_a = |\omega|_b\}$

Ejemplo 2:
$A = (\{q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{A, B, Z\}, \delta, q_1, Z, \{q_2\})$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$
$\delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$
$\delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$
$\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$
$\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$

$L(A) = \{\omega \in \{a, b\}^* \,/\, |\omega|_a = |\omega|_b\}$

$\omega = abba$

2.5. EQUIVALENCIAS

$A = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{a, z\}, \delta, q_1, z, \{q_3\})$

$\delta(q_1, a, z) = \{(q_1, az)\}$
$\delta(q_1, b, z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, a, a) = \{(q_3, a)\}$

$L(A) = \{aa\}$
$N(A) = \{b\}$

2.5.1. L(A) ⇒ N(A')

$$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F) \quad \Rightarrow \quad A' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0, \emptyset)$$

$$\text{donde} \begin{cases} Q' = Q \cup \{q_0', q_e\} \\ \Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\} \\ \delta' : \begin{cases} \delta'(q_0', \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\} & \\ \delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z) & \forall q \in (Q - F), a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}), Z \in \Gamma \\ \delta'(q, \sigma, Z) = \delta(q, \sigma, Z) & \forall q \in F, \sigma \in \Sigma, Z \in \Gamma \\ \delta'(q, \varepsilon, Z) = \delta(q, \varepsilon, Z) \cup \{(q_e, \varepsilon)\} & \forall q \in F, Z \in \Gamma \\ \delta'(q, \varepsilon, X_0) = \{(q_e, \varepsilon)\} & \forall q \in F \\ \delta'(q_e, \varepsilon, Z) = \{(q_e, \varepsilon)\} & \forall Z \in \Gamma' \end{cases} \end{cases}$$

2.5.2. N(A) ⇒ L(A')

$$A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset) \quad \Rightarrow \quad A' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0, F')$$

$$\text{donde} \begin{cases} Q' = Q \cup \{q_0', q_f\} \\ \Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\} \\ \delta' : \begin{cases} \delta'(q_0', \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\} & \\ \delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z) & \forall q \in Q, a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}), Z \in \Gamma \\ \delta'(q, \varepsilon, X_0) = \{(q_f, \varepsilon)\} & \forall q \in Q \end{cases} \\ F' = \{q_f\} \end{cases}$$

3. EQUIVALENCIAS

3.1. GIC $\Rightarrow$ AA

$$
\begin{array}{lcl}
\textbf{GIC} & & \textbf{AA} \\
G = (N, \Sigma, P, S) & \Rightarrow & A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)
\end{array}
$$

$$
\text{donde} \begin{cases}
Q = \{q_0\} \\
\Gamma = N \cup \Sigma \\
\delta \begin{cases} \delta(q_0, \varepsilon, A) = \{(q_0, \alpha) \ / \ A \rightarrow \alpha \in P\} & \forall A \in N \\ \delta(q_0, \sigma, \sigma) = \{(q_0, \varepsilon)\} & \forall \sigma \in \Sigma \end{cases} \\
Z_0 = S
\end{cases}
$$

4.5. Recursividad por la izquierda

G = (N, Σ, P, S)

$$A \overset{+}{\Rightarrow} A\alpha \qquad A \in N$$
$$\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$$

4.5.1. Eliminación de la recursividad por la izquierda

G = (N, Σ, P, S) ⇒ G' = (N', Σ, P', S)

$$A \to A\alpha \mid \beta \in P \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A \to \beta A' \\ A' \to \alpha A' \mid \varepsilon \end{array}\right\} \in P'$$

$$A \to A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid A\alpha_3 \mid \ldots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \beta_3 \mid \ldots \mid \beta_n \in P \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A \to \beta_1 A' \mid \beta_2 A' \mid \beta_3 A' \mid \ldots \mid \beta_n A' \\ A' \to \alpha_1 A' \mid \alpha_2 A' \mid \alpha_3 A' \mid \ldots \mid \alpha_m A' \mid \varepsilon \end{array}\right\} \in P'$$

N' = N ∪ {A'}

Ejemplo:
G = ({E, T, F}, {+, *, (,), i}, P, E)
P = {
E → E + T | T
T → T * F | F
F → (E) | i
}

4.7. Primero

G = (N, Σ, P, S)

$$P(\alpha) = \{\sigma \in \Sigma / \alpha \overset{*}{\Rightarrow} \sigma\beta \quad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*\}$$

- $P(\varepsilon) = \varnothing$
- $P(\sigma\alpha) = \{\sigma\}$ $\quad \sigma \in \Sigma$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$
- $A \to \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \alpha_3 \mid \ldots \mid \alpha_n \in P \Rightarrow P(A) = P(\alpha_1) \cup P(\alpha_2) \cup P(\alpha_3) \cup \ldots \cup P(\alpha_n)$ $\quad A \in N$
- $\alpha = X_1\, X_2\, X_3 \ldots X_n$

  Algoritmo:
  $P(\alpha) = P(X_1)$
  i = 1
  Mientras $X_i \in N_\varepsilon$
  {
  $P(\alpha) = P(\alpha) \cup P(X_{i+1})$
  i = i + 1
  }

P(S) = AaAb

P(S) = P(A) ∪ P(aAb)

P(S) = P(ε) ∪ P(aAb)

= ∅ ∪ P(aAb)

= {a}

Ejemplo:
G = ({E, E', T, T', F}, {+, *, (,), i}, P, E)
P = {
E → TE'
E' → + TE' | ε
T → FT'
T' → * FT' | ε
F → (E) | i
}

4.8. Siguiente

G = (N, Σ, P, S)

$$S(A) = \{\sigma \in \Sigma \,/\, S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A \sigma \beta \quad A \in N \quad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*\}$$

- $S(S) = \{\$\}$
- $A \to \alpha B \beta \Rightarrow S(B) = P(\beta) \quad A, B \in N \quad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$
- $A \to \alpha B \Rightarrow S(B) = S(A) \quad A, B \in N \quad \alpha \in (N \cup \Sigma)^*$
- $A \to \alpha B \beta \quad \beta \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon \Rightarrow S(B) = P(\beta) \cup S(A) \quad A, B \in N \quad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$

Ejemplo:
G = ({E, E’, T, T’, F}, {+, *, (,), i}, P, E)
P = {
E → TE’
E’ → + TE’ | ε
T → FT’
T’ → * FT’ | ε
F → (E) | i
}

4.9.2. Tabla del analizador sintáctico LL(1)

G = (N, Σ, P, S)

Algoritmo:

$\forall\ A \rightarrow \alpha \in P$

{

  $\forall\ \sigma \in P(\alpha)$

    $M[A, \sigma] = A \rightarrow \alpha$

  Si $A \in N_\varepsilon$ entonces

    $\forall\ \sigma \in S(A)$

      $M[A, \sigma] = A \rightarrow \varepsilon$

}

Ejemplo:

G = ({E, E’, T, T’, F}, {+, *, (,), i}, P, E)

P = {

  $E \rightarrow TE'$

  $E' \rightarrow +\ TE' \mid \varepsilon$

  $T \rightarrow FT'$

  $T' \rightarrow *\ FT' \mid \varepsilon$

  $F \rightarrow (\ E\ ) \mid i$

  }

$\omega = i + i * i$

Ejercicio:

G’’ = ({P, P’, E}, {i, t, e, a, b}, P’’, P)

P’’ = {

  $P \rightarrow iEtPP' \mid a$

  $P' \rightarrow \varepsilon \mid eP$

  $E \rightarrow b$

  }

4.9.3. Recuperación de errores en el analizador sintáctico LL(1)

$G = (N, \Sigma, P, S)$

$M[A, \sigma] = \text{sinc} \qquad \forall\, A \in N,\ A \notin N_\varepsilon,\ \sigma \in S(A)$

Ejemplo:
$G = (\{E, E', T, T', F\}, \{+, *, (,), i\}, P, E)$
$P = \{$
$E \rightarrow TE'$
$E' \rightarrow +\,TE' \mid \varepsilon$
$T \rightarrow FT'$
$T' \rightarrow *\,FT' \mid \varepsilon$
$F \rightarrow (\,E\,) \mid i$
$\}$

$M[A, \sigma] = \text{“ ”} \Rightarrow \text{saltar } \sigma \qquad A \in N,\ \sigma \in \Sigma$
$M[A, \sigma] = \text{sinc} \Rightarrow \text{sacar } A \qquad A \in N,\ \sigma \in \Sigma$

Si un componente léxico del tope de la pila no coincide con el símbolo de entrada, entonces se saca el componente léxico de la pila.

Ejemplo:
$\omega = +\, i * +\, i$

4.10. Analizadores sintácticos LR

La L representa la lectura de la entrada de izquierda a derecha, la R representa una derivación por la derecha en orden inverso, y el 1 es por utilizar un símbolo de entrada de anticipación en cada paso para tomar las decisiones de la acción en el análisis sintáctico.

4.10.1. Elemento LR(0)

Un elemento LR(0) de una gramática G es una producción de G con un punto en alguna posición del lado derecho.

Ejemplo:
$G = (N, \Sigma, P, S)$

$A \rightarrow XYZ \in P$

Observación:
$A \rightarrow \varepsilon \Rightarrow A \rightarrow \bullet$

4.10.2. Gramática aumentada

$G = (N, \Sigma, P, S)$

$G' = (N', \Sigma, P', S')$

$N' = N \cup \{S'\}$
$P' = P \cup \{S' \rightarrow S\}$

4.10.3. AFN-ε de elementos LR(0)

$G = (N, \Sigma, P, S)$ aumentada

$A = (Q, N \cup \Sigma, \delta, q_0, Q)$

Q : conjunto de elementos LR(0)

δ :

$\delta(A \rightarrow \alpha \bullet X\beta, X) = \{A \rightarrow \alpha X \bullet \beta \,/\, X \in (N \cup \Sigma)\}$

$\delta(A \rightarrow \alpha \bullet B\beta, \varepsilon) = \{B \rightarrow \bullet \gamma \,/\, B \rightarrow \gamma \in P\}$

q_0 : $S' \rightarrow \bullet S$

Ejemplo:

$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$

$P = \{$

$S \rightarrow SA \mid A$

$A \rightarrow aSb \mid ab$

$\}$

4.10.4. Analizador sintáctico SLR

Clausura

I: conjunto de elementos LR(0).

Algoritmo:
Clausura(I)
{
    J = I
    Repetir
        $\forall\ A \rightarrow \alpha \bullet B\beta \in J$
            $\forall\ B \rightarrow \gamma \in P \ / \ B \rightarrow \bullet\, \gamma \notin J$
                $J = J \cup \{B \rightarrow \bullet\, \gamma\}$
    Hasta que no se puedan agregar más elementos a J.
    Retornar(J)
}

Ir_a

I: conjunto de elementos LR(0).

$\text{Ir\_a}(I, X) = \text{Clausura}(\{A \rightarrow \alpha X \bullet \beta \ / \ A \rightarrow \alpha \bullet X\beta \in I\}) \qquad X \in (N \cup \Sigma)$

Ejemplo:
G = ({S, A}, {a, b}, P, S)
P = {
    $S \rightarrow SA \mid A$
    $A \rightarrow aSb \mid ab$
    }

4.10.4.1. Tabla del analizador sintáctico SLR

a) $A \rightarrow \alpha \bullet \sigma\beta \in I_i \wedge Ir\_a(I_i, \sigma) = I_j \Rightarrow$ Acción$[i, \sigma] = D_j$ $\qquad \sigma \in \Sigma$
b) $A \rightarrow \alpha \bullet \in I_i \Rightarrow$ Acción$[i, \sigma] = R_{A \rightarrow \alpha}$ $\qquad \forall\, \sigma \in S(A)$
c) $S' \rightarrow S \bullet \in I_i \Rightarrow$ Acción$[i, \$] = A$
d) $Ir\_a(I_i, A) = I_j \Rightarrow Ir\_a[i, A] = j$ $\qquad A \in N$

Ejemplo:
G = ({S, A}, {a, b}, P, S)
P = {
S → SA | A
A → aSb | ab
}

ω = aababb

Ejercicio:
G = ({E, T, F}, {+, *, (,), i}, P, E)
P = {
E → E + T | T
T → T * F | F
F → (E) | i
}

ω = i * i + i

"Toda gramática SLR(1) es no ambigua, pero hay muchas gramáticas no ambiguas que no son SLR(1)" (Aho, 1990, p. 235).

Ejemplo:
G = ({S, L, R}, {=, *, i}, P, S)
P = {
S → L = R | R
L → * R | i
R → L
}

4.10.5. Analizador sintáctico LR

Toda gramática SLR(1) es una gramática LR(1), pero para una gramática SLR(1) el analizador sintáctico LR puede tener más estados que el analizador SLR para la misma gramática.

Clausura

I: conjunto de elementos LR(1).

Algoritmo:
Clausura(I)
{
    Repetir
        $\forall$ [A $\rightarrow \alpha \bullet B\beta$, a] $\in$ I
            $\forall$ B $\rightarrow \gamma \in$ P
                $\forall$ b $\in$ P(βa) / [B $\rightarrow \bullet \gamma$, b] $\notin$ I
                    I = I $\cup$ {[B $\rightarrow \bullet \gamma$, b]}
    Hasta que no se puedan agregar más elementos a I.
    Retornar(I)
}

Ir_a

I: conjunto de elementos LR(1).

Ir_a(I, X) = Clausura({[A $\rightarrow \alpha X \bullet \beta$, σ] / [A $\rightarrow \alpha \bullet X\beta$, σ] $\in$ I})   X $\in$ (N $\cup$ Σ)

4.10.5.1. Tabla del analizador sintáctico LR

a) $[A \rightarrow \alpha \bullet a\beta, b] \in I_i \wedge Ir\_a(I_i, a) = I_j \Rightarrow Acción[i, a] = D_j$
b) $[A \rightarrow \alpha \bullet, \sigma] \in I_i \Rightarrow Acción[i, \sigma] = R_{A \rightarrow \alpha}$
c) $[S' \rightarrow S \bullet, \$] \in I_i \Rightarrow Acción[i, \$] = A$
d) $Ir\_a(I_i, A) = I_j \Rightarrow Ir\_a[i, A] = j \qquad A \in N$

Ejemplo:
G = ({S, C}, {c, d}, P, S)
P = {
S $\rightarrow$ CC
C $\rightarrow$ cC | d
}

ω = ccd

Ejercicio:
G = ({A, B}, {a, b}, P, A)
P = {
A $\rightarrow$ BA | ε
B $\rightarrow$ aB | b
}

ω = aabb

4.10.6. Analizador sintáctico LALR

Analizador sintáctico LR

4.10.6.1. Tabla del analizador sintáctico LALR

"Las tablas SLR y LALR para una gramática siempre tienen el mismo número de estados" (Aho, 1990, p. 243).

a) $[A \rightarrow \alpha \bullet a\beta, b] \in I_i \wedge Ir\_a(I_i, a) = I_j \Rightarrow Acción[i, a] = D_j$
b) $[A \rightarrow \alpha \bullet, \sigma] \in I_i \Rightarrow Acción[i, \sigma] = R_{A \rightarrow \alpha}$
c) $[S' \rightarrow S \bullet, \$] \in I_i \Rightarrow Acción[i, \$] = A$
d) $Ir\_a(I_i, A) = I_j \Rightarrow Ir\_a[i, A] = j \qquad A \in N$

Ejemplo:
G = ({S, C}, {c, d}, P, S)
P = {
S → CC
C → cC | d
}

ω = ccd