DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 3 Cálculo III
Versión A
28 de junio de 2022

Problema 1. Considere la lámina:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 4y\right\},$$

cuya densidad es $\rho(x, y) = 4y - y^2$. Encuentre la masa de esta lámina.

Solución. Completando cuadrados tenemos que la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$ **(1 punto)** , la cual es una elipse centrada en $(0, 2)$. Entonces, la masa de la lámina está dada por:

$$M(D) = \iint_D (4y - y^2)dA \ \ \textbf{(1 punto)}$$

y usando el teorema de cambio de variables para esta doble integral, con $\varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), 2+2r\,\mathrm{sen}(\theta))$ **(1 punto)** , para $r \in [0, 1]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ **(0,5 punto)** y Jacobiano, $J = 2r$ **(0,5 puntos)** , tenemos que:

$$\begin{aligned}
M(D) &= \iint_D (4y - y^2)dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4(2 + 2r\,\mathrm{sen}(\theta)) - (2 + 2r\,\mathrm{sen}(\theta))^2)2r\,dr\,d\theta \ \ \textbf{(1 punto)} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (8 + 8r\,\mathrm{sen}(\theta) - 4 - 8r\,\mathrm{sen}(\theta) - 4r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta))2r\,dr\,d\theta \\
&=8\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^3\,\mathrm{sen}^2(\theta))\,dr\,d\theta \\
&=8\int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right)\Big|_0^1 d\theta \\
&=8\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right) d\theta \\
&=8\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{4}\right)\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&=8\left(\pi - \frac{1}{4}(\pi - 0)\right) \\
&=6\pi. \ \ \textbf{(1 punto)}
\end{aligned}$$

□

Problema 2. Considere la hélice parametrizada por la curva $\lambda(t) = (2\cos(2t), 2\,\text{sen}(2t), 4t)$, con $t \in I = [0, 2\pi]$. Dada esta curva $\lambda(t)$,

a) Determine si $\lambda(t)$ puede ser reparametrizada por longitud de arco y encuentre dicha reparametrización.

b) Calcule curvatura y torsión de la curva.

Solución.

a) Observar que $\lambda(t)$ es una curva de clase $\mathcal{C}^1$, con $\lambda(t) \in \mathbb{R}^3$, además se tiene que

$$\lambda'(t) = (-4\,\text{sen}(2t), 4\cos(2t), 4)$$

cuya norma viene dada por $||\lambda'(t)|| = 4\sqrt{2}$, por lo tanto $\lambda(t)$ es una curva regular. (0.8 ptos.)

Para calcular la reparametrización se tiene que encontrar una función $\phi(s)$ sobreyectiva y de clase $\mathcal{C}^1$ con $\phi'(s) \neq 0$, $\forall s \in Dom(\phi)$, tal que

$$s = \phi^{-1}(t) = \int_0^t ||f'(u)||du,$$

donde se tiene que $\phi(s) = \frac{s}{4\sqrt{2}}$. (0.7 ptos.) Esta función está definida

$$\phi : [0, 8\sqrt{2}\pi] \to [0, 2\pi], \quad s \to \frac{s}{4\sqrt{2}},$$

con $\phi(0) = 0$ y $\phi(8\sqrt{2}\pi) = 2\pi$, por lo cual cumple con los requerimientos para ser reparametrización. (0.8 ptos)

Esta reparametrización viene determinada por

$$\lambda(\phi(s)) = \hat{\lambda}(s) = \left(2\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 2\,\text{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{(0.7 ptos.)}$$

b) Se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}'(s) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
\hat{\lambda}''(s) &= \left(-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{4}\,\text{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 0\right)\\
\hat{\lambda}'''(s) &= \left(\frac{1}{8\sqrt{2}}\,\text{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{8\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 0\right).
\end{aligned}$$

Luego $\kappa = \|\hat{\lambda}''(s)\| = \frac{1}{4}$. (1.5 pts)

Por otro lado,

$\hat{\lambda}'(s) \times \hat{\lambda}''(s)$

$$= \left(\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) \\ 0 & -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) \\ -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) & -\frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right) \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{4\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \frac{1}{4\sqrt{2}} \right).$$

De este modo,

$$\begin{aligned} &(\hat{\lambda}'(s) \times \hat{\lambda}''(s)) \cdot \hat{\lambda}'''(s) \\ &= \left(\tfrac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right), -\tfrac{1}{4\sqrt{2}} \cos\left(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right), \tfrac{1}{4\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\tfrac{1}{8\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\tfrac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\tfrac{1}{8\sqrt{2}} \cos\left(\tfrac{s}{2\sqrt{2}}\right), 0 \right) \\ &= \tfrac{1}{64} \operatorname{sen}^2\left(\tfrac{s}{2\sqrt{2}}\right) + \tfrac{1}{64} \cos^2\left(\tfrac{s}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{64}, \end{aligned}$$

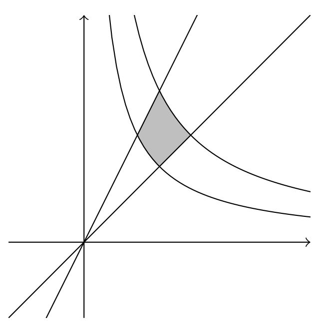
con lo que se obtiene finalmente,

$$\tau = \frac{\frac{1}{64}}{\|\hat{\lambda}''(s)\|^2} = \frac{1/64}{1/16} = \frac{1}{4}. \qquad \text{(1.5 pts)}$$

□

Problema 3. Calcular la integral doble $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+xy} dA$, empleando un cambio de variable adecuado, donde D es la región del plano en el primer cuadrante limitada por los conjuntos descritos por: $y = x, y = 2x, xy = 1$ y $xy = 2$.

Solución.



(0.5 pts)

A partir de la gráfica anterior, se propone el siguiente cambio:

$$\left(\frac{y}{x}, xy\right) = (u, v).$$

Es decir:

$$T^{-1}(x, y) = (u, v)$$

Con este cambio de variable, la región de integración cambia mediante la expresión $D' = T^{-1}(D)$, por lo tanto

$$D' = \{(u, v) | 1 \leq u \leq 2 \ \wedge \ 1 \leq v \leq 2\} \qquad \textbf{(1 pto)}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{bmatrix} = -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = -2\frac{y}{x} = -2u. \qquad \textbf{(1 pto)}$$

$$I = \iint_D \frac{1}{1+xy}dA = \int_1^2\int_1^2 \frac{1}{1+v}\frac{1}{|-2u|}\,dudv = \frac{1}{2}\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{(1+v)u}\,dudv \qquad \textbf{(2.5 pts)}$$

$$I = \int_1^2 \frac{\ln 2}{2(1+v)}\,dv = \frac{1}{2}[\ln(3)\ln(2) - \ln(2)^2].$$

$$\boxed{\iint_D \frac{1}{1+xy}dA = \frac{1}{2}\left[\ln(3)\ln(2) - \ln(2)^2\right]} \qquad \textbf{(1 pto)}$$

$\square$