DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 2 Cálculo III
6 de diciembre de 2022
Versión B

IMPORTANTE: debe resolver cada problema en hojas separadas.

Al final, debe entregar tres (3) hojas, que tengan como mínimo: nombre, código de sección, y número de problema a resolver.

Problema 1. Calcular el volumen del sólido $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ en el primer octante, acotado por

$$\begin{aligned} z &= x^2+y^2, \\ z &= 2(x^2+y^2), \\ xy &= 1, \\ xy &= 4, \\ x &= y, \\ y &= 5x. \end{aligned}$$

Utilice el cambio de variables $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ y $w = \frac{z}{x^2+y^2}$.

Solución. Primero que todo, notemos que el valor absoluto del jacobiano asociado al cambio de variable está dado por

$$|J(x,y,z)| = \left|\det\begin{pmatrix} y & x & 0 \\ -y/x^2 & 1/x & 0 \\ -\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2} & \frac{1}{x^2+y^2} \end{pmatrix}\right| = 2\left|\frac{y}{x}\right|\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Por otro lado, notemos que debido a las restricciónes de la región, el signo de x e y coinciden, por ende:

$$|J(x,y,z)| = 2\frac{y}{x}\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Luego, dado que

$$|J(u,v,w)| = |J(x,y,z)|^{-1} = \frac{x(x^2+y^2)}{2y}$$

Más aún, notemos que $x = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ e $y = \sqrt{uv}$. Por lo tanto,

$$|J(u,v,w)| = \frac{x(x^2+y^2)}{2y} = \frac{u(1+v^2)}{2v^2}.$$

De esta manera, el volumen del sólido corresponde a:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\int_1^2\int_1^5\int_1^4 \frac{u(1+v^2)}{v^2}dudvdw \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 dw\int_1^5 (v^{-2}+1)\,dv\int_1^4 u\,du \\ &= \frac{1}{4}\left[-v^{-1}+v\right]_1^5\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^4 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{24}{5}\right)\cdot 15 = 18. \end{aligned}$$

Rúbrica:

1) Calcular el Jacobiano en las variables u, v, w. (1.5 ptos).
2) Establecer límites de integración de manera adecuada (2ptos).
3) Calcular el volumen del sólido (2.5ptos).

$\square$

Problema 2. Si C es la curva parametrizada por $\sigma(t) = (t, t, t^2)$, $t \geq 0$

a) Determine en que punto de la curva, la curvatura es igual a $\frac{1}{\sqrt{125}}$
b) Encuentre, si existe, el punto de la curva C donde el ángulo del vector velocidad y el vector aceleración es igual a $\frac{\pi}{4}$.
c) Demuestre que la curva es plana y determine la ecuación del plano que contiene a la curva.

Solución.

a) Curvatura $\kappa(t) = \frac{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^3}$

$$\sigma^{'}(t) = (1, 1, 2t), \quad \sigma^{''}(t) = (0, 0, 2), \quad \sigma^{'}(t) \times \sigma^{''}(t) = (2, -2, 0)$$

$\|\sigma'(t)\|^3 = \sqrt{(2+4t^2)^3}$, por lo tanto $\kappa(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(2+4t^2)^3}}$

Como $\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{125}}$, entonces $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(2+4t^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{125}}$

Despejando t :

$\frac{8}{(2+4t^2)^3} = \frac{1}{125}$, o $(2+4t^2)^3 = 125 \cdot 8$, $2 + 4t^2 = 10$, $t = \sqrt{2}$

Por lo tanto el punto es $P = \sigma\left(\sqrt{2}\right) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$

b) $\overrightarrow{v}(t) = \sigma^{'}(t) = (1, 1, 2t)$, $\overrightarrow{a}(t) = \sigma^{''}(t) = (0, 0, 2)$

Si θ es el ángulo entre $\overrightarrow{v}(t)$ y $\overrightarrow{a}(t)$, entonces

$$\cos(\theta) = \frac{\langle(1, 1, 2t), (0, 0, 2)\rangle}{\|(1, 1, 2t)\| \, \|(0, 0, 2)\|} = \frac{4t}{2\sqrt{2+4t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{2+4t^2}}$$

Para $\theta = \frac{\pi}{4}$, tenemos que $\frac{2t}{\sqrt{2+4t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de donde $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto el punto buscado es $P = \sigma\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$

c) La torsión está dada por $\tau(t) = \frac{\left\langle\sigma^{'}(t)\times\sigma^{''}(t), \sigma^{'''}(t)\right\rangle}{\left\|\sigma^{'}(t)\times\sigma^{''}(t)\right\|^2}$

donde $\sigma^{'}(t) \times \sigma^{''}(t) = (2, -2, 0)$, $\sigma^{'''}(t) = (0, 0, 0)$
y por lo tanto $\left\langle\sigma^{'}(t) \times \sigma^{''}(t), \sigma^{'''}(t)\right\rangle = 0$, de donde
$\tau(t) = 0$, para todo t , y por lo tanto la curva es plana.
Como los puntos de la curva son $\sigma(t) = (t, t, t^2) = (x, y, z)$
Se verifica $x = y$, que corresponde al plano que contiene a la curva.

$\square$

Problema 3. Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$, y sea

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{y^2}{2} + y, -x\right).$$

Sin utilizar el teorema de Green, demuestre que el trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre la frontera de Ω, $\partial\Omega$, recorrida con orientación positiva, es igual a $\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

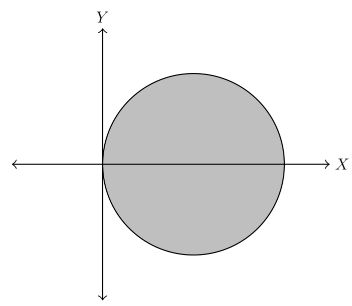
Solución. Se tiene que $\partial_x(-x) - \partial_y(\frac{y^2}{2} + y) = -2 - y$, y que

$$\iint_\Omega -2 - y\,dxdy = -2\iint_\Omega dxdy - \iint_\Omega y\,dxdy.$$

Pero además,

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}\},\end{aligned}$$

(Gráfica de Ω:)



luego

$$\begin{aligned}\iint_\Omega -2 - y\,dxdy &= -2\,\text{Area}(\Omega) - \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} y\,dy\,dx.\\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

Por otro lado, podemos parametrizar $\partial\Omega$ mediante $x(t) = 1 + \cos t, y(t) = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$, para obtener que

$$\begin{aligned}&\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{y^2}{2} + y\right) dx - x\,dy\\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} + \operatorname{sen} t\right)(-\operatorname{sen} t) - (1 + \cos t)\cos t\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{\operatorname{sen}^3 t}{2} - \cos t\,dt - \int_0^{2\pi} dt\\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{(1-\cos^2 t)\operatorname{sen} t}{2} - \cos t\,dt - 2\pi\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right) - \operatorname{sen} t\Big|_0^{2\pi} - 2\pi\\ &= 0 - 2\pi = -2\pi,\end{aligned}$$

lo que demuestra lo pedido

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 90 minutos.