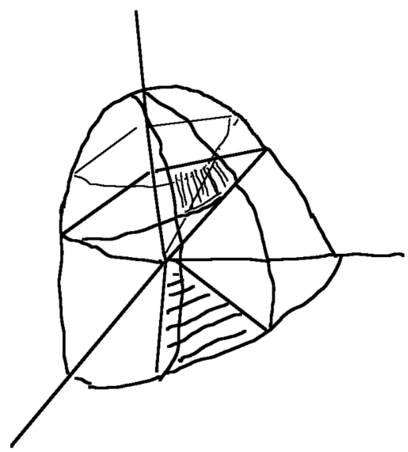
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

Prueba Final Cálculo III forma C
22 de diciembre de 2022

Problema 1. Calcule el volumen en el primer octante, acotado por $y = x, y = \sqrt{3}x, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 3z^2, x^2 + y^2 = z^2$.

Solución.



Transformamos la región a coordenadas esféricas. Se tiene

$$
\begin{aligned}
y = x \quad &\Rightarrow \quad \tan\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} \\
y = \sqrt{3}x \quad &\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}. \\
x^2 + y^2 = 3z^2 \quad &\Rightarrow \quad \phi = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \\
x^2 + y^2 = z^2 \quad &\Rightarrow \quad \phi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 = cz^2 \quad &\Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi = c\rho^2\cos^2\phi \\
&\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{\cos^2\phi} = c \quad \Rightarrow \quad \tan\phi = \sqrt{c}.
\end{aligned}
$$

Luego

$$
V = \iiint_\Omega dxdydz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta
$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{36}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{72}(\sqrt{2} - 1)$$

$\square$

Problema 2. Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por:

$$\vec{F}(x, y) = \left(ax + by^2, cy^2 + dx\right).$$

a) ¿Para que valores de a, b, c y d el campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo?

b) Para los valores encontrados en a), calcule la integral de linea $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde Γ es la circunferencia centrada en $(0, 0)$ y de radio 3.

c) Para $a = 1, b = -1, c = 1$ y $d = -1$, calcule $\displaystyle\int_\mathcal{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\mathcal{C}$ es la curva dada, en sentido antihorario, por el triángulo de vértices $A(0, 2), B(0, -2)$ y $C(2, 0)$.

Solución.

a) Para $\vec{F} = (ax + by^2, cy^2 + dx) = (P(x, y), Q(x, y))$, tenemos que si $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, entonces $\vec{F}$ es conservativo. Como $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2by$ y $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = d$, y para que se cumpla $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, $b = d = 0$.

b) Como $\vec{F}$ es conservativo y la curva Γ es cerrada, entonces $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

c) Como $\vec{F} = (x - y^2, y^2 - x) = (P, Q)$, entonces aplicamos el Teorema de Green, observando que la integral de línea solicitada es la integral sobre la frontera de

$$T := \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, -2 + x \leq y \leq 2 - x\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_\mathcal{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy &= \int_0^2 \int_{-2+x}^{2-x} (-1 + 2y)\, dydx \\
&= \int_0^2 -2(2 - x)\, dx = [-4x + x^2]_0^2 \\
&= -4.
\end{aligned}$$

$\square$

Problema 3. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 4y^2\mathbf{k}$. Si P es el cuadrilátero plano en $\mathbb{R}^3$ cuyos vértices son $(0,0,0), (1,0,0), (1,2,1), (0,2,1)$, entonces se cumple que:

$$\iint_P \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{1}$$

donde la orientación de la integral del lado izquierdo es con normales hacia arriba, y la orientación de la integral del lado derecho es en sentido antihorario visto desde arriba.

Calcule mediante su definición, la integral del lado izquierdo de (1).

Solución. Puesto que $(1,2,1) = (1,0,0) + (0,2,1)$, entonces la trayectoria está en un plano, que es el plano $Ax + By + Cz = 0$ (pues pasa por el origen), donde

$$\begin{aligned}(A,B,C) &= (1,0,0) \times (0,2,1) \\ &= \mathbf{i} \times (2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 2\mathbf{k} - \mathbf{j} \\ &= (0,-1,2).\end{aligned}$$

Esto es, el plano es $-y + 2z = 0 \iff z = \frac{y}{2} := f(x,y)$. Se puede parametrizar mediante las coordenadas cartesianas con parametrización $\mathbf{p}(x,y) = (x, y, \frac{y}{2})$ con $(x,y) \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$. Además,

$$\nabla \times \mathbf{F} = (4, 2z, 2y).$$

y $d\mathbf{S} = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)dxdy = (0, -\frac{1}{2}, 1)dxdy$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\iint_P \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_R (4, 2z, 2y) \cdot (0, -\frac{1}{2}, 1)dxdy \\ &= \iint_R (4, y, 2y) \cdot (0, -\frac{1}{2}, 1)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{3}{2} y \, dydx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 y \, dy = \frac{3}{4} y^2 \Big|_0^2 = \frac{3}{4} 4 = 3.\end{aligned}$$

□

Tiempo: 90 minutos.
Justifique completamente sus respuestas.