DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

Taller 1 Cálculo III
Grupos I y III
25 de septiembre de 2023

Problema 1. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x) - 2x + y}{x^3 + y} & si \quad x^3 \neq -y, \\ \\ 1 & si \quad x^3 = -y. \end{cases}$$

Determine si la función es continua en $(0,0)$.

Solución. Primero que todo, notemos que para que la función sea continua en el punto $(0,0)$ es necesario que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$. Una vez sabemos esto, procedemos a encontrar un camino para el cual el límite nos arroje un valor distinto de 1 y así concluir que la función no puede ser continua en el punto en cuestión.

Si tomamos el camino $C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0,0\} \mid y = 0\}$, podemos ver que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in C_1}} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} f(x,0), \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x}{x^3}. \end{aligned}$$

Dado que tenemos una indefinición del tipo $0/0$, podemos usar l'hopital para encontrar este límite, obteniendo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) - 2}{3x^2}.$$

Dado que esto es nuevamente una indefenición del tipo $0/0$, usando nuevamente l'hopital, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{-4\operatorname{sen}(2x)}{6x}, \\ &= -4/3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema de los caminos podemos asegurar que la función no es continua en $(0,0)$.

Rúbrica:

1) Conocer la definición de límites **(1,5 ptos)**.
2) Comprender y utilizar de manera correcta el teorema de los caminos **(1,5 ptos)**.
3) Reconocer que se puede usar l'hopital y calcular el valor del límite en este camino **(1,5 ptos)**.
4) Concluir de manera correcta **(1,5 ptos)**.

$\square$

Problema 2.

a) **(1.5 puntos)** Demuestre que $|x|+|y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.
Posible idea: elevar al cuadrado (¿Puede hacerlo? Justifique).

b) **(4.5 puntos)** Calcule si existe, o demuestre que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$$

Solución.

a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. entonces

$$\begin{aligned} & 2|x||y| \geq 0 \\ \Rightarrow \quad & x^2+2|x||y|+y^2 \geq x^2+y^2 \\ \Rightarrow \quad & |x|^2+2|x||y|+|y|^2 \geq x^2+y^2 \\ \Rightarrow \quad & (|x|+|y|)^2 \geq x^2+y^2 \\ \Rightarrow \quad & |x|+|y| \geq \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

b) Si consideramos $y=0$ y hacemos tender a x hacia cero, tendremos

$$\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{|x|}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

Con sustitución $u = \frac{1}{|x|}$ se tiene $x \to 0$ si y solo si $u \to \infty$:

$$= \lim_{u\to\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2}.$$

Ahora, vemos si es posible acotar

$$\left|\arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$$

Pero

$$\begin{aligned}\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} &\geq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

puesto que $t \mapsto \arctan t$ es creciente,

$$\begin{aligned}\Rightarrow \qquad & \arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right) \geq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\ \Rightarrow \qquad & \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right) \leq \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{aligned}$$

Ahora, con la sustitución $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\to(0,0) \iff u\to\infty$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) &= \lim_{u\to\infty}\frac{\pi}{2}-\arctan u\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0.\end{aligned}$$

Luego, por teorema de la compresión, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Rúbrica:

1) Demostrar la desigualdad correctamente **(1.5 pts.)**.
2) Conjeturar el valor del límite correctamente **(1.5 pts.)**.
3) Reconocer que $\left|\arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)-\frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ **(1.5 pts.)**.

4) Obtener que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right) = 0$ y concluir el valor del límite **(1.5 pts.)**.

Nota: Se otorgan los puntajes de los ítems 3) y 4) si argumenta que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = \infty$ y que por lo tanto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right) = \frac{\pi}{2}$, si bien los argumentos deben ser correctos.

$\square$

Problema 3.

a) Demuestre que $\max\{0,a\} = \dfrac{|a|+a}{2}$, donde $\max\{x,y\}$ es el número mayor entre x e y, $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 - y^2x & \text{si} \quad x \leq y \\ x^3 - x^2y & \text{si} \quad x > y. \end{cases}$$

Demuestre que

$$\max\{0, y^2(y-x)\} + \max\{0, x^2(x-y)\} = f(x,y) \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

c) Utilice las partes a) y b) para demostrar que la función f del inciso b) es una función continua en $\mathbb{R}^2$.

Solución.

a) ▪ Si $a \geq 0$, entonces $\max\{a,0\} = a$, y

$$\frac{|a|+a}{2} = \frac{a+a}{2} = \frac{2a}{2} = a = \max\{a,0\}.$$

▪ Si $a < 0$, entonces $\max\{a,0\} = 0$ y

$$\frac{|a|+a}{2} = \frac{-a+a}{2} = 0 = \max\{a,0\}.$$

b) ▪ Si $x \leq y$, entonces

$$y - x \geq 0,$$

lo cual, puesto que $y^2 \geq 0$,

$$\Rightarrow \qquad y^2(y-x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \max\{0, y^2(y-x)\} = y^{(}y-x).$$

Además,

$$x - y \leq 0,$$

lo cual, puesto que $x^2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow & x^2(x-y) &\leq 0 \\ &\Rightarrow & \max\{0, x^2(x-y)\} &= 0. \end{aligned}$$

Luego $\max\{0, y^2(y-x)\} + \max\{0, x^2(x-y)\} = y^2(y-x) + 0 = y^3 - y^2x = f(x,y)$ para este caso.

- Si $x > y$, entonces

$$y - x < 0$$

lo cual, puesto que $y^2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow & y^2(y-x) &< 0 \\ &\Rightarrow & \max\{0, y^2(y-x)\} &= 0. \end{aligned}$$

Además,

$$x - y > 0,$$

lo cual, puesto que $x^2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow & x^2(x-y) &< 0 \\ &\Rightarrow & \max\{0, x^2(x-y)\} &= x^2(x-y) = x^3 - x^2y. \end{aligned}$$

De este modo, $\max\{0, y^2(y-x)\} + \max\{0, x^2(x-y)\} = 0 + x^3 - x^2y = x^3 - x^2y = f(x,y)$ para este caso también.

Por lo tanto $\max\{0, y^2(y-x)\} + \max\{0, x^2(x-y)\} = f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Se cumple que $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$, con $g(x,y) = \max\{0, y^2(y-x)\}$ y $h(x,y) = \max\{0, x^2(x-y)\}$. Pero $g(x,y) = (\phi \circ p)(x,y)$ y $h(x,y) = (\phi \circ q)(x,y)$, donde $\phi(t) = \max\{0, t\}$, $p(x,y) = y^3 - y^2x$ y $q(x,y) = x^3 - x^2y$. Pero ϕ es continua, pues ϕ es algebraica por el inciso a) (pues $|a| = \sqrt{a^2}$), y p y q son continuas al ser funciones polinómicas. Así, f es suma de composiciones de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, luego es continua en $\mathbb{R}^2$.

Rúbrica:

1) Reconocer los casos en demostración parte a) **(0.6 pts.)**
2) Demostrar cada caso en parte a) **(0.7pts. cada caso)**.
3) Reconocer los casos en demostración parte b) **(0.6 pts.)**
4) Demostrar cada caso en parte b) **(0.7pts. cada caso)**.
5) Efectuar la demostración pedida en la parte c), especificando como mínimo las propiedades de la continuidad que permiten deducir la continuidad de la función f **(2 pts.)**

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 80 minutos.