DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 1 Cálculo III
Grupo 2, versión B
29 de septiembre de 2022

Problema 1. Considerar las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:

- $\mathscr{L}_1 = \{(2,-1,1) + t(1,2,1) : t \in \mathbb{R}\}$
- $\mathscr{L}_2 = \{(1,0,3) + t(2,1,-1) : t \in \mathbb{R}\}$
- $\mathscr{L}_3 = \{(-1,2,7) + t(-4,1,5) : t \in \mathbb{R}\}$

Probar que las tres rectas tienen un punto en común.
Solución. Para probar que tienen un punto en común, hallaremos la intersección de dos de ellas , por ejemplo $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, sea $p \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, luego existen números reales t_1 y t_2, tales que:
$p = (2,-1,1) + t_1(1,2,1) = (1,0,3) + t_2(2,1,-1)$. Examinando las componentes, vemos que en la segunda componente se da la siguiente ecuación: $-1 + 2t_1 = 0 + t_2$, luego $t_2 = -1 + 2t_1$. De la primera componente tenemos: $2 + t_1 = 1 + 2t_2$, así $t_1 = -1 + 2t_2$, multiplicando por 2 tenemos $2t_1 = -2 + 4t_2$, así:

$$t_2 = -1 + 2t_1$$
$$2t_1 = -2 + 4t_2$$

Luego $t_2 = -1 + (-2 + 4t_2)$, así $t_2 = 1$, luego $p = (1,0,3) + 1(2,1,-1) = (3,1,2)$. Veamos si $p \in \mathscr{L}_3$.
$(3,1,2) = (-1,2,7) + t(-4,1,5)$, entonces $(4,-1,-5) = (3,1,2) - (-1,2,7) = t(-4,1,5$, así $t = -1$, luego $p \in \mathscr{L}_3$. Por lo tanto $p \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3$

$\square$

Problema 2. Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2} & ; (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}.$$

Determine en que puntos esta función es continua.

Solución. Para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ tenemos que la función f es continua, por álgebra de funciones continuas.

Para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ tenemos que demostrar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = 0$. Primero veamos este límite en el siguiente camino $C_{m,n} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = mx, z = nx\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y,z)\in C_{m,n}} f(x, y, z) &= \lim_{x\to 0} f(x, mx, nx) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2 + mnx^2}{x^2 + m^2x^2 + n^2x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(m + mn)}{\cancel{x^2}(1 + m^2 + n^2)} \\
&= \frac{m + mn}{1 + m^2 + n^2}
\end{aligned}$$

y si $m = n = 0$, tenemos que el límite es iguala 0 y si $m = 1$, $n = 0$, el límite nos da igual a $\dfrac{1}{2}$, o sea que claramente el límite depende de la dirección. Por lo tanto la función no es continua en $(0, 0, 0)$.

$\square$

Problema 3. Considerar la función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x^2 - 2x|$.

a) Hallar su expansión en series de Fourier por senos.

b) ¿Por qué la serie de Fourier se anula en $x = 4$ si la función no se anula en $x = 4$?

Solución.

a) Como está definida en $[0, 4]$, para obtener una expansión en senos, debemos utilizar la expansión impar de periodo $p = 2L = 4$, es decir $L = 2$.
Entonces: $a_0 = a_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, por ser impar . Para proceder a la obtención de los coeficientes b_k es necesario expresar a f de una manera adecuada para realizar la integración.
Tenemos que $x^2 - 2x = x(x - 2)$, y de esto se tiene que $x(x - 2) \leq 0$, si $x \in [0, 2]$ y $x(x - 2) \geq 0$ si $x \in [2, 4]$, luego:

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 - 2x), & x \in [0, 2] \\ x^2 - 2x, & x \in [2, 4] \end{cases}$$

De esta manera:

$$b_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \int_0^4 f(x) \operatorname{sen}(n\pi x/2)dx = -\int_0^2 (x^2-2x) \operatorname{sen}(n\pi x/2)dx + \int_2^4 (x^2-2x) \operatorname{sen}(n\pi x/2)dx$$

Tenemos que

$$\int (x^2 - 2x) \operatorname{sen}(n\pi x/2)dx = -\frac{2x(x - 2) \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi n} + \frac{8(x - 1) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi^2 n^2} + \frac{16 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)}{\pi^3 n^3}$$

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,\mathrm{sen}(n\pi x/2)dx = \frac{16\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3}$$

$$\int_2^4 (x^2 - 2x)\,\mathrm{sen}(n\pi x/2)dx = -\frac{16\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3} - \frac{16}{\pi n}$$

$$b_n = -\frac{16\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3} - \frac{16}{\pi n} - \left(\frac{16\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3}\right) = \left(-\frac{32((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} - \frac{16}{\pi n}\right)$$

Luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{32((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} - \frac{16}{\pi n}\right) \mathrm{sen}(n\pi x/2) \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \left(\frac{64}{\pi^3 n^3}\right) \mathrm{sen}(n\pi x/2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\,\mathrm{sen}(n\pi x/2)}{\pi n} \\ f(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{64}{\pi^3 (2k-1)^3}\right) \mathrm{sen}((2k-1)\pi x/2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\,\mathrm{sen}(n\pi x/2)}{\pi n} \end{aligned}$$

b) La serie de Fourier por senos proviene de la expansión impar. En $x = 4$ $\tilde{f}(4^+) = f(4) = 8$, $\tilde{f}(4^-) = -8$, por lo tanto la serie de Fourier converge a $(8 + (-8))/2 = 0$.

$\square$