DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 1 Cálculo III
Grupos 1 y 3, versión B
29 de septiembre de 2022

Problema 1. Considerar las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:

- $\mathscr{L}_1 = \{(2,-1,1) + t(1,2,1) : t \in \mathbb{R}\}$
- $\mathscr{L}_2 = \{(1,0,3) + t(2,1,-1) : t \in \mathbb{R}\}$
- $\mathscr{L}_3 = \{(-1,2,7) + t(-4,1,5) : t \in \mathbb{R}\}$

Probar que las tres rectas tienen un punto en común.

Solución. Para probar que tienen un punto en común, hallaremos la intersección de dos de ellas , por ejemplo $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, sea $p \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, luego existen números reales t_1 y t_2, tales que:
$p = (2,-1,1) + t_1(1,2,1) = (1,0,3) + t_2(2,1,-1)$. Examinando las componentes, vemos que en la segunda componente se da la siguiente ecuación: $-1 + 2t_1 = 0 + t_2$, luego $t_2 = -1 + 2t_1$. De la primera componente tenemos: $2 + t_1 = 1 + 2t_2$, así $t_1 = -1 + 2t_2$, multiplicando por 2 tenemos $2t_1 = -2 + 4t_2$, así:

$$t_2 = -1 + 2t_1$$
$$2t_1 = -2 + 4t_2$$

Luego $t_2 = -1 + (-2 + 4t_2)$, así $t_2 = 1$, luego $p = (1,0,3) + 1(2,1,-1) = (3,1,2)$. Veamos si $p \in \mathscr{L}_3$.
$(3,1,2) = (-1,2,7) + t(-4,1,5)$, entonces $(4,-1,-5) = (3,1,2) - (-1,2,7) = t(-4,1,5$, así $t = -1$, luego $p \in \mathscr{L}_3$. Por lo tanto $p \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3$

$\square$

Problema 2. Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2} & ; (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}.$$

Determine en que puntos esta función es continua.

Solución. Para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ tenemos que la función f es continua, por álgebra de funciones continuas.

Para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ tenemos que demostrar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = 0$. Primero veamos este límite en el siguiente camino $C_{m,n} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = mx, z = nx\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y,z)\in C_{m,n}} f(x, y, z) &= \lim_{x\to 0} f(x, mx, nx) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2 + mnx^2}{x^2 + m^2x^2 + n^2x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(m + mn)}{\cancel{x^2}(1 + m^2 + n^2)} \\
&= \frac{m + mn}{1 + m^2 + n^2}
\end{aligned}$$

y si $m = n = 0$, tenemos que el límite es iguala 0 y si $m = 1$, $n = 0$, el límite nos da igual a $\dfrac{1}{2}$, o sea que claramente el límite depende de la dirección. Por lo tanto la función no es continua en $(0, 0, 0)$.

□

Problema 3. Sea $f(x, y)$ una función cuyas derivadas parciales de segundo orden existen en $(0, 0)$, tal que $f(0, 0) = \frac{\pi}{3}$. Sea $g(x, y) = \operatorname{sen}(f(x, y))$. Demuestre que

$$f_{xy}(0, 0) - f_{yx}(0, 0) = 2(g_{xy}(0, 0) - g_{yx}(0, 0)).$$

Indicación: El Teorema de Schwarz *no* es aplicable en este problema.

Solución.

$$\begin{aligned}
g_x(x, y) &= \cos(f(x, y))f_x(x, y) \\
g_{xy}(x, y) &= -\operatorname{sen}(f(x, y))f_y(x, y)f_x(x, y) + \cos(f(x, y))f_{xy}(x, y) && (1) \\
g_y(x, y) &= \cos(f(x, y))f_y(x, y) \\
g_{yx}(x, y &= -\operatorname{sen}(f(x, y))f_x(x, y)f_y(x, y) + \cos(f(x, y))f_{yx}(x, y). && (2)
\end{aligned}$$

Restando (2) de (1) y evaluando en $(0, 0)$, se obtiene

$$g_{xy}(0, 0) - g_{yx}(0, 0) = \frac{1}{2}(f_{xy}(0, 0) - f_{xy}(0, 0)),$$

que equivale a lo que se pedía a mostrar.

□