DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo III, Forma A
20 de mayo de 2022

Problema 1. Sea n un entero impar mayor que 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x,y) = ax^n + by^n - x - y$, con a, b constantes no nulas. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de f en términos de a y b.

Solución. Dado que a y b son positivos, tenemos que

Primero que todo, encontremos los puntos críticos de $f(x,y)$. Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico de $f(x,y)$ entonces:

$$\nabla(f(x,y)) = (nax^{n-1} - 1, nby^{n-1} - 1) = (0,0),$$

o de manera equivalente, se satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$nax^{n-1} - 1 = 0,$$
$$nby^{n-1} - 1 = 0.$$

De la primera y de la segunda ecuación se puede deducir que:

I) $x = \pm \left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

II) $y = \pm \left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Luego los puntos críticos son $\left(\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \pm\left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$ y $\left(-\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \pm\left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$, donde $a, b > 0$.

Dado que $f(x,y)$ es de clase C^2, pues $f(x,y)$ es polinomial de grados enteros positivos, la matriz Hessiana de f existe en todo punto y es simétrica. La matriz Hessiana en un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ está dada por:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} n(n-1)ax^{n-2} & 0 \\ 0 & n(n-1)by^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces los casos:

a) Para el punto $(x_n, y_n) = \left(\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$, se tiene que $x_n > 0$, e $y_n > 0$, y para $H_f(x_n, y_n)$ tenemos

$$H_f(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} n(n-1)ax_n^{\frac{n-2}{n-1}} & 0 \\ 0 & n(n-1)by_n^{\frac{n-2}{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $Det(H_f(x_n,y_n)) = abn^2(n-1)^2(x_ny_n)^{\frac{n-2}{n-1}} > 0$, y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n,y_n) = abn(n-1)x_n^{\frac{n-2}{n-1}} > 0$. Por lo tanto (x_n,y_n) es un punto de mínimo de $f(x,y) = ax^n + by^n - x - y$

b) Para el punto $(x_n,y_n) = \left(\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, -\left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$ se tiene $Det(H_f(x_n,y_n)) = abn^2(n-1)^2(\frac{1}{na})^{\frac{n-2}{n-1}}(-1)^{n-2}(\frac{1}{nb})^{\frac{n-2}{n-1}} < 0$ y (x_n,y_n) es un punto de silla.

c) Para el punto $(x_n,y_n) = \left(-\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$ se tiene $Det(H_f(x_n,y_n)) = abn^2(n-1)^2(-1)^{n-2}(\frac{1}{na})^{\frac{n-2}{n-1}}(\frac{1}{nb})^{\frac{n-2}{n-1}} < 0$ y (x_n,y_n) es un punto de silla.

d) Para el punto $(x_n,y_n) = \left(-\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, -\left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$ se tiene $Det(H_f(x_n,y_n)) = abn^2(n-1)^2(-1)^{2(n-2)}(\frac{1}{na})^{\frac{n-2}{n-1}}(\frac{1}{nb})^{\frac{n-2}{n-1}} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n,y_n) = n(n-1)(-1)^{n-2}\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} < 0$, y (x_n,y_n) es un punto de máximo local.

Nota: Si el estudiante hace todo el análisis correcto pero para un caso particular (por ejemplo, $n = 3$, ó 5, etc.), se asigna la mitad del puntaje total (es decir, 3 puntos).

□

Problema 2. Considere la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y la función f definida por $f(x,y,z) = \left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-y}{yz}\right)$, cuando $xyz \neq 0$. Ambas funciones son diferenciables en sus respectivos dominios. Demuestre que el vector (x^2,y^2,z^2) es ortogonal a $\nabla(g \circ f)(x,y,z)$.

Solución. Para demostrar ortogonalidad, basta obtener la igualdad

$$\langle (x^2,y^2,z^2), \nabla(g\circ f)(x,y,z)\rangle = 0, \quad \text{para todo } x,y,z \neq 0 \quad . \tag{1}$$

Ahora bien, para calcular el gradiente de la composición primero observamos que el Jacobiano de $(g\circ f)$ es el vector gradiente transpuesto, es decir, $D(g\circ f)(x,y,z) = \nabla(g\circ f)(x,y,z)^T$. Además apreciamos que las funciones g y f son diferenciables (en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ resp.) y así su $g\circ f$ será diferenciable en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, por lo cual, podemos aplicar regla de la cadena

$$D(g\circ f)(x,y,z) = Dg(f(x,y,z))Df(x,y,z). \tag{2}$$

Calculando cada Jacobiano :

$$Dg(f(x,y,z)) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}\Big|_{(u,v)=\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)} \tag{3}$$

$$Df(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & \frac{1}{z^2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Luego multiplicando las matrices se obtiene

$$D(g\circ f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) & \frac{1}{z^2}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}\Big|_{(u,v)=\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)}. \tag{5}$$

Por último, calculamos el producto interno:

$$
\begin{aligned}
\langle (x^2,y^2,z^2), \nabla(g\circ f)(x,y,z)\rangle &= \left(-\frac{x^2}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{y^2}{y^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}\right) + \frac{z^2}{z^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\Big|_{(u,v)=\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)} \\
&= 0. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, dichos vectores son ortogonales, para todo $x, y, z \neq 0$.

□

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$
f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

i) Determinar los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que la función es continua.

ii) Hallar, en caso de que existan, las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$.

iii) Determine si existe la derivada direccional de f en el punto $(0, 0)$ en la dirección $\vec{d} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. En caso de que exista calcúlela.

Solución.

i) Primero analicemos la continuidad cuando $(x, y) \neq (0, 0)$. En este caso, por álgebra de funciones continuas, tenemos que la función $f(x, y) = \frac{yx+y^3}{x^2+y^2}$ es continua. Por otra parte, asumamos que la función es continua en el punto $(x, y) = (0, 0)$. Luego, se satisface que:

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx+y^3}{x^2+y^2} = 0.
$$

Por ende, para todo camino $C \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ se debe satisfacer que

$$
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C}} \frac{yx+y^3}{x^2+y^2} = 0.
$$

Sin embargo, para notemos que para los caminos $C_m := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx \text{ y } (x, y) \neq (0, 0)\}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_m}} \frac{yx+y^3}{x^2+y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(mx)x+(mx)^3}{x^2+(mx)^2}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2+m^3x^3}{x^2+m^2x^2}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{m+m^3x}{1+m^2}, \\
&= \frac{m}{m^2+1}.
\end{aligned}
$$

Es decir, hay infinitos caminos por los cuales el límite es distinto de 0 lo cual es una contradicción a la hipótesis de que la función era continua en el $(0,0)$. Por ende la función no es continua en el $(0,0)$.

ii) Usando las definiciones de derivadas parciales, tenemos que:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2}\cdot\frac{1}{h} = 1.$$

iii) Utilizamos la definición de derivada direccional para obtener que:

$$\begin{aligned} f'(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}))-f(0,0)}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2/2+h^3/(2\sqrt{2})}{h^2}\cdot\frac{1}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}+\frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

Por lo tanto la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ en la dirección $\vec{d} = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ no existe.

$\square$