DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 1 Cálculo III
Grupos 1 y 3, versión A
29 de septiembre de 2022

Problema 1. Considerar las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:

- $\mathscr{L}_1 = \{(2,-1,1) + t(1,2,1) : t \in \mathbb{R}\}$
- $\mathscr{L}_2 = \{(1,0,3) + t(2,1,-1) : t \in \mathbb{R}\}$
- $\mathscr{L}_3 = \{(-1,2,7) + t(-4,1,5) : t \in \mathbb{R}\}$

Probar que las tres rectas se encuentran en un mismo plano

Solución. Si existiese dicho plano, un vector normal a dicho plano debería ser perpendicular a los tres vectores direccionales. En particular $\vec{n} := (1,2,1) \times (2,1,-1) = (-3,3,-3)$ sería un vector normal a dicho plano . Y cualquier punto de esas rectas pertenecería a dicho plano, por ejemplo $(2,-1,1)$. Entonces la ecuación normal de dicho plano debería ser:
$\mathscr{P} : \langle(-3,3,-3),(x,y,z)-(2,-1,1)\rangle = 0$, operando:

$$\mathscr{P} : x - y + z = 4$$

Para verificar que las rectas son subconjuntos de dicho plano:

- Sea $p \in \mathscr{L}_1$, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = (2,-1,1)+t(1,2,1) = (2+t,-1+2t,1+t)$, entonces evaluamos p en la expresión que define a $\mathscr{P}$: $(2+t)-(-1+2t)+(1+t) = 4$, luego $p \in \mathscr{P}$. Así se probó que $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{P}$.
- Sea $p \in \mathscr{L}_2$, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = (1,0,3)+t(2,1,-1) = (2t+1,t,3-t)$, entonces evaluamos p en la expresión que define a $\mathscr{P}$: $(2t+1)-(t)+(3-t) = 4$, luego $p \in \mathscr{P}$. Así se probó que $\mathscr{L}_2 \subset \mathscr{P}$.
- Sea $p \in \mathscr{L}_3$, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = (-1,2,7)+t(-4,1,5) = (-4t-1,t+2,5t+7)$, entonces evaluamos p en la expresión que define a $\mathscr{P}$: $(-4t-1)-(t+2)+(5t+7) = 4$, luego $p \in \mathscr{P}$. Así se probó que $\mathscr{L}_3 \subset \mathscr{P}$.

$\square$

Problema 2. Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & ; (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}.$$

Demuestre que esta función es continua en $\mathbb{R}^3$.

Solución. Para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tenemos que la función f es continua, por álgebra de funciones continuas.

Para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ tenemos que demostrar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = 0$. Primero tenemos que $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $|z| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, (**2 puntos**) entonces:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right| &= \left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \\
&= \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} \\
&= \frac{|x|\,|y|\,|z|}{x^2 + y^2 + z^2} \\
&\leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}
\end{aligned}$$

y usando el teorema del sándwich , tenemos que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$, por lo que la función es continua en $(0, 0, 0)$.

O sea que f es continua en todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

□

Problema 3. Sea $f(x, y)$ una función cuyas derivadas parciales de segundo orden existen en $(1, 1)$, y tal que $f(1, 1) = 0$. Sea $g(x, y) = e^{xf(x,y)}$. Demuestre que

$$f_{xy}(1, 1) - f_{yx}(1, 1) = g_{xy}(1, 1) - g_{yx}(1, 1).$$

Indicación: El Teorema de Schwarz *no* es aplicable en este problema.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}
g_x(x, y) &= e^{xf(x,y)}(f(x, y) + xf_x(x, y)), \\
g_{xy}(x, y) &= e^{xf(x,y)}xf_y(x, y)(f(x, y) + xf_x(x, y)) + e^{xf(x,y)}(f_y(x, y) + xf_{xy}(x, y)), \\
g_y(x, y) &= xf_y(x, y)e^{xf(x,y)}, \\
g_{yx}(x, y) &= f_y(x, y)e^{xf(x,y)} + xf_{yx}(x, y)e^{xf(x,y)} + xf_y(x, y)e^{xf(x,y)}(f(x, y) + xf_x(x, y)).
\end{aligned}$$

De este modo, al evaluar en $(1, 1)$ se obtiene

$$g_{xy}(1, 1) = f_y(1, 1)f_x(1, 1) + f_y(1, 1) + f_{xy}(1, 1) \tag{1}$$
$$g_{yx}(1, 1) = f_y(1, 1) + f_{yx}(1, 1) + f_y(1, 1)f_x(1, 1). \tag{2}$$

Restando (1) de (2), se tiene lo pedido.

□