DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo III, Forma B
20 de mayo de 2022

Problema 1. Considere la función f definida por $f(x,y,z) = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z}$, cuando $xyz \neq 0$. Obtenga y clasifique los puntos críticos de f contenidos en el conjunto $A = \{(x,y,z) : x > 0,\ y > 0\}$

Solución. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 1 - \frac{1}{y^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1 - \frac{1}{z^2} = 0$,

Luego, $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $z^2 = 1$ y por lo tanto $(1,1,\pm 1)$ son los puntos críticos de f en A

Para clasificarlos calculamos las derivadas de segundo orden

$f_{\text{xx}} = \frac{2}{x^3}$, $f_{yx} = 0$, $f_{zx} = 0$

$f_{\text{xy}} = 0$, $f_{yy} = \frac{2}{y^3}$, $f_{zy} = 0$

$f_{\text{xz}} = 0$, $f_{yz} = 0$, $f_{zz} = \frac{2}{z^3}$

Luego, la matriz Hessiana esta dada por :

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}$$

Evaluando en los puntos críticos , tenemos :

$H(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, se verifica que todos los determinantes de las submatrices tienen signo positivo. Por lo tanto $(1,1,1)$ es un mínimo local.

$H(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, se verifíca que $2 > 0$, Det$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$ y Det$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8 < 0$

Por lo tanto califica como punto silla.

$\square$

Problema 2. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por $u(x,y,z) = \text{sen}(xyz)$, $v(x,y,z) = \cos(xyz)$. Sea $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $w(u,v) = (u+v)^2$. Defina $f(x,y,z) = w(u(x,y,z), v(x,y,z))$.

Determine los valores $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) =$$
$$= \lambda_1 \nabla u\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + \lambda_2 \nabla v\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Solución. Tenemos $f(x,y,z) = w(u(x,y,z), v(x,y,z))$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial y},\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial z},\\
\Rightarrow\qquad &\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial u}(u,v)\cdot\nabla u(x,y,z) + \frac{\partial w}{\partial v}(u,v)\cdot\nabla v(x,y,z).
\end{aligned}$$

Así que, en general, los valores $\lambda_1 = \frac{\partial w}{\partial u}(u,v), \lambda_2 = \frac{\partial w}{\partial v}(u,v)$ satisfacen

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla u(x,y,z) + \lambda_2 \nabla v(x,y,z), \tag{1}$$

y son los únicos valores que satisfacen esta ecuación si y sólo si ∇u y ∇v son linealmente independientes.

En el caso de $(x,y,z) = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ tenemos

$$\nabla u(x,y,z) = (yz\cos(xyz), xz\cos(xyz), xy\cos(xyz)),$$
$$\nabla u\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = (0,0,0),$$

de donde λ_1 no es único, puesto que cualquier $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ satisface (1); y

$$\nabla v(x,y,z) = (-yz\,\mathrm{sen}(xyz), -xz\,\mathrm{sen}(xyz), -xy\,\mathrm{sen}(xyz)),$$
$$\nabla v\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \left(-\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, -\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, -\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right),$$

de donde

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{\partial w}{\partial v}(u,v) = 2(u+v) = 2\left(\mathrm{sen}\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)\\
&= 2\left(\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores λ_1, λ_2 pedidos, son $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 = 2$.

Otra solución: Tenemos

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) = (\operatorname{sen}(xyz)+\cos(xyz))^2 = \\
= \operatorname{sen}^2(x,y,z) + 2\operatorname{sen}(xyz)\cos(xyz) + \cos^2(xyz) = \\
= 1 + 2\operatorname{sen}(xyz)\cos(xyz)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2\cos^2(xyz)yz - 2\operatorname{sen}^2(xyz)yz \\
&= 2yz(\cos^2(xyz) - \operatorname{sen}^2(xyz)) = \\
&= 2yz\cos(2xyz). \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 2\cos^2(xyz)xz - 2\operatorname{sen}^2(xyz)xz \\
&= 2xz(\cos^2(xyz) - \operatorname{sen}^2(xyz)) \\
&= 2xz\cos(2xyz) \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 2\cos^2(xyz)xy - 2\operatorname{sen}^2(xyz)xy \\
&= 2xy(\cos^2(xyz) - \operatorname{sen}^2(xyz)) \\
&= 2xy\cos(2xyz)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad \nabla f(x,y,z) &= (2yz\cos(2xyz), 2xz\cos(2xyz), 2xy\cos(2xyz)) \\
&= 2\cos(2xyz)(yz,xz,xy).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = \cos(xyz)yz; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = \cos(xyz)xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = \cos(xyz)xy.$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(xyz)yz; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(xyz)xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(xyz)xy.$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla f\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) &= 2\cos\left(2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \\
&= 2\cos(\pi)\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \\
&= -2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1,1,1), \\
\text{y} \qquad & \quad \lambda_1\nabla u\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + \lambda_2\nabla v\left(\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \\
&= \lambda_1\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1,1,1) + \lambda_2\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(-1,-1,-1) \\
&= -\lambda_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1,1,1)
\end{aligned}$$

Para tener $\nabla f\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\lambda_1\nabla u\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)+\lambda_2\nabla v\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$, debemos tener:

$$-2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1,1,1)=-\lambda_2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1,1,1) \quad \Rightarrow \quad \lambda_2=2.$$

Así, para obtener la igualdad requerida en el punto $\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ sirve cualquier $\lambda_1\in\mathbb{R}$ y $\lambda_2=2$.

$\square$

Problema 3. Demuestre que la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

es:

I) continua en $\mathbb{R}^2$,

II) diferenciable en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$,

III) no diferenciable en $(0,0)$.

Solución.

I) Para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^4}$ es continua, porque es una división de funciones polinomiales con denominador que no se anula en el abierto $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Para $(x,y)=(0,0)$, se tiene $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}=0$, pues

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}-0\right|=\frac{x^2}{x^2+y^4}|y|\leq\frac{x^2+y^4}{x^2+y^4}|y|=|y|.$$

Luego, por el Teorema del Sandwich, como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$ y $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

II) Para ver que $f(x,y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, se observa que si $(x,y)\neq(0,0)$, entonces

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=\frac{(x^2+y^4)(2xy)-(x^2y)(2x)}{(x^2+y^4)^2}\\ f_y(x,y)&=\frac{(x^2+y^4)(x^2)-(x^2y)(4y^3)}{(x^2+y^4)^2}.\end{aligned}$$

Entonces $f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, y es diferenciable en este conjunto.

III) Para ver que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$, calculamos las derivadas parciales $f_x(0,0), f_y(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^2\cdot 0}{h^2+0^4}\right) = 0$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{0\cdot h^2}{0^2+h^4}\right) = 0.$$

Luego analizamos si se satisface

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}(h^2+k^4)} \end{aligned}$$

Pero si $g(h,k) = \dfrac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}(h^2+k^4)}$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 0^+} g(k,k) &= \lim_{k\to 0^+} \frac{k^3}{2^{\frac{1}{2}}k(k^2+k^4)} \\ &= \lim_{k\to 0^+} \frac{k^3}{2^{\frac{1}{2}}(k^3+k^5)} \\ &= \lim_{k\to 0^+} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}(1+k^2)} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \neq 0. \end{aligned}$$

Luego f no es diferenciable en $(0,0)$.

$\square$