DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 1 Cálculo Avanzado, Forma A
19 de abril de 2022

Problema 1. Probar que:

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\operatorname{sen}(2nx), \text{ si } x \in]0,\pi[$$

Solución. Debido a que la expresión de la derecha está expresada en funciones seno, se trata de la expansión impar de la función coseno , restringida a $]0,\pi[$.

$$\cos(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\cos(x)dx$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\cancel{2}}(\operatorname{sen}(nx+x)+\operatorname{sen}(nx-x))dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}((n+1)x)+\operatorname{sen}((n-1)x))dx$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}+\frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right)\Big|_0^{\pi}, & n \neq 1 \\ -\frac{1}{\pi}\left.\frac{\cos(2x)}{2}\right|_0^{\pi}, & n = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right), & n \neq 1 \\ -\frac{1}{\pi}\frac{(1-1)}{2}, & n = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right), & n \neq 1 \\ 0, & n = 1 \end{cases} \quad (\text{notar que } (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1})$$

$$= \begin{cases} \frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{2n}{n^2-1}\right), & n \neq 1 \\ 0, & n = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{2n}{n^2-1}\right), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar diferente de } 1 \\ 0, & n = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(\frac{4n}{n^2-1}\right), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Así

$$\cos(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ par}}}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\operatorname{sen}(2kx) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{8k}{4k^2-1}\right)\operatorname{sen}(2kx)$$

$\square$

Problema 2. *a*) Obtener la integral de Fourier de:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), \ |x| \leq \pi \\ 0, \ |x| > \pi \end{cases}$$

Solución. Debido a que la función es par: $B(\omega) = 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\cos(\omega x)dx$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cos((\omega+1)x) + \cos((\omega-1)x)\right)dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}((\omega+1)x)}{\omega+1} + \frac{\operatorname{sen}((\omega-1)x)}{\omega-1}\right)\Big|_0^{\pi}, & \omega \neq 1 \\ \frac{1}{\pi}\left.\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right|_0^{\pi}, & \omega = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}((\omega+1)\pi)-0}{\omega+1} + \frac{\operatorname{sen}((\omega-1)\pi)-0}{\omega-1}\right), & \omega \neq 1 \\ 0, & \omega = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\operatorname{sen}(\omega\pi)}{\omega+1} - \frac{\operatorname{sen}(\omega\pi)}{\omega-1}\right), & \omega \neq 1 \\ 0, & \omega = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{2\omega}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(\omega\pi)}{\omega^2-1}\right), & \omega \neq 1 \\ 0, & \omega = 1 \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega\operatorname{sen}(\omega\pi)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)d\omega$$

$\square$

b) Estudiar la convergencia para $x_0 = 0$ y $x_1 = \pi$.
Solución. Como $x_0 = 0$ es un punto de continuidad:

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega\operatorname{sen}(\omega\pi)}{1-\omega^2}d\omega$$

Como $x_1 = \pi$ es un punto de discontinuidad:

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega\operatorname{sen}(\omega\pi)}{1-\omega^2}\cos(\omega\pi)d\omega$$

$\square$

Problema 3. Considerar las rectas:
$\mathscr{L}_1 : P = (8, -17, 4) + t(-1, 2, 0)$
$\mathscr{L}_2 : P = (5, 5, 8) + t(1, 2, 1)$

a) Probar que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \neq \varnothing$.
Solución. Hallar ese punto de intersección P_0 es equivalente a que existan $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$P_0 = (8, -17, 4) + t_1(-1, 2, 0) = (5, 5, 8) + t_2(1, 2, 1)$$

igualando las terceras componentes tenemos que $4 = 8 + t_2$, es decir $t_2 = -4$, luego:

$$t_1(-1, 2, 0) = (5, 5, 8) - 4(1, 2, 1) - (8, -17, 4) = (-7, 14, 0)$$

de donde $t_1 = 7$ siendo $P_0 = (1, -3, 4)$.

□

b) Hallar una ecuación del plano que contiene a ambas rectas. **Solución.** Dado que P_0 pertenece a dicho plano y que $v = (-1, 2, 0)$ y $u = (1, 2, 1)$ son paralelas a dicho plano, además de que no son paralelos entre sí, entonces:

$$\mathscr{P} : P = (1, -3, 4) + t(-1, 2, 0) + s(1, 2, 1)$$

□