DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

Prueba Final de Reemplazo
Cálculo III
3 de agosto de 2023

Problema 1.

a) **(2 puntos)** Usando el teorema de Green, deducir que si una región del plano D está delimitada por una curva Γ regular por pedazos entonces el área de D, es $A(D) = \frac{1}{2}\oint_\Gamma(-y\,dx + x\,dy)$.

b) **(4 puntos)** Sea Γ el camino cerrado simple recorrido por $\vec{r} : [0, a] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen}(2t), \operatorname{sen} t)$. Determine el área limitada por Γ.

Solución.

a) Con teorema de Green aplicado a $\oint_\Gamma -y\,dx + x\,dy$ en el cual $P(x, y) = -y$ y $Q(x, y) = x$ se tiene que:

$$\oint_\Gamma -y\,dx + x\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (1 - (-1))dxdy = 2\iint_D dxdy$$

(1,0 pto.)

Por consiguiente:

$$\frac{1}{2}\oint_\Gamma -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}2\iint_D dxdy = \iint_D dxdy = \iint_D dA = A(D)$$

(1,0 pto.)

b) Como Γ es cerrado simple, entonces $\vec{r}(a) = \vec{r}(0)$ y $\vec{r}(t) = \vec{r}(0)$ solo cuando $t = 0$ ó $t = a$. Pero

$$\begin{aligned} & \vec{r}(t) = \vec{r}(0) \\ \Leftrightarrow \quad & (\operatorname{sen}(2t), \operatorname{sen} t) = (0, 0) \\ \Leftrightarrow \quad & \operatorname{sen}(2t) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t = 0. \end{aligned}$$

Lo anterior ocurre por primera vez después de $t = 0$ cuando $t = \pi$, de donde $a = \pi$. **(1,0 pto.)**

Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\oint_\Gamma(-y\,dx + x\,dy) \\ = & \int_0^\pi \left(\frac{-\operatorname{sen} t(2\cos(2t))}{2}\right) + \left(\frac{\operatorname{sen}(2t)\cos t}{2}\right) dt && \textbf{(1,0 pto.)} \\ = & \int_0^\pi -\operatorname{sen} t(2\cos^2 t - 1) + \operatorname{sen} t \cos^2 t\,dt \\ = & \int_0^\pi (-\cos^2 t + 1)\operatorname{sen} t\,dt && = \quad \textbf{(1,0 pto.)} \end{aligned}$$

Con sustitución $u = \cos t, du = -\operatorname{sen} t\,dt$,

$$\begin{aligned} & = -\int_1^{-1}(-u^2 + 1)\,du = \int_{-1}^1 1 - u^2\,du \\ & = 2\int_0^1 1 - u^2\,du = 2\left[u = \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\ \text{un}^2. && \textbf{(1,0 pto.)} \end{aligned}$$

$\square$

Problema 2. Resuelva

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Si $\vec{F}(x, y, z) = (xz^2, x^2y, y^2z)$ y S es la superficie que limita totalmente el sólido $R \subseteq \mathbb{R}^3$ definido como:

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\},$$

y la orientación de la superficie está con las normales hacia el exterior de R.

Solución. Como S es superficie cerrada regular y $\vec{F} \in \mathcal{C}^1$ es aplicable el teorema de Gauss **(1,0 pto.)**:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dv$$

con divergencia $\nabla \cdot \vec{F} = z^2 + x^2 + y^2$ **(1,0 pto.)**.

La región sólida R, se puede re-escribir en coordenadas cilíndricas como:

$$R = \{(\theta, r, z) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq r^2\}$$

(1,0 pto.) Luego, se resuelve la integral:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_R \nabla \cdot \vec{F} dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{r^2} r(z^2 + r^2) dz dr d\theta \quad \textbf{(1,0 pto.)} \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r}{3} z^3 + r^3 z \bigg|_0^{r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r^7}{3} + r^5 dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{r^8}{24} + \frac{r^6}{6} \bigg|_0^1 d\theta = \frac{5}{24} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{5}{24} \theta \bigg|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{5}{48} \pi \quad \textbf{(2,0 ptos.)}
\end{aligned}$$

$\square$

Problema 3. Considere la curva regular Γ dada por la intersección del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y el plano $z = 5$. Determinar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x, y, z) = (xe^z - y, 2xz, \operatorname{sen}(2zx))$$

a través de la curva Γ recorrida una vez en contra de las manecillas cuando es vista desde arriba.

Solución. La curva Γ es definida como la circunferencia de radio 5, $(x^2 + y^2 = 5^2)$, ya que el campo es continuo por ser definido como productos de exponenciales, polinomios y funciones trigonométricas, podemos utilizar el teorema de *Stokes* sobre la superficie del Disco $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 5^2, z = 5\}$. *(Se podría también sobre la superficie del cono, con lo cual el procedimiento tendría ligeras diferencias que deben ser consideradas, pero más dificultad)*

(1.0 punto)

Consideramos la transformación para definir la superficie $\vec{T}(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta), 5)$, sobre el disco $D = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

(1.0 punto)

El vector normal de esta superficie viene dado por los vectores tangente

$$\vec{T_r}(r,\theta) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0),\ \vec{T_\theta}(r,\theta) = (-r\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\theta), 0)$$

$$\vec{N} = \vec{T_r} \times \vec{T_\theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ -r\operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

(1.0 punto)

Calculamos el rotor del campo

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^z - y & 2xz & \operatorname{sen}(2zx) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ xe^z - 2z\cos(2zx) \\ 2z+1 \end{pmatrix}$$

evaluando en la transformación tenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}\left(\vec{T}(r,\theta)\right) = \begin{pmatrix} -2r\cos(\theta) \\ r\cos(\theta)\, e^5 - 10\cos(10r\cos(\theta)) \\ 11 \end{pmatrix}$$

(1.0 punto)

Así

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
&= \int_D \vec{\nabla} \times \vec{F}\left(\vec{T}(r,\theta)\right) \cdot \vec{N} d\theta dr \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2r\cos(\theta) \\ r\cos(\theta)\, e^5 - 10\cos(10r\cos(\theta)) \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\rangle d\theta dr \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} 11 r d\theta dr \\
&= 2\pi \frac{11r^2}{2}\Big|_0^5 \\
&= 275\pi
\end{aligned}$$

.

(2.0 punto)

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 90 minutos.