DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA Y CIENCIA DE
LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 2 Cálculo III Invierno
11 de agosto de 2022

Problema 1. Sea G el sólido limitado por la cara lateral del cono $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ y por el plano $z = 2$. Si la densidad del sólido G esta dada por la altura sobre el plano XY.

a) Encuentre la masa de G.

b) Calcule el centro de masa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ del sólido G.

c) Exprese el centro de masa de G en coordenadas esféricas.

Solución.

a) Como la densidad esta dada por $\rho(x,y,z) = z$ **(0,5 puntos)**, entonces la masa de la superficie G es $M(G) = \iiint_G \rho(x,y,z)dV$ **(0,5 puntos)**. Por otro lado, G esta limitado por $2\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$, y si lo pasamos a coordenadas cilíndricas tenemos que G esta limitado $2r \leq z \leq 2$, con $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ **(1 punto)**, entonces:

$$\begin{aligned}
M(G) &= \iiint_G \rho(x,y,z)dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{2r}^2 zrdzdrd\theta \ \ \textbf{(0,5 puntos)} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left.\frac{z^2}{2}\right|_{2r}^2 rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r-2r^3)drd\theta \\
&= \int_0^{2\phi} (r^2-\frac{r^4}{2})\Big|_0^1 d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \pi. \ \ \textbf{(0,5 puntos)}
\end{aligned}$$

b) Por simetría tenemos que $\overline{x} = \overline{y} = 0$ **(0,5 puntos)**. Resta calcular $\overline{z} = \dfrac{1}{M(G)}\iiint_G z\rho(x,y.z)dV$ **(0,5 puntos)**, entonces y usando coordenadas cilíndricas tenemos:

$$\overline{z} = \frac{1}{M(G)}\iiint_G z\rho(x,y.z)dV$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{2r}^2 z^2 r dz dr d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (8-8r^3) r dr d\theta \\
&= \frac{8}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^4) dr d\theta \\
&= \frac{8}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{3}{10} = \frac{24}{10\pi}\cdot 2\pi = \frac{24}{5}. \textbf{(1 punto)}
\end{aligned}
$$

c) Como $z = 2$, entonces $R\cos(\phi) = 2 \Rightarrow R = 2\sec(\phi)$, o sea que G esta limitado por $0 \le R \le 2\sec(\phi)$, $0 \le \phi \le \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ y $0 \le \theta \le 2\pi$ **(0,5 puntos)**. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{M(G)}\iiint_G z\rho(x,y,z)dV \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{2\sec(\phi)} (R\sec(\phi))^2 R^2 \operatorname{sen}(\phi) dR d\phi d\theta. \textbf{(0,5 puntos)}
\end{aligned}
$$

□

Problema 2. Sea una partícula en movimiento cuyo vector posición en cualquier instante t está dado por

$$\vec{r}(t) = (3\cos(\phi(t)), 3\operatorname{sen}(\phi(t)), 1)$$

I. Calcule $\phi(t)$ si la rapidez con la que se desplaza la partícula es 2, además defina la correspondiente parametrización por longitud de arco para $\vec{r}$ con $\phi(t)$ obtenido.

II. Calcule el vector tangente y normal unitario a esta curva en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{4}$.

III. Pruebe que la curvatura de la curva descrita por $\vec{r}$ es constante.

Solución.

I. Calculamos el vector velocidad de la curva descrita por la parametrización $\vec{r}$

$$\vec{r'}(t) = (-3\operatorname{sen}(\phi(t))\phi'(t), 3\cos(\phi(t))\phi'(t), 0)$$

(0.5 punto)

igualando la rapidez a 2, tenemos

$$
\begin{aligned}
2 &= \|\vec{r'}(t)\| \\
&= \sqrt{9(\operatorname{sen}(\phi(t))\phi'(t))^2 + 9(\cos(\phi(t))\phi'(t))^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{9\left(\phi'(t)\right)^2} \\
&= 3\phi'(t) \\
\frac{2}{3} &= \phi'(t) \\
\frac{2}{3}t + c &= \phi(t)
\end{aligned}
$$

(1.0 punto)

haciendo $c = 0$ tenemos que la parametrización es

$$\vec{r}(t) = \left(3\cos\left(\frac{2}{3}t\right), 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{3}t\right), 1\right)$$

(0.5 punto)

y como la velocidad es constante, el parámetro de longitud de arco es $s = 2t$, así la parametrización por longitud de arco es

$$\vec{r}(s) = \left(3\cos\left(\frac{s}{3}\right), 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{3}\right), 1\right)$$

(0.5 punto)

II. Calculamos usando la parametrización por longitud de arco, así el vector tangente es

$$\hat{T}(s) = \vec{r}'(s) = \left(-\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{3}\right), \cos\left(\frac{s}{3}\right), 0\right)$$

(1.0 punto)

y el vector normal como derivada del tangente y normalizado queda

$$
\begin{aligned}
\hat{N}(s) &= \frac{\hat{T}'}{\|\hat{T}'\|} \\
&= \frac{1}{1/3}\left(-\cos\left(\frac{s}{3}\right)\frac{1}{3}, \mathrm{sen}\left(\frac{s}{3}\right)\frac{1}{3}, 0\right) \\
&= \left(-\cos\left(\frac{s}{3}\right), \mathrm{sen}\left(\frac{s}{3}\right), 0\right)
\end{aligned}
$$

(1.0 punto)

Ahora evaluando en $t = \frac{\pi}{4}$ es $s = \frac{\pi}{2}$,

$$\hat{T}(s) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \tag{1}$$

$$\hat{N}(s) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \tag{2}$$

(0.5 punto)

III. usamos la fórmula de curvatura para parametrización por longitud de arco

$$\kappa(s) = \|\vec{r}''(s)\| = \|\frac{1}{3}\left(-\cos\left(\frac{s}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{3}\right), 0\right)\| = \frac{1}{3}$$

por lo cual vemos que es constante para todo $s \in \mathbb{R}$

(1.0 punto)

$\square$

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función a valores reales dada por:

$$F(x, y) = (-y, x).$$

Sea S el conjunto dado por:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 1.$$

Consideremos el conjunto D como el conjunto S sin las circunferencias de radio uno T_1 y T_2 centradas en el $(2, 0)$ y en el $(-2, 0)$ respectivamente. Verifique el teorema de Green para $F(x, y)$ y D.

Tip: El área de una elipse definida por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ está dada por $ab\pi$.

Solución. El ejercicio nos pide verificar que se satisface la siguiente igualdad:

$$\int_{\partial D^+} \langle F, dr \rangle dt = \iint_D 2dA.$$

(0.5 punto)

Comenzaremos del lado derecho de esta igualdad.

$$\begin{aligned}
\iint_D 2dA &= 2\iint_D dA, \\
&= 2(\text{Area}(S) \text{ - Area}(R_1) \text{ - Area}(R_2)), \\
&= 2(8\pi - \pi - \pi), \\
&= 12\pi.
\end{aligned}$$

(1.5 punto)

Ahora procedamos a resolver el lado izquierdo de la ecuación. Primero que todo notemos que:

$$\int_{\partial D^+} \langle F, dr \rangle dt = \int_{\partial S^+} \langle F, dr_1 \rangle dt + \int_{\partial T_1^-} \langle F, dr_2 \rangle dt + \int_{\partial T_2^-} \langle F, dr_3 \rangle dt,$$

donde cada una de estas curvas es regular y cerrada simple.

(0.5 punto)

Primero que todo notemos que una parametrización de ∂S^+ viene dada por $r_1 : [0, 2\pi] \to \partial S^+$ con

$$r_1(t) = (4\mathrm{cos(t)}, 2\mathrm{sen(t)}).$$

Así mismo $r_2 : [0, 2\pi] \to \partial T_1^+$ viene dada por:

$$r_2(t) = (\mathrm{cos(t)} + 2, \mathrm{sen(t)}).$$

Por último, $r_3 : [0, 2\pi] \to \partial T_2^+$ se puede elegir como:

$$r_3(t) = (\mathrm{cos(t)} - 2, \mathrm{sen(t)}).$$

(1 punto)

Ahora vamos a calcular la integral de linea sobre cada una de estas curvas.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S^+} \langle F, dr_1 \rangle dt &= \int_0^{2\pi} \langle F(4\mathrm{cos(t)}, 2\mathrm{sen(t)}), (-4\rangle \mathrm{sen}(t), 2\mathrm{cos}(t)) \rangle dt, \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (-2\mathrm{sen}(t), 4\mathrm{cos}(t)), (-4\rangle \mathrm{sen}(t), 2\mathrm{cos}(t)) \rangle dt, \\
&= \int_0^{2\pi} 8dt, \\
&= 16\pi.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T_1^+} \langle F, dr_2 \rangle dt &= \int_0^{2\pi} \langle F(\mathrm{cos(t)} + 2, \mathrm{sen(t)}), (-\mathrm{sen}(t), \mathrm{cos}(t)) \rangle dt, \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (-\mathrm{sen}(t), \mathrm{cos}(t)) + 2), (-\mathrm{sen}(t), 2\mathrm{cos}(t)) \rangle dt, \\
&= \int_0^{2\pi} 1 + 2\mathrm{cos}(t) dt, \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que cambiar el sentido de la curva modifica el signo de la integral de línea, tenemos que

$$\int_{\partial T_1^-} \langle F, dr_2 \rangle dt = -\int_{\partial T_1^+} \langle F, dr_2 \rangle dt = -2\pi.$$

Finalmente tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T_2^+} \langle F, dr_3 \rangle dt &= \int_0^{2\pi} \langle F(\cos(\mathrm{t}) - 2, \mathrm{sen}(\mathrm{t})), (-\mathrm{sen}(t), \cos(t)) \rangle dt, \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (-\mathrm{sen}(t), \cos(t)) - 2), (-\mathrm{sen}(t), 2\cos(t)) \rangle dt, \\
&= \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos(t) dt, \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Al igual que antes,

$$\int_{\partial T_2^-} \langle F, dr_3 \rangle dt = -\int_{\partial T_2^+} \langle F, dr_2 \rangle dt = -2\pi.$$

Así, podemos concluir que

$$\int_{\partial D^+} \langle F, dr \rangle dt = 16\pi - 2\pi - 2\pi = 12\pi.$$

Por lo tanto, hemos verificado el teorema de Green.

(2.5 punto)

□