Cálculo Vectorial

Respuestas a problemas impares, al final de la guía.

I. *CAMPOS CONSERVATIVOS*

E1 Sea $\vec{F}(x,y,z) = yze^{xz}\mathbf{i} + e^{xz}\mathbf{j} + xye^{xz}\mathbf{k}$, y $C : \vec{r}(t) = (t^2+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j} + (t^2-2t)\mathbf{k},\ \ 0 \leq t \leq 2$.

a) Encuentre una función f tal que $\vec{F} = \nabla f$.

b) Use parte a) para evaluar $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de la curva dada C.

E2 Calcule la integral de línea del campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^{xz}(xyz^2 + yz), xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy))$$

a lo largo del camino $\vec{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{\lambda}(t) = \left(\frac{\operatorname{senh}(5t^4)}{\operatorname{senh} 5}, t^4 + 5t^3 - 3t^2, \frac{1}{\ln 7}\ln(\ln(1+6t^8))\right)$$

y a lo largo del camino $\vec{\mu}[0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{\mu}(t) = \left(\ln(t^2 - t + 1), \operatorname{sen}(t^3 + 3t^2 - 4t), \frac{\cosh(t^5 - t) - 1}{(t^2+t+1)^{\frac{4}{7}}}\right)$$

E3 Sea $\vec{F} = (x^2+y)\mathbf{i} + (y^2+2x)\mathbf{j} + ze^z\mathbf{k}$.

a) Calcule el rotor de $\vec{F}$, $\nabla \times \vec{F}$.

b) Analizando el cálculo realizado en a), escriba $\vec{F}$ como la suma entre un campo conservativo y otro de expresión sencilla.

c) Mediante la descomposición en suma obtenida en b), encuentre el trabajo hecho por $\vec{F}$ sobre la hélice $\vec{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{t}{2\pi}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

II. *TEOREMA DE GREEN*

E4 Con el teorema de Green, calcule la integral de línea del campo $\vec{F}(x,y) = (\varphi(x) - y, x + \psi(y))$, donde φ y ψ son dos funciones reales de clase $\mathscr{C}^1$ definidas en $\mathbb{R}$, a lo largo de un cuadrado de lado z recorrido positivamente.

E5 Aplique el teorema de Green para calcular el área de la región limitada por la astroide $\vec{\lambda} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\lambda}(t) = (a\cos^3 t, a\operatorname{sen}^3 t)$.

E6 Considere las integrales

$$I_1 = \int_{\vec{\lambda}} (2x+y)^2\,dx - (x-2y)^2\,dy$$
$$I_2 = \int_{\vec{\mu}} (2x+y)^2\,dx - (x-2y)^2\,dy, d$$

donde $\vec{\lambda}, \vec{\mu} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\lambda}(t) = (t, t^2)$, $\vec{\mu}(t) = (t^2, t)$. Tome el teorema de Green para calcular la diferencia $I_1 - I_2$.

E7 Calcule la integral $\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x,y) = (xy+x+y, xy+x-y)$ y C es la circunferencia $x^2+y^2 = ax$, para a una constante positiva.

III. *INTEGRALES DE SUPERFICIE (DEFINICIÓN)*

E8 Evalúe la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ para el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$, donde S es la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ en el primer octante, con orientación hacia el origen.

E9 Evalúe la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ para el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = ze^{xy}\,\mathbf{i} - 3ze^{xy}\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$, donde S es el paralelogramo con ecuaciones paramétricas $x = u+v, y = u-v,\ \ z = 1+2u+v,\ \ 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 1$, con orientación hacia arriba.

E10 Encuentre el centro de masa de la semiesfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \ge 0$, si tiene densidad constante.

IV. *TEOREMA DE DIVERGENCIA DE GAUSS*

E11 Use el Teorema de Divergencia para evaluar

$$\iint_S (2x+2y+z^2)\,dS$$

donde S es la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

E12 Calcule el flujo exterior del campo vectorial

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (\operatorname{sen} xz + y^2)\mathbf{j} + (e^{xy^2} + x)\mathbf{k}$$

sobre la superficie S que rodea la región D acotada por los planos $y = 0, z = 0, z = 2-y$ y el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$.

E13 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = z\arctan(y^2)\mathbf{i} + z^3\ln(x^2+1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la parte del paraboloide $x^2+y^2+z = 2$ que es superior al plano $z = 1$ y está orientada hacia arriba.

E14 Calcule el flujo exterior del campo vectorial $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ a través del elipsoide $9x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 36$ (Cuidado: notar que el campo no está definido en el origen).

V. *TEOREMA DE STOKES*

E15 Sea C una curva cerrada, simple, regular a trozos, que está en el plano $x + y + z = 1$ y está recorrida en el sentido contra las manecillas cuando se observa desde encima. Demuestre que la integral

$$\int_C z\,dx - 2x\,dy + 3y\,dz$$

depende solamente del área de la región encerrada por C, y no de la forma de C o su ubicación en el plano.

E16 Verifique que el teorema de Stokes se cumple para el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, y la superficie S comprendida por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$, orientada hacia abajo.

E17 Una partícula se mueve a lo largo de segmentos de recta desde el origen, a los puntos $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$ y luego de regreso al origen, bajo la influencia del campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 4y^2\mathbf{k}.$$

Encuentre el trabajo hecho.

E18 Sea γ la curva resultante de la intersección del cilindro de base elíptica $x^2 + 4y^2 = 1$ y el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$. Calcule la integral de línea $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para

$$\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y),$$

a) Directamente

b) Usando el teorema de Stokes.

RESPUESTAS A IMPARES:

E1. a) $f(x, y, z) = ye^{xz}$, b) 4.

E3. a) $\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 1)$. b) $\vec{F} = \vec{G} + x\mathbf{j}$, donde $\vec{G} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 + x)\mathbf{j} + ze^z\mathbf{k}$ es conservativo. c) π.

E5. $\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

E7. $\dfrac{\pi a^3}{4}$.

E9. 4.

E11. $\dfrac{4\pi}{3}$.

E13. $\dfrac{3\pi}{2}$.

E15. Con Stokes se obtiene que la integral es igual a $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \text{Área}(P)$, donde P es la región interior a C.

E17. 3.