DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 2 Cálculo III
21 de julio de 2023

IMPORTANTE: debe resolver cada problema en hojas separadas.

Al final, debe entregar tres (3) hojas, que tengan como mínimo: nombre, código de sección, y número de problema a resolver.

Problema 1. Calcule

$$\iint\limits_R \left(\frac{x}{y}\right)^3 dxdy$$

donde R es la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 4y^2$.

Solución. Utilizamos el cambio de variables: $u = \frac{y}{x^2}, v = \frac{x}{y^2}$. Entonces la región R se transforma en

$$R' = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}.$$

Además,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = Det\begin{pmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3} \end{pmatrix} = 4\frac{xy}{x^3y^3} - \frac{1}{x^2y^2} = \frac{3}{x^2y^2}$$

Como $uv = \frac{xy}{x^2y^2} = \frac{1}{xy}$, entonces

$$x^2y^2 = \frac{1}{u^2v^2} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{3u^2v^2}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R \left(\frac{x}{y}\right)^3 dxdy &= \iint\limits_R \frac{x}{y^2}\frac{x^2}{y}\, dxdy \\
&= \int_1^2 \int_1^4 \left(\frac{v}{u}\right) \frac{1}{3u^2v^2}\, dvdu \\
&= \int_1^2 \int_1^4 \frac{1}{3u^3v}\, dvdu \\
&= \int_1^4 \frac{dv}{v} \int_1^2 \frac{du}{3u^3} = \ln|v|\Big|_1^4 \cdot \frac{1}{3}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^2 \\
&= \ln 4 \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right) \\
&= \ln 4 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\ln 4}{8} = \frac{\ln 2}{4}.
\end{aligned}$$

□

Problema 2. Calcular el volumen del sólido en $\mathbb{R}^3$ ubicado en el primer octante encerrado por el cilindro de ecuación $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Solución. La región sólida denotada por E, se puede describir en coordenadas cilindricas como:

$$E = \{(\theta, r, z) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\operatorname{sen}(\theta), 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

Usando el teorema de cambio de variables, el volumen V del sólido se calcula mediante la expresión:

$$\begin{aligned}
V(E) &= \iiint_E dv = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}(\theta)}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}(\theta)} r\sqrt{4-r^2} dr d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (4-r^2)^{3/2}\Big|_0^{2\operatorname{sen}(\theta)} d\theta = -\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3(\theta) - 1 d\theta \\
&= -\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta) - 1 d\theta = -\frac{8}{3}\left(\operatorname{sen}(\theta) - \frac{\operatorname{sen}^3(\theta)}{3} - \theta\right)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{4\pi}{3} - \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

$\square$

Problema 3. Considere el camino regular a trozos $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ que parte de $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, y va sobre la recta $y = x$ hasta $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, para luego ir sobre $x^2 + y^2 = 4$, dentro del primer cuadrante, hasta $(1, \sqrt{3})$.

a) Calcule $\int\limits_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{G}(x, y) = (0, 3x)$.

b) Calcule $\int\limits_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F}(x, y) = (x - 2y, x + y)$.

(*Indicación para* b): Sea $\vec{H} := \vec{F} - \vec{G}$. Decida si $\vec{H}$ es un campo conservativo. ¿Puede esto ayudar a hacer el cálculo más fácil?).

Solución.

a)

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r} &= \int_\Gamma 3x\, dy \\
&= \int_{\Gamma_1} 3x\, dy + \int_{\Gamma_2} 3x\, dy,
\end{aligned}$$

donde Γ_1 y Γ_2 se parametrizan como

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 : \vec{r}(t) = (t, t), \frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \sqrt{2}. \text{ Así, } x = t, dy = dt. \text{ Además,} \\
&\Gamma_2 : \vec{r}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t), \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{3}. \text{ Luego } x = 2\cos t, dy = (2\cos t)\, dt.
\end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma 3x\, dy &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} 3t\, dt + 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos t(2\cos t)\, dt \\
&= 3\tfrac{t^2}{2}\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} + 12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\, dt \\
&= \tfrac{3}{2}(2 - \tfrac{1}{3}) + 12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2t)\, dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}\frac{5}{3} + 6[t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{5}{2} + 6\left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

b) Sea

$$\vec{H} = \vec{F} - \vec{G} = (x - 2y, x + y) - (0, 3x) = (x - 2y, -2x + y) = (P, Q).$$

Entonces $\partial_x Q = \partial_x(-2x + y) = -2 = \partial_y(x - 2y)$. Como el campo es $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$, entonces $\vec{H}$ es conservativo y $\vec{H} = \nabla h$ para cierto potencial $h(x, y)$. pero $\partial_x h(x, y) = x - 2y \Rightarrow h(x, y) = \frac{x^2}{2} - 2xy + C(y)$. Tomando $C(y) = \frac{y^2}{2}$ se completa $h(x, y) = \frac{x^2}{2} - 2xy + \frac{y^2}{2}$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{r} \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \int_\Gamma \nabla h \cdot d\vec{r} \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + h(1, \sqrt{3}) - h(\tfrac{\sqrt{3}}{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{3}) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 2 - 2\sqrt{3} - (-\tfrac{1}{3}) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{6}.
\end{aligned}
$$

□

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 90 minutos.