DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo para Ingeniería Eléctrica, Forma A
20 de mayo de 2022

Problema 1. Sea $n \geq 2$. Considere el problema:

$$\begin{cases} \text{mín} & x_1 \\ \text{tal que:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n(n-1)} \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \end{cases}$$

Encuentre la solución optima.

Hint: Puede ser de ayuda utilizar la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}.$$

Solución. En este problema tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Las condiciones KKT son las siguientes:

- Condición estacionaria:

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda \nabla g(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mu \nabla h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0),$$

  o sea:

$$(1, 0, \ldots, 0) + \lambda(1, 1, \ldots, 1) + 2\mu\left(x_1 - \frac{1}{n}, x_2 - \frac{1}{n}, \ldots, x_n - \frac{1}{n}\right) = (0, 0, \ldots, 0),$$

  en resumen tenemos las siguientes ecuaciones:

$$1 + \lambda + 2\mu\left(x_1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \tag{1}$$

$$\lambda + 2\mu\left(x_i - \frac{1}{n}\right) = 0, \text{ para } i \neq 1. \tag{2}$$

- Condiciones de factibilidad:
$$\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0 \tag{3}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)} \leq 0. \tag{4}$$
- Condición de holgura:
$$\mu \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\right] = 0. \tag{5}$$
- Condición de signo: Como se trata de encontrar el mínimo local de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $\mu \geq 0$.

De la condición de holgura, podemos distinguir dos casos:

a) $\mu = 0$. Reemplazando este valor en las condiciones estacionarias, ecuaciones (1) y (2), obtenemos que $\lambda = -1$ y $\lambda = 0$, por lo que este caso no sirve.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)} = 0$. Viendo este caso y usando el hint, tenemos:
$$\left(0 - \frac{1}{n}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2,$$
o sea que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(0, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}\right)$ y reemplazando estos valores en las condiciones estacionarias, nos da:
$$\begin{aligned} 1 - \frac{2\mu}{n} + \lambda &= 0 \\ 2\mu \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \lambda &= 0, \text{ para } i \neq 1 \end{aligned}$$
y resolviendo estas ecuaciones para μ y λ, obtenemos los valores:
$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{1}{n} \\ \mu &= \frac{n-1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Entonces, hemos obtenido los puntos KKT:
$$(x, \mu, \lambda) = \left(0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, \frac{n-1}{2}, -\frac{1}{n}\right)$$
el cual es un mínimo condicionado de la función $f(x_1, \ldots, x_n)$.

$\square$

Problema 2. Considere la función $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y la función f definida por $f(x,y,z)=\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)$, cuando $xyz\neq 0$. Ambas funciones son diferenciables en sus respectivos dominios. Demuestre que el vector (x^2,y^2,z^2) es ortogonal a $\nabla(g\circ f)(x,y,z)$.

Solución. Para demostrar ortogonalidad, basta obtener la igualdad

$$\langle (x^2,y^2,z^2),\nabla(g\circ f)(x,y,z)\rangle = 0,\quad \text{para todo } x,y,z\neq 0\ . \tag{6}$$

Ahora bien, para calcular el gradiente de la composición primero observamos que el Jacobiano de $(g\circ f)$ es el vector gradiente transpuesto, es decir, $D(g\circ f)(x,y,z)=\nabla(g\circ f)(x,y,z)^T$. Además apreciamos que las funciones g y f son diferenciables (en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ resp.) y así su $g\circ f$ será diferenciable en $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$, por lo cual, podemos aplicar regla de la cadena

$$D(g\circ f)(x,y,z)=Dg(f(x,y,z))Df(x,y,z). \tag{7}$$

Calculando cada Jacobiano :

$$Dg(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}\Big|_{(u,v)=\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)} \tag{8}$$

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & \frac{1}{z^2} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Luego multiplicando las matrices se obtiene

$$D(g\circ f)(x,y,z)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)-\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) & \frac{1}{z^2}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}\Big|_{(u,v)=\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)}. \tag{10}$$

Por último, calculamos el producto interno:

$$\begin{aligned}\langle (x^2,y^2,z^2),\nabla(g\circ f)(x,y,z)\rangle &= \left(-\frac{x^2}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{y^2}{y^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial g}{\partial v}\right)+\frac{z^2}{z^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\Big|_{(u,v)=\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Por lo tanto, dichos vectores son ortogonales, para todo $x,y,z\neq 0$.

□

Problema 3. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{yx+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

i) Determinar los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que la función es continua.

ii) Hallar, en caso de que existan, las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

iii) Determine si existe la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ en la dirección $\vec{d} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. En caso de que exista calcúlela.

Solución.

i) Primero analicemos la continuidad cuando $(x,y) \neq (0,0)$. En este caso, por álgebra de funciones continuas, tenemos que la función $f(x,y) = \frac{yx+y^3}{x^2+y^2}$ es continua. Por otra parte, asumamos que la función es continua en el punto $(x,y) = (0,0)$. Luego, se satisface que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Por ende, para todo camino $C \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ se debe satisfacer que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C}} \frac{yx + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Sin embargo, para notemos que para los caminos $C_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx \text{ y } (x,y) \neq (0,0)\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_m}} \frac{yx + y^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(mx)x + (mx)^3}{x^2 + (mx)^2}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2 + m^3x^3}{x^2 + m^2x^2}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{m + m^3x}{1 + m^2}, \\
&= \frac{m}{m^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Es decir, hay infinitos caminos por los cuales el límite es distinto de 0 lo cual es una contradicción a la hipótesis de que la función era continua en el $(0,0)$. Por ende la función no es continua en el $(0,0)$.

ii) Usando las definiciones de derivadas parciales, tenemos que:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2} \cdot \frac{1}{h} = 1.$$

iii) Utilizamos la definición de derivada direccional para obtener que:

$$\begin{aligned}
f'(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})) - f(0,0)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2/2 + h^3/(2\sqrt{2})}{h^2} \cdot \frac{1}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} + \frac{1}{2\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

Por lo tanto la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ en la dirección $\vec{d} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ no existe.

$\square$