DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 3 Cálculo III forma A
24 de noviembre de 2022

Problema 1. Sea la integral

$$I = \iint_R \cos(x^2)dxdy,$$

donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{\pi}; y \leq x \leq \sqrt{\pi}\}$.

a) Reescriba esta integral en el orden $dydx$.

b) Calcule la integral I.

Solución.

a) Como R es una región del tipo II, convertiremos esta región a una del tipo I. Como $0 \leq y \leq \sqrt{\pi}$ e $y \leq x \leq \sqrt{\pi}$, entonces $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$ y $0 \leq y \leq x$, por tanto

$$I = \iint_D \cos(x^2)dxdy,$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}; 0 \leq y \leq x\}$.

b) Directamente calculamos la integral

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \cos(x^2)dxdy \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \cos(x^2)dydx \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\ (y)\big|_0^x\, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x^2)\right)\big|_0^{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(0)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

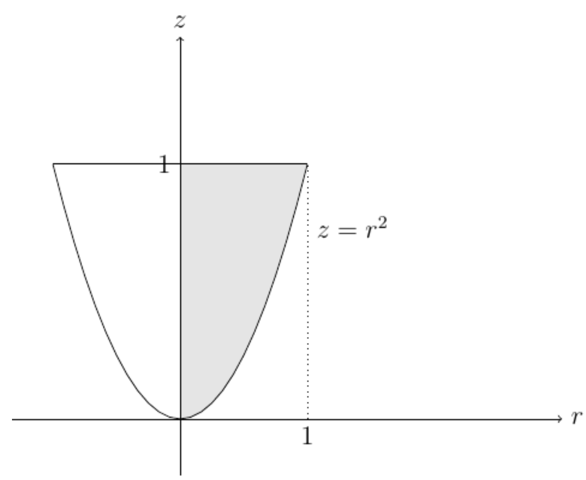
Problema 2. Para $a < 2$, determine el valor de

$$\iiint_\Omega \frac{x^2}{(x^2+y^2)^a} dxdydz,$$

donde Ω es el sólido acotado que está encerrado entre el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$.

Solución. Usaremos coordenadas cilíndricas. Primero si proyectamos el sólido en el plano XY, obtenemos una circunferencia unitaria centrada en el origen. De ahí tenemos que $0 \le \theta \le 2\pi$.

Por otro lado, si fijo θ, intersectamos el sólido Ω con el plano dado por dicho θ tenemos una región plana en rz que se ilustra a continuación:



Del dibujo, se tiene que $0 \le z \le 1$ y $0 \le r \le \sqrt{z}$ (o bien $0 \le r \le 1$ y $r^2 \le z \le 1$). En resumidas cuentas:

$$\Omega = \{(r,\theta,z) : 0 \le z \le 1,\ 0 \le r \le \sqrt{z},\ 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

o incluso

$$\Omega = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le 1,\ r^2 \le z \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Así, usando el teorema de Cambio de Variable, tenemos

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \frac{x^2}{(x^2+y^2)^a} dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}} \frac{r^2\cos^2(\theta)}{r^{2a}} r\,drdzd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}} r^{3-2a}\cos^2(\theta)drdzd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2(\theta)\left[\left.\frac{r^{4-2a}}{4-2a}\right|_0^{\sqrt{z}}\right] dzd\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4-2a}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2(\theta) z^{2-a} dz d\theta \\
&= \frac{1}{4-2a}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\left[\left.\frac{z^{3-a}}{3-a}\right|_0^1\right] d\theta \\
&= \frac{1}{(4-2a)(3-a)}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{(4-2a)(3-a)}\left.\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right]\right|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{(4-2a)(3-a)}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Problema 3. Calcule la integral $\iint\limits_R y^2\, dxdy$, donde R es la región limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$.

Solución. Sean $u = xy, v = xy^2$.

Su jacobiano es

$$
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 2xy^2 - xy^2 = xy^2 = v = |v|.
$$

La región se transforma en $R' = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}$.

Como $y^2 = \frac{v^2}{u^2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_R y^2\, dx\, dy &= \iint\limits_{R'} \frac{v^2}{u^2}\frac{1}{v}\, du\, dv \\
&= \int_1^2\int_1^2 \frac{v}{u^2}\, du\, dv = \int_1^2 v\, dv \int_1^2 \frac{du}{u^2} \\
&= \frac{4-1}{2}[-u^{-1}]_1^2 = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Tiempo: 90 minutos.

Justifique completamente sus respuestas.