DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo Avanzado, Forma A
20 de mayo de 2022

Problema 1. Sea n un entero impar mayor que 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x, y) = ax^n + by^n - x - y$, con a, b constantes no nulas. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de f en términos de a y b.

Solución. Dado que a y b son positivos, tenemos que

Primero que todo, encontremos los puntos críticos de $f(x, y)$. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico de $f(x, y)$ entonces:

$$\nabla(f(x, y)) = (nax^{n-1} - 1, nby^{n-1} - 1) = (0, 0),$$

o de manera equivalente, se satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$nax^{n-1} - 1 = 0,$$
$$nby^{n-1} - 1 = 0.$$

De la primera y de la segunda ecuación se puede deducir que:

I) $x = \pm \left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

II) $y = \pm \left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Luego los puntos críticos son $\left(\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \pm \left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$ y $\left(-\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \pm \left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$, donde $a, b > 0$.

Dado que $f(x, y)$ es de clase C^2, pues $f(x, y)$ es polinomial de grados enteros positivos, la matriz Hessiana de f existe en todo punto y es simétrica. La matriz Hessiana en un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ está dada por:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} n(n-1)ax^{n-2} & 0 \\ 0 & n(n-1)by^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces los casos:

a) Para el punto $(x_n, y_n) = \left(\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$, se tiene que $x_n > 0$, e $y_n > 0$, y para $H_f(x_n, y_n)$ tenemos

$$H_f(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} n(n-1)ax_n^{\frac{n-2}{n-1}} & 0 \\ 0 & n(n-1)by_n^{\frac{n-2}{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $Det(H_f(x_n,y_n)) = abn^2(n-1)^2(x_ny_n)^{\frac{n-2}{n-1}} > 0$, y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n,y_n) = abn(n-1)x_n^{\frac{n-2}{n-1}} > 0$. Por lo tanto (x_n,y_n) es un punto de mínimo de $f(x,y) = ax^n + by^n - x - y$

b) Para el punto $(x_n,y_n) = \left(\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, -\left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$ se tiene $Det(H_f(x_n,y_n)) = abn^2(n-1)^2(\frac{1}{na})^{\frac{n-2}{n-1}}(-1)^{n-2}(\frac{1}{nb})^{\frac{n-2}{n-1}} < 0$ y (x_n,y_n) es un punto de silla.

c) Para el punto $(x_n,y_n) = \left(-\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$ se tiene $Det(H_f(x_n,y_n)) = abn^2(n-1)^2(-1)^{n-2}(\frac{1}{na})^{\frac{n-2}{n-1}}(\frac{1}{nb})^{\frac{n-2}{n-1}} < 0$ y (x_n,y_n) es un punto de silla.

d) Para el punto $(x_n,y_n) = \left(-\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{1}{n-1}}, -\left(\frac{1}{nb}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$ se tiene $Det(H_f(x_n,y_n)) = abn^2(n-1)^2(-1)^{2(n-2)}(\frac{1}{na})^{\frac{n-2}{n-1}}(\frac{1}{nb})^{\frac{n-2}{n-1}} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n,y_n) = n(n-1)(-1)^{n-2}\left(\frac{1}{na}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} < 0$, y (x_n,y_n) es un punto de máximo local.

Nota: Si el estudiante hace todo el análisis correcto pero para un caso particular (por ejemplo, $n=3$, ó 5, etc.), se asigna la mitad del puntaje total (es decir, 3 puntos).

□

Problema 2.

a) Desarrollar la serie de Fourier por cosenos para $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

Solución.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\cancel{\frac{x\,\mathrm{sen}\,(nx)}{n}} + \cancel{\frac{\pi\,\mathrm{sen}\,(nx)}{n}} - \frac{\cos(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_0^\pi \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{2}{\pi n^2}, & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} a_n\cos(nx) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\cos((2k-1)x)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{(2k-1)^2}\right)\cos((2k-1)x)$$

□

b) Determinar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Solución. Por el teorema de convergencia, 0 es un punto de continuidad pues se hizo la expansión par. Entonces:

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{(2k-1)^2}\right)$$

Entonces:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

$\square$

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Determinar los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que la función es continua.

ii) Hallar, en caso de que existan, las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

iii) Determine si existe la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ en la dirección $\vec{d} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. En caso de que exista calcúlela.

Solución.

i) Primero analicemos la continuidad cuando $(x,y) \neq (0,0)$. En este caso, por álgebra de funciones continuas, tenemos que la función $f(x,y) = \frac{yx+y^3}{x^2+y^2}$ es continua. Por otra parte, asumamos que la función es continua en el punto $(x,y) = (0,0)$. Luego, se satisface que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx+y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Por ende, para todo camino $C \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ se debe satisfacer que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in C}} \frac{yx+y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Sin embargo, para notemos que para los caminos $C_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx \text{ y } (x,y) \neq (0,0)\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_m}} \frac{yx+y^3}{x^2+y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(mx)x+(mx)^3}{x^2+(mx)^2}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2+m^3x^3}{x^2+m^2x^2}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{m+m^3x}{1+m^2}, \\
&= \frac{m}{m^2+1}.
\end{aligned}$$

Es decir, hay infinitos caminos por los cuales el límite es distinto de 0 lo cual es una contradicción a la hipótesis de que la función era continua en el $(0,0)$. Por ende la función no es continua en el $(0,0)$.

ii) Usando las definiciones de derivadas parciales, tenemos que:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2} \cdot \frac{1}{h} = 1.$$

iii) Utilizamos la definición de derivada direccional para obtener que:

$$\begin{aligned}
f'(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}))-f(0,0)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2/2+h^3/(2\sqrt{2})}{h^2} \cdot \frac{1}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} + \frac{1}{2\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

Por lo tanto la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$ en la dirección $\vec{d} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ no existe.

$\square$