DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

# PEP 1 Cálculo III
# Grupo III
# 15 de junio de 2023

**IMPORTANTE: debe resolver cada problema en hojas separadas**.

Al final, debe entregar tres (3) hojas, que tengan como mínimo: nombre, código de sección, y número de problema a resolver.

**Problema 1.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $f_x(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$, y

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\,\mathrm{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Pruebe que $f$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

**Solución.** Hemos visto que si una función tiene derivadas parciales continuas en un conjunto abierto, entonces dicha función es diferenciable en dicho conjunto, por lo que si probamos que la función $f$ tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2$ se concluye que la función es diferenciable en todo su dominio.
Ya está dado que $f_x(x, y)$ es continua, por lo que restaría verificar si $f_y(x, y)$ es continua.

Primero notemos que en el punto $(x, y) \neq (0, 0)$: la función $xy\,\mathrm{sen}(x^2 + 2xy + y^2)$ es continua, pues es un producto entre un polinomio y la composición entre dos funciones continuas; y la función $x^2 + y^2$ también es continua, pues es un polinomio. Además, en el punto $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene que $x^2 + y^2 \neq 0$, por lo que la función

$$f_y(x,y) = \frac{xy\,\mathrm{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2},$$

es continua en todo $(x, y) \neq (0, 0)$.
Para probar que $f_y$ es continua en $(0, 0)$, basta demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = f_y(0,0).$$

Lo anterior es equivalente a demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,\mathrm{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2} = 0,$$

lo cual puede realizarse de las siguientes maneras:

- Por estimación cartesiana: se tiene que

  $$|f_y(x,y) - 0| = \left| \frac{xy\,\mathrm{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2} - 0 \right|$$

  (puesto que $|\,\mathrm{sen}\,\alpha| \leq |\alpha| \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$)

  $$\leq \frac{|x||y||x^2+2xy+y^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x||y|(x^2+2|x||y|+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= |x||y| \left( \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{2|x||y|}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right)$$

Como $x^2 \leq x^2+y^2$, $y^2 \leq x^2+y^2$, y por desigualdad de Young, $2|x||y| \leq x^2+y^2$:

$$\begin{aligned} &\leq |x||y| \left( \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \right) \\ &= 3|x||y|. \end{aligned}$$

Luego, por teorema de compresión,

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f_y(x,y) - 0| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|x||y| = 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

de donde $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = 0 = f_y(0,0)$ y entonces $f_y(0,0)$ es continua en $(0,0)$.

- O bien, por coordenadas polares:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy \operatorname{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2} \right| &= \lim_{r\to 0^+} \left| \frac{r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}((r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta)^2)}{r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} \right| \\ &= \lim_{r\to 0^+} \left| \frac{r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta))}{r^2} \right| \end{aligned}$$

(puesto que $|\operatorname{sen}\alpha| \leq 1$ y $|\cos\alpha| \leq 1 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$)

$$\leq \lim_{r\to 0^+} r^2 \cdot \left| \frac{\operatorname{sen}(r^2(1+\operatorname{sen}(2\theta)))}{r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} \right|$$

(puesto que $|\operatorname{sen}\alpha| \leq |\alpha| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$)

$$\leq \lim_{r\to 0^+} r^2 \cdot \frac{r^2|1+\operatorname{sen}(2\theta)|}{r^2}$$

(puesto que $|1+\operatorname{sen}(2\theta)| \leq 2$)

$$\leq \lim_{r\to 0} 2r^2 = 0,$$

luego por teorema de Compresión, se sigue que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy \operatorname{sen}(x^2+2xy+y^2)}{x^2+y^2} = 0.$

□

**Problema 2.** Considere el sistema

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3,$$

$$u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2.$$

Determine si es que es posible escribir $u$ y $v$ en términos de $(x,y,z)$ cerca del punto $(x,y,z,u,v) = (1,1,1,1,1)$. Calcule el valor de $\dfrac{\partial u(1,1,1)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v(1,1,1)}{\partial x}$.

**Solución.**
Primero que todo podemos considerar el par de funciones:

$$F_1(x,y,z,u,v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3,$$

$$F_2(x,y,z,u,v) = u^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2,$$

Y así, definir una nueva función:

$$F(x,y,z,u,v) = (F_1(x,y,z,u,v), F_2(x,y,z,u,v)).$$

Una vez hemos definido estas funciones se procede a verificar las hipótesis del teorema de la función implícita.

Primero que todo, $F$ es $C^1$ , pues tanto $F_1$ y $F_2$ son de clase $C^1$ al ser polinomios con exponentes naturales .
Segundo, claramente el punto $(1,1,1,1,1)$ satisface que $F(1,1,1,1,1) = (0,0)$.
Finalmente: si $D_{u,v}(F)$ es la matriz jacobiana de $F$ respecto de las variables $u$ y $v$, entonces

$$det(D_{u,v}(F)) = det\begin{pmatrix} xz & 2yv \\ 3u^2yz - 2uv^2 & 2x - 2vu^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$det(D_{u,v}(F(1,1,1,1,1)) = det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Así, el teorema de la función implícita asegura que es posible escribir $u$ y $v$ en términos de $(x,y,z)$ cerca del punto $(x,y,z,u,v) = (1,1,1,1,1)$.

Para la segunda parte del ejercicio, dado que alrededor del $(1,1,1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F_1(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z))}{\partial x}, \\ &= y^2 + zu(x,y,z) + xz\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + 2yv(x,y,z)\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Reemplazando en $(1,1,1)$ se obtiene que

$$0 = 2 + \frac{\partial u(1,1,1)}{\partial x} + 2\frac{\partial v(1,1,1)}{\partial x}.$$

De manera análoga:

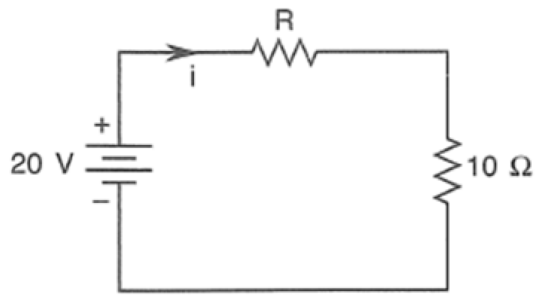
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F_2(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z))}{\partial y}, \\ &= 3yzu^2(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + 2v(x,y,z) + 2x\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} - 2v^2u\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} \\ &\quad - 2u^2v\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \end{aligned}$$

Y sustituyendo $(x,y,z) = (1,1,1)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= 3\frac{\partial u(1,1,1)}{\partial x} + 2 + 2\frac{\partial v(1,1,1)}{\partial x} - 2\frac{\partial u(1,1,1)}{\partial x} - 2\frac{\partial v(1,1,1)}{\partial x}. \\ &= \frac{\partial u(1,1,1)}{\partial x} + 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, resolviendo este sistema de ecuaciones, se concluye que $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = -2$ y $\frac{\partial v(1,1,1)}{\partial x} = 0$.

□




**Problema 3.** Considere el siguiente circuito en serie

La potencia absorbida por la resistencia $R$ esta dada por $P(R, i) = i^2 R$, donde $i$ es la intensidad de corriente que pasa por el circuito. Sabiendo que $10i + iR = 20$, encuentre el valor de la resistencia $R \geq 0$ para que la potencia absorbida por ella sea máxima.

*Hint: Para el Lagrangiano o en las condiciones estacionarias asuma que $\lambda \neq 0$.*

**Solución.** Usando KKT, tenemos que:

$$\begin{cases} \text{máx} & i^2 R \\ \text{tal que:} & 10i + iR - 20 = 0 \\ & -R \leq 0 \end{cases}$$

En este problema tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(R, i) =& i^2 R \\ g(R, i) =& 10i + iR - 20 \\ h(R, i) =& -R \end{aligned}$$

Las condiciones KKT son las siguientes:

- Condición estacionaria: $\begin{cases} i^2 + \lambda i - \mu & = 0 \\ 2iR + \lambda(10 + R) & = 0 \end{cases}.$
- Condición de factibilidad: $\begin{cases} 10i + iR - 20 & = 0 \\ -R & \leq 0 \end{cases}.$
- Condición de holgura:
$$\mu\,[-R] = 0.$$
- Condición de signo: Como se trata de encontrar el máximo local de $P(R, i)$, entonces $\mu \leq 0$ .

De la condición de Holgura tenemos dos casos $R = 0$ o $\mu = 0$. Si $R = 0$, tenemos que de la ecuación estacionaria $2iR + \lambda(10 + R) = 0$, nos da que $\lambda$ $0$, cosa que no puede ocurrir (hint). Ahora, si $\mu = 0$, entonces de las ecuaciones estacionarias tenemos que:

$$i^2 + \lambda i = 0 \Rightarrow i(i + \lambda) = 0 \Rightarrow i = 0 \vee i = -\lambda.$$

Si $i = 0$, y viendo la ecuación de factibilidad $10i + iR - 20 = 0 \Rightarrow -20 = 0$, cosa que no es cierta . Si $i = -\lambda$, tenemos de la ecuación estacionaria $2iR + \lambda(10 + R) = 0 \Rightarrow iR - 10i = 0 \Rightarrow i(R - 10) = 0$, de donde la única opción valida es que $R = 10$.

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 90 minutos.