DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 1 Cálculo III, Forma B
19 de abril de 2022

Problema 1. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-3)^k(y+2)}{(x-3)^2+(y+2)^2}, & (x,y) \neq (3,-2), \\ 0, & (x,y) = (3,-2). \end{cases} \tag{1}$$

a) Encuentre todos los valores enteros de k para que la función sea continua en $(3,-2)$.

b) Encuentre todos los valores naturales de k para que la función sea diferenciable en $(3,-2)$.

(Sugerencia: Puede ser útil el cambio $z = x-3$, $w = y+2$ y luego proceder en coordenadas polares).

Solución. a) Para que la función sea continua en el punto $(3,-2)$, se debe cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(3,-2)} \frac{(x-3)^k(y+2)}{(x-3)^2+(y+2)^2} = 0. \tag{2}$$

Podemos notar que si realizamos el cambio de variable $z = x-3$ y $w = y+2$, se obtiene

$$\lim_{(z,w)\to(0,0)} \frac{z^k w}{z^2+w^2}, \tag{3}$$

luego por medio de coordenadas polares $z = r\cos\theta$ y $w = r\operatorname{sen}\theta$, se tendrá

$$\lim_{r\to 0} r^{k-1}(\cos\theta)^k \operatorname{sen}\theta. \tag{4}$$

- **Caso 1:** $k-1>0$**:**

  Se satisface que

  $$-1 \leq (\cos\theta)^k \operatorname{sen}\theta \leq 1$$

  y multiplicando la desigualdad por $r^{k-1} > 0$,

  $$-r^{k-1} \leq r^{k-1}\cos^k\theta \operatorname{sen}\theta \leq r^{k-1}.$$

  Pero $\lim_{r\to 0^+}(-r^{k-1}) = 0 = \lim_{r\to 0^+} r^{k-1}$, luego por el teorema de la compresión, se sigue que

  $$\lim_{r\to 0} r^{k-1}(\cos\theta)^k \operatorname{sen}\theta = 0.$$

- **Caso 2:** $k-1 \leq 0$**:**

  Se considera
  $$\lim_{z\to 0} f(z,0) = \lim_{z\to 0} \frac{z^k 0}{z^2+0^2} = 0, \tag{5}$$
  y
  $$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^{k+1}}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{k-1}}{2}.$$
  Este límite, o bien es igual a $\frac{1}{2}$ si $k=1$, o bien no existe si $k<1$. En cualquiera de los dos casos, al no resultar igual a cero como el límite obtenido en (5), el límite no existe.

Por lo tanto, la función f es continua en $(3,-2)$ cuando $k>1$.

b) Primero obtendremos las derivadas parciales en el punto $(3,-2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(3,-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h,-2)-f(3,-2)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^k 0}{h^2} = 0, \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(3,-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3,h-2)-f(3,-2)}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0^k}{h^2}, \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Ahora nos preocupamos de calcular el límite
$$\lim_{(x,y)\to(3,-2)} \frac{|f(x,y)-f(3,-2)-f_x(3,-2)(x-3)-f_y(3,-2)(y+2)|}{||(x-3,y+2)||}. \tag{8}$$

Reemplazando los valores de la función y sus derivadas en el punto $(3,-2)$, se tendrá
$$\lim_{(x,y)\to(3,-2)} \frac{|(x-3)^k(y+2)|}{\left((x-3)^2+(y+2)^2\right)^{3/2}}, \tag{9}$$

luego de realizar los mismos cambios de variables de a), se obtiene
$$\lim_{(x,y)\to(3,-2)} \frac{|(x-3)^k(y+2)|}{\left((x-3)^2+(y+2)^2\right)^{3/2}} = \lim_{r\to 0} r^{k-2}|(\cos\theta)^k \operatorname{sen}\theta|, \tag{10}$$

- **Caso 1:** $k-2>0$**:**

  Se satisface
  $$0 \leq |(\cos\theta)^k \operatorname{sen}\theta| \leq 1$$
  Multiplicando esta desigualdad por r^{k-2}, se tiene
  $$0 \leq r^{k-2}|(\cos\theta)^k \operatorname{sen}\theta| \leq r^{k-2},$$
  y como $\lim\limits_{r\to 0+} r^{k-2}=0$, entonces
  $$\lim_{r\to 0^+} r^{k-2}|(\cos\theta)^k \operatorname{sen}\theta| = 0, \tag{11}$$

- **Caso 2:** $k-2 \leq 0$**:**

  Se tiene que
  $$\lim_{t\to 0} f(t+3,t-2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^{k+1}}{2^{3/2}t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{k-2}}{2^{3/2}}$$
  que es igual a $\frac{1}{2^{3/2}}$ si $k=2$, y no existe si $k<2$. Puesto que no es igual a 0, el límite del residuo no es igual a cero y la función no es diferenciable en este caso.

  Por lo tanto, se concluye que la función f es diferenciable en el punto $(3,-2)$ cuando $k>2$.

$\square$

Problema 2. Usando la definición de diferenciabilidad, determine si la función $f(x,y) = |x|y^2$ es diferenciable en $(0,0)$.

Solución. Las derivadas parciales son $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$

Y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$, ya que $f(h,0) = f(0,h) = f(0,0) = 0$

Por lo tanto $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ si y solo si

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Pero, $0 \leq \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{|x|y^2}{|x|} = y^2$, y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$

Luego, por teorema del sándwich se deduce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ y, por tanto, f es diferenciable en $(0,0)$

$\square$

Problema 3. Encuentre la ecuación de todos los planos que se encuentran a la distancia 1 del origen $(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ y que contienen a la recta definida por:

$$x = 2y = 3 - z$$

Solución. Notar que un plano a distancia 1 del origen es tangente a la esfera de radio 1, por lo tanto el punto de tangencia (a,b,c) satisface $a^2+b^2+c^2=1$ y cumple el rol de ser vector posición y normal a la vez, por tanto la ecuación del plano es:

$$\Pi : a(x-a) + b(x-c) + c(x-c) = 0$$

equivalentemente

$$\Pi : ax + by + cz = 1,$$

por tanto basta encontrar a, b y c. Además $(0,0,3),(2,1,1) \in \Pi$, evaluando la ecuación de Π en $(0,0,3)$, tenemos que $3c = 1 \Leftrightarrow c = 1/3$ y evaluando la ecuación de Π en $(2,1,1)$, se obtiene $2a+b+c=1$ (. Ahora reemplazando c en $a^2+b^2+c^2=1$ y $2a+b+c=1$, se obtienen las ecuaciones: $a^2+b^2=\dfrac{8}{9}$ y $2a+b=\dfrac{2}{3}$, de donde reemplazando b se tiene que: $45a^2-24a-4=0$ ( ), por tanto

$$a = 2/3 \ \vee \ a = -2/15,$$

mientras que

$$b = 14/15 \ \vee \ -2/3,$$

por tanto $(a,b,c) = (-2/15, 14/15, 1/3) \ \vee \ (a,b,c) = (2/3, -2/3, 1/3)$, así hay dos planos que verifican lo pedido.

$$\Pi : -2x + 14y + 5z = 15 \text{ y } \Pi' : 2x - 2y + z = 3$$

$\square$