DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 2 Cálculo III
6 de diciembre de 2022
Versión A

IMPORTANTE: debe resolver cada problema en hojas separadas.

Al final, debe entregar tres (3) hojas, que tengan como mínimo: nombre, código de sección, y número de problema a resolver.

Problema 1. Calcular $I = \iiint\limits_U (x+y+z)(x+y-z)(x-y-z)\,dx\,dy\,dz$, donde U es el tetraedro limitado por los planos $x+y+z=0$, $x+y-z=0$, $x-y-z=0$, $2x-z=1$.

(*Ayuda:* $2x - z = \frac{1}{2}(x+y+z) + \frac{1}{2}(x+y-z) + (x-y-z)$.)

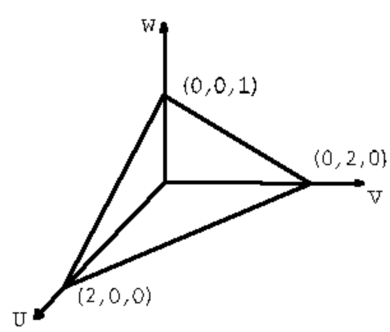
Solución. Sean $u = x+y+z, v = x+y-z, w = x-y-z$.

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \implies \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -\frac{1}{4}.$$

Luego el jacobiano es $J(u,v,w) = -\frac{1}{4}$.

La ecuación $2x - z = 1$ se convierte en $u + v + 2w = 2$. Así, la región U^* en el espacio UVW que es imagen de U bajo esta transformación, es el tetraedro limitado por los planos: $u = 0, v = 0, w = 0, u + v + 2w = 2$.

La gráfica de U^* es:



Y la integral es:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^{2-u} \int_0^{1-(u+v)/2} \frac{1}{4} uvw\,dwdvdu \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 u \int_0^{2-u} v \left[\frac{w^2}{2}\right]_0^{1-(u+v)/2} dvdu \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 u \int_0^{2-u} v \left(1 - \frac{u+v}{2}\right)^2 dvdu \end{aligned}$$

Sea $z = 1 - \frac{u+v}{2}$, $dz = -\frac{dv}{2}$:

$$= -\frac{1}{4} \int_0^2 u \int_{1-u/2}^0 (2-u-2z)z^2\,dzdu$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int_0^2 u \int_0^{1-u/2} (2-u)z^2 - 2z^3 \, dzdu \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 u \left[(2-u)\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2}\right]_{z=0}^{1-u/2} du
\end{aligned}
$$

Sea $t = 1 - \frac{u}{2}$, $2t = 2-u$, $u = 2-2t$, $dt = -\frac{du}{2}$:

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int_1^0 (2-2t)\left[2t\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2}\right] dt = \frac{1}{6}\int_0^1 t^4 - t^5 \, dt \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{180}.
\end{aligned}
$$

□

Problema 2. Hallar los vectores tangente, normal y binormal unitarios de la espiral cónica

$$\alpha(t) = (e^t cos(t), e^t sen(t), e^t) \text{ con } t \in [0, 2\pi],$$

en un punto arbitrario.

Solución. Primero que todo, es claro que la curva es regular y simple y por ende las fórmulas dadas para el vector tangente, normal y binormal aplican. Luego,

$$\hat{T}(t) = r'(t)/||r'(t)|| = \frac{1}{\sqrt{3}}(cos(t) - sen(t), sen(t) + cos(t), 1).$$

Por otro lado sabemos que el vector normal viene dado por:

$$
\begin{aligned}
\hat{N}(t) &= \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left|\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|\right|}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(-sen(t) - cos(t), cos(t) - sen(t), 0).
\end{aligned}
$$

Por último,

$$
\begin{aligned}
\hat{B}(t) &= \hat{T}(t) \times \hat{N}(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}(sen(t) - cos(t), -cos(t) - sen(t), 2).
\end{aligned}
$$

Rúbrica:

1) Establecer las fórmulas de los vectores pedidos (2 ptos).
2) Calcular estos vectores (4ptos).

□

Problema 3. Sea Γ la curva $x^2 + y^2 = 2y$, recorrida con orientación positiva; sea R la región encerrada por Γ, y $\vec{F}$ el campo de fuerzas en $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{F}(x,y) = -y\hat{\imath} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\hat{\jmath} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}.$$

Demuestre sin utilizar el teorema de Green, que $\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy$ es igual a la masa de la lámina encerrada por Γ cuya densidad puntual es $\delta(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

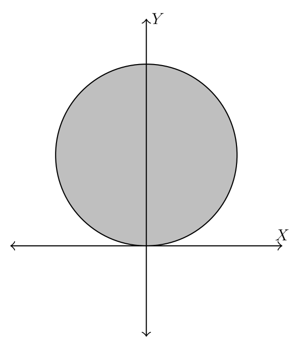
Solución. Se tiene que $\partial_x(\frac{x^2}{2}+x)-\partial_y(-y)=x+2,$ y que

$$\iint_R x+2\,dxdy=\iint_R x\,dxdy+2\iint_R dxdy.$$

Pero además,

$$\begin{aligned} R&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2\le 1\}\\ &=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 2, -\sqrt{2y-y^2}\le x\le\sqrt{2y-y^2}\}, \end{aligned}$$

(Gráfica de R:)



luego

$$\begin{aligned} \iint_R x+2\,dxdy &= \int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x\,dx\,dy+2\,\text{Area}(R).\\ &=2\pi, \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos parametrizar Γ mediante $x(t)=\cos t, y(t)=1+\operatorname{sen} t, 0\le t\le 2\pi,$ para obtener que

$$\begin{aligned} &\oint_\Gamma -y\,dx+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)dy\\ &=\int_0^{2\pi}\left[-(1+\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)+\left(\frac{\cos^2 t}{2}+\cos t\right)\cos t\right]dt\\ &=\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} t+\frac{\cos^3 t}{2}\,dt+2\pi\\ &=\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} t+\frac{(1-\operatorname{sen}^2 t)\cos t}{2}\,dt+2\pi\\ &=-\cos t|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} t-\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}+2\pi\\ &=0+2\pi=2\pi. \end{aligned}$$

lo que demuestra lo pedido

□

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 90 minutos.