DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 2 Cálculo III, Forma A
9 de mayo de 2022

1. Considere las expresiones

$$uv - 3x + 2y = 0, \qquad u^4 - v^4 = x^2 - y^2.$$

Demuestre que estas expresiones definen implícitamente funciones $u = u(x, y), v = v(x, y)$ en una vecindad del punto $(u, v, x, y) = (1, 1, 1, 1)$, y determine un sistema de ecuaciones cartesianas para el plano tangente y la recta normal a $u = u(x, y)$ en $(1, 1, 1)$.

Solución. Sean

$$\begin{aligned} F(u, v, x, y) &= uv - 3x + 2y, \\ G(u, v, x, y) &= u^4 - v^4 - x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Entonces se cumple que $F(u, v, x, y)$ y $G(u, v, x, y)$ son funciones polinomiales en $\mathbb{R}^4$ y por lo tanto son de clase $C^1(\mathbb{R}^4)$. Además,

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 4u^3 & -4v^3 \end{vmatrix},$$

que evaluado en $(1, 1, 1, 1)$ sería

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{(1,1,1,1)} = \left.\begin{vmatrix} v & u \\ 4u^3 & -4v^3 \end{vmatrix}\right|_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Por consiguiente, por el Teorema de la Función Implícita, el sistema $F(u, v, x, y) = 0$, $G(u, v, x, y) = 0$ define implícitamente a u y v como funciones $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, de clase $C^1(U)$ para un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1) \in U$. Más aún, si $\mathbf{p} = (1, 1, 1, 1)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{p}) &= -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}(\mathbf{p})}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(\mathbf{p})} = -\left.\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}\right|_{\mathbf{p}} \\ &= -\left.\frac{\begin{vmatrix} -3 & u \\ -2x & -4v^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 4u^3 & -4v^3 \end{vmatrix}}\right|_{\mathbf{p}} = -\frac{12+2}{-4-4} = -\frac{14}{-8} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{p}) = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}(\mathbf{p})}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(\mathbf{p})} = -\left.\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}\right|_{\mathbf{p}}$$

$$= -\left.\frac{\begin{vmatrix} 2 & u \\ 2y & -4v^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 4u^3 & -4v^3 \end{vmatrix}}\right|_{\mathbf{p}} = -\frac{2(-4)-2}{-4-4} = \frac{-8-2}{8} = -\frac{5}{4}.$$

De este modo, la ecuación del plano tangente a $z = u(x,y)$ en $(1,1,1)$ es

$$z - 1 = \frac{7}{4}(x-1) - \frac{5}{4}(y-1)$$

o equivalentemente

$$-7x + 5y + 4z = 2,$$

y así, un sistema de ecuaciones cartesianas para la recta normal a $z = u(x,y)$ en el punto $(1,1,1)$ es

$$\frac{x-1}{-7} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{4}.$$

$\square$

2. Sea $u = u(x,y), v = v(x,y), x = r\cos(\theta)$ e $y = r\operatorname{sen}(\theta)$. Suponga que $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Demuestre que estas ecuaciones pueden ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -r\frac{\partial v}{\partial r}. \end{aligned}$$

Solución. Usando la regla de la cadena, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\frac{\partial u}{\partial x}\operatorname{sen}(\theta) + r\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\theta)$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}\operatorname{sen}(\theta)$$
$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial x}\operatorname{sen}(\theta) + r\frac{\partial v}{\partial y}\cos(\theta)$$

y como $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial v}{\partial y} - \operatorname{sen}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{r}\left(r\cos(\theta)\frac{\partial v}{\partial y} - r\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial v}{\partial y} + r\cos \cdot -\frac{\partial v}{\partial x} = -r\left(\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial v}{\partial y} + \cos(\theta)\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

□

3. Encuentre las relaciones y condiciones de las constantes $a \neq 0$, b y c para que la función $f(x,y) = ax^2y + axy + bxy^2 + c$ tenga un mínimo relativo en el punto $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ y que este valor mínimo sea igual a 0.

Solución. Lo primero es encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y)$, o sea:

$$\nabla f(x,y) = (2axy + ay + by^2, ax^2 + ax + 2bxy) = (0,0),$$

por lo tanto $(0,0), (-1,0), \left(0, -\frac{a}{b}\right)$ y $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{a}{3b}\right)$ son los puntos críticos . Ahora, como nos piden que $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{a}{3b}\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, entonces $b = a$.

Chequeemos que $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ es efectivamente un mínimo relativo de la función $f(x,y) = ax^2y + axy + \frac{a}{3}xy^2 + c$, entonces el Hessiano es:

$$H(f)(x,y) = \begin{bmatrix} 2ay & 2ax + a + 2by \\ 2ax + a + 2by & 2bx \end{bmatrix}$$

$$H(f)\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2a}{3} & -\dfrac{a}{3} \\ -\dfrac{a}{3} & -\dfrac{2a}{3} \end{bmatrix},$$

entonces

$$\det H(f)\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} > 0$$

y como $f_{xx}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{-2a}{3}$ tiene que ser mayor que cero, esto es: $a < 0$.

Ahora, escogemos c, tal que el valor de f en el punto $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ sea 0.

$$f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{-1}{3} + a \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} + a \cdot -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + c = 0$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{a}{27} + \frac{a}{9} - \frac{a}{27} + c = 0 \\
&= \frac{a}{27} + c = 0,
\end{aligned}
$$

entonces $c = -\frac{a}{27}$

$\square$