DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo III
Grupo II
15 de junio de 2023

IMPORTANTE: debe resolver cada problema en hojas separadas.

Al final, debe entregar tres (3) hojas, que tengan como mínimo: nombre, código de sección, y número de problema a resolver.

Problema 1. Dada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 1+x & -1 \le x \le 0 \\ \lambda & 0 < x \le 1 \\ 0 & 1 < x < \infty, \end{cases} \qquad 0 < \lambda < 1.$$

a) Determine la integral de Fourier de f.

b) Utilice el resultado anterior, y el hecho de que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} w}{w}\, dw = \frac{\pi}{2}$ (sin demostrarlo) para determinar el valor al que converge

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w^2}\, dw.$$

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 1+x & -1 \le x \le 0 \\ \lambda & 0 \le x \le 1 \\ 0 & 1 < x < \infty. \end{cases} \qquad 0 < \lambda < 1.$$

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\operatorname{sen} wx]\, dw$$

$$A(w) = \int_{-1}^0 (1+x)\cos wx\, dx + \int_0^1 \lambda \cos wx\, dx$$

$$u = 1+x \qquad du = dx$$

$$du = \cos wx\, dx \qquad v = \frac{1}{w}\operatorname{sen} wx$$

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{1+x}{w}\operatorname{sen} wx + \frac{1}{w^2}\cos wx\Big|_{-1}^{0} + \frac{\lambda}{w}\operatorname{sen} wx\Big|_0^1 \\ &= \frac{1-\cos(w)}{w^2} + \frac{\lambda \operatorname{sen} w}{w} \end{aligned}$$

$$B(w) = \int_{-1}^0 (1+x)\operatorname{sen} wx\, dx + \int_0^1 \lambda \operatorname{sen} wx\, dx$$

$$u = 1+x \quad du = dx \quad dv = \operatorname{sen} wx dx \quad v = -\frac{1}{w}\cos wx.$$

$$\begin{aligned} B(w) &= \frac{-1-x}{w}\cos wx + \frac{1}{w^2}\operatorname{sen} wx\Big|_{-1}^{0} - \frac{\lambda}{w}\cos wx\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{w} - \frac{1}{w^2}\operatorname{sen} w(-1) - \frac{\lambda}{w}\cos w + \frac{\lambda}{w} \\ &= \frac{\lambda - 1 - \lambda\cos w}{w} + \frac{\operatorname{sen} w}{w^2} = \frac{\lambda w - w - \lambda w\cos w + \operatorname{sen} w}{w^2}. \end{aligned}$$

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\left(\frac{1-\cos(w)}{w^2} + \frac{\lambda \operatorname{sen}(w)}{w}\right)\cos(wx) + \left(\frac{\lambda w - w - \lambda w\cos(w) + \operatorname{sen}(w)}{w^2}\right)\operatorname{sen}(wx)\right) dw$$

Si $x = 0$,

$$I(0) = \frac{1+\lambda}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{1+\lambda}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos(w)}{w^2} + \frac{\lambda \operatorname{sen}(w)}{w}\right) dw$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+\lambda}{2} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\infty \frac{1-\cos(w)}{w^2} dw\right) + \frac{1}{\pi}\cdot\lambda\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w^2} dw$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w^2} dw = \frac{\pi}{2}.$$

□

Problema 2. Considere el sistema

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3,$$

$$u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2.$$

Determine si es que es posible escribir u y v en términos de (x, y, z) cerca del punto $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Calcule el valor de $\frac{\partial u(1,1,1)}{\partial x}$ y $\frac{\partial v(1,1,1)}{\partial x}$.

Solución.
Primero que todo podemos considerar el par de funciones:

$$F_1(x, y, z, u, v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3,$$

$$F_2(x, y, z, u, v) = u^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2,$$

Y así, definir una nueva función:

$$F(x, y, z, u, v) = (F_1(x, y, z, u, v), F_2(x, y, z, u, v)).$$

Una vez hemos definido estas funciones se procede a verificar las hipótesis del teorema de la función implícita.

Primero que todo, F es C^1 , pues tanto F_1 y F_2 son de clase C^1 al ser polinomios con exponentes naturales .
Segundo, claramente el punto $(1, 1, 1, 1, 1)$ satisface que $F(1, 1, 1, 1, 1) = (0, 0)$.
Finalmente: si $D_{u,v}(F)$ es la matriz jacobiana de F respecto de las variables u y v, entonces

$$det(D_{u,v}(F)) = det\begin{pmatrix} xz & 2yv \\ 3u^2yz - 2uv^2 & 2x - 2vu^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$det(D_{u,v}(F(1,1,1,1,1)) = det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Así, el teorema de la función implícita asegura que es posible escribir u y v en términos de (x, y, z) cerca del punto $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$.

Para la segunda parte del ejercicio, dado que alrededor del $(1, 1, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F_1(x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z))}{\partial x}, \\
&= y^2 + zu(x, y, z) + xz\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + 2yv(x, y, z)\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Reemplazando en $(1, 1, 1)$ se obtiene que

$$0 = 2 + \frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial x} + 2\frac{\partial v(1, 1, 1)}{\partial x}.$$

De manera análoga:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F_2(x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z))}{\partial y}, \\
&= 3yzu^2(x, y, z)\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + 2v(x, y, z) + 2x\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} - 2v^2u\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \\
&\quad - 2u^2v\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}
\end{aligned}$$

Y sustituyendo $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}
0 &= 3\frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial x} + 2 + 2\frac{\partial v(1, 1, 1)}{\partial x} - 2\frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial x} - 2\frac{\partial v(1, 1, 1)}{\partial x}. \\
&= \frac{\partial u(1, 1, 1)}{\partial x} + 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, resolviendo este sistema de ecuaciones, se concluye que $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = -2$ y $\frac{\partial v(1,1,1)}{\partial x} = 0$.

□

Problema 3. Mediante optimización en varias variables, encuentre los puntos del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que están más próximos al punto $(4, 2, 0)$.

Solución. *Solución irrestricta:* Se tiene a minimizar la distancia a $(4, 2, 0)$, o equivalentemente, minimizar la distancia al cuadrado a dicho punto. En términos de (x, y, z), ese cuadrado de distancia es $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + z^2$; pero como (x, y, z) está sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$, entonces el problema se puede reducir a:

$$\text{minimizar} \qquad g(x, y) = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + x^2 + y^2.$$

Hallamos los puntos estacionarios:

$$\nabla g(x, y) = (2(x - 4) + 2x, 2(y - 2) + 2y.)$$

El sistema $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ es:

$$\begin{aligned}
2(x - 4 + x) = 0 \\
2(y - 2 + y) = 0
\end{aligned}$$

que implica $(x, y) = (2, 1)$.

Por otro lado, el hessiano de la función es

$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

que implica que en $(2,1)$ hay un mínimo local.

Puesto que la gráfica de $z = g(x,y)$ es un paraboloide, entonces el mínimo es el vértice del paraboloide y es el mínimo absoluto.

Finalmente, si $x = 2$ e $y = 1$, entonces $z^2 = 2^2 + 1^2 = 5$. Luego $z = \pm\sqrt{5}$. De este modo, los puntos más próximos a $(4,2,0)$ son $(2,1,\sqrt{5}), (2,1,-\sqrt{5})$.

Solución con restricciones: Se tiene a minimizar la distancia a $(4,2,0)$, o equivalentemente, minimizar la distancia al cuadrado a dicho punto. En términos de (x,y,z), ese cuadrado de distancia es $(x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2$; pero como (x,y,z) está sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$, entonces el problema es

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x,y,z) = (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ \text{sujeta a} & x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{array}$$

Su lagrangiano es:

$$\mathscr{L}(x,y,z,\lambda) = (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2)$$

Sistema $\nabla\mathscr{L} = \mathbf{0}$:

$$2(x-4) + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$
$$2(y-2) + 2\lambda y = 0 \tag{2}$$
$$2z - 2\lambda z = 0 \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \tag{4}$$

De (3):

$$2z(1-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0 \text{ ó } \lambda = 1.$$
$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, y = 0.$$

Candidato obtenido: $(0,0,0)$.

$$\lambda = 1 : 2(x-4) + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$
$$2(y-2) + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

Reemplazando en (4), se deduce que $z = \pm\sqrt{5}$. Esto origina los candidatos $(2,1,\sqrt{5})$, $(2,1,-\sqrt{5})$.

Debiendo haber una distancia mínima, este mínimo se alcanza en por lo menos uno de los candidatos. Pero $f(0,0,0) = 20$, $f(2,1,\sqrt{5}) = 4+1+5 = 10$, $f(2,1,-\sqrt{5}) = 4+1+5 = 10$. Por lo tanto la distancia mínima se alcanza en $(2,1,\pm\sqrt{5})$ y esta distancia mínima es $\sqrt{10}$.

□

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 90 minutos.