DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 2 Cálculo III
Forma A
27 de octubre de 2022

Problema 1. Sea $\alpha = f(u,v)$, donde f es una función diferenciable y $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{z}{x}$. Dada la función $w = w(x,y,z) = yf(u,v)$, calcular w_{xz}.

Solución.

$$\begin{aligned} u_x = y\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} &= y(f_u\frac{1}{y} + f_v\left(-\frac{z}{x^2}\right) \\ &= f_u - \frac{yz}{x^2}f_v \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(f_u) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{yz}{x^2}f_v\right) \\ &= f_{uu}\cdot 0 + f_{uv}\frac{1}{x} - \frac{yz}{x^2}\left(f_{vu}\cdot 0 + f_{vv}\frac{1}{x}\right) - \frac{y}{x^2}f_v \\ &= \frac{1}{x}f_{uv} - \frac{yz}{x^3}f_{vv} - \frac{y}{x^2}f_v \end{aligned}$$

□

Problema 2. ¿En cuáles puntos la recta normal a través del punto $(1,2,1)$ en el elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$ intersecta la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 102$?

Solución. Si $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 12$, entonces $\nabla f(x,y,z) = (8x, 2y, 8z)$ y el vector normal al elipsoide es $\nabla f(1,2,1) = (8,4,8)$ paralelo a $(2,1,2)$. Las ecuaciones paramétricas de la recta normal son

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = 1 + 2t.$$

Esta recta intersecta la esfera para los valores de t tales que

$$\begin{aligned} & (1+2t)^2 + (2+t)^2 + (1+2t)^2 = 102 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 + 4t + 4t^2 + 4 + 4t + t^2 + 1 + 4t + 4t^2 = 102 \\ \Leftrightarrow \quad & 9t^2 + 12t - 96 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (3t-8)(3t+12) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (3t-8)(3t+12) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad t = \frac{8}{3} \ \vee \ t = -4,$$

de donde los puntos son $(x, y, z) = (19/3, 14/3, 19/3)$, $(x, y, z) = (-7, -2, -7)$.

$\square$

Problema 3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - xy \\ v &= y - x. \end{aligned}$$

a) Si queremos expresar (x, y) como una función diferenciable en términos de (u, v) entorno al punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ¿que condiciones deben cumplir a y b?

b) Calcule $\dfrac{\partial y}{\partial u}(a, b)$.

Solución.

a) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $F(x, y) = (x^2 - xy, y - x)$.
Como $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -x$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -1$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1$ existen y además son continuas, entonces F es de clase C^1 , en particular cerca del punto (a, b).
Ahora calculemos el Jacobiano de la función F, o sea:

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y & -x \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces el determinante del Jacobiano es $\det(DF(x, y)) = 2x - y - x = x - y$, por lo que $\det(DF(a, b)) = a - b$.
Para usar el teorema de la función implícita, necesitamos que $\det(DF(a, b)) = a - b \neq 0$, o sea $a \neq b$, entonces existe $F^{-1}(u, v) = (x, y)$ y (x, y) puede ser expresada por una función diferenciable en términos de (u, v) .

b) Como $DF^{-1}(F(x, y)) = (DF(x, y))^{-1}$, entonces:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2x - y & -x \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{x - y} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 2x - y \end{bmatrix},$$

entonces $\dfrac{\partial y}{\partial u}(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$, por lo que $\dfrac{\partial y}{\partial u}(a, b) = \dfrac{1}{a - b}$.

$\square$

Tiempo: 90 minutos.

Justifique todas sus respuestas.