DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo III, Forma B
3 de noviembre de 2022

IMPORTANTE: debe resolver cada problema en hojas separadas.

Al final, debe entregar tres (3) hojas, que tengan como mínimo: nombre, código de sección, y número de problema a resolver.

Problema 1. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(e^x-1)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Determine el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ en el que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua. Justifique su respuesta.

Solución. Se satisface para todo $(x,y)\neq(0,0)$, que $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{2x^2(e^x-1)y}{(x^2+y^2)^2}$. Además, se satisface que

$$\begin{aligned}f_y(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{0^2\ln(0+1)}{0^2+h^2}\\&=0.\end{aligned}$$

De este modo,

$$f_y(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{2x^2(e^x-1)y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

De este modo, $f_y(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, pues $f_y(x,y)=-\frac{2x^2(e^x-1)y}{(x^2+y^2)^2}$ en dicho conjunto abierto y esta función es continua ahí.

Pero $f_y(x,y)$ no es continua en $(0,0)$, pues

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f_y(x,x)&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2x^3(e^x-1)}{(2x^2)^2}\right)\\&=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{x}\\&=-\frac{1}{2}\neq 0=f_y(0,0).\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos donde $f_y(x,y)$ es continua, es $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

□

Problema 2. Un esquiador se encuentra en un cerro cuya superficie es el gráfico de una función diferenciable, digamos $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $z=f(x,y)$. El esquiador ha comprobado que sus coordenadas en el plano xy son $(1,2)$. Más aún, ha logrado comprobar que:

- la pendiente de la superficie cuando se mueve en dirección a $(2,3)$ es 2, y que

- la pendiente de la superficie cuando se mueve en dirección a $(2,1)$ es -2.

a) Determine $\nabla f(1,2)$.

b) Determine la pendiente de la superficie cuando se mueve en dirección a $(3,5)$.

c) Si el esquiador de pronto decide cambiar de rubro a escalador ¿Cuál sería la dirección en la que debería ir para subir la mayor pendiente?

Solución.

a) Primero veamos que si el esquiador se mueve en dirección a $(2,3)$ entonces su vector director será

$$D_1 := (2,3) - (1,2) = (1,1),$$

y análogamente si se mueve en dirección a $(2,1)$ su vector director será

$$D_2 := (2,1) - (1,2) = (1,-1).$$

Normalizando los vectores directores se obtienen

$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{D_1}{||D_1||} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ d_2 &:= \frac{D_2}{||D_2||} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right), \end{aligned}$$

y por hipótesis que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(1,2)}{\partial d_1} &= f'((1,2),d_1) = 2 \\ \frac{\partial f(1,2)}{\partial d_2} &= f'((1,2),d_2) = -2 \end{aligned}$$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Como f es diferenciable sabemos que tales α, β existen, más aun, se tiene que

$$\begin{aligned} 2 &= f'((1,2),d_1) = \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot d_1 \\ -2 &= f'((1,2),d_2) = \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot d_2 . \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene que

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^{3/2} \end{pmatrix}$$

.

b) Sean $D_3 = (3,5) - (1,2) = (2,3)$ y

$$d_3 = \frac{D_3}{||D_3||} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Sigue que la derivada direccional en dirección a $(3,5)$

$$f'((1,2),d_3) = \nabla f(1,2) \cdot d_3 = 3\sqrt{\frac{8}{13}}.$$

c) Cuando el esquiador decide escalar en la dirección con más pendiente debe escoger necesariamente la dirección en la que la derivada direccional es máxima. Por otro lado sabemos que si $||d|| = 1$
$$f'((1,2),d) = \nabla f(1,2) \cdot d,$$
y como
$$v \cdot w = ||v|| \cdot ||w|| \cos(\theta),$$
donde θ es el ángulo entre v y w, sigue que el producto punto entre vectores se maximiza cuando el ángulo entre ellos es tal que $\cos(\theta)$ se maximiza, o bien, cuando $\theta = 0$.
De lo anterior se concluye que la dirección d normalizada que maximiza la derivada direccional debe ser
$$d = \frac{\nabla f(1,2)}{||\nabla f(1,2)||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
□

Problema 3.

a) Determine los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ en el interior de la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) Determine los puntos críticos del problema condicionado: maximizar $f(x,y) = x^2+2y^2$ sujeta a $x^2 + y^2 = 4$.

c) Con los resultados obtenidos de las partes a) y b), determine el valor máximo de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sobre la región R mencionada en la parte a)

Solución.

a) Para analizar el interior notemos que $\nabla f = (2x, 4y)$. Entonces $\nabla f = (0,0)$ si y sólo si $(x,y) = (0,0)$ Este punto pertenece al interior de la región R, y es el único punto obtenido en dicho interior.

b) Para encontrar los puntos críticos del problema condicionado, procederemos a aplicar el método de Lagrange, es decir:

max $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeto a que $g(x,y) := x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Utilizando Lagrange sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:
$$2x = \lambda 2x,$$
$$4y = \lambda 2y,$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$
De la primera ecuación de este sistema tenemos que $x = 0$ o bien $\lambda = 1$. Si $x = 0$ se tiene que $y = \pm 2$. Por otra parte si $\lambda = 1$ se tiene que $y = 0$ y por ende $x = \pm 2$.

Así, los candidatos a máximo en el borde del círculo son $\{(0, \pm 2), (\pm 2, 0)\}$.

c) Sabemos que se verifica el Teorema de Weierstrass: puesto que la región R es cerrada y acotada, y por ende compacta, entonces la función $f(x,y)$ debe alcanzar valores extremos en la región R, y tales valores extremos (en particular, el valor máximo) deben alcanzarse en los candidatos obtenidos en las partes a) y b). Evaluamos entonces la función en los candidatos, y obtenemos
$$f(0,0) = 0$$

$$f(2,0) = f(-2,0) = 4 + 2 \cdot 0 = 4.$$
$$f(0,2) = f(0,-2) = 0 + 2 \cdot 4 = 8.$$

El mayor de los valores obtenidos es 8, y por consiguiente, ese es el valor máximo buscado. De este modo, f toma valor máximo en $(0,-2)$ y en $(0,2)$.

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo:90 minutos.