DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

# Control 1 Cálculo III
# Grupo 2, versión A
# 29 de septiembre de 2022

**Problema 1.** Considerar las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:

- $\mathscr{L}_1 = \{(2,-1,1) + t(1,2,1) : t \in \mathbb{R}\}$
- $\mathscr{L}_2 = \{(1,0,3) + t(2,1,-1) : t \in \mathbb{R}\}$
- $\mathscr{L}_3 = \{(-1,2,7) + t(-4,1,5) : t \in \mathbb{R}\}$

Probar que las tres rectas se encuentran en un mismo plano

**Solución.** Si existiese dicho plano, un vector normal a dicho plano debería ser perpendicular a los tres vectores direccionales. En particular $\vec{n} := (1,2,1) \times (2,1,-1) = (-3,3,-3)$ sería un vector normal a dicho plano . Y cualquier punto de esas rectas pertenecería a dicho plano, por ejemplo $(2,-1,1)$ . Entonces la ecuación normal de dicho plano debería ser:
$\mathscr{P} : \langle(-3,3,-3),(x,y,z) - (2,-1,1)\rangle = 0$ , operando:

$$\mathscr{P} : x - y + z = 4$$

Para verificar que las rectas son subconjuntos de dicho plano:

- Sea $p \in \mathscr{L}_1$, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = (2,-1,1)+t(1,2,1) = (2+t,-1+2t,1+t)$, entonces evaluamos $p$ en la expresión que define a $\mathscr{P}$: $(2+t)-(-1+2t)+(1+t) = 4$, luego $p \in \mathscr{P}$. Así se probó que $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{P}$ .
- Sea $p \in \mathscr{L}_2$, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = (1,0,3) + t(2,1,-1) = (2t+1,t,3-t)$, entonces evaluamos $p$ en la expresión que define a $\mathscr{P}$: $(2t+1) - (t) + (3-t) = 4$, luego $p \in \mathscr{P}$. Así se probó que $\mathscr{L}_2 \subset \mathscr{P}$ .
- Sea $p \in \mathscr{L}_3$, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = (-1,2,7)+t(-4,1,5) = (-4t-1,t+2,5t+7)$, entonces evaluamos $p$ en la expresión que define a $\mathscr{P}$: $(-4t-1)-(t+2)+(5t+7) = 4$, luego $p \in \mathscr{P}$. Así se probó que $\mathscr{L}_3 \subset \mathscr{P}$ .

$\square$

**Problema 2.** Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & ; (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}.$$

Demuestre que esta función es continua en $\mathbb{R}^3$.

**Solución.** Para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ tenemos que la función $f$ es continua, por álgebra de funciones continuas.

Para $(x,y,z) = (0,0,0)$ tenemos que demostrar que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$. Primero tenemos que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $|z| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, (**2 puntos**) entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} - 0\right| &= \left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \\
&= \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} \\
&= \frac{|x|\,|y|\,|z|}{x^2+y^2+z^2} \\
&\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} \\
&= \sqrt{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}$$

y usando el teorema del sándwich , tenemos que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$, por lo que la función es continua en $(0,0,0)$ .

O sea que $f$ es continua en todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\square$

**Problema 3.** Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq \pi \\ \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*a*) Calcular la integral de Fourier y analizar la convergencia.

*b*) Usar lo anterior para calcular el valor de $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos(2t) - t\operatorname{sen}(2t)}{t^2}\right) dt$ (sugerencia: $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$, $1-\cos(2\theta) = 2\operatorname{sen}^2(\theta)$)

**Solución.**

*a*) La función $f$ es impar, entonces $A(\omega) = 0$, $\forall \omega \geq 0$ y

$$\begin{aligned}
B(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\operatorname{sen}(x\omega)dx \\
&= -\frac{2x\cos(x\omega)}{\pi\omega} + \frac{2\operatorname{sen}(x\omega)}{\pi\omega^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{2\cancel{\pi}\cos(\pi\omega)}{\cancel{\pi}\omega} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,(\pi\omega)}{\pi\omega^2}$$

$$B(\omega) = -\frac{2\cos(\pi\omega)}{\omega} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,(\pi\omega)}{\pi\omega^2}$$

Como la función $f$ es absolutamente integrable y es continua , por el teorema de convergencia se tiene que:

$$f(x) = \int_0^\infty \left(-\frac{2\cos(\pi\omega)}{\omega} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,(\pi\omega)}{\pi\omega^2}\right)\mathrm{sen}(x\omega)d\omega$$

$b)$ De lo anterior:

$$\frac{\pi}{2} = \underbrace{\int_0^\infty \left(-\frac{2\cos(\pi\omega)}{\omega} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,(\pi\omega)}{\pi\omega^2}\right)\mathrm{sen}(\pi\omega)d\omega}_{t:=\pi\omega}$$

$$= \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \int_0^\infty \left(-\frac{2\cos(t)}{t/\pi} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,(t)}{\pi t^2/\pi^2}\right)\mathrm{sen}(t)\frac{dt}{\pi}$$

$$= \cancel{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{-t\,\mathrm{sen}\,(2t) + 1 - \cos(2t)}{t^2}\right)\frac{dt}{\cancel{\pi}}$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos(2t) - t\,\mathrm{sen}\,(2t)}{t^2}\right)dt = \frac{\pi}{2}$$

$\square$