DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Control 3 Cálculo III
Versión B
28 de junio de 2022

Problema 1. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la función $r : \left[\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$r(t) = \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, 2t, t\right).$$

i) Encuentre la curvatura de la curva Γ.

ii) Muestre que la curva es plana y encuentre el plano que contiene a la curva.

Solución.

i) Primero que todo, claramente la curva es regular, pues las funciones coordenadas de $r(t)$ son C^1 y $||r'(t)|| > 0$ en todo $t \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Luego, sabemos que la fórmula de la curvatura en $r(t) \in \Gamma$ se encuentra dada por:

$$\kappa(t) = \frac{||r'(t) \ \times \ r''(t)||}{||r'(t)||^3}.$$

Notemos que $r'(t) = (t^{\frac{1}{2}}, 2, 1)$ y $r''(t) = \left(\frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}}, 0, 0\right)$, luego

$$\begin{aligned} r'(t) \ \times \ r''(t) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^{\frac{1}{2}} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\left(0, \frac{1}{2}, -1\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$||r'(t) \ \times \ r''(t)|| = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{t}}.$$

Por otra parte,

$$||r'(t)||^3 = (\sqrt{(t+5)})^3.$$

Así, hemos calculado todos los términos necesarios para encontrar $\kappa(t)$,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{||r'(t) \ \times \ r''(t)||}{||r'(t)||^3}, \\ &= \frac{5}{2\sqrt{t(t+5)^3}}. \end{aligned}$$

ii) *a*) Primera Solución:
$r(t)$ puede descomponerse de la siguiente forma:

$$r(t) = \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, 2t, t\right) = \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, 0, 0\right) + (0, 2t, t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\,(1,0,0) + t\,(0,2,1)$$

Es decir

$$r(t) = (0,0,0) + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\,(1,0,0) + t\,(0,2,1)$$

con lo cual tenemos que $r(t)$ pertence al plano que pasa por $(0,0,0)$ y es paralelo a los vectores $(1,0,0)$ y $(0,2,1)$

b) Recordemos que si la curva posee torsión nula en todo punto de la curva, entonces la curva es plana.

Del item (i), $r'''(t) = \left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}, 0, 0\right)$ Y así

$$\langle r'(t), r''(t) \times r'''(t)\rangle = \left\langle \left(t^{\frac{1}{2}}, 2, 1\right), \underbrace{\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}, 0, 0\right) \times \left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}, 0, 0\right)}_{0} \right\rangle = 0$$

De aquí, la torsión $\tau(t) \equiv 0$. De esta manera se tiene que r es una curva plana. Para determinar el plano, es suficiente tener un vector normal a dicho plano, como $r'(t)$ y $r''(t)$ son paralelos a dicho plano y además: $r'(t) \times r''(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(0, \frac{1}{2}, -1\right)$, entonces r está en el plano que tiene por normal a $(0, \frac{1}{2}, -1)$ (o cualquier múltiplo de éste) y que pasa por el punto $r(1) = (\frac{2}{3}, 2, 1)$ (o cualquier otro de la curva).

$\square$

Problema 2. Encuentre la masa de la región plana de densidad $\rho(x,y) = \dfrac{|y|}{x^2+y^2}$ que es exterior a la circunferencia $\mathscr{C}_1 : x^2+y^2 = 9$ e interior a la circunferencia $\mathscr{C}_2 : x^2-6x+y^2 = 0$,

Solución. Primero encontramos la intersección de ambas circuferencias reemplazando $x^2+y^2 = 9$ en $x^2-6x+y^2 = 0$ obtenemos $9-6x = 0$, se intersectan en $x = 3/2$. Utilizando el cambio de coordenadas polares obtenemos las siguientes ecuaciones para $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$:
$\mathscr{C}_1 :\ r = 3$
$\mathscr{C}_2 :\ r^2 = 6r\cos(\theta)$.
Ahora, para encontrar el ángulo de intersección, tenemos la ecuación:

$$\frac{3}{2} = 3\cos\theta$$

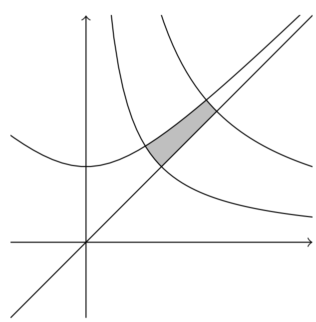
por lo que obtenemos que $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$, por lo tanto ya que la circunferencia de centro $(0,0)$ establece la región hacia el exterior y la de centro $(3,0)$ hacia el interior, se tiene que en coordenadas polares, θ varía en el intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ y r varía en el intervalo $[3, 6\cos\theta]$. Calculamos así la masa de la región considerando la simetría respecto al eje X como

$$\begin{aligned}
M(R) &= \iint\limits_R \frac{|y|}{x^2+y^2} dA \\
&= 2\int_0^{\pi/3}\int_3^{6\cos\theta} \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r^2} r dr d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/3}\int_3^{6\cos\theta} \operatorname{sen}\theta dr d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/3} 6\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 3\operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= 2\left(3\operatorname{sen}^2\theta - 3\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/3} \\
&= 2\left(3\frac{3}{4} - 3\frac{1}{2} + 3\right) \\
&= \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

□

Problema 3. Calcular la integral doble $\iint\limits_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\, dxdy$, empleando el cambio de variables $u = xy, v = y^2 - x^2$, donde D es la región del plano limitada por los conjuntos descritos por: $xy = 1$, $xy = 3$, $y = x$, $y^2 - x^2 = 1$, $x \geq 0, y \geq 0$.

Solución.



$$|J(x,y)| = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = 2y^2 + 2x^2$$

$$\begin{aligned}
xy = 1 &\;\Rightarrow\; u = 1 \\
xy = 3 &\;\Rightarrow\; u = 3 \\
y - x = 0 &\;\Rightarrow\; v = 0 \\
y^2 - x^2 = 1 &\;\Rightarrow\; v = 1.
\end{aligned}$$

$$\iint\limits_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} v^u(x^2+y^2)\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{\frac{1}{2(x^2+y^2)}}\,dvdu =$$

$$\int_{u=1}^{u=3}\int_{v=0}^{v=1}\frac{v^u}{2}\,dvdu = \frac{1}{2}\int_{u=1}^{u=3}\left.\frac{v^{u+1}}{u+1}\right|_0^1\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u+1}\,du = \frac{1}{2}\ln(u+1)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left[\ln 4 - \ln 2\right] = \ln\sqrt{2}$$

$\square$