DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA Y CIENCIA DE
LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Taller 2 Cálculo III
Grupos I y II
6 de julio de 2023

Problema 1. Calcule:

$$\iint_R y\sec^2(xy)dxdy,$$

donde R es el rectángulo $R = [1,2] \times [0, \frac{\pi}{6}]$.

Solución. Usando Fubini **(2 puntos)**, podemos calcular la siguiente integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_1^2 y\sec^2(xy)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} [\tan(xy)]\big|_1^2\, dy \quad \textbf{(2 puntos)}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} [\tan(2y)-\tan(y)]\, dy\\ &= -\frac{1}{2}\ln(\cos(2y)) + \ln(\cos(y))\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) + \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\cos\left(2\cdot 0\right)\right) - \ln\left(\cos\left(0\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\cos\left(\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right) + \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\cos\left(0\right)\right) - \ln\left(\cos\left(0\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln(1) - \ln(1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right). \quad \textbf{(2 puntos)}$$

□

Problema 2. Calcule $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi y^2)}{y^2} dy\, dx$.

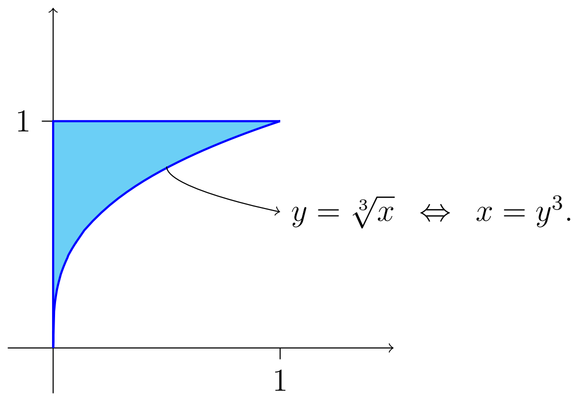
Indicación: No podrá resolver el problema si opta por calcular la integral interna respecto a y.

Solución. Se tiene que

$$\int_0^1\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi y^2)}{y^2}\, dy\, dx = \iint_R \frac{\operatorname{sen}(\pi y^2)}{y^2}\, dy\, dx,$$

donde $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \sqrt[3]{x} \le y \le 1\}$. **(1.5 pts.)**

La gráfica de la región R es la siguiente:



,

que también puede escribirse como $R = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^3\}$. **(1.5 pts.)**

Luego,

$$\iint\limits_R \frac{\operatorname{sen}(\pi y^2)}{y^2} dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{y^3} \frac{\operatorname{sen}(\pi y^2)}{y^2} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi y^2)}{y^2} \int_0^{y^3} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 y \operatorname{sen}(\pi y^2)\, dy \qquad \textbf{(1.5 pts.)}$$

Con el cambio de variable $u = \pi y^2$, $du = 2\pi y\, dy$, $\frac{du}{2\pi} = y\, dy$.

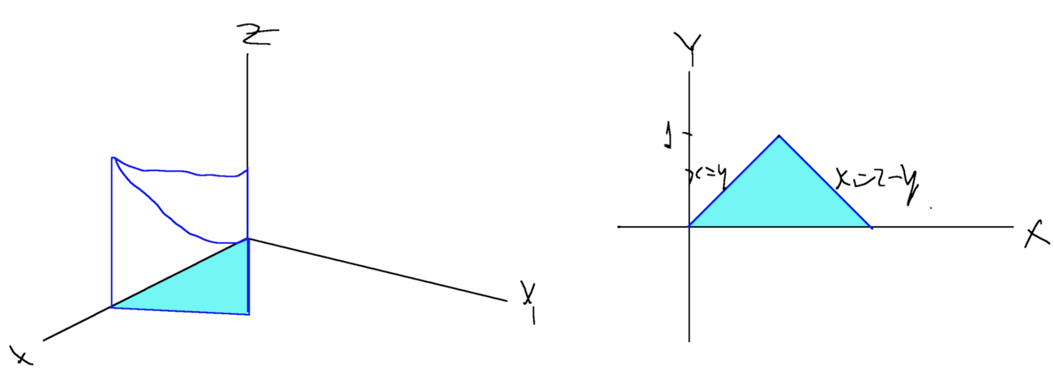
$$= \int_0^\pi \operatorname{sen} u \frac{du}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(-\cos\pi + \cos 0)$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-(-1) + 1) = \frac{1}{\pi}. \qquad \textbf{(1.5 pts.)}$$

□

Problema 3. Encuentre el volumen del sólido T que está bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre el triángulo R en el plano xy con vértices en $(0,0,0), (1,1,0)$ y $(2,0,0)$.

Solución. Dibujos de la región y su proyección sobre el plano XY:



(1.2 pts.)

Se tiene entonces

$$R = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2 - y\}. \qquad \textbf{(1.2 pts.)}$$

$$\iint\limits_R x^2 + y^2\, dx\, dy = \int_0^1 \int_y^{2-y} x^2 + y^2\, dx\, dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=y}^{x=2-y} dy && \textbf{(1.2 pts.)}\\
&= \int_0^1 \frac{(2-y)^3}{3} + y^2(2-y) - \frac{y^3}{3} - y^3\, dy\\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (2-y)^3\, dy + 2\int_0^1 y^2\, dy - \frac{7}{3}\int_0^1 y^3\, dy && \textbf{(1.2 pts.)}
\end{aligned}
$$

Para la primera integral podemos usar la sustitución $u = 2 - y,\ \ dy = -du$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\int_2^1 u^3(-du) + \frac{2}{3} - \frac{7}{12}\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{u^4}{4}\right]_{u=1}^{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{15+8-7}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}. && \textbf{(1.2 pts.)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 80 minutos.