DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA Y CIENCIA DE
LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

Taller 1 Cálculo III
Grupos I y III
25 de mayo de 2023

Problema 1. Considere la función f definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^6 + (x^2 - y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine si f es continua en $(0,0)$. ¿Es f diferenciable en $(0,0)$? Justifique.

Solución. Debemos ver si existe o no $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: Para esto veamos este límite por trayectorias.

Usando la trayectoria $C_1 : y = x^2$, tenemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_1}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6} = 1.\textbf{(1,5 puntos)}$$

En cambio si se usa la trayectoria $C_2 : y = 0$, tenemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^4(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+1} = 0.\textbf{(1,5 puntos)}$$

Luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe y, por lo tanto f no es continua en $(0,0)$ **(1 punto)**. Para ver si f es diferenciable en $(0,0)$, notemos que "f diferenciable en $(0,0)$ implica f continua en $(0,0)$". Pero como f no es continua en $(0,0)$, se concluye que f no es diferenciable en $(0,0)$. **(2 puntos)**

$\square$

Problema 2. Sea f la misma función del problema 1.

a) Demuestre que para todo (x,y) con $x \neq 0$ e $y \neq x^2$, $\nabla f(x,y)$ es un vector no nulo paralelo a $(x^2 - 3y, x)$.

b) Calcule $\nabla f(0,0)$.

Solución.

a) Bajo la condición $x \neq 0$, $y \neq x^2$, se tiene que (x,y) es un punto interior a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y por lo tanto $f(x,y) = \frac{x^6}{x^6+(x^2-y)^2}$ y se pueden emplear reglas de derivación para calcular $\nabla f(x,y)$. **(0.5 pts.)** Se tiene que

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{(x^6+(x^2-y)^2)6x^5 - x^6(6x^5+2(x^2-y)(2x))}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} \\
&= \frac{(x^6+x^4-2x^2y+y^2)6x^5 - x^6(6x^5+4x^3-4xy)}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} \\
&= \frac{6x^{11}+6x^9-12x^7y+6y^2x^5-6x^{11}-4x^9+4x^7y}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} \\
&= \frac{2x^9-8x^7y+6y^2x^5}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} && \textbf{(0.5 pts.)} \\
&= \frac{2x^5(x^4-4x^2y+3y^2)}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} \\
&= \frac{2x^5(x^2-y)(x^2-3y)}{(x^6+(x^2-y)^2)^2}. && \textbf{(1 pts.)}
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
f_y(x,y) = \frac{2x^6(x^2-y)}{(x^6+(x^2-y)^2)^2} = \frac{2x^5(x^2-y)x}{(x^6+(x^2-y)^2)^2}. \qquad \textbf{(1 pts.)}
$$

Por lo tanto, $\nabla f(x,y) = \frac{2x^5(x^2-y)}{(x^6+(x^2-y)^2)^2)}(x^2-3y,x)$, que es múltiplo no nulo de (x^2-3y,x) y por lo tanto es un vector paralelo a éste. **(1 pts.)**

b) Se tiene que

$$
\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^6}{h(h^6-(h^2-0)^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{h^6}{h^7+h^5} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h^2+1} = 0. && \textbf{(1 pts.)} \\
f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0. && \textbf{(1 pts.)}
\end{aligned}
$$

□

Problema 3. La temperatura en un punto (x,y) está dada por:

$$
T(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad k \neq 0.
$$

I) Hallar la dirección en la cual la razón de cambio de la temperatura es máxima en el punto $(1,\sqrt{3})$. Especifique las distintas respuestas posibles dependiendo del valor de k.

II) Un insecto se detiene en el punto $(1,\sqrt{3})$ y nota que la temperatura cambia en la vecindad de dicho punto. Hallar la dirección en la cual debe moverse el insecto de modo que la temperatura disminuya lo más posible. Especifique las distintas respuestas posibles dependiendo del valor de k.

Solución.

I) Sabemos que la función T es diferenciable en el punto $(1,\sqrt{3})$ por álgebra de funciones diferenciables **(0,5 puntos)**. Luego, como nos preguntan la dirección donde la derivada direccional sea máxima, entonces tal dirección es el vector

$$\hat{u} = \frac{\nabla T(1,\sqrt{3})}{\|\nabla T(1,\sqrt{3})\|}.$$

Pero $\nabla T(1,\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} T_x(1,\sqrt{3}) \\ T_y(1,\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-k\cdot 1}{(1^2+\sqrt{3}^2)^{3/2}} \\ \dfrac{-k\cdot\sqrt{3}}{(1^2+\sqrt{3}^2)^{3/2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-k}{8} \\ \dfrac{-\sqrt{3}k}{8} \end{pmatrix}$ **(1 punto)**

y $\|\nabla T(1,\sqrt{3})\| = \dfrac{|k|}{8}\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \dfrac{|k|}{4}$ **(1,0 puntos)**. Luego

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{-k}{2|k|} & \dfrac{-\sqrt{3}k}{2|k|} \end{pmatrix} = \frac{-k}{2|k|}(1,\sqrt{3}), \textbf{ (1 punto)}$$

de donde $\hat{u} = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ si $k>0$ y $\hat{u} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ si $k<0$. **(1 punto)**

II) Ahora nos piden la dirección donde la derivada direccional sea mínima, la cual se da en la dirección del vector

$$\tilde{u} = -\frac{\nabla T(1,\sqrt{3})}{\|\nabla T(1,\sqrt{3})\|} = \frac{k}{2|k|}(1,\sqrt{3}). \textbf{ (1 punto)}$$

de donde $\hat{u} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ si $k>0$ y $\hat{u} = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ si $k<0$. **(0,5 puntos)**

□

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo: 80 minutos.