DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 2 Cálculo III
Versión B
7 de julio de 2022

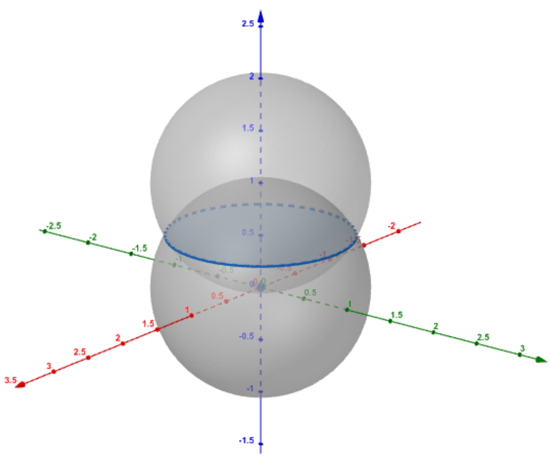
Problema 1. Si B es el conjunto dentro de las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=2z$,

a) Haga un dibujo del conjunto B

b) Usando coordenadas cilíndricas calcule $\displaystyle\int_B z\,dxdydz$,

c) Usando coordenadas esféricas, exprese $\displaystyle\int_B z\,dxdydz$

Solución.



I) Gráfico:

II) Reemplazando una ecuación en otra, se obtiene $z=\frac{1}{2}$, lo cual significa que las esferas se intersectan en los puntos $(x,y,\frac{1}{2})$, donde $x^2+y^2=\frac{3}{4}$
Entonces B puede verse como el conjunto encerrado por los gráficos de las funciones $z_1(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z_2(x,y)=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$
ambas con dominio $D=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\leq\frac{3}{4}\right\}$
Así pues, usando coordenadas cilíndricas

$$\int_B zdxdydz=\int_D\left(\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz\right)dxdy=\frac{1}{2}\int_D\left(2\sqrt{1-x^2-y^2}-1\right)dxdy=$$

$$= \frac{1}{2}\int_R \left(2\sqrt{1-r^2}-1\right) r dr d\theta, \text{ donde } R = \left\{(r,\theta):\ 0 \le r \le \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

Así pues, $\displaystyle\int_B z dx dy dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(2\sqrt{1-r^2}-1\right) r\, dr\right) d\theta$; pero,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(2\sqrt{1-r^2}-1\right) r\, dr = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{4}}(2\sqrt{u}-1)du = \frac{5}{24}.$$

Finalmente $\displaystyle\int_B z dx dy dz = \frac{5\pi}{24}$

III) Como ambas esferas se cortan para $z = \frac{1}{2}$, podemos dibujar en el plano $x = 0$ un triangulo rectángulo con hipotenusa igual a 1 y cateto igual a $\frac{1}{2}$. Para estos puntos de intersección se tiene que $\phi = \frac{\pi}{3}$

Esto nos permite dividir B en dos partes :
$B_1 = \left\{(\rho,\theta,\phi) : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}\right\}$

y, como la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, expresada en esféricas queda en la forma

$$\rho = 2cos(\phi)$$

tenemos $B_2 = \left\{(\rho,\theta,\phi) : 0 \le \rho \le 2cos(\phi),\ 0 \le \theta \le 2\pi, \frac{\pi}{3} \ \le \phi \le \frac{\pi}{2}\right\}$
luego,

$$\begin{aligned}
\int_B z dx dy dz &= \int_{B_1\cup B_2} \rho\cos(\phi)\rho^2 \operatorname{sen}(\phi) d\rho\, d\theta d\phi \\
&= \int_{B_1} \rho^3 \cos(\phi)\operatorname{sen}(\phi) d\rho\, d\theta d\phi \\
&\qquad + \int_{B_2} \rho^3 \cos(\phi)\operatorname{sen}(\phi) d\rho\, d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^3\cos(\phi)\operatorname{sen}(\phi)d\rho\right)d\theta\right)d\phi \\
&\qquad + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2cos(\phi)} \rho^3\cos(\phi)\operatorname{sen}(\phi)d\rho\right)d\theta\right)d\phi
\end{aligned}$$

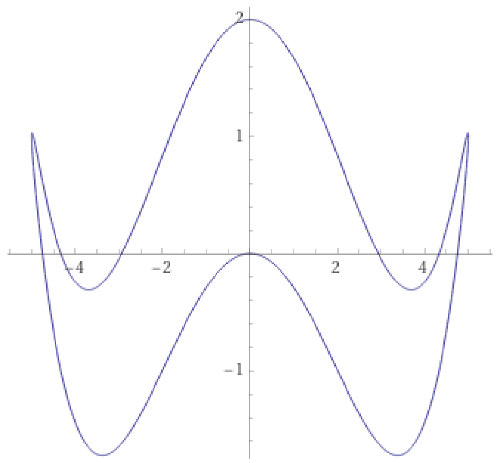
□

Problema 2. Calcula el área de la región encerrada por el mostacho:

parametrizada por $\vec{r}(t) = (5\cos(t), \operatorname{sen}(t) + \cos(4t))$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. Usando el teorema de Green: $\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$, tomando $Q(x,y) = x$ y $P(x,y) = 0$, tenemos:

$$A(D) = \iint_D 1 dA$$



$$= \oint_C x dy$$
$$= \int_0^{2\pi} Q(\vec{r}(t)) y'(t) dt$$

pun(**1 punto**)

$$= \int_0^{2\pi} 5\cos(t)(\cos(t) - 4\,\mathrm{sen}(4t))dt$$
$$=5\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt - 20\int_0^{2\pi} \cos(t)\,\mathrm{sen}(4t)dt$$
$$= \left(\frac{5}{2}t + \frac{5}{4}\,\mathrm{sen}(2t)\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{15}\left(4\cos(t)\cos(4t) + \mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(4t)\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$=5\pi - 0 = 5\pi.$$

□

Problema 3. Para $a, b \in \mathbb{R}$, considere el siguiente campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$F(x, y, z) = (4bz + e^{y+2az}, ay^2 + xe^{y+2z}, 2x(1 + e^{2by+2z}))$$

a) Calcule el rotor de F.

b) Determine el valor de las constantes a, b de manera tal que F sea conservativo.

c) Para las constantes anteriormente determinadas encuentre la función potencial asociada a F.

d) Calcule la integral de línea del campo F sobre la curva $\lambda(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Solución.

a) El rotor de F es,

$$\nabla \times F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4bz + e^{y+2az} & ay^2 + xe^{y+2z} & 2x(1+e^{2by+2z}) \end{vmatrix}$$
$$= \left(4bxe^{2by+2z} - 2xe^{y+2z}, 4b + 2ae^{y+2az} - (2 + 2e^{2by+2z}), e^{y+2z} - e^{y+2az}\right)$$

b) El campo $F(x,y,z)$ está bien definido para y es de clase $\mathcal{C}^1$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, luego para ver que F sea conservativo basta con verificar que

$$\nabla \times F(x,y,z) = (0,0,0), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad ,$$

luego de la primera coordenada del rotor calculado anteriormente, se tiene

$$4bxe^{2by+2z} = 2xe^{y+2z} \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2},$$

a su vez de la tercera coordenada se tiene,

$$e^{y+2z} = e^{y+2az} \Rightarrow 2z = 2az \Rightarrow a = 1 \quad ,$$

luego el campo conservativo queda dado por

$$F(x,y,z) = (2z + e^{y+2z}, y^2 + xe^{y+2z}, 2x(1+e^{y+2z}))$$

c) El campo vectorial está definido como

$$F(x,y,z) = (2z + e^{y+2z}, y^2 + xe^{y+2z}, 2x(1+e^{y+2z}))$$
$$= (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),$$

entonces para determinar la función potencial escogemos la primera función coordenada y la integramos respecto a x,

$$\int F_1(x,y,z)dx = \int 2z + e^{y+2z}dx = 2xz + xe^{y+2z} + g(y,z),$$

derivando respecto a y,

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xz + xe^{y+2z} + g(y,z)) = xe^{y+2z} + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = y^2 + xe^{y+2z}.$$

Por otro lado derivando respecto a z se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial z}(2xz + xe^{y+2z} + g(y,z)) = 2x + 2xe^{y+2z} + \frac{\partial g(y,z)}{\partial z} = 2x + 2xe^{y+2z},$$

entonces se tiene que $\frac{\partial g(y,z)}{\partial z} = 0 \wedge \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = y^2$, luego

$$g(x,y) = \frac{y^3}{3}$$

Finalmente la función potencial viene dada por

$$f(x,y,z) = 2xz + \frac{y^3}{3} + xe^{y+2z}$$

d) Al ser el campo conservativo, la integral de línea viene dada por

$$\begin{aligned}\int_{\lambda} \langle F(\lambda), d\lambda\rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(\lambda(t), \lambda'(t))\rangle dt &= f(\lambda(2\pi)) - f(\lambda(0)) \\ &= f(1,0,2\pi) - f(1,0,0) \\ &= e^{4\pi} + 4\pi - 1\end{aligned}$$

$\square$