DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo III, Forma A
3 de noviembre de 2022

IMPORTANTE: debe resolver cada problema en hojas separadas.

Al final, debe entregar tres (3) hojas, que tengan como mínimo: nombre, código de sección, y número de problema a resolver.

Problema 1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ en el que f tiene derivadas parciales continuas. Justifique su respuesta.

Solución. La derivada parcial en x de f para todo $(x,y) \neq (0,0)$ es:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,y - xy\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2)y - x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \text{y} \quad f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{0\cdot h}{\sqrt{h^2+0^2}} = 0. \end{aligned}$$

Luego

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ahora, $f_x(x,y)$ es continua en $(x,y) \neq (0,0)$ porque $f_x(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ y esta función es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Para ver si es continua en $(0,0)$, basta ver si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0) = 0.$$

Pero $\lim\limits_{y\to 0^+} f_x(0,y) = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{y^3}{(0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{y\to 0^+} 1 = 1 \neq 0.$

Luego f_x no es continua en $(0,0)$, y similarmente, f_y tampoco es continua en $(0,0)$.

Se sigue así que el conjunto de puntos en los que $f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas es $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

□

Problema 2. Considere los vectores $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ y $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Suponga que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $(1,2)$ y tal que

$$f'((1,2);\vec{u}) = 2, \quad f'((1,2);\vec{v}) = -2.$$

Determine $\nabla f(1,2)$ y $f'((1,2);\vec{w})$, donde w es el vector unitario que va en la misma dirección que el vector $(2,3)$.

Nota: Recuerde que $f'((a,b);\vec{u})$ es la derivada direccional de f en el punto (a,b) en la dirección $\vec{u}$.

Solución. Como f es diferenciable, entonces

$$f'((1,2);u) = \langle \nabla f(1,2), u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right)$$

y

$$f'((1,2);v) = \langle \nabla f(1,2), v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right).$$

Como $f'((1,2);u) = 2$ y $f'((1,2);v) = -2$, entonces se debe satisfacer:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2\sqrt{2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2\sqrt{2}, \end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \sqrt{2}$, por lo que $\nabla f(1,2) = (0,\sqrt{2})$. Por otra parte el vector w unitario que va en la misma dirección que $(2,3)$ es $w = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2,3)$. Luego

$$f'((1,2);w) = \langle \nabla f(1,2), w\rangle = \langle (0,\sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)\rangle = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{13}}.$$

□

Problema 3. Determine la menor distancia desde el origen a la recta determinada por la intersección entre los planos $x+2y-z=1,\ \ 2x-3y+3z=0$.

Sugerencia: Minimice el cuadrado de la distancia al origen.

Solución. La distancia desde el origen a cualquier punto (x,y,z) se expresa por

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Queremos encontrar el mínimo de esta expresión cuando (x,y,z) está en la recta.

Por lo tanto (x,y,z) debe verificar

$$x+2y-z=1, \quad y \quad 2x-3y+3z=0$$

Encontrar el mínimo de $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es equivalente a encontrar el mínimo de $x^2+y^2+z^2$.

Si usamos las letras $f,\ g_1,\ g_2$ para definir las expresiones

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2\ ,\ g_1(x,y,z) = x+2y-z, \quad g_2(x,y,z) = 2x-3y+3z$$

El método de los multiplicadores de Lagrange dice que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla g_1(x,y,z) + \mu\nabla g_2(x,y,z)$$

Pero como $\nabla f(x,y,z) = (2x,2y,2z)$, $\nabla g_1(x,y,z) = (1,2,-1)$,
y $\nabla g_2(x,y,z) = (2,-3,3)$,
la igualdad anterior se expresa como

$$(2x,2y,2z) = \lambda(1,2,-1) + \mu(2,-3,3)$$

O bien, $2x = \lambda + 2\mu$, $2y = 2\lambda - 3\mu$, $2z = -\lambda + 3\mu$
Despejando x,y,z tenemos que :
$x = \frac{\lambda}{2} + \mu, \quad y = \lambda - \frac{3}{2}\mu, \quad z = -\frac{\lambda}{2} + \frac{3}{2}\mu$
Pero como (x,y,z) verifica las restricciones, se tiene que

$$x + 2y - z = 3\lambda - \frac{7}{2}\mu = 1$$

y $2x - 3y + 3z = -\frac{7}{2}\lambda + 11\mu = 0$
de donde $\mu = \frac{14}{83}, \ \lambda = \frac{44}{83}$
y reemplazando en $x = \frac{\lambda}{2} + \mu, \quad y = \lambda - \frac{3}{2}\mu, \quad z = -\frac{\lambda}{2} + \frac{3}{2}\mu$
se obtiene $x = \frac{36}{83}, \quad y = \frac{23}{83}, \quad z = -\frac{1}{83}$
y por lo tanto la menor distancia buscada es

$$\sqrt{\left(\frac{36}{83}\right)^2 + \left(\frac{23}{83}\right)^2 + \left(\frac{1}{83}\right)^2} = \frac{1}{83}\sqrt{36^2 + 23^2 + 1} = \frac{\sqrt{1826}}{83}$$

$\square$

Justifique todas sus respuestas.
Tiempo:90 minutos.