DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Coordinación de Cálculo III y Cálculo Avanzado
para el Módulo Básico de Ingeniería

PEP 1 Cálculo III Invierno
Versión A
1 de agosto de 2022

Problema 1. Sea la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, donde

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} & ;(x,y) \neq (1,0) \\ 0 & ;(x,y) = (1,0) \end{cases}$$

y

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} & ;(x,y) \neq (1,0) \\ 0 & ;(x,y) = (1,0) \end{cases}.$$

Determine en que puntos, esta función F es continua y diferenciable.

Solución. Primero veamos para los puntos $(x,y) \neq (1,0)$. Si determinamos que las funciones $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ son diferenciables en estos puntos, entonces la función F también es diferenciable en $(x,y) \neq (1,0)$. Y si F es diferenciable, entonces F es continua.

Como $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \dfrac{y^3}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ y $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{(x-1)^3}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ existen y son continuas (por álgebra de funciones continuas), entonces f_1 es diferenciable en todo $(x,y) \neq (1,0)$. Del mismo modo tenemos que $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \dfrac{y(y^2-(x-1)^2)}{((x-1)^2+y^2)^2}$ y $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{(x-1)((x-1)^2-y^2)}{((x-1)^2+y^2)^2}$ existen y son continuas (por álgebra de funciones continuas), entonces f_2 es diferenciable en todo $(x,y) \neq (1,0)$, por lo que F es diferenciable en todo $(x,y) \neq (1,0)$. Y como F es diferenciable en estos puntos , entonces F es continua en todo $(x,y) \neq (1,0)$.

Ahora veamos para el punto $(x,y) = (1,0)$. Si determinamos que si unas de las funciones f_1 o f_2 no son continuas en este punto, entonces tenemos que F no es continua en $(x,y) = (1,0)$. Y si F no es continua en este punto, concluimos que F no es diferenciable en $(x,y) = (1,0)$. Probemos entonces que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 0$$

y que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} = 0.$$

Para el primer límite, tenemos que como $|x-1| \leq \sqrt{(x-1)^2+y^2}$ y que $|y| \leq \sqrt{(x-1)^2+y^2}$, entonces $\frac{|xy-y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \frac{|(x-1)y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Por lo que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{|xy-y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 0,$$

y por el teorema del Sándwich, el límite existe e igual a 0, o sea que f_1 es continua en $(x,y) = (1,0)$.

Ahora, para el segundo límite, usamos el camino $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x\cdot 0 - 0}{(x-1)^2+0^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{0}{(x-1)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora usando el camino $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y+1\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0} \frac{(y+1)y - y}{(y+1-1)^2+y^2} &= \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{2y^2} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dado que para estos dos caminos el límite dio diferente, obtenemos que no existe el límite, o sea que la función no es continua en $(x,y) = (1,0)$, o sea que la función f_2 no es continua en este punto, por lo que F tampoco es continua , entonces F no es diferenciable en $(x,y) = (1,0)$.

□

Problema 2. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ donde D corresponde al disco unitario centrado en el origen. Determine los valores máximos y mínimos de f sobre D.

Solución. Primero que todo notemos que podemos subdivir el conjunto D en la unión de los conjuntos $D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2+y^2 < 1$ y $D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2+y^2 = 1\}$.

Ahora, la idea es utilizar el criterio del Hessiano sobre D_1 (notemos que este conjunto es abierto) para obtener candidatos a máximos y mínimos de la función sobre D que se encuentran en D_1 y por otro lado usar multiplicadores de Lagrange para encontrar los candidatos sobre D_2.

Primero que todo notemos que la función f es C^2 pues es un polinomio cuyos exponentes son enteros, luego la matriz Hessiana es simétrica y esta definida como

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz Hessiana de f es definida positiva en todo punto y por ende todo punto crítico en D corresponderá a un mínimo local. Procedamos ahora a encontrar los puntos críticos de f. Para esto, resolvemos

$$\begin{aligned}(0,0,0) &= \nabla f(x,y) \\ &= (2x+y, 2y+x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(0,0) = \nabla f(x,y)$ si y solamente si $(x,y) = (0,0)$. De esta forma, nuestro primer candidato a mínimo de f sobre D es el punto $(0,0,) \in D_1$.

Por otra parte para ver que ocurre en la frontera del disco, utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange con la restricción

$$x^2+y^2-1=0.$$

Claramente $g(x,y) = x^2+y^2-1$ es C^1, luego el primer paso es revisar los posibles puntos que no son arrojados por el método de Lagrange, que sabemos que para el caso de una restricción corresponden a los puntos $(x,y,z) \in S$ tales que $\nabla g(x,y) = (0,0)$. Sin embargo, el único punto que satisface la última ecuación es el $(0,0)$ y claramente $(0,0) \notin S$.

Por ende, todos los candidatos a maximizar o minimizar la función $f(x,y)$ sujeto a la restricción $x^2+y^2-1=0$ serán entregados por el método de Lagrange.

Sabemos por Lagrange que si (x,y) D_2 es un maximo o un mínimo para la función sobre D_2, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y),$$

es decir, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x+y &= 2x\lambda, \\ 2y+x &= 2y\lambda, \\ x^2+y^2-1 &= 0. \end{aligned}$$

Claramente, $(0,0) \notin D_2$ por ende podemos dividir la primera ecuación por x y la segunda ecuación por y obteniendo así :

$$(y+x)(y-x) = 0.$$

De esta manera, concluimos que $x = \pm y$. Más aún, considerando la ecuación de restricción $x^2+y^2-1=0$, tenemos que $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por ende los candidatos a máximos y mínimos de f sobre la frontera son

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Una inspección rápida sobre estos candidatos junto al punto $(0,0)$ obtenido anteriormente, arroja que $(0,0)$ minimiza la función sobre D y los valores $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ la maximiza sobre D.

$\square$

Problema 3. Considere $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable. Se define $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ por $g(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$, donde $u(x,y)=x+y; v(x,y)=\operatorname{sen}(x-y)$

(a) Escriba $\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2$ en términos de $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

(b) Verifique su expresión para la función $f(u,v)=v^2-u\operatorname{sen}^{-1}v$

Solución.

(a) Derivando

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u}1+\frac{\partial f}{\partial v}\cos(x-y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial u}1-\frac{\partial f}{\partial v}\cos(x-y)\right)^2\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\cos(x-y)+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\cos^2(x-y)\\
&\quad+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2-2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\cos(x-y)+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\cos^2(x-y)\\
&= 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+2\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\cos^2(x-y)
\end{aligned}$$

(b) reemplazando $f(u,v)=v^2-u\operatorname{sen}^{-1}v$ en $g(x,y)$ tenemos

$$g(x,y)=\operatorname{sen}^2(x-y)-(x+y)\operatorname{sen}^{-1}\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2(x-y)-(x+y)(x-y)$$

con eso calculamos cada lado de la igualdad obtenida en el ítem anterior, en el lado derecho

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}&=2\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y)-2x\\
\frac{\partial g}{\partial y}&=-2\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y)+2y
\end{aligned}$$

así sumando el cuadrado de cada uno obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 &= (2\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y)-2x)^2+(-2\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y)+2y)^2\\
&= 4\operatorname{sen}^2(x-y)\cos^2(x-y)-8x\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y)+4x^2+\\
&\quad+4\operatorname{sen}^2(x-y)\cos^2(x-y)-8y\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y)+4y^2\\
&= 8\operatorname{sen}^2(x-y)\cos^2(x-y)-8(x+y)\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y)+4(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

Calculamos el lado derecho, por partes

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\operatorname{sen}^{-1}v$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 2v - \frac{u}{\sqrt{1-v^2}}$$

así

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \cos^2(x-y) &= 2\left(\operatorname{sen}^{-1} v\right)^2 + 2\left(2v - \frac{u}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 \cos^2(x-y) \\
&= 2(x-y)^2 + 2\left(2\operatorname{sen}(x-y) - \frac{x+y}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x-y)}}\right)^2 \cos^2(x-y) \\
&= 2(x^2-2xy+y^2) + 8\operatorname{sen}^2(x-y)\cos^2(x-y) \\
&\quad -8(x+y)\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y) + 2x^2 + 4xy + 2y^2 \\
&= 4(x^2+y^2) + 8\operatorname{sen}^2(x-y)\cos^2(x-y) \\
&\quad -8(x+y)\operatorname{sen}(x-y)\cos(x-y)
\end{aligned}$$

Con lo cual corroboramos la igualdad

$\square$