Quiero probar que estos programas son semánticamente equivalentes:

a)
```
x=x+1
y=x
```

b)
```
y=x++
```

Se asume que σ es un estado tal que $x \in \operatorname{dom}\sigma$.

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in \operatorname{dom}\sigma}{\langle x,\sigma\rangle \Downarrow_{exp} \langle \sigma\ x,\sigma\rangle}\textsc{Var} \qquad \dfrac{}{\langle 1,\sigma\rangle \Downarrow_{exp} \langle \mathbf{1},\sigma\rangle}\textsc{NVal}}{\langle x+1,\sigma\rangle \Downarrow_{exp} \langle \sigma\ x+\mathbf{1},\sigma\rangle}\textsc{Plus}}{\langle x=x+1,\sigma\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{skip}, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle}\textsc{Ass}}{\langle x=x+1; y=x,\sigma\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{skip}; y=x, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle}\textsc{Seq}_2$$

$$\dfrac{}{\langle \mathbf{skip}; y=x, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle \rightsquigarrow \langle y=x, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle}\textsc{Seq}_1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in \operatorname{dom} x}{x \in \operatorname{dom}[\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]}\text{Def } [\sigma|v:e]}{\langle x, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle \Downarrow_{exp} \langle \sigma x+\mathbf{1}, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle}\textsc{Var}}{\langle y=x, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{skip}, [\sigma \mid y : \sigma\ x+\mathbf{1}, x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle}\textsc{Ass}$$

Se tiene entonces que:
$\langle x=x+1; y=x,\sigma\rangle$
$\rightsquigarrow$
$\langle \mathbf{skip}; y=x, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle$
$\rightsquigarrow$
$\langle y=x, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]$
$\rightsquigarrow$
$\langle \mathbf{skip}, [\sigma \mid y : \sigma\ x+\mathbf{1}, x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle$

Por lo tanto: $\langle x=x+1; y=x,\sigma\rangle \rightsquigarrow^* \langle \mathbf{skip}, [\sigma \mid y : \sigma\ x+\mathbf{1}, x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle$

b)
Se tiene la siguiente derivación para `++`

$$\dfrac{x \in \operatorname{dom}\sigma}{\langle x\texttt{++},\sigma\rangle \Downarrow_{exp} \langle \sigma\ x+\mathbf{1}, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle}\textsc{VarInc}$$

Por lo tanto:

$$\dfrac{\dfrac{x \in \operatorname{dom}\sigma}{\langle x\texttt{++},\sigma\rangle \Downarrow_{exp} \langle \sigma\ x+\mathbf{1}, [\sigma \mid x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle}\textsc{VarInc}}{\langle y=x\texttt{++},\sigma\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{skip}, [\sigma \mid y : \sigma\ x+\mathbf{1},\ x : \sigma\ x+\mathbf{1}]\rangle}\textsc{Ass}$$

Como
$\langle x = x + 1; y = x, \sigma\rangle \rightsquigarrow^* \langle \mathbf{skip}, [\sigma \mid y : \sigma\ x \mathbf{+1}, x : \sigma\ x \mathbf{+1}]\rangle$
y
$\langle y = x\texttt{++}, \sigma\rangle \rightsquigarrow^* \langle \mathbf{skip}, [\sigma \mid y : \sigma\ x \mathbf{+1},\ x : \sigma\ x \mathbf{+1}]\rangle$
Se tiene que ambos programas son semánticamente equivalentes.