Agustín Fernández Bergé

CASkell: EDSL para el manejo simbolico de expresiones matematicas

1. Instalación y uso del proyecto

Para correr el proyecto, es necesario tener instalado Stack, Make y ghc-8.10.7.

Una vez instalados, el comando:

```
make setup
```

Ejecutara todos los comandos para instalar las librerías necesarias.

El comando:

```
make all
```

Compila el proyecto, crea la documentación y corre todos los tests incluidos en la misma.

El comando:

```
stack exec -- ghci
```

Ejecuta `ghci` con todos los módulos del proyecto cargados. Los mismos se pueden importar usando la sentencia 'import'.

Para cargar un archivo que use las librerías del proyecto, usar:

```
stack exec -- ghci <dirección del archivo>
```

Para abrir la documentación del proyecto, usar:

```
make open-docs
```

2. Manejo basico de expresiones

Todo uso del EDSL necesita del tipo `Expr`, el cual se importa con la libreria homonima

```
import Expr
```

2.1 Crear expresiones matemáticas

Todas las `Expr` se construyen a partir de 2 elementos base, numeros y simbolos:

Numeros

Los numeros se pueden crear a partir de la función 'fromNumber' o haciendo un casting explicito al tipo `Expr`:

```
entero_dos = fromNumber 2
entero_tres = (3 :: Expr)
fraccion = fromNumber (21/19) -- fromNumber tiene mayor precedencia que '/' o cualquier operador matematico
```

¿Porque es necesario el casting?

El casting es necesario debido a que Haskell convierte los numeros a `Integer` o `Double` de manera predeterminada en vez de al tipo `Expr`. Aunque a veces no es necesario si ya se esta operando con `Expr`:

```
x = symbol "x" -- x:: Expr
u = x+2 -- El casting no es necesario
```

Una solución es mediante el uso de `default`:

```
default (Expr,Expr) -- Todos las expresiones numericas seran casteadas automaticamente a Expr
```

Pero esto hara que cualquier expresión dentro del contexto de ejecución/modulo de trabajo sea casteada automaticamente a Expr, lo cual puede ser no deseable.

En general, si la expresión a utiliza solo numeros o funciones de numeros, entonces es necesario hacer un casting.

Numeros reales

Tambien hay soporte para numeros reales, pero seran tratados como fracciones si la misma no es muy grande. Los numeros reales tienen una presición fija y son sensibles a problemas de precisión

```
(0.33 :: Expr) ==> 33/10 -- fracción pequeña
(0.3333333 :: Expr) ==> 0.3333333 -- la fracción 3333333/10000000 es muy grande
(0.1111122222333334444 :: Expr) ==> 0.11111222223333345 -- numero redondeado
```

Simbolos

Creación

Los símbolos se pueden crear utilizando la función `symbol`, que toma una cadena de texto como argumento y devuelve una expresión simbólica, el resultado de `symbol` puede asignarse a un identificador y ser combinado con otras expresiones.

```
x = symbol "x"
y = symbol "y"
x+x+y -- 2*x+y
```

Los símbolos se identifican por el string pasado a symbol, **NO** por el identificador asignado:

```
x = symbol "qk"
y = symbol "qk"
x*y ==> qk^2 -- indentificadores distintos, mismo simbolo
```

Suposiciones

Por defecto, se desconoce la naturaleza de los símbolos creados mediante 'symbol', solo se sabe que son números reales. Se pueden realizar suposiciones sobre los simbolos(ejemplo, es positivo o es entero) usando la función `assume`.

```
x = assume (symbol "x") ["even"]
y = assume (symbol "y") ["positive"]
n = assume (symbol "n") ["negative", "integer"]
```

Ciertas suposiciones pueden hacer que se ejecuten o no se ejecuten ciertas simplificaciones:

```
(2*x)**n ==> 2**n * x**n -- Distribución de potencias con exponentes enteros
(2*x)**y ==> (2*x)**y -- No hay distribución ya que 'y' no es entero

0 ** y ==> 0 -- 0^x = 0 para y > 0
0 ** n ==> Undefined: division por cero -- n < 0
0 ** x ==> 0^x -- No se sabe el signo de x, no se modifica la expresión
```

Las suposiciones no son retroactivas:

```
u = 0**y -- 0
y = assume (symbol "y") ["negative"] -- y ahora es negativo
0**y -- Undefined: division por cero
v = u -- v = 0
```

Las suposiciones afectan a todas las expresiones, no solo a los símbolos. Las operaciones involucradas y las suposiciones sobre los operadores involucrados afectan a la suposicion de la expresión final:

```
-- x positivo, y negativo
x+2 -- positivo, x y 2 son positivos
x-y -- positivo, x y (-y) positivos
x+y -- se desconoce el signo, ya que x es positivo e y negativo
```

Tambien es posible consultar si una expresión cumple una cierta supocisión usando las funciones del tipo `is{suposición}`. Estas devolveran 3 posibles valores `T`(Verdadero), `F`(Falso) o `U`(Desconocido).

```
isPositive ((99::Expr)) ==> T
isEven ((pi::Expr)) ==> F
isNegative ((symbol "x")) ==> U -- Todos los simbolos se crean con suposiciones desconocidas
```

T,F y U son valores de verdad de lógica ternaria, por lo que los operadores booleanos definidos en Haskell no pueden usarse. El proyecto incluye operadores especiales para trabajar con estos valores:

```
-- And logico
T &&& T = T
F &&& T = F
T &&& U = U

-- Or logico
F ||| U = U
T ||| U = T  -- U puede ser True o False, para cualquier valor posible el or devuelve True
U ||| U = U
U ||| True = T -- Pueden combinarse con los booleanos de Haskell, pero el resultado siempre será un valor de lógica ternaria.

-- Not logico
not3 T = F
not3 F = T
not3 U = U
```

La siguiente tabla contiene un listado de suposiciones soportadas:

Suposicion	Asumir sobre un simbolo	Preguntar suposicion
positive	`assume _ ["positive"]`	isPositive
negative	`assume _ ["negative"]`	isNegative
zero	`assume _ ["zero"]`	isZero
even	`assume _ ["even"]`	isEven
integer	`assume _ ["integer"]`	isInteger
odd	`assume _ ["odd"]`	isOdd

El simbolo pi

`pi` es un simbolo con suposiciones predefinidas. Haskell por defecto intentara convertir 'pi' en un Double, por lo que puede ser necesario realizar un cartel. Al ser un símbolo, es tenido en cuenta para ciertas simplificaciones.

```
(0**pi :: Expr) = 0 -- pi es positivo, no es entero por lo que no es ni par ni impar
(sin(pi) :: Expr) = 0
```

2.2 Combinando expresiones

`Expr` es una instancia de las clases `Num`, `Fractional` y `Floating`, por lo que soporta las expresiones matematicas basicas y la aplicación de ciertas funciones.

```
x = symbol "x"
y = symbol "y"

-- Sumas y restas
x+2 -- 2 es automaticamente casteado a un Expr, por lo que no es necesario fromNumber
x-9

-- Productos y divisiones
2*x
x/y

-- Potencias
x^2 -- para exponentes positivos de tipo 'Integer'
x^^5 -- para exponentes 'Integer' de cualquier signo
x**y -- potencia entre 'Expr'

-- Aplicar funciones
sin(x)
tan(9)+y
exp((4::Expr)) -- casting necesario, sino evaluaria a un Double
```

```
log(x-12*pi)

-- Tambien hay soporte para funciones anonimas, solo hay que pasar una lista con los argumentos
f = function "f"
f[x]+f[x] = 2*f(x)
```

Los elementos de tipo `Expr` cumplen todos los axiomas de cuerpo, excepto el de la propiedad distributiva:

```
x*2 == 2*x -- True
(x+y)+9 == x+(y+9) -- True
2*(x+y) == 2*x+2*y -- True, los numeros se distribuyen
(x+y)*z == x*z + y*z -- False, los terminos no númericos no se distribuyen

1/0 == log(-1)
=>(autosimplifican a)
Undefined: division por cero == Undefined: logaritmo de un numero negativo
=>(la comparación evalua a)
True -- Todas las expresiones indefinidas, son iguales entre si
```

Funcion en haskell	Función matematica
sin	seno
cos	coseno
tan	tangente
sec	secante
csc	cosecante
cot	cotangente
exp	exponencial
log	logaritmo natural
asin	arcoseno
acos	arcocoseno
atan	arcotangente
sinh	seno hiperbolico
cosh	coseno hiperbolico
tanh	tangente hiperbolica
asinh	arcoseno hiperbolico
acosh	arcocoseno hiperbolico
atanh	arcotangente hiperbolica
sqrt	raiz cuadrada

Autosimplificación

Las operaciones basicas ejecutan el proceso de **autosimplificación**, el cual realiza ciertas simplificaciones de manera automatica

```
x+x ==> 2*x
x*x ==> x**2
(x**2)**3 ==> x**6
x + sin(pi/2) ==> x+1 -- sin(pi/2) = 1
```

La autosimplificación tambien se encarga de manejar expresiones que contengan terminos indefinidos:

```
u = (1/0)::Expr -- Undefined: division por 0
v = symbol "v"
w = undefinedExpr "Undefined explicito"

sin(w)+1 ==> Undefined: Undefined explicito
u**u ==> Undefined: división por cero
u+v+w ==> Undefined: división por cero
w+v+u ==> Undefined: Undefined explicito -- Los indefinidos de mas a la izquierda tienen prioridad
```

Las funciones encargadas de realizar el procedimiento de autosimplificación se encuentran en el archivo `src/Expr/Simplify.hs`. Estás funciones son utilizadas por los operadores matemáticos y no se usan con el tipo `Expr`.

Detección de expresiones indefinidas

La autosimplificación permite detectar ciertas expresiones prohibidas, por ejemplo, aquellas que incluyen una división por 0

```
1/(x-x) ==> Undefined: division por cero
1/(log(x/x)) ==> Undefined: division por cero
```

Limites de la autosimplificación

La **autosimplifiación** no realiza todas las simplificaciones posibles, primero porque la lista de reglas de simplificación puede ser muy larga y segundo porque una autosimplificación con muchas reglas podria interferir con el funcionamiento de otras funciones(ejemplo, si la autosimplificación aplicara la propiedad distributiva siempre que pudiera, seria imposible crear una función para factorizar polinomios):

Esto hace que algunas expresiones queden sin simplificar:

```
sin(x)**2 + cos(x)**2 -- la expresión no cambia
1/(exp(2*x) - exp(x)**2) -- division por cero no reconocida
(x+1)**3 / (2*x**2+4*x+2) -- la expresión no cambia
```

Aun asi, muchas de estas simplificaciones pueden ser aplicadas usando los modulos especializados para simplificación.

```
trigSimplify (sin(x)**2 + cos(x)**2) ==> 1
expExpand (1/(exp(2*x) - exp(x)**2)) ==> Undefined: division por 0
cancel ((x+1)**3 / (2*x**2+4*x+2)) ==> x/2 + 1/2
```

2.3 Pattern Matching sobre Expr

El tipo `Expr` soporta *Pattern Matching*, esto permite analizar una expresión en base a su estructura y modificarla de la manera que sea necesaria:

```
-- Extrae el primer operando de una expresión
primerOperando :: Expr -> Expr
primerOperando (Add (x :|| _)) = x
primerOperando (Mul (x :|| _)) = x
primerOperando (Pow x _) = x
primerOperando (Fun (x :| _)) = x
primerOperando x = x
```

Tipos TwoList y NonEmpty

Las expresiones en funciones se devuelven como un `NonEmpty Expr`, `NonEmpty a` representa una lista de elementos de tipo `a` que garantiza la existencia de al menos un elemento.

```
data NonEmpty a = a :| [a]
```

Las expresiones en sumas y productos se devuelven en una `TwoList`, una `TwoList` es analoga a una `NonEmpty` pero garantiza la existencia de al menos 2 elementos.

```
data TwoList a = a :|| NonEmpty a
```

El tipo `TwoList` se define en el archivo `src/Data/TwoList.hs`.

Para el tipo `NonEmpty`: consultar la documentación en Hackage

Patrones derivados

Los patrones basicos son `Number`, `Symbol`, `Add`, `Mul`, `Pow`, `Fun` y `Undefined`. Existen patrones adicionales que se derivan a partir de los basicos.

Para una implementación de los patrones, ver el archivo `Expr/Structure.hs`.

Listado de patrones implementados

Patrón	Descripción
`Number x`	Matchea cualquier número `x`.
`Symbol s`	Matchea cualquier símbolo de nombre `s`.
`Add (x :|| y :| xs )`	Matchea una suma de dos o más expresiones. `x` es el primer elemento, `y` el segundo y `xs` es una lista con el resto de los argumentos.

Patrón	Descripción
`Mul (x :|| y :| xs )`	Matchea un producto de dos o más expresiones. `x` es el primer elemento, `y` el segundo y `xs` es una lista con el resto de los argumentos.
`Pow x y`	Matchea una potencia de base `x` y un exponente `y`.
`Fun f (x :| xs)`	Matchea una función aplicada a una lista de uno o más argumentos. `x` es el primer argumento y `xs` una lista con los argumentos restantes
`Undefined e`	Matchea cualquier expresión indefinida, donde `e` es el error correspondiente
`Pi`	Matchea el simbolo pi
`Neg x`	Matchea una expresión `x` multiplicada por un número negativo.
`MonomialTerm u n`	Matchea expresiones de la forma `u**n`, donde `u` es una expresión cualquiera y `n` es un numero natural mayo a 1
`Sqrt u`	Matchea una expresión `u` elevada a `1/2`
`Div n d`	Matchea una división de numerador `n` y denominador `d`.
`Exp x`	Matchea una expresión exponencial con base `e` y exponente `x`.
`Log x`	Matchea una expresión logarítmica con base `e` y argumento `x`.
`Sin x`	Matchea la función seno aplicada a `x`.
`Cos x`	Matchea la función coseno aplicada a `x`.
`Tan x`	Matchea la función tangente aplicada a `x`.
`Asin x`	Matchea la función arco seno aplicada a `x`.
`Acos x`	Matchea la función arco coseno aplicada a `x`.
`Atan x`	Matchea la función arco tangente aplicada a `x`.
`Derivative u x`	Matchea la derivada sin evaluar de `u` con respecto a `x`.
`Integral u x`	Matchea la integral indefinida sin evaluar de `u` con respecto a `x`.
`DefiniteIntegral u x a b`	Matchea la integral definida sin evaluar de `u` con respecto a `x` en el intervalo `[a, b]`.

Orden de las expresiones en los patrones

En patrones que representan operaciones conmutativas como `Add` y `Mul` las expresiones se colocan en un orden especifico. Esto facilita cosas como la comparación de expresiones, ya que `x+1` y `1+x` internamente siempre tendran el mismo orden. Sin embargo esto puede resultar una complicación a la hora de hacer pattern matching.

```
match1 (Add ((Pow (Symbol x) 2) :|| 1 :| [])) = True
match1 _ = False

match2 (Add (1 :|| (Pow (Symbol x) 2) :| [])) = True
match2 _ = False

match1 (x**2+1) = False
match1 (1+x**2) = False

match2 (x**2+1) = True
match2 (1+x**2) = True

-- nota: match1 y match2 podrian reemplazarse por la funcion (==((symbol "x")**2+1)), si es que 'x' no requiere suposiciones
```

El orden de las expresiones es determinado por la instancia de `Ord` del tipo `PExpr`, ubicado en `src/Expr/PExpr.hs`.

3. Modulos especiales

Los modulos especiales se construyen a partir del tipo `Expr` y permiten realizar las siguientes 6 funcionalidades:

- Evaluación numerica
- Simplificación avanzada
- Derivación
- Integración
- Parseo de expresiones
- PrettyPrinting de expresiones

3.1 Evaluación númerica

Para evaluar númericamente una expresión, hay que importar el modulo `Evaluate.Numeric`

```
import Evaluate.Numeric
```

Las expresiones podran evaluarse usando la función `eval`:

```
eval [] (2*sin(pi/4)) = 1.4142135623730951 -- sqrt 2
eval [(x,2.2)] (7.8+x) = 10-- Podes reemplazar los simbolos por valores numericos
```

3.2 Simplificación avanzada

Los modulos para simplificación permiten realizar algunas simplificaciones que la autosimplificación por si sola no puede realizar. Estos modulos pueden operar con:

- Expresiones algebraicas(polinomios y expresiones racionales)
- Expresiones trigonometricas
- Expresiones con exponenciales
- Expresiones con logaritmos

A su vez, todos los modulos(salvo los de expresiones algebraicas) contienen 3 funciones para realizar simplificaciones, una función de expansión, una de contración y una de simplificación. El funcionamiento exacto varia de modulo en modulo pero por lo general operan de la siguiente forma:

- Función de expansión: Intenta hacer las expresiones mas grandes, puede llegar a formar expresiones mas pequeñas gracias a la autosimplificación:

  ```
  -- Expansión algebraica
  expand((x + 1)*(x - 2) - (x - 1)*x)
  =>(expande a)
  x**2 - 2*x + x - 2 - x**2 + x
  =>(autosimplifica a)
  -2

  resultado final: -2
  ```

- Función de contración: Intenta hacer las expresiones mas pequeñas:

  ```
  trigContract (2*sin(x)*cos(x)) = sin(2*x) -- Contración trigonometrica
  expContract (exp(2) * exp(5)) = exp(5) -- Contración de exponenciales
  ```

- Función de simplificación: Racionaliza la expresión, intenta contraer el numerador y el denominador y cancela terminos usando la autosimplificación:

  ```
  cancel ((x+y)*(x-y)/(x**3-x*y**2)) = 1/x -- Simplificacion algebraica
  ```

En general, la expansión no es la inversa ni de la contración ni de la simplificación, debido al proceso de autosimplificación:

```
expExpand (expContract (exp(x)**2)) = exp(x)**2
-- La expansión anuló la contración

expExpand (expContract (exp(x)**2- exp(2*x)))
=>(contrae a)
expExpand (exp(2*x) - exp(2*x))
=>(autosimplifica a)
expExpand 0
=>(expande a)
0
-- La expansión no anuló la contración
```

Tabla de funciones de simplificación avanzada

Área de simplificación	Función de expansión	Función de contración	Función de simplificación	Modulo/s
Algebraica	`expand`	No existe	`cancel`	`Simplification.Algebraic` y `Simplification.Rationalize`
Trigonométrica	`trigExpand`	`trigContract`	`trigSimplify`	`Simplification.Trigonometric`
Exponencial	`expExpand`	`expContract`	`expSimplify`	`Simplification.Exponential`
Logarítmica	`logExpand`	`logContract`	`logSimplify`	`Simplification.Logarithm`

3.3 Derivación

Para derivar expresiones, importar el modulo `Calculus.Derivate`:

```
import Calculus.Derivate
```

Y luego usar la función `derivate`:

```
derivate (x**2) x = 2*x
derivate (exp(x)) x = exp(x)
f = function "f"
g = function "g"
derivate (f[x]) = Derivate(f(x), x) -- Derivada desconocida, devuelvo una derivada sin evaluar
derivate (f[g[x]]) x = Derivate(f(x),g(x)) * Derivate(g(x), x) -- Derivada sin evaluar aplicando la regla de la cadena
```

3.4 Integración

Para integrar expresiones, importar el modulo `Calculus.Integrate`:

```
import Calculus.Integrate
```

Y luego usar la función `integrate`:

```
integrate (cos x) x = sin(x) -- Notar que no se agrega la constante de integración
integrate (exp(x)) = exp(x)
integrate (2*sin(x)*cos(x)) = -cos(x)^2
```

Si no se puede encontrar la integral de la función(ya sea porque no es una integral elemental, el algoritmo de integración no puede encontrarla o la misma se desconoce), se devuelve una integral desconocida:

```
integrate (exp(-x**2)) x = Integral(e^(-x^2),x) -- Integral no elemental
integrate (1/(x**2+1)) x = Integral(1/(x^2+1),x) -- Integral elemental, pero no obtenida por el algoritmo
f = function "f"
integrate (f[x]) x = Integral(f(x), x) -- Integral desconocida
```

3.5 Parseo de expresiones

El modulo `Expr` viene incluida con la función `parseExpr` que convierte una cadena de texto en una expresión

```
parseExpr "x" -- Devuelve el simbolo x
parseExpr "x + x + sin(pi / 2)" -- Devuelve 2*x+1, la expresión se evalua usando autosimplificación
parseExpr "f(x) + g(y)" -- Devuelve f(x)+g(y), puede detectar funciones anonimas

a = symbol "a"
u = parseExpr "b+c"
a+u    -- Devuelve a+u, las expresiones parseadas pueden combinarse con expresiones no parseadas
```

En caso de un error de parseo, se devuelve una expresión indefinida.

```
u = symbol "2++x" -- Undefined: Error de parseo
```

El parser se construye a partir de una gramatica de Happy, el archivo de la gramatica se encuentra en el modulo `Expr/Parser.y`.

3.6 PrettyPrinting

El prettyprinting de expresiones se realiza en el archivo `Expr/PrettyPrint.hs`, utilizando la libreria `PrettyPrinter`:

```
y*2*x + y**2 + x**2 -- se muestra como x^2 + 2*x*y + y^2, los terminos se reorganizan
exp(x)+exp(y) -- se muestra como e^x+e^y
2 * x**(-1) * y**(-1) -- se muestra como 2/(x*y)
```

4. Organización de los archivos

La estructura del proyecto es la siguiente:

```
.
|-- src
|   |-- Calculus
|   |   |-- Derivate.hs -- Derivación de expresiones
|   |   |-- Integrate.hs -- Integración de expresiones
|   |   |-- Utils.hs     -- Funciones de utlidad usada por los modulos en la carpeta Calculus
|   |-- Classes
|   |   |-- Assumptions.hs -- Funciones para suposiciones
|   |   |-- EvalResult.hs  -- Monada EvalResult
|   |-- Data
|   |   |-- Number.hs  -- Tipo 'Number', utilizado por las expresiones cuando operan con numeros puros
|   |   |-- TriBool.hs -- Manejo de logica ternaria
|   |   |-- TwoList.hs -- Tipo 'TwoList', que representa listas con 2 o mas elementos
|   |-- Evaluate
|   |   |-- Numeric.hs -- Evaluación numerica
|   |-- Expr
|   |   |-- Expr.hs     -- Junta todos los modulos y los exporta como uno
|   |   |-- ExprType.hs -- Definición del tipo Expr
|   |   |-- Parser.y    -- Parser de expresiones
|   |   |-- PExpr.hs    -- Tipo 'PExpr', para manejar arboles de expansiones
|   |   |-- PolyTools.hs -- Funciones para trabajar con expresiones polinomicas
|   |   |-- PrettyPrint.hs -- Prettyprinting de expresiones
|   |   |-- Simplify.hs -- Autosimplificación
|   |   |-- Structure.hs -- Pattern matching de expresiones
|   |-- Simplification
|   |   |-- Algebraic.hs      -- Expansion algebraica
|   |   |-- Exponential.hs    -- Simplificacion de exponenciales
|   |   |-- Logarithm.hs      -- Simplificacion de logaritmos
|   |   |-- Rationalize.hs    -- Simplificacion algebraica
|   |   |-- Trigonometric.hs  -- Simplificacion de funciones trigonometricas
|-- CASkell.cabal
|-- README.md
```

5. Decisiones de diseño

5.1 EDSL por sobre DSL

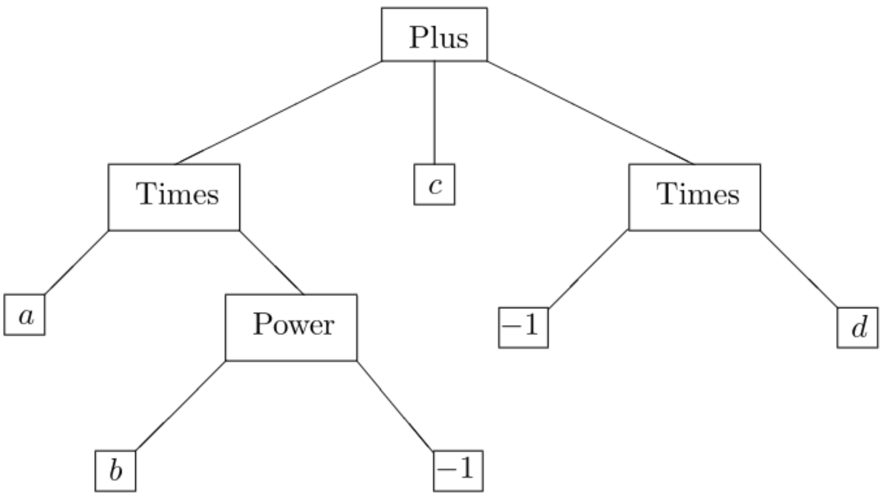
La decisión inicial fue si crear un DSL (Domain Specific Language) o un EDSL (Embedded Domain Specific Language). Un DSL es un lenguaje de programación especializado en un dominio particular, mientras que un EDSL es un DSL que se construye dentro de un lenguaje de programación general, aprovechando su sintaxis y funcionalidades.

Hay 2 razones por las que termine implementando un EDSL:

1. **Pattern Matching**: El pattern matching a la hora de trabajar con expresiones matemáticas es fundamental y es utilizado en la mayoría de las funciones del proyecto. El soporte de Haskell para realizar Pattern Matching, junto con las extensiones `PatternSynonyms` y `ViewPatterns`, resultó fundamental para simplificar y hacer más legible el código. En un DSL habria que implementar alguna forma de Pattern Matching desde 0, la cual seria potencialmente inferior a la de Haskell.
2. **Reutilización de la infraestructura de Haskell**: Al construir un EDSL dentro de Haskell, se puede aprovechar toda la infraestructura existente del lenguaje, incluyendo su sistema de tipos, funciones de alto orden, y librerías estándar. Esto reduce el esfuerzo de implementación y permite utilizar modulos especializados como `Happy` o `PrettyPrinter`.

5.2 Representación de expresiones

Internamente, las expresiones se representan como arboles de expresiones



Ejemplo de representación de $a/b+c-d$, sacada de *Computer alegebra and symbolic computation: Elementary Algorithms*

Estos arboles de expresiones se representan en codigo mediante el tipo `PExpr`, definido en `src/Expr/PExpr.hs`

```haskell
data PExpr = Number Number
                | SymbolWithAssumptions String AssumptionsEnviroment
                | Mul [PExpr]
                | Add [PExpr]
                | Pow PExpr PExpr
                | Fun String [PExpr]
```

La expresión $a/b+c-d$ en `PExpr` seria similar a la siguiente

```haskell
a/b+c-d = Add [
        Mul [
            Symbol "a",
            Pow (Symbol "b") (Number (-1))
        ],
        Symbol "c",
        Symbol "d"
    ]
```

Las funciones de autosimplificación operan con tipos `PExpr` y evaluan a una `Expr`:

```haskell
simplifyPow :: PExpr -> PExpr -> Expr -- Autosimplificacion de potencias
```

5.3 Manejo de errores con monadas

El tipo `PExpr` no realiza el manejo de expresiones indefinidas(`Undefined: ***`), sino que el mismo se realiza mediante el uso de monadas.

En particular se utiliza la monada `EvalResult`, la cual es una monada de error encapsulada.

```haskell
newtype EvalResult a = EvalResult { runEvalResult :: Either Error a }
```

El tipo `Expr` es simplemente una `PExpr` encapsulada en una monada `EvalResult`.

```haskell
type Expr = EvalResult PExpr
```

Los operadores matematicos se construyen utilizando la notación `do` y las funciones de autosimplificación:

```haskell
(**): Expr -> Expr -> Expr -- Potencia de expresiones
a ** b = do
            a' <- a -- PExpr
            b' <- b -- PExpr
            simplifyPow a b
```

Esto permite a los operadores matematicos detectar cuando trabajan con operadores indefinidos y propagar el error hacia futuros calculos.

`EvalResult` tambien soporta la operación de choice(`<|>`), lo cual es util para cambiar el resultado de una operación con respuesta indefinida.

```haskell
integrate :: Expr -> Expr -> Expr
integrate f x = integralTable f x
                    <|> -- si integralTable devuelve undefined, evaluar la siguiente funcion
                linearProperties f x
                    <|> -- si linearProperties devuelve undefined, evaluar la siguiente funcion
                substitutionMethod f x
                    <|> -- y asi...
                let g = Algebraic.expand f
                in if f /= g
                    then integrate g x
                    else makeUnevaluatedIntegral f x
```

5.4 Suposiciones con logica ternaria

La autosimplificación necesita poder realizar suposiciones sobre las expresiones para hacer o no hacer simplificaciones. Estas suposiciones pueden ser verdaderas o falsas, pero no siempre se puede asignar alguno de estos dos valores.

Por ejemplo, en la expresión `0^x`. `x` es un simbolo con valor desconocido, por lo que no es posible asignar una suposición de positivo o negativo a `x`. Es decir los valores de verdad de `x>=0` o `x<=0` son desconocidos.

La logica ternaria aborda este problema, introduciendo un tercer valor de verdad a las expresiones booleanas, **Desconocido(U)**.

Esto permite que las suposiciones como `¿x es positivo?` tengan 3 posibles respuestas Verdadero(`T`), Falso(`F`) o Desconocido(`U`).

Las suposiciones se guardan directamente en el tipo `PExpr`, especificamente en las hojas de tipo `Symbol`. Para determinar el valor de verdad de una suposición sobre una expresión, se analiza el arbol de expresiones y se construye la suposición en base a los operandos involucrados(Ejemplo, si todos los operandos de una suma son positivos, la suma debe ser positiva).

Las operaciones para trabajar con valores de logica ternaria se encuentran en el archivo `Data/TriBool.hs`.

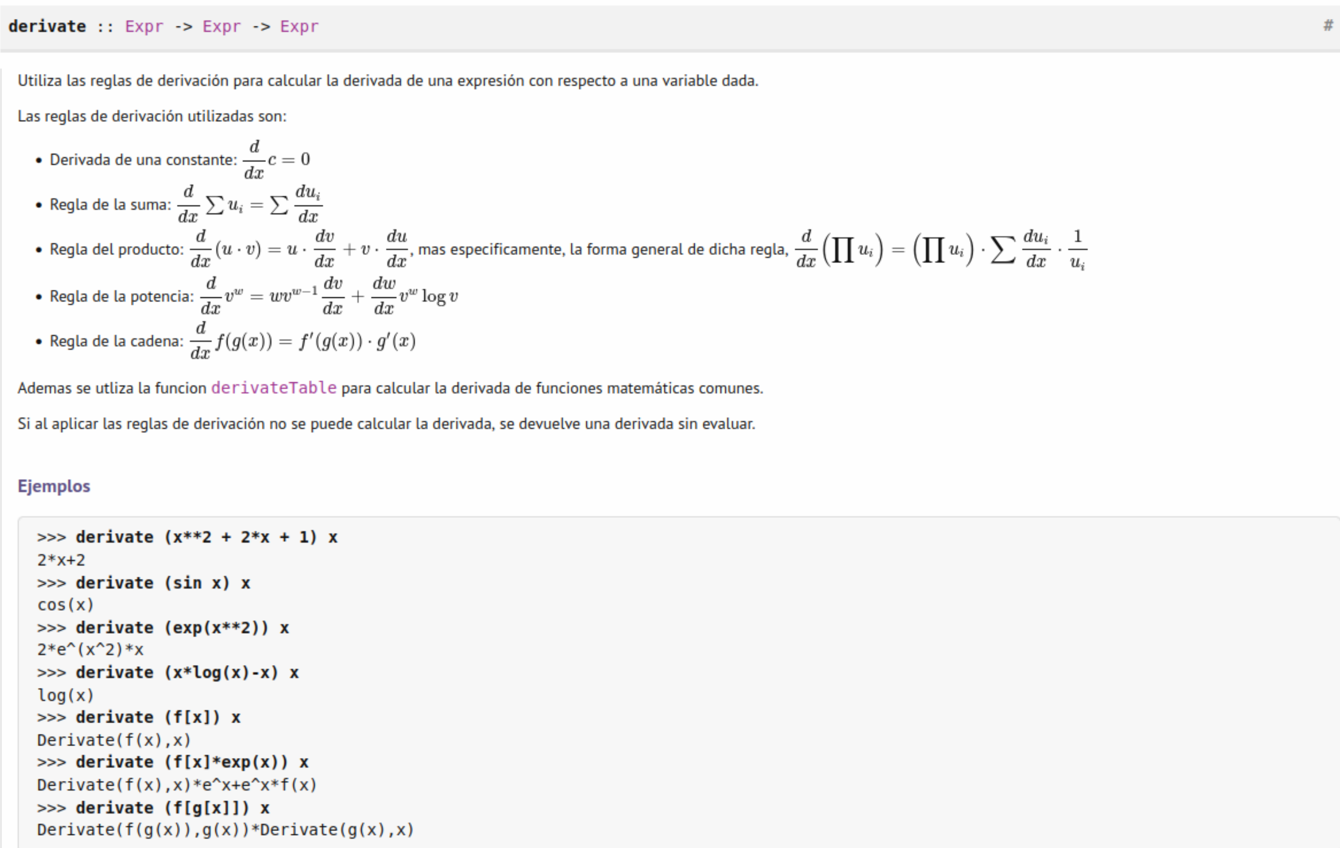
Mas información sobre logica ternaria: https://en.wikipedia.org/wiki/Three-valued_logic

6. Testing y documentación

Las funciones dentro del código cuentan con comentarios explicando la funcionalidad y el propósito. Junto con los comentarios se encuentran ejemplos de como se comporta la función.

```
{-|
      Utiliza las reglas de derivación para calcular la derivada de una expresión con respecto a una variable dada.

      Las reglas de derivación utilizadas son:

      * Derivada de una constante: \(\dfrac{d}{dx}c = 0\)
      * Regla de la suma: \(\dfrac{d}{dx}\sum u_i = \sum \dfrac{du_i}{dx}\)

      ...

      === Ejemplos:
      >>> derivate (x**2 + 2*x + 1) x
      2*x+2
      >>> derivate (sin x) x
      Cos(x)

      ...
-}
derivate u x = ...
```

Estos comentarios pueden usarse para generar documentación del proyecto con `haddock`. Usando `make docs` se puede generar la documentación del codigo sin abrirla y usando `make open-docs` se puede generar la documentación y abrirla en el navegador web.



`derivate :: Expr -> Expr -> Expr` #

Utiliza las reglas de derivación para calcular la derivada de una expresión con respecto a una variable dada.

Las reglas de derivación utilizadas son:

- Derivada de una constante: $\dfrac{d}{dx}c = 0$
- Regla de la suma: $\dfrac{d}{dx}\sum u_i = \sum \dfrac{du_i}{dx}$
- Regla del producto: $\dfrac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \dfrac{dv}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$, mas especificamente, la forma general de dicha regla, $\dfrac{d}{dx}\left(\prod u_i\right) = \left(\prod u_i\right) \cdot \sum \dfrac{du_i}{dx} \cdot \dfrac{1}{u_i}$
- Regla de la potencia: $\dfrac{d}{dx}v^w = wv^{w-1}\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{dw}{dx}v^w \log v$
- Regla de la cadena: $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ademas se utliza la funcion `derivateTable` para calcular la derivada de funciones matemáticas comunes.

Si al aplicar las reglas de derivación no se puede calcular la derivada, se devuelve una derivada sin evaluar.

Ejemplos

```
>>> derivate (x**2 + 2*x + 1) x
2*x+2
>>> derivate (sin x) x
cos(x)
>>> derivate (exp(x**2)) x
2*e^(x^2)*x
>>> derivate (x*log(x)-x) x
log(x)
>>> derivate (f[x]) x
Derivate(f(x),x)
>>> derivate (f[x]*exp(x)) x
Derivate(f(x),x)*e^x+e^x*f(x)
>>> derivate (f[g[x]]) x
Derivate(f(g(x)),g(x))*Derivate(g(x),x)
```

La pagina de documentacion para el ejemplo anterior

Además, los ejemplos en la documentación se pueden usar para testear el funcionamiento correcto del proyecto. El comando `make test` lee los ejemplos de la documentación y los ejecuta para ver si obtienen el resultado esperado.

7. Bibilografia, librerías externas y referencias

Bibliografia

- *Cohen, J. (2003). Computer Algebra and Symbolic Computation: Elementary Algorithms. A K Peters/CRC Press.*
- *Cohen, J. (2003). Computer Algebra and Symbolic Computation: Mathematical Methods. A K Peters/CRC Press.S. R., & Labahn, G. (1992).*
- *Meurer A, Smith CP, Paprocki M, Čertík O, Kirpichev SB, Rocklin M, Kumar A, Ivanov S, Moore JK, Singh S, Rathnayake T, Vig S, Granger BE, Muller RP, Bonazzi F, Gupta H, Vats S, Johansson F, Pedregosa F, Curry MJ, Terrel AR, Roučka Š, Saboo A, Fernando I, Kulal S, Cimrman R, Scopatz A. (2017) SymPy: symbolic computing in Python. PeerJ Computer Science 3:e103 https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103*

Librerías externas

- `base`: Provee las funcionalidades básicas del lenguaje Haskell.
- `pretty`: Provee herramientas para pretty-printing.
- `exact-combinatorics`: Provee funciones para hacer calculos combinatorios.
- `matrix`: Provee herramientas para trabajar con matrices.
- `happy`: Provee un generador de analizadores sintácticos para Haskell, utilizado para construir el parser de expresiones.
- `haddock`: Generación de la documentación del proyecto.
- `doctest`: Realiza el testeo de las funciones a partir de los casos de prueba de la documentación.

Referencias

- Happy User Guide: https://www.haskell.org/happy/doc/html/
- Documentacion de PrettyPrinter: https://hackage.haskell.org/package/pretty
- Wikipedia, Three-valued logic: https://en.wikipedia.org/wiki/Three-valued_logic
- Sympy, un CAS implementado en Python. Usado como inspiración para el sistema de suposiciones ademas de una referencia de como deberian comportarse las funciones: https://www.sympy.org/en/index.html