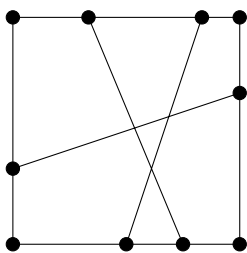


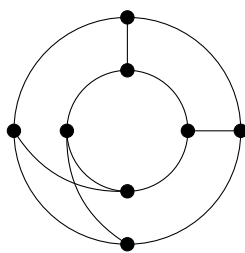
Práctica 10 - Planaridad

1. En cada caso, determinar si el grafo dado es planar. Si lo es, dar una inmersión plana. Si no, hallar un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

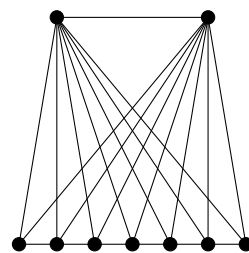
a)



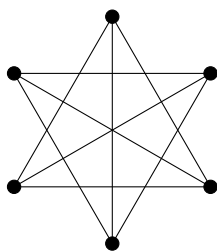
c)



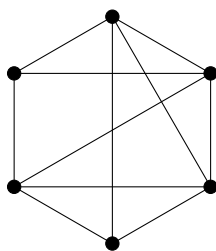
e)



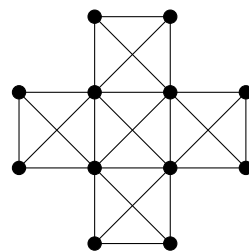
b)



d)

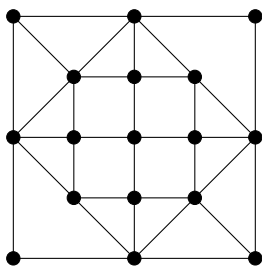


f)

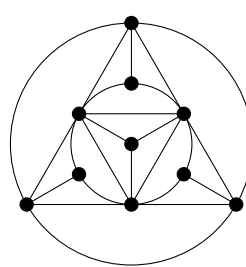


2. Sea G un grafo que no es planar. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E(G)|$?
3. Determinar el número de vértices, aristas y caras de cada uno de los grafos planos siguientes. ¿Satisfacen la fórmula de Euler para grafos conexos?

a)



b)



4. Sea G un grafo conexo, planar y tal que determina 53 caras. Si para alguna inmersión plana de G la frontera de cada cara tiene longitud al menos 5, demostrar que $|V(G)| \geq 82$.
5. Sea G un grafo conexo, 4-regular y planar. Si $|E(G)| = 16$, ¿cuántas caras hay en una inmersión plana de G ?
6. Probar que si G es un grafo simple planar con al menos 3 vértices y además es K_3 -free, entonces $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

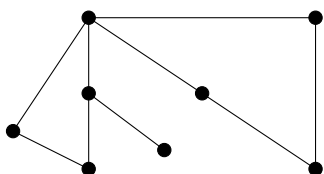
7. Sea G un grafo plano con n vértices, m aristas, f caras y k componentes conexas. Probar que $n - m + f = k + 1$.
8. a) Probar que si G es un grafo planar, entonces existe $v \in V(G)$ con $d(v) \leq 5$.
 b) Probar que si G es un grafo planar, entonces $\chi(G) \leq 6$ (sin usar el teorema de los 5 o los 4 colores).
9. a) Sea G un grafo conexo sin lazos con $|V(G)| \geq 11$. Demuestre que si G es planar, entonces su complemento \overline{G} no lo es.
 b) ¿Es cierto el ítem anterior para $|V(G)| = 8$?
10. a) Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Si G es un grafo planar conexo con $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ con al menos un ciclo y tal que cada ciclo en G tiene longitud al menos k , demostrar que

$$m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$$

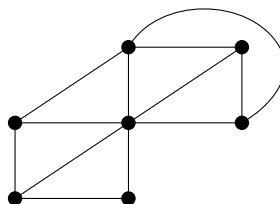
- b) Demostrar, utilizando el ítem anterior, que el grafo de Petersen no es planar.
 c) ¿Cuál es la menor cantidad de aristas que es necesario borrar del grafo de Petersen para obtener un subgrafo planar?

11. Encontrar el grafo dual para cada uno de los siguientes grafos planos.

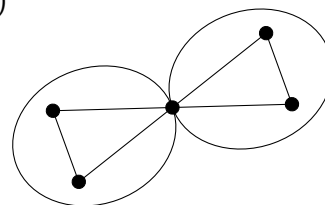
a)



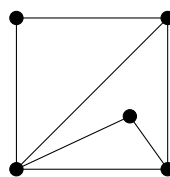
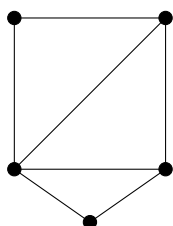
b)



c)



12. a) Probar que todo subgrafo de un grafo planar es planar.
 b) Probar que un grafo G es planar si y sólo si todo grafo homeomorfo a él lo es.
13. Probar que todo subgrafo propio de K_5 es planar ¿Es esto cierto para $K_{3,3}$?
14. a) Mostrar que los siguientes grafos son isomorfos.



- b) Hallar el dual para cada grafo.
 c) ¿Son los grafos obtenidos en el ítem (b) isomorfos?

15. Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:
 Un grafo plano tiene un vértice de corte si y sólo si su grafo dual tiene un vértice de corte.
16. Probar que un grafo planar es bipartito si y solo para toda inmersión plana, la longitud de cada cara es par.