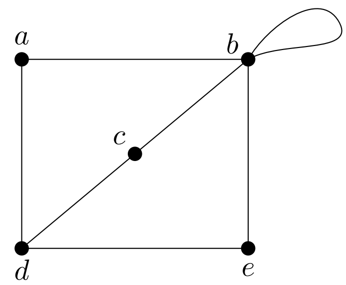
# Práctica 4 - Caminos, Ciclos y Recorridos

1. Considere el grafo de la figura. En cada uno de los siguientes ítems, determine si el camino indicado es un camino simple, un recorrido, un ciclo y/o un circuito. Además, determine la longitud de cada camino.




   a) $(a, b, c, d, e)$
   b) $(b, b)$
   c) $(d, c, b, e, d)$
   d) $(b, c, d, a, b, e, d, c, b)$
   e) $(a, d, c, b, e)$

2. En cada caso, determine si $K_4$ contiene un camino con la característica indicada.
   a) Un camino que no es un recorrido.
   b) Un recorrido que no es cerrado y que no es un camino simple.
   c) Un circuito que no es un ciclo.

3. Sea $G$ un grafo y sean $v$ y $w$ dos vértices distintos de $G$.
   a) Demuestre que si hay un camino de $v$ a $w$, entonces hay un camino simple de $v$ a $w$.
   b) Demuestre que si hay un circuito (de long. positiva) que contiene a $v$, entonces hay un ciclo (de long. positiva) que contiene a $v$.

4. Sea $G$ un grafo conexo. La *distancia* entre dos vértices $v$ y $w$ en $G$, que notaremos dist$(v, w)$, es la menor longitud de un $v, w$-camino. El *diámetro* de $G$ es

$$\text{diam}(G) = \max\left\{\text{dist}(v, w) : v, w \in V(G)\right\}$$

   *a*) Determine el diámetro del grafo del ejercicio (11a).
   *b*) Determine el diámetro del grafo de Petersen.
   *c*) Determine el diámetro del $n$-cubo $Q_n$.
   *d*) Determine el diámetro del grafo completo $K_n$.

5. Sea $G$ el grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G) = [15]$ donde dos vértices $i$ y $j$ son adyacentes si y solo si su máximo divisor común es mayor a $1$.
   a) ¿Cuántas componentes conexas tiene $G$?
   b) Determine la longitud máxima de un camino simple en $G$.

6. Para un grafo $G$, denotemos por $c(G)$ a la cantidad de componentes conexas de $G$. Sea $v \in V(G)$.

   a) Pruebe que $c(G) - 1 \leqslant c(G - v) \leqslant c(G) + d(v) - 1$.

   b) Pruebe que si $G$ es conexo, entonces $d(v) \geqslant c(G - v)$.

   c) Concluya del ítem anterior que si $v$ es vértice de corte de un grafo $G$, entonces $d(v) \geqslant 2$.

   d) Pruebe que si $d(v) \geqslant 2$ y $c(G - v) = c(G)$, entonces $G$ tiene un ciclo que contiene a $v$. ¿Es cierta la recíproca?

7. a) Sea $G$ un grafo simple. Pruebe que una arista $e \in E(G)$ es de corte si y solo si no pertenece a ningún ciclo.

   b) De un ejemplo de un grafo conexo donde toda arista sea una arista de corte.

8. a) Dé un ejemplo de un grafo con seis vértices que tenga exactamente 2 vértices de corte.

   b) Dé un ejemplo de un grafo con seis vértices que no tenga vértices de corte.

   c) Demuestre que un vértice $v$ es un grafo conexo $G$ es un vértice de corte si y solo si existen vértices $u$ y $w$ en $G$ tales que todo camino de $u$ a $w$ pasa por $v$.

9. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

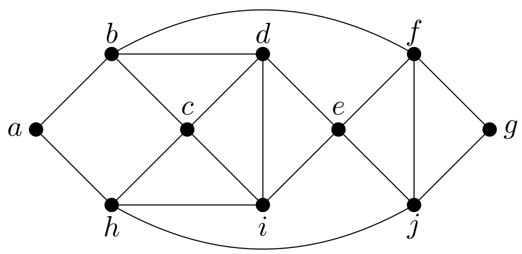
   a) Si un grafo $G$ tiene una arista de corte, entonces tiene un vértice de corte.

   b) Si un grafo $G$ tiene un vértice de corte, entonces tiene una arista de corte.

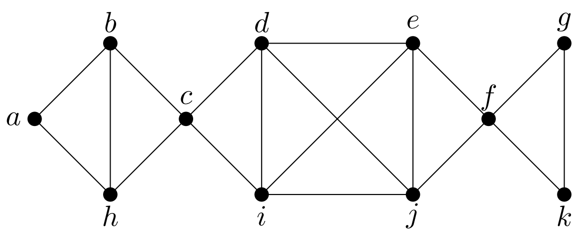
10. Dar todos los vértices y aristas de corte, si existen, de los grafos $P_n$, $C_n$ y $K_n$.

11. En cada uno de los siguientes ítems, determine si el grafo tiene un circuito euleriano. Si lo tiene, muestre uno. Si no lo tiene, determine si tiene un recorrido euleriano.

    a)




    b)




12. Determine para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ (o de $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ si corresponde) los siguientes grafos admiten un circuito euleriano.

    a) El grafo completo $K_n$.

b) El grafo completo bipartito $K_{m,n}$.

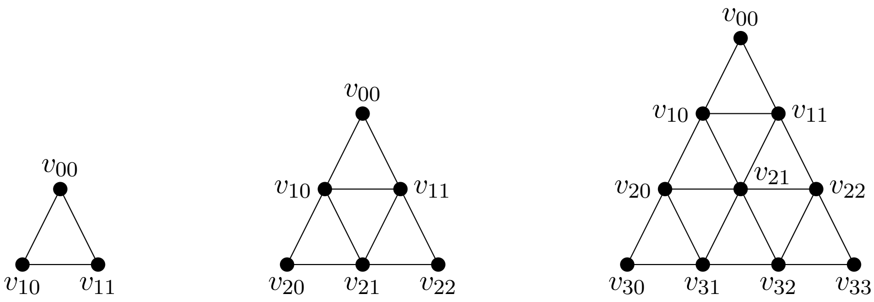
c) El cubo-$n$ $Q_n$.

d) El grafo $T_n$ cuyo conjunto de vértices está dado por

$$V(T_n) = \bigcup_{i=0}^{n} \{v_{ij} : 0 \leqslant j \leqslant i\}$$

y dos vértices $v_{ij}$, $v_{k\ell}$ son adyacentes si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $k = i$ y $\ell = j + 1$;
- $k = i + 1$ y $\ell = j$;
- $k = i + 1$ y $\ell = j + 1$;



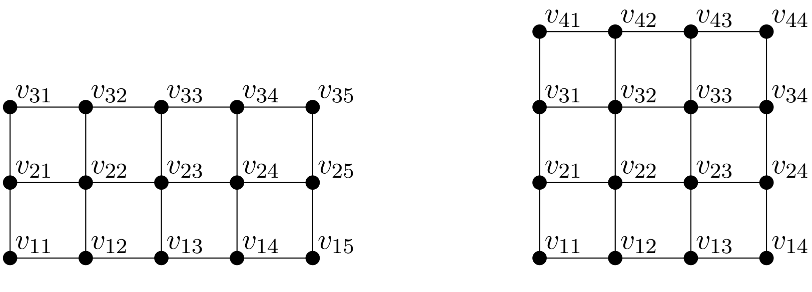

$T_1$ $T_2$ $T_3$

e) El grafo *grilla* $G_{m,n}$ cuyo conjunto de vértices está dado por

$$V(G_{m,n}) = \{v_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

y dos vértices $v_{ij}$, $v_{k\ell}$ son adyacentes si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $k = i$ y $\ell = j + 1$;
- $k = i + 1$ y $\ell = j$;




$G_{3,5}$ $G_{4,4}$

13. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Todo grafo bipartito euleriano tiene una cantidad par de aristas.

b) Todo grafo simple euleriano con una cantidad par de vértices, tiene una cantidad par de aristas.

c) Si todos los vértices de un grafo $G$ tienen grado par, entonces todo recorrido maximal en $G$ es un circuito euleriano.

14. a) Dé un grafo conexo con más de 8 vértices y exactamente 4 vértices de grado impar.
    b) Sea $G$ un grafo conexo que tiene exactamente cuatro vértices de grado impar. Demuestre que existen dos caminos sin aristas repetidas cuyos extremos son los cuatro vértices de grado impar, de manera que cada arista en $G$ está en exactamente una de los caminos.
    c) Ilustre el ítem (14b) con el grafo dado en el ítem (14a).
    d) Enuncie y demuestre una generalización del ítem (14b) para un número arbitrario de vértices de grado impar.

15. Probar que el algoritmo de Fleury devuelve un circuito euleriano en $G$.

    *Algoritmo de Fleury:*
    Sea $G$ un grafo conexo par.

    1. Considerar cualquier vértice $u \in V(G)$, $W \leftarrow u$ (en $W$ asignar $u$), $x \leftarrow u$, $F \leftarrow G$.
    2. Mientras $gr_F(x) \geqslant 1$: seleccionar una arista e=xv (i.e. incidente en $x$), donde $e$ no es de corte de $F$, salvo que no exista (en cuyo caso seleccionar cualquiera incidente en $x$).
       $W \leftarrow uev$, $x \leftarrow v$, $F \leftarrow F \backslash e$.
    3. $W$ es un circuito euleriano (*probar*).

16. Probar que un grafo conexo tiene un recorrido (no cerrado) euleriano ssi tiene exactamente dos vértices de grado impar.

17. Demostrar que si $D$ es un digrafo entonces $\sum\limits_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum\limits_{v \in V(D)} d^-(v)$.

18. Demostrar que un digrafo $D$ es euleriano ssi $d^+(v) = d^-(v),\ \forall v \in V(D)$ y el grafo subyacente de $D$ tiene a lo sumo una componente no trivial.


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119