

Métodos Numéricos

Autor: Agustín Fernández Bergé

Índice

- [!\[\]\(38441ceaa711016e0bf2ad46ad394ff4_img.jpg\) Exámenes](#)
 - [!\[\]\(6e027340d4263908f264926b1ad81c5e_img.jpg\) Práctica 3](#)
 - [!\[\]\(781510d64f329bf3c880acf086e884d6_img.jpg\) Práctica 3 complementaria](#)
 - [!\[\]\(93cdf5b84f2bfec404f7441e84b6ba5c_img.jpg\) Teoría](#)
-

Examenes

[Final Febrero-Marzo 2015](#)

[Pasted image 20240224190543](#)

Final Febrero-Marzo 2015

Final Febrero-Marzo 2015

Métodos Numéricos - LCC 2015

Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Andrea Torres

Final Febrero-Marzo 2015 - 3er Llamado - Teoría - Regular

Nombre y Apellido:

1. Métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales

- ~ (a) Defina orden de convergencia y convergencia superlineal.
- ~ (b) A partir del desarrollo de Taylor obtenga la fórmula general de la iteración del método de Newton, y demuestre que la convergencia del método es cuadrática.

2. Sistemas de ecuaciones lineales

- ~ (a) Enumere los métodos directos que conoce para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- ~ (b) Que estrategias conoce para obtener la factorización LU?
- ~ (c) Que método emplearía para matrices definidas positivas?

3. Integración numérica

- ~ (a) Explique el procedimiento general de integración numérica basada en polinomios interpolantes.
- ~ (b) Aplique el procedimiento al caso particular de un polinomio de primer grado.

1. a)

Sea un sucesión $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$ que converge a un valor α , se define como orden de convergencia al mínimo numero $p \geq 1$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a - x^{(n)}|}{|a - x^{(n-1)}|^p} = \beta < \infty$$

Se dice que el orden de convergencia es superlineal si $p > 1$ o si $p = 1$ y $\beta = 0$

b)

El polinomio de Taylor de orden 1 centrado en x_0 es

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

Si quiero encontrar el punto α tal que $f(\alpha) = 0$ entonces

$$f(\alpha) = 0 \approx f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0)$$

Donde

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \approx \alpha$$

La aproximación de la izquierda puede usarse nuevamente para aproximar el valor de α

El metodo de newton se define en base a la iteración:

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$$

Para la orden de convergencia, el error del polinomio de Taylor en una iteración n es:

$$\frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n)$$

Donde c esta entre x_n y α

Se tiene entonces que

$$f(\alpha) = 0 = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n) \neq 0$$

En particular, dividiendo por $f'(x_n) \neq 0$

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (\alpha - x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ (se deriva de la iteración del metodo).}$$

Por lo tanto:

$$0 = x_n - x_{n+1} + \alpha - x_n + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

Y resulta:

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_n|}{(\alpha - x_n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n)}{(\alpha - x_n)^2 f'(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha (c_n \in (x_n; \alpha))$$

Por lo tanto el límite anterior tiende a $\left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right|$ y resulta $p \geq 2$

Si resulta $p > 2$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_n|}{|\alpha - x_n|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f''(c_n)}{2|\alpha - x_n|^{p-2} f'(x_n)}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha - x_n| = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha - x_n|^{p-2} = 0$. Queda un límite de la forma $\frac{c}{0}$ con $c \in \mathbb{R}$ y el límite es $+\infty$. Por lo tanto la convergencia del método es cuadrática.

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial $Ax = b$ con solución única, existen varios para resolver el sistema:

- Sustitución progresiva: Si A es una matriz triangular inferior, se pueden resolver primero la primera ecuación del sistema y luego usar dichos resultados para resolver el resto de ecuaciones:

Mas formalmente el primer sistema es de la forma:

$$a_{11}x_1 = b_1, \text{ cuya solución es } x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

La segunda ecuación tiene la forma

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \text{ cuya solución es } x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1)$$

Luego la i -esima ecuación tiene la forma

$$\sum_{j=1}^i a_{ij}x_j = b_i$$

Se conoce el valor de x_j para $j = 1, \dots, i-1$ ya que se obtuvo resolviendo las ecuaciones anteriores luego la solución de la i -esima ecuación es:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \right)$$

- Sustitución regresiva: Similar a la sustitución progresiva pero para una matriz triangular superior, aquí las ecuaciones se resuelven desde abajo hacia arriba.

Es decir, se resuelve primero la ultima ecuación de la forma $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ y luego dicho resultado se usa para resolver el resto de ecuaciones

- Metodo de Gauss: Este método busca convertir el sistema $Ax = b$ en un sistema $A'x = b'$ donde A' es una matriz triangular superior. Luego el sistema se resuelve por sustitución regresiva.

- Método de Gauss-Jordan: Similar al método de Gauss, pero este busca conseguir 0s por arriba y por abajo de la diagonal, luego el sistema por sustitución regresiva o progresiva.
 - Método de Gauss con pivoteo parcial: En el caso de que la matriz contenga un cero en la diagonal en algún paso del método de gauss, se pueden intercambiar hacer intercambios de filas para conseguir un nuevo valor $\neq 0$ en la diagonal. Para evitar errores de redondeo se suele intercambiar la fila con aquella que tenga el mayor valor absoluto
 - Método de Gauss con pivoteo completo: Similar al pivoteo parcial, pero se intercambian tanto columnas como filas para conseguir un elemento $\neq 0$.
 - Factorización LU: Esta factorización es útil si se requiere resolver muchos sistemas de ecuaciones donde aparece la matriz A . Para ello se factoriza la matriz A en dos matrices L y U con L una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior. Luego $Ax = b$ es equivalente a $L(Ux) = b$. Dicho sistema se puede resolver primero resolviendo el sistema $Ux = y$ y luego resolver el sistema $Ly = b$.
 - Factorización QR: Si A es una matriz con columnas linealmente independientes entonces puede factorizarse con $A = QR$ con Q una matriz triangular y R una matriz triangular superior con elementos diagonales positivos. Luego el sistema $Ax = b$ es equivalente a $Q(Rx) = b$ o bien $Rx = Q^t b$ que puede resolverse con sustitución regresiva.
 - Factorización de Cholesky: Si A es una matriz definida positiva se puede factorizar como $A = R^t R$ con R una matriz triangular superior con elementos diagonales positivos, el sistema $Ax = b$ es equivalente a $R^t(Rx) = b$. Luego se puede resolver el sistema $Rx = y$ por sustitución regresiva y el sistema $R^t y = b$ con sustitución progresiva.
-

3. El método de integración numérica basado en polinomios interpolantes consiste en tres partes:

Suponiendo que se quiere integrar una función f en un intervalo $[a; b]$

4. Se divide el intervalo en partes equidistantes, $x_0 = a$, $x_i = a + h \cdot i$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$

5. Calcular el polinomio interpolante de grado n , esto puede, por ejemplo, calculando el polinomio interpolante de Lagrange:

$$L_0(x) = \prod_{j=2}^n \frac{x-x_j}{x_0-x_j}, \quad L_1(x) = \prod_{j=1, j \neq 2}^n \frac{x-x_j}{x_2-x_j}, \quad L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)L_i(x)$$

$$e(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=1}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))$$

Con $\xi(x) \in (a, b)$

6. Calcular la antiderivada del polinomio interpolante:

$$P(x) = \int_a^b p(x) dx$$

7. Por la regla de Barrow, la integral numérica viene dada por $P(b) - P(a)$ y el error viene dado por $\int_a^b e(x) dx$.

b)

Para el caso de un polinomio de primer grado, se tiene que $x_0 = a$, $x_1 = b$, $h = b - a$

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-b}{a-b}$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-a}{b-a}$$

El polinomio interpolante viene dado por

$$p(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a}$$

Y el error es

$$e(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi(x))$$

$$\int_a^b p(x) dx = \frac{f(a)}{-h} \int_a^b x - b dx + \frac{f(b)}{h} \int_a^b x - a dx$$

$$\int_a^b x - b dx = \int_{a-b}^0 u du = \frac{1}{2}u^2 \Big|_{-h}^0 = -\frac{1}{2}h^2$$

$$\int_a^b x - a dx = \int_0^{b-a} u du = \frac{1}{2}u^2 \Big|_0^h = \frac{1}{2}h^2$$

Por lo tanto la integral del polinomio interpolante queda como: $\frac{h}{2}(f(a) + f(b))$

$$\int_a^b e(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(\xi(x)) dx$$

Por el teorema del valor medio de las integrales:

$$\frac{1}{2}f''(c) \int_a^b (x-a)(x-b) dx = \frac{1}{2}f''(c) \int_0^{b-a} u(u-h) dx$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f''(c) \int_0^h (u^2 - hu) dx &= \frac{1}{2}f''(c) \frac{1}{3}u^3 \Big|_0^h - \frac{1}{2}hu^2 \Big|_0^h = -\frac{1}{2}f''(c) \frac{1}{6}h^3 \\ &= -\frac{1}{12}f''(c)h^3 \end{aligned}$$

Nombre y Apellido:

1. Métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales

- ~ (a) Defina orden de convergencia y convergencia superlineal.
- ~ (b) A partir del desarrollo de Taylor obtenga la fórmula general de la iteración del método de Newton, y demuestre que la convergencia del método es cuadrática.

2. Sistemas de ecuaciones lineales

- ~ (a) Enumere los métodos directos que conoce para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- ~ (b) Que estrategias conoce para obtener la factorización LU?
- ~ (c) Que método emplearía para matrices definidas positivas?

3. Integración numérica

- ~ (a) Explique el procedimiento general de integración numérica basada en polinomios interpolantes.
- ~ (b) Aplique el procedimiento al caso particular de un polinomio de primer grado.

Practica 3

- [Ejercicio 5](#)
 - [Ejercicio 2](#)
 - [Ejercicio 3](#)
-

Ejercicio 5

Ejercicio 5

$$x^2 - 5 = 0$$

$$c(x^2 - 5) = 0$$

$$x + c(x^2 - 5) = x$$

$$\text{Tomando } g(x) = c(x^2 - 5) + x$$

Busco un intervalo contractivo en donde este incluido $z = -\sqrt{5}$

Suponiendo $c > 0$:

Tomando como intervalo $[-3; 0]$

g es decreciente en dicho intervalo.

$$-2 \leq x \leq -1 \implies g(-1) \leq x \leq g(-2) \implies -4c \leq c(x^2 - 5) \leq -c$$

$$-2 \leq -4c \implies c \leq \frac{1}{4}$$

$$-c \leq -1 \implies c \geq 1$$

$$g'(x) = 2cx + 1 > 0 \iff x > \frac{-1}{2c}$$

Con $c = \frac{1}{6}$, g es creciente en $[-3; +\infty)$

$$-3 \leq x \leq -1 \implies g(-3) \leq g(x) \leq g(-1)$$

$$-3 \leq g(-3) \implies -3 \leq 2.33333$$

$$g(-1) \leq -1 \implies -1.6666 \leq -1$$

El intervalo $[-3, -1]$ es contractivo.

$$g'(x) = x/3 + 1$$

$$\sup_{x \in [-3, -1]} g'(x) = g'(-1) = 0.666666$$

La convergencia esta asegurada para $c = 1/6$

Practica 3 complementaria

[Ejercicio 2](#)

[Ejercicio 3](#)

Ejercicio 2

Ejercicio 2

$$x^3 = \ln(1 + 2x)$$

$$\text{Sea } f(x) = x^3 - \ln(1 + 2x)$$

La función está definida siempre y cuando $1 + 2x > 0$

$$1 + 2x > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{1+2x} = \frac{6x^3 + 3x^2 - 2}{1+2x}$$

$$f'(x) > 0 \iff (6x^3 + 3x^2 - 2) \cdot (1 + 2x) > 0$$

$$(1 + 2x) > 0 \iff x > -\frac{1}{2}, \text{ lo cual es cierto } \forall x \text{ en el dominio}$$

$$f'(x) > 0 \iff 6x^3 + 3x^2 - 2 > 0$$

$$(6x^3 - 3x^2 - 2)' = 18x^2 - 6x = 6x(3x - 1)$$

El polinomio es creciente en $(-\infty; 0) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$

$$6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 = 7 > 0,$$

$f(x)$ es creciente $\forall x \geq 1$

Dado que $f(x)$ es decreciente en $(0; \frac{1}{3})$ y $f(0) = 0$, $\exists x_\epsilon \in (0; \frac{1}{3}) : f(x_\epsilon) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - \ln(1 + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{\ln(1+2x)}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2x)/x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2/(3x^2(1 + 2x)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(1+2x)}{x^3}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\text{Por lo tanto: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{\ln(1+2x)}{x^3}\right) = +\infty$$

Existe un cero en $(0; +\infty)$, además este cero es único ya que la gráfica corta el eje x en un único punto debido a los intervalos de monotonía.

Por lo que $f(x)$ tiene 2 ceros, uno en $x = 0$ y el otro en algún punto de $(0; +\infty)$

$$x^3 = \ln(1 + 2x)$$

$$x = \sqrt[3]{\ln(1 + 2x)}$$

$$\text{Tomo } g(x) = \sqrt[3]{\ln(1 + 2x)}$$

$$g(0.5) = 0.88 > 0.5$$

$$g(1.5) = 1.11 < 1.2$$

$[0.5; 1.5]$ es un intervalo contractivo

$$g'(x) = \frac{2}{3 \ln^{\frac{2}{3}}(1+2x)(1+2x)}$$

g' es decreciente???

$$g'(0.5) = 0.42 < 1$$

La convergencia está asegurada en $[0.5; 1.5]$

Ejercicio 3

Ejercicio 3

$$f(x) = \sin(x) - \sqrt{x}/2$$

$$g(x) = x - \sin(x) + \sqrt{x}/2$$

$$g'(x) = 1 - \cos(x) + 1/(4\sqrt{x})$$

$g'(x)$ es menor que 1 en $[0.2; 1.5]$

$$g(0.2) = 0.22 > 0.2$$

$$g(1.5) = 1.11 < 1.5$$

El metodo converge para x_0 en el intervalo $[0.2; 1.5]$

Teoria

- [Método de la potencia](#)
 - [Teorema de Gershgorin](#)
 - [Unidad 3](#)
 - [Unidad 4](#)
 - [Unidad 5](#)
 - [Unidad 7](#)
 - [Unidad 8](#)
-

Método de la potencia

Método de la potencia

Sea A una matriz real con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, si existe un único autovalor de modulo máximo, es decir:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

Partiendo de una estimación inicial z_0 del autovector de λ_1 defino la iteración:

$$z_{n+1} = \frac{Az_n}{\|Az_n\|_\infty}$$

Resulta entonces que:

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = v_1$ con v_1 el autovector correspondiente a λ_1

Y dada una componente no nula de índice k de Az_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \frac{A_{z_n(k)}}{z_n(k)} = \lambda_1$$

Cuando no funciona?

Si la estimación inicial es ortogonal a v_1 , el método no convergerá

Suponiendo que $z_0 \perp v_1$:

A es diagonalizable y por ende existe una base de autovectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n

$$z_0 = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

$$Az_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i v_i$$

Teorema de Gershgorin

Teorema de Gershgorin

Dada la matriz compleja A , se definen los círculos de gershgorin como

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

Donde

$$r_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Se puede demostrar lo siguiente, todo autovalor de A pertenece a algún círculo de Gershgorin

Demostración

Sea λ un autovalor de A , se tiene que existe un autovector v , es decir:

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $|v_k| = \|v\|_\infty$ (es decir, k es el índice de la mayor componente)

Entonces para la k -esima componente de (1) se tiene que:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}v_j = \lambda v_k$$

Y por lo tanto:

$$(\lambda - a_{kk})v_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj}v_j$$

Aplico valor absoluto a ambos lados

$$|(\lambda - a_{kk})||v_k| = |(\lambda - a_{kk})||v_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| |v_j| \leq r_k \|v\|_\infty$$

Y por ende $|\lambda - a_{kk}| \leq r_k$ y $\lambda \in C_k$

Unidad 3

- [Condiciones suficientes de convergencia y divergencia](#)
- [Existencia de puntos fijos](#)
- [Método de la bisección](#)
- [Método de la secante](#)
- [Método de la secante 1](#)
- [Método de Newton](#)
- [Método iterativo de punto fijo](#)
- [Método Regula Falsi](#)
- [Orden de convergencia](#)

Condiciones suficientes de convergencia y divergencia

Condiciones suficientes de convergencia y divergencia

Suponiendo que $x = g(x)$ tiene solución α y que $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en un entorno de α , luego:

1. Si $|g'(\alpha)| < 1$, la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para x_0 lo suficientemente cercano a α
2. Si $|g'(\alpha)| > 1$, la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ no converge a α
3. Si $|g'(\alpha)| = 1$, no se pueden sacar conclusiones

Demostración

1. $g'(x)$ es continua en un entorno de α y $|g'(\alpha)| \leq 1$, por lo tanto existe un entorno de α donde $|g'(x)| \leq 1$

Suponiendo que x_n pertenece a dicho entorno, g es continua y derivable en $[\alpha; x_n]$ por lo tanto por el teorema de Lagrange, $\exists c_n \in [\alpha; x_n] : g'(c_n) = \frac{g(\alpha) - g(x_n)}{\alpha - x_n}$, $g(\alpha) = \alpha$ y $g(x_n) = x_{n+1}$ por lo tanto se tiene que $\alpha - x_{n+1} = g'(c_n)(\alpha - x_n)$

Por lo tanto $|\alpha - x_{n+1}| = |g'(c_n)(\alpha - x_n)| = |g'(c_n)| \cdot |\alpha - x_n| \leq 1 \cdot |\alpha - x_n| = |\alpha - x_n|$

Se tiene que $|\alpha - x_{n+1}| \leq |\alpha - x_n|$, esto es, x_{n+1} esta mas cerca de α que de lo que esta x_n . Por lo tanto el método converge para x_0 lo suficientemente cercano a α

2. De la misma forma, si $g'(x)$ es continua en un entorno de α y $|g'(\alpha)| \geq 1$ existe un entorno de α donde $|g'(x)| \geq 1$
Luego se tiene que $|\alpha - x_{n+1}| = |g'(c_n)||\alpha - x_n| \geq |\alpha - x_n|$, es decir, x_{n+1} esta mas lejos de α que x_n y por lo tanto el metodo no converge.

Existencia de puntos fijos

Existencia de puntos fijos

Un punto fijo de una función g es un valor $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = x$$

Condición suficiente de existencia de puntos fijos

Sea $g(x)$ una función continua en $[a, b]$ tal que

$$a \leq x \leq b \implies a \leq g(x) \leq b$$

Entonces la ecuación $x = g(x)$ tiene una solución α en el intervalo $[a, b]$

Si g cumple esta condición, se dice que g es contractiva.

Demostración

Sea la función $f(x) = x - g(x)$

f es continua ya que es una resta de funciones continuas

Notar que como $a \leq g(a)$ se tiene que $f(a) = a - g(a) \leq 0$

Y como $g(b) \leq b$ se tiene que $f(b) = b - g(b) \geq 0$

Luego por teorema de bolzano $\exists \alpha : f(\alpha) = 0$ y por lo tanto $\alpha - g(\alpha) = 0 \implies \alpha = g(\alpha)$.

Método de la bisección

Método de la bisección

El método de la bisección es un método de dos puntos, suponiendo que se quiere encontrar α tal que $f(\alpha) = 0$ para una cierta función f . Sean a_0 y b_0 dos puntos tal que $f(a_0)f(b_0) \leq 0$ (tienen distinto signo).

Cada iteración se define como sigue:

1. Se calcula $c_n = \frac{a+b}{2}$
- 2.

- Si $sgn(f(a_n)) = sgn(f(c_n))$ entonces $a_{n+1} = c_n$ y $b_{n+1} = b_n$
- Si $sgn(f(b_n)) = sgn(f(c_n))$ entonces $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = c_n$
- Si $f(c_n) = 0$ entonces $\alpha = c_n$

Calculo del error

Suponiendo sin perdida de generalidad que $b_{n+1} > a_{n+1}$

Si $b_{n+1} = c_n$ entonces $b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$

Si $a_{n+1} = c_n$ entonces $b_{n+1} - a_{n+1} = b_{n+1} - c_n = \frac{b_n - a_n}{2}$

Por lo tanto para cada iteración: $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

Luego por inducción se puede probar que $b_{n+1} - a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n(b_0 - a_0)$

CB) $n = 1$

Es el caso anterior

PI)

$$b_{n+2} - a_{n+2} = \frac{1}{2}(b_{n+1} - a_{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n(b_0 - a_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(b_0 - a_0)$$

El error en una iteración n está dado por

$$|\alpha - c_n| \leq |b_n - c_n| = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n(b_0 - a_0)$$

Se tiene entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha - c_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n(b_0 - a_0) = 0$$

Por lo tanto el método siempre converge.

Orden de convergencia

El orden de convergencia esta definido por el mínimo numero $p \geq 1$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\alpha - x_{n+1}\|}{\|\alpha - x_n\|^p} = \beta < \infty$$

Usando la formula anterior del error se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\alpha - x_{n+1}\|}{\|\alpha - x_n\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\| \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b_0 - a_0) \right\|}{\left\| \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_0 - a_0) \right\|^p} \\ &= \frac{1}{(b_0 - a_0)^{1-p}} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(p-1)n-1} \\ &= 0 \iff p = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la convergencia del método es lineal con tasa de convergencia $\frac{1}{2}$

Método de la secante

Método de la secante

El metodo de la secante es un metodo de dos puntos, se tiene que la iteración del metodo de newton es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Teniendo en cuenta que $f'(x_n) = \lim_{a \rightarrow x_n} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$, se puede tomar $a = x_{n-1}$ como aproximación de $f'(x_n)$ para tener la siguiente iteración:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Análisis del error

Se pude demostrar que

$$\|\alpha - x_{n+1}\| = \frac{1}{2} (\alpha - x_n)(\alpha - x_{n-1}) \frac{f''(\xi_n)}{f'(c_n)}$$

Luego si x_n converge a α se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\alpha - x_{n+1}\|}{\|\alpha - x_n\|^p} = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right|^{p-1}$$

$$\text{con } p = \phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Método de la secante 1

Método de la secante 1

El método de newton utiliza la interacción de punto fijo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Donde x_0 es una aproximación inicial.

La derivada $f'(x_0)$ se define como

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tomando $a = x_1$ otra aproximación inicial se tiene la siguiente aproximación

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Y se puede reemplazar la iteración del método de newton con

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Y en forma general:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Método de Newton

Método de Newton

Suponiendo que se quiere encontrar la raíz α de una cierta función f .

Sea x_0 una aproximación inicial de α , el polinomio de Taylor de f centrado en x_0 es:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Evaluando en α , se tiene que $f(\alpha) = 0$

$$0 = f(\alpha) \approx f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0)$$

Despejando α se tiene la siguiente aproximación de la raíz

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx \alpha$$

Esta aproximación de α puede usarse como una nueva aproximación inicial para hacer otra iteración.

Por eso, el método de newton define la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Acotación del error

El polinomio de taylor de f centrado en x_n con error es:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(c_n)$$

Con c_n un numero entre x_n y x .

Evaluando en α se tiene que

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n)$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha - x_n + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

Convergencia

El método de newton converge para x_0 lo suficientemente cercano a α

Esto es debido a que para la función $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ se cumple que

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = -\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Evaluando en α $g'(x)$ se tiene que $g'(\alpha) = 0 \leq 1$. Por lo tanto el método de newton converge para α lo suficientemente cercano a α

Orden de convergencia

Se tiene que

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a - x_{n+1}\|}{\|a - x_n\|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\alpha - x_n\|^2 \|f''(c_n)\|}{2\|\alpha - x_n\|^p \|f'(x_n)\|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right\| \frac{1}{\|\alpha - x_n\|^{p-2}}$$

Suponiendo que el método de newton converge $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha - x_n\| = 0$ y por lo tanto el límite no converge si $p > 2$

$$\text{Si en cambio } p = 2 \text{ se tiene que el límite anterior es igual a } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right\| = \left\| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right\|$$

Por lo tanto, la convergencia del método es cuadrática.

Método iterativo de punto fijo

Método iterativo de punto fijo

Los métodos iterativos de punto fijo son aquellos donde, partiendo de una iteración x_0 cumplen la fórmula para todo n :

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Donde g es una función continua.

Condición suficiente de convergencia

Sea g una función continua y diferenciable en $[a, b]$ que satisface

1. $a \leq x \leq b \implies a \leq g(x) \leq b$
2. $\lambda := \sup_{x \in [a, b]} |g'(x)| < 1$

Entonces se cumple lo siguiente

1. Existe una única solución α de la ecuación $x = g(x)$
2. Para cualquier valor inicial $x_0 \in [a, b]$, la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a α
3. $|a - x_n| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} |x_0 - x_1|, n \geq 0$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{\alpha - x_n} \right| = g'(\alpha)$

Demostración de 1)

La hipótesis 1) permite aplicar el teorema de existencia de puntos fijos y garantizar la existencia de al menos una solución.

Suponiendo ahora que hay dos soluciones distintas α y β

\

Suponiendo sin pérdida de generalidad que $\alpha < \beta$, g es continua en $[\alpha, \beta]$ y diferenciable en (α, β) , por el teorema de Lagrange $\exists c \in (\alpha, \beta) : g'(c) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1$, y por lo tanto $\lambda \geq 1$, ABS!

\

El absurdo proviene de suponer que existe más de un punto fijo, por lo tanto la solución a la ecuación es única.

Demostración de 2)

Se tiene que existe α tal que $\alpha = g(\alpha)$ y $x_{n+1} = g(x_n)$, restando ambas ecuaciones se tiene que $a - x_{n+1} = g(\alpha) - g(x_n)$

\

Por el teorema de Lagrange, $g(\alpha) - g(x_n) = g'(c)(\alpha - x_n)$ para algún c entre α y x_n

Por lo tanto $|\alpha - x_{n+1}| = |g'(c)||\alpha - x_n| \leq \lambda |\alpha - x_n|$

\

Por inducción se puede probar que $|\alpha - x_{n+1}| \leq \lambda^n |\alpha - x_0|$

CB) $n = 0$

Aplicando la ecuación obtenida antes para $n = 1$ se tiene que $|\alpha - x_2| \leq \lambda |\alpha - x_1|$

HII) $\forall n \in \mathbb{N} : |\alpha - x_{n+1}| \leq \lambda^n |\alpha - x_0|$

PI)

Aplico la ecuación del caso base para x_{n+1} :

$$|\alpha - x_{n+2}| \leq \lambda |a - x_{n+1}| \stackrel{HII}{\leq} \lambda \cdot \lambda^n |\alpha - x_0| = \lambda^{n+1} |\alpha - x_0|$$

\

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n &= 0, \text{ ya que } \lambda < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha - x_0| &= |\alpha - x_0| \end{aligned} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n |\alpha - x_0| = 0$$

$$0 \leq |a - x_{n+1}| \leq \lambda^n |a - x_0|$$

Por principio de intercalación, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha - x_{n+1}| = 0$ y la iteración de punto fijo converge a α

Demostración de 3)

$$|\alpha - x_n| = |\alpha - x_1 + x_1 - x_0| \leq |\alpha - x_1| + |x_1 - x_0|$$

$$|\alpha - x_1| + |\alpha - x_0| \leq \lambda |\alpha - x_0| + |x_1 - x_0|$$

$$(1 - \lambda) |\alpha - x_0| \leq |x_1 - x_0|$$

$$|a - x_0| \leq \frac{1}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

\

Usando (2):

$$|a - x_n| \leq \lambda^n |a - x_0| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

Demostración de 4)

Por Lagrange, $\frac{g(\alpha) - g(x_n)}{\alpha - x_n} = \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(c)$ para $c \in [\alpha, x_n]$

A medida que $n \rightarrow \infty$, $x_n \rightarrow \alpha$ y por lo tanto c tiende a α

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(c) = g'(\alpha)$$

Corolarios

Suponiendo que $x = g(x)$ tiene una solución α y que $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en un entorno de α

1. Si $|g'(\alpha)| < 1$, entonces el método converge para x_0 lo suficientemente cercano a α .
2. Si $|g'(\alpha)| > 1$ entonces el método no converge a α .
3. Si $|g'(\alpha)| = 1$, no se pueden sacar conclusiones

Demostración de 1)

Método Regula Falsi

Método Regula Falsi

Es una combinación del método de la bisección y el método de la secante que se usa para encontrar el valor α tal que $f(\alpha) = 0$

Se elijen a_0 y b_0 tal que $f(a_0)f(b_0) \leq 0$

1. Se calcula c_n usando el método de la secante, $c_n = b_n - f(b_n) \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}$
 - Si $sgn(f(a_n)) = sgn(f(c_n))$, $a_{n+1} = c_n$ y $b_{n+1} = b_n$
 - Si $f(sgn(b_n)) = f(sgn(c_n))$, $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = c_n$
 - Si $f(c_n) = 0$, $\alpha = c_n$

Orden de convergencia

Orden de convergencia

El orden de convergencia de un método $x_n \rightarrow \bar{x}$ es el numero p tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - \bar{x}\|}{\|x_n - \bar{x}\|^p} = \beta < \infty$$

Método de la bisección

El error del método esta acotado por

$$|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - \bar{x}\|}{\|x_n - \bar{x}\|^p} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\| \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a) \right\|}{\left\| \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) \right\|^p} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(p-1)n-1}}{(b - a)^{p-1}} \end{aligned}$$

Si $p > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(p-1)n-1} = +\infty$ y el límite anterior tiende a infinito

Si $p = 1$, el límite queda como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La convergencia es lineal con tasa de convergencia $\frac{1}{2}$

Método de newton

El método de newton es un método de punto fijo donde:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Suponiendo que el método de newton converge a α

El polinomio de Taylor de f de grado 2 con error alrededor de x_n y evaluándolo en α se tiene que:

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(c_n)$$

Con c_n entre α y x_n

$f'(x_n) \neq 0$, dividiendo todo por $f'(x_n)$ se consigue

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (\alpha - x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

O reescribiéndolo a partir de la iteración del método:

$$0 = x_n - x_{n+1} + \alpha - x_n + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$$

Y queda al final

$$\alpha - x_n = -\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} (a - x_n)^2$$

Y entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a - x_{n+1}|}{(a - x_n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right| = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right|$$

El método tiene convergencia cuadrática.

Método de la secante

Suponiendo que el método converge a α

Dada la iteración del método de la secante

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Defino para mayor simplicidad: $\epsilon_n = \alpha - x_n$

Se tiene que $x_{n+1} - x_n = (\alpha - x_n) - (\alpha - x_{n+1}) = \epsilon_n - \epsilon_{n+1}$

El polinomio de Taylor de f alrededor de α

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha) + \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 f''(c_n) = (x - \alpha)f'(\alpha) + \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 f''(c_n)$$

Evaluado en x_n

$$f(x_n) = (x_n - \alpha)f'(\alpha) + \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 f''(c_n)$$

$$= -\epsilon_n f'(\alpha) + \frac{1}{2}\epsilon_n^2 f''(c_n)$$

$$= \epsilon_n (f'(\alpha) + \frac{1}{2}\epsilon_n f''(c_n))$$

(acá hay un error, no considero los distintos c_n)

Por lo tanto:

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n)f'(\alpha) + \frac{1}{2}(\epsilon_n^2 - \epsilon_{n-1}^2)f''(c_n)$$

$$= (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) (f'(\alpha) + \frac{1}{2}(\epsilon_n + \epsilon_{n-1})f''(c_n))$$

Entonces puedo restarle a α ambos lados de la formula de iteración para obtener lo siguiente

$$\alpha - x_{n+1} = \alpha - x_n + f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Simplificando

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \epsilon_n \left(f'(\alpha) + \frac{1}{2} \epsilon_n f''(c_n) \right) \frac{\epsilon_{n-1} - \epsilon_n}{(\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) (f'(\alpha) + \frac{1}{2} (\epsilon_n + \epsilon_{n-1}) f''(c_n))}$$

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \epsilon_n \frac{f'(\alpha) + \frac{1}{2} \epsilon_n f''(c_n)}{f'(\alpha) + \frac{1}{2} (\epsilon_{n-1} + \epsilon_n) f''(c_n)}$$

Unidad 4

- [Algoritmo de Gauss](#)
- [Factorización de Cholesky](#)
- [Las matrices estrictamente DD se pueden resolver por el método de gauss sin pivoteo](#)
- [Pivoteo parcial](#)

Algoritmo de Gauss

Algoritmo de Gauss

Paso 1:

Suponiendo $a_{11}^{(1)} \neq 0$, para cada fila por debajo, calcular los multiplicadores de fila

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

Y después ejecutar las operaciones de filas

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}$$

$$b_{ij}^{(2)} = b_{ij}^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}$$

Paso k:

Suponiendo $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, para cada fila por debajo, calcular los multiplicadores de fila

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(1)}}$$

Y despues ejecutar las operaciones de filas

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}$$

$$b_{ij}^{(k+1)} = b_{ij}^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$$

Después de $n - 1$ pasos, el sistema queda como un sistema triangular superior que se puede resolver por sustitución regresiva.

Numero de operaciones del método de Gauss

En el paso k se requieren:

- $n - k$ divisiones, para calcular los multiplicadores para las $n - k$ filas restantes.
- Para cada fila, se requieren $n - k$ sumas y multiplicaciones, y como se realizan estas operaciones en $n - k$ filas, se tienen en total $(n - k)^2$ operaciones por paso

Como la eliminación de gauss requiere $n - 1$ pasos se tiene:

- Cantidad de sumas y multiplicaciones: $\sum_{k=1}^{n-1} (n - k)^2 = \sum_{p=1}^{n-1} p^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$
- Cantidad de divisiones: $\sum_{k=1}^{n-1} (n - k) = \frac{n(n-1)}{2}$

En total el orden de operaciones es $\frac{2}{3}n^3$

Factorización de Cholesky

Factorización de Cholesky

Una matriz A es simétrica y definida positiva si puede factorizarse como

$$A = R^T R$$

Donde R es una matriz triangular superior con elementos diagonales positivos, dicha factorización es única y se denomina **Factorización de Cholesky**.

Demostración

\implies)

Como A es simétrica, existe una matriz ortogonal P tal que $A = P^T D P$, con D una matriz diagonal. Al ser A definida positiva la diagonal de D es positiva y por lo tanto existe \sqrt{D} .

Luego $A = P^T D P = P^T \sqrt{D} \sqrt{D} P = (\sqrt{D} P)^T (\sqrt{D} P)$

D es simétrica al ser una matriz diagonal. Entonces se puede definir $B = \sqrt{D} P$ donde B es no singular ($\det(P) \neq 0$ porque es invertible y \sqrt{D} no tiene elementos diagonales negativos).

Por lo tanto B posee una factorización QR

$$A = B^T B = R^T Q^T Q R = R^T R$$

\iff)

Es claro que A es una matriz simétrica.

Sea (λ, v) un par autovalor-autovector:

$$Av = \lambda v$$

$$v^T A v = v^T \lambda v$$

$\lambda = \frac{v^T A v}{v^T v} = \frac{v^T R^T R v}{v^T v} = \frac{\|Rv\|^2}{\|v\|^2} > 0$, ya que como R es no singular, $Rv = 0 \iff v = 0$ cosa que no se cumple ya que $v \neq 0$ por ser un autovector.

Como todos los autovalores son positivos, A es definida positiva

Las matrices estrictamente DD se pueden resolver por el método de gauss sin pivoteo

Las matrices estrictamente DD se pueden resolver por el método de gauss sin pivoteo

Se demuestra por inducción en n :

CB) $n = 2$

En este caso se tiene que

$$|a_{11}| > |a_{12}| \text{ y } |a_{22}| > |a_{21}|$$

Por lo tanto $a_{11} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$ (sino se tiene que $0 > |a_{12}|$ con $|a_{12}|$ un numero positivo).

No es necesario un pivoteo para la primera fila, al aplicar la eliminación de gauss se tiene que

$$a_{22}^{(2)} = a_{(22)}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{\det(A)}{a_{11}^{(1)}} \neq 0$$

Por lo tanto no es necesario un pivoteo.

H) Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ estrictamente diagonal dominante, no es necesario un pivoteo.

PI)

Para la matriz $n + 1 \times n + 1$ definida como

$$\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} & b_{n+1} \end{array} \right)$$

Tras aplicar una vez la eliminación gaussiana se tiene que:

$$\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} & b_1 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} & \dots & a_{2,n+1} - a_{1,n+1} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} & b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n+1,2} - a_{12} \cdot \frac{a_{n+1,1}}{a_{11}} & \dots & a_{n+1,n+1} - a_{1,n+1} \cdot \frac{a_{n+1,1}}{a_{11}} & b_{n+1} - b_1 \cdot \frac{a_{n+1,1}}{a_{11}} \end{array} \right)$$

En particular para $i \geq 2$:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - a_{1,j} \cdot \frac{a_{11}}{a_{11}}$$

A partir de acá, probar que la submatriz $A(1|1)$ en la segunda interacción es estrictamente DD y en consecuencia no hace falta aplicar pivoteo parcial.

Pivoteo parcial

Pivoteo parcial

En cada paso del algoritmo de gauss se supone que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, si $a_{kk}^{(k)} = 0$ se puede intercambiar la k -esima fila por alguna fila por debajo de esta donde $a_{ik}^{(k)} \neq 0$ y continuar con el algoritmo normalmente.

Si el sistema tiene solución, entonces esto siempre es posible

Demostración:

Sea $A^{(k)}$ la matriz de coeficientes en el k -esimo paso, las operaciones de filas del metodo de gauss con pivoteo parcial no anulan el determinante. Como el sistema tiene solución $\det(A^{(1)}) \neq 0$ y por ende $\det(A^{(k)}) \neq 0$.

Suponiendo que en el paso k se tiene que $a_{kk}^{(k)} = 0$, entonces la matriz $A^{(k)}$ se puede dividir por bloques:

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Donde $A_{11}^{(k)}$ es una matriz $k \times k$ y $A_{22}^{(k)}$ es una matriz $(n-k) \times (n-k)$

Y por lo tanto $\det(A^{(k)}) = \det(A_{11}^{(k)}) \det(A_{22}^{(k)})$. De aquí se desprende que $\det(A_{22}^{(k)}) \neq 0$ y por ende la primera columna no puede ser nula. Por ende, el pivoteo parcial es posible.

Casos especiales

Matrices simétricas y definidas positivas

Las matrices simétricas definidas positivas pueden escalonarse por el método de gauss sin necesidad de pivoteo, además, todos los elementos pívots son positivos:

Unidad 5

- ☰ [Esquema general de un metodo iterativo](#)
- ☰ [Método de Gauss-Seidel](#)
- ☰ [Metodo de Jacobi](#)
- ☰ [Métodos de relajación](#)
- ☰ [Toda matriz estrictamente DD es no singular](#)

Esquema general de un metodo iterativo

Esquema general de un metodo iterativo

Si $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es no singular entonces

$$Ax = b \implies Ax - b = 0$$

$$Nx = Nx \implies Nx = Nx - 0 \implies Nx = Nx - Ax + b$$

El proceso iterativo es de la forma:

$$N\mathbf{x}^{(n+1)} = (N - A)\mathbf{x}^{(n)} - b$$

O bien:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = (I - N^{-1}A)\mathbf{x}^{(n)} + N^{-1}b$$

Condiciones de convergencia

Si $\|I - N^{-1}A\| < 1$, el metodo iterativo converge para cualquier vector inicial

Demostración:

Sea \mathbf{x} tal que $A\mathbf{x} = b$

$$(I - N^{-1}A)\mathbf{x} + N^{-1}b = \mathbf{x} - N^{-1}b + N^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

\

Sea el error $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)} = (I - N^{-1}A)\mathbf{x} + N^{-1}b - (I - N^{-1}A)\mathbf{x}^{(k)} - N^{-1}b$$

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = (I - N^{-1}A)\mathbf{e}^{(k)}$$

\

Luego se tiene que $\mathbf{e}^{(k+1)} = (I - N^{-1}A)\mathbf{e}^{(0)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}^{(n)}\| = \|(I - N^{-1}A)^n \mathbf{e}^{(0)}\| \leq \|(I - N^{-1}A)^n\| \cdot \|\mathbf{e}^{(0)}\| = 0$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

El metodo de Jacobi propone como iteración:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(n)} \right)$$

El método de Gauss-Seidel propone como iteración utilizar los valores de la iteración actual al calcular los valores de $x^{(n+1)}$ es decir, propone como iteración:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} x_j^{(n+1)} - \sum_{i < j \leq n} a_{ij} x_j^{(n)} \right)$$

Se puede juntar el termino izquierdo $x_i^{(n+1)}$ con los terminos semejantes del lado derecho, asi, la iteración puede reescribirse como:

$$\sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} x_j^{(n+1)} = b_i - \sum_{i < j \leq n} a_{ij} x_j^{(n)}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{b} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(n)}$$

Introduciendo la descomposición $A = L + D + U$ queda como:

$$(L + D)\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(n)}$$

Si $L + D$ es invertible se consigue

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = (L + D)^{-1}\mathbf{b} + [I - (L + D)^{-1}U]\mathbf{x}^{(n)}$$

Metodo de Jacobi

Metodo de Jacobi

Los sistemas de ecuaciones lineales consisten en ecuaciones de la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

En forma simplificada:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$$

Se puede reordenar como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j + a_{ii}x_i = b_i \\ a_{ii}x_i &= b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j \right) \end{aligned}$$

Partiendo de una suposición inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]$ el método de Jacobi propone como iteración:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(n)} \right)$$

En forma matricial, sea D la matriz diagonal de A :

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = D^{-1} \left[\mathbf{b} + (D - A)\mathbf{x}^{(n)} \right]$$

Métodos de relajación

Métodos de relajación

El metodo de Gauss-Seidel se puede modificar como sigue:

$$x_i^{(n+1)} = (1 - \omega)x_i^{(n)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{1 \leq j < i} a_{ij}x_j^{(n+1)} - \sum_{i < j \leq n} a_{ij}x_j^{(n)} \right]$$

Que se puede reordenar como:

$$a_{ii}x_i^{(n+1)} + \omega \sum_{1 \leq j < i} a_{ij}x_j^{(n+1)} = (1 - \omega)a_{ii} \cdot x_i^{(n)} + \omega b_i - \omega \sum_{i < j \leq n} a_{ij}x_j^{(n)}$$

Que se puede reescribir de forma matricial como:

$$D\mathbf{x}^{(n+1)} + \omega L \cdot \mathbf{x}^{(n+1)} = (1 - \omega)D\mathbf{x}^{(n)} + \omega b - \omega U\mathbf{x}^{(n)}$$

Que es igual a

$$(D + \omega L)\mathbf{x}^{(n+1)} = [(1 - \omega)D - \omega U]\mathbf{x}^{(n)} + \omega b$$

Toda matriz estrictamente DD es no singular

Toda matriz estrictamente DD es no singular

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal dominante $\iff \forall i = 1, \dots, n, |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$

Toda matriz diagonal dominante es no singular, es decir, $\det(A) \neq 0$.

Por el contrario, si existiese una matriz diagonal dominante singular entonces existe un vector $v \neq 0$ tal que $Av = 0$

Y por lo tanto para $i = 1, \dots, n$ y $v_i \neq 0$:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} v_j + a_{ii} v_i &= 0 \\ \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} v_j &= -a_{ii} v_i \\ |a_{ii} v_i| &= |\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} v_j| < \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij} v_j| \\ |a_{ii}| &< \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{v_j}{v_i} \right| |a_{ij}| \end{aligned}$$

En particular se puede tomar el valor de i tal que v_i sea máximo, el cual debe ser necesariamente distinto de 0, luego $\forall j, \left| \frac{v_j}{v_i} \right| \leq 1$ y entonces

$$|a_{ii}| < \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{v_j}{v_i} \right| |a_{ij}| < \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Lo cual contradice la definición de matriz diagonal dominante, por lo tanto $\det(A) \neq 0$.

Unidad 7

- [Ajuste de curvas](#)
 - [Interpolación polinómica](#)
 - [Polinomio de Lagrange](#)
 - [Polinomios de Chebyshev](#)
-

Ajuste de curvas

Ajuste de curvas

Sea $y = g(x)$ una relación desconocida, se tiene el conjunto de puntos $\{(x_i, y_i)\}$ donde $y_i = g(x_i) + v_i$ con v_i un error de medición

Se quiere aproximar $g(x)$ por una función $f(x)$ de la forma:

$$f(x) = a_1 \Phi_1(x) + a_2 \Phi_2(x) + \cdots + a_p \Phi_p(x)$$

Sea $|\epsilon_i| = |f(x_i) - y_i|$ el error de aproximación

El problema de mínimos cuadrados consiste en hallar los coeficientes a_1, \dots, a_p que minimizan la suma de los errores al cuadrado:

$$G(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n (a_1 \Phi_1(x_i) + a_2 \Phi_2(x_i) + \cdots + a_p \Phi_p(x_i) - y_i)^2$$

El problema de optimización consiste en encontrar el vector $x = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$ que minimiza G

Derivando en una variable a_k y aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial G}{\partial a_k} = \sum_{i=0}^n 2(a_1 \Phi_1(x_i) + \cdots + a_p \Phi_p(x_i) - y_i) \Phi_k(x_i) \quad (1)$$

Derivando en otra variable (no necesariamente distinta) a_l :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial a_k \partial a_l} = \sum_{i=0}^n 2 \Phi_k(x_i) \Phi_l(x_i)$$

(no pude seguir, el punto es que la función es convexa porque la matriz hessiana es semidefinida positiva)

Como la función G es convexa, todo mínimo local es un mínimo global, para encontrar el mínimo global de la función basta con encontrar un punto crítico (dicho punto no puede ser un punto de inflexión, ya que sino la función no sería convexa).

Es decir, hay que buscar el punto x tal que:

$$\nabla G(x) = \left[\frac{\partial G}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial a_p} \right] = 0$$

Si (1) es 0, entonces puede reestructurarse como sigue:

$$\frac{\partial G}{\partial a_k} = \left[\sum_{i=0}^n \Phi_1(x_i) \Phi_k(x_i) \right] a_1 + \cdots + \left[\sum_{i=0}^n \Phi_p(x_i) \Phi_k(x_i) \right] a_p = \sum_{i=0}^n y_i \Phi_k(x_i) \quad (2)$$

La solución por mínimos cuadrados se consigue resolviendo el sistema de ecuaciones de arriba.

En forma matricial, dada las matrices:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_0) & \Phi_2(x_0) & \dots & \Phi_p(x_0) \\ \Phi_1(x_1) & \Phi_2(x_1) & \dots & \Phi_p(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(x_n) & \Phi_2(x_n) & \dots & \Phi_p(x_n) \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$\sum_{i=0}^n \Phi_j(x_i) \Phi_k(x_i) = \sum_{i=0}^n \Phi_{i,j} \Phi_{i,k} = \sum_{i=0}^n (\Phi^T)_{j,i} \Phi_{i,k} = (\Phi^T \Phi)_{j,k}$$

Por lo tanto el sistema (2) puede reescribirse como:

$$(\Phi^T \Phi)x = \Phi^T b$$

(pista, ver que la matriz es semidefinida positiva viendo que define un producto interno)

Interpolación polinómica

Interpolación polinómica

Sea el conjunto de puntos $\{(x_i, y_i) : y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n\}$

Se quiere encontrar un polinomio $p(x)$ tal que $p(x_i) = y_i \forall i$

Suponiendo que el grado de p es n , se quiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_m x_0^n = y_0 \\ p(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_1^n = y_1 \\ &\vdots \\ p(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_m x_n^n = y_n \end{aligned}$$

En forma matricial

$$Xa = y$$

Donde:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Donde X es la matriz de Vandermonde

Determinante de la matriz de Vandermonde

Se puede probar por inducción que:

$$\det(X) = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

CB) $n = 1$

La matriz es $\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}$ y su determinante es $x_1 - x_0$, lo cual se corresponde con la propiedad.

PI)

A la i -ésima columna le resto la columna anterior multiplicada por x_0 (la primera columna queda como esta).

La entrada ij con $j = 0, 1, \dots, n$ queda como:

$$x_j^i - x_j^{i-1} \cdot x_0 = x_j^{i-1}(x_j - x_0)$$

Cuando $j = 0$, se tiene que la entrada i_0 es igual a 0

Por lo tanto la matriz queda como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

Se puede expandir el determinante por la primera fila para que quede como sigue:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & \dots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

Extraigo los factores comunes de cada columna:

$$\prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Donde la matriz de la izquierda es la matriz de Vandermonde con un nodo de interpolación, aplicando la HI se puede simplificar el determinante como queda

$$\prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_0) \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_0)$$

Existencia y unicidad del polinomio interpolante

Como todos los nodos de interpolación son distintos $\det(X) \neq 0$ y por lo tanto el sistema $Xa = y$ tiene solución única.

Limitaciones computacionales

La matriz de Vandermonde es no singular pero esta mal condicionada

Por ejemplo, si se tienen n nodos equiespaciados en el intervalo $[0, 1]$

$$x_i = \frac{i}{n-1}$$

$$x_i - x_j = \frac{i-j}{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \det(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_0)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{0 \leq j < i \leq n} \frac{i-j}{n-1}$$

(el punto es que tiende a 0)

Polinomio de Lagrange

Polinomio de Lagrange

Dados los puntos de interpolación (x_i, y_i) , se definen las funciones

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Se define el polinomio $p(x)$

$$p(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) y_k$$

Se tiene que si para un cierto i y un cierto k :

$$\begin{aligned} L_k(x_i) &= 0, & i \neq k \\ L_k(x_i) &= 1, & i = k \end{aligned}$$

Y por lo tanto $p(x_i) = y_i$

Como cada uno de los polinomios $L_k(x)$ tienen grado menor o igual n , el polinomio interpolante tiene grado n y por lo

tanto es único.

Polinomios de Chebyshev

Polinomios de Chebyshev

Se define el polinomio de Chebyshev de grado n como

$$T_n(x) = \cos(n \times \arccos(x))$$

Demostración de que T_n es un polinomio

Por inducción en n

CB) $n = 0$

$T_0(x) = \cos(0 \times \arccos(x)) = \cos(0) = 1$, un polinomio de grado 1

PI)

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1) \times \arccos(x)) = \cos(n \times \arccos(x) + \arccos(x)) \\ &= \cos(n \times \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \times \arccos(x)) \sin(\arccos(x)) \\ T_{n-1}(x) &= \cos((n-1) \times \arccos(x)) = \cos(n \times \arccos(x) - \arccos(x)) \\ &= \cos(n \times \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) + \sin(n \times \arccos(x)) \sin(\arccos(x)) \end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones queda:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2 \cos(n \times \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) = 2x \cdot T_n(x)$$

Y queda la siguiente relación de recurrencia:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Y por inducción, $T_{n+1}(x)$ es un polinomio de grado n

Propiedades de los polinomios de Chebyshev

1. $|T_n(x)| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$:

Por inducción en n :

CB) $n = 1$

$T_0(x) = 1$

PI)

$$|T_{n+1}(x)| = |2xT_n(x)| + |T_{n-1}(x)|$$

2. $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$

Por inducción en n :

CB) $n = 1$

$$T_1(x) = x = 2^0 x^1$$

PI)

En la fórmula de recurrencia, el término de mayor grado está determinado por el primer término de la recurrencia, al multiplicarse ese término por $2x$, se consigue la fórmula que se quiere demostrar

3. Raíces de los polinomios de Chebyshev:

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n \times \arccos(x)) = 0 \iff \frac{(2k+1)\pi}{2n} = \arccos(x) \iff x = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \text{ para } 0 \leq k \leq n-1$$

Error de interpolación por Chebyshev

Lo ideal al tratar de aproximar la función f en un intervalo $[a; b]$ por un polinomio p es minimizar el error de interpolación en el intervalo

$$E(p) = \min_{x \in [a; b]} |f(x) - p(x)|$$

Unidad 8

- [Integración por polinomio interpolante](#)
 - [Regla de Simpson](#)
 - [Regla del trapecio](#)
-

Integración por polinomio interpolante

Integración por polinomio interpolante

Por interpolación de Lagrange se tiene que

$$f(x) = p(x) + \frac{\Phi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi(x))$$

Donde

$$p(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x), \quad \Phi_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Integrando el lado derecho queda como:

$$\int_a^b p(x) dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \Phi_n(x) f^{(n)}(\xi(x)) dx$$

Regla de Simpson

Regla de Simpson

La regla de Simpson usa un polinomio interpolante de grado 2

$$f(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + \frac{\Phi_2(x)}{6} f'''(\xi(x))$$

Integración del polinomio interpolante

Por simplicidad tomo $b = a + 2h$

$$\int_a^b L_0(x) dx = \int_a^b \frac{x-a-h}{a-(a+h)} \frac{x-a-2h}{a-(a+2h)} dx = \int_a^b \frac{x-a-h}{-h} \frac{x-a-2h}{-2h} dx$$

Sustitución: $u = \frac{x-a}{2}$, $dx = 2du$

$$x - a - h = 2u - h$$

$$x - a - 2h = 2u - 2h$$

La integral anterior queda como:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \frac{1}{h^2} (2u-h)(2u-2h) dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^h 4u^2 - 6hu + 2h^2 dx = \frac{1}{h^2} \left(\frac{4}{3}h^3 - 3h^3 + 2h^3 \right) = \frac{1}{3}h \end{aligned}$$

$$\int_a^b L_1(x) dx = \int_a^b \frac{x-a}{a+h-a} \frac{x-a-2h}{a+h-a-2h} dx = \int_a^b \frac{x-a}{h} \frac{x-a-2h}{-h} dx$$

Sustitución: $u = \frac{x-a}{2}$

$$dx = 2du$$

$$x - a = 2u$$

$$x - a - 2h = 2u - 2h$$

La integral anterior queda como:

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{2}{h}}^h 2u(2u-2h) dx = -\frac{2}{h^2} \int_0^h 4u^2 - 4hu dx = -\frac{2}{h^2} \left(\frac{4}{3}h^3 - 2h^3 \right) \\ &= \frac{4}{3}h \end{aligned}$$

$$\int_a^b L_2(x) dx = \int_a^b \frac{x-a}{a+2h-a} \frac{x-a-h}{a+2h-a-h} dx = \int_a^b \frac{x-a}{2h} \frac{x-a-h}{-h} dx$$

Sustitución: $u = \frac{x-a}{2}$

$$dx = 2du$$

$$x - a = 2u$$

$$x - a - h = 2u - h$$

La integral anterior queda como:

$$\frac{1}{h^2} \int_0^h 2u(2u-h) dx = \frac{1}{h^2} \int_0^h 4u^2 - 2hu dx = \frac{1}{h^2} \left(\frac{4}{3}h^3 - h^3 \right) = \frac{1}{3}h$$

Juntando todas las integrales queda:

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x) dx &= \frac{1}{3}h \cdot f(x_0) + \frac{4}{3}h \cdot f(x_1) + \frac{1}{3}h \cdot f(x_2) \\ &= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))\end{aligned}$$

Regla del trapecio

Regla del trapecio

La regla del trapecio integra el intervalo $[a, b]$ usando el polinomio interpolante de grado 1

$$x_0 = a, x_1 = b, h = b - a$$

El polinomio interpolante es:

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}x$$

Luego

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1) dx \quad (1)$$

Integración del polinomio interpolante

$$\begin{aligned}\int_a^b f(a) \frac{x-b}{a-b} dx &= \int_a^b \frac{f(a)}{-h} (x-b) dx \stackrel{\text{Sustitucion } u=x-b}{=} \int_{a-b}^0 -\frac{f(a)}{h} u du \\ \int_{-h}^0 -\frac{f(a)}{h} u du &= -\frac{f(a)}{2h} u^2 \Big|_{-h}^0 = \frac{f(a)}{2} h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(b) \frac{x-a}{b-a} dx &= \int_a^b \frac{f(b)}{h} (x-a) dx \stackrel{\text{Sustitucion } u=x-a}{=} \int_0^{b-a} \frac{f(b)}{h} u du = \int_0^h \frac{f(b)}{h} u du \\ &= \frac{f(b)}{2h} u^2 \Big|_0^h = \frac{f(b)}{2} h\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral definida del polinomio interpolante es $\frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$

Integración del error

Se tiene el siguiente teorema:

Teorema del valor medio para integrales: Sea $g(x)$ una función que no cambia de signo e integrable en el intervalo $[a; b]$ y $f(x)$ una función continua de $[a, b]$ entonces existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b g(x)f(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

$f''(\xi(x))$ es una función continua y derivable (esto se sabe porque cumple las hipótesis del teorema de error de interpolación polinómica). Como $a \leq x \leq b$, $(x-a)(x-b)$ es siempre no positiva y por lo tanto se puede aplicar el teorema para (1)

$$\begin{aligned}\int_a^b f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1) dx &= f''(c) \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ \int_a^b x^2 - (a+b)x + ab dx &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{a+b}{2}x^2 + ab \cdot x \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{a+b}{2}(b^2 - a^2) + ab(b-a) \\ &= \frac{b^3}{3} - \frac{b^2a}{2} + \frac{ba^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{2} + \frac{a^3}{2} + b^2a - ba^2 \\ &= -\frac{b^3}{6} + \frac{b^2a}{2} - \frac{ba^2}{2} + \frac{a^3}{6} = -\frac{1}{6}(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3) = -\frac{(b-a)^3}{6} = -\frac{h^3}{6}\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral anterior queda como $-f''(c)\frac{h^3}{6}$

Integral final

Sustituyendo en (1) las integrales anteriores la regla queda como:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{h^3}{12} f''(c)$$

Con $c \in [a; b]$
