Notas Algebra Lineal

Autor: Agustín Fernández Bergé

Indice

Unidad 1

Axiomas de los espacios vectorial

> **Axiomas de los espacios vectorial**
> Un espacio vectorial V es una terna de la forma $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ donde
>
> - $\mathbb{F}$ es un cuerpo de escalares.
> - $+$ es una operación de suma de vectores
> - $\cdot$ es una operación de producto de un vector por un escalar.
>
> Y estas operaciones en conjunto cumplen con 10 axiomas:
>
> 1. Clausura de la suma vectorial: $\forall v, u \in V, v + u \in V$
> 2. Conmutatividad de la suma vectorial: $\forall v, u \in V, v + u = u + v$
> 3. Asociatividad de la suma vectorial: $\forall v, u, w \in V, (v + u) + w = v + (u + w)$
> 4. Existencia del elemento neutro de la suma vectorial: $\forall v \in V\ \exists 0 \in V : v + 0 = 0$
> 5. Existencia del elemento inverso de la suma vectorial: $\forall v \in V\ \exists u \in V : v + u = 0$
> 6. Clausura del producto por escalar: $\forall a \in \mathbb{F}, v \in V, a \cdot v \in V$
> 7. Asociatividad del producto por escalar: $\forall a, b \in \mathbb{F}, v \in V, (a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$
> 8. Distributiva del producto por escalar en la suma de vectores: $\forall a \in \mathbb{F}, v, u \in V, a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
> 9. Distributiva del producto por escalar en la suma de escalares: $\forall a, b \in \mathbb{F}, v \in V, (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
> 10. Unitariedad del producto por escalar: $\exists 1 \in \mathbb{F}, \forall v \in V, 1 \cdot v = v$
>
> V junto con $+$ forman un grupo abeliano.

Base de un espacio vectorial

> **Base de un espacio vectorial**
> Una base de un ev V es un conjunto S que genera V y ademas es li

---

Caracterización de un subespacio vectorial

> **Caracterización de un subespacio vectorial**
> Dados U y V con $U \subseteq V$, probar que

$$U \text{ sev de } V \iff \forall a, b \in \mathbb{F}, u, v \in \mathbb{U}, av + bu \in U$$

$\implies$)
Si U es un sev de V, entonces cumple la suma y el producto por escalar son cerradas en U y trivialmente se cumple la proposición
$\impliedby$)
V es un espacio vectorial y $U \subseteq V$, así que ya cumple todos los axiomas de los espacios vectoriales salvo los de clausura. Dado que $\forall a, b \in \mathbb{F}, u, v \in \mathbb{U}, av + bu \in U$, los axiomas de clausura se cumplen y por lo tanto U es un subespacio vectorial de V.

Dimensión de la suma de espacios vectoriales

Dimensión de la suma de espacios vectoriales
Sean U_1 Y U_2 subespacios vectoriales de V

$$\dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2 = \dim U_1 + U_2$$

Dada una base B de $U_1 \cap U_2$, la extiendo a una base B_1 de U_1 y a una base B_2 de U_2 de aquí resulta:

$|B| = m$
$|B_1| = m + r$
$|B_2| = m + s$
$B = \{v_1, \ldots, v_m\}$
$B_1 = \{u_1, \ldots, u_{m+r}\}$
$B_2 = \{w_1, \ldots, w_{m+s}\}$

Luego $B_1 \cup B_2$ es una base de $U_1 + U_2$:

$v \in \operatorname{span}(B_1 \cup B_2) \iff v = \sum_{i=0}^{m+r} a_i \cdot u_i + \sum_{i=0}^{m+s} b_i \cdot w_i \iff v \in U_1 + U_2$

Ahora planteo:
$\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot v_i + \sum_{i=m+1}^{r} b_i \cdot u_i + \sum_{i=0}^{s} c_i \cdot w_i = 0$
$-\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot v_i - \sum_{i=m+1}^{r} b_i \cdot u_i = \sum_{i=0}^{s} c_i \cdot w_i$
La parte izquierda que pertenece a U_1 es igual a la parte derecha que pertenece a U_2
por lo tanto ambas pertenecen a $U_1 \cap U_2$

La parte izquierda entonces se puede escribir como cl de vectores de $B_1 \cap B_2$ por lo que:
$-\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot v_i - \sum_{i=m+1}^{r} b_i \cdot u_i = \sum_{i=0}^{m} d_i v_i = \sum_{i=0}^{s} c_i \cdot w_i$
$\sum_{i=0}^{m} d_i v_i + \sum_{i=0}^{s} -c_i \cdot w_i = 0$
Me quedaron todos vectores de B_2, como B_2 es li, resulta que $c_i = 0$ y $d_i = 0 \ \forall i$

Como $-\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot v_i - \sum_{i=m+1}^{r} b_i = \sum_{i=0}^{m} d_i v_i = 0$, $a_i = 0$ y $b_i = 0 \ \forall i$ dado que B_1 es un conjunto li.

Queda entonces que $B_1 \cup B_2$ es base de $U_1 \cap U_2$ y finalmente:

$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2| = |B_1| + |B_2| - |B|$
$\dim U_1 + U_2 = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2$

El cardinal de un conjunto li es siempre menor o igual que el de un conjunto generador

El cardinal de un conjunto li es siempre menor o igual que el de un conjunto generador
Dado V un espacio vectorial finito. Sea S un conjunto li de vectores de V y T un conjunto generador de V, $|S| \leq |T|$

Suponiendo $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $T = \{v_1, \ldots, v_n\}$, los vectores de S se pueden escribir como cl de vectores de T

$$u_1 = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \ldots + a_{1n} v_n$$

$$u_2 = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \ldots + a_{2n} v_n$$

.
.

$$.$$
$$u_m = a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \ldots + a_{mn}v_n$$

Sea el sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & . & a_{n1} \\ . & . & . \\ a_{1m} & . & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $(b_1, ., b_n)$ una solución del sistema, esto quiere decir que:

$$a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + \ldots + a_{n1}b_n = 0$$
$$a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{n2}b_n = 0$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_{1m}b_1 + a_{2m}b_2 + \ldots + a_{nm}b_n = 0$$

Y en general: $\sum_{i=0}^{n} b_i a_{ij} = 0$

Se tiene que:
$\sum_{i=0}^{m} b_i u_i = \sum_{i=0}^{n} b_i \left(\sum_{j=0}^{n} a_{ij}v_j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_i \cdot a_{ij} \cdot v_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot a_{ij} \cdot v_j = \sum_{j=0}^{n} v_j \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot a_{ij}\right) = 0$

Como los vectores u son li, los coeficientes b tienen que ser todos 0 por lo que el sistema anterior tiene una única solución. Dado que no hay variables libres se tiene que hay mas columnas que filas y resulta $m \leq n$. $|S| = m$ y $|T| = n$, el conjunto li tiene menos elementos que el conjunto generador.

Corolarios

Sea S un conjunto de vectores de V y B una base de V

1. $|S| > |B| \implies S$ es ld
   Si S fuera li entonces $|S| \leq |B|$ debido a que B es un conjunto generador, lo cual es una contradicción.
2. Si $|S| < |B| \implies S$ no genera a V
   Si S generara a B, entonces $|S| \geq |B|$ debido a que B es li. Contradicción
3. Todas las bases tienen la misma cardinalidad
   Dadas dos bases B_1 Y B_2 de V:
   B_1 es li y B_2 es generador, $|B_1| \leq |B_2|$
   B_2 es li y B_1 es generador, $|B_1| \leq |B_2|$
   De aqui sale que $|B_1| = |B_2|$.

El span de un conjunto de vectores es la interseccion de todos los subespacios que los contienen

El span de un conjunto de vectores es la interseccion de todos los subespacios que los contienen
Dado S un conjunto de vectores de V probar que:

$$\operatorname{span}(S) = \bigcap\{U \text{ sev de } V : S \subseteq U\}$$

Para probar que dos conjuntos son iguales, puedo ver que uno esta contenido en el otro y viceversa, sea $\mathcal{F} = \{U \text{ sev de } V : S \subseteq U\}$:

$\operatorname{span}(S) \subseteq \bigcap\{U \text{ sev de } V : S \subseteq U\})$
Sea un $U \in \mathcal{F}$ y $v \in \operatorname{span}(S)$,
$v = \sum_{i=0}^{n} a_i w_i$ con a_i un escalar y $w_i \in S$
$w_i \in U$ y U es un sev de V por ser la suma una operación cerrada en U, $v \in U$. Dado que U es un conjunto cualquiera de $\mathcal{F}$ y v un vector cualquiera del span, se cumple que $\operatorname{span}(S) \subseteq \bigcap\{U \text{ sev de } V : S \subseteq U\}$
$\operatorname{span}(S) \supseteq \bigcap\{U \text{ sev de } V : S \subseteq U\})$
$span(S) \in \mathcal{F}$, el span de S es un sev de V y además $S \subseteq \operatorname{span}(S)$ debido a que un vector $v \in S$ se puede escribir como

$1 \cdot v$ que es una cl de vectores de S. Debido a esto cualquier vector de $\bigcap\{U \text{ sev de } V : S \subseteq U\})$ tiene que estar en $\operatorname{span} S$ por lo que la proposición se cumple.

Al cumplirse la doble inclusión, se cumple la proposición a probar. Esto tambien demuestra que $\operatorname{span}(S)$ es el menor sev de V que contiene a todos los elementos de S.

El span de un conjunto es un subespacio vectorial

El span de un conjunto es un subespacio vectorial

Dados S un conjunto de vectores y V un ev, probar que:

$$\operatorname{span}(S) \text{ es un sev de } V$$

Dados $u, v \in \operatorname{span}(S)$:
$n := |S|$
$S = \{w_1, \ldots, w_n\}$
$xu + yv = x\left(\sum_{i=0}^{n} a_i w_i\right) y \left(\sum_{i=0}^{n} b_i w_i\right) = \sum_{i=0}^{n}(x \cdot a_i + y \cdot b_i) w_i \in \operatorname{span}(S)$

Por la caracterización de un sev , $\operatorname{span}(S)$ es un sev de V

Existencia de suma directa de un subespacio vectorial

Existencia de suma directa de un subespacio vectorial
Dado un subespacio vectorial U de V existe otro subespacio W de V tal que $U \oplus W = V$.

Todo conjunto li se puede extender a una base de V, se toma una base B_1 de U y se extiende a una base B de V, el espacio W buscado es $\operatorname{span}(B - B_1)$.

Sea $B_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $B_2 = \{v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ donde $B = B_1 \cup B_2$:
$\operatorname{span}(B_1) = U$ y $\operatorname{span}(B_2) = W$, ambos son sev de V.

$U + W = V$, por doble inclusión:
$U + W \subseteq V)$
$V = \operatorname{span}(B)$
$u \in U + W \implies u = \sum_{i=0}^{m} a_i v_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i v_i \implies u \in \operatorname{span}(B)$
$V \subseteq U + W)$
$V = \operatorname{span}(B)$
$v \in V \implies v \in \operatorname{span}(B) \implies \sum_{i=0}^{m} a_i v_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i v_i \implies v \in U + W$

$u \in \operatorname{span}(B_1) \cap \operatorname{span}(B_2) \implies u = \sum_{i=0}^{m} a_i v_i = \sum_{i=m+1}^{n} a_i v_i$
$\implies 0 = \sum_{i=0}^{m} a_i v_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i v_i \implies \forall i, a_i = 0$ dado que el conjunto B es una base. Por lo tanto $u = 0$ y $U \oplus W = V$

Independencia lineal

Independencia lineal
Un conjunto finito de vectores $S = \{v_1, v_n\}$ es linealmente independiente o li si y solo si:

$$\forall a_1 \ldots a_n \in \mathbb{F}, \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot v_i = 0 \implies a_i = 0$$

El conjunto vacío es li.
Un conjunto infinito es li si todo subconjunto finito del mismo es li
Un conjunto que no es li es linealmente dependiente o ld.

Propiedades

1. $S \text{ es ld } \iff \exists a_1 \ldots a_n \in \mathbb{F} \text{ donde al menos uno es no nulo } : \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot v_i = 0$
   Viene de la contrarrecíproca de la definición de li
2. $0 \in S \implies S \text{ es ld}$
   Sea $v_n = 0$, $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot v_i + a_n \cdot 0$
   Poniendo todos los a_i en 0 y a_n en 1 queda que $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = 0$ y por lo tanto S es ld.
3. Si $S \text{ es ld } \implies \forall T \supseteq S, \text{T es ld}$
   Dados los escalares $a_1 \ldots a_n$ de la combinación lineal de vectores de S que tiene como resultado 0 donde al menos uno es $\neq 0$(que existen dado que S es ld), la combinación lineal de vectores de T con escalares $a_1 \ldots a_n, 0 \ldots 0$ tiene como resultado al vector nulo. Por lo tanto T es ld.
4. Si S es li $\implies \forall T \subseteq S, T$ es li
   Si T fuese ld entonces S no puede ser li(la combinación lineal con escalares $\chi_T(v_i)a_i$ es el vector nulo, a_i es el escalar correspondiente a v_i que hace que la cl de vectores de T sea nula).
5. $v \in V$, $\{v\}$ es ld $\iff v = 0$
   Si $v = 0$ entonces $\{v\}$ es ld por uno
   Si $\{v\}$ es ld entonces existe $a \neq 0$ tal que $a \cdot v = 0$ y resulta $v = 0$
6. $v, u \in V$, $\{v, u\}$ es ld $\iff \exists \lambda \in \mathbb{F} : \lambda \neq 0 \cdot u = v$
   Si $\{u, v\}$ es ld existen a, b escalares con al menos uno distinto de 0 tal que $au + bv = 0$.
   Suponiendo que $a \neq 0$, entonces $au = -bv$ y $u = -\frac{b}{a}v$, luego $\lambda = -\frac{b}{a}$
   En la proposicion contraria: $\lambda u = v \implies \lambda u - v = 0$ y por lo tanto $\{u, v\}$ es ld
7. S es ld $\iff$ existe un vector de S que es cl de los demas
   Suponiendo S ld, $\exists a_k \neq 0 : \sum_{i=0}^{n} a_i v_i = 0$ y de aca resulta $a_k v_k = \sum_{i=0, i \neq k}^{n} -a_i v_i$ y finalmente $v_k = \sum_{i=0, i \neq k}^{n} -\frac{a_i}{a_k} v_i$
   Suponiendo que hay algun vector v_k que es cl de los demas, entonces $v_k = \sum_{i=0, i \neq k}^{n} a_i v_i$ y finalmente $\sum_{i=0, i \neq k}^{n} -a_i v_i - v_k = 0$, S es ld

---

S subconjunto de T implica span(S) sev de span(T)

S subconjunto de T implica span(S) sev de span(T)

Dados $S \subseteq T$ probar que:

$$\text{span}(S) \text{ sev de } \text{span}(V)$$

El span de un conjunto es un subespacio vectorial, dado que S es un conjunto de vectores de $\text{span}(T)$, la afirmación es valida

---

Si S es un sev de V, entonces span(S) = S

Si S es un sev de V, entonces span(S) = S
Dado $S \subseteq V$, probar que:

$$S = \text{span}(S)$$

Pruebo por doble inclusión

$S \subseteq \text{span}(S)$ ya que todo vector v de S es igual a $1 \cdot v$ y por lo tanto es una combinación lineal de vectores de S.

Suponiendo que $\text{span}(S) \not\subseteq S$, existe una combinación lineal de vectores de S que no esta en S. Esto invalida la caracterización de un sev. Por absurdo, $\text{span}(S) \subseteq S$.

Por doble inclusión: $S = \text{span}(S)$

Todas las bases tienen la misma cardinalidad

Todas las bases tienen la misma cardinalidad
Dadas dos bases B_1 Y B_2 de V, $|B_1| = |B_2|$:

> 1. Una base es un conjunto generador linealmente independiente
> 2. El cardinal de un conjunto li es siempre menor o igual que el de un conjunto generador.
> B_1 es li y B_2 es generador, $|B_1| \le |B_2|$
> B_2 es li y B_1 es generador, $|B_1| \le |B_2|$
>
> De aqui sale que $|B_1| = |B_2|$.

Todo conjunto generador se puede reducir a una base

> **Todo conjunto generador se puede reducir a una base**
> Si S es un conjunto generador de V, se puede reducir a un conjunto li de vectores, y por lo tanto a una base de V.
>
> Primero voy a demostrar el siguiente enunciado: Si se tiene que $v \in \operatorname{span}(S - \{v\}) \implies \operatorname{span}(S - \{v\}) = \operatorname{span}(S)$
>
> El caso donde $v \notin S$ es trivial, así que voy a probar el caso donde $v \in S$.
>
> Pruebo por doble inclusión, sea $S = \{w_1 \dots w_m\} \cup \{v\}$:
> $\operatorname{span}(S - \{v\}) \subseteq \operatorname{span}(S))$
> Si $u \in \operatorname{span}(S - \{v\}) \implies u = \sum_{i=0}^{m} a_i w_i = \sum_{i=0}^{m} a_i w_i + 0 \cdot v \implies u \in \operatorname{span}(S)$
> $\operatorname{span}(S - \{v\}) \supseteq \operatorname{span}(S))$
> $v \in \operatorname{span}(S - \{v\}) \implies v = \sum_{i=0}^{m} b_i w_i$
> $u \in \operatorname{span}(S) \implies \sum_{i=0}^{m} a_i w_i + \beta \cdot v = \sum_{i=0}^{m} a_i w_i + \beta \cdot \left(\sum_{i=0}^{m} b_i w_i\right) = \sum_{i=0}^{m} (a_i + \beta b_i) w_i \implies u \in \operatorname{span}(S - \{v\})$
>
> Por lo tanto $v \in \operatorname{span}(S - \{v\}) \implies \operatorname{span}(S - \{v\}) = \operatorname{span}(S)$.
>
> Para reducir el conjunto generador a una base se procede como sigue:
> Se inicializa el conjunto $S' = S$ y se revisan uno por uno los vectores de S:
> Suponiendo que se esta viendo el vector v
>
> - Si $v \in \operatorname{span}(S' - \{v\})$, entonces el conjunto pasa a ser $S' = S' - \{v\}$
> - Si no se deja S' como esta.
>   Después de este proceso, $\nexists v \in S' : \operatorname{span}(S' - \{v\}) = \operatorname{span}(S')$. El conjunto S' resultante es una base
> - Por el enunciado anterior, se cumple que $\operatorname{span}(S') = \operatorname{span}(S)$. S' genera a V.
> - $\nexists v \in S' : \operatorname{span}(S' - \{v\}) = \operatorname{span}(S')$ implica que no hay ningún vector de S' que sea combinación lineal de los demás y por lo tanto S' es un conjunto li.

Todo conjunto li se puede extender a una base de V

> **Todo conjunto li se puede extender a una base de V**
> Si S es un conjunto li de vectores de V, entonces se puede extender a una base.
>
> El proceso es como sigue, dado $S' = S$:
> - Si $\operatorname{span}(S') = V$, el proceso termina porque el conjunto ya es base
> - En caso contrario se toma un elemento v de $V - \operatorname{span}(S')$ y se añade a S', resultando $S' = S' \cup \{v\}$. S' sigue siendo li debido a que el elemento v añadido no es cl de ningun otro elemento de S'.

Todo espacio vectorial finito tiene una base

> **Todo espacio vectorial finito tiene una base**
> Todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.
>
> Hay 2 formas de probarlo:
>
> 1. Todo conjunto li se puede extender a una base de V, se toma el conjunto vacio(que es li) y se extiende a una base de V.

> 2. Todo conjunto generador se puede reducir a una base, se toma el espacio V mismo de vectores y se reduce hasta una base.

Unicidad de escritura de las bases

> **Unicidad de escritura de las bases**
> Sea una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de un espacio vectorial entonces:
>
> $$\forall u \in V, \exists ! a_1, \dots a_n : \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot v_i = u$$
>
> Mas aún, esta implicación es un si y solo si.
>
> $\implies$)
> Suponiendo que haya 2 formas de escribir al vector u con vectores de B:
> $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \sum_{i=0}^{n} a'_i v_i = u$
> $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i - \sum_{i=0}^{n} a'_i v_i = 0$
> $\sum_{i=0}^{n} (a_i - a'_i) v_i = 0$
> $a_i - a'_i = 0$(esto es debido a que B es un conjunto li)
> $a_i = a'_i$
>
> $\impliedby$)
> Como existe una cl de vectores de B que genera cualquier vector de U, B genera a V.
> Como existe una única forma de generar cada vector de V, existe una unica forma de generar el 0, la trivial con $a_i = 0$ para cada i. B es li.
> Por lo tanto B es una base.

Unidad 2

Caracterización de un monomorfismo

> **Caracterización de un monomorfismo**
> Una tl T es un monomorfismo(inyectiva) $\iff \ker(T) = \{0\}$
>
> $\implies$)
> Si T es un monomorfismo entonces $\forall u, v \in \text{Dom}(T) : T(u) = T(v) \implies u = v$
> $T(v) = 0 \iff T(v) = T(0) \iff v = 0$, por lo tanto $\ker(T) = \{0\}$
> $\impliedby$)
> $\ker(T) = \{0\}$
> $T(v) = T(u) \iff T(v) - T(u) = 0 \iff T(v - u) = 0 \iff v - u = 0 \iff v = u$

Dimension del espacio de TLs

> **Dimension del espacio de TLs**
> Sea V un ev con $\dim V = n$ y W un ev con $\dim W$:
>
> $$\dim(L(V, W)) = nm$$
>
> Dada $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de W.
>
> Una tl queda determinada por los valores que asume en una base, así que defino las tls
> $E_{i,j}(v_k) = \delta_{i,k} w_j$
> Estas tls asignan el vector v_i al vector w_j y todos los demás v son asignados al vector nulo.
>
> El conjunto $B = \{E_{i,j} : 0 \le i \le n, 0 \le j \le m\}$ es una base de $L(V, W)$:
>
> $\text{span}(B) \subseteq L(V, W)$
> $T \in L(V, W) \implies T$ esta definida para cada vector v_k
>
> $T(v_k) = \sum_{j=0}^m a_{k,j} w_j = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n \delta_{i,k} a_{i,j}\right) w_j = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n a_{i,j} \delta_{i,k} w_j = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n E_{i,j}(v_k)$
>
> $T \in \text{span}(B)$
>
> B es un conjunto li de vectores:
>
> Sea una cl de B tal que $T = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n a_{i,j} E_{i,j} = 0$(la tl nula), T es nula para todo vector de V:
> $T(v_k) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n a_{i,j} E_{i,j}(v_k) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n a_{i,j} \delta_{i,k} w_j = \sum_{j=0}^m a_{k,j} w_j = 0 \iff \forall a_{k,j}, a_{k,j} = 0$
>
> k asume valores en $[[0, n]]$ y j asume valores en $[[0, m]]$ de modo que las tls E_{ij} son todas li.

La imagen de un sev y su preimagen por una tl son sev

La imagen de un sev y su preimagen por una tl son sev
Dada una [transformacion lineal] $T : V \to W$ y dos espacios vectoriales $S \subseteq V$ y $R \subseteq W$:

1. $T(S) \subseteq W$
2. $T^{-1}(R) \subseteq V$
3. Prueba de 1)
   Dados $u, v \in T(S)$, $\exists u', v' \in S : T(u') = u, T(v') = v$
   $au + vb = aT(u') + bT(v') = T(au' + bv')$
   $au' + bv' \in S \therefore T(au' + bv') \in T(S)$
   $T(S)$ es sev
4. Prueba de 2)
   Dados $u, v \in T^{-1}(R), \exists u', v' \in R : T(u) = u', T(v) = v'$
   $au' + bv' \in R$
   $au' + bv' = aT(u) + bT(v) = T(au + bv)$
   $T(au + bv) \in R \implies au + bv \in T^{-1}(R)$
   $T^{-1}(R)$ es sev

La inversa de una tl es una tl

La inversa de una tl es una tl
Si T es una tl inversible, su inversa también es una tl

$T^{-1}(u + v) = T^{-1}(T(T^{-1}(u) + T^{-1}(v)) = T^{-1}(u) + T^{-1}(v)$

$T^{-1}(au) = T^{-1}(aT(T^{-1}(u))) = T^{-1}(T(aT^{-1}(u))) = aT^{-1}(u)$

Matriz de cambio de base

Matriz de cambio de base
Dado un vector v de V y $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ dos bases de V:

$$\exists C \in F^{n \times n}, C_{i,j} = ([v_j]^t_{B_2})_i : C[v]^t_{B_1} = [v]^t_{B_2}$$

Defino:
$a_i := \left([v]^t_{B_1}\right)_i$
$c_{i,j} = C_{i,j}$
$b_i = (C[v]^t_{B_1})_i = \sum_{k=0}^n c_{i,k} a_k$

$\sum_{i=0}^n b_i w_i = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n c_{i,k} a_k w_i = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^n c_{i,k} w_i = \sum_{k=0}^n a_k v_k = v$

$(C[v]^t_{B_1})_i = ([v]^t_{B_2})_i$

La matriz de cambio de base es única

Suponiendo que existen 2 matrices C y C' que cumplen que:

$$\forall v \in V : C[v]^t_{B_1} = C'[v]^t_{B_1}$$

$C = C'$ por la [propiedad cancelativa del producto matricial]

Propiedades adicionales

$C_{B_1B_2} :=$ la matriz de cambio de base entre 2 bases B_1 y B_2 de V

1. $C_{B_1B_3} = C_{B_2B_3} C_{B_1B_2}$
   $C_{B_2B_3} C_{B_1B_2} \cdot [v]^t_{B_1} = C_{B_2B_3} \cdot [v]^t_{B_2} = [v]^t_{B_3}$
   La igualdad se cumple debido a que la matriz de cambio de base es única

2. $C_{B_2B_1} = (C_{B_1B_2})^{-1}$
   La matriz de cambio de base es invertible debido a que todo vector de coordenadas en una base se puede reescribir de manera única en otra base con otras coordenadas(El sistema $C_{B_2B_1}x = [v]^t_{B_1}$ tiene una única solución).
   Después se tiene que:
   $[v]^t_{B_1} = I[v]^t_{B_1} = C_{B_2B_1}C_{B_1B_2}[v]^t_{B_1}$
   $I = C_{B_2B_1}C_{B_1B_2}$
   $(C_{B_1B_2})^{-1} = C_{B_2B_1}$
3. Toda matriz invertible es una matriz de cambio de base, $\forall A \in F^{n\times n} \text{ invertible }, \exists B_1, B_2 \text{ bases de } V : A = C_{B_1B_2}$
   A invertible implica que ninguna de sus columnas es cl de la otra(de lo contrario, $\det(A) = 0$), las columnas de A forman un conjunto li de n vectores(y por lo tanto un conjunto generador y base). Sea B la base que forman y E la base canónica de F^n, $A = C_{BE}$
4. Para una matriz invertible y una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, existe otra base $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ tal que $A = C_{BB'}$
   Defino la tl $T(v_i) = \sum_{k=0}^{n} A_{k,i}v_k$, T es un isomorfismo
   $T(v) = \sum_{k=0}^{n} A_{k,i}v_k = 0 \iff \forall k, A_{k,i} = 0 \vee v = 0$
   $\forall k, A_{k,i} = 0$ es falso porque A es invertible, $v = 0$ y T es un monomorfismo

   Defino ahora $w_i = T(v_i)$,
   Dado que T es un monomorfismo, preserva aquellos conjuntos que son li, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es li por lo tanto $B' = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es un conjunto li.

   $\dim(Im(T)) \not> n \wedge \dim(Im(T)) \geq n$, por lo tanto $\dim(Im(T)) = n$ y $Im(T) = V$, T es un epimorfismo.

   T resulta ser un isomorfismo de $V \to V$, por lo que preserva las bases, B' es una base de V
   $[v_i]_{B'} = \{A_{1,i}, \ldots, A_{n,i}\}$, A es la matriz de cambio de base entre B y B'
5. Para una matriz invertible y una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ existe otra base $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ tal que $A = C_{B'B}$
   $w_i := \sum_{j=0}^{n} A_{j,i}v_j$
   B' es una base:
   $\sum_{i=0}^{n} b_iw_i = 0 \iff \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_iA_{j,i}v_j = 0 \iff \sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{n} b_iA_{j,i})v_j = 0 \iff$
   $\forall j, \sum_{i=0}^{n} b_iA_{j,i} = 0 \iff \forall b_i = 0$(de lo contrario, las columnas de A son ld y A no es invertible)

   B' es un conjunto li, al tener cardinal n y ser $\operatorname{span}(B) \subseteq V$, B es un conjunto generador y por lo tanto una base.

   Luego, A es la matriz de cambio de base entre B' y B

Matriz de una transformación lineal

Matriz de una transformación lineal
Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ dos bases de V y W y $T \in L(V, W)$:

Defino $[T]_{B_1B_2}$ como $([T]_{B_1B_2})_{i,j} = [T(v_j)]_i$

Se cumple que $\forall v \in V, [T]_{B_1B_2}[v]^t_{B_1} = [T(v)]^t_{B_2}$

Defino:
$c_{i,j} = ([T(v_j)]_{B_2})_i$
$a_i = ([v]^t_{B_1})_i$
$b_i = ([T]_{B_1B_2}[v]^t_{B_1})_i = \sum_{k=0}^{k} c_{i,k}a_k$

$\sum_{k=0}^{n} c_{k,j}w_k = T(v_k)$

$\sum_{i=0}^{n} b_iw_i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} c_{i,k}a_kw_i = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{n} c_{i,k}w_i = \sum_{i=0}^{n} a_kT(v_k) = T(v_k)$

$(b_1, \ldots, b_n)$ es el vector de coordenadas de $T(v)$ en la base B_2

Propiedad cancelativa del producto matricial

Propiedad cancelativa del producto matricial
Dadas dos matrices $A, A' \in \mathbb{F}^{n\times n}$:

$$\forall x \in \mathbb{F}^n : Ax = A'x \iff A = A'$$

$\implies$)
$Ax = A'x \implies (A - A')x = 0$
$A \neq A' \implies$ Existe una columna de $A - A'$ que no es nula, suponiendo que la i-esima columna cumple esta propiedad entonces $(A - A') \cdot e_i \neq 0$
Por reducción al absurdo debe ser $A - A' = 0$ y por lo tanto $A = A'$.
$\impliedby$)
Trivial

Teorema de la dimension

Teorema de la dimension
Sea $T : V \to W$ una tl, se cumple que:

$$\dim(\ker(T)) + \dim(Im(T))) = \dim(V)$$

$k := \dim(ker(T))$
$n := \dim(V)$
Dada una base de $\ker(T)$, $\{v_1, \ldots, v_k\}$, la extiendo a una base de V usando los vectores $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.
$\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de $Im(T)$.

$\sum_{i=k+1}^n a_i T(v_i) = 0 \iff T(\sum_{i=k+1}^n a_i v_i) = 0 \implies \sum_{i=k+1}^n a_i v_i \in \ker(T)$

Por lo tanto
$\sum_{i=k+1}^n a_i v_i = \sum_{i=0}^k b_i v_i \implies \sum_{i=k+1}^n a_i v_i - \sum_{i=0}^k b_i v_i = 0 \implies \forall i, b_i = 0 \wedge a_i = 0$

Los vectores $T(v_i)$ son li.

Los $T(v_i)$ vectores generan $Im(T)$,
$\operatorname{span}(T(v_i)) \subseteq Im(T)$
$v \in Im(T) \implies \exists u \in V : T(u) = v$
$T(u) = T(\sum_{i=0}^n a_i v_i) \implies \sum_{i=0}^n a_i T(v_i) \implies \sum_{i=k+1}^n a_i T(v_i)$(Los v_i de 0 a k se cancelan por ser vectores de $\ker(T)$).
Luego $v \in \operatorname{span}(T(v_i))$.

$\dim(\ker(T)) = k$
$\dim(Im(T)) = n - k$
$\dim(V) = n$
$\dim(\ker(T)) + \dim(Im(T))) = \dim(V)$

Todo ev de dimension finita es equivalente a un espacio de tuplas

Todo ev de dimension finita es equivalente a un espacio de tuplas
Si V es un ev con dimension n, entonces es isomorfo a F^n

$E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $F^n((e_i)_j = \delta_{i,j})$
Dada una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, defino las siguientes tls

$T : V \to F^n$
$T(v_i) = e_i$

$S : F^n \to V$
$S(e_i) = v_i$

Se tiene que para $u \in F^n$ y $v \in V$:
$T(S(u)) = T(S(\sum_{i=0}^n a_i e_i)) = T(\sum_{i=0}^n a_i v_i) = \sum_{i=0}^n a_i e_i = u$
$S(T(v)) = S(T(\sum_{i=0}^n a_i v_i)) = S(\sum_{i=0}^n a_i e_i) = \sum_{i=0}^n a_i v_i = v$

T es inversa de S y viceversa, ambas son biyectivas y por lo tanto $V \overset{T}{\simeq} F^n$

Una tl queda determinada por los valores que asume en una base

> **Una tl queda determinada por los valores que asume en una base**
> Dada una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y un conjunto de vectores $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ de un ev V:
> $\exists! T : V \to W : T(v_i) = w_i \forall i \in [[1, n]]$
>
> Primero voy a probar que existe dicha tl:
> Dado un vector v de V, este se puede escribir de una única forma como:
> $v = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$, a_i son valores escalares.
>
> $T : V \to W$
> $T(\sum_{i=0}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i T(v_i)$ es una tl
>
> $T(\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i v_i + \sum_{i=0}^{n} b_i v_i) = T(\sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i + b_i) v_i) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i + b_i) T(v_i) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i T(v_i) + b_i T(v_i))$
> $= T(\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i v_i) + T(\sum_{i=0}^{n} b_i v_i) = \lambda T(\sum_{i=0}^{n} a_i v_i) + T(\sum_{i=0}^{n} b_i v_i)$
>
> T es la única transformación lineal que cumple con el enunciado, suponiendo que existe otra tl $\overline{T}(v)$ que cumple lo mismo
>
> $T(\sum_{i=0}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i T(v_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{T}(v_i) = \overline{T}(\sum_{i=0}^{n} a_i v_i)$
>
> Por principio de extensionalidad queda que $T = \overline{T}$

Unidad 3

Coordenadas de un vector en una base ortogonalñ

> **Coordenadas de un vector en una base ortogonalñ**
> Si V es un espacio vectorial con pi y $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal entonces $\forall v \in V$:
>
> $$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$
>
> Sea $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$
> $\langle v, u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, u_j \rangle = a_j ||v_j||^2$
> $a_j = \frac{\langle v, u_j \rangle}{||v_j||^2}$

Dimensión del espacio ortogonal

> **Dimensión del espacio ortogonal**
> Sea U sev de V(V es un $\mathbb{F}$-ev con pi) y $W = U^\perp$,
>
> $$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$$
>
> Sea B' una bon de $U = \{v_1, \ldots. v_k\}$, la extiendo a una base de V y luego aplico el proceso de ortonormalizacion de gramm-schmidt para convertirla en una bon $B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$
>
> $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es un conjunto li
> $u \in U^\perp \implies u \in V \implies u = \sum_{i=1}^{n} < u, v_i > v_i = \sum_{i=1}^{k} < u, v_i > v_i + \sum_{i=k+1}^{n} < u, v_i > v_i$
> $= \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot v_i + \sum_{i=k+1}^{n} < u, v_i > v_i = \sum_{i=k+1}^{n} < u, v_i > v_i \implies v \in span(\{v_{k+1}, \ldots, v_n\})$
>
> $v \in span(\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}) = u = \sum_{i=k+1}^{n} < u, v_i > v_i$
> $u \in U \implies u = \sum_{i=1}^{k} < u, v_i > v_i$
> $< u, v > = < \sum_{i=1}^{k} < u, v_i > v_i, \sum_{j=k+1}^{n} < u, v_j > v_j > =$
> $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} << u, v_i > v_i, < u, v_j > v_j >$
> $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} < u, v_i >< v_j, u >< v_i, v_j >$
> $= 0 \implies v \in U^\perp$
>
> $U^\perp = span(\{v_{k+1}, \ldots, v_n\})$
>
> $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$

Ortogonalidad implica independencia lineal

> **Ortogonalidad implica independencia lineal**
> Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores que no contiene al vector nulo entonces S es un conjunto linealmente independiente.
>
> Planteo: $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$
> $0 = \langle v_i, 0 \rangle = \left\langle v_i, \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} \langle v_i, v_j \rangle = \overline{a_j} ||v_i||^2$
> $\overline{a_j} = 0 \vee ||v_i||^2 = 0$, Como $v_i \neq 0 \; \forall i$ por hipotesis, $\overline{a_j} = 0$ y $a_j = 0 \; \forall j$
> S es li

Proposición 1

> **Proposición 1**
> Sea V un F-ev, $\dim_F(V) = n$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V . Entonces existe un único pi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V tal que la base B es ortonormal respecto de ese pi
>
> $\langle u, v\rangle = [u]_B \cdot [v]_B^*$ es el pi buscado.
>
> Es lineal en la primera variable
> $\langle au + w, v\rangle = [au + w]_B \cdot [v]_B^* = (a[u]_B + [w]_B) \cdot [v]_B^*$
> $= a[u]_B[v]_B^* + [w]_B[v]_B^* = a\langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$
> Es simétrico respecto al complemento:
> $\overline{[v]_B \cdot [u]_B^*} = \overline{[v]_B} \cdot [u]_B^t = ([u]_B \cdot [v]_B^*)^t = [u]_B \cdot [v]_B^*$
> La ultima igualdad surge de que $[u]_B \cdot [v]_B^*$ es un escalar
> Es definido positivo:
> $\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot \overline{z} = |z|^2 > 0$ si $z \neq 0$
> $([v]_B \cdot [v]_B^*) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \overline{v_i} = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 > 0$ si $v \neq 0$
>
> $i \neq j \implies < v_i, v_j >= [v_i]_B \cdot [v_j]_B^* = e_i \cdot e_j^* = 0$
> $i = j \implies < v_i, v_i >= [v_i]_B \cdot [v_i]_B^* = e_i \cdot e_i^* = 1$
>
> B es una bon en el pi definido

Unidad 4

Bloque de Jordan

> **Bloque de Jordan**
> Si $T \in L(V)$ con $\dim(V) = n$ es una matriz n pasos nilpotente entonces $m_T(X) = X^n$
> Como $gr(m) = gr(\chi)$, $\chi_T = m_T$
>
> $B = \{v, Tv, T^2v, \dots, T^{n-1}v\}$ es un conjunto li(si fuera ld entonces el polinomio minimal tendría grado $n-1$) de n vectores, por lo que es base de V.
>
> $i < n-1 \implies [T(T^iv)]_B = [T^{i+1}v]_B = e_{i+1}$
> $[T(T^{n-1})v]_B = [T^nv]_B = [0]_B$
>
> $$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Corolarios del teorema de Cayley-Hamilton

> **Corolarios del teorema de Cayley-Hamilton**
>
> Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, a partir del Teorema de Cayley-Hamilton se tiene lo siguiente:
> $gr(m_A) \leq n)$
> Trivial sabiendo que $m_A | \chi_A$
> $gr(m_A) = n \implies m_A = \chi_A)$
> A partir de la hipótesis por el algoritmo de la división se tiene que $\chi_A = m_A \cdot q(x) + r(x)$. $gr(q) = 0$ y $gr(r) = 0$ porque $m_A | \chi_A$ así que existe una constante α tal que $\chi_A = \alpha m_A$. Como m_A es mónico, $\alpha = 1$ y $m_A = \chi_A$.
> $\exists v \in \mathbb{F}^n : gr(m_v) = n \implies m_v = m_a = \chi_a)$
> Si $v = 0 \implies gr(m_v) = 0 \neq n$
> Si $v \neq 0$, puedo extender $\{v\}$ a una base de B de $\mathbb{F}^n$, entonces $m_a = mcm(m_{v_1}, \dots, m_{v_n})$ para $v_i \in B$. Los m_{v_i} con $v_i \neq v$ tienen que ser polinomios constantes $\neq 0$(sino $m_A > n$ lo cual es imposible). Además tienen que ser todos $m_{v_i} = 1$ porque sino no serian mónicos, por lo que $mcm(m_{v_1}, \dots, m_{v_n}) = m_v = m_A$ y como $gr(m_A) = n$, $m_v = m_A = \chi_A$.
> Si A es invertible entonces $A^{-1} \in \operatorname{span}(I, A, \dots, A^{n-1})$
> $\chi_A(A) = 0$ y $gr(\chi_A) = n \implies$ existen escalares $a_0, \dots, a_n$ tal que $\chi_A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i$

$\chi_A(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i = 0$
$A^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i A^i\right) = A^{-1}\cdot 0$
$\sum_{i=-1}^{n-1} a_{i+1}A^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}A^i + a_0A^{-1} = 0$
$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}A^i = -a_0A^{-1}$

```
$\chi_A(0) = \det(0I-A) = \det(A) = a_0 \neq 0$
$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} A^i = -a_0A^{-1}$
$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_0} A^i = A^{-1}$
$A^{-1} \in \Span(I,A,...,A^{n-1})$
```

A diagonalizable en $\mathbb{F}^{n\times n} \iff m_A$ tiene todas sus raices en $\mathbb{F}$ y son simples
$\implies)$
Si A es diagonalizable entonces existe una base B de $\mathbb{F}^n$ formada por autovectores de A.
$v\in B$ su polinomio minimal es $m_v(X) = X-\lambda\cdot I$ donde λ es el autovalor asociado a v
$(m_v(v) = m_v(A)v = (A-\lambda I)v = Av-\lambda v = \lambda v - \lambda v = 0)$.
Resulta $m_A = mcm\{m_v : v\in B\}$, m_A es un polinomio con raices simples en $\mathbb{F}$.
$\impliedby)$

Diagonalización caracterizada a partir de autoespacios

Diagonalización caracterizada a partir de autoespacios
Sea $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ y $\lambda_1,\dots\lambda_r$ autovalores distintos de A, son equivalentes:

1. A es diagonalizable
2. $\bigoplus_{i=0}^{n} E_{\lambda_i} = \mathbb{F}^n$
3. $\chi_A(x) = \sum_{i=0}^{n}(x-\lambda_i)^{a_i}$ con $a_i = \dim(E_{\lambda_i})$

$1 \implies 2)$
Si A es diagonalizable existe una base B de $\mathbb{F}^n$ formada por autovectores de A, de modo que algún autovector de la base tiene asociado un autovalor por lo que $\forall v\in B\exists\lambda : v\in E_\lambda$ y dado que B es una base de $\mathbb{F}^n$ y el menor sev que contiene a todos los vectores de B es su span, resulta $\mathbb{F}^n = \operatorname{span}(B)\subseteq\sum_{i=0}^{n} E_{\lambda_i}$. Como todos los $v\in\mathbb{F}^n$, $\sum_{i=0}^{n} E_{\lambda_i}\subseteq\mathbb{F}^n$ y resulta $\mathbb{F}^n = \sum_{i=0}^{n} E_{\lambda_i}$. El hecho de que los autoespacios se sumen de manera directa implica que $\mathbb{F}^n = \bigoplus_{i=0}^{n} E_{\lambda_i}$.
$2 \implies 3)$
$\bigoplus_{i=0}^{n} E_{\lambda_i} = \mathbb{F}^n$. Como se suman de manera directa la dimensión de la suma de dichos autoespacios es n.

```
[[La dimensión del autoespacio de un autovalor es siempre menor a su multiplicidad algebraica]], por
lo que $\sum_{i=0}^n \dim{E_{\lambda_i}} \leq \sum_{i=0}^n \text{mul}_{\chi_A}(\lambda_i) = n$(el
grado del polinomio caracteristico es n)
Por lo tanto se tiene que los polinomios $\sum_{i=0}^n (x-\lambda_i)^{\dim(\lambda_i)}$ y
$\sum_{i=0}^n (x-\lambda_i)^{\text{mul}_{\chi_A}(\lambda_i)}=\chi_{A}$ son iguales. (3) se cumple
```

$3 \implies 1)$
Sea B_i una base del autoespacio E_{λ_i} y $B = \bigcup_{i=0}^{r} B_i$, B es una base de $\mathbb{F}^n$ formada por autovectores de A,
B es un conjunto li: Dados dos ev U y V, si $U\cap V = \{0\} \implies B_U\cup B_V$ es li donde B_U es una base de U y B_V una base de V.
Sea $0 = \sum_{i=0}^{s} a_iu_i + \sum_{i=0}^{r} b_iu_i$ con $a_i, b_i\in\mathbb{F}$, $u_i\in U$ y $v_i\in V$ de aquí sigue que:
$\sum_{i=0}^{s} a_iu_i = -\sum_{i=0}^{r} b_iu_i = w$, $w\in U\cap V$ por hipótesis resulta $w = 0$
$0 = \sum_{i=0}^{s} a_iu_i \iff a_i = 0\forall i$
$0 = \sum_{i=0}^{r} b_iu_i \iff b_i = 0\forall i$
$B_U\cup B_V$ es li.
La suma de las dimensiones resulta ser n(por ser este el grado del polinomio característico) y como $E_i\subseteq\mathbb{F}^n$, la suma de los autoespacios es también un sev de $\mathbb{F}^n$. Por lo que B es un conjunto generador de $\mathbb{F}^n$ li formado por autovectores de A.
A es diagonalizable.

Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio minimal

> **Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio minimal**
> Sean $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ con $A \sim B$ entonces $m_A = m_B$
>
> Lema 1: $p \in \mathbb{F}[x], p(A) = 0 \iff m_A|p$
> $\implies$)
> p anula a A, $gr(m_a) \leq gr(p)$(sino m_a no tendria grado mínimo) por el algoritmo de la division existen polinomios q y r donde $p(x) = q(x)m_A(x) + r(x)$, $p(A) = q(A)m_A(A) + r(A) = r(A) = 0$. Luego $r(x) = 0$(sino r tendria menor grado que el minimal). $m_a|p$.
> $\impliedby$)
> $m_A|p$, por lo que existe q tal que $p(x) = q(x)m_A(x)$ y $p(A) = q(A)m_A(A) = 0$
>
> Lema 2: $A \sim B \implies p(A) \sim p(B)$:
> $A \sim B \implies \exists C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ invertible : $A = CBC^{-1}$
> $p(X) = \sum_{i=0}^{gr(p)} \alpha_i X^i$
> $p(A) = \sum_{i=0}^{gr(p)} \alpha_i A^i = \sum_{i=0}^{gr(p)} \alpha_i (CBC^{-1})^i$
> $(CBC^{-1})^i = CB^iC^{-1}$
> Por inducción en i:
> CB) $i = 0$
> $(CBC^{-1})^0 = I = CC^{-1} = CIC^{-1} = CB^0C^{-1}$
> HI) $(CBC^{-1})^i = CB^iC^{-1}$
> PI)
> $(CBC^{-1})^{i+1} = (CBC^{-1})^i CBC^{-1} \stackrel{HI}{=} CB^iC^{-1}CBC^{-1} = CB^{i+1}C^{-1}$
> $\sum_{i=0}^{gr(p)} \alpha_i (CBC^{-1})^i = \sum_{i=0}^{gr(p)} \alpha_i CB^iC^{-1} = C\left(\sum_{i=0}^{gr(p)} \alpha_i B^i\right)C^{-1} = Cp(B)C^{-1}$
> $p(A) \sim p(B)$
>
> Lema 3: $A \sim B \implies p(A) = 0 \iff p(B) = 0$
> Por lema 2:
> $p(A) = Cp(B)C^{-1}$
> $0 = Cp(B)C^{-1}$
> $0 = p(B)$
> La reversa se prueba igual.
>
> $m_A(A) = 0 \stackrel{\text{Lema 3}}{\iff} m_A(B) = 0 \stackrel{Lema1}{\iff} m_B|m_A$
> $m_B(A) = 0 \stackrel{\text{Lema 3}}{\iff} m_B(B) = 0 \stackrel{Lema1}{\iff} m_A|m_B$
>
> $m_A = q_1 m_B$
> $m_B = q_2 m_a$
>
> $m_A = q_1 m_B = q_1 q_2 m_A \implies q_1 q_2 = 1 \implies q_1 = q_2^{-1}$
>
> q_1 y q_2 tienen grado 1(son escalares), como ambos minimales son monicos la única opción posible es que $q_1 = 1$ y $q_2 = 1^{-1} = 1$ por lo que $m_A = m_B$

El polinomio minimal como un mcm

> **El polinomio minimal como un mcm**
> Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{F}^n$ entonces:
>
> $$m_A = mcm\{m_{v_1}, \ldots, m_{v_n}\}$$
>
> Sea $p = mcm\{m_{v_1}, \ldots, m_{v_n}\}$.
>
> Lema: $q \in \mathbb{F}[X], q(v) = 0 \iff m_v|q$
> $\implies$)
> Sea q un polinomio que anula a v, por lo que $gr(m_v) \leq gr(q)$
> Por el algoritmo de la división existen polinomios c, r tal que: $q(x) = m_v(x)c(x) + r(x)$
> $q(v) = m_v(v)q(v) + r(v) = r(v) = 0$, $gr(r) \leq gr(m_v)$ por lo que la única opción es que $r(v) = 0$(sino m_v no es minimal). Por

lo tanto: $m_v|q$
$\Longleftarrow$)
$m_v|q \implies \exists c \in \mathbb{F}[X] : q(x) = m_v(x)c(x) \implies q(v) = m_v(v)c(v) = 0$

$m_A(v) = m_A(A)v = 0$, $m_v|m_A$

Entonces $\forall m_{v_i} : m_{v_i}|m_A$. Por lo que $p|m_A$

Sea $v \in \mathbb{F}^n$ tal que para ciertos escalares $a_1, \dots, a_n$: $v = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$

$p(v) = p(A)v = p(A)\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \sum_{i=0}^{n} a_i p(A)v_i = \sum_{i=0}^{n} a_i p(v_i)$

$m_{v_i}|p \implies p(v_i) = 0$, por lo tanto $\sum_{i=0}^{n} a_i p(v_i) = 0$.
Como $\forall A \in \mathbb{F}^{n\times n}, p(A)v = 0$ por la propiedad cancelativa del producto matricial, $p(A) = 0$. $m_A|p(A)$ y resulta
$m_A = p = mcm\{m_{v_1}, \dots, m_{v_n}\}$

La dimensión del autoespacio de un autovalor es siempre menor a su multiplicidad algebraica

La dimensión del autoespacio de un autovalor es siempre menor a su multiplicidad algebraica
Sea λ un autovalor de la matriz A y r su multiplicidad como raíz de χ_A

$$\dim(E_\lambda) \leq r$$

Sea $T(x) = Ax$ una tl de $\mathbb{F}^n$ a $\mathbb{F}^n$.

Existe una base $B_\lambda = \{v_1, \dots, v_s\}$ de E_λ, extiendo dicha base a una base B de $\mathbb{F}^n$, se tiene que:
$v_k \in B_\lambda \implies Av_k = \lambda v_k \implies T(v_k) = \lambda v_k \implies [T(v_k)]_B = [\lambda v_k]_B = \lambda e_k$

Y resulta:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda I_s & | & B \\ \hline 0 & | & C \end{pmatrix}$$

y

$$x \cdot I - [T]_B = \begin{pmatrix} (x-\lambda)I_s & | & .B \\ \hline 0 & | & xI_{n-s} - C \end{pmatrix}$$

Y $\chi_{[T]_B}(x) = \det(xI - [T]_B) = (x-\lambda)^{\dim(E_\lambda)} \cdot \det(xI_s - C)$(Desarrollo el determinante por la 1era columna)

$[T]_B \sim A$ por lo que $\chi_{[T]_B} = \chi_A$. Dado que es posible que $\det(xI_s - C)$ tenga a λ como raiz, resulta $\dim(E_\lambda) \leq r$

Lema tecnico

Lema tecnico
Si $T \in L(V)$ es k pasos nilpotente($T^k = 0$) entonces

$$\{0\} \subset \ker(T) \subset \ker(T^2) \subset \dots \subset \ker(T^k) = V$$

$\ker(T^k) = \ker(\{0\}) = V$
$\ker(T^i) \subset \ker(T^{i+1}))$
$v \in \ker(T^i) \implies T^i(v) = 0 \implies T(T^i(v)) = T(0) \implies T^{i+1}(v) = 0 \implies v \in \ker(T^{i+1})$
Suponiendo que $\ker(T^i) = \ker(T^{i+1})$:
$v \in \ker(T^{i+2})$
$\implies$
$T^{i+2}(v) = 0$
$\implies$
$T^{i+1}(T(v)) = 0$
$\implies$
$T(v) \in \ker(T^{i+1})$

$\implies$
$T(v) \in \ker(T^i)$
$\implies$
$T^i(T(v)) = 0$
$\implies$
$T^{i+1}(v) = 0$
$\implies$
$v \in \ker(T^{i+1})$
$\left.\begin{array}{l}\ker(T^{i+2}) \subseteq \ker(T^{i+1}) \\ \ker(T^{i+1}) \subseteq \ker(T^{i+2})\end{array}\right\} \implies \ker(T^i) = \ker(T^{i+1}) = \ker(T^{i+2})$
Por lo que

$$\ker(T^i) = \ker(T^{i+1}) = \ker(T^{i+2}) = \cdots = \ker(T^k) = V$$

$T^i = 0$, asi que T es $i < k$ pasos nilpotente, absurdo.
$\ker(T^i) \neq \ker(T^{i+1}) \implies \ker(T^i) \subset \ker(T^{i+1})$

Los autoespacios se suman de manera directa

Los autoespacios se suman de manera directa
Dados dos autoespacios $E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$$

Sea $v \in E\lambda_1 \cap E_{\lambda_2}$, $Av = \lambda_1 v = \lambda_2 v \implies (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0 \implies v = 0 \vee \lambda_1 = \lambda_2 \implies v = 0$

Los autovalores de una matriz son raíces del polinomio minimal

Los autovalores de una matriz son raíces del polinomio minimal
Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\lambda \text{ autovalor de } A \iff \lambda \text{ es raiz de } m_A$$

$\implies$)
Por el algoritmo de la division, existen $Q(X)$ y $R(X)$ polinomios en $\mathbb{F}$ tal que $m_A(X) = (X - \lambda I)Q(X) + R(X)$.
$0 \leq gr(R) < gr(X - \lambda I)$ por lo que $R(X) = rI$ es un polinomio constante
$m_A(A) = (A - \lambda I)Q(X) + rI = 0$
Sea v un autovector asociado a λ
$(A - \lambda I)Q(X) + rI = 0$
$((A - \lambda I)Q(X) + rI)v = 0v = 0$
$((A - \lambda I)Q(X) + rI)v = (A - \lambda I)Q(X)v + rIv = (Av - \lambda Iv)Q(X) + rIv = (\lambda v - \lambda v)Q(X) + rv = rv$
$rv = 0$, como $v \neq 0$ por ser un autovector resulta $r = 0$ y por lo tanto $(X - \lambda I)|m_A(X)$. λ es raíz de m_A

$\impliedby$)
Como m_A tiene a λ como raíz, $m_A(X) = (X - \lambda I)C(X)$ con $C(X)$ un polinomio de grado menor a m_A. Por lo que $m_A(A) = (A - \lambda I)C(A) = 0$. $C(A) \neq 0$ por ser un polinomio de menor grado al minimal. Esto implica que existe un vector w tal que $C(A) \cdot w = v \neq 0$.
$(A - \lambda I)C(A) \cdot w = 0 \cdot w$
$(A - \lambda I)v = 0$
v es un autovector de A asociado al autovalor λ. λ es un autovalor de λ

Polinomio minimal de una matriz

Polinomio minimal de una matriz
Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, existe un unico polinomio p con coeficientes en $\mathbb{F}$ que anula a A, es monico y tiene grado minimo.

Siempre existe un polinomio que anula a una matriz dada, sea $H_A = \{gr(p) : p(A) = 0\}$(el conjunto formado por los grados de los polinomios que anulan a A). H_A es no vacio y es un subconjunto de $\mathbb{N}$ acotado inferiormente, por lo que tiene un elemento minimo. Sea $q(x)$ un polinomio que anula a A y $gr(q) = \min H_A$ y α su coeficiente principal, el polinomio $h(x) = \frac{q(x)}{\alpha}$ es el polinomio monico y de grado minimo buscado.

Para probar unicidad, suponiendo que hay 2 polinomios $q(x)$ y $q'(x)$ que cumplen lo pedido, se tiene que los 2 tienen el mismo grado. Sea r el grado de los mismos, el polinomio $h(x) = q(x) - q'(x)$ tiene grado $r - 1 > 0$ y $h(A) = q(A) - q(A') = 0$, lo cual es absurdo porque q es el polinomio de menor grado que cumple lo pedido. Por lo tanto $q(x) = q'(x)$.

El polinomio q se denomina polinomio minimal de A y se denota m_A

Potencia de un bloque de Jordan

Potencia de un bloque de Jordan
Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ es un bloque de Jordan de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir $A_{ij} = \delta_{i+1,j}$
Entonces $(A^k)_{ij} = \delta_{i+k,j}$

Por inducción en la dimensión de la matriz:
CB) $n = 2$
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
La hipótesis se cumple.
HI) $A_{ij} = \delta_{i+1,j} \implies (A^k)_{ij} = \delta_{i+k,j}$
PI)
$A^{n+1} = A \cdot A^n$
$(A \cdot A^n)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} A_{ik} \cdot A^n_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i+1,k} \cdot \delta_{k+n,j} = \delta_{i+n+1,j}$

Por inducción: $(A^k)_{ij} = \delta_{i+k,j}$

Corolario: Si A es un bloque de Jordan $n \times n$, $ran(A^k) = n - k$

Potencia de un bloque de Jordan general

Potencia de un bloque de Jordan general
Si $A \in \mathbb{F}^{p\times p}$ es un bloque de Jordan asociado al autovalor λ:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Es decir: $A_{ij} = \delta_{i+1,j} + \delta_{i,j}\lambda$, entonces $(A^n)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+n-k,j}\binom{n}{k}\lambda^k$

Por inducción en los naturales:

CB)
$n = 2$
$A^2 = A \cdot A$
$A^2_{ij} = (\delta_{i+1,k} + \delta_{ik}\lambda)(\delta_{k+1,j} + \delta_{kj}\lambda)$
$= \delta_{i+1,k}\delta_{k+1,j} + \delta_{ik}\lambda\delta_{k+1,j} + \delta_{i+1,k}\delta_{kj}\lambda + \delta_{ik}\delta_{kj}\lambda^2$
$= \delta_{i+2,j} + \delta_{i+1,j}\lambda + \delta_{i+1,j}\lambda + \delta_{ij}\lambda^2$
$= \delta_{i+2-0,j}\binom{2}{0}\lambda^0 + \delta_{i+2-1,j}\binom{2}{1}\lambda^1 + \delta_{i+2-2,j}\binom{2}{2}\lambda^2$
$= \sum_{k=0}^{2} \delta_{i+2-k,j}\binom{2}{k}\lambda^k$

HI) $A_{ij} = \delta_{i+1,j} + \delta_{i,j}\lambda \implies (A^n)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+n-k,j}\binom{n}{k}\lambda^k$

PI)
$A^{n+1} = A \cdot A^n$
$A^{n+1}_{ij} = \sum_{s=1}^{p} A_{is}{A^n}_{sj} = \sum_{s=1}^{p}(\delta_{i+1,s} + \delta_{i,s}\lambda)(\sum_{k=0}^{n} \delta_{s+n-k,j}\binom{n}{k}\lambda^k)$
$= \sum_{s=1}^{p}\sum_{k=0}^{n} \delta_{i+1,s}\delta_{s+n-k,j}\binom{n}{k}\lambda^k + \sum_{s=1}^{p}\sum_{k=0}^{n} \delta_{i,s}\lambda \cdot \delta_{s+n-k,j}\binom{n}{k}\lambda^k$
$= \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+n+1-k,j}\binom{n}{k}\lambda^k + \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+n-k,j}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}$
$= \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+n+1-k,j}\binom{n}{k}\lambda^k + \sum_{k=1}^{n+1} \delta_{i+n-(k-1),j}\binom{n}{k-1}\lambda^k$
$= \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+n+1-k,j}\binom{n}{k}\lambda^k + \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+n+1-k,j}\binom{n}{k-1}\lambda^k + \delta_{i+n-(n+1-1),j}\binom{n}{n+1-1}\lambda^{n+1}$
$= \delta_{ij}\binom{n}{n}\lambda^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+n+1-k,j}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)\lambda^k$
$= \delta_{i+(n+1)-(n+1),j}\binom{n+1}{n+1}\lambda^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+n+1-k}\binom{n+1}{k}\lambda^k$
$= \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+n+1-k}\binom{n+1}{k}\lambda^k$
■

Siempre existe un polinomio que anula a una matriz dada

Siempre existe un polinomio que anula a una matriz dada
Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ existe un polinomio p con coeficientes en $\mathbb{F}$ que la anula, es decir $\forall A \in \mathbb{F}^{n\times n}\ \exists p \in \mathbb{F}[x] : p(A) = 0$.

$\mathbb{F}^{n\times n}$ es un ev que tiene dimensión n^2, esto implica que $n^2 + 1$ elementos cualquiera son ld.

Sea $S = \{A^i : i \in [\![0, n]\!]\}$, S tiene $n^2 + 1$ elementos, por lo que es ld y existen $a_0 \dots a_{n^2} \in \mathbb{F}$ tal que $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot A^i = 0$. El polinomio $p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot A^i$ es el polinomio buscado que anula a A

Subespacios invariantes

Subespacios invariantes
Un sev $U \subset V$ es un subespacio invariante por una tl $T \in L(V)$ si $T(U) \subseteq U$

$\ker(T)$ es invariante por T)
$v \in ker(T) \implies T(v) = 0$ y $0 \in ker(T)$ por lo tanto $T(\ker(T)) \subseteq ker(T)$
V es invariante por T)
El codominio de T es V por lo que $im(T) = T(V) \subseteq V$
U es T invariante con $\dim(U) = 1 \iff U = span(v)$ donde v es un autovector de T
$\implies$)
$\dim(U) = 1 \implies U = span(v)$ con $v \in \mathbb{V}$.
U es T invariante por lo que si $w \in U \implies T(w) \in U$
$T(w) = w'$
$\dim(U) \neq 0 \implies \exists w \in U : w \neq 0$
Tomando $w \neq 0$
$T(w) = w'$
$T(\lambda_1 v) = \lambda_2 v$
$\lambda_1 T(v) = \lambda_2 v$
$T(v) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v$, v es un autovector de T
$\impliedby$)
$U = span(v)$, $u \in U \implies \exists\lambda : u = \lambda v$
v autovector de T

$\forall u \in U, T(u) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda \cdot \rho \cdot v \in U$
U es T-invariante
U, W T-invariantes $\implies$ $U \cap W$ y $U + W$ son T-invariantes:
$v \in U \cap W \implies v \in U \wedge v \in W \implies T(v) \in U \wedge T(v) \in W \implies T(v) \in U \cap W.$
$v \in U + W \implies v = u + w, u \in U \wedge w \in W \implies T(v) = T(u) + T(w), T(u) \in U \wedge T(w) \in W \implies T(v) \in U + W$
Sea $T \in L(V)$, $U \subseteq V$ T-invariante y $T_U \in L(U)$ T restringida a U entonces:
$m_{T_U} | m_T)$
Sea $B_u = \{v_1, \dots, v_s\}$ base de U, extiendo a una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V:
$m_T = mcm(m_{v_1}, \dots, m_{v_n})$
$m_{v_i} | m_T$ asi que $m_{T_U} = mcm(m_{v_1}, \dots m_{v_s}) | m_T$
$\chi_{T_U} | \chi_T)$
Sea $B_u = \{v_1, \dots, v_s\}$ base de U, extiendo a una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V:
$v \in B_u \implies T(v) \in U$ asi que se puede escribir como cl de vectores de B_U $T(v) = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i v_i + \sum_{j=s+1}^{n} 0 \cdot v_j$
$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_U]_{B_U} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$
$XI_n - [T]_B = \begin{pmatrix} XI_s - [T_U]_{B_U} & -B \\ 0 & XI_{n-s} - C \end{pmatrix}$
$\chi_T(X) = \det(XI_n - [T]_B) = \det(XI_s - [T_U]_{B_U}) \det(XI_{n-s} - C) = \chi_{T_U}(X) Q(X)$
$\chi_{T_U} | \chi_T$

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema de Cayley-Hamilton
Una matriz es anulada por su polinomio característico

Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $T(x) = Ax$, $v \in \mathbb{F}^n$ y k un entero tal que el conjunto $\{v, Tv, T^2v, \dots T^k v\}$ es li. $\{v, Tv, T^2v, \dots T^k v, T^{k+1}v\}$ es ld y existen escalares $a_0, \dots, a_k$ tal que $0 = \sum_{i=0}^{k} a_i T^i v + T^{k+1} v$ y además $\sum_{i=0}^{k} -a_i T^i v = T^{k+1}$.
$\sum_{i=0}^{k} a_i T^i v + T^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} a_i A^i v + A^{k+1} v = (\sum_{i=0}^{k} a_i A^i + A^{k+1}) v = 0$
$m_v(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot X^i + X^{k+1}$. Es el polinomio minimal del vector v.

Extiendo el conjunto li a una base de $\mathbb{F}^n$ $B = \{v, Tv, T^2v, \dots, T^k v, w_{k+2}, \dots, w_n\}$

Voy a escribir $[T]_B$, para un cierto i dado:

$$[T(T^i v)]_B = [T^{i+1} v] = \begin{cases} e_{i+1} & 1 \le i < k \\ (a_1, \dots a_k, 0, \dots 0) & i = k \end{cases}$$

$T^{i+1} v \in \mathbb{F}^n$, por lo tanto queda:

$$[T]_B = \left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & -a_0 & | & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & -a_1 & | & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & | & -a_2 & | & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & | & -a_3 & | & N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & | & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & | & -a_k & | & \\ \hline & & 0 & & & | & 0 & | & M \end{array}\right)$$

$$XI - [T]_B = \left(\begin{array}{ccccccccc} X & 0 & 0 & \dots & 0 & | & a_0 & | & \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & | & a_1 & | & \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & | & a_2 & | & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & | & -N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & | & a_3 & | & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & | & X + a_k & | & \\ \hline & & 0 & & & | & 0 & | & XI_{n-(k+1),n-(k+1)} - M \end{array}\right)$$

Lema: Si $M \in \mathbb{F}^{n \times n}$ es una matriz por bloques de la forma $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ entonces $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$

Suponiendo que A es una matriz $r \times r$.
Por definición: $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} M_{i\sigma(i)}$

Donde

$$M_{i\sigma(i)} = \begin{cases} a_{i\sigma(i)} & i \le r \wedge \sigma(i) \le r \\ b_{i,\sigma(i)-r} & i \le r \wedge \sigma(i) > r \\ 0 & i > r \wedge \sigma(i) \le r \\ d_{i-r,\sigma(i)-r} & i > r \wedge \sigma(i) > r \end{cases}$$

Si $\sigma(i) > r \wedge \sigma(i) \le r$ se tiene que $sgn(\sigma)M_{i\sigma(i)} = 0$, por lo que esta permutación no cuenta para el determinante. Así que las permutaciones σ que cuentan para el determinante tienen que mandar elementos $> r$ a elementos $> r$. Esto también garantiza que la misma permutación tiene que mandar elementos $\le r$ a elementos $\le r$(sino la permutacion puede ser no inyectiva, lo cual es imposible). Asi que las permutaciones $\sigma \in S_n$ se puede representar como una combinación de dos permutaciones $\pi \in S_r$ y $\tau \in S_{n-r}$ donde:

$$\sigma(i) = \begin{cases} \pi(i) & i \le r \\ \tau(i-r) & i > r \end{cases}$$

Respecto al signo de la permutación σ, la cantidad de transiciones necesarias para representar σ es $\text{cantidad de transiciones para } \pi + \text{cantidad de transciciones para } \tau$ por principio de la suma. Así, si π y τ son ambas impares o ambas pares σ es par y si una es par y la otra impar entonces σ es par por lo tanto $sgn(\sigma) = sgn(\pi) \cdot sgn(\tau)$.
Luego $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} M_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{r} M_{i\sigma(i)} \prod_{i=r+1}^{n} M_{i\sigma(i)}$
$= \sum_{\pi \in S_r, \tau \in S_{n-r}} sgn(\pi) \cdot sgn(\tau) \prod_{i=1}^{r} a_{i\pi(i)} \prod_{i=r+1}^{n} d_{i\tau(i)}$
$= \left(\sum_{\pi \in S_r} sgn(\pi) \prod_{i=1}^{r} a_{i\pi(i)}\right) \left(\sum_{\tau \in S_{n-r}} sgn(\tau) \prod_{i=r+1}^{n} d_{i\tau(i)}\right)$
$= \det(A) \cdot \det(D)$
■

Por lo tanto:

$$\det(XI - [T]_B) = \det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & a_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & X + a_k \end{pmatrix} \cdot \det(XI_{n-(k+1),n-(k+1)} - M)$$

$$\det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & a_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & X + a_k \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & X \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & a_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_k \end{pmatrix} = X^{k+}$$

$$M := \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X & a_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_k \end{pmatrix}$$

$\det M \overset{\text{Desarrollo por la k+1-esima columna}}{=} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+1+i+1} a_i \det(M(i+1|k+1))$
$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} a_i \det(M(i+1|k+1))$
$M(i|k+1)_{s,t} = \begin{cases} M_{s,t} & s < i \\ M_{s+1,t} & s \ge i \end{cases}$
$M(i|k+1)_{s,s} = \begin{cases} M_{s,s} & s < i \\ M_{s+1,s} & s \ge i \end{cases} = \begin{cases} X & s < i \\ -1 & s \ge i \end{cases}$
$M(i|k+1)$ es triangular superior, por lo que $\det(M(i+1|k+1)) = X^{i-1} \cdot (-1)^{k-i+2}$

$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i+1+1} a_i \det(M(i+1|k+1)) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} a_i X^{i-1} (-1)^{k-i}$
$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{2k} a_i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{k} a_i X^{i-1}$

Entonces queda que:
$\det(XI - [T]_B) = (T^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} a_i X^{i-1})(\det(XI_{n-(k+1),n-(k+1)} - M)$
$\chi_A(X) = m_v(X) Q(X)$
$m_v(X) | \chi_A(X)$

> En particular, los polinomios minimales de los vectores de la base canónica dividen a χ_A, por lo que $m_A = mcm(m_{e_1}, \ldots, m_{e_n}) | \chi_A$ y resulta $chi_A(X) = 0$
>
> ■

Unidad 5

Aplicación dual

> **Aplicación dual**
> $T \in L(V, W)$ entonces se define $T^* \in L(W^*, V^*)$ como
>
> $$(T^*(\varphi))(v) = \varphi(T(v))$$
>
> ## Algebra de aplicaciones duales
>
> 1. $S, T \in L(V, W) \implies (aS + bT)^* = aS^* + bT^*$
> $v \in V$
> $(aS + bT)^*(\varphi)(v) = \varphi((aS + bT)(v)) = \varphi(aS(v) + bT(v))$
> $= a\varphi(S(v)) + b\varphi(T(v)) = aS^*(v) + bT^*(v)$
> 2. $T \in L(U, V), S \in L(V, W) \implies (S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
> $((S \circ T)^*(\varphi))(u) = \varphi((S \circ T)(U)) = \varphi(S(T(u)))$
> $(T^* \circ S^*)(\varphi)(u) = (T^*(S^*(\varphi)))(u)$
> $= T^*(\varphi(S(u))) = \varphi(S(T(u)))$

Aplicaciones, teorema 1

> **Aplicaciones, teorema 1**
> V un $\mathbb{F}$-ev con pi, $\dim(V) = n, T \in L(V)$. Son equivalentes:
>
> 1. Existe B bon de V tal que $T(B)$ bon de V .
> 2. $\forall v, u \in V$, $< T(v), T(u) >$ = $< v, u >$.
> 3. $\forall B$ bon de V , $T(B)$ bon de V
> 4. $\forall v \in V$, $||T(v)|| = ||v||$
> 5. $T^* \circ T = T \circ T^* = Id_V$
>
> $1 \implies 2)$
> Sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bon de V tal que $T(B)$ es bon de V
> $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$
> $w = \sum_{j=1}^n b_j v_j$
> $< v, w >= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \overline{b_j} < v_i, v_j >$
> $= \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_j} ||v_i||^2 = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_j}$
> $< T(v), T(w) >= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i T(v_i), \sum_{j=1}^n b_j T(v_j) \right\rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_j} =< v, w >$
$2 \implies 5)$
$< v, u >=< T(v), T(u) >=< v, T^*(T(u)) >$
$< v, u - T^*(T(u)) = 0$
Tomando $v = u - T^*(T(u))$:
$||u - T^*(T(u))|| = 0$
$u = T^*(T(u))$
$T^* \circ T = Id_V$
$(T^* \circ T)^* = Id_V^*$
$T \circ T^* = Id_V$
Se cumple (5)
$5 \implies 4)$
$||T(v)|| = \sqrt{\langle T(v), T(v) \rangle} = \sqrt{\langle v, (T^* \circ T)(v) \rangle}$
$= \sqrt{\langle v, v \rangle} = ||v||$
Se cumple (4)
$4 \implies 3)$
Sea $B = \{u_1, \dots u_n\}$ una bon de V
$T(B)$ es un conjunto normalizado
T es un isomorfismo:
Si $T(v) = 0$ entonces:
$0 = ||T(v)|| = ||v||$
$v = 0$
$\ker(T) = \{0\}$, T es un monomorfismo y un endomorfismo. Por lo tanto T es un isomorfismo.
Como T es un isomorfismo, T preserva bases
Por las identidades de polarización
$||u_i + iu_j|| = ||T(u_i + iu_j)|| = ||T(u_i) + iT(u_j)$
Sea $i \neq j$:
$0 =< u_i, u_j >= 1/4||u_i + u_j||^2 - 1/4||u_i - u_j||^2 + i/4||u_i + iu_j|| - i/4||u_i - iu_j||$
$= 1/4||T(u_i) + T(u_j)||^2 - 1/4||T(u_i) - T(u_j)||^2 + i/4||T(u_i) + iT(u_j)|| - i/4||T(u_i) - iT(u_j)||$
$=< T(u_i), T(u_j) >$
$T(B)$ es una bon
Se cumple (3)
$3 \implies 1)$
Trivial

Base dual

Base dual
Si V es un $\mathbb{F}$-ev y su base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $V^* = L(V, \mathbb{F})$ su espacio dual, existe una única base $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ base de V^* tal que $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$

Sea $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, cada φ_i es una tl bien definida de $L(V, \mathbb{F})$ ya que una tl queda determinada por los valores que asume en una base.

B^* es li, sean $a_1, \dots, a_n$ escalares tal que $T = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i = 0$ la tl nula entonces para cada $v_j \in B$
$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j = 0$
$a_j = 0$ para todo v_j. B^* es un conjunto li y al ser $|B^*| = \dim(V)$, B^* es una base de V^*

Revertir base dual

Sea $B' = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ una base de V^*, existe una base B de V tal que $B^* = B'$

Sea B_2 una base de V y B_2^* su base dual

NO SE

Ejercicio 13 practica

Ejercicio 13 practica
V espacio vectorial con pi, $T \in L(V)$:

$$\ker(T^*) = Im(T)^\perp$$

$v \in \ker(T^*) \implies T^*(v) = 0 \implies \forall w \in V :< w, T^*v >= 0$
$\implies \forall w \in V :< Tw, v >= 0 \implies v \in Im(T)^\perp$
$v \in Im(T)^\perp \implies \forall w \in V :< Tw, v >= 0 \implies \forall w \in V :< w, T^*v >= 0$
En particular para $w = T^*v$, $||T^*v|| = 0 \implies T^*v = 0 \implies v \in \ker(T^*)$

$\ker(T^*) = Im(T)^\perp$

Ejercicio 15 practica

Ejercicio 15 practica
Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $S, T \in L(V)$ autoadjuntas. Probar que $S \circ T$ es autoadjunta si y solo si $S \circ T = T \circ S$.

$S \circ T = (S \circ T)^* \iff S \circ T = T^* \circ S^* \iff S \circ T = T \circ S$

Ejercicio 9 practica

Ejercicio 9 practica
Sea V un espacio vectorial y sea $v \in V$. Entonces v induce una aplicación $L_v : V^* \to \mathbb{F}$ definida por

$$L_v(f) = f(v)$$

L_v es lineal)
$f, g \in V^*$
$a, b \in \mathbb{F}$
$L_v(af + bg) = (af + bg)(v) = af(v) + bg(v) = aL_v(f) + bL_v(g)$
Si V es de dimensión finita y $v \neq 0$ entonces existe $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$)
Sea $B = \{v, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}$ una base de V que incluye a v, existe una base de $V^* = \{\varphi_v, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ donde
$\varphi_v(w) = \begin{cases} 1 & w = v \\ 0 & w \neq v \end{cases}$ y $\varphi_i(w) = \begin{cases} 0 & w = v \\ 1 & w = v_i \\ 0 & w \neq v \wedge w \neq v_i \end{cases}$
$\varphi_v \in V^*$ y $\varphi_v(v) \neq 0$, la afirmación es verdadera.
Si V es de dimensión finita, la aplicación $\Omega(v) = L_v$ es un isomorfismo de V en V^{**})
$\ker(\Omega) = \{v \in V : \Omega(v) = 0\} = \{v \in V : \Omega(v) = 0\}$ (0 es la transformación nula)
$v \neq 0$ existe f tal que $L_v(f) \neq 0$ por lo que L_v es distinta de la transformación nula.
$\ker(\Omega) = \{0\}$
Ω es un monomorfismo
$\dim(V^{**}) = \dim(L(V^*, \mathbb{F})) = \dim(L(L(V, \mathbb{F}), \mathbb{F}), \mathbb{F})$
$= \dim(L(V, \mathbb{F})) \cdot \dim(\mathbb{F}) = \dim(V) \cdot \dim(\mathbb{F}) \cdot \dim(\mathbb{F}) = \dim(V)$
Sigue que Ω es un isomorfismo
Si $L \in V^{**}$ existe un único vector v tal que $L(f) = f(v)\ \forall f \in V^*$
$L_v \in V^{**}$ es una tl que cumple lo pedido
Suponiendo que existe otro vector u tal que $\forall f \in V^*, L(f) = f(u)$
$L(f) = f(v) = f(u)$
$f(v) - f(u) = 0$
$f(v - u) = 0$, para toda $f \in V^*$
Si $v - u \neq 0$, existe una $f \in V^*$ que hace que $f(v) \neq 0$ lo cual es una contradicción
Resulta $v - u = 0$ y $v = u$.

Espacio aniquilador

Espacio aniquilador
Sea U un sev de V se define

$$U^0 = \{\varphi \in V^* : \varphi(u) = 0 \, \forall u \in U\} = \{\varphi \in V^* : U \subseteq \ker(\varphi)\}$$

como el aniquilador de U^0.

El aniquilador es un sev de V

$\varphi, \tau \in U^0$, $u \in U$
$\varphi, \tau \in V^*$
$(\alpha\varphi + \beta\tau)(u) = \alpha\varphi(u) + \beta\tau(u) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$
$\alpha\varphi + \beta\tau \in U^0$
U^0 es un sev de V^*

Dimensión del aniquilador

Se tiene que:

$$\dim(U) + \dim(U^0) = \dim(V)$$

Sea $B_U = \{u_1, \ldots, u_r\}$ base de U, extiendo a una base B de V
$B = \{v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$ y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \ldots, \varphi_n\}$, $\{\varphi_{r+1} \ldots \varphi_n\}$ es una base de U^0

Si $1 \leq i \leq r, n \geq j \geq r+1$, $\varphi_j(u_i) = \delta_{ji} = 0$. $\varphi_j \in U^0$, $span(\varphi_{r+1}, \varphi_n) \subseteq U^0$

$\{\varphi_{r+1} \ldots \varphi_n\}$ son li ya que de lo contrario B^* no seria li.

$\tau \in U^0 \implies \tau \in V^* \implies \tau(u) = \sum_{i=1}^n b_i\varphi_i$, $b_1 \ldots b_n$ escalares.
$b_1, \ldots b_r = 0$, sino entonces para algun i tal que $1 \leq i \leq r$, $\tau(v_i) = b_i \neq 0$ y $\tau \notin U^0$.
Por lo tanto $\tau = \sum_{i=r+1}^n b_i\varphi_i$ y $span(\varphi_{r+1}, \varphi_n) = U^0$

$\{\varphi_{r+1} \ldots \varphi_n\}$ es base de U^0

Algebra de aniquiladores

1. $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$
   $\varphi \in (U+W)^0 \iff \varphi(u+w) = 0 \, \forall u \in U, w \in W$
   En particular, $\varphi(u+0) = 0$ ya que $0 \in W$, por lo que $\varphi(u) = 0$ y lo mismo ocurre para w.
   $\varphi(u+w) = 0 \, \forall u \in U, w \in W \iff \varphi(u) = 0 \, \forall u \in U \wedge \varphi(w) = 0 \forall w \in W \iff \varphi \in U^0 \cap W^0$
2. $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$
   $\varphi \in U^0 + W^0 \implies \varphi = \varphi_U + \varphi_W$, $\varphi_U \in U^0$, $\varphi_W \in W^0$
   $v \in U \cap W \implies \varphi(v) = \varphi_U(v) + \varphi_W(v) = 0 + 0 = 0$
   $v \in (U \cap W)^0$, $(U \cap W)^0 \subseteq U^0 + W^0$

   $\dim(U^0 + W^0) = \dim(U^0) + \dim(W^0) - \dim(U^0 \cap W^0)$
   $= \dim(U^0) + \dim(W^0) - \dim((U+W)^0)$
   $= \dim(V) - \dim(U) + \dim(V) - \dim(W) - \dim(V) + \dim(U+W)$
   $= \dim(V) + -\dim(U) - \dim(W) + \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$
   $= \dim(V) - \dim(U \cap W) = \dim((U \cap W)^0)$

   Sigue que $U^0 + W^0 = (U \cap W)^0$

La proyección ortogonal es autoadjunta

La proyección ortogonal es autoadjunta

Los autovalores de una transformación autoadjunta son reales

> **Los autovalores de una transformación autoadjunta son reales**
> Sea $T \in L(V)$ autoadjunta y λ un autovalor, $\lambda \in R$
> Sea v el autovector asociado a λ
> $< T(v), v >= \overline{< v, T(v) >}$
> $< \lambda v, v >= \overline{< v, \lambda v >}$
> $\lambda ||v||^2 = \overline{\lambda} ||v||^2$
> $v \neq 0$(v es un autovector), $||v|| \neq 0$
> $\lambda = \overline{\lambda}$
> $\lambda \in \mathbb{R}$

Parcial 3 ejercicio 2

> **Parcial 3 ejercicio 2**
> Sea (V,⟨·, ·⟩) un F-espacio vectorial con producto interno. Decimos que un endomorfismo T ∈ L(V)
> es un operador positivo si es autoadjunto y ⟨T v, v⟩ ≥ 0 para todo v ∈ V .
> (a) Sea U ⊂ V un subespacio de V . Pruebe que la proyección ortogonal pU es operador positivo.
> (b) Si T es un operador definido positivo, pruebe que los autovalores de T son no negativos.
> (c) Si T es un operador definido positivo y v, w ∈ V son dos vectores tales que T v = w y T w = v,
> entonces v = w.
>
> a)
> Sea V un ev con pi, $S \subseteq V$ un sev de V y p_S la proyección ortogonal sobre S, p_S es una transformación autoadjunta
>
> ```
> $p_s(v) = \begin{cases}v & v \in S \\ 0 & v \notin S\end{cases}$
> Sea $B'=\{v_1,\dots v_k\}$ una bon de $S$, extiendo $B'$ a una base de $B$ y luego la convierto en una base ortonormal $B=\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ usando gran schimidt.
>
> $v_i \in S \implies [p_S(v_i)]_B = [v_i]_B = e_i$
> $v_i \notin S \implies [p_S(v_i)]_B = [0]_B = 0$
>
> $$[p_S]_B = \begin{pmatrix}
> 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
> 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\
> \vdots &  \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
> 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
> \vdots &  \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
> 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
> \end{pmatrix}$$
> $[p_S]$ es una matriz diagonal con 1s y 0s en la diagonal, es hermitica y por lo tanto $p_S$ es autoadjunta.
> $<p_S(v), v> = \begin{cases} <v,v> = ||v||^2 & v \in S \\ <0,v> = 0\end{cases} \implies \langle p_S(v),v\rangle \geq 0$
> ```
>
> b)
> Sea λ autovalor de T y v su autovector asociado
> $\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda ||v||^2 \geq 0 \implies \lambda \geq 0$
> λ es no negativo
> c)
> $T(v) = w$
> $T(w) = v$
> $T(v - w) = T(v) - T(w) = w - v = -(v - w)$
> Si $v - w \neq 0$, -1 es un autovalor pero como T es un operador positivo esto no puede ser.
> Resulta $v - w = 0$ y $v = w$.

Proposición 1

Proposición 1
Si V es un $\mathbb{F}$-ev con producto interno de dimensión finita y $T \in L(V)$ entonces son equivalentes:

1. T es una tl autoadjunta
2. $\forall B$ bon de V, $[T]_B$ es hermitica
3. $\exists B$ bon de V, $[T]_B$ es hermitica

$1 \implies 2)$
Si T es una matriz autoadjunta entonces $< T(u), v >=< u, T(v) >$ para $u, v \in V$
Sea B una bon de V, $g = I$
$< T(v), u >=< v, T(u) >$
$([T]_B[v]_B) \cdot [u]_B^* = [v]_B([T]_B[u]_B)^*$
$[T]_B([v_B] \cdot [u]_B^*) = ([v]_B[u]_B^*)[T]_B^*$
$[T]_B < v, u >=< v, u > [T]_B^*$
Tomando $v = u$, $< v, u >= 1$
$[T]_B = [T]_B^*$
$2 \implies 3)$
Trivial
$3 \implies 1)$
Sea B una bon tal que $[T]_B = [T]_B^*$:
$[T]_B = [T]_B^*$
$[T]_B < v, u >=< v, u > [T]_B^*$
$[T]_B([v_B] \cdot [u]_B^*) = ([v]_B[u]_B^*)[T]_B^*$
$([T]_B[v]_B) \cdot [u]_B^* = [v]_B([T]_B[u]_B)^*$
$< T(v), u >=< v, T(u) >$
T es autoadjunta

Teorema de descomposición espectral

Teorema de descomposición espectral
Sea V un $\mathbb{F}$-ev con pi y de dimensión finita y $T \in L(V)$ una transformación autoadjunta existe B bon de V tal que $[T]_B$ es una matriz diagonal real

Pruebo por inducción en $\dim(V)$

CB) $\dim(V) = 1$
$\exists u \in V : v \in span(u)$
$T(u) = w$, $w \in V$
$T(u) = \lambda u$
λ autovalor, como T es autoadjunta $\lambda \in \mathbb{R}$
$\{u\}$ bon de V
$[T]_{\{u\}} = \lambda$
λ es una matriz diagonal real
HI) Si $1 < \dim(V) < n - 1$ entonces se verifica el teorema
PI)
$\dim(V) = 1$
T autoadjunta
T tiene al menos un autovalor real λ
Sea v un autovector de T y $w := \frac{v}{||v||}$. $T(w) = T\left(\frac{v}{||v||}\right) = \frac{1}{||v||}T(v) = \frac{1}{||v||}\lambda v = \lambda w$.
w es un autovector de T asociado al autovalor λ
$U = span(w)^\perp$ es un sev de V de dimensión $n - 1$
Sea $B = \{w\} \cup B_U$ con B_U una bon de U

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & [T|_U]_{B_U} \end{pmatrix}$$
$[T|_U]_{B_U}$ es autoadjunta(sino T no lo seria)
Por hipótesis inductiva $[T]_{B_U}$ es una matriz diagonal real. $[T]_B$ es una matriz diagonal real.

Teorema de representación de Riez

Teorema de representación de Riez
Sea V un $\mathbb{F}$ ev con producto interno y $\varphi \in V^*$ entonces existe un único vector $u \in V$ tal que $\varphi(v) = \langle v, u\rangle$.

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una bon de V
$v \in V \implies v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i$
$\varphi(v) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, \overline{\varphi(v_i) v_i}\rangle = \langle v, \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(v_i)} v_i\rangle$
$u := \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(v_i)} v_i$ es el vector que cumple el enunciado.

Suponiendo que existe otro vector u' tal que $\varphi(v) = \langle v, u'\rangle$
$\varphi(v) = \langle v, u'\rangle = \langle v, u\rangle$
$\langle v, u' - u\rangle = 0$
$\langle u' - u, u' - u\rangle = 0$
$u' - u = 0$
$u' = u$

El vector u definido es único

Isomorfismo entre un ev y su dual

Sea V un $\mathbb{R}$ ev.
Definiendo $\Phi : V \to V^*$ definida como $\Phi(v) = \varphi_u$ donde $\varphi(v) = \langle v, u\rangle$ se tiene que
Φ esta bien definida)
φ_v existe por el teorema de representación de Riez
$\varphi_u(av + bw) = \langle av + bw, u\rangle = a\langle v, u\rangle + b\langle w, u\rangle = a\varphi_u(v) + b\varphi_u(w)$
φ_u es una tl de $V \to \mathbb{F}$. Φ esta definida para todo $v \in V$.
$\Phi(av + bw)(u) = \varphi_{av+bw}(u) = \langle u, av + bw\rangle$
$= \langle u, av\rangle + \langle u, bw\rangle$
$= a\langle u, v\rangle + b\langle u, w\rangle$
$= a\varphi_v(u) + b\varphi_w(u)$
$= a\Phi(v)(u) + b\Phi(w)(u)$
Φ es una tl
Φ es un monomorfismo)
$\ker(\Phi) = \{v \in V : \Phi(v)(u) = 0 \; \forall u \in V\}$
$\Phi(v)(u) = 0 \; \forall u \in V \iff \langle u, v\rangle = 0 \; \forall u \in V \iff v = 0$
$\ker(\Phi) = \{0\}$
Φ es un monomorfismmo
Φ es un epimorfismo)
$\dim(\ker(\Phi)) + \dim(Im(\Phi)) = \dim(V) = \dim(V^*)$
$0 + \dim(Im(\Phi)) = \dim(V^*)$
$\dim(Im(\Phi)) = \dim(V^*)$
Φ es un epimorfismo
Como consecuencia Φ es un isomorfismo

Transformaciones adjunta

Transformaciones adjunta
Si V es un $\mathbb{F}$-ev con producto interno y $T \in L(V)$. Existe $T^* \in L(V)$ tal que

$$< Tu, v > = < u, T^*v >$$

Para cualquier par de vectores $u, v \in V$

La transformación adjunta es única
Si $T \in L(V)$ y $S, U \in L(V)^*$ transformaciones adjuntas a T
$\forall w, v \in V$
$< w, T^*v > = < w, Sv > = < w, Uv >$
$< w, Sv > - < w, Uv > = 0$
$< w, (S - U)v > = 0$
En particular para $w = (S - U)v$:
$(S - U)v = 0$
$S(v) = U(v)$
$S = U$

Algebra de transformaciones adjuntas

$T, S \in L(V)$
$(T + S)^* = T^* + S^*$)
$< (T + S)v, u > = < Tv + Sv, u > = < Tv, u > + < Sv, u > = < v, T^*u > + < v, S^*u >$
$= < v, T^*u + S^*u > = < v, (T^* + S^*), u >$
$T^* + S^* = (T + S)^*$
$(kT)^* = \bar{k}T^*$)
$< kTv, u > = k < Tv, u > = k < v, T^*u > = < v, \bar{k}T^*u >$
$(kT)^* = \bar{k}T^*$
$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$)
Sea B base de V:
$[(T \circ S)^*]_B = [T \circ S]_B^* = ([T]_B \cdot [S]_B)^*$

$A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$:
$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
$\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$:
$(\overline{A} \cdot \overline{B})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik}\bar{b}_{kj} = \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}} = \overline{(A \cdot B)_{ij}} = (\overline{AB})_{ij}$
Por lo tanto $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$
$([T]_B \cdot [S]_B)^* = [S^*]_B \cdot [T^*]_B$
$(T \cdot S)^* = S^* \cdot T^*$
$T^{**} = T^*$)
Trivial sabiendo que $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n} : A^{**} = A$

Una tl ortogonal tiene como autovalores +-1

Una tl ortogonal tiene como autovalores +-1
Si T es una tl ortogonal, λ es un autovalor de T entonces $\lambda = \pm 1$

$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por ser ortogonal, así que $\lambda \in \mathbb{R}$

T es una tl ortogonal por el teorema 1, T preserva las normas

Sea $v \neq 0$ el autovector asociado a λ
$||T(v)|| = ||v||$
$||\lambda v|| = ||v||$
$|\lambda| ||v|| = ||v||$
$|\lambda| = 1$
$\lambda = \pm 1$
