

# **Logica**

Autor: Agustín Fernández Bergé

## **Indice**

-  [Final](#)
  -  [Practica 1](#)
  -  [Teoria](#)
-

# Final

- [!\[\]\(467d80e979964f7f8c752fb22248b5b7\_img.jpg\) 960-1198-max](#)
  - [!\[\]\(b71552d33dbf62adf5e5199a70ee02bf\_img.jpg\) Apartado 1](#)
  - [!\[\]\(03134b765d1473836ff001925b1b0550\_img.jpg\) Apartado 2](#)
  - [!\[\]\(aed6947356668967079310026052edc0\_img.jpg\) Apartado 3](#)
  - [!\[\]\(e61aeb0d9066d5d9e54d9b655f50da3d\_img.jpg\) Apartado 4](#)
- 

## 960-1198-max

# Examen Final

1. Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas proposicionales. Demuestre que si el conjunto de valúaciones  $v$  tales que  $[\Gamma]_v = T$  es finito, entonces  $\Gamma$  es infinito.

2. Sea  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ . Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a)  $\Gamma$  es consistente,
- (b) No existe  $\phi$  tal que  $\Gamma \vdash \phi$  y  $\Gamma \vdash \neg\phi$ ,
- (c) Existe al menos una fórmula  $\psi$  tal que  $\Gamma \not\vdash \psi$ .

3. Sea  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ . Demuestre que si existe una valúación  $v$  tal que  $[\Gamma]_v = T$ , entonces  $\Gamma$  es consistente.

4. Demuestre que todo conjunto consistente está contenido en un conjunto consistente maximal.

5. Demuestre el teorema de compacidad: Para todo conjunto de sentencias  $\Gamma$ , si todos los subconjuntos finitos de  $\Gamma$  son satisfactibles, entonces  $\Gamma$  es satisfactible.

6.

- (a) Defina recursivamente el conjunto de variables libres de una fórmula  $\phi$ .
- (b) Describa el problema de captura de variables libres.
- (c) ¿Cómo se evita la captura de variables libres? Defina el concepto de término libre para una variable en una fórmula.

7. Defina el concepto de modelo o interpretación para una signatura  $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ .

8. Defina el concepto de entorno  $s$  y explique por qué es necesaria su introducción.

9. Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas de la lógica de predicados sobre una signatura  $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Definimos los *modelos* de  $\Gamma$  de la siguiente forma:

$$\text{Mod}(\Gamma) = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \text{ es un modelo sobre } (\mathcal{F}, \mathcal{P}) \text{ y } \mathcal{M} \models \Gamma\}$$

Decimos que  $\Gamma$  es satisfactible si  $\text{Mod}(\Gamma) \neq \emptyset$ .

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

- (a) Si  $\text{Mod}(\Gamma \cap \Delta) = \emptyset$ , entonces  $\Gamma$  es no satisfactible y  $\Delta$  es no satisfactible.
- (b) Si  $\text{Mod}(\Gamma \cup \Delta) = \emptyset$ , entonces  $\Gamma$  es no satisfactible o  $\Delta$  es no satisfactible.

## Apartado 1

### Apartado 1

Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  el conjunto de proposiciones que satisfacen a  $\Gamma$ , si  $\Gamma$  es finito, entonces todas las fórmulas de  $\Gamma$  están determinadas por un conjunto finito de variables proposicionales, sean  $p_1, \dots, p_k$  dichas variables.

Defino entonces la valuación:

$$v' = \begin{cases} v_1(p_i), & 1 \leq i \leq k \\ !v_1(p_{k+1}) \\ !v_2(p_{k+2}) \\ \vdots \\ !v_n(p_{k+n}) \end{cases}$$

Donde  $!v_i(p) = T$  si  $v_i(p) = F$  y  $v_i(p) = F$  si  $v_i(p) = T$ .

$v'$  satisface  $\Gamma$  ya que asigna valores de verdad a las variables  $p_1, \dots, p_k$  de manera que se satisfaga  $\Gamma$  (hace esto asignando los mismos valores que asignaría  $v_1$  que sabemos que satisface  $\Gamma$ ). Sin embargo  $v' \neq v_i \forall i$  dado que asignan distintos valores de verdad para al menos una variable proposicional. Luego se tiene que  $v'$  no pertenece al conjunto de valuaciones que satisface  $\Gamma$  y por lo tanto  $v'$  no satisface  $\Gamma$ . Absurdo.

Por RAA,  $\Gamma$  es infinito.

Nota: Si  $\Gamma$  es una contradicción no hay una valuación que lo satisface y esta prueba no sirve. En este caso se puede tomar  $\Gamma = \{\perp\}$  y se tiene un conjunto que es satisfecho por un conjunto finito de valuaciones ( $\emptyset$ ) pero que es finito.

## Apartado 2

### Apartado 2

a  $\implies$  b) Si existiese dicha formula  $\phi$  entonces por introducción de  $\perp$ ,  $\Gamma \vdash \perp$  y  $\Gamma$  es inconsistente, Absurdo. La formula  $\phi$  no existe.

b  $\implies$  c) Si por el contrario para toda formula se tiene que  $\Gamma \vdash \psi$ , tomando  $\psi \equiv \perp$  es posible derivar cualquier formula usando la regla de eliminación de  $\perp$ , en particular se puede derivar  $\neg \perp$ , esto constituye una contradicción con b. Por RAA, vale c.

c  $\implies$  a) Nuevamente si  $\Gamma$  fuese inconsistente, por eliminación de  $\perp$  se puede derivar cualquier formula y se tiene que no existe una formula tal que  $\Gamma \not\vdash \perp$ . Absurdo y por lo tanto vale a.

## Apartado 3

### Apartado 3

Todo conjunto satisfactible es consistente.

Sea  $v$  una valuación que satisface a un conjunto  $\Gamma$ . Es decir,  $[\Gamma]_v = T$ , suponiendo que  $\Gamma$  es inconsistente, se tiene que  $\Gamma \vdash \perp$  y por soundness  $\Gamma \models \perp$ . Luego no hay ninguna valuación que valide a  $\Gamma$ , Absurdo.  $\Gamma$  resulta consistente.

## Apartado 4

## Apartado 4

Sea  $\Gamma$  un conjunto consistente.

Se tiene que  $PROP$  es un conjunto numerable, defino entonces una serie de conjuntos

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n & \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \perp \\ \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \not\vdash \perp \end{cases}$$

Cada uno de los conjuntos  $\Gamma_n$  es consistente.

Sea  $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ :

- $\Gamma^*$  es un conjunto consistente. Suponiendo que  $\Gamma^* \vdash \perp$ , dicha prueba por DN utiliza una cantidad finita de premisas, sean  $\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \dots, \phi_{i_k}$  dichas premisas, se tiene que existe  $j$  tal que  $\{\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_k}\} \in \Gamma_j$ , luego  $\Gamma_j$  es inconsistente. Absurdo.
- $\Gamma^*$  es consistente maximal. Sea  $\Gamma^* \subseteq \Delta$  y  $\phi_k \in \Delta$  se tiene que  $\Gamma_k \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$  es consistente. Luego  $\Gamma_k \cup \{\phi_k\} = \Gamma_{k+1} \subseteq \Gamma^*$  y  $\phi_k \in \Gamma^*$ . Por lo tanto  $\Delta \subseteq \Gamma^*$  y resulta  $\Delta = \Gamma^*$
- .

# Practica 1

## Ejercicio 17

### Ejercicio 17

Demuestre que  $\{\vee, \neg\}$  es un conjunto completo de conectivos.

Un conjunto de conectivos  $A$  es completo  $\iff$  Para toda formula  $\psi \in PROP$  existe una formula  $\phi \in PROP$  tal que  $\phi$  usa únicamente conectivos de  $A$  y  $\models \phi \iff \psi$

Pruebo por PIP sobre  $PROP$ :

CB1)  $\psi \equiv p_i$

CB2)  $\psi \equiv \perp$

En ambos casos  $\psi$  no usa ningún conectivo, por lo tanto la proposición vale trivialmente tomando  $\phi \equiv \psi$

PI)

Pruebo que:  $\models \phi_1 \wedge \phi_2 \iff \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)$

Sea  $v$  una valuación cualquiera:

$$[\phi_1 \wedge \phi_2] \iff \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)]_v$$

$\iff$  (def de semántica de  $\iff$ )

$$[\phi_1 \wedge \phi_2]_v = [\neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)]_v$$

Si  $[\phi_1 \wedge \phi_2]_v = T$  entonces por def de semántica de  $\wedge$ ,  $[\phi_1]_v = [\phi_2]_v = T$

Luego:

$$[\neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)]_v = T$$

$\iff$  def de semántica de  $\neg$

$$[\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2]_v = F$$

$\iff$  def de semántica de  $\vee$

$$[\neg\phi_1]_v = F \wedge [\neg\phi_2]_v = F$$

$\iff$  def de semántica de  $\neg$

$$[\phi_1]_v = T \wedge [\phi_2]_v = T$$

Por lo tanto la proposición vale en este caso.

Si  $[\phi_1 \wedge \phi_2]_v = F$  entonces  $[\phi_1]_v = F \circ [\phi_2]_v = F$

Luego si  $[\phi_1]_v = F$  entonces  $[\neg\phi_1]_v = T$  por semántica de  $\vee$  y  $[\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2]_v = T$  por def de semántica de  $\vee$

Análogamente partiendo de  $[\phi_2]_v = F$  se puede llegar al mismo resultado.

Luego por def de semántica de  $\vee$ ,  $[\neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)]_v = F$

Por lo tanto  $[\phi_1 \wedge \phi_2]_v = [\neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)]_v$  y  $\models \phi_1 \wedge \phi_2 \iff \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)$

Luego si  $\psi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$ , se tiene que existe la proposición  $\chi \equiv \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)$  y por lo visto anteriormente  $\models \psi \iff \chi$

---

Si  $\psi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$  la misma proposición  $\psi$  solo usa el conectivo  $\vee$ , se puede llegar a lo mismo para  $\psi \equiv \neg\phi_1$

---

Si  $\psi \equiv \phi_1 \implies \phi_2$ , se tiene que existe  $\chi \equiv \neg\phi_1 \vee \phi_2$  y  $\models \psi \iff \chi$

Por semántica de  $\iff$ , tiene que ocurrir que  $[\phi_1 \implies \phi_2]_v = [\neg\phi_1 \vee \phi_2]_v$

Si  $[\phi_1]_v = F$  entonces por semántica de  $\vee$   $[\phi_1]_v = T$  y:

- Por semántica de  $\vee$ ,  $[\neg\phi_1 \vee \phi_2]_v = T$
- Por semántica de  $\implies$ ,  $[\phi_1 \implies \phi_2]_v = T$

Si  $[\phi_1]_v = T$  entonces por semántica de  $\neg$   $[\neg\phi_1]_v = F$ :

- Si  $[\phi_2]_v = T$  por semántica de  $\vee$   $[\neg\phi_1 \vee \phi_2]_v = T$  y por semántica de  $\implies$   $[\phi_1 \implies \phi_2]_v = T$
- Si  $[\phi_2]_v = F$  por semántica de  $\vee$   $[\neg\phi_1 \vee \phi_2]_v = F$  y por semántica de  $\implies$   $[\phi_1 \implies \phi_2]_v = F$

Luego se cumple que  $\models \psi \iff \chi$

---

Por PIP,  $\{\vee, \neg\}$  es un conjunto completo de conectivos

---

---

b) Defino  $\oplus$  como el operador NAND, es decir  $\phi_1 \oplus \phi_2 \equiv \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$ . Para probar que el operador por si solo es un conjunto completo de conectivos, uso PIP y el hecho de que  $\{\neg, \wedge\}$  es un conjunto completo de conectivos.

CB)  $\psi \equiv p_i \circ \psi \equiv \perp$

La formula no usa conectivos y la proposición vale trivialmente.

PI)

$\psi \equiv \neg\phi$ :

Tomando  $\chi \equiv \phi \oplus \phi$ ,

$[\phi \oplus \phi]_v = [\neg(\phi \wedge \phi)]_v$

Si  $[\neg\phi]_v = T$  entonces  $[\phi]_v = F$

Aplicando definiciones de semántica:

$[\phi \wedge \phi]_v = F$  y  $[\neg(\phi \wedge \phi)]_v = T$

Por el contrario si  $[\neg\phi]_v = F$  y  $[\phi]_v = T$

Aplicando definiciones de semántica:

$[\phi \wedge \phi]_v = T$  y  $[\neg(\phi \wedge \phi)]_v = F$

Se cumple la propiedad

$$\psi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$$

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \equiv \neg(\phi_1 \oplus \phi_2)$$

Y la propiedad se cumple.

---

# Teoría

- [Indecibilidad de la lógica de predicados](#)
  - [Los 7 lemas de Dante](#)
  - [Operadores de CTL](#)
  - [Problema de alcanzabilidad](#)
  - [Problema random](#)
  - [Teorema de compacidad](#)
  - [Teorema de Lowenheim-Skolem](#)
- 

## Indecibilidad de la lógica de predicados

### Indecibilidad de la lógica de predicados

No existe un procedimiento  $P$  que permita decidir si un cierto predicado  $\phi$  es satisfactible por todo modelo( $\models \phi$ ).

Suponiendo que dicho procedimiento  $P$  existe. De ser así, se puede usar  $P$  para decidir el problema de POST, el cual es indecidible.

Sea la signatura  $\mathcal{F} = \{e, f_1, f_0\}$  con  $ar(e) = 0$ ,  $ar(f_1) = 1$ ,  $ar(f_0) = 1$ .

La idea de la signatura es representar palabras de bits, es decir, la palabra  $b_1, b_2, \dots, b_n$  se representa con  $f_n(f_{n-1}(\dots, f_2(f_1(e))))$  con notación  $f_{b_1 b_2, \dots, b_n}(e)$ .  $e$  representa la palabra vacía.

$\mathcal{P} = \{R\}$  con  $ar(R) = 2$ , la idea de  $R(s, t)$  es "hay un intento de solución que lleva a  $s$  arriba y a  $t$  abajo en ladrillos".

Defino las proposiciones:

Si se tiene la siguiente instancia  $c$  para el problema de POST:

$$\binom{s_1}{t_1}, \binom{s_2}{t_2}, \dots, \binom{s_k}{t_k}$$

Defino las proposiciones:

$$\phi_1 \equiv \bigwedge_{i=1}^k R(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e))$$

$$\phi_2 \equiv \forall u \forall v : R(u, v) \implies \bigwedge_{i=1}^k R(f_{s_i}(u), f_{t_i}(v))$$

$$\phi_3 \equiv \exists z : R(z, z)$$

Cada proposición establece:

$\phi_1 \equiv$  Hay  $k$  intentos de solución donde el  $i$ -esimo intento lleva a  $s_i$  arriba y  $t_i$  abajo en ladrillos(uno por cada uno de los bloques iniciales).

$\phi_2 \equiv$  Si se tiene un intento de solución que lleva a  $u$  arriba y  $v$  abajo en ladrillos entonces se puede extender dicho intento de solución con los bloques existentes.

$\phi_3 \equiv$  Hay un intento de solución que lleva a la misma palabra de bits arriba y abajo en ladrillos.

Sea  $\phi_c \equiv \phi_1 \wedge \phi_2 \rightarrow \phi_3$

Decimos que  $c$  tiene solución  $\iff \models \phi_1 \wedge \phi_2 \rightarrow \phi_3$ . (Proposición 1)

Luego se puede armar el siguiente procedimiento para decidir el problema de POST a partir de  $P$ :

$$c \rightarrow \phi_c \xrightarrow{P} \begin{cases} \models \phi_c \rightarrow \text{POST tiene solución} \\ \not\models \phi_c \rightarrow \text{POST no tiene solución} \end{cases}$$

Lo cual no es posible, ya que POST es un problema indecidible, luego el procedimiento  $P$  no puede existir.

---

## Demostración de la proposición 1

$\Leftarrow$  ) Suponiendo que  $\models \phi_c$

En particular para el siguiente modelo:

$$|\mathcal{M}| = \{0, 1\}$$

$$e^{\mathcal{M}} = \lambda$$

$$f_0^{\mathcal{M}}(s) = s0$$

$$f_1^{\mathcal{M}}(s) = s1$$

$$R^{\mathcal{M}} = \{(s, t) : \exists i_1, i_2, \dots, i_k \text{ tales que } s = s_{i_1}s_{i_2}, \dots, s_{i_n} \wedge t = t_{i_1}t_{i_2}, \dots, t_{i_n}\}$$

Veamos que:

- $\mathcal{M} \models \phi_1$ , puesto que  $(s_i, t_i) \in R^{\mathcal{M}}$ , se puede tomar la secuencia  $[i]$  y se tiene que efectivamente para todo entorno  $s$ ,  $\llbracket R(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e)) \rrbracket_{\mathcal{M}, s} = T$ .
- También se tiene que  $\mathcal{M} \models \phi_2$ , sean  $u, v$  términos y  $\llbracket R(u, v) \rrbracket_{\mathcal{M}, s} = T$  se tiene que existe una secuencia  $j_1, j_2, \dots, j_k$  tal que  $u = s_{j_1}s_{j_2}, \dots, s_{j_n} \wedge v = t_{j_1}t_{j_2}, \dots, t_{j_n}$ . Luego se puede añadir  $i$  a la secuencia para formar  $(us_i, vs_i)$ .
- Como por hipótesis se tiene que  $\mathcal{M} \models \phi_c$ , en particular se tiene que  $\mathcal{M} \models \phi_3$  y se tiene que existen  $i_1, i_2, \dots, i_k$  tal que  $z = s_{i_1}s_{i_2}, s_{i_k}$  y  $(z, z) \in R^{\mathcal{M}}$ . Luego  $c$  tiene solución.

---

## Los 7 lemas de Dante

### Los 7 lemas de Dante

Sea  $\Gamma \subseteq PROP$ ,  $\Gamma$  es consistente si  $\Gamma \not\vdash \perp$

Si  $\Gamma \vdash \perp$ ,  $\Gamma$  es inconsistente

Lema 1) Son equivalentes:

1.  $\Gamma$  es inconsistente
2.  $\exists \phi : \Gamma \vdash \phi \wedge \Gamma \vdash \neg \phi$
3.  $\forall \phi : \Gamma \vdash \phi$

Demostración:

1  $\implies$  2), Surge de aplicar la regla de eliminación de  $\perp$  para derivar  $\phi$  y luego aplicar la misma regla para derivar  $\neg \phi$ .

2  $\implies$  3) Surge de aplicar la regla de introducción de  $\perp$  y luego de aplicar la regla de

eliminación de  $\perp$  para derivar  $\phi$

3  $\implies$  1)  $\Gamma$  deriva todas las proposiciones, en particular deriva  $\phi \equiv \perp$

Lema 2) Si  $\Gamma \subseteq PROP$  es satisfactible entonces es consistente,

$\exists v : [\Gamma]_v = T \implies \Gamma$  es consistente

Demostración:

Por el contrario, si  $\Gamma \vdash \perp$  por soundness  $\Gamma \models \perp$  y  $\forall v' : [\Gamma]_{v'} = T \implies [\perp]_{v'} = T$ , en particular para la valuación  $v$  se tiene que  $[\perp]_v = T$  lo cual es absurdo. Por lo tanto  $\Gamma$  es consistente.

Lema 3) Si  $\Gamma \subseteq PROP, \phi \in PROP$

1. Si  $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$  es inconsistente  $\implies \Gamma \vdash \phi$

2. Si  $\Gamma \cup \{\phi\}$  es inconsistente  $\implies \Gamma \vdash \neg\phi$

Demostración)

Ambas se demuestran por RAA.

Por ejemplo para 1, partiendo de  $\Gamma$  si se supone  $\neg\phi$  por hipótesis se puede derivar  $\perp$ , luego usando la regla de reducción al absurdo se introduce  $\phi$  y se tiene que  $\Gamma \vdash \phi$ . Para 2 es analogo.

Lema 4) Un conjunto  $\Gamma$  es consistente maximal si es consistente y si  $\Gamma \subseteq \Gamma'$  y  $\Gamma'$  es consistente entonces  $\Gamma = \Gamma'$ . Se tiene entonces que todo conjunto consistente esta contenido en un conjunto consistente maximal.

Demostración)

$PROP$  es un conjunto numerable, en efecto, uno puede considerar los conjuntos  $P_i \subseteq PROP$  donde  $P_i$  esta formado por todas las proposiciones que usan  $i$  conectivos. Cada uno de estos conjuntos  $P_i$  son finitos y por lo tanto numerables, por unión numerable de conjuntos numerables  $PROP$  resulta numerable.

\

Sean entonces los conjuntos  $\Gamma_i$  definidos como

$$\Gamma_0 = \Gamma \quad \text{y} \quad \Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\psi_n\}, & \Gamma_n \cup \{\psi_n\} \text{ es consistente} \\ \Gamma_n, & \Gamma_n \cup \{\psi_n\} \text{ es inconsistente} \end{cases}$$

Una rápida inducción prueba que  $\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma_n$  es consistente,  $\Gamma_0 = \Gamma$  es consistente por hipótesis, luego si  $\Gamma_n$  es consistente entonces si  $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$  es inconsistente  $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$  y resulta  $\Gamma_{n+1}$  consistente caso contrario  $\Gamma_n = \Gamma_n \cup \{\psi_n\}$  y  $\Gamma_{n+1}$  consistente.

\

Sea  $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ , suponiendo que es inconsistente ( $\Gamma^* \vdash \perp$ ), cualquier derivación requiere un numero finito de pasos por lo tanto la derivación anterior requiere de un numero finito de premisas. Sean  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k \in \Gamma^*$  dichas premisas, existen  $n_1, \dots, n_k$  tales que  $\phi_i \in \Gamma_{n_i}$  (las premisas pertenecen a alguno de los conjuntos  $\Gamma$  que conforman la unión  $\Gamma^*$ ).

\

Sea entonces  $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ ,  $\{\phi_1, \dots, \phi_k\} \subseteq \Gamma_m$  y resulta  $\Gamma_m$  inconsistente, lo cual es absurdo ya que todos los conjuntos  $\Gamma_i$  son consistentes. Por lo tanto  $\Gamma^*$  es consistente

\

Sea entonces  $\Delta$  un conjunto consistente tal que  $\Gamma^* \subseteq \Delta$ . Como  $PROP$  es numerable se tiene que se puede asignar un numero natural a cada  $\phi \in \Delta$ , por lo tanto sea  $m$  tal que  $\psi_m \equiv \phi$ , se

tiene que  $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$  y  $\psi_m \in \Delta$  por lo que  $\Gamma_m \cup \{\psi_m\} \subseteq \Delta$ .

\

Como  $\Delta$  es consistente, todos sus conjuntos deben ser consistentes, entonces  $\Gamma_m \cup \{\psi_m\}$  resulta consistente y  $\psi_m \in \Gamma_m \cup \{\psi_m\} = \Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$ , todas las proposiciones  $\psi_m \in \Delta$  pertenecen también a  $\Gamma^*$  y por lo tanto  $\Delta \subseteq \Gamma^*$  de donde resulta  $\Delta = \Gamma^*$ .

\

Se tiene que  $\Gamma^*$  es un conjunto consistente maximal y  $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma^*$  como se quería probar.

Lema 5) Si  $\Gamma$  es consistente maximal entonces es cerrado bajo la derivación, es decir, para toda proposición  $\phi$ ,  $\Gamma \vdash \phi \implies \phi \in \Gamma$

Demostración)

Si  $\Gamma \vdash \phi$  y  $\phi \notin \Gamma$  entonces  $\Gamma \cup \{\phi\}$  es inconsistente y por Lema 3 item 2  $\Gamma \vdash \neg\phi$  luego resulta  $\Gamma$  inconsistente. ABS!!..  $\phi \in \Gamma$ .

Lema 6) Si  $\Gamma$  es consistente maximal entonces  $\forall \phi \in PROP : \phi \in \Gamma \vee \neg\phi \in \Gamma$

Demostración)

Sea  $\phi \in PROP$ :

Si  $\phi \in \Gamma$  entonces la propiedad vale.

Si  $\phi \notin \Gamma$  entonces  $\Gamma \cup \{\phi\}$  es inconsistente y por Lema 3 item 2,  $\Gamma \vdash \neg\phi$  y por lema 5,  $\neg\phi \in \Gamma$ .

Lema 7) Si  $\Gamma$  es consistente entonces es satisfactible,  $\exists v : \llbracket \Gamma \rrbracket_v = T$

Demostración)

Por lema 4,  $\Gamma$  está contenido en un conjunto consistente maximal  $\Gamma^*$ , defino la valuación

$$v(p_i) = \begin{cases} T, & p_i \in \Gamma^* \\ F, & p_i \notin \Gamma^* \end{cases}$$

Pruebo por inducción que  $v$  satisface a  $\Gamma^*$ , es decir,  $\forall \phi : \phi \in \Gamma^* \iff \llbracket \phi \rrbracket_v = T$ .

CB1)  $\phi \equiv \perp$

$\perp \notin \Gamma^*$ , de lo contrario  $\Gamma^*$  no sería consistente. Como para toda valuación  $v' \llbracket \perp \rrbracket_{v'} = F$ . La propiedad vale.

CB2)  $\phi \equiv p_i$

Vale directamente por def de  $v$ .

PI1)  $\phi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$

$$\llbracket \psi_1 \wedge \psi_2 \rrbracket_v \iff \llbracket \psi_1 \rrbracket_v = T \wedge \llbracket \psi_2 \rrbracket_v = T \iff \psi_1 \in \Gamma^* \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$$

Luego si  $\psi_1 \in \Gamma^* \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$  entonces usando la introducción del  $\wedge$  se puede derivar  $\psi_1 \wedge \psi_2$  y por Lema 5,  $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$

Si  $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$  se pueden usar dos reglas de eliminación del  $\wedge$  para derivar  $\phi_1$  y  $\phi_2$  y por Lema 5,  $\psi_1 \in \Gamma^* \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$ .

Se tiene que  $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma^* \iff \psi_1 \in \Gamma^* \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$  y vale la propiedad.

Corolario Lema 7) Si  $\Gamma \not\vdash \phi \iff \exists v : \llbracket \Gamma \rrbracket_v = T \wedge \llbracket \phi \rrbracket_v = F$

$$\Gamma \not\vdash \phi \stackrel{\text{Lema 3}}{\iff} \Gamma \cup \{\neg\phi\} \not\vdash \perp \stackrel{\text{Lema 7}}{\iff} \exists v : \llbracket \Gamma \cup \{\neg\phi\} \rrbracket_v = T \iff \exists v : \llbracket \Gamma \rrbracket_v = T \wedge \llbracket \phi \rrbracket_v = F$$

## Teorema de completitud de la lógica proposicional

$$\Gamma \vdash \phi \iff \Gamma \models \phi$$

$\implies$  ) Teorema de soundness o corrección

$\iff$  ) Teorema de correctitud

Suponiendo que  $\Gamma \models \phi$  y  $\Gamma \not\models \phi$ , por corolario del lema 7  $\exists v : [\Gamma]_v = T \wedge [\phi]_v = F$  y por def de  $\models \Gamma \not\models \phi$ , ABS!.

---

## Operadores de CTL

### Operadores de CTL

$\forall \Diamond \phi \equiv \forall [\top \cup \phi]$ ,  $\phi$  es inevitable para toda traza.

Semántica:

$\mathcal{M}, s \models \forall \Diamond \phi$

$\iff$

$\mathcal{M}, s \models \forall [\top \cup \phi]$

$\iff$

Para toda traza  $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$  donde  $s = s_0$  y  $\exists j \in \mathbb{N}$  tal que:

-  $\mathcal{M}, s_j \models \phi$

-  $\mathcal{M}, s_i \models \top, \forall i < j$

$\iff (\mathcal{M}, s_i \models \top \text{ para todo estado } s_i)$

Para toda traza  $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$  donde  $s = s_0$  y  $\exists j \in \mathbb{N}$  tal que:

-  $\mathcal{M}, s_j \models \phi$

$\forall \Box \phi \equiv \neg \exists \Diamond \neg \phi$ ,  $\phi$  es invariante para toda traza.

Semántica:

$\mathcal{M}, s \models$

$\iff$

$\mathcal{M}, s \models \neg \exists \Diamond \neg \phi$

$\iff$

No es verdad que para alguna traza  $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$  con  $s = s_0$  se cumple que  $\exists j \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{M}, s_j \models \neg \phi$

$\iff$

Para toda traza  $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$  con  $s = s_0$  se cumple que  $\forall j \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{M}, s_j \not\models \neg \phi$

$\iff$

Para toda traza  $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$  con  $s = s_0$  se cumple que  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{M}, s_j \models \phi$

---

## Problema de alcanzabilidad

### Problema de alcanzabilidad

Sea  $G$  un grafo, se quiere modelar con la lógica de predicados la siguiente sentencia

Existe un camino desde un vertice  $u$  hacia un vertice  $v$

Dicha sentencia no es modelable en la lógica de predicados

Sea  $R$  un símbolo de predicados de aridad 2 y  $u, v$  constantes. Busco una formula  $\psi$  tal que  $\mathcal{M} \models \psi \iff \text{existe un camino de longitud finita de } u^{\mathcal{M}} \text{ a } v^{\mathcal{M}}$ .

La proposición  $\psi$  no puede existir.

Suponiendo que existe tal  $\psi$ , defino:

$$\phi_0 \equiv (u = v)$$

$$\phi_1 \equiv R(u, v)$$

$$\phi_2 \equiv \exists x_1 : R(u, x_1) \wedge R(x_1, v)$$

:

$$\phi_n \equiv \exists x_1, \exists x_2, \dots, \exists x_{n-1} : R(u, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{n-1}, v)$$

Proposición)  $\mathcal{M} \models \phi_n \iff$  existe un uv-camino de longitud n

Demostración)

En efecto, si  $\mathcal{M} \models \phi_n$  entonces el uv-camino buscado es  $u, x_1, x_2, \dots, v$ .

Luego si hay un uv-camino de longitud  $n$  de la forma  $u, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, v$  entonces aplicando  $n - 1$  veces la regla de introducción del existe y luego aplicando soundness se llega a lo buscado.

Luego sea  $\Gamma = \{\neg\phi_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi\}$

$\Gamma$  no es satisfacible, si lo fuera se tiene que existe un modelo  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{M} \models \Gamma$  se tiene en particular que  $\Gamma \models \psi$  y existe un camino desde  $u^{\mathcal{M}}$  a  $v^{\mathcal{M}}$ . Sea  $k$  la longitud de este camino, se tiene que  $\mathcal{M} \models \phi_k$ , pero también se tiene que  $\mathcal{M} \models \neg\phi_k$ , ABS!. Luego  $\Gamma$  no es satisfacible.

Pruebo que  $\Gamma$  es satisfacible por compacidad.

Sea  $\Delta \subseteq \Gamma$  finito. Es posible que  $\Delta$  contenga una cantidad finita de proposiciones  $\neg\phi_i$ .

- Si  $\Delta = \{\psi\}$ ,  $\Delta$  es satisfacible por un modelo donde  $|M| = \{1, 2\}$ ,  $u^M = 1$ ,  $v^M = 2$  y  $R^M = \{(1, 2)\}$ .
- Si  $\Delta$  contiene una o mas proposiciones  $\phi_i$ , sea  $m = \max\{i : \neg\phi_i \in \Delta\}$ . el modelo  $|M| = \{1, \dots, m + 2\}$ ,  $u^M = 1$ ,  $v^M = m + 2$  y  $R^M = \{(a, a + 1) : a \in [1, \dots, m + 1]\}$ . Notar que el único camino existente es  $1, 2, 3, \dots, m + 1, m + 2$  el cual es un uv-camino de longitud  $m + 1$ . Se tiene que  $\mathcal{M} \models \psi$ (porque existe un uv-camino) y  $\mathcal{M} \models \neg\phi_i$  para  $i \leq m$  (puesto que no hay un camino de longitud menor a  $m + 1$ ). Por lo tanto  $\Delta$  es satisfacible. Todo subconjunto finito de  $\Gamma$  es satisfacible, por teorema de compacidad,  $\Gamma$  es satisfacible.

Se tiene entonces que  $\Gamma$  es satisfacible por teorema de compacidad pero a su vez  $\Gamma$  no es satisfacible, ABS!.

El absurdo proviene de suponer que existe la proposición  $\psi$  definida arriba. Por lo tanto dicha proposición no puede existir.

## Problema random

### Problema random

$$\exists O \exists \Box p \implies \exists \Box \exists O p$$

Si la primera condición es verdad para un sistema  $\mathcal{M}$  y un estado  $s$  por semántica de O y  $\Box$

existe un estado  $s'$  tal que existe una traza  $s' = s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$  tal que  $\forall i : \mathcal{M}, s_i \models p$  (\*1)

Por inducción puedo probar que  $\forall i : \mathcal{M}, s_i \models \exists O p$

CB)  $i = 0, s_i = s'$

$s' \rightarrow s_1$  y  $\mathcal{M}, s_1 \models p$  por (\*1), por lo tanto vale la proposición

HII)  $\forall i : \mathcal{M}, s_i \models p$

Para  $s_{i+1}$  existe un estado  $s_{i+2}$  tal que  $s_{i+1} \rightarrow s_{i+2}$  y  $\mathcal{M}, s_{i+2} \models p$  por (\*1), por lo tanto la proposición vale.

Por lo tanto  $\exists O \square p \implies \exists \square O p$

La reversa es mentira

---

## Teorema de compacidad

### Teorema de compacidad

Sea  $\Gamma \subseteq FORM$ , si todos los subconjuntos finitos de  $\Gamma$  son satisfactibles, entonces  $\Gamma$  es satisfactible.

Suponiendo que  $\Gamma$  no es satisfactible,  $\Gamma$  es entonces una contradicción. Se tiene que  $\Gamma \models \perp$  y por completitud de la lógica de predicados  $\Gamma \vdash \perp$ . Por lo tanto existe una prueba en deducción natural de  $\perp$  partiendo de premisas de  $\Gamma$ . Dicha prueba utiliza una cantidad finita de premisas. Sea  $\Delta = \{\phi_1, \dots, \phi_k\} \subseteq \Gamma$  el conjunto formado por dichas premisas, se tiene que  $\Delta \vdash \perp$ , pero al ser  $\Delta$  un subconjunto finito de  $\Gamma$  se tiene que  $\Delta$  es satisfactible y  $\Delta \not\models \perp$ . Absurdo.

Por lo tanto  $\Gamma$  es satisfactible.

---

## Teorema de Lowenheim-Skolem

### Teorema de Lowenheim-Skolem

Sea  $\psi \in FORM$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N} : \psi$  tiene un modelo con al menos  $n$  elementos. Existe un modelo que satisface a  $\psi$  que tiene infinitos elementos en el universo (ie, tiene un modelo infinito).

Defino las formulas:

- $\phi_2 \equiv \exists x_1 \exists x_2 : \neg(x_1 = x_2)$
- $\phi_3 \equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 : \neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3)$
- $\vdots$
- $\phi_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n : \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j)$   
(Cada una de las  $\phi_k$  es equivalente a "existen  $k$  elementos distintos")

Proposición:  $\mathcal{M} \models \phi_n \iff |\mathcal{M}|$  tiene al menos  $n$  elementos

Si  $|\mathcal{M}|$  tiene al menos  $n$  elementos estos pueden enumerarse, sean  $e_1, \dots, e_n$  dichos elementos son todos distintos entre si y por lo tanto  $\mathcal{M} \models \phi_n$ .

Si se tiene que  $\mathcal{M} \models \phi_n$  entonces existen los elementos  $x_1, \dots, x_n$ . No puede ocurrir que dos elementos  $x_i$  y  $x_j$  sean iguales ya que de ser así  $\mathcal{M} \models x_i = x_j$  y  $\mathcal{M} \models \neg(x_i = x_j)$  lo cual es absurdo.

Sea  $\Gamma = \psi \cup \{\phi_i : i \geq 2\}$ , pruebo que  $\Gamma$  es satisfactible usando compacidad.

Si  $\psi \notin \Delta$ ,  $\Delta$  es satisfactible, por ejemplo, por un modelo que tenga como universo a los números naturales( $\mathbb{N}$ ).

Sea  $\Delta = \{\psi\} \cup \{\phi_a, \phi_b, \dots, \phi_z\}$ , es decir,  $\Delta$  esta formado por  $\psi$  y una cantidad finita de proposiciones  $\phi$ , sea entonces  $m = \max\{k : \phi_k \in \Delta\}$ (si no existe dicho  $m$  entonces  $\Delta = \{\psi\}$  que es satisfactible por hipótesis).

Por hipótesis,  $\psi$  tiene un modelo con al menos  $m$  elementos. Sea  $\mathcal{M}$  tal modelo( $|\mathcal{M}| \geq m$ ), se tiene por **proposición** que  $\mathcal{M} \models \phi_m$ .

Se tiene que  $\begin{cases} \mathcal{M} \models \psi \\ \mathcal{M} \models \phi_i & i \leq m \end{cases} \implies \mathcal{M} \models \Delta$ .  $\Delta$  es satisfactible y por compacidad  $\Gamma$  es satisfactible.

$\exists \mathcal{M} : \mathcal{M} \models \Gamma$ ,  $\mathcal{M}$  tiene que ser infinito. Si fuera finito con  $|\mathcal{M}| = c$ , se tiene que  $\mathcal{M} \models \phi_{c+1}$  y por lo tanto el modelo tiene al menos  $c + 1$  elementos distintos. Absurdo, luego  $\mathcal{M}$  es infinito.

Como  $\psi \in \Gamma$ ,  $\mathcal{M} \models \Gamma$  con  $|\mathcal{M}|$  un conjunto infinito.

---