


Logica

Autor: Agustín Fernández Bergé

Indice

-  [Final](#)
 -  [Practica 1](#)
 -  [Teoria](#)
-

Final

 [960-1198-max](#)

 [Apartado 1](#)

 [Apartado 2](#)

 [Apartado 3](#)

 [Apartado 4](#)

960-1198-max

Examen Final

1. Sea Γ un conjunto de fórmulas proposicionales. Demuestre que si el conjunto de valuaciones v tales que $[\Gamma]_v = T$ es finito, entonces Γ es infinito.
2. Sea $\Gamma \subseteq \text{PROP}$. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes:
 - (a) Γ es consistente,
 - (b) No existe ϕ tal que $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$,
 - (c) Existe al menos una fórmula ψ tal que $\Gamma \not\vdash \psi$.
3. Sea $\Gamma \subseteq \text{PROP}$. Demuestre que si existe una valuación v tal que $[\Gamma]_v = T$, entonces Γ es consistente.
4. Demuestre que todo conjunto consistente está contenido en un conjunto consistente maximal.
5. Demuestre el teorema de compacidad: Para todo conjunto de sentencias Γ , si todos los subconjuntos finitos de Γ son satisfactibles, entonces Γ es satisfactible.
6.
 - (a) Defina recursivamente el conjunto de variables libres de una fórmula ϕ .
 - (b) Describa el problema de captura de variables libres.
 - (c) ¿Cómo se evita la captura de variables libres? Defina el concepto de término libre para una variable en una fórmula.
7. Defina el concepto de modelo o interpretación para una signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$.
8. Defina el concepto de entorno s y explique por qué es necesaria su introducción.
9. Sea Γ un conjunto de fórmulas de la lógica de predicados sobre una signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Definimos los *modelos de Γ* de la siguiente forma:
$$\text{Mod}(\Gamma) = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \text{ es un modelo sobre } (\mathcal{F}, \mathcal{P}) \text{ y } \mathcal{M} \models \Gamma\}$$
Decimos que Γ es satisfactible si $\text{Mod}(\Gamma) \neq \emptyset$.
Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
 - (a) Si $\text{Mod}(\Gamma \cap \Delta) = \emptyset$, entonces Γ es no satisfactible y Δ es no satisfactible.
 - (b) Si $\text{Mod}(\Gamma \cup \Delta) = \emptyset$, entonces Γ es no satisfactible o Δ es no satisfactible.

Apartado 1

Apartado 1

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ el conjunto de proposiciones que satisfacen a Γ , si Γ es finito, entonces todas las formulas de Γ están determinadas por un conjunto finito de variables proposicionales, sean p_1, \dots, p_k dichas variables.

Defino entonces la valuación:

$$v' = \begin{cases} v_1(p_i), & 1 \leq i \leq k \\ !v_1(p_{k+1}) \\ !v_2(p_{k+2}) \\ \vdots \\ !v_n(p_{k+n}) \end{cases}$$

Donde $!v_i(p) = T$ si $v_i(p) = F$ y $v_i(p) = F$ si $v_i(p) = T$.

v' satisface Γ ya que asigna valores de verdad a las variables p_1, \dots, p_k de manera que se satisfaga Γ (hace esto asignando los mismos valores que asignaría v_1 que sabemos que satisface Γ). Sin embargo $v' \neq v_i \forall i$ dado que asignan distintos valores de verdad para al menos una variable proposicional. Luego se tiene que v' no pertenece al conjunto de valuaciones que satisface Γ y por lo tanto v' no satisface Γ . Absurdo.

Por RAA, Γ es infinito.

Nota: Si Γ es una contradicción no hay una valuación que lo satisfaga y esta prueba no sirve. En este caso se puede tomar $\Gamma = \{\perp\}$ y se tiene un conjunto que es satisfecho por un conjunto finito de valuaciones (\emptyset) pero que es finito.

Apartado 2

Apartado 2

$a \implies b$) Si existiese dicha formula ϕ entonces por introducción de \perp , $\Gamma \vdash \perp$ y Γ es inconsistente, Absurdo. La formula ϕ no existe.

$b \implies c$) Si por el contrario para toda formula se tiene que $\Gamma \vdash \psi$, tomando $\psi \equiv \perp$ es posible derivar cualquier formula usando la regla de eliminación de \perp , en particular se puede derivar $\neg \perp$, esto constituye una contradicción con b. Por RAA, vale c.

$c \implies a$) Nuevamente si Γ fuese inconsistente, por eliminación de \perp se puede derivar cualquier formula y se tiene que no existe una formula tal que $\Gamma \not\vdash \perp$. Absurdo y por lo tanto vale a.

Apartado 3

Apartado 3

Todo conjunto satisfactible es consistente.

Sea v una valuación que satisface a un conjunto Γ . Es decir, $\llbracket \Gamma \rrbracket_v = T$, suponiendo que Γ es inconsistente, se tiene que $\Gamma \vdash \perp$ y por soundness $\Gamma \models \perp$. Luego no hay ninguna valuación que valide a Γ , Absurdo. Γ resulta consistente.

Apartado 4

Apartado 4

Sea Γ un conjunto consistente.

Se tiene que $PROP$ es un conjunto numerable, defino entonces una serie de conjuntos

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n & \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \perp \\ \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \not\vdash \perp \end{cases}$$

Cada uno de los conjuntos Γ_n es consistente.

Sea $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$:

- Γ^* es un conjunto consistente. Suponiendo que $\Gamma^* \vdash \perp$, dicha prueba por DN utiliza una cantidad finita de premisas, sean $\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \dots, \phi_{i_k}$ dichas premisas, se tiene que existe j tal que $\{\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_k}\} \in \Gamma_j$, luego Γ_j es inconsistente. Absurdo.
- Γ^* es consistente maximal. Sea $\Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\phi_k \in \Delta$ se tiene que $\Gamma_k \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$ es consistente. Luego $\Gamma_k \cup \{\phi_k\} = \Gamma_{k+1} \subseteq \Gamma^*$ y $\phi_k \in \Gamma^*$. Por lo tanto $\Delta \subseteq \Gamma^*$ y resulta $\Delta = \Gamma^*$.

Practica 1

Ejercicio 17

Ejercicio 17

Ejercicio 17

Demuestre que $\{\vee, \neg\}$ es un conjunto completo de conectivos.

Un conjunto de conectivos A es completo \iff Para toda formula $\psi \in PROP$ existe una formula $\phi \in PROP$ tal que ϕ usa únicamente conectivos de A y $\models \phi \iff \psi$

Pruebo por PIP sobre $PROP$:

CB1) $\psi \equiv p_i$

CB2) $\psi \equiv \perp$

En ambos casos ψ no usa ningún conectivo, por lo tanto la proposición vale trivialmente tomando $\phi \equiv \psi$

PI)

Pruebo que: $\models \phi_1 \wedge \phi_2 \iff \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)$

Sea v una valuación cualquiera:

$$\llbracket \phi_1 \wedge \phi_2 \rrbracket_v \iff \llbracket \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2) \rrbracket_v$$

\iff (def de semántica de \iff)

$$\llbracket \phi_1 \wedge \phi_2 \rrbracket_v = \llbracket \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2) \rrbracket_v$$

Si $\llbracket \phi_1 \wedge \phi_2 \rrbracket_v = T$ entonces por def de semántica de \wedge , $\llbracket \phi_1 \rrbracket_v = \llbracket \phi_2 \rrbracket_v = T$

Luego:

$$\llbracket \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2) \rrbracket_v = T$$

\iff def de semántica de \neg

$$\llbracket \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2 \rrbracket_v = F$$

\iff def de semántica de \vee

$$\llbracket \neg\phi_1 \rrbracket_v = F \wedge \llbracket \neg\phi_2 \rrbracket_v = F$$

\iff def de semántica de \neg

$$\llbracket \phi_1 \rrbracket_v = T \wedge \llbracket \phi_2 \rrbracket_v = T$$

Por lo tanto la proposición vale en este caso.

Si $\llbracket \phi_1 \wedge \phi_2 \rrbracket_v = F$ entonces $\llbracket \phi_1 \rrbracket_v = F$ o $\llbracket \phi_2 \rrbracket_v = F$

Luego si $\llbracket \phi_1 \rrbracket_v = F$ entonces $\llbracket \neg\phi_1 \rrbracket_v = T$ por semántica de \vee y $\llbracket \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2 \rrbracket_v = T$ por def de semántica de \vee

Análogamente partiendo de $\llbracket \phi_2 \rrbracket_v = F$ se puede llegar al mismo resultado.

Luego por def de semántica de \vee , $\llbracket \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2) \rrbracket_v = F$

Por lo tanto $\llbracket \phi_1 \wedge \phi_2 \rrbracket_v = \llbracket \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2) \rrbracket_v$ y $\models \phi_1 \wedge \phi_2 \iff \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)$

Luego si $\psi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$, se tiene que existe la proposición $\chi \equiv \neg(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)$ y por lo visto anteriormente $\models \psi \iff \chi$

Si $\psi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$ la misma proposición ψ solo usa el conectivo \vee , se puede llegar a lo mismo para $\psi \equiv \neg\phi_1$

Si $\psi \equiv \phi_1 \implies \phi_2$, se tiene que existe $\chi \equiv \neg\phi_1 \vee \phi_2$ y $\models \psi \iff \chi$

Por semántica de \iff , tiene que ocurrir que $\llbracket \phi_1 \implies \phi_2 \rrbracket_v = \llbracket \neg\phi_1 \vee \phi_2 \rrbracket_v$

Si $\llbracket \phi_1 \rrbracket_v = F$ entonces por semántica de \vee $\llbracket \phi_1 \rrbracket_v = T$ y:

- Por semántica de \vee , $\llbracket \neg\phi_1 \vee \phi_2 \rrbracket_v = T$
- Por semántica de \implies , $\llbracket \phi_1 \implies \phi_2 \rrbracket_v = T$

Si $\llbracket \phi_1 \rrbracket_v = T$ entonces por semántica de \neg $\llbracket \neg\phi_1 \rrbracket_v = F$:

- Si $\llbracket \phi_2 \rrbracket_v = T$ por semántica de \vee $\llbracket \neg\phi_1 \vee \phi_2 \rrbracket_v = T$ y por semántica de \implies $\llbracket \phi_1 \implies \phi_2 \rrbracket_v = T$
- Si $\llbracket \phi_2 \rrbracket_v = F$ por semántica de \vee $\llbracket \neg\phi_1 \vee \phi_2 \rrbracket_v = F$ y por semántica de \implies $\llbracket \phi_1 \implies \phi_2 \rrbracket_v = F$

Luego se cumple que $\models \psi \iff \chi$

Por PIP, $\{\vee, \neg\}$ es un conjunto completo de conectivos

b) Defino \oplus como el operador NAND, es decir $\phi_1 \oplus \phi_2 \equiv \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$. Para probar que el operador por si solo es un conjunto completo de conectivos, uso PIP y el hecho de que $\{\neg, \wedge\}$ es un conjunto completo de conectivos.

CB) $\psi \equiv p_i$ o $\psi \equiv \perp$

La formula no usa conectivos y la proposición vale trivialmente.

PI)

$\psi \equiv \neg\phi$:

Tomando $\chi \equiv \phi \oplus \phi$,

$\llbracket \phi \oplus \phi \rrbracket_v = \llbracket \neg(\phi \wedge \phi) \rrbracket_v$

Si $\llbracket \neg\phi \rrbracket_v = T$ entonces $\llbracket \phi \rrbracket_v = F$

Aplicando definiciones de semántica:

$\llbracket \phi \wedge \phi \rrbracket_v = F$ y $\llbracket \neg(\phi \wedge \phi) \rrbracket_v = T$

Por el contrario si $\llbracket \neg\phi \rrbracket_v = F$ y $\llbracket \phi \rrbracket_v = T$

Aplicando definiciones de semántica:

$\llbracket \phi \wedge \phi \rrbracket_v = T$ y $\llbracket \neg(\phi \wedge \phi) \rrbracket_v = F$

Se cumple la propiedad

$$\psi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$$

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \equiv \neg(\phi_1 \oplus \phi_2)$$

Y la propiedad se cumple.

Teoria

- [Indecibilidad de la lógica de predicados](#)
- [Los 7 lemas de Dante](#)
- [Operadores de CTL](#)
- [Problema de alcanzabilidad](#)
- [Problema random](#)
- [Teorema de compacidad](#)
- [Teorema de Lowenheim-Skolen](#)

Indecibilidad de la lógica de predicados

Indecibilidad de la lógica de predicados

No existe un procedimiento P que permita decidir si un cierto predicado ϕ es satisfactible por todo modelo ($\models \phi$).

Suponiendo que dicho procedimiento P existe. De ser así, se puede usar P para decidir el problema de POST, el cual es indecible.

Sea la signatura $\mathcal{F} = \{e, f_1, f_0\}$ con $ar(e) = 0$, $ar(f_1) = 1$, $ar(f_0) = 1$.

La idea de la signatura es representar palabras de bits, es decir, la palabra b_1, b_2, \dots, b_n se representa con $f_n(f_{n-1}(\dots, f_2(f_1(e))))$ con notación $f_{b_1 b_2 \dots b_n}(e)$. e representa la palabra vacía.

$\mathcal{P} = \{R\}$ con $ar(R) = 2$, la idea de $R(s, t)$ es "hay un intento de solución que lleva a s arriba y a t abajo en ladrillos".

Defino las proposiciones:

Si se tiene la siguiente instancia c para el problema de POST:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2 \\ t_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix}$$

Defino las proposiciones:

$$\phi_1 \equiv \bigwedge_{i=1}^k R(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e))$$

$$\phi_2 \equiv \forall u \forall v : R(u, v) \implies \bigwedge_{i=1}^k R(f_{s_i}(u), f_{t_i}(v))$$

$$\phi_3 \equiv \exists z : R(z, z)$$

Cada proposición establece:

$\phi_1 \equiv$ Hay k intentos de solución donde el i -ésimo intento lleva a s_i arriba y t_i abajo en ladrillos (uno por cada uno de los bloques iniciales).

$\phi_2 \equiv$ Si se tiene un intento de solución que lleva a u arriba y v abajo en ladrillos entonces se puede extender dicho intento de solución con los bloques existentes.

$\phi_3 \equiv$ Hay un intento de solución que lleva a la misma palabra de bits arriba y abajo en ladrillos.

Sea $\phi_c \equiv \phi_1 \wedge \phi_2 \rightarrow \phi_3$

Decimos que c tiene solución $\iff \models \phi_1 \wedge \phi_2 \rightarrow \phi_3$. (Proposición 1)

Luego se puede armar el siguiente procedimiento para decidir el problema de POST a partir de P :

$$c \rightarrow \phi_c \xrightarrow{P} \begin{cases} \models \phi_c \rightarrow \text{POST tiene solución} \\ \not\models \phi_c \rightarrow \text{POST no tiene solución} \end{cases}$$

Lo cual no es posible, ya que POST es un problema indecidible, luego el procedimiento P no puede existir.

Demostración de la proposición 1

\Leftarrow) Suponiendo que $\models \phi_c$

En particular para el siguiente modelo:

$$|\mathcal{M}| = \{0, 1\}$$

$$e^{\mathcal{M}} = \lambda$$

$$f_0^{\mathcal{M}}(s) = s0$$

$$f_1^{\mathcal{M}}(s) = s1$$

$$R^{\mathcal{M}} = \{(s, t) : \exists i_1, i_2, \dots, i_k \text{ tales que } s = s_{i_1}s_{i_2}, \dots, s_{i_n} \wedge t = t_{i_1}t_{i_2}, \dots, t_{i_n}\}$$

Veamos que:

- $\mathcal{M} \models \phi_1$, puesto que $(s_i, t_i) \in R^{\mathcal{M}}$, se puede tomar la secuencia $[i]$ y se tiene que efectivamente para todo entorno s , $\llbracket R(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e)) \rrbracket_{\mathcal{M}, s} = T$.
- También se tiene que $\mathcal{M} \models \phi_2$, sean u, v términos y $\llbracket R(u, v) \rrbracket_{\mathcal{M}, s} = T$ se tiene que existe una secuencia j_1, j_2, \dots, j_k tal que $u = s_{j_1}s_{j_2}, \dots, s_{j_n} \wedge v = t_{j_1}t_{j_2}, \dots, t_{j_n}$. Luego se puede añadir i a la secuencia para formar (us_i, vs_i) .
- Como por hipótesis se tiene que $\mathcal{M} \models \phi_c$, en particular se tiene que $\mathcal{M} \models \phi_3$ y se tiene que existen i_1, i_2, \dots, i_k tal que $z = s_{i_1}s_{i_2}, \dots, s_{i_k}$ y $(z, z) \in R^{\mathcal{M}}$. Luego c tiene solución.

Los 7 lemas de Dante

Los 7 lemas de Dante

Sea $\Gamma \subseteq PROP$, Γ es consistente si $\Gamma \not\vdash \perp$

Si $\Gamma \vdash \perp$, Γ es inconsistente

Lema 1) Son equivalentes:

1. Γ es inconsistente
2. $\exists \phi : \Gamma \vdash \phi \wedge \Gamma \vdash \neg \phi$
3. $\forall \phi : \Gamma \vdash \phi$

Demostración:

1 \implies 2), Surge de aplicar la regla de eliminación de \perp para derivar ϕ y luego aplicar la misma regla para derivar $\neg \phi$.

2 \implies 3) Surge de aplicar la regla de introducción de \perp y luego de aplicar la regla de

eliminación de \perp para derivar ϕ

3 \implies 1) Γ deriva todas las proposiciones, en particular deriva $\phi \equiv \perp$

Lema 2) Si $\Gamma \subseteq PROP$ es satisfactible entonces es consistente,

$\exists v : \llbracket \Gamma \rrbracket_v = T \implies \Gamma$ es consistente

Demostración:

Por el contrario, si $\Gamma \vdash \perp$ por soundness $\Gamma \models \perp$ y $\forall v' : \llbracket \Gamma \rrbracket_{v'} = T \implies \llbracket \perp \rrbracket_{v'} = T$, en particular para la valuación v se tiene que $\llbracket \perp \rrbracket_v = T$ lo cual es absurdo. Por lo tanto Γ es consistente.

Lema 3) Si $\Gamma \subseteq PROP$, $\phi \in PROP$

1. Si $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente $\implies \Gamma \vdash \phi$

2. Si $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente $\implies \Gamma \vdash \neg\phi$

Demostración)

Ambas se demuestran por RAA.

Por ejemplo para 1, partiendo de Γ si se supone $\neg\phi$ por hipótesis se puede derivar \perp , luego usando la regla de reducción al absurdo se introduce ϕ y se tiene que $\Gamma \vdash \phi$. Para 2 es análogo.

Lema 4) Un conjunto Γ es consistente maximal si es consistente y si $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' es consistente entonces $\Gamma = \Gamma'$. Se tiene entonces que todo conjunto consistente está contenido en un conjunto consistente maximal.

Demostración)

$PROP$ es un conjunto numerable, en efecto, uno puede considerar los conjuntos $P_i \subseteq PROP$ donde P_i está formado por todas las proposiciones que usan i conectivos. Cada uno de estos conjuntos P_i son finitos y por lo tanto numerables, por unión numerable de conjuntos numerables $PROP$ resulta numerable.

\

Sean entonces los conjuntos Γ_i definidos como

$$\Gamma_0 = \Gamma \quad \text{y} \quad \Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\psi_n\}, & \Gamma_n \cup \{\psi_n\} \text{ es consistente} \\ \Gamma_n, & \Gamma_n \cup \{\psi_n\} \text{ es inconsistente} \end{cases}$$

Una rápida inducción prueba que $\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma_n$ es consistente, $\Gamma_0 = \Gamma$ es consistente por hipótesis, luego si Γ_n es consistente entonces si $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ es inconsistente $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ y resulta Γ_{n+1} consistente caso contrario $\Gamma_n = \Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ y Γ_{n+1} consistente.

\

Sea $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$, suponiendo que es inconsistente ($\Gamma^* \vdash \perp$), cualquier derivación requiere un número finito de pasos por lo tanto la derivación anterior requiere de un número finito de premisas. Sean $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k \in \Gamma^*$ dichas premisas, existen n_1, \dots, n_k tales que $\phi_i \in \Gamma_{n_i}$ (las premisas pertenecen a alguno de los conjuntos Γ que conforman la unión Γ^*).

\

Sea entonces $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, $\{\phi_1, \dots, \phi_k\} \subseteq \Gamma_m$ y resulta Γ_m inconsistente, lo cual es absurdo ya que todos los conjuntos Γ_i son consistentes. Por lo tanto Γ^* es consistente

\

Sea entonces Δ un conjunto consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$. Como $PROP$ es numerable se tiene que se puede asignar un número natural a cada $\phi \in \Delta$, por lo tanto sea m tal que $\psi_m \equiv \phi$, se

tiene que $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\psi_m \in \Delta$ por lo que $\Gamma_m \cup \{\psi_m\} \subseteq \Delta$.

\

Como Δ es consistente, todos sus conjuntos deben ser consistentes, entonces $\Gamma_m \cup \{\psi_m\}$ resulta consistente y $\psi_m \in \Gamma_m \cup \{\psi_m\} = \Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$, todas las proposiciones $\psi_m \in \Delta$ pertenecen también a Γ^* y por lo tanto $\Delta \subseteq \Gamma^*$ de donde resulta $\Delta = \Gamma^*$.

\

Se tiene que Γ^* es un conjunto consistente maximal y $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma^*$ como se queria probar.

Lema 5) Si Γ es consistente maximal entonces es cerrado bajo la derivación, es decir, para toda proposición ϕ , $\Gamma \vdash \phi \implies \phi \in \Gamma$

Demostración)

Si $\Gamma \vdash \phi$ y $\phi \notin \Gamma$ entonces $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente y por Lema 3 ítem 2 $\Gamma \vdash \neg\phi$ luego resulta Γ inconsistente. ABS!!. $\phi \in \Gamma$.

Lema 6) Si Γ es consistente maximal entonces $\forall \phi \in PROP : \phi \in \Gamma \vee \neg\phi \in \Gamma$

Demostración)

Sea $\phi \in PROP$:

Si $\phi \in \Gamma$ entonces la propiedad vale.

Si $\phi \notin \Gamma$ entonces $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente y por Lema 3 ítem 2, $\Gamma \vdash \neg\phi$ y por lema 5, $\neg\phi \in \Gamma$.

Lema 7) Si Γ es consistente entonces es satisfactible, $\exists v : \llbracket \Gamma \rrbracket_v = T$

Demostración)

Por lema 4, Γ esta contenido en un conjunto consistente maximal Γ^* , defino la valuación

$$v(p_i) = \begin{cases} T, & p_i \in \Gamma^* \\ F, & p_i \notin \Gamma^* \end{cases}$$

Pruebo por inducción que v satisface a Γ^* , es decir, $\forall \phi : \phi \in \Gamma^* \iff \llbracket \phi \rrbracket_v = T$.

CB1) $\phi \equiv \perp$

$\perp \notin \Gamma^*$, de lo contrario Γ^* no seria consistente. Como para toda valuación $v' \llbracket \perp \rrbracket_{v'} = F$. La propiedad vale.

CB2) $\phi \equiv p_i$

Vale directamente por def de v .

PI1) $\phi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$

$$\llbracket \psi_1 \wedge \psi_2 \rrbracket_v \iff \llbracket \psi_1 \rrbracket_v = T \wedge \llbracket \psi_2 \rrbracket_v = T \iff \psi_1 \in \Gamma^* \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$$

Luego si $\psi_1 \in \Gamma^* \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$ entonces usando la introducción del \wedge se puede derivar $\psi_1 \wedge \psi_2$ y por Lema 5, $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$

Si $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$ se pueden usar dos reglas de eliminación del \wedge para derivar ϕ_1 y ϕ_2 y por Lema 5, $\psi_1 \in \Gamma^* \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$.

Se tiene que $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma^* \iff \psi_1 \in \Gamma^* \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$ y vale la propiedad.

Corolario Lema 7) Si $\Gamma \not\vdash \phi \iff \exists v : \llbracket \Gamma \rrbracket_v = T \wedge \llbracket \phi \rrbracket_v = F$

$$\Gamma \not\vdash \phi \xLeftrightarrow{\text{Lema 3}} \Gamma \cup \{\neg\phi\} \not\vdash \perp \xLeftrightarrow{\text{Lema 7}} \exists v : \llbracket \Gamma \cup \{\neg\phi\} \rrbracket_v = T \iff \exists v : \llbracket \Gamma \rrbracket_v = T \wedge \llbracket \phi \rrbracket_v = F$$

Teorema de completitud de la lógica proposicional

$$\Gamma \vdash \phi \iff \Gamma \models \phi$$

\Rightarrow) Teorema de soundness o corrección

\Leftarrow) Teorema de correctitud

Suponiendo que $\Gamma \models \phi$ y $\Gamma \not\models \phi$, por corolario del lema 7 $\exists v : \llbracket \Gamma \rrbracket_v = T \wedge \llbracket \phi \rrbracket_v = F$ y por def de $\models \Gamma \not\models \phi$, ABS!.

Operadores de CTL

Operadores de CTL

$\forall \Diamond \phi \equiv \forall [\top \cup \phi]$, ϕ es inevitable para toda traza.

Semántica:

$\mathcal{M}, s \models \forall \Diamond \phi$

\iff

$\mathcal{M}, s \models \forall [\top \cup \phi]$

\iff

Para toda traza $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$ donde $s = s_0$ y $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que:

- $\mathcal{M}, s_j \models \phi$

- $\mathcal{M}, s_i \models \top, \forall i < j$

$\iff (\mathcal{M}, s_i \models \top$ para todo estado $s_i)$

Para toda traza $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$ donde $s = s_0$ y $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que:

- $\mathcal{M}, s_j \models \phi$

$\forall \Box \phi \equiv \neg \exists \Diamond \neg \phi$, ϕ es invariante para toda traza.

Semántica:

$\mathcal{M}, s \models$

\iff

$\mathcal{M}, s \models \neg \exists \Diamond \neg \phi$

\iff

No es verdad que para alguna traza $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$ con $s = s_0$ se cumple que $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}, s_j \models \neg \phi$

\iff

Para toda traza $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$ con $s = s_0$ se cumple que $\forall j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}, s_j \not\models \neg \phi$

\iff

Para toda traza $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$ con $s = s_0$ se cumple que $\forall j \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, s_j \models \phi$

Problema de alcanzabilidad

Problema de alcanzabilidad

Sea G un grafo, se quiere modelar con la lógica de predicados la siguiente sentencia

Existe un camino desde un vertice u hacia un vertice v

Dicha sentencia no es modelable en la lógica de predicados

Sea R un símbolo de predicados de aridad 2 y u, v constantes. Busco una formula ψ tal que $\mathcal{M} \models \psi \iff$ existe un camino de longitud finita de $u^{\mathcal{M}}$ a $v^{\mathcal{M}}$.

La proposición ψ no puede existir.

Suponiendo que existe tal ψ , defino:

$$\phi_0 \equiv (u = v)$$

$$\phi_1 \equiv R(u, v)$$

$$\phi_2 \equiv \exists x_1 : R(u, x_1) \wedge R(x_1, v)$$

\vdots

$$\phi_n \equiv \exists x_1, \exists x_2, \dots, \exists x_{n-1} : R(u, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{n-1}, v)$$

Proposición) $\mathcal{M} \models \phi_n \iff$ existe un uv -camino de longitud n

Demostración)

En efecto, si $\mathcal{M} \models \phi_n$ entonces el uv -camino buscado es u, x_1, x_2, \dots, v .

Luego si hay un uv -camino de longitud n de la forma $u, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, v$ entonces aplicando $n - 1$ veces la regla de introducción del existe y luego aplicando soundness se llega a lo buscado.

Luego sea $\Gamma = \{\neg\phi_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi\}$

Γ no es satisfactible, si lo fuera se tiene que existe un modelo \mathcal{M} tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$ se tiene en particular que $\Gamma \models \psi$ y existe un camino desde $u^{\mathcal{M}}$ a $v^{\mathcal{M}}$. Sea k la longitud de este camino, se tiene que $\mathcal{M} \models \phi_k$, pero también se tiene que $\mathcal{M} \models \neg\phi_k$, ABS!. Luego Γ no es satisfactible.

Pruebo que Γ es satisfactible por compacidad.

Sea $\Delta \subseteq \Gamma$ finito. Es posible que Δ contenga una cantidad finita de proposiciones $\neg\phi_i$.

- Si $\Delta = \{\psi\}$, Δ es satisfactible por un modelo donde $|M| = \{1, 2\}$, $u^{\mathcal{M}} = 1$, $v^{\mathcal{M}} = 2$ y $R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2)\}$.
- Si Δ contiene una o mas proposiciones ϕ_i , sea $m = \max\{i : \neg\phi_i \in \Delta\}$. el modelo $|M| = \{1, \dots, m+2\}$, $u^{\mathcal{M}} = 1$, $v^{\mathcal{M}} = m+2$ y $R^{\mathcal{M}} = \{(a, a+1) : a \in [1, \dots, m+1]\}$. Notar que el único camino existente es $1, 2, 3, \dots, m+1, m+2$ el cual es un uv -camino de longitud $m+1$. Se tiene que $\mathcal{M} \models \psi$ (porque existe un uv -camino) y $\mathcal{M} \models \neg\phi_i$ para $i \leq m$ (puesto que no hay un camino de longitud menor a $m+1$). Por lo tanto Δ es satisfactible. Todo subconjunto finito de Γ es satisfactible, por teorema de compacidad, Γ es satisfactible.

Se tiene entonces que Γ es satisfactible por teorema de compacidad pero a su vez Γ no es satisfactible, ABS!.

El absurdo proviene de suponer que existe la proposición ψ definida arriba. Por lo tanto dicha proposición no puede existir.

Problema random

Problema random

$$\exists O \exists \Box p \implies \exists \Box \exists O p)$$

Si la primera condición es verdad para un sistema \mathcal{M} y un estado s por semántica de O y \Box

existe un estado s' tal que existe una traza $s' = s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$ tal que $\forall i : \mathcal{M}, s_i \models p$ (*1)

Por inducción puedo probar que $\forall i : \mathcal{M}, s_i \models \exists Op$

CB) $i = 0, s_i = s'$

$s' \rightarrow s_1$ y $\mathcal{M}, s_1 \models p$ por (*1), por lo tanto vale la proposición

HI) $\forall i : \mathcal{M}, s_i \models p$

Para s_{i+1} existe un estado s_{i+2} tal que $s_{i+1} \rightarrow s_{i+2}$ y $\mathcal{M}, s_{i+2} \models p$ por (*1), por lo tanto la proposición vale.

Por lo tanto $\exists O \Box p \implies \exists \Box Op$

La reversa es mentira

Teorema de compacidad

Teorema de compacidad

Sea $\Gamma \subseteq FORM$, si todos los subconjuntos finitos de Γ son satisfactibles, entonces Γ es satisfactible.

Suponiendo que Γ no es satisfactible, Γ es entonces una contradicción. Se tiene que $\Gamma \models \perp$ y por completitud de la lógica de predicados $\Gamma \vdash \perp$. Por lo tanto existe una prueba en deducción natural de \perp partiendo de premisas de Γ . Dicha prueba utiliza una cantidad finita de premisas. Sea $\Delta = \{\phi_1, \dots, \phi_k\} \subseteq \Gamma$ el conjunto formado por dichas premisas, se tiene que $\Delta \vdash \perp$, pero al ser Δ un subconjunto finito de Γ se tiene que Δ es satisfactible y $\Delta \not\models \perp$. Absurdo.

Por lo tanto Γ es satisfactible.

Teorema de Lowenheim-Skolen

Teorema de Lowenheim-Skolen

Sea $\psi \in FORM$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : \psi$ tiene un modelo con al menos n elementos. Existe un modelo que satisface a ψ que tiene infinitos elementos en el universo (ie, tiene un modelo infinito).

Defino las formulas:

- $\phi_2 \equiv \exists x_1 \exists x_2 : \neg(x_1 = x_2)$
 - $\phi_3 \equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 : \neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3)$
 - \vdots
 - $\phi_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n : \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j)$
- (Cada una de las ϕ_k es equivalente a "existen k elementos distintos")

Proposición: $\mathcal{M} \models \phi_n \iff |\mathcal{M}|$ tiene al menos n elementos

Si $|\mathcal{M}|$ tiene al menos n elementos estos pueden enumerarse, sean e_1, \dots, e_n dichos elementos son todos distintos entre si y por lo tanto $\mathcal{M} \models \phi_n$.

Si se tiene que $\mathcal{M} \models \phi_n$ entonces existen los elementos x_1, \dots, x_n . No puede ocurrir que dos elementos x_i y x_j sean iguales ya que de ser así $\mathcal{M} \models x_i = x_j$ y $\mathcal{M} \models \neg(x_i = x_j)$ lo cual es absurdo.

Sea $\Gamma = \psi \cup \{\phi_i : i \geq 2\}$, pruebo que Γ es satisfactible usando compacidad.

Si $\psi \notin \Delta$, Δ es satisfactible, por ejemplo, por un modelo que tenga como universo a los números naturales(\mathbb{N}).

Sea $\Delta = \{\psi\} \cup \{\phi_a, \phi_b, \dots, \phi_z\}$, es decir, Δ esta formado por ψ y una cantidad finita de proposiciones ϕ , sea entonces $m = \max\{k : \phi_k \in \Delta\}$ (si no existe dicho m entonces $\Delta = \{\psi\}$ que es satisfactible por hipótesis).

Por hipótesis, ψ tiene un modelo con al menos m elementos. Sea \mathcal{M} tal modelo($|\mathcal{M}| \geq m$), se tiene por **proposición** que $\mathcal{M} \models \phi_m$.

Se tiene que $\left. \begin{array}{l} \mathcal{M} \models \psi \\ \mathcal{M} \models \phi_i \quad i \leq m \end{array} \right\} \implies \mathcal{M} \models \Delta$. Δ es satisfactible y por compacidad Γ es satisfactible.

$\exists \mathcal{M} : \mathcal{M} \models \Gamma$, \mathcal{M} tiene que ser infinito. Si fuera finito con $|\mathcal{M}| = c$, se tiene que $\mathcal{M} \models \phi_{c+1}$ y por lo tanto el modelo tiene al menos $c + 1$ elementos distintos. Absurdo, luego \mathcal{M} es infinito.

Como $\psi \in \Gamma$, $\mathcal{M} \models \Gamma$ con $|\mathcal{M}|$ un conjunto infinito.