















Complementos de Matemática 1

Autor: Agustín Fernández Bergé

Indice

-  [Definiciones](#)
 -  [Excalidraw](#)
 -  [Parcial 1](#)
 -  [Practica 1](#)
 -  [Practica 10](#)
 -  [Practica 11](#)
 -  [Practica 2](#)
 -  [Practica 4](#)
 -  [Practica 5](#)
 -  [Practica 6 parte 1](#)
 -  [Practica 8](#)
 -  [Practica 9](#)
 -  [Presentaciones](#)
 -  [Teoremas](#)
-

Definiciones

- [Camino](#)
- [Caminos y ciclos hamiltonianos](#)
- [Grados de un grafo](#)
- [Grafo](#)
- [Grafo autocomplementario](#)
- [Grafo complemento](#)
- [Grafo conexo](#)
- [Isomorfismo](#)
- [Matriz de adyacencia](#)
- [Matriz de incidencia](#)
- [Recorridos y circuitos de Euler](#)
- [Subgrafos](#)
- [Vértice de corte y arista de corte](#)
- [Vértices similares y grafo vértice transitivo](#)

Camino

Camino

Un camino es una secuencia alternante de vértices y aristas.

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_k$$

En el caso de un grafo simple es posible determinar el camino únicamente la sucesión de vértices

$$v_1, v_2, \dots, v_k$$

Tipos de caminos

Un **camino cerrado** es un camino donde el primer y el ultimo vértice son iguales

Un **recorrido** es un camino que no repite aristas

Un **circuito** es un recorrido cerrado.

Un **camino simple** es un camino que no repite vértices

Un **ciclo** es un camino simple cerrado.

Caminos y ciclos hamiltonianos

Caminos y ciclos hamiltonianos

Un camino es hamiltoniano \iff visita todos los vertices del grafo exactamente una vez.

Condiciones suficientes simples

Teorema de Dirac

Si G es un grafo con $n \geq 3$ vertices tal que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ entonces G tiene un ciclo hamiltoniano

Teorema de Ore

Si G es un grafo con $n \geq 3$ vértices donde $\forall u, v \in V(G)$ vértices no adyacentes se cumple que $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$ entonces tiene un ciclo hamiltoniano.

Grados de un grafo

Grados de un grafo

Se denota el grado de un vértice v de un grafo G como $d(v)$ y se define

$$d(v) := |\{(u, v) : (u, v) \in E(G)\}|$$

Es decir, el grado del vértice es la cantidad de aristas incidentes en el.

Si un vértice tiene grado 0, se dice que es un vértice aislado.

Definiciones

Para un grafo G se denota

Grado mínimo

$$\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}$$

Grado maximo

$$\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$$

Grado promedio

$$\bar{d}(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

Grafo

Grafo

Un grafo $G = (V, E)$ se representa como dos conjuntos V y E donde $E \subseteq V^2$, es decir, E se forma usando pares de elementos de V . El conjunto $V(G)$ se conoce como vértices del grafo y el conjunto $E(G)$ se conoce como aristas del grafo.

Se dice que si una arista $e = (u, v)$ con $u, v \in V$ entonces la arista e une los vértices u y v .

Grafos especiales

Grafo vacio

El grafo (\emptyset, \emptyset) es el grafo vacío.

Grafo trivial

El grafo que tiene un solo vértice y ninguna arista es el grafo trivial.

Es decir, $|V(G)| = 1$ y $E = \emptyset$

Grafos simples

Una arista puede representarse también como un par de elementos de V , donde los vértices son aquellos elementos unidos por la arista.

Una arista que une un vértice consigo mismo es un lazo o bucle.

Si hay mas de una arista en el grafo que une el mismo par de vértice, se dice que es una multigrado o arista paralela.

Aquellos grafos que no tienen ni aristas paralelas ni lazos son los llamados grafos simples.

En los grafos simples, una arista queda unívocamente determinada por los pares de vértices que los unen.

Grafos completos

Se dice que un grafo simple es completo \iff no se le pueden añadir mas aristas.

Es decir, su conjunto de aristas es $E = \{(u, v) : u, v \in V\}$

Un grafo completo de n vértices se representa como el grafo K_n

Caminos

Un camino de n vértices se representa como P_n donde

$$V(P_n) = \{x_i : 1 \leq i \leq n\} \quad E(P_n) = \{(x_i, x_{i+1}) : 1 \leq i < n\}$$

Ciclos

Un ciclo de n vértices se presenta como C_n donde

$$V(C_n) = \{x_i : 1 \leq i \leq n\} \quad E(C_n) = \{(x_i, x_{i+1}) : 1 \leq i < n\} \cup \{(x_n, x_1)\}$$

Grafos bipartitos

Un grafo G es bipartito \iff su conjunto de vértices puede particionarse en 2 conjuntos X e Y de manera que $\forall e \in E(G)$, e une un vértice de X con un vértice de Y .

Explicación alternativa, un grafo es bipartito si sus vértices pueden pintarse de rojo y azul de manera que no haya ninguna arista que una vértices con el mismo color.

Aquel grafo simple bipartito al cual no se le pueden añadir mas aristas sin que deje de ser bipartito se dice que es bipartito completo y se denota $K_{n,m}$ donde n y m son los cardinales de las particiones.

Hipercubo

Un hipercubo o n -cubo se define como aquel grafo donde el conjunto de vértices son las n -uplas (a_1, \dots, a_n) con $a_i \in \{0, 1\}$ para todo i y dos n -uplas son adyacentes \iff difieren en exactamente una componente.

Grafo rueda

Para $n \geq 3$ se define el grafo rueda de n radios formado por un ciclo de n vértices y un vértice adicional unido a todos los vértices del ciclo.

$$V(G) = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$$

$$E = \{(v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i < n\} \cup \{(v_n, v_1)\} \cup \{(v_i, v_{n+1}) : 1 \leq i \leq n\}$$

Grafo garra o claw

Es el grafo denotado por

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)\}$$

Grafo autocomplementario

Grafo autocomplementario

Un grafo es autocomplementario si es isomorfo a su complemento

Teoremas respecto a grafos autocomplementarios

Si G es autocomplementario entonces G es conexo)

Esto se prueba combinando otros dos teoremas

1. Si G es conexo cualquier grafo isomorfo a el también lo es.
2. Si G es desconexo su complemento es conexo.

Si G es un grafo autocomplementario desconexo entonces su complemento es conexo, pero como también es isomorfo a el entonces G es desconexo. Esto es absurdo por lo tanto un grafo autocomplementario es siempre conexo.

Si G es autocomplementario con n vértices entonces $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{4}$

Dos grafos isomorfos tienen la misma cantidad de aristas por lo que

$$|E(G)| = |E(\overline{G})| = \frac{n(n-1)}{2} - |E(G)|$$

Y de esto resulta:

$$|E(G)| = \frac{n(n-1)}{4}$$

Si G es autocomplementario con n vértices entonces $n = 4k$ o $n = 4k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}^+$

Se tiene que $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{4}$

$|E(G)|$ es un numero entero por lo que las posibilidades son

1. n es divisible por 4 y resulta $n = 4k$ con k entero positivo.
2. $n - 1$ es divisible por 4 y resulta $n = 4k + 1$ con k entero positivo.
3. n y $n - 1$ son ambos divisibles por 2 lo cual es imposible ya que implicaría que n es al mismo tiempo un numero par e impar.-

Por lo tanto se cumple la propiedad.

C_n es autocomplementario $\iff n = 5$

\implies)

$$|E(C_n)| = n = \frac{n(n-1)}{4}$$

(si $n \neq 0$)

$$1 = \frac{(n-1)}{4}$$

$$n = 5$$

\impliedby)

Se prueba definiendo un isomorfismo explicito en C_5 y $\overline{C_5}$

Grafo complemento

Grafo complemento

Sea G un grafo simple, el complemento de G se denota por \overline{G} y es el grafo que cumple $V(\overline{G}) = V(G)$ y $E(\overline{G}) = (V(G))^2 - E(G)$, es decir, el complemento esta formado por los mismos vertices y aquellas aristas que no estan en el grafo original.

Grafo conexo

Grafo conexo

Un grafo G es conexo $\iff \forall u, v \in V(G) : \text{existe un } uv\text{-camino}$

Si H es un subgrafo conexo maximal de G es una componente conexa del grafo.

El grafo trivial es conexo.

El grafo vacío no tiene componentes conexas.

Condición suficiente de conectividad para grafos simples

Sea G un grafo simple con n vértices y m aristas que cumple $m > \binom{n-1}{2}$, entonces G es un grafo conexo.

Esto lo pruebo por inducción en la cantidad de vértices del grafo.

CB) $n = 3$

$$\binom{n-1}{2} = \binom{2}{2} = 1 < 2, 3$$

Los únicos grafos de tres vértices con 2 o 3 aristas son P_3 y C_3 , los cuales son conexos.

HI) $\forall n \in \mathbb{N} : G = (V, E)$ con $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ y $m > \binom{n-1}{2} \implies G$ es conexo.

PI)

Lema: $\forall v \in V(G) \exists u \in V(G) : uv \in E(G)$

Suponiendo que existe un vértice v que esta aislado. Entonces todas las aristas del grafo son de la forma uw donde $u \neq v$ y $w \neq v$. La cantidad de pares de esta forma es $\binom{n-1}{2}$, pero hay mas aristas del grafo que pares de estos elementos. Por principio del palomar, no puede haber un vértice aislado.

Sea entonces un vértice cualquiera del grafo.

$$|V(G)| = n + 1$$

$$m > \binom{n}{2} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} = n - 1 + \binom{n-1}{2}$$

Dado un vértice v cualquiera del grafo y el grafo $G - v$

$$n - 1 \geq d(v)$$

$$|E(G - v)| = |E(G)| - d(v) = m - d(v) > (n - 1 - d(v)) + \binom{n-1}{2} \geq \binom{n-1}{2}$$

Entonces por HI el grafo $G - v$ es conexo y por el lema anteriormente demostrado, el grafo es conexo.

Isomorfismo

Isomorfismo

Un isomorfismo entre dos grafos $G = (V, E)$ y $H = (U, Q)$ es una función biyectiva de $V \rightarrow U$ que preserva adyacencias.

Mas formalmente

f es un isomorfismo entre $G = (V, E)$ y $H = (U, Q) \iff f : V \rightarrow U$ es biyectiva y

$$uv \in E \iff f(u)f(v) \in Q$$

Si existe un isomorfismo entre 2 grafos G y H se dice que G es isomorfo a H y se denota $G \simeq H$

Por ejemplo, K_4 es isomorfo a W_3

[Drawing 2023-10-06 15.28.01.excalidraw](#)

El isomorfismo buscado es $f(u_i) = v_i$

También es posible denotar el isomorfismo como una matriz:

$$f = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

Invariante vía isomorfismo

Se dice que una propiedad \mathcal{P} es invariante vía isomorfismo si $\forall G$ grafo que cumple \mathcal{P} y $\forall H$ isomorfo a G se tiene que H cumple \mathcal{P}

Aquí hay algunas invariantes vía isomorfismo

1. Misma cantidad de vértices de grado k
2. Misma cantidad de aristas uniendo vértices del mismo grado
3. Ser Conexo
4. Ser bipartito
5. Misma secuencia de grados
6. Sus complementos son a su vez isomorfos

Por lo general las invariantes son condiciones necesarias de isomorfismo pero no suficientes.

Caracterización de isomorfismo

Dos grafos son isomorfos \iff sus vértices pueden reordenarse de manera que sus matrices de adyacencia sean iguales.

Caso especial: automorfismo

Un automorfismo de un grafo G es un isomorfismo de G en si mismo.

Matriz de adyacencia

Matriz de adyacencia

Dado un grafo G con $|V(G)| = n$, la matriz de adyacencia A del grafo G es una matriz $n \times n$ donde A_{ij} = la cantidad de aristas que unen el vértice v_i y el vértice v_j .

Un lazo que une el vértice v_i consigo mismo aumenta A_{ii} en 2.

En el caso de un grafo simple la matriz de adyacencia contiene solo 1s y 0s.

En el caso de un grafo no dirigido la matriz de adyacencia es simétrica.

Matriz de incidencia

Matriz de incidencia

Sea un grafo G donde $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$, la matriz de incidencia del grafo G es una matriz $n \times m$ donde $A_{ij} = 1$ si el vértice v_i es incidente con la arista e_j .

Para el caso de la matriz de incidencia

$$\begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

- La arista e_1 une los vértices v_1 y v_2 .
- La arista e_2 une los vértices v_1 y v_3 .
- La arista e_3 une los vértices v_1 y v_4 .
- La arista e_4 une los vértices v_3 y v_4 .

Para el caso de un grafo dirigido se tiene que

$$A_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si la arista } e_j \text{ sale del vertice } v_i \\ 1 & \text{si la arista } e_j \text{ entra del vertice } v_i \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Recorridos y circuitos de Euler

Recorridos y circuitos de Euler

Un recorrido/circuito de Euler es un recorrido del grafo que visita todas las aristas del grafo exactamente una vez.

Si un grafo G tiene un circuito euleriano se dice que G es euleriano.

Caracterización de grafos eulerianos

G es euleriano \iff todos sus vértices tienen grado par

\implies)

Si G es euleriano tiene un circuito que visita todas sus aristas. Para cualquier vértice u del circuito hay una sucesión $ue_1v_1e_2 \dots e_kv_ku$ que representa el circuito euleriano. Si resulta que u tiene grado impar, entonces u no puede ser el vértice final del circuito (dado que al consumir todas las aristas no se puede volver). Por lo que todos los vértices tienen grado par.

\impliedby)

Sea $W = u, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ el recorrido de mayor longitud del grafo.

Todas las aristas incidentes en v_k pertenecen a W (sino no sería maximal) por lo que se tiene que $u = v_k$ y W es un circuito

Si W no es un circuito de Euler, dado que G es conexo, existe una arista por fuera de W pero incidente en un vértice de W , sea dicha arista $e = u, v_s$ entonces u, v_s, W, v_s es un recorrido de mayor longitud que W , absurdo.

Subgrafos

Subgrafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo

Un grafo $H = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ se dice que es un subgrafo de H .

Subgrafo inducido

Sea $U \subseteq V(G)$, el subgrafo H de G inducido por el conjunto U es el grafo que cumple que $V(H) = U$ y $E(H) = \{uv : u \in U \wedge v \in U\}$

Grafo menos un vértice

Sea $v \in V(G)$, el grafo $G - v$ es el subgrafo de G inducido por $V(G) - \{v\}$

Grafo menos una arista

Sea $e \in E(G)$, el grafo $G \setminus e$ es el subgrafo de G que cumple $V(G \setminus e) = V(G)$ y $E(G \setminus e) = E(G) - \{e\}$

Vértice de corte y arista de corte

Vértice de corte y arista de corte

Sea $c(G)$ la cantidad de componentes conexas del grafo G .

Un vértice de corte es un vértice $v \in V(G)$ tal que $c(G - v) > c(G)$

Una arista de corte es una arista $e \in E(G)$ tal que $c(G \setminus e) > c(G)$

Vértices similares y grafo vértice transitivo

Vértices similares y grafo vértice transitivo

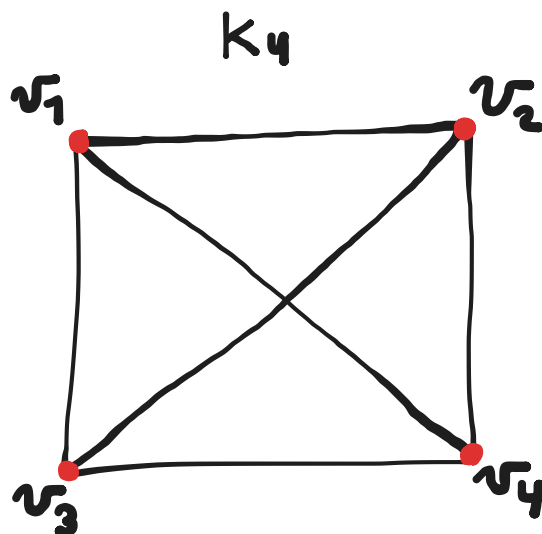
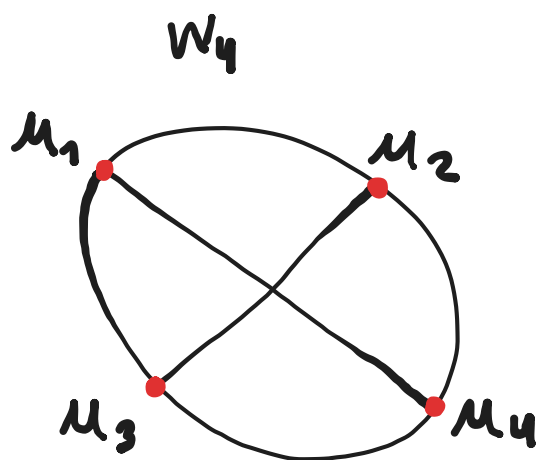
Dos vértices u, v de un grafo G son similares $\iff \exists \theta$ automorfismo de G tal que $\theta(u) = v \vee \theta(v) = u$

Excalidraw

 [Drawing 2023-10-06 15.28.01.excalidraw](#)

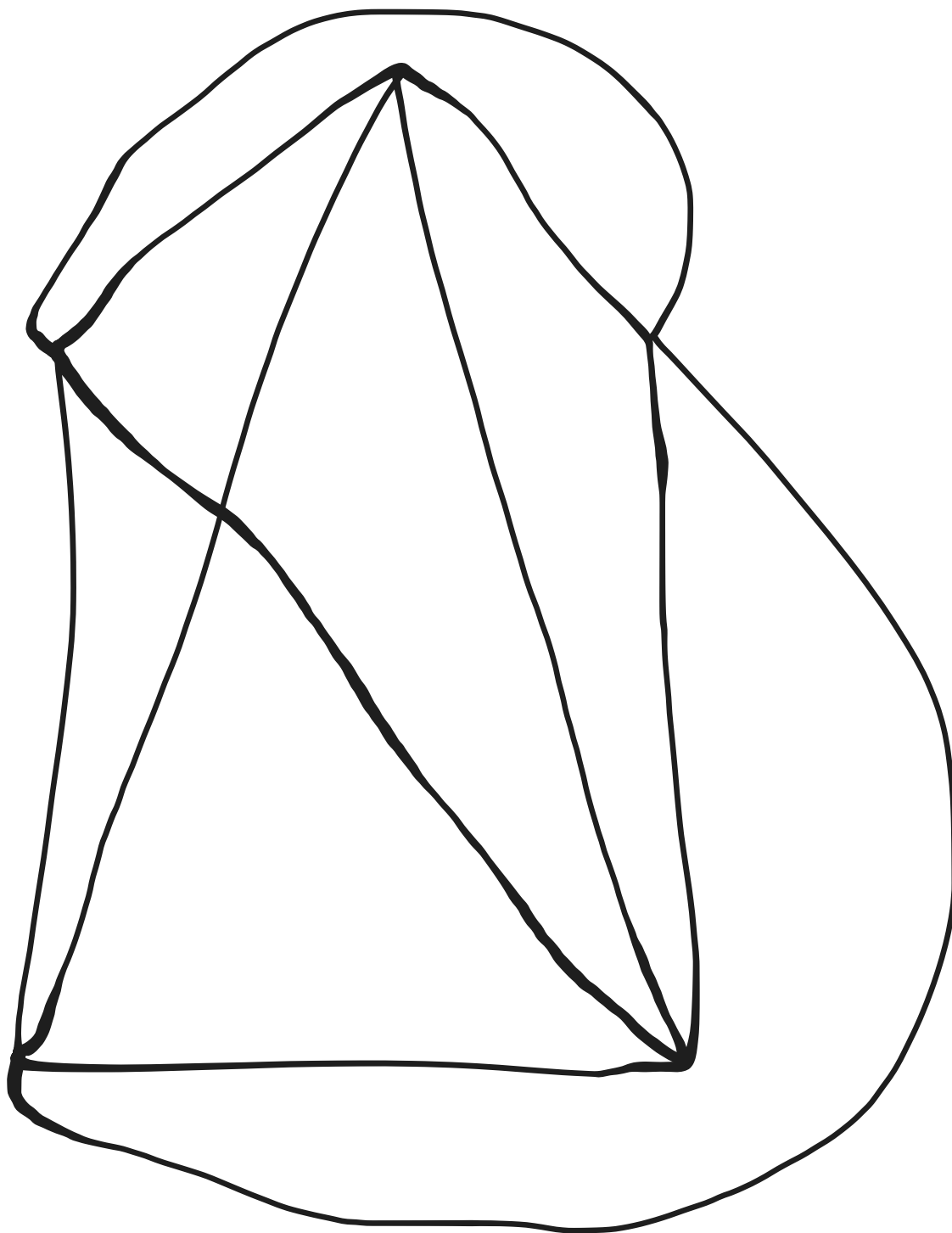
 [Drawing 2023-12-06 16.05.43.excalidraw](#)

Drawing 2023-10-06 15.28.01.excalidraw



Drawing 2023-12-06 16.05.43.excalidraw

k_5 :



Parcial 1

Ejercicio 1

Ejercicio 1

Ejercicio 1

Probar que G_n es conexo para $n \geq 5$

Por inducción:

CB) Isomorfo a Petersen, que es conexo

PI) G_{n+1} tiene a G_n como subgrafo inducido que por lo tanto es conexo.

$$V(G_{n+1}) - V(G_n) = \{\{n, i\} : 1 \leq i \leq n-1\}$$

Todo vértice de este conjunto está conectado a un vértice de $V(G_n)$, efectivamente, $\{a, n\}$ está conectado a $\{1, 2\}$ si $a > 2$ o a $\{3, 4\}$ si $a \leq 1$.

Resulta G_n conexo.

$$\text{diam}(G_n) = 3$$

Sean dos vértices $\{u, v\}$ y $\{x, y\}$ del grafo:

$$|\{u, v\} \cap \{x, y\}| = 0 \implies \text{dist}(\{u, v\}, \{x, y\}) = 1$$















$\{u, v\} \cap \{x, y\} = v \implies$ asumiendo $x = v$, existe el camino $\{u, v\} \rightarrow \{w, w'\} \rightarrow \{x, y\}$ donde w y w' son dos números naturales distintos no pertenecientes a $\{u, v, y\}$ (que existen, dado que $n \geq 5$).

Si la intersección tiene cardinal 2 entonces es el mismo vértice, que tiene distancia 0.

Por lo tanto el diámetro es 2

Para que sea euleriano, tiene que pasar que $\binom{n-2}{2}$ sea par. $\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)!}{2(n-4)!} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. $n = 4$ no cumple ya que no es conexo, $n = 5$ no cumple la paridad. $n = 6$ cumple ambas condiciones, el menor valor de n es 6.

Practica 1

-  [Ejercicio 11](#)
-  [Ejercicio 12](#)
-  [Ejercicio 13](#)
-  [Ejercicio 18](#)
-  [Ejercicio 7](#)
-  [Ejercicio 8](#)
-  [Ejercicio 9](#)
-  [Ejercicio 13](#)
-  [Ejercicio 10](#)
-  [Ejercicio 9](#)
-  [Práctica 10 - Planaridad](#)
-  [Ejercicio 10](#)
-  [Ejercicio 9](#)
-  [Práctica 11 - Flujo en redes](#)

Ejercicio 11

Ejercicio 11

a) Muestre que, en todo grupo de dos o más personas, existen siempre dos personas que tienen exactamente el mismo número de conocidos en el grupo.

Sea el grafo donde los vértices representan a personas y las aristas unen a dos personas distintas que se conocen.

Bajo esta suposición una persona no se puede conocer a si misma, así que no hay lazos.

Como el grafo representa un grupo de personas, no hay vértices aislados.

Los grados de un vértice v representa para una personas del grupo a cuantas personas distintas del grupo conoce.

Como hay n personas y $n - 1$ posibles grados $(1, 2, \dots, n - 1)$. Por principio del palomar va a haber 2 grados que van a repetir y por lo tanto el enunciado se cumple.

b) Describa un grupo de cinco personas en el que dos personas cualesquiera tienen exactamente un conocido en común. ¿Existe un grupo de cuatro personas con esta misma propiedad?

Voy a probar que no existe un grupo de 4 personas con esta propiedad

Sean los vértices x, y, z, w de un grafo que cumple esta propiedad

Tiene que haber si o si aristas entre los vértices

Suponiendo sin perder generalidad que x e y están conectados, estos vértices tienen un vértice en común, suponiendo que z es este vértice

Hasta ahora las aristas son (x, y) (x, z) (y, z) , entonces el grafo inducido por los vértices $\{x, y, z\}$ es un K_3

w tiene que conectarse a algún vértice, si se conecta a $v \in \{x, y, z\}$ después tiene que conectarse a otro vértice $u \neq v \in \{x, y, z\}$ ósea que a su vez $\{w, v, u\}$ es un K_3

Ahora si se miran los vértices $q \in \{x, y, z\}$, $q \neq u \wedge q \neq v$ y w se tiene lo siguiente:

w no esta conectado a q (sino u, v tiene en común a w y q)

w esta conectado a u, v

q esta conectado a u, v

w y q tienen 2 vértices en común, absurdo.

Ejercicio 12

Ejercicio 12

Si $G[X, Y]$ es un grafo bipartito

$$a) \sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$$

Cada arista unida a un vértice de una partición S aporta 1 unidad a la suma de los grados de la partición.

Como el grafo es bipartito todas las aristas son de la forma (x, y) donde $x \in X$ y $y \in Y$.

Por lo tanto si una arista aporta a la suma de X también apunta a una suma de Y y se tiene que

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$$

b) Si G es a su vez K regular con $k \geq 1$ entonces $|X| = |Y|$

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$$

$$|X| \cdot k = |Y| \cdot k$$

$$|X| = |Y|$$

Ejercicio 13

Ejercicio 13

Para un vértice de una de las particiones X_i , este tiene como mucho $n - a_i$ aristas conectadas a él.

$$2m = \sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{v \in X_i} d(v_i) \leq \sum_{i=1}^k \sum_{v \in X_i} n - a_i = \sum_{i=1}^k a_i(n - a_i)$$

$$m \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k a_i(n - a_i)$$

Ejercicio 18

Ejercicio 18

b)

Si G es no conexo entonces hay vértices en G que están conectados y hay vértices que están desconectados.

Si dos vértices están desconectados, en el complemento estarán conectados.

Si dos vértices u, v están conectados, como G es no conexo existe otro vértice w que no está conectado con u, v . En el complemento se formara el camino $u \rightarrow w \rightarrow v$ y por lo tanto u y v estarán conectados.

Como sin importar el caso u, v estarán conectados en \overline{G} , \overline{G} es conexo.

Ejercicio 7

Ejercicio 7

a) En un grafo simple $G(V, E)$ de n vértices y m aristas, $m \leq \binom{n}{2}$

Por el lema del apretón de manos: $\sum_{v \in V} g(v) = 2|E|$

El máximo grado posible de un vértice en un grafo simple es $n - 1$

$$2m = 2|E| = \sum_{v \in V} g(v) \leq \sum_{v \in V} n - 1 = n(n - 1)$$

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

$$m \leq \binom{n}{2}$$

b) Describir los grafos simple donde $m = \binom{n}{2}$

Son los grafos donde $g(v) = n - 1$, es decir, los grafos completos

Ejercicio 8

Ejercicio 8

En un grafo simple $G[X, Y]$ bipartito con n vértices y m aristas donde $|X| = r$ y $|Y| = s$

a) $m \leq rs$

Para cada vértice $x \in X$, su máximo grado posible es s

Para cada vértice $y \in Y$, su máximo grado posible es r

$$2m = \sum_{x \in X} g(x) + \sum_{y \in Y} g(y) \leq rs + rs = 2rs$$

$$m \leq rs$$

b) $m \leq \frac{n^2}{2}$

$$s = (n - r)$$

$$rs = r(n - r) = -r^2 + rn$$

¿Cuál es el valor de r que maximiza $-r^2 + rn$?

Sea $f(x) = -x^2 + nx$, f es una función cuadrática con el termino cuadrado negativo. Alcanza su valor máximo en su vértice, es decir, el valor máximo es $r = \frac{n}{2}$

$$m \leq rs = r(n - r) = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$$

c) Describir los grafos donde $m = \frac{n^2}{2}$

Tiene que ocurrir que $\forall x \in X : g(x) = s$ y $\forall y \in Y : g(y) = r$

Y además $|X| = \frac{n}{2}$ y por consiguiente $|Y| = \frac{n}{2}$

Los grafos que cumplen la propiedad son por consiguiente los grafos bipartitos completos $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$

El n tiene que ser un numero par(sino $\frac{n^2}{4}$ no es un numero entero)

Ejercicio 9

Ejercicio 9

a) Todo camino es bipartito

Los grafos caminos son los grafos $G(V, E)$ donde

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$E = \{(v_i, v_{i+1}) : i \in [1, n - 1]\}$$

Tomando las particiones:

$$X = \{v_i : i \text{ impar}\}$$

$$Y = \{v_i : i \text{ par}\}$$

Se tiene que los vértices impares solo están conectados con los vértices pares y viceversa

El camino es bipartito

b) Un ciclo es bipartito \iff Tiene longitud par

Tiene longitud par \implies El ciclo es bipartito)

En el ciclos los conjuntos de vertices son de la forma

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$E = \{(v_i, v_{i+1}) : i \in [1, n - 1]\} \cup \{(v_n, v_1)\}$$

Tomando las mismas particiones del ejercicio (a) se tiene que el grafo es bipartito

El ciclo es bipartito \implies Tiene longitud par

Pruebo la contrarrecíproca, si tiene longitud impar entonces no es bipartito.

Suponiendo que efectivamente el grafo es bipartito, entonces es posible particionarlo.

Empezando por un vértice v cualquiera que pertenece a la partición X .

Este vértice está conectado a otros 2 que tienen que pertenecer a la partición Y

Luego cada uno de estos vértices está conectado a otros dos que pertenecen a la partición X

Repetiendo el proceso k veces para armar las particiones se tiene que

$|X|$ es impar e Y par

El ciclo eventualmente puede terminar de 2 formas:

1) Termina con un único vértice, en este caso las particiones terminan siendo correctas pero el ciclo es par

2) Terminan con dos vértices conectados entre sí, el ciclo es par pero el grafo no es bipartito, absurdo

Por lo tanto el grafo no puede ser bipartito sabiendo que el ciclo es impar.

Practica 10

- [Ejercicio 13](#)
- [Ejercicio 10](#)
- [Ejercicio 9](#)
- [Práctica 10 - Planaridad](#)

Ejercicio 13

Ejercicio 13

K_5 es un grafo arista-transitivo:

Sean los vértices x, y, z, u, v y dos aristas xy e uv la función definida como:

$$\theta := \begin{pmatrix} x & y & z & u & v \\ u & v & z & x & y \end{pmatrix}$$

Es un automorfismo del grafo que manda a la arista xy a la arista uv .

Se puede ver que θ es invertible ya que es inversible (es su propia inversa):

$$\theta(\theta(x)) = \theta(u) = x$$

$$\theta(\theta(y)) = \theta(v) = y$$

$$\theta(\theta(z)) = \theta(z) = z$$

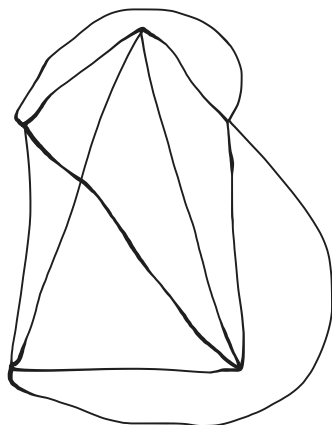
$$\theta(\theta(u)) = \theta(x) = u$$

$$\theta(\theta(v)) = \theta(y) = v$$

Dado que todos los vértices de un K_5 están conectados, la función no rompe adyacencias. Sigue que θ es un automorfismo y K_5 es arista transitivo.

Luego dado el siguiente dibujo del K_5

K_5 :



Se puede ver que con borrar una arista el grafo resulta planar. Como el grafo es arista transitivo, con borrar cualquier arista se puede conseguir una inmersión plana del grafo. Subgrafos con menos aristas también resultan planares ya que todo subgrafo de un grafo planar es planar.

Como todo subgrafo propio de K_5 tiene que borrar al menos una arista del grafo original, todo subgrafo propio de K_5 es planar.

Ejercicio 10

Ejercicio 10

Si G tiene al menos un ciclo y todo ciclo tiene longitud al menos k entonces para toda cara f del grafo G se tiene que $\text{long}(f) \geq k$

Por tanto $2a = \sum_{f \in F} \text{long}(f) \geq k \cdot c \implies c \leq \frac{2}{k}a$

Por la formula de Euler: $v - a + c = 2$

Reemplazando:

$$2 = v - a + c \leq v - a + \frac{2}{k}a = v + \left(-1 + \frac{2}{k}\right)a = v - \left(\frac{k-2}{k}\right)a$$

$$a \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$$

■

Ejercicio 9

Ejercicio 9

Sea G un grafo planar, conexo con $V \geq 3$ tal que su complemento es también planar.

Esto implica que $E \leq 3V - 6$

Además lo mismo vale para su complemento, $\binom{V}{2} - E \leq 3V - 6 \implies \binom{V}{2} - 3V + 6 \leq E$

En particular se tiene que:

$$\binom{V}{2} - 3V + 6 \leq 3V - 6$$

$$V^2 - 13V + 24 \leq 0$$

Dicho polinomio alcanza valores negativos para

$$3 \leq V \leq 10$$

En el caso de $V \leq 11$, no se cumple la desigualdad, lo cual implica un absurdo.

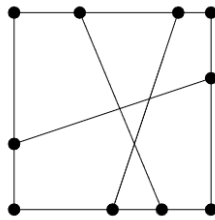
Para el caso de $V = 8$

Práctica 10 - Planaridad

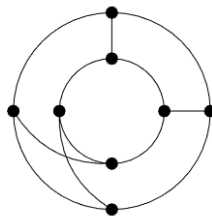
Práctica 10 - Planaridad

1. En cada caso, determinar si el grafo dado es planar. Si lo es, dar una inmersión plana. Si no, hallar un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

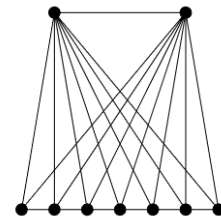
a)



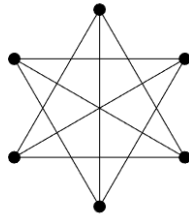
c)



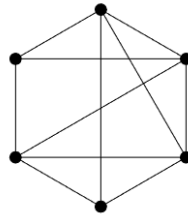
e)



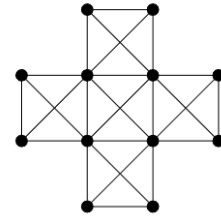
b)



d)

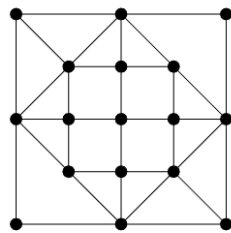


f)

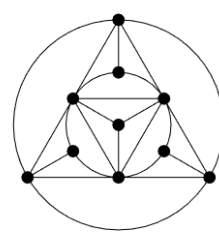


2. Sea G un grafo que no es planar. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E(G)|$?
3. Determinar el número de vértices, aristas y caras de cada uno de los grafos planos siguientes. ¿Satisfacen la fórmula de Euler para grafos conexos?

a)



b)



4. Sea G un grafo conexo, planar y tal que determina 53 caras. Si para alguna inmersión plana de G la frontera de cada cara tiene longitud al menos 5, demostrar que $|V(G)| \geq 82$.
5. Sea G un grafo conexo, 4-regular y planar. Si $|E(G)| = 16$, ¿cuántas caras hay en una inmersión plana de G ?
6. Probar que si G es un grafo simple planar con al menos 3 vértices y además es K_3 -free, entonces $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

Practica 11

 [Ejercicio 10](#)

 [Ejercicio 9](#)

 [Práctica 11 - Flujo en redes](#)

Ejercicio 10

Ejercicio 10

Dado el grafo $G[X, Y]$ bipartito construyo una red de flujo H definida como sigue:

- El vértice fuente a esta unido a todos los vértices X por aristas de peso 1.
- El vértice sumidero z esta unido a todos los vértices de H por aristas de peso 1.
- Las aristas que conectan los vértices X e Y tienen peso ∞ .

Ahora ejecuto el algoritmo de Ford-Fulkerson a la red H .

Comenzando por el flujo nulo f

Empiezo por el vértice a , inicialmente todos los vértices cumplen la condición $f(a, x) < c(a, x)$ (puesto que f es un flujo nulo), así que queda determinado $U = X$.

Luego tomo un vértice $x \in U$ y aplico nuevamente el algoritmo, queda determinado $U = X + N(x)$.

El algoritmo puede seguir tomando vértices de X pero eventualmente va a tomar un vértice y de Y y así terminar etiquetando al vértice z . Luego sea x el predecesor de y , el camino $a \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$ va a quedar con flujo 1. Futuras iteraciones del algoritmo no podrán añadir el vértice x a U (intentar añadirlo como vecino de a no es posible ya que se satura la única arista que conecta a con x , intentar añadirlo como vecino de un vértice y no es posible ya que intentarlo conlleva a etiquetar al vértice z y por lo tanto no considerarlo para el paso 3). Análogamente se puede llegar a que el vértice y tampoco puede ser elegido.

El algoritmo termina cuando ningún vértice de X puede saturar a otro vértice de Y .

Las aristas saturadas por el flujo no comparten extremos ni en X ni en Y . Por lo tanto forman un matching máximo.

Puesto que el flujo es un numero finito, cualquier corte (S, T) solo puede contener aristas saturadas por el vértice (caso contrario la capacidad mínima es infinita).

Ejercicio 9

Ejercicio 9

Dada una red G donde el vértice a es la fuente y el vértice z el sumidero.

Sean S y T dos conjuntos que definen un corte, se tiene que $a \in S$, $a \in T$, $z \in \bar{S}$, $z \in \bar{T}$.

Por lo tanto:

- $a \in S \cap T$ y $a \in S \cup T$.
- $z \in \bar{S} \cup \bar{T}$ y $z \in \bar{S} \cap \bar{T}$, por leyes de De Morgan $z \in \overline{S \cap T}$ y $z \in \overline{S \cup T}$.

Como $S \cap T$ y su complemento forman una partición, $S \cap T$ define un corte. Lo mismo se puede decir para $S \cup T$ y su complemento.

Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{cap}(S \cup T, \overline{S \cup T}) &= \text{sum}\{uv \in E : u \in S \cup T \wedge v \notin S \cup T\} \\ &= \text{sum}\{uv \in E : u \in S \vee u \in T \wedge v \notin S \wedge v \notin T\} \end{aligned}$$

Para el caso del otro corte se tiene análogamente que:

$$\text{cap}(S \cap T, \overline{S \cap T}) = \text{sum}\{uv \in E : u \in S \wedge u \in T \wedge v \notin S \vee v \notin T\}$$

La unión de estos dos conjuntos son las aristas uv que cumplen:

$$u \in S \vee u \in T \wedge v \notin S \wedge v \notin T$$

\vee

$$u \in S \wedge u \in T \wedge v \notin S \vee v \notin T$$

Esta será la proposición (1).

La unión de las aristas de los cortes definidos por S y T son aquellas que cumplen:

$$u \in S \wedge v \notin S$$

\vee

$$v \in S \wedge v \notin T$$

Esta es la proposición (2).

Notar que (1) \implies (2).

Suponiendo (1) verdadero:

Si $u \in S \vee u \in T \wedge v \notin S \wedge v \notin T$:

- Si $u \in S$ se tiene que $v \notin S$ por lo tanto (2).
- Si $u \in T$ se tiene que $v \notin T$ por lo tanto (2).
- Si $u \in S \wedge u \in T \wedge v \notin S \vee v \notin T$:
- Si $v \notin S$ se tiene que $u \in S$ y por lo tanto (2).
- Si $v \notin T$ se tiene que $v \in T$ y por lo tanto (2).

Por ende (2) es valido cuando (1) es valido.

Si (1) es falso la implicancia también es valida.

Por lo tanto (1) \implies (2).

Como toda arista que cumple (1) también cumple (2), toda arista que pertenezca a los cortes definidos por $S \cup T$ y $S \cap T$ pertenece también a los cortes definidos por S y T .

Tomando las capacidades de ambos cortes, se tiene lo que se quería probar.

Puesto que S y T definen cortes minimos, se tiene que:

1. $\text{cap}(S, \overline{S}) = \text{cap}(T, \overline{T})$
2. $\text{cap}(S \cup T, \overline{S \cup T}) \geq \text{cap}(S, \overline{S})$
3. $\text{cap}(S \cap T, \overline{S \cap T}) \geq \text{cap}(S, \overline{S})$

Por ende combinando (2) y (3) :

$$\text{cap}(S \cup T, \overline{S \cup T}) + \text{cap}(S \cap T, \overline{S \cap T}) \geq \text{cap}(S, \overline{S}) + \text{cap}(S, \overline{S})$$

\implies por (1)

$$\text{cap}(S \cup T, \overline{S \cup T}) + \text{cap}(S \cap T, \overline{S \cap T}) \geq \text{cap}(S, \overline{S}) + \text{cap}(T, \overline{T})$$

Pero por el ejercicio anterior:

$$\text{cap}(S \cup T, \overline{S \cup T}) + \text{cap}(S \cap T, \overline{S \cap T}) \leq \text{cap}(S, \overline{S}) + \text{cap}(T, \overline{T})$$

Por ende ambos términos son iguales.

$$\text{cap}(S \cup T, \overline{S \cup T}) + \text{cap}(S \cap T, \overline{S \cap T}) = \text{cap}(S, \bar{S}) + \text{cap}(T, \bar{T}) \quad (4)$$

Por (2) y (3) pueden ocurrir 3 cosas con los términos de la izquierda:

- Ambos tienen capacidades estrictamente mayores que el corte definido por S , esto es una contradicción con (4).
- Uno tiene una capacidad igual a la del corte de S y el otro es estrictamente mayor, nuevamente esto sería una contradicción con (4).
- Los dos tienen capacidades iguales a la del corte de S . Esta es la única posibilidad que no invalida (4).

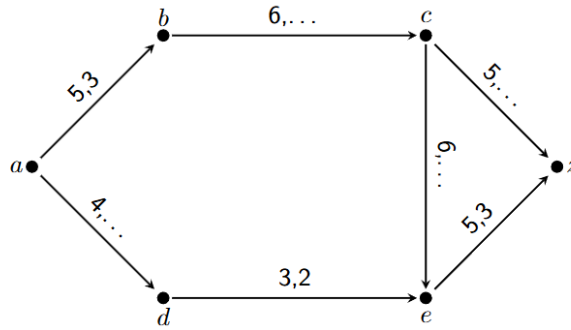
Por lo tanto, los cortes definidos por $S \cup T$ y $S \cap T$ son cortes mínimos.

Práctica 11 - Flujo en redes

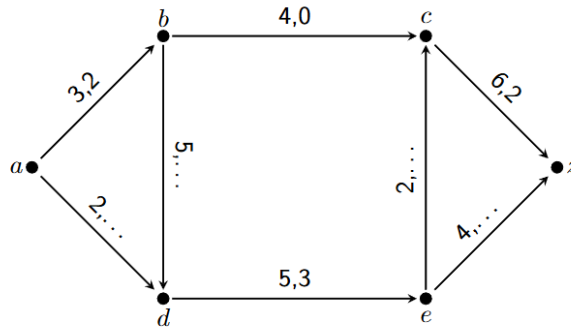
Práctica 11 - Flujo en Redes

1. En cada uno de los siguientes ítems, encontrar los flujos en las aristas que faltan de manera que el resultante sea un flujo factible en la red dada. Determinar además el valor del flujo.

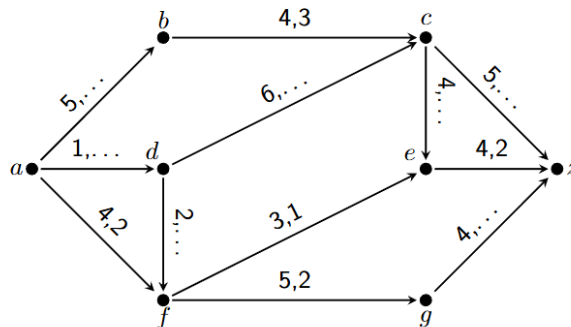
a)



b)



c)



Practica 2

 [Ejercicio 8](#)

 [Ejercicio 9](#)

Ejercicio 8

Ejercicio 8

G_1 y G_2 grafos simples son isomorfos $\iff \overline{G_1}$ es isomorfo a $\overline{G_2}$

$G_1 \simeq G_2 \iff \exists \sigma$ isomorfismo de $V(G_1)$ a $V(G_2)$ que preserva adyacencias

Sean v y u dos vértices de G_1

$(v, u) \in E(G_1) \iff (\sigma(v), \sigma(u)) \in E(G_2)$

\iff

$(v, u) \notin E(G_1) \iff (\sigma(v), \sigma(u)) \notin E(G_2)$

\iff

$(v, u) \in E(\overline{G_1}) \iff (\sigma(v), \sigma(u)) \in E(\overline{G_2})$

$V(G_x) = V(\overline{G_x})$

$\exists \sigma$ isomorfismo de $V(G_1)$ a $V(G_2)$ que preserva adyacencias

\iff

$\exists \sigma$ isomorfismo de $V(\overline{G_1})$ a $V(\overline{G_2})$ que preserva adyacencias

$G_1 \simeq G_2$ grafos son isomorfos $\iff \overline{G_1}$ es isomorfo a $\overline{G_2}$

Ejercicio 9

Ejercicio 9

a)

Lema: Si dos grafos son isomorfos, tienen la misma cantidad de aristas

Sean $G_1 \simeq G_2$ dos grafos isomorfos.

Dado que los isomorfismos preservan los grados de los vértices se tiene que

$$2|E(G_1)| = \sum_{v \in V(G_1)} d(v) = \sum_{v \in V(G_1)} d(\sigma(v_1)) = \sum_{v \in V(G_2)} d(v) = 2|E(G_2)|$$

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|$$

Si G es auto complementario entonces G y \overline{G} tienen la misma cantidad de aristas, por lo tanto si

$$|E(G)| = m$$

$$m = \binom{n}{2} - m$$

$$2m = \binom{n}{2}$$

$$m = \frac{n(n-1)}{4}$$

b)

La conectividad de un grafo es preservada por un isomorfismo

Si un grafo es desconexo entonces su complemento es conexo

Si un grafo autocomplementario es desconexo entonces su complemento es conexo, pero como su complemento es a su vez isomorfo entonces es conexo. Absurdo

Por lo tanto un grafo autocomplementario tiene que ser conexo.

c)

$m = \frac{n(n-1)}{4}$ es un numero entero

No puede pasar que n y $n - 1$ sean ambos divisibles por 2 asi que al menos uno de los 2 tiene que ser divisible por 4

$$n = 4k$$

$$n - 1 = 4k \implies n = 4k + 1$$

Con $k \in \mathbb{N}_0$

Practica 4

-  [Ejercicio 10](#)
 -  [Ejercicio 12](#)
 -  [Ejercicio 15](#)
 -  [Ejercicio 15 again](#)
 -  [Ejercicio 16](#)
 -  [Ejercicio 17](#)
 -  [Ejercicio 3](#)
 -  [Ejercicio 4](#)
 -  [Ejercicio 5](#)
 -  [Ejercicio 6](#)
 -  [Ejercicio 8](#)
 -  [Ejercicio 9](#)
 -  [Practica 4 - Grafos eulerianos](#)
-

Ejercicio 10

Ejercicio 10

a) P_n

Todas las aristas de P_n son de corte ya que ninguna arista pertenece a un ciclo.

Si $n \geq 3$, los únicos vértices de corte son los que no son extremos del grafo. Caso contrario no hay vértices de corte.

b) C_n

Ninguna arista es de cortes ya que todas pertenecen a un ciclo (el mismo grafo es un ciclo).

Ningún vértice es de corte.

$\forall v \in V$ existe un camino de la forma $v \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_{n-1} \rightarrow v$

Si se elimina el vértice v también se eliminan las aristas vu_1 y $u_{n-1}v$

El camino resultante queda

$u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_{n-1}$

Todos los vértices restantes quedan conectados por un camino, v no es de corte

c) K_n

Si $n \geq 3$ entonces no hay aristas de corte.

Dada una arista uv , existe otro vértice w con aristas uw y wv

Se forma el ciclo: $u \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow u$ la arista uv no es de corte

Ningún vértice es de corte ya que para cualquier par de vértices u y w existe un camino entre ellos que no pasa por v (es la misma arista uw).

Ejercicio 12

Ejercicio 12

a) K_n

K_n es un grafo regular donde los vértices son de grado $n - 1$

K_n admite un circuito euleriano $\iff n - 1$ es par $\iff n$ es impar

b) K_{mn}

Sean dos vértices de las particiones $x \in X$ e $y \in Y$ con $|X| = m$ y $|Y| = n$

$$d(x) = n$$

$$d(y) = m$$

Para que K_{mn} admita un circuito euleriano, m y n deben ser ambos pares.

c) Q_n

El n cubo es un grafo regular de grado n

Para que Q_n admita un circuito euleriano, n tiene que ser par

d)

Pruebo por inducción que en el grafo T_n todos los vértices son de grado par

CB) $n = 1$

$T_1 \simeq K_3$ que es 2-regular

HI) $\forall n \in \mathbb{N} : T_n$ es regular con vértices de grado par

PI)

$$\begin{aligned} V(T_{n+1}) &= \bigcup_{i=0}^{n+1} \{v_{ij} : 0 \leq j \leq i\} = \bigcup_{i=0}^n \{v_{ij} : 0 \leq j \leq i\} \sqcup \{v_{n+1,j} : 0 \leq j \leq n+1\} \\ &= V(T_n) \sqcup \{v_{n+1,j} : 0 \leq j \leq n+1\} \end{aligned}$$

(La unión es disjunta ya que los vértices del primer conjunto difieren de los del segundo por una componente)

Entonces el grafo inducido por el conjunto de vértices de $V(T_n)$ es isomorfo al mismo grafo T_n (por el isomorfismo identidad).

Por hipótesis de inducción, dichos vértices tienen grado par.

Ahora hay que analizar el resultado de añadir las aristas que fueron removidas.

Se tiene para los vértices del conjunto $\{v_{n+1,j} : 0 \leq j \leq n+1\}$ que

Si $j = 0$:

$v_{n+1,0}$ es adyacente a $v_{n,0}$ y a $v_{n+1,1}$

Si $0 < j < n+1$:

$v_{n+1,j}$ es adyacente a $v_{n,j}$, $v_{n+1,j+1}$, $v_{n+1,j-1}$ y a $v_{n,j+1}$

Si $j = n+1$:

$v_{n+1,n+1}$ es adyacente a $v_{n,n+1}$ y a $v_{n+1,n}$

Todos estos vértices tienen grados pares

Y para los vértices del conjunto $\{v_{n,j} : 0 \leq j \leq n\}$

$v_{n,j}$ es adyacente a $v_{n+1,j+1}$ y a $v_{n+1,j-1}$

El grado de los vértices aumenta en 2 y la adyacencia par se mantiene

T_{n+1} tiene todos sus vértices de grado par.

□

Por lo tanto T_{n+1} tiene un circuito euleriano

■

e) $G_{m,n}$ tiene un circuito euleriano $\iff (n = 2 \wedge m = 2) \vee (n = 1 \wedge m = 1)$

Si $n = 1$ y $m = 1$: es el caso del grafo trivial que si es euleriano

Si $n = 1$ y $m = 2$ o viceversa: es el caso de un P_2 que no es euleriano:

Si $n = 2$ y $m = 2$: es el caso de un C_4 que si es euleriano:

Si $m \geq 3$ y $n = 1$ o viceversa: es el caso de un P_3 que no es euleriano.

Si $m \geq 3$ y $n \geq 2$:

El vértice $v_{1,2}$ es adyacente a los vértices $v_{1,1}$, $v_{1,3}$ y $v_{2,2}$

$v_{1,2}$ tiene grado 3, $G_{m,n}$ no es euleriano.

Si $n \geq 3$ y $m \geq 2$:

El vértice $v_{2,1}$ es adyacente a los vértices $v_{1,1}$, $v_{3,1}$ y $v_{2,2}$

$v_{2,1}$ tiene grado 3, $G_{m,n}$ no es euleriano.

Ejercicio 15

Ejercicio 15

Probar el algoritmo de Fleury:

Sea G un grafo conexo par

Elegir un vértice u cualquiera

$W = \{ \}$

$x = u$

$F = G$

while($d_F(x) \geq 1$):

Seleccionar una arista $e = xv$ incidente en x que no sea de corte de F

Si todas las aristas son de corte entonces elegir cualquiera

$W \leftarrow W \cup e$

$x = v$

$F = F \setminus e$

W es un circuito euleriano en G

La idea, ir recorriendo el grafo siempre priorizando las aristas que no son de corte.

En ningún momento del algoritmo se repite una arista de G (esto debido a que las aristas se toman de F y luego se eliminan del mismo). Por lo que en todo momento se tiene que W es un recorrido.

El algoritmo termina cuando no hay mas aristas para extender el recorrido de Euler, por lo que dicho recorrido es maximal.

En el algoritmo de Fleury, el primer y ultimo vértice del recorrido es el vértice u .

Si el algoritmo termina en un vértice y) Si se termino en el vértice y se tiene que $d_F(y) = 0$, si la primer arista recorrida por el algoritmo fue para acceder al vértice y entonces tras recorrer una cantidad par de sus aristas se tiene que la ultima arista fue usada para salir del vértice y lo cual indica que no se termino en el vértice y . Por absurdo se tuvo que utilizar la primera arista de y para salir, por lo que $y = u$.

Esto indica que el algoritmo de Fleury produce un circuito en el grafo.

El circuito del algoritmo es un circuito de Euler)

En cada paso del algoritmo que no es de terminación (es decir $d_F(x) \geq 1$), el grafo F es un grafo donde una componente conexa es no trivial y todas las demás son triviales.

Lo pruebo por inducción en la cantidad de pasos

CB) $i = 0$

Se tiene que $F = G$, que por hipótesis es conexo y cumple la hipótesis.

HI) En el i -esimo paso del algoritmo de Fleury se tiene que F tiene una componente conexa no trivial y todas las demás son triviales.

PI)

$d_F(x) \geq 1 \implies x$ pertenece a la componente no trivial.

En cada paso hay 2 posibilidades

La arista e es una arista que no es de corte) Remove la arista e del grafo F no aumenta la cantidad de componentes conexas. Por lo que se cumple la hipótesis.

La arista e es una arista de corte) Si esto ocurre entonces $d(x) = 1$, es decir, hay una única arista de corte.

Eliminar esta arista del grafo puede producir una componente no trivial y otra trivial. Aquí $d_F(x) \geq 1$ y el algoritmo continua. Se cumple la hipótesis.

En caso contrario produce dos componentes triviales y el algoritmo termina. La hipótesis se sigue cumpliendo ya que se llegó al paso de terminación ($d_F(x) = 0$)

Pruebo que $d(x) = 1$ en este caso por reducción al absurdo.

Suponiendo que $d(x) \geq 2$, existe en particular otra arista e' que es de corte en el grafo en el grafo F .

Lema: Si un grafo H tiene una arista de corte e entonces las componentes conexas X e Y del grafo $H \setminus e$ tienen al menos un vértice de grado impar cada una.

Pruebo el lema para X , la prueba para Y es análoga.

Si X tiene todos sus vértices de grado par entonces el extremo de e que pertenece a la componente X tiene grado impar.

Si X tiene al menos un vértice de grado impar entonces necesariamente tiene que tener otro vértice de grado impar (sino $\sum_{v \in V(X)} d(v) \neq 2|E(X)|$). Dado que la arista e solo puede aumentar el grado de un vértice de X en 1. Se cumple el lema.

Suponiendo sin pérdida de generalidad que el algoritmo toma la arista e , como dicha arista es de corte. El algoritmo no va a poder regresar al vértice x . Por lo que la arista e' no va a poder ser elegida por el algoritmo.

Una vez que el algoritmo termine, va a quedar una componente conexa no trivial con aristas no elegidas. Sea Y dicha componente, por el lema anterior, dicha componente tiene un vértice de grado impar.

Ahora si al grafo F se le suman todas las aristas de W el resultado es el grafo G . Como las aristas de W afectan a la paridad del grado de los vértices de Y . Esto quiere decir que el grafo G tiene al menos un vértice de grado impar. Lo cual es falso por hipótesis.

Este absurdo proviene de que $d(x) \geq 2$

Por lo tanto $d(x) = 1$, la hipótesis se cumple

□

Esto indica que al terminar el algoritmo se tiene que el grafo F solo esta formada por grafos triviales y el conjunto W es un circuito que tiene todas las aristas del grafo G . W es un circuito euleriano.

■

Ejercicio 15 again

Ejercicio 15 again

El algoritmo no repite aristas, debido a que se toman del grafo F y se borran del mismo a medida que se agarran, por lo tanto en toda iteración W es un recorrido euleriano.

Suponiendo que el algoritmo termina en un vértice y , esto indica que todas las aristas de y fueron procesadas por el algoritmo a partir de aquí distingo las aristas en 2 categorías.

- La arista e se uso para "entrar" al vértice y , es decir, el algoritmo estaba en un vértice $x \neq y$ al momento de procesar la arista.
- La arista e se uso para "salir" al vértice y , es decir, el algoritmo estaba en el vértice y al momento de procesar la arista.

El algoritmo siempre alterna entre aristas de "salida" y aristas de "entrada"(siempre que las mismas no son lazos), como hay una cantidad par de aristas unidas al vértice y . Notar que el vértice final del algoritmo(y en este caso) termino con una arista usada para "entrar", esto solo es posible si la primera arista de y fue usada para "salir" del mismo, es decir, y fue el primer vértice del algoritmo y también el ultimo.

Esto indica que el recorrido W es en realidad un circuito del grafo.

Queda probar que dicho circuito es un circuito de Euler.

Para eso voy a probar por inducción lo siguiente:

En cada paso del algoritmo de Fleury que no es de terminación, el grafo F posee una componente no trivial y el resto de componentes conexas son triviales

Esto lo pruebo por inducción en la cantidad de pasos i .

CB) $i = 0$

El inicio del algoritmo, como F es conexo tiene una única componente conexa si G no es un conjunto estable entonces el paso no es de terminación y se cumple la hipótesis.

PI)

Suponiendo que se esta en un estado de no terminación con un vértice x se toma una arista e .

- La arista e no es de corte, las componentes conexas no cambian, la hipótesis vale. Notar que el algoritmo siempre priorizara estas aristas.
- La arista $e = xy$ es de corte, en este caso voy a probar que el vértice $d(x) = 1$, es decir, x es la única arista de corte posible.

Si se llega al paso del ultimo ítem entonces todas las aristas del grafo son de corte.

- Si $d(x) = 1$, entonces se produce una componente no trivial y otra trivial como mucho, el algoritmo se cumple.
- Si $d(x) > 2$

Ejercicio 16

Ejercicio 16

El grafo G tiene un recorrido de Euler \iff tiene exactamente dos vértices de grado impar.

\implies)

Por hipótesis G tiene un recorrido de Euler que empieza y termina en dos vértices. Sean u y w dichos vértices, el grafo G' con $V(G') = V(G)$ y $E(G') = E(G) \cup wu$ es euleriano y tiene todos sus vértices de grado par. La eliminación de la arista wu da como resultado que tanto u como w son vértices de

grado impar. Por lo que G solo tiene dos vértices de grado impar.

\Leftarrow)

Por un argumento similar, si se añade una arista entre los vértices de grado impar se tiene que todos los vértices tienen grado par y el grafo aumentado es euleriano. Luego el recorrido formado al sustraer la arista recién agregada al circuito de Euler del grafo aumentado es el recorrido buscado.

Ejercicio 17

Ejercicio 17

Pruebo por inducción en la cantidad de aristas del dígrafo

CB) $|E| = 0$

Es el caso del grafo sin aristas.

$$0 = \sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v) = 0$$

HI) $\forall n \in \mathbb{N}$, el dígrafo D con n aristas cumple que $\sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v)$

PI)

Remover una arista cualquiera resulta en un dígrafo con n aristas por lo que

$$\sum_{v \in V(D \setminus e)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D \setminus e)} d^-(v)$$

Ahora al volver a añadir dicha arista, el grado de salida de un vértice aumenta en 1 y el grado de entrada de otro vértice (no necesariamente uno distinto) también aumenta en 1 por lo que:

$$\sum_{v \in V(D \setminus e)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D \setminus e)} d^-(v)$$

=

$$\sum_{v \in V(D \setminus e)} d^+(v) + 1 = \sum_{v \in V(D \setminus e)} d^-(v) + 1$$

=

$$\sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v)$$

■

Ejercicio 3

Ejercicio 3

a)

Sea $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ un camino de v_1 a v_n

Dicho camino repite vértices.

Es decir existe una o mas subsecuencias de vértices

$$v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j, v_{j+1}, v_{j+2}$$

Donde $v_i = v_j$

Sea el camino donde se eliminan todas estas subsecuencias salvo aquella (si existe) donde $v_i = v_1$ y $v_j = v_n$ (si hay mas de una de este tipo, se deja solo una).

Dicho camino es el camino simple buscado.

b)

Un circuito es un camino cerrado que no repite aristas.

Si existe un circuito que contiene a v , entonces existe un camino cerrado que empieza y termina en v , por el ejercicio a), existe un ciclo que empieza y contiene a v .

Ejercicio 4

Ejercicio 4

a) El diámetro del grafo es 3 (se prueba buscando todas las distancias posibles y eligiendo la máxima)

b) El diámetro del grafo de Petersen es 2

Como el grafo de Petersen es vértice transitivo, basta con calcular todas las distancias desde un vértice particular y elegir la distancia máxima.

En este caso, la distancia máxima es 2.

c) En el caso del grafo Q_n , el diámetro es n

Dados dos vértices del hipercubo, la distancia entre ellos es la cantidad de bits en la que difieren.

Si dos vértices x, y de un hipercubo Q_n difieren en exactamente k bits, entonces $d(x, y) = k$

Si partiendo de x se decide tomar una arista entonces un bit de x va a cambiar.

Es posible tomar k aristas para llegar de x a y (una por cada bit en el que difieren) por lo que $d(x, y) \leq k$

Luego la distancia no puede ser menor estricta que k ya que si se toman menos aristas alguno de los k bits distintos va a permanecer inalterado.

Entonces la máxima distancia entre dos vértices del grafo va a hacer igual al máximo número de componentes en las que pueden diferir, en este caso n .

d)

En el caso de K_n el diámetro es 1.

Para u, v vértices distintos del grafo, por definición hay una arista que los conecta así que $d(u, v) = 1$.

Resulta entonces que la máxima distancia entre dos vértices cualesquiera solo puede ser 1.

Ejercicio 5

Ejercicio 5

Sea G el grafo del enunciado

a)

Para cualquier número natural n , $\gcd(n, 1) = 1$

Esto implica que 1 es un vértice aislado en el grafo.

Para $1 < n \leq 7$ se tiene que $2n \in V(G)$, por lo que existe el camino $n \rightarrow 2n \rightarrow 2$

(ya que $\gcd(2n, 2) = 2 \forall n \in \mathbb{N}$).

Para $n > 7$:

- $n = 8$, existe el camino $8 \rightarrow 2$
- $n = 9$, existe el camino $9 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 2$
- $n = 10$, existe el camino $10 \rightarrow 2$
- $n = 11$, 11 es primo y $\gcd(11, n) = 1 \forall n \leq 15$
- $n = 12$, existe el camino $12 \rightarrow 2$
- $n = 13$, 13 es primo y $\gcd(13, n) = 1 \forall n \leq 15$
- $n = 14$, existe el camino $14 \rightarrow 2$

- $n = 15$, existe el camino $15 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 2$.

Hay 3 componentes conexas

b)

Si $a = b \cdot p$ con p un número primo se tiene que

$\gcd(a, b) = b$ ya que b es el máximo número que divide a b y a es divisible por b .

Entonces la distancia entre dos números a y b va a ser la cantidad de factores primos que tiene $a/\gcd(a, b)$

Si $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ con $p_i \geq 2$ entonces $a \geq 2^k$.

$\gcd(a, p_1) = p_1$

Entonces $\text{dist}(a, p_1) = k - 1$

Si $a = 8 = 2^3$, $\text{dist}(8, 2) = 2$

Ejercicio 6

Ejercicio 6

a)

Eliminar un vértice del grafo no puede disminuir la cantidad de componentes conexas, solo aumentarlas. (nota si puede, es el caso de eliminar un vértice aislado)

Por lo que se tiene que $c(G) \leq c(G - v)$

Por lo que:

$$c(G) - 1 \leq c(G) \leq c(G - v)$$

$$c(G - v) \leq c(G) + d(v) - 1 \text{ pendiente}$$

b)

Si G es conexo entonces $c(G) = 1$

$$c(G - v) \leq c(G) + d(v) - 1 = 1 + d(v) - 1 = d(v)$$

c)

Del ejercicio a se tiene que

$$d(v) \geq c(G - v) - c(G) + 1 \geq 1 + c(G) - c(G) + 1 \geq 2$$

d)

Si $c(G - v) = c(G)$ entonces para cualquier par de vértices u, w de la componente conexa existe un camino simple que no pasa por v

Se tiene que $d(v) \geq 2$:

Si v tiene un lazo entonces el ciclo buscado es el camino cerrado $v \rightarrow v$ que pasa por el lazo.

Si v tiene dos aristas paralelas conectadas a un vértice x entonces el ciclo pedido es $v \rightarrow x \rightarrow v$.

Si no entonces v está conectado a dos vértices u, w distintos.

Sea $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$ un camino simple donde $x_1 = u$, $x_k = w$ y $\forall i : x_i \neq v$ el bucle pedido es $v \rightarrow u = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_k = w \rightarrow v$

Ejercicio 8

Ejercicio 8

8. a) Dos grafos C_3 conectados por una arista e , los vértices de corte son los extremos de la arista e

b) El grafo K_6

Si se elimina un vértice v de K_6 , sigue habiendo un camino cualquiera entre dos vertices u y w
Respuesta si.

$$E(K_6) = \{(a, b) : a, b \in V\} = \bigsqcup_{b \in V} \{(a, b) : a \in V\}$$

$$E(K_6 - v) = \bigsqcup_{b \in V} \{(a, b) : a \in V\} - \{(a, v) : a \in V\} = \bigsqcup_{b \in V-v} \{(a, b) : a \in V - v\} \\ = \{(a, b) : a, b \in V - v\}$$

Dos vertices cualesquiera siguen conectados

c)

Dado un grafo G con un vertice v .

v es de corte $\iff \exists u, w \in V$: todos los caminos entre u y w pasan por v

\iff)

Sea el grafo $G - v$, en dicho grafo los vértices u, w están desconectados(si no lo están existe un camino entre u y w que no pasa por v lo cual es absurdo).

$G - v$ tiene al menos dos componentes conexas separadas(una donde esta u y otra donde esta w)

En G dichas componentes no están presentes(ya que existe un camino entre u y w que pasa por v) por lo que G tiene menos componentes que $G - v$, v es un vértice de corte.

\implies

Pruebo la contrarrecíproca: $\forall u, w \in V$: existe un camino entre u, w que no pasa por $v \implies v$ no es de corte

Dado el grafo $G - v$, se tiene que todo par de vértices que estaban conectados en G lo siguen estando en $G - v$ (ya que ninguna arista del camino tiene a v como extremo, dichas aristas siguen perteneciendo al grafo $G - v$)

Por lo que eliminar v no afecta a la conectividad del grafo, v no es de corte

Ejercicio 9

Ejercicio 9

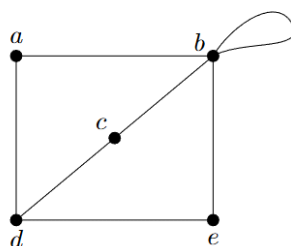
a) Falso, el grafo K_2 tiene una única arista de corte pero no tiene vértices de corte

b) Falso, el grafo moño no tiene aristas de corte pero tiene un vertice de corte(el vertice central)

Practica 4 - Grafos eulerianos

Práctica 4 - Caminos, Ciclos y Recorridos

1. Considere el grafo de la figura. En cada uno de los siguientes ítems, determine si el camino indicado es un camino simple, un recorrido, un ciclo y/o un circuito. Además, determine la longitud de cada camino.



- (a, b, c, d, e)
 - (b, b)
 - (d, c, b, e, d)
 - $(b, c, d, a, b, e, d, c, b)$
 - (a, d, c, b, e)
2. En cada caso, determine si K_4 contiene un camino con la característica indicada.
- Un camino que no es un recorrido.
 - Un recorrido que no es cerrado y que no es un camino simple.
 - Un circuito que no es un ciclo.
3. Sea G un grafo y sean v y w dos vértices distintos de G .
- Demuestre que si hay un camino de v a w , entonces hay un camino simple de v a w .
 - Demuestre que si hay un circuito (de long. positiva) que contiene a v , entonces hay un ciclo (de long. positiva) que contiene a v .
4. Sea G un grafo conexo. La *distancia* entre dos vértices v y w en G , que notaremos $\text{dist}(v, w)$, es la menor longitud de un v, w -camino. El *diámetro* de G es
- $$\text{diam}(G) = \max \{ \text{dist}(v, w) : v, w \in V(G) \}$$
- Determine el diámetro del grafo del ejercicio (11a).
 - Determine el diámetro del grafo de Petersen.
 - Determine el diámetro del n -cubo Q_n .
 - Determine el diámetro del grafo completo K_n .
5. Sea G el grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G) = [15]$ donde dos vértices i y j son adyacentes si y solo si su máximo divisor común es mayor a 1.
- ¿Cuántas componentes conexas tiene G ?
 - Determine la longitud máxima de un camino simple en G .

Practica 5

 [Ejercicio 12](#)

 [Ejercicio 4](#)

 [Ejercicio 6](#)

 [Ejercicio 7](#)

Ejercicio 12

Ejercicio 12

Sea el grafo G_n donde $V(G)$ son las posibles permutaciones de $[n]$ y dos vértices p y q son adyacentes $\iff p_i \neq q_i \forall i = 1, \dots, n$

Resolver el problema equivale a encontrar un camino hamiltoniano.

b)

$n = 1$)

Si, hay una sola permutación por lo que el resultado es 1

$n = 2$)

Si, el camino hamiltoniano es 12,21

$n = 3$)

No hay camino hamiltoniano porque el grafo es desconexo(son 2 grafos C_3 desconexos)

$n = 4$)

Hay solución, 1234, 2341, 3412, 4123, 3214, 2143, 1432, 4321, 3142, 1423, 4231, 2314, 3421, 4213, 2134, 1342, 2413, 4132, 1324, 3241, 4312, 3124, 1243, 2431

(Nota de como llegar, empezar por 1234 e ir rotando los dígitos a la izquierda, tras 4 permutaciones elegir otra permutación distinta y repetir hasta escribir 4 permutaciones)

Ejercicio 4

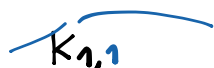
Ejercicio 4

a)

Suponiendo que el grafo de Petersen efectivamente tiene un ciclo hamiltoniano. Esto quiere decir que tiene un C_{10} como subgrafo

El grafo de Petersen tiene 15 aristas. Si se quiere completar el ciclo C_{10} para formar el grafo de Petersen es necesario añadir 5 aristas adicionales.

Se tiene entonces el siguiente grafo



Suponiendo s.p.d.g que primero se añade una arista en 1

Los vértices 2 y 10 no pueden conectarse porque ya están conectados.

Los vértices 3, 4, 9 y 8 no pueden conectarse ya que hacerlo forma un ciclo de 3 o un ciclo de 4(lo cual es imposible ya que el grafo de Petersen no tiene ninguno).

Es decir que hay que conectar 1 bien con el vértice 5, 6 o 7. Suponiendo s.p.d.g que se conecta el vértice 1 con el 6.



Dado que hay que seguir añadiendo aristas, se puede proseguir a añadir una arista al vértice 5.

Conectar 5 con 1 genera un vértice de grado 4.

Conectar 5 con 3, 7 genera un ciclo de 3.

Conectar 5 con 4 y 6 es imposible porque ya están conectados.

Conectar 5 con 2, 8 y 10 genera un ciclo de 4.

La única posibilidad es conectar los vértices 5 y 9.



Conectar el vértice 10 con cualquier otro vértice genera una contradicción.

Conectar 10 con 1, 9, 5 o 6 genera un vértice de grado 4.

Conectar 10 con 8, 2 genera un ciclo de 3.

Conectar 10 con 3, 7 o 4 genera un ciclo de 4.

Por lo tanto el grado de Petersen no puede tener un ciclo hamiltoniano.

El grado de Petersen contiene un ciclo hamiltoniano que ignora un vértice.



Eliminar dicho vértice v genera un grafo con un ciclo hamiltoniano.

Dado que el grafo de Petersen es vértice transitivo, existe un automorfismo desde el vértice v a cualquier otro vértice del grafo. Por lo que la propiedad se mantiene para cualquier otro vértice.

Ejercicio 6

Ejercicio 6

Determinar si las siguientes familias de grafos admiten un ciclo o camino hamiltoniano. En el caso de que si, describa uno.

a) K_n

K_1 y K_2 admiten un camino hamiltoniano pero no son hamiltonianos.

Para K_1 , el camino vacío es hamiltoniano.

Para K_2 , el camino con la única arista v_1v_2 es hamiltoniano.

K_n es hamiltoniano para todo $n \geq 3$

Dicho ciclo es el conjunto de aristas $\{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\}$

b) $K_{m,n}$

$K_{m,n}$ es hamiltoniano $\iff m = n$ y $n \geq 2$

\Rightarrow)

Si $m \neq n$

Suponiendo que $K_{m,n}$ es hamiltoniano, entonces tiene un ciclo de $m + n$ vértices como subgrafo.

Para que haya un ciclo tiene que resultar que $m + n \geq 3$

Suponiendo sin pérdida de generalidad que el primer vértice del ciclo pertenece al conjunto X de la bipartición.

Los vértices impares tienen que pertenecer al conjunto X

Los vértices pares tienen que pertenecer al conjunto Y

La suma de m y n tiene que ser par.

Si $m > n$ o $n < m$ entonces necesariamente alguna arista va a unir vértices del mismo conjunto.

Por lo que no puede pasar que $m \neq n$. Absurdo.

Resulta $m = n$ y $n \geq 2$

\Leftarrow)

Por inducción en n

CB) $n = 2$

$K_{2,2} \simeq C_4$ que es hamiltoniano.

HI) K_{nn} es hamiltoniano $\forall n \geq 2$

PI)

Sean los conjuntos X e Y de la bipartición y $x \in X$ e $y \in Y$

El subgrafo inducido por los vértices $X - x \cup Y - y$ es isomorfo a K_{nn}

Existe un camino $v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}, v_1$

Suponiendo sin pérdida de generalidad que $v_1 \in X, v_{2n} \in Y$

El ciclo hamiltoniano buscado es $v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}, x, y, v_1$

$K_{n+1,n+1}$ es hamiltoniano.

Para el caso del camino hamiltoniano, se tiene que K_{mn} tiene un camino hamiltoniano \iff

$|m - n| = 1$ o si bien $n = m = 1$

Suponiendo sin pérdida de generalidad que $n > m$

$K_{11} \simeq P_2$ que tiene un camino hamiltoniano

K_{nn} es hamiltoniano $\iff n \geq 2 \wedge n = m$

Si se borra un vértice cualquiera de K_{nn} se tiene un grafo isomorfo a $K_{n,n-1}$ con un camino hamiltoniano. Por lo que $K_{n,m}$ tiene un camino hamiltoniano $\iff n = m - 1$

El grafo K_{mn} con $|m - n| \geq 2$ no tiene ni un ciclo ni un camino hamiltoniano

Si K_{mn} tiene un ciclo hamiltoniano entonces tiene en particular un camino hamiltoniano (solo hay que borrar la última arista del camino).

Suponiendo que tiene un camino hamiltoniano, v_1, v_2, \dots, v_{n+m}

Suponiendo s.p.d.g que $n > m$ y $v_1 \in X$. Los vértices pares del camino pertenecen a Y y los impares a X .

$$m = \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor$$

$$n = \lceil \frac{n+m}{2} \rceil \geq m + 2 = \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + 2$$

Y se tiene que:

$$2 \leq \lceil \frac{n+m}{2} \rceil - \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor \leq 1. \text{ Absurdo.}$$

Luego el grafo no contiene un camino hamiltoniano. Por MT, el grafo tampoco puede tener un ciclo hamiltoniano.

Ejercicio 7

Ejercicio 7

Suponiendo que el grafo comienza en un vértice v de una partición X del grafo.

Se pueden elegir n aristas para formar el ciclo hamiltoniano.

Luego se pueden elegir $n - 1$ aristas, a partir de aquí se llega a otro vértice de la partición Y . Debido a que uno de los vértices de la partición X .

Desde este nuevo vértice se pueden elegir $n - 1$ aristas (porque un vértice de Y ya está visitado).

Desde el nuevo vértice de Y se pueden elegir $n - 2$ aristas (porque 2 vértices ya están visitados).

Y así se tiene el resultado:

$$\begin{aligned} n \cdot (n - 1) \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ = n! \cdot (n - 1)! \end{aligned}$$

Este conteo cuenta un mismo ciclo dos veces, ya que cuenta un ciclo por una arista empezada y luego cuenta el mismo ciclo por la arista que termina. Así que hay que dividir el resultado por 2

El resultado final es $\frac{1}{2} \cdot n! \cdot (n - 1)!$

En cuanto a la cantidad de caminos hamiltonianos, para cada ciclo hamiltoniano distinto se puede borrar una de sus n aristas por lo que la cantidad de caminos hamiltonianos va a ser

$$\frac{1}{2} \cdot n! \cdot (n - 1)! \cdot n = \frac{1}{2} (n!)^2$$

Practica 6 parte 1

[Ejercicio 2](#)

Ejercicio 2

Ejercicio 2

K_n)

Solo K_1 y K_2 son arboles, ya que son conexos y acíclicos

K_n para $n \geq 3$ no es un árbol, ya que dichos K_n tienen un triangulo inducido(y por lo tanto, no son acíclicos).

P_n)

Todos los P_n son conexos y acíclicos, por lo tanto son arboles.

C_n)

El propio grafo en si es un ciclo, por lo tanto no es un árbol.

$K_{m,n}$)

Sea $m, n \in \mathbb{N}$ y $m \leq n$:

Para $m \geq 2$, dichos grafos no son arboles, ya que $K_{m,n}$ contiene un grafo $K_{2,2}$ inducido. Sean las particiones $X = \{v_1, v_2\}$ y $Y = \{v_3, v_4\}$, existe el camino cerrado $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1$. Por lo tanto ningún grafo de este tipo es un árbol.

Para $m = 1$, estos grafos son isomorfos a los grafos estrella, por lo tanto son arboles.

Para $m = 0$, estos grafos están formados por un único conjunto estable, no pueden ser arboles ya que no son conexos.

Q_n)

Ningún Q_n para $n \geq 2$ es un árbol puesto que todos los Q_n contienen un Q_2 fibrado y $Q_2 \simeq C_4$. Estos no son arboles.

Q_1 es un árbol ya que es isomorfo a K_2 .

Practica 8

 [Ejercicio 10](#)

 [Ejercicio 11](#)

 [Ejercicio 13](#)

 [Ejercicio 14](#)

 [Ejercicio 17](#)

Ejercicio 10

Ejercicio 10

Pruebo por inducción en la cantidad de vértices

CB) $n = 0$

El grafo vacío, trivialmente no tiene matchings

$n = 1$

Un grafo con un solo vértice, este grafo no tiene matchings.

HI) Todo árbol T con n vértices tiene como mucho un matching perfecto.

PI)

Si T es un árbol con 2 o mas vértices, entonces tiene al menos una hoja h . La única forma de que un matching perfecto sature la hoja es usando la única arista que la conecta. Luego el árbol $T - h$ es un árbol que por hipótesis inductiva, tiene un único matching perfecto. Por consiguiente, T tiene a lo sumo un matching perfecto.

Ejercicio 11

Ejercicio 11

G tiene un matching perfecto $\iff \alpha'(G) = \frac{|V(G)|}{2}$, siendo α' el numero de matching

Se sabe además que $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$ siendo α el numero de estable y β el numero de cubrimiento.

Por el teorema de konig: $\alpha'(G) = \beta(G)$.

Luego $\alpha(G) = |V(G)| - \alpha'(G) = \frac{|V(G)|}{2}$

La reversa es similar.

Ejercicio 13

Ejercicio 13

a)

Sea S un cubrimiento por vértices, dos vértices $u, v \notin S$ forman un estable.

Por el contrario si u y v estuviesen conectados entonces la arista uv tiene extremos que no están en el cubrimiento y por ende S no es un cubrimiento de vértices. Esto implica que \bar{S} es un conjunto estable.

De la misma manera, si S es un estable, \bar{S} es un cubrimiento por vértices ya que si existiese una arista uv donde $u \notin \bar{S} \wedge v \notin \bar{S} \implies u \in S \wedge v \in S \implies$ no existe una arista que los conecta(ya que pertenecen al estable), lo cual es absurdo.

b)

Sea S un estable donde $|S| = \alpha(G)$, $\beta(G) = |\bar{S}|$

$$S \cup \bar{S} = V(G)$$

$$|S| + |\bar{S}| = |V(G)|$$

$$\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$$

Ejercicio 14

Ejercicio 14

Sean e y e' dos aristas de G

$\{e, e'\}$ es un matching en $G \iff e, e'$ no comparten extremo

e, e' están conectados en $L(G) \iff e$ y e' comparten extremo.

Por contrarrecíproca

e, e' no están conectados en $L(G) \iff e$ y e' no comparten extremo.

Luego:

$\{e, e'\}$ forman un estable en $L(G) \iff e, e'$ no están conectados en $L(G) \iff e$ y e' no comparten extremo $\iff \{e, e'\}$ es un matching en G .

Por consiguiente, $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$

Ejercicio 17

Ejercicio 17

a)

El grafo de Petersen es un grafo 3-regular.

Si no existe un matching perfecto entonces el grafo no es 1-factoreable.

Suponiendo que existe 1 matching perfecto, al eliminar dicho matching se tiene un grafo 2-regular, por lo que dicho grafo está compuesto solo por ciclos.

Se pueden formar varias componentes conexas con ciclos, solo las que están compuestas únicamente por ciclos pares pueden formar un matching perfecto.

La única pareja de este tipo es la que forma un C_4 y un C_6 , sin embargo dicha pareja no puede formarse ya que el grafo de Petersen no tiene ningún C_4 como subgrafo.

Por lo tanto el grafo resultante de eliminar el matching perfecto no tiene más matchings perfectos. Como consecuencia el grafo de Petersen no puede ser 1-factoreable.

b)

Pruebo por inducción en n

CB) $n = 1$

Tiene una única arista que une dos vértices, esa única arista es el matching perfecto del 1-factoreo

HI) $\forall n \in \mathbb{N}$: $K_{n,n}$ es 1-factoreable

PI)

Sea el grafo $K_{n+1,n+1}$.

Dada la partición $X = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ y $Y = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$. Las aristas $u_i v_i$ con $i \in 1, \dots, n$ forman un matching perfecto. Al eliminar esas aristas del grafo se tiene un $K_{n,n}$ que por HI tiene un 1-factoreo.

Al añadir los matchings de dicha factorización con las aristas de antes se tiene un 1–factoreo de $K_{n+1,n+1}$.

Practica 9

 [Ejercicio 10](#)

 [Ejercicio 2](#)

 [Ejercicio 20](#)

 [Ejercicio 3](#)

Ejercicio 10

Ejercicio 10

a)

Si G no es conexo entonces tiene al menos dos componentes conexas, eliminar un vértice de la componente conexa que requiera menos colores no afectara al coloreo de la componente restante. Por lo que eliminar ese vértice no reduce el numero de coloreo, por lo que G no es color critico. Absurdo.

Ejercicio 2

Ejercicio 2

a) $\chi(K_n) = n$

K_n no puede admitir un coloreo con menos colores ya que de ser así, hay dos vértices u, v con el mismo color. Pero dichos vértices están conectados en u, v . Absurdo.

b) $\chi(K_{n,m}) = 2$

Este grafo es bipartito, por lo tanto su numero de coloreo es 2. Un coloreo valido es el que le asigna el color 0 a los vértices de X y 1 a los vértices de Y .

c) $\chi(C_n) = 2$ si n es par sino $\chi(C_n) = 3$

Si n es par C_n es bipartito por lo que su coloreo es 2.

Si n es impar no puede tener un 2 coloreo ya que de ser así seria bipartito(lo cual no puede ser por la caracterización de grafos bipartitos). Luego C_n admite el 3-coloreo que asigna el color 0 a los vértices impares distintos de v_n , 1 a los vértices pares y 2 a v_n .

d) $\chi(P_n) = 2$

P_n es bipartito.

Ejercicio 20

Ejercicio 20

a)

Como G es un subgrafo de inducido de G_M , se tiene que $\omega(G_M) \geq \omega(G)$

Ninguno de los vértices u están conectados entre si y el vértice w solo esta conectado a los vértices u .

Por lo que una clique de G solo puede extenderse con al menos un vértice u .

S.P.D.G que la clique máxima esta formada por los vértices $\{v_1, \dots, v_k\}$ y se extiende la clique usando un vértice u_j .

Para que la clique crezca tiene que pasar que $v_j, v_i \in E(G)$ para todo $i \in [k]$, esto quiere decir que $\{v_1, \dots, v_k, v_j\}$ es una clique de mayor tamaño. Lo cual es absurdo ya que se parte del supuesto que se tenía una clique máxima.

Por lo que la clique máxima de G es también máxima en G_M , $\omega(G_M) = \omega(G)$

b)

Sea f un coloreo optimo de G

Puesto que todos los vecinos de v_i son también vecinos de u_i , a ambos vértices se les puede asignar el mismo colores. Intentar usar menos colores terminara en dos vértices del mismo color unidos, por lo que este coloreo es optimo.

Luego como w esta unido a todos los vértices u , w se necesita al menos un color mas para colorear w por lo que $\chi(G_M) = \chi(G) + 1$.

c)

Se puede hacer la construcción de G_M sobre G_M k veces para construir el grafo H pedido.

Si G es bipartito, probar que existe un matching M tal que $\frac{|E|}{\Delta(G)} \leq |M|$

Si existe un matching M que lo cumpla entonces para cualquier matching mas grande que M se va a cumplir, en particular se tiene que cumplir para el matching máximo del grafo. Entonces se tiene que

$$\frac{|E|}{\Delta(G)} \leq \alpha'(G) = \beta(G)$$

Por lo que hay que probar que: $|E| \leq \beta(G) \cdot \Delta(G)$

La propiedad es cierta ya que para los vértices $\{v_1, \dots, v_k\}$ de un cubrimiento mínimo de G

$$|E| \leq \sum_{i=1}^k d(v_i) \leq \beta(G) \cdot \Delta(G)$$

283.3

Ejercicio 3

Ejercicio 3

$$\chi(W_n) = \chi(C_n) + 1$$

W_n posee un vértice universal, al eliminar dicho vértice se tiene un C_n , el color que se le asigne al vértice universal tiene que ser distinto a todos los otros, por lo que el numero de coloreo tiene que ser mayor en 1 unidad.

Presentaciones

Matching

Planaridad

Matching

Matching

Problema de introducción

Que es un matching?

Dado un grafo $G = (V, E)$, un matching M es un subconjunto de $E(G)$ tales que dos aristas cualesquiera de M no comparten extremo. Un vértice que es extremo de una arista de M se dice que es un vértice saturado por M o M -saturado.

Inserte dibujito de un matching

Un subconjunto de un matching es también un matching, pero puede ocurrir que un matching M no sea subconjunto de otro matching. Si esto ocurre, decimos que M es un matching maximal.

Se dice que un matching M es perfecto cuando todos los vértices de G están saturados por M .

A partir de esta información se puede sacar el siguiente resultado:

Teorema: Sea $n = |V(G)|$, un matching M tiene un tamaño de como máximo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ aristas.

Demostración:

Si hay un matching de tamaño mayor, entonces este matching tiene como subconjunto a otro matching de tamaño al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ el cual satura exactamente $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ vértices.

\

Luego si n es par $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$. Se saturan $n + 2$ vértices, es decir, hay mas vértices saturados que vértices del grafo, absurdo.

\

Si n es impar $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ y se saturan en total $n + 1$ vértices, nuevamente hay mas vértices saturados que vértices del grafo, absurdo.

\

El absurdo viene de suponer que hay un matching de tamaño mayor a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, por lo tanto $|M| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Caminos M-aumentantes y Teorema de Berge

Dado un matching M se definen:

Camino M-alternante: Es un camino en G que alterna aristas de M y $E(G - M)$.

Camino M-aumentante: Un camino M -alternante cuyos extremos son distintos y no están M -saturados.

Observación: Si se tiene un camino M -aumentante, las aristas de $P - M$ forman un matching de tamaño mayor a M , mas específicamente, $|P - M| = |M| + 1$.

Explicar con dibujito

De aquí se puede enunciar el Teorema de Berge

Teorema de Berge: Un matching M de G es máximo \iff No hay caminos M -aumentantes en G
 \implies) Observación anterior, si M fuese un matching máximo y existiese un camino M -aumentante entonces existe un matching mas grande de M . Absurdo.
 \iff)

Primero pruebo dos lemas intermedios:

Lema 1: Si $\Delta(G) \leq 2$ toda componente conexa de G es un ciclo o un camino.

Para cada componente conexa, sea $P = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$ un camino maximal, todos los vértices internos ya tienen grado 2 así que no salen mas aristas de dichos vértices, de x_1 y x_k no pueden salir aristas a cualquier otro vértices puesto que sino P no seria maximal, así que $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ son todos los vértices de la componente. El grafo inducido por estos vértices puede tener como mucho una arista adicional, la correspondiente a x_1x_k , luego dicha componente es un camino o un ciclo.

Lema 2: Sean M' y M dos matchings, se tiene que toda componente conexa de $M' \Delta M$ es un camino o un ciclo par.)

Si existiese un vértice v de grado mayor a 2 entonces inciden al menos 3 aristas en dicho vertice, es decir, hay al menos 2 aristas de M o M' que tienen a v como extremo, lo cual es absurdo ya que contradice la definición de matching. Esto implica que $\Delta(G) \leq 2$ y cada componente conexa es un camino o un ciclo. Por un argumento similar se puede llegar a que en cada vértice inciden como mucho 2 aristas, una arista de M y una M' . Luego se tiene lo siguiente:

\

Si la componente es un camino $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$: Asumir S.P.D.G que $u_1u_2 \in M$, luego por lo visto anteriormente, $u_2u_3 \in M'$ y $u_3u_4 \in M$ y así sucesivamente.

\

Si la componente es un ciclo $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow u_1$: Por la razón anterior dicho ciclo alterna entre aristas de M y M' , Si $u_1u_2 \in M$ entonces la arista u_ku_1 no puede ser una arista de M (M no seria un matching). Luego se tiene que este ciclo es un ciclo par.

\

Suponiendo que G no tiene un camino M -aumentante y existe un matching M' donde $|M'| > |M|$, probemos que existe un camino M -aumentante.

\

Sea $F = M' \Delta M$, cada componente conexa es un ciclo par o un camino por el lema anterior. Como $|M'| > |M|$ una de estas componentes debe ser un camino que alterna aristas entre matchings. Los extremos de este camino estan saturados por M' y por lo tanto existe un camino M -aumentante.

Absurdo

□

El teorema de Berge provee una forma de encontrar un matching perfecto en el grafo a base de encontrar caminos aumentantes.

Estudiemos ahora el caso de los matchings para grafos bipartitos.

(en este teorema tengo dudas)

Teorema de Hall: Un grafo bipartito $G[X, Y]$ tiene un matching que satura X \iff

$\forall S \subseteq X : |N(S)| \geq |S|$

\implies) Sea el matching M que satura a X , cada vértice x_i de S se corresponde con una única arista e_i de M que lo tiene como extremo, esto implica que para cada arista e_i el otro extremo y_i pertenece a $N(S)$ se tiene que $|N(S)| \geq |S|$, el mayor viene que los vértices x_i pueden conectarse con otros vértices de Y que no son alcanzados por las aristas e_i .

\Leftarrow) Consideremos la contrarrecíproca,

no hay un matching que sature a $X \implies \exists S \subseteq X : |N(S)| < |S|$

Sea M un matching máximo y $u \in X$ no saturado, considerando todos los caminos M -alternantes (no M -aumentantes porque no existen puesto que M es máximo). Sea $S \subseteq X$ los vértices de X que aparecen en alguno de estos caminos y $T \subseteq Y$ los vértices de Y que aparecen en algunos de estos caminos.

Se tiene que $T \subseteq N(S)$

Veamos que $T = N(S)$

Todos los vecinos de u están saturados (sino el matching podría extenderse y este no sería máximo). Por lo tanto $N(u) \subseteq T$. Luego sea $y \in N(S) - T$, se tiene que y no está saturado (sino $y \in T$) y por un argumento igual al anterior se tiene que y es vecino de algún vértice saturado $s \in S - \{u\}$ y por lo tanto sy es una arista de G y $sy \notin M$.

Por ende existe un camino M -alternante de u a s , sumado a la arista sy , se tiene un camino M -aumentante, M no es máximo. El supuesto vértice y no existe y resulta $T = N(S)$.

Se tiene que: $|T| = |S - \{u\}|$

$|N(S)| = T = |S - \{u\}| = |S| - 1 < |S|$

Corolario: Todo grafo k -regular tiene un matching perfecto:

$$|E| = \sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$$

$$|E| = k|X| = k|Y|$$

$$|X| = |Y|$$

En consecuencia un matching que satura X es un matching perfecto.

\

Sea $S \subseteq X$, las aristas incidentes en S son $E(S) = k|S|$ y la cantidad de aristas incidentes en $N(S)$ son al menos las aristas incidentes en S , es decir $|E(N(S))| = k|N(S)| \geq k|S|$ y en consecuencia $|N(S)| \geq |S|$. Como se verifica la condición de Hall, existe un matching que satura X y en particular un matching perfecto.

Cubrimientos de vértices

Definición: Un cubrimiento de aristas por vértices es un conjunto $F \subseteq V(G)$ tal que toda arista de G tiene como extremo a al menos un vértice de F . El tamaño mínimo de un cubrimiento de G se denota como $\beta(G)$.

Sea $\alpha'(G)$ el tamaño máximo de un matching de G notar que por cada arista del matching tiene que haber un vértice en un cubrimiento mínimo de G . De aquí sale que $\alpha'(G) \leq \beta(G)$.

Teorema de Konig: Si un grafo es bipartito entonces $\alpha'(G) = \beta(G)$

Sea F un cubrimiento por vértices mínimo de $G[X, Y]$ construyo un matching tal que $|F| = |M|$ lo que implica la tesis.

\

Sea $R = F \cap X$ y $T = F \cap Y$, sea H *sgt* $R \cup (Y - T)$ y H' *sgt* $T \cup (X - R)$ (es decir, H está formado por los vértices de X que están en el cubrimiento y los vértices de Y que no están en el cubrimiento. H' se construye igual solo que cambian los roles de X e Y). No hay aristas entre $Y - T$ y $X - R$ (sino F no sería cubrimiento). Sea $S \subseteq R$, si $|N_H(S)| < |S|$, $T \cup N_H(S)$ (???) es un cubrimiento de G , esto pasa porque las aristas cubiertas por S son cubiertas por $N_H(S)$ y las demás aristas son cubiertas por T , pero $|T \cup N_H(S)| = |T| + |N_H(S)| < |T| + |S| \leq |T| + |R| = \beta(G)$

Lo que es absurdo, luego se verifica la condición de Hall para R en H .

\

Se tiene entonces que existe un matching M_H de tamaño $|R|$. Análogamente se puede conseguir un matching $M_{H'}$ de tamaño $|T|$. Ambos grafos son disjuntos por lo que $M = M_H \cup M_{H'}$ es un matching de G de tamaño exactamente $\beta(G)$.

Relación de los cubrimientos con los conjuntos estables

El complemento de un estable es un cubrimiento y viceversa.

S estable y F cubrimiento

\bar{S} es un cubrimiento)

Por el contrario, si \bar{S} no fuese un cubrimiento existe una arista uv donde

$u \notin \bar{S} \wedge v \notin \bar{S} \implies u \in S \wedge v \in S$ y como S es un estable no existe una arista uv que los conecte, lo que se contradice con la oración anterior.

\bar{F} es un estable)

Por el contrario, si \bar{F} no fuese un estable existe una arista uv donde

$u \in \bar{F} \wedge v \in \bar{F} \implies u \notin F \wedge v \notin F$

Y entonces hay una arista uv que no es cubierta por F . Absurdo.

Corolario: $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$

Planaridad

Planaridad

Problema de introducción

Problema del suministro de servicios: Se desea suministrar a 3 casas de agua, luz y electricidad.

Para ello, se proveen 3 fuentes de cada servicio que deben conectarse a las casas mediante caños/cables, ¿es posible hacerlo de manera que no haya ningún Cruce entre caños/cables?.

Formalización, grafos planares

El problema puede formalizarse como sigue, se pone un vértice por cada fuente de servicio y a su vez un vértice por cada casa, luego se conecta cada fuente con cada casa mediante una arista, el grafo resultante es un $K_{3,3}$

Un grafo G que puede dibujarse en el plano de manera que ninguna arista se cruce con otra se dice que es planar, resolver el problema del suministro equivale a responder si $K_{3,3}$ es planar.

El grafo K_4 por ejemplo es un grafo planar, **inserte dibujito**

Vemos que el grafo divide el plano en varias regiones, algunas de estas regiones están encerradas por aristas mientras que otras no lo están. A estas regiones delimitadas por las aristas del grafo las llamamos *caras* del grafo.

Observación: Si G es un grafo no simple, entonces es planar sii el subgrafo G' formado al eliminar las multiaristas y los bucles de G es simple.

Grafo dual: Llamamos G^* al grafo dual de un grafo plano G , donde cada vértice de G^* es una cara de G y además por cada arista $e \in G$ que esta en la frontera de las caras X, Y se añade una nueva arista $e' \in G^*$ que une los vertices de las caras X, Y

Dibujar grafos duales de dos inmersiones planas de K_4 y ver que no son iguales

Si se tiene que el grafo es conexo, entonces toda cara esta delimitada por un camino cerrado, lo que nos lleva a la siguiente definición:

Definición: Sea G un grafo y F una cara de G , se define $long(F)$ como la longitud del camino cerrado mas corto que contiene a todas las aristas de la frontera de F .

Observación: $long(F) = d_{G^*}(F)$

Corolario: Si G tiene f caras F_1, \dots, F_f entonces $\sum_{i=1}^f long(F_i) = 2|E(G)|$

Dado que $|E(G^*)| = |E(G)|$ se tiene que:

$$\sum_{i=1}^f long(F_i) = \sum_{i=1}^f d_{G^*}(F_i) = 2|E(G^*)| = 2|E(G)|$$

Formula de Euler

Para todo grafo plano y conexo con v vertices, a aristas y c caras vale la siguiente formula:

$$v - a + c = 2$$

Demuestro por inducción en la cantidad de vértices:

CB) $v = 1$

No hay aristas y la única cara es la cara exterior: $v - a + c = 1 - 0 + 1 = 2$, vale la formula.

HI) La formula de Euler vale para todo grafo con a lo sumo v vértices.

PI) Sea un grafo plano y conexo con $n + 1$ vértices, m aristas y c caras. Puesto que hay al menos dos vértices y el grafo es conexo, hay una arista uv que no es un bucle. Si se contrae dicha arista, es decir, se borran los vértices u y v , se añaden un vértice w y se conectan los vértices $N(u) \cup N(v)$ con w . Se tiene que el grafo luego de contraer la arista tiene $n' = (n + 1) - 1$ vértices, $m' = m - 1$ y $f = f'$ luego de aplicar la contracción por HI se tiene que:

$$n' - m' + f' = 2$$

Y reemplazando:

$$2 = (n + 1) - 1 - (m - 1) + f = (n + 1) - m + f$$

Y la formula de Euler vale.

Corolario: Si G es un grafo planar conexo con n vértices y m aristas con al menos un ciclo de largo $k \geq 3$ y la longitud de cada ciclo es al menos k se tiene que:

$$m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$$

Suponiendo que G es conexo,

Vimos antes que $2m = \sum_{F \in \text{caras de } G} long(F)$ y como cada ciclo tiene largo al menos k se tiene que $long(F) \geq k$, luego

$2m \geq kf$ y $f \leq 2/k \cdot m$, luego por la formula de Euler:

\

$$2 = n - m + f \leq n - m + 2/k \cdot m = n - (k-2)/k \cdot m$$

Y trabajando algebraicamente se tiene que:

$$m \leq (n - 2) \cdot k / (k - 2)$$

\

En el caso de que G no sea conexo se pueden añadir sucesivas aristas a G hasta formar un grafo conexo G' , luego:

$$|E(G)| < |E(G')| \leq (|V(G')| - 2) \cdot k / (k - 2) \leq (|V(G)| - 2) \cdot k / (k - 2)$$

Dato curioso, la formula tiene números enteros solo cuando $k = 3$ o $k = 4$

Corolario: Todo grafo planar tiene un vértice de grado al menos 5:

Si esto no fuese así todos los vértices tienen grado 6 o mas, sigue que hay al menos 3 vértices

$$\text{entonces } |E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d(v) / 2 \geq 6/2 \cdot |V(G)| = 3|V(G)|$$

Y el corolario anterior no se cumple, absurdo.

Usando la formula anterior se puede llegar a que si K_5 fuese planar:

Los ciclos de K_5 tienen largo al menos 3, por lo tanto $k = 3$

$$|E(K_5)| = 10 \leq 3|V(K_5)| - 6 = 15 - 6 = 9, \text{ ABS!}$$

Y por lo tanto K_5 no es planar.

Y si $K_{3,3}$ fuese planar:

$K_{3,3}$ es bipartito, puede tener ciclos de longitud al menos 4, tomando $k = 4$

$$|E(K_{3,3})| = 9 \leq 2|V(K_{3,3})| - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$$

Y por lo tanto $K_{3,3}$ no es planar. Esto nos dice que el problema del suministro no tiene solución.

Caracterización de grafos planares

Todo subgrafo H de un grafo planar G es planar, eso se consigue dibujando una inmersión plana de G y borrando vértices y aristas hasta llegar hasta H .

Un grafo H se consigue a partir subdivisión de una arista $e = uv$ de G si H se obtiene borrando la arista e , agregando un vértice w y agregando dos aristas uw y wv .

Definición: Un grafo G_1 es homeomorfo a un grafo G_2 sii ambos se consiguen a partir de un mismo grafo G aplicando sucesivas subdivisiones de aristas.

Notar que el hecho de aplicar subdivisiones de aristas no afecta a la planaridad del grafo G , por lo tanto se tiene el siguiente resultado: Un grafo G es planar \iff todo grafo homeomorfo a G es planar.

Esto junto al hecho de que K_5 y $K_{3,3}$ son grafos no planares minimales, conlleva al teorema de Kuratowski.

G es planar \iff no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$.

Teoremas

- [Cotas del numero cromatico](#)
- [El grafo de Petersen es vértice transitivo](#)
- [El numero de cubrimiento es no creciente por subgrafos inducidos](#)
- [La cantidad de vértices de grado impar en un grafo es siempre par](#)
- [La propiedad de ser bipartito es invariante vía isomorfismo](#)
- [Lema del apretón de manos](#)
- [Prueba del teorema del grafo perfecto usando algebra lineal](#)
- [Si un grafo tiene un camino entonces tiene un camino simple](#)
- [Teoremas de Nordaus-Gadhum](#)
- [Un grafo con grado mínimo muy alto contiene caminos y ciclos largos](#)

Cotas del numero cromatico

Cotas del numero cromatico

Sea G un grafo con $n := |V(G)|$, $m := |E(G)|$

1. $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$

Como las cliques están totalmente conectadas, necesitan tantos colores como vértices tienen para poder colorearse. Luego resulta $\chi(G) \geq \omega(G)$. Además se puede colorear el grafo asignando un vértice a cada color, por lo que $n \geq \chi(G)$ y por transitividad resulta la cota.

2. $\chi(G)\alpha(G) \geq n$

$$n = \sum_{\text{clases de color } C_i} |C_i| \leq \sum_{\text{clases de color } C_i} \alpha(G) = \chi(G)\alpha(G)$$

La desigualdad surge de que todas las clases de color son conjuntos estables de cardinal menor o igual al máximo conjunto estable del grafo.

3. $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$

Esta es una combinación de las cotas 1 y 2

$$n \leq \chi(G)\alpha(G) = \chi(G)\omega(\overline{G}) \leq \chi(G)\chi(\overline{G}).$$

4. $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$

Sea I un estable máximo y $v \in I$, $I \subseteq V - N(v)$ (los vecinos de v no pueden pertenecer al estable), en consecuencia, $\alpha(G) \leq |I| \leq |V - N(v)| = n - d(v) \leq n - \delta(G)$.

5. $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$

Sea I un estable máximo del grafo, es posible crear un coloreo de G asignándole un color a cada vértice de I y colores distintos a todos los demás vértices que no están en I , este es un coloreo que usa $n - \alpha(G) + 1$ colores y en consecuencia $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.

6. $\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$

Para cada vértice de cada color en un $\chi(G)$ -coloreo tiene que haber una arista que conecte dicho vértice con al menos un vértice de otro color, si esto no es así entonces existiría un $(\chi(G) - 1)$ -coloreo lo cual es imposible. Puede haber mas de una arista que conecte vértices de distinto color, por lo tanto $m \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

Luego:

$$m \geq \binom{\chi(G)}{2} = \chi(G)(\chi(G) - 1)/2$$

$$2m \geq \chi(G)^2 - \chi(G)$$

$$2m + 1/4 \geq \chi(G)^2 - \chi(G) + 1/4$$

$$2m + 1/4 \geq (\chi(G) - 1/2)^2$$

$$\sqrt{2m + 1/4} + 1/2 \geq \chi(G)$$

7.

El grafo de Petersen es vértice transitivo

El grafo de Petersen es vértice transitivo

El grafo de Petersen es isomorfo al grafo de Kneser $K(5, 2)$

Es decir, cada vértice puede etiquetarse con un subconjunto de $1, 2, 3, 4, 5$ con 2 elementos y donde dos vértices son adyacentes si su intersección es vacía.

Dados dos vértices $\{x, y\}$ $\{u, v\}$ con $\{x, y\} \neq \{u, v\}$, ¿existe un auto morfismo f tal que $f(\{x, y\}) = \{u, v\}$?

Sea la función $g : \{x, u, y, v, z\} \rightarrow \{x, u, y, v, z\}$ donde $\{x, u, y, v, z\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y g esta definida como:

$$g := \begin{pmatrix} x & y & u & v & z \\ u & v & x & y & z \end{pmatrix}$$

Y la función f definida de V a V como: $f(\{a, b\}) = \{g(a), g(b)\}$

g es biyectiva porque es invertible y su propia inversa es g :

$$g(g(x)) = g(u) = x$$

$$g(g(y)) = g(v) = y$$

$$g(g(u)) = g(x) = u$$

$$g(g(v)) = g(y) = v$$

$$g(g(z)) = g(z) = z$$

f es biyectiva porque es invertible y su propia inversa es la misma f :

$$f(f(\{a, b\})) = f(\{g(a), g(b)\}) = \{g(g(a)), g(g(b))\} = \{a, b\}$$

Sean los vértices adyacentes $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$

$\{a, b\}$ y $\{c, d\}$ son adyacentes

\implies

$$\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$$

\implies

$$a \neq c \wedge a \neq d \wedge b \neq c \wedge b \neq d$$

\implies (definición función inyectiva)

$$g(a) \neq g(c) \wedge g(a) \neq g(d) \wedge g(b) \neq g(c) \wedge g(b) \neq g(d)$$

\implies

$$\{g(a), g(b)\} \cap \{g(c), g(d)\} = \emptyset$$

\implies

$$f(\{a, b\}) \cap f(\{c, d\}) = \emptyset$$

\implies

$f(\{a, b\})$ y $f(\{c, d\})$ son adyacentes

f es un automorfismo del grafo de Petersen que cumple que $f(\{x, y\}) = \{g(x), g(y)\} = \{u, v\}$.

El grafo de Petersen es vértice transitivo

El numero de cubrimiento es no creciente por subgrafos inducidos

El numero de cubrimiento es no creciente por subgrafos inducidos

Lema: Todo cubrimiento de un grafo G es también un cubrimiento de un subgrafo inducido, es decir, $G - v \forall v$

Por definición un cubrimiento de G es un subconjunto B de vértices tal que todas las aristas de G tienen un extremo en B .

Si se borran todas las aristas en v , entonces B sigue siendo un cubrimiento (puesto que no se añadieron nuevas aristas que no tengan extremo en B y el mismo conjunto B sigue intacto). Sea E' el conjunto resultante de estas operaciones, se tiene que B sigue siendo un cubrimiento y ninguna arista de E' tiene extremo en v (v es un vértice de grado 0), por ende el conjunto $B - v$ es un cubrimiento de E' y por ende es un cubrimiento de $G - v$, por ende

$$\beta(G) = |B| \geq |B - v| = \beta(G) - 1 \geq \beta(G - v)$$

La cantidad de vértices de grado impar en un grafo es siempre par

La cantidad de vértices de grado impar en un grafo es siempre par

Demostración:

La suma de dos números impares es siempre par, mientras que la suma de un numero par y un numero impar es siempre impar

Sean k y k' dos números enteros.

$$(2k + 1) + (2k' + 1) = 2(k + k') + 1 \rightarrow \text{par}$$

$$2k + (2k' + 1) = 2(k + k') + 1 \rightarrow \text{impar}$$

Si hubiese una cantidad impar de vértices de grado impar entonces la suma de los grados de los vértices sería un numero impar, lo cual es falso por el [lema de apretón de manos](#)

La propiedad de ser bipartito es invariante vía isomorfismo

La propiedad de ser bipartito es invariante vía isomorfismo

Si G y H son isomorfos, y G es bipartito entonces H es bipartito.

G es bipartito, por lo tanto su conjunto de vértices puede particionarse en 2 conjuntos X e Y donde $e = uv$ arista de G cumple que $u \in X \wedge v \in Y$ o viceversa.

Como G y H son isomorfos, existe un isomorfismo σ que preserva adyacencias.

Defino entonces las particiones de $V(H)$:

- $X' = \sigma(X)$
- $Y' = \sigma(Y)$

Dados dos vértices $u, v \in V(G)$ tal que $u' = \sigma(u) \wedge v' = \sigma(v)$.

Se cumple entonces que:

$$\begin{aligned} u'v' \in E(H) &\iff \sigma(u)\sigma(v) \in E(G) \xrightarrow{S.P.D.G} \sigma(u) \in X \wedge \sigma(v) \in Y \\ &\iff u' \in X' \wedge v' \in Y' \end{aligned}$$

Por lo tanto H es bipartito.

Lema del apretón de manos

Lema del apretón de manos

$$\forall G = (V, E) : \sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Demostración

La demostración la hago por inducción matemática en la cantidad de aristas del grafo

CB) $|E| = 0$

En este caso todos los vértices tienen grado 0 y la sumatoria se cumple

HI) $\forall n \in \mathbb{N} : G = (V, E) \wedge |E| = n \implies \sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

PI) $|E(G')| = n + 1$

Sea $e = (u, w)$ una arista del grafo.

$G' = G \setminus e$ es un grafo con $|E(G')| = n$, por lo tanto $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G')|$

$$\sum_{v \in V(G')} d(v) = 2|E(G')|$$

\implies

$$\sum_{v \in V(G')} d(v) + 2 = 2|E(G')| + 2$$

Si $u = w$, e es un lazo y el grado de u aumenta en 2.

$$\sum_{v \in V} d(v) + 2 = 2|E(G')| + 2$$

\implies

$$\sum_{v \in V(G')} d(v) + d(w) + 2 = 2|E(G')| + 2$$

\implies

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2(|E(G')| + 1) = 2|E(G)|$$

Si $u \neq w$, el grado de cada vértice aumenta en 1

$$\sum_{v \in V} d(v) + 2 = 2|E(G')| + 2$$

$$\sum_{v \in V} d(v) + (d(u) + 1) + (d(w) + 1) = 2(|E(G')| + 1)$$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G)|$$

La propiedad se cumple

■

Prueba del teorema del grafo perfecto usando algebra lineal

Prueba del teorema del grafo perfecto usando algebra lineal

Teorema: G es perfecto $\iff \forall H$ subgrafo inducido de $G : |V(H)| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H)$

Demostración:

Para cualquier subgrafo inducido H de G sus vértices pueden particionarse en $\chi(H)$ clases de color con colores $1, 2, \dots, \chi(H)$.

Luego se tiene que $|V(H)| = \sum_{i=1}^{\chi(H)} |[i]|$ los vertices de la clase de color forman un estable $\leq \sum_{i=1}^{\chi(H)} \alpha(H) \leq \chi(H) \cdot \alpha(H)$

Luego si G es perfecto se tiene que $\chi(H) = \omega(H)$ y la desigualdad se cumple, esto prueba la ida \implies

Si la vuelta fuese falsa entonces debería existir un contraejemplo de dicha proposición.

Suponiendo que existe dicho contraejemplo G , G es un grafo que cumple:

- La proposición $\forall H$ subgrafo inducido de $G : |V(H)| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H)$, es verdadera.

- G no es perfecto.

S.P.D.G, voy a asumir además que G es el contraejemplo con la menor cantidad de vértices.

Esto implica que cualquier grafo con menos vértices que G cumple con el teorema.

Sea $n := |V(G)|$,

Defino los siguientes términos por simplicidad, $\omega := \omega(G)$, $\alpha(G) := \alpha$, $V := V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$

Voy a probar 3 lemas:

Lema 1: $\forall U \subset V(G) : \chi(G - U) = \omega(G - U)$ y $\chi(G) > \omega(G)$

Demostración:

Cualquier subgrafo inducido propio de G tiene menos de n vértices, por lo que todo subgrafo inducido propio de G es perfecto. Esto prueba la primera proposición.

Si no se cumpliese que $\chi(G) > \omega(G)$ entonces $\chi(G) \leq \omega(G)$ y sigue que $\chi(G) = \omega(G)$ y G es perfecto. ABS!. La segunda proposición también es válida.

Lema 2: Existen $S_0, S_2, \dots, S_{\alpha\omega}$ conjuntos estables en G tal que todo vértice $v \in V$ esta contenido en exactamente α de estos conjuntos.

Demostración:

Defino al conjunto $S_0 := \{u_1, u_2, \dots, u_\alpha\}$ como un estable máximo del grafo G .

Luego para cada vértice $u_i \in S_0$, sabemos por lema 1 que $\chi(G - \{u_i\}) = \omega(G - \{u_i\})$, además $\omega(G - \{u_i\}) \leq \omega$, por lo que existe un f ω -coloreo del grafo $G - \{u_i\}$, defino los siguientes

$S_i, \dots, S_{i+\omega}$ conjuntos como las clases de color de f , cada vértice de $G - \{u_i\}$ va a pertenecer a exactamente 1 de estos conjuntos. Luego como puedo construir α de estos conjuntos, el lema 2 es válido.

Lema 3: Para cada $1 \leq i \leq \alpha\omega + 1$, existe una clique C_i de tamaño ω tal que:

- $|V(C_i) \cap S_i| = 0$
- $|V(C_i) \cap S_j| = 1$ para cada $1 \leq j \leq \alpha\omega + 1$ donde $i \neq j$

Primero pruebo el primer ítem, si dicha clique no existiese entonces todas las cliques de tamaño ω intersecan al conjunto S_i , esto hace que el subgrafo inducido $G - S_i$ tenga un numero de clique de como mucho $\omega - 1$, como por lema 1 existe un $\omega - 1$ -coloreo de $G - S_i$, luego dicho coloreo puede extenderse a un coloreo de G asignándole a cada vértice de S_i un nuevo color, esto implica que $\chi(G) \leq \omega(G)$ lo que contradice la segunda proposición del lema 1. Por lo que existe una clique C_i que es disjunta del estable S_i .

Para probar el segundo ítem, no puede ocurrir que $|V(C_i) \cap S_j| \geq 2$ ya que esto implicaría que S_j no es un estable, así que se tiene que $|V(C_i) \cap S_j| \leq 1$, ya sabemos que $|V(C_i) \cap S_i| = 0$, por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^{\alpha\omega+1} |V(C_i) \cap S_j| \leq \alpha\omega$$

Por el lema 2, cada vértice de C_i aparece en al menos α de estos conjuntos, como hay ω vértices en C_i se tiene que:

$$\alpha\omega \leq \sum_{j=1}^{\alpha\omega+1} |V(C_i) \cap S_j|$$

Y por lo tanto vale la igualdad, dado que $|V(C_i) \cap S_j| \leq 1$, el segundo ítem es válido y por lo tanto el lema 2 también lo es.

Finalmente, defino dos matrices A y B de tamaño $(\alpha\omega + 1) \times n$, donde:

- $a_{ij} = 1$ si $v_j \in S_i$ y $a_{ij} = 0$ si no.
- $b_{ij} = 1$ si $v_j \in C_i$ y $b_{ij} = 0$ si no.

Ahora las entradas del producto AB^t son:

$$(AB^t)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \cdot B_{jk}$$

$$A_{ik} \cdot B_{jk} = 1 \iff A_{ik} = 1 \wedge B_{jk} = 1 \iff v_k \in S_i \wedge v_k \in C_j \iff v_k \in S_i \cap C_j$$

Por lo tanto:

$$(AB^t)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \cdot B_{jk} = |S_i \cap C_j|.$$

Que por el lema 3 sabemos que tiene la siguiente pinta:

$$AB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La cual es invertible ya que sus columnas son linealmente independientes.

Utilizando las propiedades del rango de una matriz:

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$$

$\text{rank } A \leq m$. m = cantidad de columnas de A .

Se tiene que:

$$\alpha\omega + 1 = \text{rank}(AB^t) \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B^t\} \leq n$$

G es un grafo que cumple que $n \geq \alpha\omega + 1$, pero estábamos bajo la suposición de que G era un grafo que cumplía $n \leq \alpha\omega$, ABS!.

Este absurdo proviene de suponer que existe un contraejemplo de la vuelta, por lo que la propiedad es cierta.

El teorema es cierto y este teorema deriva en el teorema del grafo perfecto:

G es perfecto \iff

$$\forall H \text{ subgrafo inducido de } G : |V(H)| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H) \iff$$

$$\forall H \text{ subgrafo inducido de } G : |V(H)| \leq \alpha(H) \cdot \alpha(\overline{H}) \iff$$

$$\forall H \text{ subgrafo inducido de } \overline{G} : |V(H)| \leq \alpha(\overline{H}) \cdot \alpha(H) \iff$$

$$\forall H \text{ subgrafo inducido de } \overline{G} : |V(H)| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H) \iff$$

\overline{G} es perfecto

Si un grafo tiene un camino entonces tiene un camino simple

Si un grafo tiene un camino entonces tiene un camino simple

Las partes de vértices repetidos corresponden a ciclos.

Eliminar los ciclos del camino tiene como resultado un camino simple.

Teoremas de Nordaus-Gadhum

Teoremas de Nordaus-Gadhum

Sean n, a, b tres números enteros que cumplen:

$$2\sqrt{n} \leq a + b \leq n + 1 \quad \wedge \quad n \leq ab \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

Existe un grafo G tal que $\chi(G) = a$ y $\chi(\overline{G}) = b$

Demostración:

De la primera desigualdad surge:

$$a + b - 1 \leq n$$

Y de la segunda surge:

$$n \leq ab$$

Construyo entonces el grafo T donde los vértices se colocan en un rectángulo $a \times b$ tal que:

- La primera fila y columna están completas.
- Los siguientes $n - a - b + 1$ vértices se colocan en las celdas restantes, siempre intentando llenar todas las filas posibles.
- Solo son adyacentes aquellos vértices que están en la misma columna.

El grafo T es un grafo desconexo donde cada componente conexa es una clique. La clique máxima tiene tamaño a por lo tanto $\chi(T) = a$.

Como las filas de T son totalmente desconexas, en el complemento se formaran cliques en las filas, como hay una fila de largo b se tiene que $b \leq \omega(\overline{T})$ y dado que todo vértice del grafo esta conectado a al menos una fila no puede haber una clique de tamaño mayor a b , por lo tanto $b = \omega(\overline{T}) \leq \chi(\overline{T})$.

Sea entonces la siguiente función de $V \rightarrow \{1, \dots, b\}$:

$$f(v) = i \iff v \text{ pertenece a la } i\text{-ésima columna del rectángulo}$$

Este coloreo asigna un color a cada vértice según en que columna estén, como en el grafo T todos los vértices de la misma columna están conectados, en el complemento no hay vértices adyacentes que estén en la misma columna. Por ende f es un b -coloreo valido de \overline{T} y resulta $\chi(\overline{T}) = b$

T es por lo tanto un grafo que cumple que:

$$\chi(T) = a \quad \wedge \quad \chi(\overline{T}) = b$$

Y por lo tanto el teorema es valido.



Un grafo con grado mínimo muy alto contiene caminos y ciclos largos

Un grafo con grado mínimo muy alto contiene caminos y ciclos largos

Si G es un grafo que tiene $\delta(G) \geq 2$, entonces G contiene un camino de largo $\delta(G)$ y un ciclo de largo como mucho $\delta(G) + 1$

Sea x_1, \dots, x_k el camino de mayor longitud contenido en G .

Todos los vecinos de x_k están contenidos en el camino (de lo contrario, dicho camino no es maximal).

Por lo que $k \geq d(x_k) \geq \delta(G)$.

Si i es tal que x_i es vecino de x_k e i es mínimo entonces x_i, \dots, x_k, x_i es un ciclo en el grafo y su longitud es como mucho $\delta(G) + 1$

Insertar dibujito.
