Tutor:
Christopher de Vries

Mathematische Grundlagen 2

Übungsblatt 9

Abgabe: 3. 7. 2015

Bearbeitet von:

Luca Raimondo **DM**
Holger Illhardt **INF**
Janin Meyer **DM**

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Maximale Punktzahl	10	10	10	10	40
Erreichte Punktzahl					

Aufgabe 1.

Aufgabe 1.a.

$$\psi(v) = A\psi \cdot v, \ \langle v, w \rangle = v^T w$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad \langle v, w \rangle &= \langle \psi(v), \psi(w) \rangle \\
&= \langle A_\psi v, A_\psi w \rangle \\
&= (A_\psi v)^T A_\psi w \\
&= v^T A_\psi^T A_\psi w \\
\text{Wähle } v = e_i, w = e_j & \\
\Rightarrow \qquad & \begin{cases} \text{Ist } i = j, \text{ dann} & 1 = (A_\psi^T A_\psi)ii \\ \text{Ist } i \neq j, \text{ dann} & 0 = (A_\psi^T A_\psi)ij \end{cases} \\
\Rightarrow \qquad & A_\psi^T A_\psi = I \quad (\Leftrightarrow A_\psi \text{ orthogonal})
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.b.

GG WP Mathe

Aufgabe 1.c.

Sei C die darstellende Matrix einer orthogonalen Abbildung, c ein Eigenwert und x ein Eigenvektor der Abbildung. Es gilt: $\|x\| = \|Cx\|$, weil C orthogonal ist.

Ebenfalls ist x Eigenvektor von C, also gilt: $\|x\| = \|cx\|$. Damit muss $|c| = 1$ sein. Die einzigen Zahlen $\in \mathbb{R}$, deren Betrag 1 ist sind $1, -1$.

Somit kann eine orthogonale Abbildung mehr als nur 1 als Eigenwert haben.

Aufgabe 2.

Aufgabe 2.a.

Seien $z, w = \frac{1}{2} + i$

$$\begin{aligned}
& & z \cdot w &= c \\
\Leftrightarrow & & \left(\frac{1}{2} + i\right)\left(\frac{1}{2} + i\right) &= c \\
\Leftrightarrow & & \frac{1}{4} + i + i^2 &= c \\
\Leftrightarrow & & \frac{1}{4} + i - 1 &= c \\
\Leftrightarrow & & -\frac{3}{4} + i &= c
\end{aligned}$$

Somit ist $c = z \cdot w$ die gesuchte komplexe Zahl, denn es gilt: $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Re}(z \cdot w) < 0$.

Aufgabe 2.b.

Seien $u, v = -1 + i$

$$\begin{aligned}
& & u \cdot v &= d \\
\Leftrightarrow & & (-1 + i)(-1 + i) &= d \\
\Leftrightarrow & & 1 - 2i + i^2 &= d \\
\Leftrightarrow & & 1 - 2i - 1 &= d \\
\Leftrightarrow & & 0 - 2i &= d
\end{aligned}$$

Somit ist $d = u \cdot v$ die gesuchte komplexe Zahl, denn es gilt: $\mathrm{Im}(u), \mathrm{Im}(v) > 0,\ \mathrm{Im}(u \cdot v) < 0$.

Aufgabe 2.c.

$$\begin{aligned}
& x^2 + 4x + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (a+bi)^2 + 4(a+bi) + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a^2 + 2abi + (bi)^2 + 4a + 4bi + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a^2 + 2abi + b^2 i^2 + 4a + 4bi + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a^2 + 2abi + b^2 \cdot (-1) + 4a + 4bi + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a^2 + 2abi - b^2 + 4a + 4bi + 8 = 0
\end{aligned}$$

Wir übertragen in ein GS:

$$a^2 + 2abi - b^2 + 4a + 4bi + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 4a + 8 = 0 \\ 2abi + 4abi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 4a + 8 = 0 \\ 2ab + 4ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 4a + 8 = 0 \\ ab = 0 \end{cases}$$

Fallunterscheidung – Fall 1: $a = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^2 + 8 = 0 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 8 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt{8} \\ ab = 0 \end{cases}$$

Fallunterscheidung – Fall 2: $b = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4a + 8 = 0 \\ ab = 0 \end{cases}$$

nach pq-Formel

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{33}{4} \text{ oder } a_2 = \frac{29}{4} \\ ab = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2.d.

$$\begin{aligned}
& (3+2i)x + (-1+i) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (3+2i)x = -1 + i \\
\Leftrightarrow\quad & (3+2i)(a+bi) = -1 + i \\
\Leftrightarrow\quad & 3a + 2ai + 2bi^2 + 3bi = -1 + i \\
\Leftrightarrow\quad & 3a + 2ai - 2b + 3bi = -1 + i
\end{aligned}$$

Wir übertragen in ein GS:

$$
\begin{aligned}
3a + 2ai - 2b + 3bi = -1 + i \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a - 2b = -1 \\ 2a + 3b = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a - 2b = -1 \\ \qquad 3b = 1 + 2a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a - 2b = -1 \\ \qquad b = \frac{1}{3} + \frac{2a}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a - 2b = -1 \\ \qquad b = \frac{2a+1}{3} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2\left(\frac{2a+1}{3}\right) = -1 \\ b = \frac{2a+1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - \frac{4a+2}{3} = -1 \\ b = \frac{2a+1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(3 - \frac{4+2}{3}\right) = -1 \\ b = \frac{2a+1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3-\frac{4+2}{3}} \\ b = \frac{2a+1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{3-4+2} \\ b = \frac{2a+1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{3-4+2} \\ b = \frac{2(-\frac{3}{3-4+2})+1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{3-4+2} \\ b = -\frac{\frac{6}{3-4+2}+1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{3-4+2} \\ b = -\frac{\frac{6}{-3}+1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{3-4+2} \\ b = -\frac{-2+1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{3-4+2} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{1} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Also ist das Polynom $(3+2i)x + (-1+i) = 0$ für $x = -3 + \frac{1}{3}i$.

Aufgabe 3.

Aufgabe 3.a.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n^2} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)}_{\text{konvergent } \textbf{S10.5}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
&= 0 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Skript: **Satz 10.5**, Seite 174.

Aufgabe 3.b.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} &= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \\
&= \frac{0}{1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.c.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} &= \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{1+0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.d.

$$\begin{aligned}
d_n &= \frac{n^2}{n^2+1} \\
&= \frac{n^2}{n^2+1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} &= \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} && \mid \text{nach Aufgabe 3.a)} \\
&= \frac{1}{1+0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.

Aufgabe 4.a.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \stackrel{\text{kürzen}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(1)}{1} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$

Im Zähler zur 3. binomischen Formel verändert, dann gekürzt um den Nenner eliminieren zu können.

Aufgabe 4.b.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{2(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)(1)}{1}\\ &= \lim_{x\to 2}(2x+4) = 2\cdot 2+4 = 8\end{aligned}$$

Die 2 ausgeklammert, dann im Zähler zur 3. binomischen Formel verändert und dann gekürzt um den Nenner eliminieren zu können.

Aufgabe 4.c.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+2h}-\frac{1}{2}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{2(2+2h)}-\frac{2+2h}{2(2+2h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-2-2h}{2(2+2h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2h}{4+4h}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2h}{4h+4h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-2}{4+4h} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vgl. Skript: Seite 187