Mathematische Grundlagen 2

Benotetes Übungsblatt 2

Abgabe: 23. 06. 2015

Bearbeitet von:

Luca Raimondo
(Studiengang: Digitale Medien B. Sc., 4. Fachsemester)
Holger Illhardt
(Studiengang: Informatik B. Sc., 4. Fachsemester)
Janin Meyer
(Studiengang: Digitale Medien B. Sc., 4. Fachsemester)

Tutor:
Christopher de Vries

Aufgabe	1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	4	5a	5b	5c	5d	$\sum$
Maximale Punktzahl	10	12	15	5	10	10	8	10	5	5	5	5	100
Erreichte Punktzahl													

Aufgabe 1. (Gesamt: 22 Punkte)

Aufgabe 1.a. (10 Punkte)

Da in allen 3 Vektoren des Spans die vierte Koordinate 0 ist, handelt es sich hier um ein dreidimensionales Gebilde. Da es nicht möglich ist aus einem dreidimensionalen Vektor einen zweidimensionalen Vektor zu erzeugen, dessen Zeilen linear unabhängig sind, bilden immer mindestens zwei Vektoren auf den selben Vektor ab.

Deshalb ist es nicht möglich hier eine injektive lineare Abbildung anzugeben.

Aufgabe 1.b. (12 Punkte)

$$A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3} = AB_{3\times 3}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \\ a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$$

Die Zeilen der entstehenden 3×3-Matrix können nicht linear unabhängig voneinander sein, da ihre Informationen aus jeweils nur 2 Spalten und 2 Zeilen der Matrizen A, B herrühren. Es ist also ausgeschlossen, dass eine inverse Matrix AB^{-1} existieren kann.

Aufgabe 2. (Gesamt: 30 Punkte)

Aufgabe 2.a. (15 Punkte)

Berechnung von Eigenwerten:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Diese Informationen überführen wir in ein Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 2x = \lambda x \\ -x - 2y - 3z = \lambda y \\ x + y + 2z = \lambda z \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} (2-\lambda)x = 0 \\ -x + (-2-\lambda)y - 3z = 0 \\ x + y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad {}^{-2+\lambda} \\ \leftarrow_{+} \\ \leftarrow \quad \leftarrow_{+} \end{array}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -(2-\lambda)^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{-1-\lambda} \quad {}^{-2+\lambda} \\ \longleftarrow_{+} \end{array}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -(2-\lambda)^2 - 2 + \lambda \end{pmatrix}$$

Damit diese Matrix unendlich viele Lösungen haben kann, müssen wir schauen, für welche λ die dritte Zeile der Matrix zu einer Nullzeile wird.

$$\begin{aligned} -(2-\lambda)^2 - 2 + \lambda &= 0 \\ -(4 - 4\lambda + \lambda^2) - 2 + \lambda &= 0 \\ -4 + 4\lambda - \lambda^2 - 2 + \lambda &= 0 \\ -\lambda^2 + 5\lambda - 6 &= 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Nun weiter mittels pq-Formel:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
&= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} \\
&= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\
&\Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2
\end{aligned}$$

Da wir nur 2 Eigenwerte gefunden haben und alle Eigenvektoren, die von einem Eigenwert produziert werden, voneinander linear abhängig sind, können wir nur 2 linear unabhängige Vektoren angeben. Es ist folglich nicht möglich die geforderte Basis von $\mathbb{R}^3$ anzugeben, da wir 3 linear unabhängig Vektoren dafür bräuchten.

Aufgabe 2.b. **(5 Punkte)**

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto \psi(v) + 8v$$

Sei die gegebene Abbildung mit a benannt.

zu (A1).

$$\begin{aligned}
a(v_1 + v_2) &= a(v_1) + a(v_2) \\
\varphi(v_1 + v_2) + 8(v_1 + v_2) &= \varphi(v_1) + 8v_1 + \varphi(v_2) + 8v_2 \\
\overset{\varphi \text{ linear}}{\Longrightarrow} \qquad \varphi(v_1) + \varphi(v_2) + 8v_1 + 8v_2 &= \varphi(v_1) + 8v_1 + \varphi(v_2) + 8v_2 \\
\varphi(v_1) + 8v_1 + \varphi(v_2) + 8v_2 &= \varphi(v_1) + 8v_1 + \varphi(v_2) + 8v_2
\end{aligned}$$

zu (A2).

$$\begin{aligned}
a(\lambda v) &= \lambda a(v) \\
\varphi(\lambda v) + 8\lambda v &= \lambda(\varphi(v) + 8v) \\
\varphi(\lambda v) + 8\lambda v &= \lambda\varphi(v) + 8\lambda v \\
\overset{\varphi \text{ linear}}{\Longrightarrow} \qquad \varphi(\lambda v) + 8\lambda v &= \varphi(\lambda v) + 8\lambda v
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.c. (10 Punkte)

Sei die gegebene Abbildung mit a benannt.

$$\begin{aligned}
& \lambda w = a(w) \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda w = \varphi(w) + 8w \\
& \text{Da } w \text{ Eigenvektor von } \varphi \text{ zum Eigenwert 2:} \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda w = 2w + 8w \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda w = 10w
\end{aligned}$$

Wenn $\lambda = 10$ ist diese Gleichung erfüllt, also muss demnach w ein Eigenvektor zum Eigenwert 10 von a sein.

Aufgabe 3. (Gesamt: 18 Punkte)

Aufgabe 3.a. (10 Punkte)

Gegeben:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a \\ 7 \end{pmatrix}$$

Da $\langle u, v \rangle = 0$ müssen nun nur noch Werte für a gefunden werden, so dass u, v, w einen orthogonalen Raum aufspannen.

$$\begin{aligned} \langle u, w \rangle &= -1 + 2a - 7 = 0 && \Rightarrow && a = 4 \\ \langle v, w \rangle &= -4 + a = 0 && \Rightarrow && a = 4 \end{aligned}$$

Offensichtlich bilden u, v, w für $a = 4$ ein orthogonales System.

Bemerkung: Der Vektor $-w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ würde auch orthogonal sein, nicht aber $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, da durch das invertieren von nur einem Element des Vektors nicht der Vektor invertiert wird und somit keine Orthogonalität gelten würde. Deshalb ist -4 keine Lösung für a.

Aufgabe 3.b. (8 Punkte)

Sei der gegebene Vektor $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ mit b bezeichnet.

Da eine *ONB* gesucht ist, muss foldendes gelten:

$$\begin{aligned} \langle b, v \rangle = \langle b, u \rangle = \langle b, w \rangle = \langle v, w \rangle = \langle v, u \rangle = \langle w, u \rangle = 0 \\ \|b\| = \|u\| = \|v\| = \|w\| = 1 \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \langle b, u \rangle &= b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + b_3 \cdot u_3 + b_4 \cdot u_4 = 0 \\ \langle b, u \rangle &= 1/2 \cdot u_1 + 1/2 \cdot u_2 + 1/2 \cdot u_3 + 1/2 \cdot u_4 = 0 \end{aligned}$$

Seien $u_1, u_2, u_3 = 1$, dann ist

$$\langle b, u \rangle = {}^1\!/_2 \cdot 1 + {}^1\!/_2 \cdot 1 + {}^1\!/_2 \cdot 1 + {}^1\!/_2 \cdot u_4 = 0 \qquad \Rightarrow \quad u_4 = -3$$
$$\langle b, u \rangle = {}^1\!/_2 + {}^1\!/_2 + {}^1\!/_2 - {}^3\!/_2 = 0$$

Folglich ist der Vektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Nun der dritte Vektor, v. Hierfür muss gelten $\langle b, v \rangle = \langle u, v \rangle = 0$. Diese Voraussetzungen übertragen wir auf ein *LGS*:

$$\begin{aligned} \langle b, v \rangle &= b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + b_4v_4 = 0 & \langle u, v \rangle &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 = 0 \\ \langle b, v \rangle &= \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 + \frac{1}{2}v_4 = 0 & \langle u, v \rangle &= 1v_1 + 1v_2 + 1v_3 + -3v_4 = 0 \\ \langle b, v \rangle &= \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} + \frac{v_3}{2} + \frac{v_4}{2} = 0 & \langle u, v \rangle &= v_1 + v_2 + v_3 + -3v_4 = 0 \end{aligned}$$

Das führt uns zu dem *LGS* $\begin{pmatrix} {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Bei 2 Gleichungen in 4 Variablen hat dieses *LGS* offensichtlich unendlich viele Lösungen. Da wir aber nur eine dieser Lösungen brauchen, können wir 2 Werte annehmen.

Seien $v_1, v_2 = 2$, dann können wir das *LGS* um diese Informationen erweiteren:

$$\begin{pmatrix} {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 & | \; 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & | \; 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | \; 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | \; 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot 2 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ |\cdot(-1/4) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Testes des Vektors v auf Orthogonalität[1]:

$$\begin{aligned} \langle b, v\rangle &= 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot (-4) + 1/2 \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + 1 - 2 + 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \langle u, v\rangle &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) + 0 \cdot (-3) \\ &\Leftrightarrow 2 + 2 - 4 + 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \end{aligned}$$

Auf diese Weise wollen wir auch den vierten und letzten Vektor w ermitteln:

$$\begin{aligned} \langle b, w\rangle &= \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_4 = 0 \\ \langle u, w\rangle &= 1w_1 + 1w_2 + 1w_3 - 3w_4 = 0 \\ \langle v, w\rangle &= 2w_1 + 2w_2 - 4w_3 + 0w_4 = 0 \end{aligned}$$

Bei 3 Gleichungen in 4 Variablen wählen wir wieder für eine Variable. Wir wählen hierfür den Eintrag für w_2. Sei $w_2 = 1$, so ergibt sich foldendes *LGS*, das wir auflösen wollen:

[1] Wir sind uns bewusst, dass diese Tests redundant sind. Wir sichern hier aber unseren Rechenweg ab.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot 2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \quad - \\ \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot -1/6 \\ \mid \cdot -1/4 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \quad + \quad + \\ - \\ - \\ - \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Testen des Vektors w auf Orthogonalität[2]:

$$\begin{aligned} \langle b, w\rangle &= 1/2 \cdot (-1) + 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow 1/2 - 1/2 + 0 + 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \langle u, w\rangle &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow (-1) + 1 + 0 - 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow (-2) + 2 - 0 + 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \end{aligned}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{bilden eine Orthogonalbasis}$$

Um nun eine *ONB* daraus zu machen, müssen die 4 Vektoren noch normiert werden:

$$\begin{aligned} b_{\text{norm}} &= \frac{1}{\|b\|} \cdot b = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}} \cdot b = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot b = b \\ u_{\text{norm}} &= \frac{1}{\|u\|} \cdot u = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + (-3)^2}} \cdot u = \frac{1}{3} u \\ v_{\text{norm}} &= \frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2}} \cdot v = \frac{1}{\sqrt{24}} v \\ w_{\text{norm}} &= \frac{1}{\|w\|} \cdot w = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} \cdot w = \frac{1}{\sqrt{2}} w \end{aligned}$$

[2] Siehe oben

Aufgabe 4. (Gesamt: 10 Punkte)

Aufgabe 4.a.

$$
\begin{aligned}
& & (7+3i)(2-i) &= 7\cdot 2 - 7\cdot i + 3i\cdot 2 - 3i\cdot i \\
&\Leftrightarrow & (7+3i)(2-i) &= 14 - 7i + 6i - 3i^2 \\
&\Leftrightarrow & (7+3i)(2-i) &= 14 - 7i + 6i - 3(-1) && \mid \text{ nach Definition für } i^2 \\
&\Leftrightarrow & (7+3i)(2-i) &= 14 - 7i + 6i + 3 \\
&\Leftrightarrow & (7+3i)(2-i) &= 17 - i
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.b.

Bemerkung: Spaltenweise zu lesen (↓↓).

$$
\begin{aligned}
& & \frac{1}{1+3i} &= \frac{1}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i} & \Leftrightarrow && &= \frac{1-3i}{1+3} \\
&\Leftrightarrow & &= \frac{1(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} & \Leftrightarrow && &= \frac{1-3i}{4} \\
&\Leftrightarrow & &= \frac{1-3i}{1+3i-3i-3i^2} & \Leftrightarrow && &= \frac{1}{4} - \frac{3i}{4} \\
&\Leftrightarrow & &= \frac{1-3i}{1+3i-3i+3} & \Leftrightarrow && &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.c.

$$
\begin{aligned}
& & (a+bi)^2 &= 4i \\
&\Leftrightarrow & a^2 + 2abi + (bi)^2 &= 4i \\
&\Leftrightarrow & a^2 + 2abi + b^2\cdot i^2 &= 4i \\
&\Leftrightarrow & a^2 + 2abi + b^2\cdot(-1) &= 4i && \mid \text{ Definition } i^2 \\
&\Leftrightarrow & a^2 + 2abi - b^2 &= 4i && ↯
\end{aligned}
$$

Damit diese Gleichung nun noch aufgehen könnte, muss $a = 0$ und $b^2 = 4$ sein. Dadurch verlieren wir aber dann auch das letzte i im Term. Dies führt endgültig zu einem Widerspruch. Folglich ist die gegebene Menge:

$$\{x \in \mathbb{C} | x^2 = 4i\} = \emptyset$$

Aufgabe 5. (Gesamt: 20 Punkte)

Bemerkung: Abzuleitende Terme werden von uns in der Form $\left[T\right]'$ angegeben und im nächsten Schritt, dann durch den nach den Vorschriften abgeleiteten Term ersetzt. Die Notation folgt dabei der `VorwissenAnalysis.pdf` aus *Stud.IP* und ist in Reihenfolge ihres Auftretens im Term von links nach rechts zu lesen.

Abgeleitete Konstanten werden von uns nicht mit 0 in die nächste Zeile übernommen, sondern direkt weggelassen.

Aufgabe 5.a. (5 Punkte)

$$\alpha : (1, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad \alpha(y) = \frac{2y+1}{y^2+1}$$

Der Term $y^2 + 1$ ist in jedem Fall ungleich 0, da $y^2 \geq 0$ ist und somit niemals der potentiell problematische Fall $1 - 1 = 0$ eintreten kann. Folglich dürfen wir die Quotientenregel anwenden.

$$\begin{aligned}
\alpha'(y) &= \left[\tfrac{2y+1}{y^2+1}\right]' && \mid \text{Quotientenregel} \\
\alpha'(y) &= \frac{\left[2y+1\right]' \cdot (y^2+1) - (2y+1) \cdot \left[y^2+1\right]'}{(y^2+1)^2} && \mid \text{2x Summenregel} \\
\alpha'(y) &= \frac{(2) \cdot (y^2+1) - (2y+1) \cdot (2y)}{(y^2+1)^2} \\
\alpha'(y) &= \frac{(2y^2+2) - (4y^2+2y)}{y^4+2y^2+1} \\
\alpha'(y) &= \frac{2y^2+2-4y^2-2y}{y^4+2y^2+1} \\
\alpha'(y) &= \frac{-2y^2-2y+2}{y^4+2y^2+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.b. (5 Punkte)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{\cos(x)}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[e^{\cos(x)}\right]' && \mid \text{Kettenregel} \\
f'(x) &= e^{\cos(x)} \cdot \left[\cos(x)\right]' && \mid \text{Exponentialfunktion \& Trigonometrische Funktionen} \\
f'(x) &= e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) \\
f'(x) &= -\sin(x) \cdot e^{\cos(x)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.c. **(5 Punkte)**

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = t\sin(t^2)$$

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \Big[t \cdot \sin(t^2)\Big]' && \Big| \text{ Produktregel} \\
g'(t) &= \Big[t\Big]' \cdot \sin(t^2) + t \cdot \Big[\sin(t^2)\Big]' && \Big| \text{ Potenzfunktion \& Kettenregel} \\
g'(t) &= (1t^0) \cdot \sin(t^2) + t \cdot \left(\Big[\sin\Big]'(t^2) \cdot \Big[t^2\Big]'\right) && \Big| \text{ Trigonometrische \& Potenzfunktion} \\
g'(t) &= 1\sin(t^2) + t \cdot (\cos(t^2) \cdot 2t) \\
g'(t) &= 2t^2\cos(t^2) + \sin(t^2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.d. **(5 Punkte)**

$$h : (1, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad h(z) = \sqrt{2z} \cdot \ln(z) - (2z+2)^2$$

$$\begin{aligned}
h(z) &= \sqrt{2z} \cdot \ln(z) - (2z+2)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{z} \cdot \ln(z) - 4z^2 - 8z - 4 \\
h'(z) &= \Big[\sqrt{2} \cdot \sqrt{z} \cdot \ln(z)\Big]' - \Big[4z^2\Big]' - \Big[8z\Big]' - \Big[4\Big]' && \Big| \text{ Produkt-, Summenregel \& Potenzfunktion} \\
h'(z) &= \sqrt{2} \cdot \left(\Big[\sqrt{z}\Big]' \cdot \ln(z) + \sqrt{z} \cdot \Big[\ln(z)\Big]'\right) - 8z - 8 && \Big| \text{ Potenzfunktion \& natürlicher Logarithmus} \\
h'(z) &= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(z) + \sqrt{z} \cdot \frac{1}{z}\right) - 8z - 8 \\
h'(z) &= \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln(z) + \frac{\sqrt{2z}}{z} - 8z - 8
\end{aligned}$$