Formalismo Lagrangiano da teoria Gravitoeletromagnética

Lucas Evangelista Alves de Souza
Orientador: Alesandro Ferreira dos Santos

Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Mato Grosso

Sumário

Resumo

- Formulação Lagrangiana para a GEM;

Resumo

- Formulação Lagrangiana para a GEM;
- A aproximação é análoga àquela feita em eletromagnetismo;

Resumo

- Formulação Lagrangiana para a GEM;
- A aproximação é análoga àquela feita em eletromagnetismo;
- O tensor gravitoeletromagnético é definido em termos de um potencial tensor de segunda ordem;

- Formulação Lagrangiana para a GEM;
- A aproximação é análoga àquela feita em eletromagnetismo;
- O tensor gravitoeletromagnético é definido em termos de um potencial tensor de segunda ordem;
- Tensor energia-momento simétrico;

Resumo

- Formulação Lagrangiana para a GEM;
- A aproximação é análoga àquela feita em eletromagnetismo;
- O tensor gravitoeletromagnético é definido em termos de um potencial tensor de segunda ordem;
- Tensor energia-momento simétrico;
- A Lagrangiana descreve interação entre férmions, fótons e grávitons;

Resumo

- Formulação Lagrangiana para a GEM;
- A aproximação é análoga àquela feita em eletromagnetismo;
- O tensor gravitoeletromagnético é definido em termos de um potencial tensor de segunda ordem;
- Tensor energia-momento simétrico;
- A Lagrangiana descreve interação entre férmions, fótons e grávitons;

- O que é Gravitoeletromagnetismo (GEM)?

Introdução

- O que é Gravitoeletromagnetismo (GEM)?
- De que maneira podemos abordar essa teoria?

- O que é Gravitoeletromagnetismo (GEM)?
- De que maneira podemos abordar essa teoria?
  - Similaridade entre as equações linearizadas de Einstein e Maxwell;
  - Decomposição dos tensores de curvatura de Weyl;

- O que é Gravitoeletromagnetismo (GEM)?
- De que maneira podemos abordar essa teoria?
  - Similaridade entre as equações linearizadas de Einstein e Maxwell;
  - Decomposição dos tensores de curvatura de Weyl;
- Qual a motivação em estudar a GEM?

- O que é Gravitoeletromagnetismo (GEM)?
- De que maneira podemos abordar essa teoria?
  - Similaridade entre as equações linearizadas de Einstein e Maxwell;
  - Decomposição dos tensores de curvatura de Weyl;
- Qual a motivação em estudar a GEM?
  - Interação entre o gráviton e partículas, tais como férmions e fótons;
  - Pode nos levar a questões quânticas da gravidade;

Partindo das equações de Campo de Einstein e das identidades de Bianchi é possível escrever o tensor de curvatura de Weyl como

$$\boxed{C_{\alpha\beta\mu\nu;}{}^{\nu} = 4\pi G(-T_{\mu\beta;\alpha} + T_{\mu\alpha;\beta} + \frac{1}{3}T_{,\alpha}g_{\mu\beta} - \frac{1}{3}T_{,\beta}g_{\mu\alpha}).}$$

A vantagem de utilizar o tensor de Weyl está em suas propriedades. Com isso em mente, o mesmo pode ser decomposto em dois tensores simétricos, definidos como

Tensor gravitoelétrico

$$\boxed{\mathbf{E}_{ij} = -C_{0i0j}}$$

Tensor gravitomagnético

$$\boxed{\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}C^{kl}_{0j}}$$

onde $i, j, k, ... = 1, 2, 3.$

Para construir uma teoria gravitoeletromagnética, partimos das equações tipo-Maxwell em espaço-tempo plano para sistemas com fonte

$$\begin{aligned}
\partial^i \mathbf{E}^{ij} &= 4\pi G \rho^j, && (1)\\
\partial^i \mathbf{B}^{ij} &= 0, && (2)\\
\varepsilon^{\langle ikl}\partial^k \mathbf{B}^{lj\rangle} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}^{ij}}{\partial t} &= \frac{4\pi G}{c}\mathbf{J}^{ij}, && (3)\\
\varepsilon^{\langle ikl}\partial^k \mathbf{E}^{lj\rangle} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}^{ij}}{\partial t} &= 0, && (4)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{E}^{ij}$ e $\mathbf{B}^{ij}$ são rank-2 STT, ρ^j é o vetor densidade de massa e J^{ij} é a densidade de corrente de massa. Para os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -grad\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t}\\
\mathbf{B} &= curl\,\tilde{A}, && (5)
\end{aligned}$$

Como $\tilde{A}$ é STT, então os elementos diagonais da matriz satisfazem

$$A^{11} + A^{22} + A^{33} = 0,$$

que de forma análoga se aplica ao tensor $grad\varphi$ onde

$$\partial^1\varphi^1 + \partial^2\varphi^2 + \partial^3\varphi^3 = 0.$$

Logo, em termos de componentes temos que

$$\mathbf{E}^{ij} = -\begin{pmatrix} \partial^1\varphi^1 & \partial^1\varphi^2 & \partial^1\varphi^3 \\ \partial^1\varphi^2 & \partial^2\varphi^2 & \partial^2\varphi^3 \\ \partial^1\varphi^3 & \partial^2\varphi^3 & \partial^3\varphi^3 \end{pmatrix} - \frac{1}{c}\partial_t \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{12} & A^{22} & A^{23} \\ A^{13} & A^{23} & A^{33} \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbf{B}^{ij} = \varepsilon^{\langle ikl}\partial^k A^{lj\rangle}.$$

Os campos **E** e **B** são elementos de uma tensor de terceira ordem chamado de tensor gravitoeletromagnético **F**, definido como

$$\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} = \partial^{\mu} A^{\nu\alpha} - \partial^{\nu} A^{\mu\alpha}, \tag{6}$$

onde $\mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3$. Além disso, é possível escrever os elementos do tensor simétrico $A^{\mu\nu}$ como

$$A = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{0} & \varphi^{1} & \varphi^{2} & \varphi^{3} \\ \varphi^{1} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ \varphi^{2} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ \varphi^{3} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}.$$

$A^{\mu\nu}$ está conectada diretamente com a descrição do campo gravitacional no espaço-tempo plano, diferente de $h_{\mu\nu}$

O campo da GEM é antissimétrico, ou seja

$$\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} = -\mathbf{F}^{\nu\mu\alpha},$$

e o mesmo obedece à identidade cíclica

$$\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} + \mathbf{F}^{\nu\alpha\mu} + \mathbf{F}^{\alpha\mu\nu} = 0.$$

As componentes não-nulas de $\mathbf{F}$ são definidas como

$$\mathbf{F}^{0ij} = \mathbf{E}^{ij}, \quad \mathbf{F}^{ijk} = \epsilon^{ijl}\mathbf{B}^{lk}.$$

Note que as componentes $\mathbf{F}^{100}, \mathbf{F}^{200}, \mathbf{F}^{300}, \mathbf{F}^{010}, \mathbf{F}^{020}$ e $\mathbf{F}^{030}$ são nulas e nos levam a seguinte condição: $\nabla\varphi^0 + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi^i}{\partial t} = 0$.

Definimos então o *tensor dual gravitoeletromagnético* **G**

$$\mathbf{G}^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\gamma\sigma}\eta^{\alpha\beta}\mathbf{F}_{\gamma\sigma\beta},$$

onde

$$\mathbf{F}_{\gamma\sigma\beta} = \eta_{\gamma\mu}\eta_{\sigma\nu}\eta_{\beta\alpha}\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha}.$$

Portanto, reescrevendo as Eqs. tipo-Maxwell na forma covariante, temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} &= -\frac{4\pi G}{c}\mathcal{J}^{\nu\alpha} \\ \partial_\mu \mathbf{G}^{\mu\langle\nu\alpha\rangle} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

onde $\mathcal{J}^{\nu\alpha}$ é um tensor de segunda ordem que depende de $c\rho^i$ e $\mathbf{J}^{ij}$. Assim, a lagrangiana da GEM pode ser escrita como

$$\boxed{\mathcal{L}_{GEM} = -\frac{1}{16\pi}\mathbf{F}_{\mu\nu\alpha}\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} - G\mathcal{J}^{\nu\alpha}A_{\nu\alpha},} \tag{8}$$

onde G é a constante gravitacional.

Formulação de um tensor energia-momento para a GEM

Vamos começar primeiro com a definição usual da Lagrangiana livre associada a GEM, que é escrita como

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{16\pi G}\mathbf{F}_{\rho\sigma\theta}\mathbf{F}^{\rho\sigma\theta}.$$

Por definição, temos que o tensor-energia momento é escrito como segue

$$T_G^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_G - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\beta})}(\partial^\nu A^{\alpha\beta}),$$

onde a partir do mesmo obtemos para a GEM

$$T_G^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_G + \frac{1}{4\pi G}\eta^{\gamma\mu}\mathbf{F}_{\gamma\alpha\beta}(\partial^\nu A^{\alpha\beta}).$$

O tensor energia-momento simétrico é

$$\boxed{\Theta_G^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi G}[\eta^{\gamma\mu}\mathbf{F}_{\gamma\alpha\beta}\mathbf{F}^{\alpha\nu\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\mathbf{F}_{\rho\sigma\theta}\mathbf{F}^{\rho\sigma\theta}].}$$

com $\partial_\mu\Theta_G^{\mu\nu} = 0$.

- Espalhamento Compton gravitacional

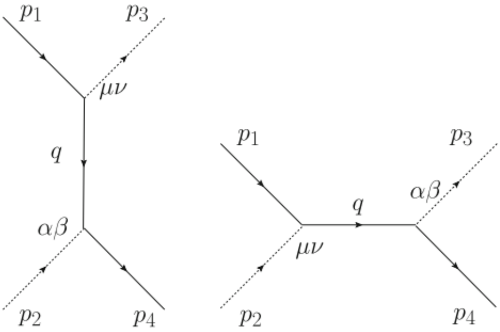

Figura: Diagrama de Feynman para o espalhamento Compton gravitacional

- Espalhamento Möller gravitacional

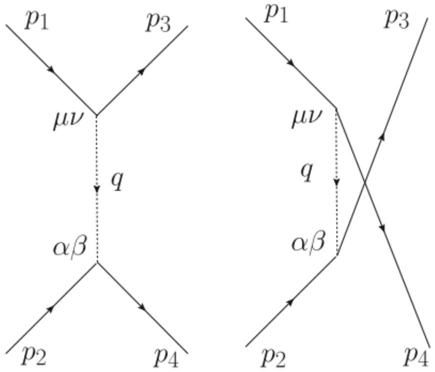

Figura: Diagrama de Feynman para o espalhamento Möller gravitacional

- Fotoprodução gravitacional

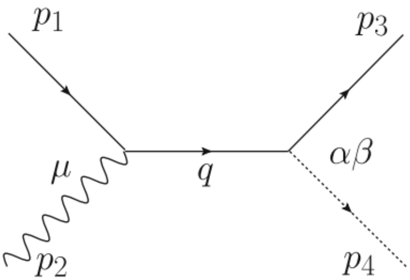

Figura: Fotoprodução gravitacional: Diagrama de Born

- A formulação lagrangiana da GEM nos permite descrever interações entre o gráviton e outras particulas;
- A decomposição dos tensores de Weyl nos permite descrever um tensor simétrico $A^{\mu\nu}$;
- A formulação do tensor $A^{\mu\nu}$ nos permite descrever partículas de spin 2;
- É possível aplicar esse formalismo a processos físicos conhecidos;

Fim!