ESCOLA MATO-GROSSENSE DE FÍSICA

UFMT

Mestrado e Doutorado em Física

Espalhamento Compton gravitacional

L. A. S. Evangelista*, A. F. Santos*

Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso

Introdução

O Gravitoeletromagnetismo (GEM) é uma das áreas da física teórica que busca descrever a gravitação através de um formalismo similar ao eletromagnetismo. A mesma permite escrever as equações de campo gravitacional de forma análoga às equações de Maxwell [1]. Além disso, podemos utilizar a GEM para descrever interações envolvendo o gráviton com outras partículas, tais como os férmions e fótons, em processos físicos como o espalhamento Compton, por exemplo. Neste trabalho, apresentamos a GEM a partir da decomposição do tensor de Weyl nas componentes gravitoelétrica e gravitomagnética, pois existe uma formulação lagrangiana bem construída [1]. Tal formalismo nos permite construir um potencial tensor $A^{\mu\nu}$ que irá conter todas as informações do campo gravitacional. Este tensor é de extrema importância, pois a descrição do campo surge naturalmente com a construção da teoria. Com isso em mente, vamos começar primeiro com a construção da lagrangiana para a GEM.

Descrição do campo gravitoeletromagnético

Considerando o tensor de Weyl

$$C_{\alpha\beta\mu\nu;}{}^{\nu} = 4\pi G\left(-T_{\mu\beta;\alpha} + T_{\mu\alpha;\beta} + \frac{1}{3}T_{,\alpha}g_{\mu\beta} - \frac{1}{3}T_{,\beta}g_{\mu\alpha}\right),$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e T o seu traço, podemos decompor o mesmo em dois tensores simétricos sem traço: o tensor gravitoelétrico, $\mathbf{E}_{ij} = -C_{0i0j}$, e o tensor gravitomagnético, $\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}C^{kl}_{0j}$, onde $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$[2].

Com essas informações equações tipo-Maxwell para a GEM em espaço-tempo plano para sistemas com fonte [3] são escritas como

$$\partial^i \mathbf{E}^{ij} = 4\pi G \rho^j, \qquad (1)$$

$$\partial^i \mathbf{B}^{ij} = 0, \qquad (2)$$

$$\varepsilon^{\langle ikl}\partial^k \mathbf{B}^{lj\rangle} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}^{ij}}{\partial t} = \frac{4\pi G}{c}\mathbf{J}^{ij}, \qquad (3)$$

$$\varepsilon^{\langle ikl}\partial^k \mathbf{E}^{lj\rangle} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}^{ij}}{\partial t} = 0, \qquad (4)$$

onde os campos $\mathbf{E}^{ij}$ e $\mathbf{B}^{ij}$ são ambos tensores simétricos sem traço de segunda ordem. Note que há um paralelo com as equações de Maxwell do eletromagnetismo.

Os campos $\mathbf{E}^{ij}$ e $\mathbf{B}^{ij}$ são representados em termos de um tensor simétrico de segunda ordem $\tilde{A}$ com componentes A^{ij}, onde $i, j = 1, 2, 3$. Além disso, o campo gravitoelétrico E, por definição, é escrito também em termos de um vetor φ, onde $\mathrm{grad}\varphi = \partial^i\varphi^j$. Com isso em mente, é possível definir os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ da GEM como

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t}$$
$$\mathbf{B} = \mathrm{curl}\ \tilde{A}, \qquad (5)$$

com as seguintes condições para o vetor φ e o tensor de segunda ordem $\tilde{A}$:

$$\mathrm{curl}\ \varphi = 0 \quad \mathrm{div}\ \tilde{A} = 0.$$

Neste contexto, análogo ao eletromagnetismo, $\mathrm{grad}\varphi$ e $\tilde{A}$ são definidos, respectivamente, como

$$\mathrm{grad}\varphi = \begin{pmatrix} \partial^1\varphi^1 & \partial^1\varphi^2 & \partial^1\varphi^3 \\ \partial^1\varphi^2 & \partial^2\varphi^2 & \partial^2\varphi^3 \\ \partial^1\varphi^3 & \partial^2\varphi^3 & \partial^3\varphi^3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{12} & A^{22} & A^{23} \\ A^{13} & A^{23} & A^{33} \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos definir um tensor de terceira ordem, chamado de *tensor gravitoeletromagnético* $\mathbf{F}$, escrevendo-o como

$$\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} = \partial^\mu A^{\nu\alpha} - \partial^\nu A^{\mu\alpha}, \qquad (6)$$

onde $\mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3.$. Além disso, é possível escrever os elementos do tensor simétrico $A^{\mu\nu}$ como

$$A = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^0 & \varphi^1 & \varphi^2 & \varphi^3 \\ \varphi^1 & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ \varphi^2 & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ \varphi^3 & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}.$$

Aqui o potencial tensor $A^{\mu\nu}$ está conectado diretamente com a descrição do campo gravitacional no espaço-tempo plano, tornando sua definição crucial para a teoria da GEM. Com base nas propriedades do tensor $\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha}$, podemos definir o *tensor gravitoeletromagnético dual* $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\gamma\sigma}\eta^{\alpha\beta}\mathbf{F}_{\gamma\sigma\beta}.$$

Assim, podemos reescrever as eqs. tipo-Maxwell (1)-(4) na forma covariante,

$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} = -\frac{4\pi G}{c}\mathcal{J}^{\nu\alpha} \qquad (7)$$
$$\partial_\mu \mathbf{G}^{\mu\langle\nu\alpha\rangle} = 0,$$

onde $\mathcal{J}^{\nu\alpha}$ é um tensor de segunda ordem que vai depender da densidade de massa $c\rho^i$ e da densidade de corrente de massa $\mathbf{J}^{ij}$. Logo, a lagrangiana da GEM pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{GEM} = -\frac{1}{16\pi}\mathbf{F}_{\mu\nu\alpha}\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} - G\mathcal{J}^{\nu\alpha}A_{\nu\alpha}, \qquad (8)$$

onde G é a constante gravitacional. A partir daqui, podemos utilizar a combinação da lagrangiana da GEM com a lagrangiana de Dirac para descrever o espalhamento Compton gravitacional.

Espalhamento Compton Gravitacional

Para este tópico, vamos mostrar como se dá o espalhamento Compton gravitacional. O mesmo consiste numa interação $g + f \to g + f$, ou seja, interações envolvendo o gráviton e férmion. O diagrama de Feynman para o espalhamento Compton gravitacional pode ser visto a seguir na figura 1, com os devidos propagadores e fatores de vértice utilizados [4],

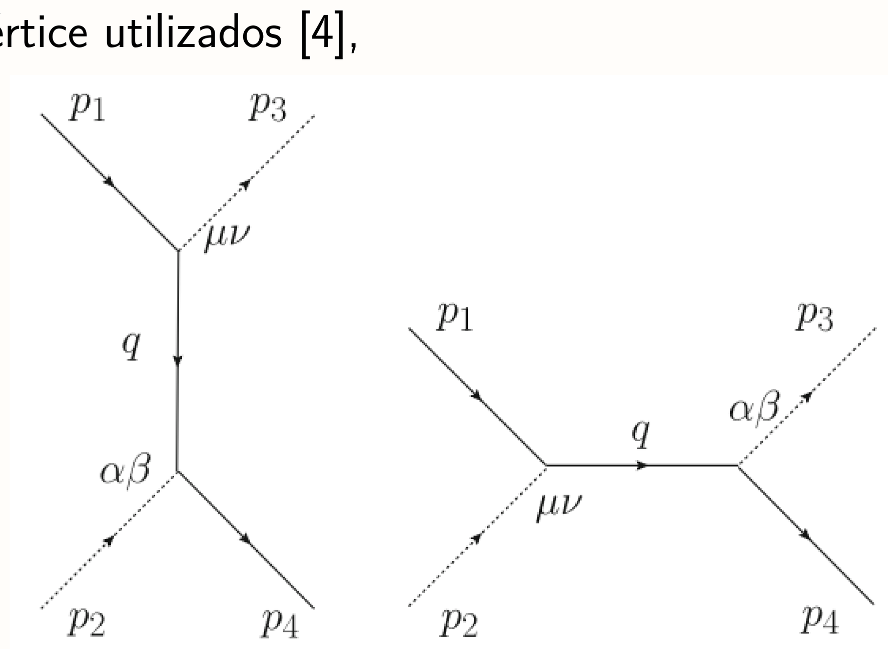

Figura 1: Diagrama de Feynman para o espalhamento Compton gravitacional

A partir do espalhamento Compton gravitacional é possível calcular a amplitude de transição $\mathcal{M}$ para esse sistema, obtendo informações acerca das probabilidades envolvidas no processo. O módulo da amplitude de transição nos fornece a probabilidade de uma certa interação ocorrer. Consequentemente, a partir de $\mathcal{M}$, podemos encontrar a seção de choque σ do espalhamento, que nos diz qual região é a mais provável de ocorrer uma dada interação. O cálculo da seção de choque é de extrema importância pois a mesma pode descrever interações entre as partículas fundamentais, nos mostrando como ocorre a troca de energia, momento e outras propriedades ao longo da interação. Dito isso, a amplitude de transição total para o espalhamento Compton gravitacional será dada por

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2,$$

onde ambos os termos são descritos como

$$\mathcal{M}_1 = \frac{\hbar^2 c^2 \kappa^2}{16[(p_1 - p_3)^2 - m^2c^2]}[\bar{u}_4(2p_4 - p_2) \cdot \epsilon_2^g \not{\epsilon}_2^g](\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc) \times [\not{\epsilon}_3^{*g}\epsilon_3^{*g} \cdot (2p_1 - p_3)u_1]$$

e

$$\mathcal{M}_2 = \frac{\hbar^2 c^2 \kappa^2}{16[(p_1 + p_2)^2 - m^2c^2]}[\bar{u}_4(2p_4 - p_3) \cdot \epsilon_3^g \not{\epsilon}_3^g](\not{p}_1 + \not{p}_2 + mc) \times [\not{\epsilon}_2^{*g}\epsilon_2^{*g} \cdot (2p_1 + p_2)u_1].$$

Para nosso projeto, queremos realizar o cálculo da seção de choque σ, pois, como dito anteriormente, a mesma nos da informações acerca das probabilidades de interação. Dito isso, a amplitude de transição será de grande importância para o cálculo dessa medida.

Conclusão

A GEM se mostra uma boa teoria para se estudar interação entre grávitons e outras partículas, tais como férmions e fótons. Além disso, a formulação do tensor $A^{\mu\nu}$ é de extrema importância para a teoria, pois o mesmo contém todas as informações acerca dos campos gravito-elétrico e gravito-magnético. Vimos também que todo o formalismo apresentado segue uma ideia similar ao eletromagnetismo, com diferença que agora descrevemos o gráviton, que possui spin 2. Por fim, como motivação para trabalhos futuros, queremos estudar o espalhamento Compton gravitacional com temperatura finita e quebra de simetria de Lorentz, pois assim, teremos uma descrição mais próximas de situações reais.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, a UFMT e a CAPES pelo suporte financeiro.

Referências

[1] J. Ramos, M. de Montigny, and F. C. Khanna, "On a lagrangian formulation of gravitoelectromagnetism," *General Relativity and Gravitation*, vol. 42, no. 10, pp. 2403–2420, 2010.

[2] A. Danehkar, "On the significance of the weyl curvature in a relativistic cosmological model," *Modern Physics Letters A*, vol. 24, no. 38, pp. 3113–3127, 2009.

[3] J. Ramos, "Differential operators in terms of clebsch-gordon (cg) coefficients and the wave equation of massless tensor fields," *General Relativity and Gravitation*, vol. 38, pp. 773–783, 2006.

[4] S.-Y. Choi, J. Shim, and H. S. Song, "Factorization and polarization in linearized gravity," *Physical Review D*, vol. 51, no. 6, p. 2751, 1995.