Jornal Mato-Grossense de Física (JMFis) (2023), **3**, 6–12
ISSN Eletrônico: 2965-1964
doi: 10.59396/29651964JMFis.4-2.6.2024

Gravitoeletromagnetismo: Uma simples introdução

L. A. S. Evangelista * and A. F. Santos *

Universidade Federal de Mato Grosso, 78060-900, Cuiabá, MT, Brasil

*Contato: lucassouza@fisica.ufmt.br; alesandroferreira@fisica.ufmt.br

(Recebido: 19/12/2023; Aceito: 31/01/2024; Publicado: 05/01/2024)

Resumo

Neste trabalho, conceitos envolvendo a teoria Gravitoeletromagnética (GEM) serão discutidos. A GEM é uma teoria gravitacional análoga ao eletromagnetismo. A formulação lagrangiana da GEM será construída usando a decomposição do tensor de Weyl nas componentes gravitoelétricas e gravitomagnéticas. Adicionalmente, discutiremos a lagrangiana total, a qual descreve os campos livres, bem como as interações entre o gráviton e outras partículas fundamentais. Por fim, examinaremos algumas possíveis aplicações para essa teoria gravitacional.

Palavras-Chave: Gravitoeletromagnetismo; Gráviton; Teoria quântica de campos

Abstract

In this work, concepts arising from the Gravitoelectromagnetic (GEM) theory will be considered. GEM is a gravitational theory analogous to electromagnetism. The Lagrangian formulation of the GEM will be constructed using the composition of the Weyl tensor in the gravioelectric and gravitomagnetic components. Furthermore, we will discuss the total Lagrangian, which describes free fields, as well as the interactions between the graviton and other fundamental particles. Finally, we will look at some possible applications for this gravitational theory.

Keywords: Gravitoelectromagnetism; Graviton; Quantum field theory

1. Introdução

O Modelo Padrão (MP) é a teoria até então mais bem aceita quanto as propriedades das partículas elementares. A partir dele é possível descrever todas as partículas fundamentais e suas interações, exceto a interação gravitacional. Então, o MP é uma teoria que unifica três das quarto forças fundamentais da natureza (força eletromagnética, força nuclear forte e força nuclear fraca). A unificação entre teorias é de extrema importância para a descrição física do universo, pois, uma vez que há a unificação, é possível descrever todas as interações fundamentais em termos de um conjunto reduzido de princípios. Embora o MP seja uma teoria consistente e experimentalmente testada, não é uma teoria fundamental, uma vez que não engloba a interação gravitacional. Isso se dá pelo fato de que, até o momento, não há uma construção bem definida de uma versão quântica da gravitação. Atualmente, a relatividade geral é uma teoria clássica de campos que descreve muito bem o campo gravitacional em escalas astronômicas. Contudo, ao tentar aplicá-la em escalas subatômicas, onde os efeitos quânticos dominam, ocorrem inconsistências (divergências aparecem). Na busca por uma teoria gravitacional que nos permita entender a interação do gráviton (partícula que des-

© Uma publicação do Programa de Pós Graduação em Física da UFMT. Este é um artigo de livre acesso, distribuído sob os termos da Creative Commons Attribution 4.0 International Licence (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

creve a interação gravitacional) com outras partículas fundamentais, aqui iremos apresentar a teoria Gravitoeletromagnética ou Gravitoeletromagnetismo (GEM).

O Gravitoeletromagnetismo (GEM) é uma teoria que busca descrever a gravitação por meio de um formalismo similar ao eletromagnetismo. A GEM possui uma história que data de antes da formulação da relatividade geral de Einstein. Em 1832, Faraday buscou detectar a indução de corrente elétrica presente em uma bobina sujeita apenas a força gravitacional [1]. Em 1865, Maxwell tentou construir uma teoria da gravitação utilizando princípios do eletromagnetismo [2]. Para ele, fazia sentido relacionar essas teorias, pois havia uma analogia inegável para a lei da gravitação universal de Newton e a lei de Coulomb para a eletrostática, ambas decaem com o quadrado da distância e descrevem a interação entre corpos através da massa ou carga dos mesmos. Heaviside [3], em 1893, propôs um conjunto de equações tipo-Maxwell para o campo gravitacional nas quais as mesmas forneciam uma descrição promissora para o rápido avanço do periélio do Mercúrio, que era um problema na época, pois os dados observacionais divergiam daqueles previstos pelas leis da gravitação de Newton. Apesar disso, Lorentz provou posteriormente que a força gravitomagnética seria muito fraca para poder explicar tal fenômeno [4].

Após a formulação da teoria da relatividade geral, Lense e Thirring utilizando os conceitos propostos por Einstein em 1915, mostraram que a rotação de um corpo massivo dava origem a um campo gravitomagnético [5]. Esse fenômeno ficou conhecido como efeito Lense-Thirring e o mesmo sugere que a rotação de um corpo massivo pode afetar a orientação da órbita de outro corpo que está em sua proximidade. Na década de cinquenta, novas propostas surgiram a fim de construir uma analogia entre gravidade e eletromagnetismo. Dessa vez a ideia consistia na decomposição do tensor de Weyl nas componentes gravitoelétricas e gravitomagnéticas [6–8]. Em 1966, Scott [9] propôs a ideia de que o campo gravitacional poderia ser expresso por um campo vetorial de forma análoga ao eletromagnético. Posteriormente, na década de setenta, Spieweck [10] propôs uma nova teoria onde um potencial vetor gravitomagnético é apresentado.

Diversas teorias buscando desenvolver ideias que relacionam a gravidade e o eletromagnetismo foram construídas. Entre as várias propostas, a GEM é uma teoria que se destaca e tem recebido bastante atenção nos últimos anos. É correto dizer que, atualmente, a construção da teoria gravitoeletromagnética pode ser feita de duas formas: (i) Utilizando a similaridade entre as equações linearizadas de Einstein e e as equações de Maxwell [11]; (ii) decompondo o tensor de curvatura de Weyl nas componentes gravitomagnética e gravitoelétrica [12]. Neste trabalho será abordada a segunda maneira, pois existe uma formulação lagrangiana bem construída [13].

Este trabalho está dividido da seguinte maneira. A Seção 2 será dedicada à construção da formulação lagrangiana da GEM. Na Seção 3, iremos discutir a lagrangiana total da GEM, a qual inclui as possíveis interações do gráviton com outras partículas fundamentais. Também será apresentado o diagrama de Feymann associado a cada interação. Em adição, será discutido possíveis aplicações desta teoria gravitacional, uma vez que tal formalismo é útil para o estudo de processo de espalhamento, tendo o gráviton como uma das partículas fundamentais envolvida. E por fim, na seção 4 apresentamos nossas discussões finais e conclusões.

2. Descrição do campo gravitoeletromagnético

Partindo das equações de campo de Einstein e das identidades de Bianchi, é possível escrever o tensor de curvatura de Weyl como [14]

$$C_{\alpha\beta\mu\nu;}{}^{\nu} = 4\pi G(-T_{\mu\beta;\alpha} + T_{\mu\alpha;\beta} + \frac{1}{3}T_{,\alpha}g_{\mu\beta} - \frac{1}{3}T_{,\beta}g_{\mu\alpha}),$$

sendo $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento e T o seu traço. Na equação acima, os tensores acompanhados por vírgula em seus índices estão descrevendo derivadas parciais ($T_{,\xi} = \partial_\xi T$), enquanto que ponto e vírgula representa derivadas covariante ($T_{\xi\rho;\theta} = \partial_\theta T_{\xi\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\theta\xi} T_{\lambda\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\theta\rho} T_{\xi\lambda}$). O tensor de Weyl é uma medida da curvatura do espaço-tempo. A vantagem de utilizá-lo está em suas propriedades, que diz que o mesmo é invariante sob mudanças conformais na métrica, ou seja, os ângulos se conservam. Além disso, o mesmo tem as mesmas simetrias que o tensor de Riemann [15]. Podemos decompor o mesmo em dois tensores simétricos sem traço: o tensor gravitoelétrico, $\mathbf{E}_{ij} = -C_{0i0j}$, e o tensor gravitomagnético, $\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}C^{kl}_{0j}$, onde $i, j, k, ... = 1, 2, 3$ [15]. Essa formulação é construída considerando o potencial tensor gravitoeletromagnético simétrico $A^{\mu\nu}$ como o principal campo associado às interações gravitacionais. De forma análoga ao eletromagnetismo, essa construção do potencial tensor é fundamental para qualquer descrição física envolvendo a GEM, pois o mesmo contém todas as informações referentes aos campos gravitoelétrico e gravitomagnético. Note que, para descrever a GEM, é necessário que o potencial seja um tensor de segunda ordem, enquanto que no eletromagnetismo o potencial é um vetor. Com essas informações, podemos escrever as equações tipo-Maxwell para a GEM com fonte um em espaço-tempo plano [16] como

$$\begin{aligned}
\partial^i \mathbf{E}^{ij} &= 4\pi G \rho^j, & (1)\\
\partial^i \mathbf{B}^{ij} &= 0, & (2)\\
\varepsilon^{\langle ikl}\partial^k \mathbf{B}^{lj\rangle} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}^{ij}}{\partial t} &= \frac{4\pi G}{c}\mathbf{J}^{ij}, & (3)\\
\varepsilon^{\langle ikl}\partial^k \mathbf{E}^{lj\rangle} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}^{ij}}{\partial t} &= 0, & (4)
\end{aligned}$$

com os campos $\mathbf{E}^{ij}$ e $\mathbf{B}^{ij}$ sendo tensores simétricos sem traço de segunda ordem, ρ^j é o vetor de densidade de massa, $\mathbf{J}^{ij}$ é um tensor sem traço de segunda ordem que representa a densidade de corrente de massa e G é a constante gravitacional. Note que há um paralelo com as equações de Maxwell do eletromagnetismo.

Os campos $\mathbf{E}^{ij}$ e $\mathbf{B}^{ij}$ são representados em termos de um tensor simétrico de segunda ordem $\widetilde{A}$ com componentes A^{ij}, onde $i, j = 1, 2, 3$. Além disso, o campo gravitoelétrico E, por definição, é escrito também em termos de um escalar φ, onde $grad\varphi = \partial^i\varphi^j$. Com isso em mente, é possível definir os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ da GEM como

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -grad\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial t}\\
\mathbf{B} &= curl\ \widetilde{A}, & (5)
\end{aligned}$$

com as seguintes condições para o vetor φ e o tensor de segunda ordem $\widetilde{A}$:

$$curl\ \varphi = 0 \quad div\ \widetilde{A} = 0.$$

Aqui vemos outro paralelo com o eletromagnetismo, tal que, pelas propriedades de vetores e da própria formulação das equações de Maxwell, $div\ \mathbf{B} = div\ curl\ \widetilde{A} = 0$ e $curl\ grad\ \varphi = 0$. Como $\widetilde{A}$ é um tensor simétrico sem traço de segunda ordem, então os elementos diagonais da matriz satisfazem $A^{11} + A^{22} + A^{33} = 0$, que de forma análoga se aplica ao tensor $grad\varphi$, que leva a $\partial^1\varphi^1 + \partial^2\varphi^2 + \partial^3\varphi^3 = 0$. Em termos de componentes, as equações em (5) se tornam

$$\mathbf{E}^{ij} = -\begin{pmatrix} \partial^1\varphi^1 & \partial^1\varphi^2 & \partial^1\varphi^3 \\ \partial^1\varphi^2 & \partial^2\varphi^2 & \partial^2\varphi^3 \\ \partial^1\varphi^3 & \partial^2\varphi^3 & \partial^3\varphi^3 \end{pmatrix} - \frac{1}{c}\partial_t \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{12} & A^{22} & A^{23} \\ A^{13} & A^{23} & A^{33} \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbf{B}^{ij} = \varepsilon^{\langle ikl}\partial^k A^{lj\rangle}.$$

Assim, podemos definir um tensor de terceira ordem, chamado de *tensor gravitoeletromagnético* $\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha}$, escrevendo-o como

$$\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} = \partial^\mu A^{\nu\alpha} - \partial^\nu A^{\mu\alpha}, \tag{6}$$

aqui $\mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3$. Além disso, é possível escrever os elementos do tensor simétrico $A^{\mu\nu}$ como

$$A = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^0 & \varphi^1 & \varphi^2 & \varphi^3 \\ \varphi^1 & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ \varphi^2 & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ \varphi^3 & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}.$$

No início, vimos as duas formas na qual podemos abordar o estudo da GEM. Uma delas, era analisar a similaridade entre as equações de Einstein no limite de campo fraco e as equações Maxwell. Essa abordagem é feita através de uma perturbação na métrica descrita por $h_{\mu\nu}$. No caso aqui apresentado, o potencial tensor $A_{\mu\nu}$ não tem relação alguma com esse tipo de perturbação. Na verdade, o mesmo está conectado diretamente com a descrição do campo gravitacional no espaço-tempo plano. É por isso que a definição do potencial tensor é tão importante para a teoria da GEM, pois a mesma surge naturalmente conforme a teoria vai sendo desenvolvida. Com base nas propriedades do tensor $\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha}$, podemos definir o *tensor gravitoeletromagnético dual* $\mathbf{G}^{\mu\nu\alpha}$ como

$$\mathbf{G}^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\gamma\sigma}\eta^{\alpha\beta}\mathbf{F}_{\gamma\sigma\beta},$$

com $\epsilon^{\mu\nu\gamma\sigma}$ sendo tensor Levi-Civita. Assim, é possível reescrever as eqs. tipo-Maxwell (1)-(4) na forma covariante,

$$\partial_\mu \mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} = -\frac{4\pi G}{c}\mathcal{J}^{\nu\alpha} \tag{7}$$

$$\partial_\mu \mathbf{G}^{\mu\langle\nu\alpha\rangle} = 0. \tag{8}$$

Logo, a lagrangiana da GEM associada as equações tipo-Maxwell (7) and (8) pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{GEM} = -\frac{1}{16\pi}\mathbf{F}_{\mu\nu\alpha}\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha} - G\mathcal{J}^{\nu\alpha}A_{\nu\alpha}. \tag{9}$$

É importante notar que a lagrangiana da GEM (9) é análoga a lagrangiana de Maxwell que descreve a eletrodinâmica quântica (QED, do inglês Quantum Electrodynamics).

Na seção a seguir, será apresentada a lagrangiana total de interação, onde a mesma irá conter todas as possíveis interações envolvendo o gráviton, férmion e fótons. Além disso, será abordado também os respectivos fatores de vértices e propagadores existentes nos processos.

3. Lagrangiana para sistemas interagentes

A formulação lagrangiana da GEM nos permite descrever a interação do gráviton com outras partículas elementares, tais como, fótons e férmions. Dito isso, a lagrangiana total irá descrever os termos de interação relacionados a cada processo envolvendo essas partículas. Além disso, a formulação lagrangiana nos permite investigar várias aplicações envolvendo o gráviton, tais como calcular as amplitudes de espalhamento e as seções de choque para determinados processos de espalhamento.

Para estudar sistemas físicos, é preciso primeiro descrever como cada campo se comporta sozinho. Além disso, como os mesmos interagem com outras fontes. Com isso em mente, vamos fazer uma descrição das lagrangianas que descrevem os grávitons, os fótons, os férmions e suas respectivas interações, a saber, gráviton-férmion, férmion-fóton, gráviton-fóton e gráviton-férmion-fóton.

Como já vimos, a lagrangiana livre da GEM é definida como

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{16\pi G}\mathbf{F}_{\mu\nu\alpha}\mathbf{F}^{\mu\nu\alpha}.$$

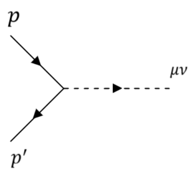
A lagrangiana de Dirac, por sua vez, pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_F = -\frac{i\hbar c}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + mc^2\bar{\psi}\psi,$$

a qual descreve o campo de Férmions. Aqui, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ e γ_μ são as matrizes de Dirac, que satisfazem a relação $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$. Logo, a lagrangiana a interação gráviton-férmions é dada por

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{i\hbar ck}{4}A_{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - \partial^\mu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi), \tag{10}$$

com k sendo a constante de acoplamento. Como temos uma interação gráviton-férmion, o fator de vértice, o qual descreve a interação, envolvido em tal processo é dado na Figura 1.



$$= -\frac{i\hbar c\kappa}{4}(\gamma^\mu p^\nu + p'^\mu\gamma^\nu)$$

Figura 1. Fator de vértice gráviton-férmions.

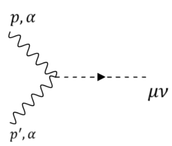
O campo eletromagnético, por sua vez, é descrito pela seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e A_μ sendo o potencial vetor. A interação gráviton-fótons é dada por

$$\mathcal{L}_{GA} = \frac{k}{4\pi}A_{\mu\nu}(F^\mu{}_\alpha\, F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}). \tag{11}$$

O vértice que representa a interação gráviton-fóton é dado na Figura 2.



$$\begin{aligned} = &-\frac{i\kappa}{4\pi}(\eta^{\alpha\beta}p^\mu p'^\nu - \eta^{\nu\beta}p^\mu p'^\alpha - \eta^{\mu\alpha}p^\beta p'^\nu + \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}p\cdot p' \\ &-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\beta\alpha}p\cdot p' + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}p^\beta p'^\alpha) \end{aligned}$$

Figura 2. Fator de vértice gráviton-fóton.

A interação entre fótons e férmions é dada pela lagrangiana de interação

$$\mathcal{L}_{FA} = e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}, \tag{12}$$

e o fator de vértice é dado pela Figura 3.

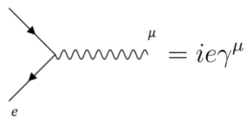


Figura 3. Fator de vértice férmions-fóton.

Por fim, nos resta a interação gráviton-fóton-férmion, que é dada pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_{GFA} = \frac{1}{2}ek\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A^{\nu}A_{\mu\nu}, \tag{13}$$

e possui o seguinte fator de vértice dado na Figura 4.

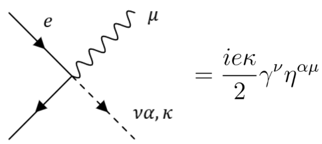


Figura 4. Fator de vértice gráviton-férmion-fóton.

A partir das lagrangianas que descrevem os grávitons, férmions e fótons, bem como suas interações, pode-se escrever uma lagrangiana total da teoria GEM dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{FA} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{GA} + \mathcal{L}_{GFA}. \tag{14}$$

Com a lagrangiana total é possível calcular processos físicos conhecidos a fim de entender melhor a interação do gráviton com outras partículas fundamentais. Como exemplo pode-se investigar processos de espalhamento, tais como: espalhamento Compton gravitacional, espalhamento Möller gravitacional, fotoprodução gravitacional, entre outros. E assim, calcular a amplitude de transição $\mathcal{M}$ do sistema, obtendo informações acerca das probabilidades envolvidas no processo. O módulo da amplitude de transição nos fornece a probabilidade de uma certa interação ocorrer. Consequentemente, a partir de $\mathcal{M}$, podemos encontrar a seção de choque σ do espalhamento, que nos diz qual região é a mais provável de ocorrer uma dada interação. O cálculo da seção de choque é de extrema importância, pois a mesma pode descrever interações entre as partículas fundamentais, em especial o gráviton, nos mostrando como ocorre a troca de energia, momento e outras propriedades ao longo da interação.

4. Conclusão

A GEM se mostra uma boa teoria para se estudar interação entre grávitons e outras partículas elementares, tais como férmions e fótons. Além disso, a formulação lagrangiana via tensor $A^{\mu\nu}$ é de extrema importância para a teoria, pois o mesmo contém todas as informações acerca dos campos gravito-elétrico e gravito-magnético. Vimos também que todo o formalismo apresentado segue uma ideia similar ao eletromagnetismo, com diferença que descrevemos o gráviton, que possui spin 2. Por fim, como motivação para trabalhos futuros, queremos estudar o espalhamento Compton gravitacional, descrevendo de forma mais detalhada a seção de choque do sistema. Queremos estudar também o sistema com temperatura finita e quebra de simetria de Lorentz, pois assim, teremos uma descrição mais próxima de situações reais.

Agradecimentos

Agradeço à UFMT e à CAPES pelo suporte financeiro.

Referências

[1] G. Cantor, "Faraday's search for the gravelectric effect," Phys. Educat. **26**, 289 (1991).

[2] J. C. Maxwell, "Viii. a dynamical theory of the electromagnetic field," Philosophical transactions of the Royal Society of London, **155**, 459 (1865).

[3] O. Heaviside, "A gravitational and electromagnetic analogy," The Electrician **31**, 281 (1893).

[4] H. A. Lorentz, "Considerations on gravitation," Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences **2**, 559 (1899).

[5] J. Lense and H. Thirring, "On the influence of the proper rotation of a central body on the motion of the planets and the moon, according to Einstein's theory of gravitation," Zeitschrift für Physik **19**, 47 (1918).

[6] A. Matte, "Sur de nouvelles solutions oscillatoires des equations de la gravitation," Can. J. Math. **5**, 1 (1953).

[7] L. Bel, "Sur la radiation gravitationnelle," Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de Lacademie des Sciences **247**, 1094 (1958).

[8] R. Debever, "La super-énergie en relativité générale," Bull. Soc. Math. Belg **10**, 112 (1959).

[9] J. Scott, "Gravitation in flat space-time," Nature **213**, 767 (1967).

[10] F. Spieweck, "Relativistic extension of Newton's theory of gravitation," Astron. Astrophys. **12**, 278 (1971).

[11] B. Mashhoon, "Gravitoelectromagnetism: a brief review," arXiv: gr-qc/0311030 (2003).

[12] A. Santos and F. C. Khanna, "Gravitational Möller scattering, lorentz violation and finite temperature," Mod. Phys. Lett. A **35**, 2050213 (2020).

[13] J. Ramos, M. de Montigny, and F. C. Khanna, "On a lagrangian formulation of gravitoelectromagnetism," Gen. Rel. Grav. **42**, 2403 (2010).

[14] S. Weinberg, "Gravitation and cosmology, Wiley New York," (1972).

[15] A. Danehkar, "On the significance of the Weyl curvature in a relativistic cosmological model," Mod. Phys. Lett. A **24**, 3113 (2009).

[16] J. Ramos, "Differential operators in terms of Clebsch-Gordon (cg) coefficients and the wave equation of massless tensor fields," Gen. Rel. Grav. **38**, 773 (2006).