



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

LUCAS EVANGELISTA ALVES DE SOUZA

ESPALHAMENTO COMPTON GRAVITACIONAL À
TEMPERATURA FINITA

CUIABÁ - MT

2024

LUCAS EVANGELISTA ALVES DE SOUZA

**ESPALHAMENTO COMPTON GRAVITACIONAL À
TEMPERATURA FINITA**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Mato Grosso como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alesandro Ferreira dos Santos

CUIABÁ - MT

2024

Dedico este trabalho a mim mesmo, em reconhecimento aos desafios que superei, e irei superar, ao longo da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha mãe, Josilene Evangelista Alves de Andrade, que sempre me apoiou nos momentos mais difíceis da minha vida, me orientando e oferecendo conselhos valiosos, além de compartilhar comigo celebrações e memórias inesquecíveis. Também expresso minha gratidão à minha parceira e companheira, Yohanna Berti de Oliveira, que nos últimos anos esteve ao meu lado, dividindo tanto os momentos bons quanto os desafiadores, que ficarão marcados pra sempre em minha memória, contribuindo para que eu me torne uma pessoa melhor.

Agradeço ainda à minha família e aos amigos, que sempre me proporcionaram momentos inesquecíveis, celebrando comigo cada conquista e desejando o melhor para mim. Sou especialmente grato ao meu orientador, que durante o mestrado foi fundamental para o meu desenvolvimento acadêmico, me guiando e aconselhando sobre os caminhos a seguir.

Por fim, agradeço à UFMT e à CAPES pela oportunidade de realizar este mestrado e pelo suporte financeiro, que foram essenciais para facilitar toda minha vida acadêmica em Cuiabá.

“Eu, um universo de átomos, um átomo no universo.”

(Richard P. Feynman)

RESUMO

Neste trabalho, vamos explorar os conceitos fundamentais da teoria Gravitoeletromagnética (GEM), apresentando seu arcabouço matemático principal, bem como seus conceitos e interpretações físicas. Como exemplo, iremos fazer uma aplicação física da teoria GEM. A partir dessa aplicação, encontramos o tensor energia-momento da GEM, uma quantidade física fundamental que está diretamente relacionada à conservação de energia e momento. Além disso, investigaremos o espalhamento Compton gravitacional, que consiste em uma interação entre um férmion e um gráviton, com um antiférmion atuando como partícula intermediadora. Para realizar um estudo mais completo desse processo, é necessário determinar dois parâmetros essenciais em física de partículas: a amplitude de transição e a seção de choque. A amplitude de transição indica a probabilidade de uma determinada interação ocorrer em um sistema, enquanto a seção de choque descreve como essa probabilidade se distribui em uma determinada região do espaço. Com esses dois parâmetros, conseguimos uma descrição completa da interação entre as partículas e de suas transferências de energia e momento. Adicionalmente, discutiremos como esse processo se comporta ao considerarmos efeitos térmicos no sistema. Para introduzirmos os efeitos térmicos iremos utilizar o formalismo da dinâmica de campos térmicos, ou formalismo TFD (do inglês, Thermo Field Dynamics). A TFD é um formalismo dentro da teoria quântica de campos que nos permite introduzir temperatura em sistemas em equilíbrio térmico. Para isso, é necessário duplicar o espaço de Hilbert usual e aplicar as transformações de Bogoliubov, que possibilitam a definição de um estado de vácuo térmico, bem como dos operadores de criação e aniquilação térmicos, respectivamente.

Palavras-chave: Gravitoeletromagnetismo; Espalhamentos gravitacionais; Dinâmica de Campos Térmicos.

ABSTRACT

In this work, we will explore the fundamental concepts of Gravitoelectromagnetic Theory (GEM), presenting its main mathematical framework, as well as its physical concepts and interpretations. As an example, we will apply the GEM theory to a physical scenario. From this application, we derive the GEM energy-momentum tensor, a fundamental physical quantity that is directly related to the conservation of energy and momentum. Furthermore, we will investigate gravitational Compton scattering, which involves an interaction between a fermion and a graviton, with an antifermion acting as the intermediate particle. To conduct a more comprehensive study of this process, it is essential to determine two key parameters in particle physics: the transition amplitude and the cross-section. The transition amplitude indicates the probability of a specific interaction occurring within a system, while the cross-section describes how this probability is distributed in a specific region of space. With these two parameters, we achieve a complete description of the interaction between particles and their energy and momentum transfers. Additionally, we will discuss how this process behaves when considering thermal effects in the system. To introduce thermal effects, we will use the Thermo Field Dynamics (TFD) formalism. TFD is a framework within quantum field theory that allows us to incorporate temperature into systems in thermal equilibrium. To do so, it is necessary to duplicate the usual Hilbert space and apply Bogoliubov transformations, which facilitate the definition of a thermal vacuum state and the corresponding thermal creation and annihilation operators.

Keywords: Gravitoelectromagnetism; Gravitational scattering; Thermo Field Dynamics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Diagrama de Feynman para o espalhamento Compton gravitacional. O diagrama (a) representa o que chamamos de diagrama tipo-*s* e (b), por sua vez, descreve o diagrama tipo-*t*. 32
- Figura 2 – Conjunto de partículas do tipo A (direita) e do tipo B (esquerda), com suas respectivas densidades e comprimentos do conjunto. 33

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso
GEM	Gravitoeletromagnetismo
QED	<i>Quantum Electrodynamics</i>
QCD	<i>Quantum Chromodynamics</i>
TFD	<i>Thermo Field Dynamics</i>
CTP	<i>Closed-Time Path</i>
MP	Modelo Padrão
MPE	Modelo Padrão Estendido

LISTA DE SÍMBOLOS

E	Letra E estilizada.
B	Letra B estilizada.
\mathcal{F}	Letra F estilizada.
\mathcal{G}	Letra G estilizada.
\mathcal{L}	Letra L estilizada.
\mathcal{J}	Letra J estilizada.
\mathbb{A}	Letra A estilizada.
S	Letra S estilizada.
\mathcal{M}	Letra M estilizada.
\mathcal{A}	Letra A estilizada.
\mathcal{B}	Letra B estilizada.
\mathcal{C}	Letra C estilizada.
\mathcal{D}	Letra D estilizada.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	A TEORIA GRAVITOELETROMAGNÉTICA E SEU FOR-	
	MALISMO	14
2.1	Os conceitos do campo Gravitoeletromagnético	14
2.2	Lagrangiana e suas interações	17
2.2.1	Dedução do tensor energia-momento simétrico	18
3	DINÂMICA DE CAMPOS TÉRMICOS	21
3.1	Formalismo geral da teoria	22
3.1.1	O vácuo térmico	22
3.1.2	Transformações de Bogoliubov	24
3.2	Cálculo do propagador dos férmions	25
4	ESPALHAMENTO COMPTON GRAVITACIONAL	31
4.1	Conceitos fundamentais sobre seção de choque e a matriz espa-	
	lhamento	32
4.1.1	Uma breve introdução à seção de choque	32
4.1.2	A matriz espalhamento S	34
4.2	Espalhamento Compton gravitacional à temperatura zero . . .	35
4.2.1	Cálculo da amplitude de transição à temperatura zero	36
4.2.2	Seção de choque à temperatura zero	42
4.3	Espalhamento Compton gravitacional à temperatura finita . . .	46
4.3.1	Cálculo da amplitude de transição à temperatura finita	46
4.3.2	Seção de choque à temperatura finita	55
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

O Modelo Padrão (MP) é a principal teoria em física de partículas. A mesma foi desenvolvida com o intuito de criar uma teoria geral das partículas, pois descreve com sucesso três das quatro forças fundamentais da natureza¹ (MOREIRA, 2009). No entanto, o MP é incompleto: apesar de suas numerosas confirmações experimentais, ele não contém a força gravitacional, descrita pela teoria da Relatividade Geral, e possui alguns problemas referentes a assimetria matéria-antimatéria, entre outros. A busca por uma "teoria de tudo"— uma descrição completa de todas as forças da natureza — sempre foi um sonho na ciência. Contudo, a unificação da gravidade com a mecânica quântica ou o MP continua sem solução, e as tentativas de avanços permanecem no campo da física teórica. Nesse cenário, surge a necessidade de estender o MP como conhecemos, explorando novas abordagens como a Gravidade Quântica de Laços e a Teoria de Cordas, buscando uma unificação das quatro forças fundamentais (ROVELLI, 2004; ROVELLI, 2008; CARLIP, 2001; ABDALLA, 2005; RIVELLES, 2007). Em um contexto diferente, que se mostrou promissor para esse estudo posteriormente, temos o Gravitoeletromagnetismo (GEM), que busca fazer um análogo ao eletromagnetismo em um contexto gravitacional.

A GEM é uma teoria que tem como finalidade fazer uma descrição gravitacional em um formalismo análogo ao eletromagnetismo de Maxwell. Com uma construção que data do fim do século XIX, a GEM precede até mesmo os postulados de Einstein da Relatividade Geral. Os conceitos base surgem com Heaviside, em 1893, ao tentar explicar o avanço do periélio do Mercúrio, propôs equações gravitacionais análogas às de Maxwell (HEAVISIDE, 1893). Tentativa essa que foi desbancada por Lorentz, que demonstrou que a força gravitomagnética não teria força o suficiente para justificar esse fenômeno (LORENTZ, 1899). Em 1918, Lense e Thirring (LENSE; THIRRING, 1918), motivados na interligação entre conceitos gravitacionais e eletromagnéticos, comprovaram que um corpo massivo gerava um campo gravitomagnético que alterava a orientação da órbita de outros corpos em sua proximidade. Esse efeito ficou conhecido como efeito Lense-Thirring, que posteriormente foi comprovado experimentalmente pelos experimentos LAGEOS 1 e 2, em 1976 e 1992, respectivamente, e pelo Gravity Probe B, em 2004 (IORIO, 2006; CIUFOLINI; PAVLIS, 2004). A partir da década de 50, novas ideias surgiram a partir da decomposição do tensor de Weyl nas componentes gravitoelétricas e gravitomagnéticas (MATTE, 1953; BEL, 1958; DEBEVER, 1959). O tensor de Weyl, que descreve a curvatura do espaço-tempo por meio do tensor de Riemann, está diretamente relacionado à detecção de ondas gravitacionais (DANEHKAR, 2009).

¹ As três forças fundamentais são a força nuclear forte, a força nuclear fraca e a força eletromagnética, descritas pela QCD, teoria Eletrofraca e QED, respectivamente.

Portanto, é possível fazer uma descrição mais detalhada da GEM utilizando o formalismo de campos. Ao construir uma formulação Lagrangiana para a GEM (RAMOS; MONTIGNY; KHANNA, 2010), temos um resultado análogo ao que vemos na Eletrodinâmica Quântica (*Quantum Electrodynamics*, QED), ou seja, uma interpretação de como calcular a dinâmica de uma partícula, que nesse contexto, é o gráviton. Trabalhar com a formulação Lagrangiana nos resulta em uma interpretação de partícula de spin 2, nos permitindo analisar a interação com outras partículas. Além disso, essa formulação nos permite realizar diversas aplicações envolvendo o gráviton. Um dos principais processos que podemos realizar são os processos de espalhamentos, que resulta na seção de choque da interação entre partículas. Diversos trabalhos descrevem como ocorre a interação do gráviton com outras partículas no contexto de espalhamento (SANTOS; KHANNA, 2017; ULHOA; SANTOS; KHANNA, 2017; JESUS et al., 2022). Neste trabalho, temos como objetivo focar especificamente no espalhamento Compton gravitacional.

O espalhamento Compton é o processo que envolve a interação de um férmion com um fóton. A partir dessa interação, ocorre a transferência de energia e momento, fazendo com que as partículas sejam espalhadas. Quando um fóton é espalhado por uma partícula carregada, o mesmo perde energia, resultando no aumento em seu comprimento de onda. Essa troca é descrita pelo efeito Compton. No contexto da Eletrodinâmica Quântica, o espalhamento em questão ocorre com a interação de um férmion e um fóton, sendo o pósitron a partícula que intermedeia essa interação (CABRAL; SANTOS, 2023). Dito isso, queremos investigar como esse processo ocorre para o gráviton. Com isso em mente, o espalhamento Compton gravitacional vai envolver a interação do campo da GEM com o campo de partículas fermiônicas, ou seja, $g + f \rightarrow g + f$, onde $g(f)$ representa o gráviton(férmion). Nesse processo, ocorre a aniquilação de um gráviton com um elétron em um pósitron virtual, seguida pela criação de um novo par gráviton-elétron. Para fornecer uma descrição mais realista, o espalhamento será analisado introduzindo efeitos térmicos por meio da Dinâmica de Campos Térmicos (*Thermo Field Dynamics*, TFD).

A TFD é uma abordagem na teoria de campos que busca descrever o espaço de Hilbert convencional utilizando uma álgebra térmica, levando em consideração as propriedades térmicas das partículas subatômicas (KHANNA, 2009). Postulado por H. Umezawa, H. Matsumoto e M. Tachiki em 1982, a TFD descreve e resolve sistemas em equilíbrio térmico por meio de técnicas desenvolvidas em teoria quântica de campos (UMEZAWA; MATSUMOTO; TACHIKI, 1982). Apesar de existirem outras formas de introduzir temperatura nos sistemas, como o método de Matsubara (MATSUBARA, 1955) por exemplo, a TFD funciona muito bem quando consideramos baixas ordens da matriz espalhamento. Temos diversos trabalhos que utilizam o formalismo TFD (CABRAL; SANTOS, 2023; SANTOS; KHANNA, 2020; SOUZA et al., 2019; CABRAL; SANTOS; KHANNA, 2023; SANTOS; KHANNA, 2016b). Com isso em mente, neste trabalho,

investigamos como a contribuição térmica afeta o espalhamento Compton gravitacional a nível de árvore e comparamos os resultados com o caso de temperatura zero.

Essa dissertação está dividida como segue. No Capítulo 2 abordaremos a teoria GEM e os principais parâmetros envolvidos em sua construção, demonstrando como ocorre a formulação do campo gravitoeletromagnético e qual é a estrutura da Lagrangiana da GEM. Além disso, vamos realizar uma aplicação da teoria, utilizando a Lagrangiana para encontrar o tensor energia-momento simetrizado. De forma análoga, no Capítulo 3, analisaremos os conceitos fundamentais para o estudo de espalhamentos, como a seção de choque e a matriz de espalhamento, definindo os principais termos que serão utilizados ao longo da análise do processo em questão. No Capítulo 4, discutiremos a construção da TFD e as ferramentas dessa teoria que serão empregadas para introduzir temperatura no espalhamento Compton gravitacional. Nesse mesmo capítulo, calcularemos o propagador térmico para o campo dos férmions. Em seguida, no Capítulo 5, trataremos do espalhamento Compton gravitacional tanto a temperatura zero quanto a temperatura finita, calculando as respectivas matrizes de espalhamento e seções de choque, e descreveremos como a contribuição térmica intensifica a interação. Finalmente, concluiremos este trabalho com considerações sobre os resultados obtidos e possíveis direções para análises futuras.

2 A TEORIA GRAVITOELETROMAGNÉTICA E SEU FORMALISMO

Este capítulo tem como objetivo discutir a construção da teoria gravitoeletromagnética. A GEM é uma teoria gravitacional formulada de maneira análoga ao eletromagnetismo. Com isso em mente, o campo gravitoeletromagnético é definido em termos de um potencial tensor $A_{\mu\nu}$, o qual é análogo ao potencial vetor da Eletrodinâmica Quântica (QED) A_μ , e constitui a quantidade mais importante da teoria. Além disso, serão apresentadas as Lagrangianas de interação entre o gráviton e outras partículas fundamentais. Por fim, será realizada rapidamente a simetrização do tensor energia-momento da GEM, uma etapa que contribui significativamente para o desenvolvimento da teoria, pois esta relacionado diretamente a quantidades conservadas.

A GEM é uma teoria que pode ser abordada de três maneiras: (i) pela decomposição do tensor de Weyl nas componentes gravitoelétricas e gravitomagnéticas (RAMOS; MONTIGNY; KHANNA, 2010), (ii) analisando a similaridade das equações de campo de Einstein no limite de campo fraco com as equações de Maxwell (BAKOPOULOS, 2016) e (iii) por uma análise de tensores de maré (COSTA; HERDEIRO, 2008). O caminho que vamos seguir neste trabalho será o primeiro, pois existe uma consistente construção Lagrangiana usando essa abordagem (RAMOS; MONTIGNY; KHANNA, 2010). Essa análise considera um potencial tensor gravitacional $A_{\mu\nu}$ que surge naturalmente com a construção da teoria, diferente do segundo método que necessita de uma perturbação $h_{\mu\nu}$ na métrica. Esse parâmetro é essencial para o contexto da GEM, pois todas as informações referentes ao campo gravitoeletromagnético estão contidas nele.

2.1 Os conceitos do campo Gravitoeletromagnético

Podemos começar a partir do tensor de curvatura de Weyl. Aqui, vamos discutir como podemos construir a GEM a partir dessa quantidade. Dito isso, por definição, o tensor de Weyl é dado por

$$C_{\alpha\sigma\mu\nu} = R_{\alpha\sigma\mu\nu} - \frac{1}{2}(R_{\nu\alpha}g_{\mu\sigma} + R_{\mu\sigma}g_{\nu\alpha} - R_{\nu\sigma}g_{\mu\alpha} - R_{\mu\alpha}g_{\nu\sigma}) + \frac{1}{6}R(g_{\nu\alpha}g_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}g_{\mu\alpha}), \quad (2.1)$$

onde $R_{\alpha\sigma\mu\nu}$ é o tensor de Riemann, $R_{\mu\nu}$ representa o tensor de Ricci, R é o escalar de Ricci e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. A vantagem de utilizar o tensor de Weyl está em suas propriedades, que indicam que ele é invariante sob mudanças conformais na métrica, ou seja, os ângulos se conservam. Além disso, ele possui as mesmas simetrias que o tensor de Riemann (DANEHKAR, 2009).

Podemos decompor o tensor de Weyl nas componentes gravitoelétricas e gravitomagnéticas, ou seja, $E_{ij} = -C_{0i0j}$ e $B_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}C_{0j}^{kl}$, respectivamente, onde $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$. O próximo passo para construir uma teoria gravitoeletromagnética é analisar as equações tipo-Maxwell para espaço-tempo plano em sistemas com fonte, dadas por

$$\partial^i E^{ij} = 4\pi G \rho^j, \quad (2.2)$$

$$\partial^i B^{ij} = 0, \quad (2.3)$$

$$\epsilon^{\langle ikl} \partial^k B^{lj} \rangle - \frac{1}{c} \frac{\partial E^{ij}}{\partial t} = \frac{4\pi G}{c} J^{ij}, \quad (2.4)$$

$$\epsilon^{\langle ikl} \partial^k E^{lj} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial B^{ij}}{\partial t} = 0, \quad (2.5)$$

onde os campos E^{ij} e B^{ij} são ambos tensores simétricos sem traço de segunda ordem (*rank-2 symmetric traceless tensors*, rank-2 STT), ρ^j é o vetor de densidade de massa, J^{ij} é um rank-2 STT que representa a densidade de corrente de massa, G é a constante gravitacional, c representa a velocidade da luz, ϵ^{ikl} é o símbolo de Levi-Civita e $\langle \dots \rangle$ representa a simetrização dos primeiros e últimos índices. Essas equações são análogas às equações de Maxwell, com a diferença de que estas descrevem a gravidade. Note que agora há um aumento nos índices das quantidades físicas quando comparados ao eletromagnetismo: vetor densidade no lugar de densidade escalar, tensor de segunda ordem da densidade de corrente no lugar de vetor densidade de corrente, e assim por diante. Isso ocorre devido às condições necessárias para construir a teoria. Apesar da similaridade, estamos descrevendo uma teoria para o gráviton, que é uma partícula de spin 2. Logo, é de se esperar que haja diferenças quando comparadas. Com isso em mente, é possível definir os campos E e B da GEM como

$$E = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$B = \text{curl } A, \quad (2.7)$$

com as seguintes condições para os termos φ e A :

$$\text{curl } \varphi = 0, \quad \text{div } A = 0. \quad (2.8)$$

Os campos E^{ij} e B^{ij} são representados em termos de um tensor A com componentes A^{ij} , onde $i, j = 1, 2, 3$. Além disso, o campo gravitoelétrico E , por definição, é escrito em termos de um vetor φ , onde $\text{grad } \varphi = \partial^i \varphi^j$. Note que φ é a contraparte vetorial do potencial escalar ϕ do eletromagnetismo na teoria GEM. Ademais, é possível mostrar que, se o campo E é um tensor simétrico de segunda ordem, então tanto A quanto $\text{grad } \varphi$ também serão. Dito isso, os elementos diagonais de A e $\text{grad } \varphi$ vão satisfazer $A^{11} + A^{22} + A^{33} = 0$ e $\partial^1 \varphi^1 + \partial^2 \varphi^2 + \partial^3 \varphi^3 = 0$, respectivamente. Assim, em termos das componentes, os campos gravitoelétricos e gravitomagnéticos se tornam

$$E^{ij} = - \begin{pmatrix} \partial^1 \varphi^1 & \partial^1 \varphi^2 & \partial^1 \varphi^3 \\ \partial^1 \varphi^2 & \partial^2 \varphi^2 & \partial^2 \varphi^3 \\ \partial^1 \varphi^3 & \partial^2 \varphi^3 & \partial^3 \varphi^3 \end{pmatrix} - \frac{1}{c} \partial_t \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{12} & A^{22} & A^{23} \\ A^{13} & A^{23} & A^{33} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

e

$$B^{ij} = \varepsilon^{ikl} \partial^k A^{lj}. \quad (2.10)$$

Assim, podemos definir um tensor de terceira ordem, chamado de *tensor gravitoeletromagnético* \mathcal{F} , escrevendo-o como

$$\mathcal{F}^{\mu\nu\alpha} = \partial^\mu A^{\nu\alpha} - \partial^\nu A^{\mu\alpha}, \quad (2.11)$$

onde $\mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3$. Os elementos do tensor $A^{\mu\nu}$, por sua vez, serão dados por

$$A = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^0 & \varphi^1 & \varphi^2 & \varphi^3 \\ \varphi^1 & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ \varphi^2 & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ \varphi^3 & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Anteriormente, discutimos algumas abordagens para o estudo da GEM. Uma delas envolve analisar a similaridade entre as equações linearizadas de Einstein e Maxwell no limite de campo fraco. Essa abordagem é realizada através de uma perturbação na métrica $h_{\mu\nu}$. No caso aqui apresentado, o potencial tensor não tem relação com esse tipo de perturbação. Na verdade, ele está diretamente conectado à descrição do campo gravitacional no espaço-tempo plano. Ou seja, é correto dizer que $A^{\mu\nu}$ é o parâmetro mais importante da teoria, pois o mesmo irá conter todas as informações referentes aos campos gravitoeletrônicos e gravitomagnéticos. A seguir, segue algumas propriedades referentes ao tensor gravitoeletromagnético: \mathcal{F} é anti-simétrico nos primeiros dois índices, isto é,

$$\mathcal{F}^{\mu\nu\alpha} = -\mathcal{F}^{\nu\mu\alpha}, \quad (2.13)$$

e obedece à identidade cíclica

$$\mathcal{F}^{\mu\nu\alpha} + \mathcal{F}^{\nu\alpha\mu} + \mathcal{F}^{\alpha\mu\nu} = 0. \quad (2.14)$$

Ademais, as componentes não-nulas de \mathcal{F} são definidas como

$$\mathcal{F}^{0ij} = E^{ij}, \quad \mathcal{F}^{ijk} = \epsilon^{ijl} B^{lk}. \quad (2.15)$$

Além disso, note que as componentes $\mathcal{F}^{100}, \mathcal{F}^{200}, \mathcal{F}^{300}, \mathcal{F}^{010}, \mathcal{F}^{020}$ e \mathcal{F}^{030} são nulas e nos levam a seguinte condição: $\nabla \varphi^0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} = 0$. Portanto, podemos definir o *tensor gravitoeletromagnético dual* \mathcal{G}

$$\mathcal{G}^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\gamma\sigma} \eta^{\alpha\xi} \mathcal{F}_{\gamma\sigma\xi}, \quad (2.16)$$

onde

$$\mathcal{F}_{\gamma\sigma\xi} = \eta_{\gamma\mu} \eta_{\sigma\nu} \eta_{\xi\alpha} \mathcal{F}^{\mu\nu\alpha}. \quad (2.17)$$

Sendo assim, reescrevendo as equações tipo-Maxwell na forma covariante, teremos como resultado que

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu\alpha} = -\frac{4\pi G}{c} \mathcal{J}^{\nu\alpha} \quad (2.18)$$

$$\partial_\mu \mathcal{G}^{\mu\langle\nu\alpha\rangle} = 0, \quad (2.19)$$

onde $\mathcal{J}^{\nu\alpha}$ é um tensor de segunda ordem que vai depender da densidade de massa $c\rho^i$ e da densidade de corrente de massa J^{ij} . Podemos então definir a densidade Lagrangiana da GEM (RAMOS; MONTIGNY; KHANNA, 2010) como

$$\mathcal{L}_{\text{GEM}} = -\frac{1}{16\pi} \mathcal{F}_{\mu\nu\alpha} \mathcal{F}^{\mu\nu\alpha} - G \mathcal{J}^{\nu\alpha} A_{\nu\alpha}, \quad (2.20)$$

onde se utilizarmos as equações de Euler-Lagrange, retornamos às Eqs. (2.18) e (2.19). Além disso, essas equações nos levam à equação de continuidade para a GEM, ou seja,

$$\partial_\nu \mathcal{J}^{\nu\alpha} = 0, \quad (2.21)$$

o que implica na lei de conservação de massa. A quantização da GEM em termos do tensor $A^{\mu\nu}$ nos leva a partículas de spin 2, os grávitons. Dito isso, podemos utilizar a lagrangiana da mesma para analisar a interação com outros campos.

2.2 Lagrangiana e suas interações

A formulação Lagrangiana da GEM apresentada anteriormente nos permite descrever a interação entre grávitons e outras partículas, como fótons e férmions. A Lagrangiana total descreverá os termos de interação para cada processo envolvendo essas partículas.

Para estudar sistemas físicos, é preciso primeiro descrever como cada campo se comporta isoladamente e, além disso, como eles interagem com outras fontes. Com isso em mente, vamos descrever as Lagrangianas para grávitons, fótons, férmions e suas respectivas interações: gráviton-férmion, férmion-fóton, gráviton-fóton e gráviton-férmion-fóton. Sabemos que a Lagrangiana livre da GEM é definida por

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{16\pi} \mathcal{F}_{\mu\nu\alpha} \mathcal{F}^{\mu\nu\alpha}, \quad (2.22)$$

na qual $\mathcal{F}_{\mu\nu\alpha}$ representa, como vimos, o campo gravitoeletromagnético. A Lagrangiana de Dirac, por sua vez, pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_F = -\frac{i\hbar c}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + mc^2 \bar{\psi} \psi, \quad (2.23)$$

onde ψ é o campo fermiônico, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$, γ_μ representa as matrizes de Dirac, nas quais as mesmas obedecem a seguinte relação de comutação $[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 2\eta_{\mu\nu}$, com $\eta_{\mu\nu}$ sendo a métrica

de Minkowski, e m é a massa dos férmions. Por completude, o campo eletromagnético vai possuir a seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

onde $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ é o campo dos fótons. Assim, é possível escrever as Lagrangianas que descrevem a interação da GEM com cada campo apresentado anteriormente. A interação gráviton-férmion será dada por

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{i\hbar c\kappa}{4}A_{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - \partial^\mu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi), \quad (2.25)$$

onde $\kappa = \sqrt{8\pi G}$ é a constante de acoplamento e $A_{\mu\nu}$ é o potencial tensor da GEM. A interação gráviton-fóton, por sua vez, é escrita como

$$\mathcal{L}_{\text{GA}} = \frac{\kappa}{4\pi}A_{\mu\nu}(\mathcal{F}^\mu{}_\alpha\mathcal{F}^{\nu\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\xi}F_{\alpha\xi}). \quad (2.26)$$

A interação férmion-fóton será dada por

$$\mathcal{L}_{\text{FA}} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (2.27)$$

onde e é a carga do elétron e A_μ representa o potencial vetor eletromagnético. Por fim, a interação gráviton-férmion-fóton é definida como

$$\mathcal{L}_{\text{GFA}} = \frac{1}{2}ek\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A^\nu A_{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Assim, podemos escrever a Lagrangiana total da GEM, descrevendo as interações dadas anteriormente, como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{\text{FA}} + \mathcal{L}_{\text{GF}} + \mathcal{L}_{\text{GA}} + \mathcal{L}_{\text{GFA}}. \quad (2.29)$$

Dada a Lagrangiana total de interação do sistema, podemos utilizá-la para calcular processos físicos conhecidos, a fim de entender melhor a interação do gráviton com outras partículas. Neste trabalho, abordaremos um espalhamento relacionado à interação gráviton-férmion. Assim, a principal Lagrangiana será aquela da Eq. (2.25). A partir da mesma, podemos estar calculando a amplitude de transição e a seção de choque do sistema. Porém, antes de nos aprofundarmos nas aplicações, vamos investigar o tensor energia-momento da GEM, a partir da sua densidade de Lagrangiana.

2.2.1 Dedução do tensor energia-momento simétrico

Uma grandeza essencial na formulação de uma teoria robusta é o tensor energia-momento associado a ela. Essa quantidade física reúne todas as informações sobre o fluxo de energia, momento e densidade de um sistema. Além disso, é fundamental para descrever as interações entre campos e como essas interações se manifestam no espaço-tempo (PESKIN,

2018). Para tanto, começaremos com a definição usual da Lagrangiana livre associada à GEM, dada em (2.2). Por definição, temos que o tensor energia-momento é escrito como segue

$$T_G^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_G - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}), \quad (2.30)$$

onde se substituirmos a Lagrangiana livre na definição do tensor energia-momento, vamos obter o mesmo para a teoria da GEM. Dito isso, vamos calcular o segundo termo da equação (2.30), isto é,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}) = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} \left(-\mathcal{F}_{\rho\sigma\theta} \mathcal{F}^{\rho\sigma\theta} \right) (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}), \quad (2.31)$$

onde omitimos as constantes com o intuito de simplificar o cálculo. Fazendo a seguinte mudança no tensor $\mathcal{F}_{\rho\sigma\theta}$

$$\mathcal{F}_{\rho\sigma\theta} = \eta_{\rho\kappa} \eta_{\sigma\omega} \eta_{\theta\xi} \mathcal{F}^{\kappa\omega\xi}, \quad (2.32)$$

vamos obter que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}) = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} (\eta_{\rho\kappa} \eta_{\sigma\omega} \eta_{\theta\xi} \mathcal{F}^{\kappa\omega\xi} \mathcal{F}^{\rho\sigma\theta}) (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}), \quad (2.33)$$

onde, ao resolver a derivada, encontramos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}) = \left[\eta_{\rho\kappa} \eta_{\sigma\omega} \eta_{\theta\xi} \frac{\partial(\mathcal{F}^{\kappa\omega\xi})}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} \mathcal{F}^{\rho\sigma\theta} + \eta_{\rho\kappa} \eta_{\sigma\omega} \eta_{\theta\xi} \frac{\partial(\mathcal{F}^{\rho\sigma\theta})}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} \mathcal{F}^{\kappa\omega\xi} \right] (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}). \quad (2.34)$$

Atuando as métricas, os termos se tornam iguais, resultando em

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}) = 2 \frac{\partial(\mathcal{F}^{\kappa\omega\xi})}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} \mathcal{F}_{\kappa\omega\xi} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}). \quad (2.35)$$

Se substituirmos $\mathcal{F}^{\kappa\omega\xi} = \partial^\kappa A^{\omega\xi} - \partial^\omega A^{\kappa\xi}$ na equação anterior, descendo o índice da diferencial, vamos ter como resultado

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}) = 2 \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} (\eta^{\rho\kappa} \partial_\rho A^{\omega\xi} - \eta^{\rho\omega} \partial_\rho A^{\kappa\xi}) \mathcal{F}_{\kappa\omega\xi} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}), \quad (2.36)$$

onde, ao resolver a diferencial, encontramos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}) = 2(\delta_\rho^\mu \delta_\alpha^\omega \delta_\lambda^\xi \eta^{\rho\kappa} - \delta_\rho^\mu \delta_\alpha^\kappa \delta_\lambda^\xi \eta^{\rho\omega}) \mathcal{F}_{\kappa\omega\xi} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}), \quad (2.37)$$

ou realizando as operações nas deltas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial(\partial_\mu A^{\alpha\lambda})} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}) &= 2(\eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda} - \eta^{\mu\omega} \mathcal{F}_{\omega\alpha\lambda}) (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}) \\ &= 2[\eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda} + \eta^{\mu\omega} \mathcal{F}_{\omega\alpha\lambda}] (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}) \\ &= 2(\eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda} + \eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda}) (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}) \\ &= 4(\eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda}) (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Assim, adicionando as constantes que foram omitidas, encontramos o tensor energia-momento $T_G^{\mu\nu}$ como

$$T_G^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_G + \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda} (\partial^\nu A^{\alpha\lambda}). \quad (2.39)$$

Contudo, note que o tensor apresentado não é simétrico. Para simetriza-lo vamos partir da definição do tensor $\mathcal{F}^{\alpha\nu\lambda}$, onde temos que $\partial^\nu A^{\alpha\lambda} = -\mathcal{F}^{\alpha\nu\lambda} + \partial^\alpha A^{\nu\lambda}$. Substituindo o mesmo na equação do tensor energia-momento, vamos ter que

$$T_G^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_G + \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda} (-F^{\alpha\nu\lambda} + \partial^\alpha A^{\nu\lambda}), \quad (2.40)$$

que ao rearranjar se torna

$$T_G^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} (\eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda} \mathcal{F}^{\alpha\nu\lambda} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\rho\sigma\theta} \mathcal{F}^{\rho\sigma\theta}) + \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda} (\partial^\alpha A^{\nu\lambda}). \quad (2.41)$$

Note que os termos em parêntesis são simétricos em μ e ν . Além disso, utilizando a equação para sistemas sem fonte, $\partial^\alpha \mathcal{F}_{\alpha\kappa\lambda} = 0$, o último termo pode ser reescrito como

$$t_G^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda} (\partial^\alpha A^{\nu\lambda}) = \frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\kappa} \partial^\alpha (\mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda} A^{\nu\lambda}), \quad (2.42)$$

onde o tensor $t_G^{\mu\nu}$ irá satisfazer $\partial_\mu t_G^{\mu\nu} = 0$. Logo, a lei de conservação vale para $T_G^{\mu\nu} - t_G^{\mu\nu}$. Portanto, podemos definir o tensor energia-momento simetrizado $\Theta_G^{\mu\nu}$ da GEM como

$$\Theta_G^{\mu\nu} = T_G^{\mu\nu} - t_G^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} (\eta^{\mu\kappa} \mathcal{F}_{\kappa\alpha\lambda} \mathcal{F}^{\alpha\nu\lambda} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\rho\sigma\theta} \mathcal{F}^{\rho\sigma\theta}), \quad (2.43)$$

onde o mesmo satisfaz a lei de conservação de energia, $\partial_\mu \Theta_G^{\mu\nu} = 0$. Podemos utilizar o tensor energia-momento para calcular diversos processos físicos, como por exemplo o efeito Casimir (SANTOS; KHANNA, 2016a). Sabemos que o tensor energia-momento, a matriz de espalhamento e a seção de choque estão inter-relacionados, pois todos descrevem a interação entre partículas. Além disso, esses conceitos fornecem informações sobre como as grandezas físicas se conectam. Portanto, uma descrição completa da GEM, como a definição do tensor energia-momento, é essencial para compreender o comportamento desse formalismo.

Sendo assim, tendo sido apresentada as formulações de algumas das principais quantidades da teoria da GEM, podemos discutir outros conceitos fundamentais em Teoria de Campos. No próximo capítulo, vamos destrinchar os principais conceitos referentes a TFD, bem como a dedução do propagador térmico dos férmions, que será utilizado para calcular o espalhamento Compton gravitacional à temperatura finita.

3 DINÂMICA DE CAMPOS TÉRMICOS

A termodinâmica é uma das teorias mais bem consolidadas que existem, descrevendo de maneira convincente a maioria das propriedades térmicas dos sistemas físicos. Esse conceito opera tanto em escalas quânticas, por meio da física estatística, quanto clássicas, sendo, por isso, aplicado em praticamente todas as áreas da física. Essa área fundamental permite descrever parâmetros essenciais, como calor, trabalho e energia. Caracterizada por quatro leis fundamentais — a lei zero, a primeira, a segunda e a terceira —, a termodinâmica possibilita o estudo de como sistemas físicos se comportam na presença de efeitos térmicos (CALLEN; SCOTT, 1998).

A construção da física estatística permitiu complementar ainda mais o estudo dos efeitos térmicos, estabelecendo uma ligação direta com os conceitos previamente definidos na termodinâmica. A partir dessa abordagem, foi possível conectar as propriedades microscópicas com os parâmetros macroscópicos da natureza. A aplicação da noção probabilística a sistemas físicos se mostrou ideal para descrever fenômenos da física quântica. Sistemas como os gases de Bose-Einstein e Fermi-Dirac são exemplos que podem ser analisados por meio da mecânica estatística. O parâmetro fundamental dessa teoria é a construção dos *ensembles* (ou "conjuntos", em tradução literal), que introduz a função de partição. Essa função contém todas as informações termodinâmicas do sistema. Com isso, é possível fazer uma descrição completa dos parâmetros físicos que queremos analisar (SALINAS, 1999; KUBO; TODA; HASHITSUME, 2012; PATHRIA, 2017).

Através de conceitos da termodinâmica estatística, surgiram várias maneiras de introduzir temperatura em sistemas físicos, seja por formalismo de Ensembles, dinâmicas de Quench, métodos de Campo Médio e etc. Mas, no âmbito de Teoria Quântica de Campos, a dinâmica de campos térmicos, ou TFD (*Thermo Field Dynamics*) (UMEZAWA; MATSUMOTO; TACHIKI, 1982), o método de Matsubara (MATSUBARA, 1955) e o caminho de tempo fechado (ou do inglês, *Closed-time path*, CTP) (KELDYSH, 2024) são os mais promissores (GOZZI; PENCO, 2011). O formalismo de Matsubara consiste em considerar um tempo imaginário. O CTP, por sua vez, trata sistemas quânticos fora do equilíbrio. Neste trabalho, vamos focar na TFD, que será utilizada para calcular o espalhamento Compton gravitacional. A TFD é um formalismo que introduz efeitos térmicos em teoria quântica de campos, descrevendo estados térmicos como sendo superposições de estados de vácuo convencionais. Os mesmos são escritos em termos de um espaço de Hilbert duplicado, bem como de operadores criação e aniquilação redefinidos via transformação de Bogoliubov. Postulado por H. Umezawa, H. Matsumoto e M. Tachiki, a TFD descreve sistemas em equilíbrio térmico por meio de técnicas desenvolvidas em teoria quântica de campos à temperatura zero (UMEZAWA; MATSUMOTO; TACHIKI, 1982).

Este capítulo tem como objetivo discutir os principais conceitos referentes ao formalismo da TFD (KHANNA, 2009). Apesar dos experimentos envolvendo a interação entre partículas serem à temperatura zero, na natureza os efeitos térmicos estão presentes. Logo, é essencial analisar como esses efeitos ocorrem. Num primeiro instante, vamos analisar, de maneira breve, como ocorre a construção do formalismo, com foco em desenvolver métodos para resolver processos, como espalhamentos, que é o foco deste trabalho. Além disso, vamos encontrar uma estrutura para o propagador térmico do campo fermiônico, parâmetro fundamental em física de partículas.

3.1 Formalismo geral da teoria

Como mencionado anteriormente, a TFD é construída a partir da duplicação do espaço de Hilbert convencional. Esse formalismo é crucial, pois permite descrever sistemas em equilíbrio térmico (UMEZAWA; MATSUMOTO; TACHIKI, 1982). Além da duplicação do espaço, é necessário redefinir os operadores de criação e aniquilação, que passam a ser descritos por meio das transformações de Bogoliubov (KHANNA, 2009), garantindo o funcionamento adequado da teoria. O novo espaço duplicado é caracterizado por $S_T = S \otimes \tilde{S}$. Vamos chamar S , que é o espaço usual de Hilbert, de espaço não-til, e, consequentemente, \tilde{S} de espaço til. O espaço til existe apenas para manter a simetria do sistema, fazendo com que todos os observáveis físicos existam apenas no espaço não-til.

3.1.1 O vácuo térmico

Em mecânica quântica, o estado fundamental é definido como o estado de vácuo $|0\rangle$. De maneira análoga, na TFD, é necessário fazer uma consideração similar, definindo um estado térmico fundamental, conhecido como estado de vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$, onde $\beta = 1/k_B T$, sendo k_B a constante de Boltzmann e T a temperatura. Um operador Q , em equilíbrio térmico, vai possuir o seguinte valor médio,

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \{ e^{-\beta H} Q \}, \quad (3.1)$$

onde $Z(\beta)$ é a função de partição de ensembles, contendo todas as informações sobre os efeitos térmicos do sistema. Em termos dos operadores, a equação de Schrödinger independente do tempo, $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, nos permite escrever que

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|Q|n\rangle. \quad (3.2)$$

Para construir um estado de vácuo térmico, devemos analisar se o mesmo vale para o espaço de Hilbert convencional, ou seja, supondo que,

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|0(\beta)\rangle = \sum_n g_n(\beta) |n\rangle. \quad (3.3)$$

Logo, o valor esperado do operador Q , no vácuo térmico, será escrito como

$$\langle 0(\beta) | Q | 0(\beta) \rangle = \sum_{n,m} g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n | Q | m \rangle, \quad (3.4)$$

onde isso implica que o parâmetro $g_m(\beta)$ obedeça a seguinte condição quando comparado à (3.2),

$$g_n^*(\beta) g_m(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n} \delta_{n,m}. \quad (3.5)$$

Essa relação não vale para *c-numbers*¹. Portanto, o vácuo térmico não pode ser descrito como um elemento pertencente ao espaço de Hilbert, pois, de forma análoga às condições de ortogonalidade, o termo $g_m(\beta)$ precisa ser um elemento desse espaço vetorial. Como solução, é necessário realizar uma duplicação no espaço de Hilbert. Para isso, faz-se o produto dos espaços, de modo que os vetores da base sejam dados por $|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle$, onde $g_m(\beta) = f_m(\beta) |\tilde{m}\rangle$. Como mencionado, a partir de agora chamaremos de "til" e "não-til" os termos referentes ao espaço de Hilbert til e convencional, respectivamente. Nesse novo formalismo, podemos assumir que o operador Q atua apenas no espaço não-til, o qual representa o espaço de medida, fazendo com que a média seja

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | Q | 0(\beta) \rangle &= \sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n, \tilde{n} | Q | m, \tilde{m} \rangle \\ &= \sum_n f_n^*(\beta) f_n(\beta) \langle n | Q | n \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Portanto, temos agora que $f_n^*(\beta) f_n(\beta) = Z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_n}$, o que faz com que o estado de vácuo térmico se torne

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle, \quad (3.7)$$

onde a solução $f_n(\beta) = Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta E_n/2}$, foi utilizada. É importante reforçar que o espaço til é análogo ao espaço não til, porém os objetos de medida que estudamos estão em sua totalidade representados no espaço convencional.

Assim, a duplicação do espaço de Hilbert surge naturalmente da necessidade de escrever o vácuo térmico. Dito isso, para valer a construção do espaço neste formalismo, o operador Q vai obedecer as seguintes regras de conjugação

$$(Q_i Q_j)^\sim = \tilde{Q}_i \tilde{Q}_j; \quad (3.8)$$

$$(c Q_i + Q_j)^\sim = c^* \tilde{Q}_i + \tilde{Q}_j; \quad (3.9)$$

$$(Q_i^\dagger)^\sim = (\tilde{Q}_i)^\dagger; \quad (3.10)$$

$$(\tilde{Q}_i)^\sim = \pm Q_i; \quad (3.11)$$

¹ *c-numbers* refere-se a números reais e complexos, diferenciando-os dos *q-numbers* (operadores quânticos) na mecânica quântica.

Como consequência da construção do espaço, é necessário também redefinir os operadores dos campos. As transformações de Bogoliubov surgem para mostrar como os operadores independentes da temperatura podem ser escritos em termos de novos operadores dependentes de β ou vice-versa.

3.1.2 Transformações de Bogoliubov

Se para construir uma álgebra térmica houve a necessidade de duplicar o espaço de Hilbert, então é de se imaginar que devemos analisar também como ocorre a mudança dos operadores em campos quânticos. De fato, com a duplicação do espaço, vamos ter dois pares de operadores criação e aniquilação, cada um associado a um espaço, e os mesmos são escritos em termos dos novos operadores térmicos. Para descrever esses operadores em termos do espaço térmico, utilizamos as transformações de Bogoliubov. Podemos definir a seguinte notação para o operador Q , nesta notação dobrada,

$$Q^a = \begin{pmatrix} Q \\ \tilde{Q}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

onde $a = 1, 2$ é o elemento da matriz. Esse operador vai se transformar através da relação $Q^a = M^{ab}(\beta)Q_b(\beta)$, na qual $Q_b(\beta)$ representa o mesmo operador no espaço térmico. A matriz $M^{ab}(\beta)$ vai possuir diferentes estruturas dependendo da partícula associada. Para férmions, podemos escreve-la como

$$M^{ab}(\beta) = \begin{pmatrix} U(\beta), V(\beta) \\ -V(\beta), U(\beta) \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

onde $U^2(\beta) = 1 - f(\beta)$ e $V^2(\beta) = f(\beta)$ são funções térmicas e $f(\beta)$ a distribuição de Fermi-Dirac, $f(\beta) = 1/(e^{\beta p_0} + 1)$. A mesma análise pode ser feita para bósons, na qual temos que

$$M^{ab}(\beta) = \begin{pmatrix} U'(\beta), V'(\beta) \\ V'(\beta), U'(\beta) \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

onde temos que $U'^2(\beta) = 1 + n(\beta)$ e $V'^2(\beta) = n(\beta)$, e $n(\beta)$, por sua vez, representa a distribuição de Bose-Einstein, sendo escrita como $n(\beta) = 1/(e^{\beta k_0} - 1)$. Para melhor compreensão, de forma explícita, as transformações de Bogoliubov serão dadas por

$$\begin{aligned} b_{s,p} &= U(\beta)b_{s,p}(\beta) + V(\beta)\tilde{b}_{s,p}^\dagger(\beta), \\ \tilde{b}_{s,p} &= U(\beta)\tilde{b}_{s,p}(\beta) - V(\beta)b_{s,p}^\dagger(\beta), \\ b_{s,p}^\dagger &= U(\beta)b_{s,p}^\dagger(\beta) + V(\beta)\tilde{b}_{s,p}(\beta), \\ \tilde{b}_{s,p}^\dagger &= U(\beta)\tilde{b}_{s,p}^\dagger(\beta) - V(\beta)b_{s,p}(\beta), \end{aligned} \quad (3.15)$$

para férmions, e

$$\begin{aligned}
a_{\lambda,k} &= U'(\beta)a_{\lambda,k}(\beta) + V'(\beta)\tilde{a}_{\lambda,k}^\dagger(\beta), \\
\tilde{a}_{\lambda,k} &= U'(\beta)\tilde{a}_{\lambda,k}(\beta) + V'(\beta)a_{\lambda,k}^\dagger(\beta), \\
a_{\lambda,k}^\dagger &= U'(\beta)a_{\lambda,k}^\dagger(\beta) + V'(\beta)\tilde{a}_{\lambda,k}(\beta), \\
\tilde{a}_{\lambda,k}^\dagger &= U'(\beta)\tilde{a}_{\lambda,k}^\dagger(\beta) + V'(\beta)a_{\lambda,k}(\beta),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

para bósons. Aqui, $p(k)$ e $s(\lambda)$ representam os momentos e os spins/polarizações dos férmions(bósons), respectivamente. Além disso, os operadores térmicos fermiônicos obedecem a seguinte relação de anticomutação

$$\{b_{s,p}(\beta), b_{s',p'}^\dagger(\beta)\} = \{\tilde{b}_{s,p}(\beta), \tilde{b}_{s',p'}^\dagger(\beta)\} = (2\pi)^3 \delta_{s,s'} \delta^3(p - p'). \tag{3.17}$$

Os operadores bosônicos, por sua vez, seguem a relação de comutação

$$[a_{\lambda,k}(\beta), a_{\lambda',k'}^\dagger(\beta)] = [\tilde{a}_{\lambda,k}(\beta), \tilde{a}_{\lambda',k'}^\dagger(\beta)] = (2\pi)^3 \delta_{k,k'} \delta^3(k - k'). \tag{3.18}$$

Comutar ou anticomutar elementos de espaços diferentes resulta em zero. Logo, podemos generalizar dizendo que qualquer relação não explícita anteriormente será nula. Ademais, note que quando atuarmos tais parâmetros em processos físicos, como espalhamentos por exemplo, teremos uma dobra na quantidade de termos para calcular. Isso ocorre, pois agora teremos elementos de um novo espaço contidos nas definições. Porém, vale ressaltar que os objetos de medida estão contidos no espaço não til. Dito isso, na próxima seção vamos calcular o propagador fermiônico, que será utilizado posteriormente para calcular o espalhamento Compton gravitacional à temperatura finita.

3.2 Cálculo do propagador dos férmions

Nesta seção, vamos examinar outra quantidade de extrema importância na TFD: o propagador térmico. Para analisar um processo em que o pósitron atua como partícula intermediadora, o cálculo do propagador térmico dos férmions é essencial para uma descrição precisa. Diferente do propagador convencional, à temperatura zero, o propagador térmico vai depender não só dos momentos do sistema como também da dependência térmica dos mesmos. Por definição, os propagadores fermiônicos são as amplitudes de probabilidade de um férmion ser criado num ponto x , se propagar até um ponto y e ser aniquilado. Existem boas descrições do propagador térmico para o campo fermiônico (CABRAL; SANTOS; KHANNA, 2023; SANTOS; KHANNA, 2016b), então vamos abordar apenas os principais pontos para encontrar tal parâmetro. No formalismo da TFD, o propagador térmico será dado por

$$\begin{aligned}
\Delta^{ab}(x - y) &= -i \langle 0(\beta) | \tau[\psi^a(x) \bar{\psi}^b(y)] | 0(\beta) \rangle \\
&= -i \left[\Theta(x^0 - y^0) \langle 0(\beta) | \psi^a(x) \bar{\psi}^b(y) | 0(\beta) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \Theta(y^0 - x^0) \langle 0(\beta) | \bar{\psi}^a(y) \psi^b(x) | 0(\beta) \rangle \right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Aqui, τ é o operador de ordenamento temporal, $a, b = 1, 2$ são os elementos da matriz que representam o espaço duplicado, e Θ é a função degrau de Heaviside, que é zero para argumentos negativos e um para argumentos positivos. Podemos escrever o propagador, que está no espaço de posição, em termos do espaço de momento (q) por meio de uma transformação de Fourier. Optamos por utilizar o símbolo q para representar o momento, pois posteriormente lidaremos com interações envolvendo outros férmions. Assim, teremos que

$$\Delta^{ab}(x - y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-y)} \Delta^{ab}(q). \quad (3.20)$$

Podemos expressar o propagador $\Delta^{ab}(q)$ como

$$\Delta^{ab}(q) = \int d^4(z) e^{-iq(z)} \Delta^{ab}(z), \quad (3.21)$$

onde $z = x - y$. Substituindo a Eq. (3.19) em Eq. (3.21), obtemos que

$$\Delta(q) = - \int d^4 z e^{iqz} i \left[\Theta(z^0) \langle 0(\beta) | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0(\beta) \rangle - \Theta(-z^0) \langle 0(\beta) | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0(\beta) \rangle \right], \quad (3.22)$$

onde usamos que $a = b = 1$, $\psi^1 = \psi$ e $\Delta^{11}(q) = \Delta(q)$. Fazemos essa consideração porque o termo 1, 1 das matrizes está diretamente relacionado ao espaço usual de Hilbert. Em outras palavras, as quantidades físicas mensuráveis pertencem ao espaço não-til, representado pelos elementos 1, 1. Os campos fermiônicos são dados por,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \sum_s \left[u_q^{(s)} b_{s,q} e^{-iqx} + v_q^{(s)} c_{s,q}^\dagger e^{iqx} \right], \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \sum_s \left[\bar{u}_q^{(s)} b_{s,q}^\dagger e^{iqx} + \bar{v}_q^{(s)} c_{s,q} e^{-iqx} \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $u(v)$ é o espinor de Dirac de partícula (antipartícula). Além disso, b e b^\dagger (c e c^\dagger) são os operadores criação e aniquilação dos férmions (anti férmions), respectivamente. Ademais, s é o spin e q representa o momento da partícula. Com isso, conseguimos calcular a média dos operadores no vácuo térmico, isto é,

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0(\beta) \rangle &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \frac{1}{\sqrt{2q'_0}} \\ &\times \sum_{s,s'} \left[u_q^{(s)} \bar{u}_{q'}^{(s')} e^{-i(qx-q'y)} \langle 0(\beta) | b_{s,q} b_{s',q'}^\dagger | 0(\beta) \rangle \right. \\ &\left. + v_q^{(s)} \bar{v}_{q'}^{(s')} e^{i(qx-q'y)} \langle 0(\beta) | c_{s,q}^\dagger c_{s',q'} | 0(\beta) \rangle \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

e

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0(\beta) \rangle &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \frac{1}{\sqrt{2q'_0}} \\ &\times \sum_{s,s'} \left[u_q^{(s)} \bar{u}_{q'}^{(s')} e^{i(q'y-qx)} \langle 0(\beta) | b_{s',q'}^\dagger b_{s,q} | 0(\beta) \rangle \right. \\ &\left. + v_q^{(s)} \bar{v}_{q'}^{(s')} e^{-i(q'y-qx)} \langle 0(\beta) | c_{s',q'}^\dagger c_{s,q} | 0(\beta) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Utilizando as transformações de Bogoliubov apresentadas anteriormente, Eq. (3.15), bem como as relações de completiza

$$\begin{aligned}\sum_s u_q^{(s)} \bar{u}_q^{(s)} &= (\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m), \\ \sum_s v_q^{(s)} \bar{v}_q^{(s)} &= (\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m),\end{aligned}\quad (3.26)$$

obtemos que os valores médio dos campos podem ser escritos como

$$\begin{aligned}\langle 0(\beta) | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0(\beta) \rangle &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left[U^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m) e^{-iEz^0} e^{iq^j z_j} \right. \\ &\quad \left. + V^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m) e^{iEz^0} e^{-iq^j z_j} \right],\end{aligned}\quad (3.27)$$

e

$$\begin{aligned}\langle 0(\beta) | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0(\beta) \rangle &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left[V^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m) e^{-iEz^0} e^{iq^j z_j} \right. \\ &\quad \left. + U^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m) e^{iEz^0} e^{-iq^j z_j} \right],\end{aligned}\quad (3.28)$$

onde q_j é o momento da partícula e $E^2 = \vec{q}^2 + m^2$ devido a conservação de energia. Logo, substituir a Eq. (3.27) e Eq. (3.28) em Eq. (3.22) nos resulta em

$$\begin{aligned}\Delta(q') &= - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \int dz^0 d^3 z e^{iq'z} i \left\{ \Theta(z^0) \left[U^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m) e^{-iEz^0} e^{iq^j z_j} \right. \right. \\ &\quad \left. + V^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m) e^{iEz^0} e^{-iq^j z_j} \right] - \Theta(-z^0) \left[V^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m) e^{-iEz^0} e^{iq^j z_j} \right. \\ &\quad \left. \left. + U^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m) e^{iEz^0} e^{-iq^j z_j} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Utilizando propriedades da função delta de Dirac, isto é, $\int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} e^{\pm i q(a-b)} = \delta^n(a-b)$, podemos reescrever a equação anterior em termos deste parâmetro, ou seja,

$$\begin{aligned}\Delta(q') &= - \int d^3 q \frac{1}{2E} \int dz^0 d^3 z e^{iq'_0 z^0} i \left\{ \Theta(z^0) \left[U^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m) e^{-iEz^0} \delta^3(q - q') \right. \right. \\ &\quad \left. + V^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m) e^{iEz^0} \delta^3(q + q') \right] - \Theta(-z^0) \left[V^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m) e^{-iEz^0} \right. \\ &\quad \left. \left. \times \delta^3(q - q') + U^2(\beta) (\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m) e^{iEz^0} \delta^3(q + q') \right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Resolvendo a integral em q , e renomeando $q' \rightarrow q$, vamos obter as seguintes expressões para o propagador,

$$\begin{aligned}\Delta(q) &= - \int_0^\infty dz^0 i \left[U^2(\beta) \frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m}{2E} e^{-i(E-q_0)z^0} + V^2(\beta) \frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m}{2E} e^{i(E+q_0)z^0} \right] \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 dz^0 i \left[V^2(\beta) \frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m}{2E} e^{-i(E-q_0)z^0} + U^2(\beta) \frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m}{2E} e^{i(E+q_0)z^0} \right].\end{aligned}\quad (3.31)$$

Para resolver a integral em z , podemos utilizar as seguintes relações

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty dz^0 e^{-i(E-q_0-i\eta)z^0} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{i}{q_0 - E + i\eta}, \quad (3.32)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^0 dz^0 e^{i(E+q_0-i\eta)z^0} = - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{i}{q_0 + E - i\eta}, \quad (3.33)$$

que nos resulta em um propagador escrito na forma

$$\begin{aligned} \Delta(q) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[U^2(\beta) \frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m}{2E} \frac{1}{q_0 - E + i\eta} + V^2(\beta) \frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m}{2E} \frac{1}{q_0 + E + i\eta} \right] \\ &+ \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[V^2(\beta) \frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m}{2E} \frac{1}{q_0 - E - i\eta} + U^2(\beta) \frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j - m}{2E} \frac{1}{q_0 + E - i\eta} \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para considerarmos todos os elementos da matriz, o mesmo procedimento pode ser realizado levando em consideração os parâmetros a e b , resultando em

$$\begin{aligned} \Delta^{ab}(q) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m}{2E} \right) [M(q_0)(q_0 - E + i\eta\tau)^{-1} M^\dagger(q_0)]^{ab} \\ &+ \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\gamma^0 E + \gamma^j q_j - m}{2E} \right) [M(-q_0)(q_0 + E + i\eta\tau)^{-1} M^\dagger(-q_0)]^{ab}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde M é o elemento de matriz que relaciona as funções térmicas,

$$M^{ab}(\beta) = \begin{pmatrix} U(\beta) & V(\beta) \\ -V(\beta) & U(\beta) \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

e

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Se substituirmos os termos que acompanham as matrizes M e resolvermos essas expressões, termos nulos irão surgir, resultando em divergências na matriz. Para contornar esse problema, vamos redefinir os termos a seguir utilizando as regras de corte (ZHOU, 2005)(REMIDDI, 2018). Logo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_0 - E + i\eta} &= \frac{1}{q_0 - E} - \pi i \delta(q_0 - E); \\ \frac{1}{q_0 - E - i\eta} &= \frac{1}{q_0 - E} + \pi i \delta(q_0 - E). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Substituindo ambos os termos na Eq. (3.35), vamos encontrar a seguinte relação,

$$\begin{aligned} M(q_0)(q_0 - E + i\eta\tau)^{-1} M^\dagger(q_0) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{q_0 - E + i\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_0 - E - i\eta} \end{pmatrix} \\ &+ 2\pi i \delta(q_0 - E) f(q_0) \begin{pmatrix} 1 & e^{\beta q_0/2} \\ e^{\beta q_0/2} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

e

$$M(-q_0)(q_0 + E + i\eta\tau)^{-1}M^\dagger(-q_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{q_0 + E + i\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_0 + E - i\eta} \end{pmatrix} + 2\pi i\delta(q_0 + E)f(q_0) \begin{pmatrix} -1 & e^{\beta q_0/2} \\ e^{\beta q_0/2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Assim, a Eq. (3.35) se torna

$$\begin{aligned} \Delta(q) &= \left(\frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m}{2E} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{q_0 - E + i\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_0 - E - i\eta} \end{pmatrix} + \left(\frac{\gamma^0 E + \gamma^j q_j - m}{2E} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{q_0 + E + i\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_0 + E - i\eta} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{2\pi i}{(e^{\beta q_0} + 1)} \left[\frac{(\gamma^0 E - \gamma \cdot \vec{q} + m)}{2E} \Delta_1 \delta(q_0 - E) + \frac{(\gamma^0 E + \gamma \cdot \vec{q} - m)}{2E} \Delta_2 \delta(q_0 + E) \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & e^{\beta q_0/2} \\ e^{\beta q_0/2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} -1 & e^{\beta q_0/2} \\ e^{\beta q_0/2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Portanto, a Eq. (3.41) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\Delta(q) = S^{(0)}(q) + S^{(\beta)}(q), \quad (3.43)$$

onde o primeiro termo é o propagador a temperatura zero e o segundo representa a contribuição térmica. Podemos reescrever o primeiro termo na eq. (3.41) como

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\gamma^0 E - \gamma^j q_j + m}{2E} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{q_0 - E + i\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_0 - E - i\eta} \end{pmatrix} + \left(\frac{\gamma^0 E + \gamma^j q_j - m}{2E} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{q_0 + E + i\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_0 + E - i\eta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Assim, o propagador fermiônico à temperatura finita, representado na eq. (3.43), se torna

$$\begin{aligned} \Delta(q) &= S^{(0)}(q) + S^{(\beta)}(q) \\ &= \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \\ &+ \frac{2\pi i}{(e^{\beta q_0} + 1)} \left[\frac{(\gamma^0 E - \gamma \cdot \vec{q} + m)}{2E} \Delta_1 \delta(q_0 - E) + \frac{(\gamma^0 E + \gamma \cdot \vec{q} - m)}{2E} \Delta_2 \delta(q_0 + E) \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Este propagador é utilizado para calcular espalhamentos nos quais o férmion é a partícula intermediadora. Note que, ao tomarmos o limite de temperatura zero, ou seja, $\beta \rightarrow \infty$, o segundo termo do propagador se torna nulo, resultando apenas no propagador à temperatura zero. Assim, podemos afirmar que o propagador à temperatura zero é um caso particular do propagador geral a temperatura finita.

No início da seção, vimos que devemos considerar o primeiro elemento da matriz. Portanto, apesar de ser uma matriz que mistura os espaços til e não-til, podemos focar apenas nos termos do espaço de medida, ou seja, o espaço não-til, justificando a escolha de $a = b = 1$ para a matriz resultante. No próximo capítulo, vamos abordar algumas formalidades relacionadas aos processos de espalhamento, além da estrutura da matriz espalhamento. Ademais, calcularemos o espalhamento Compton gravitacional à temperatura finita, utilizando o propagador aqui calculado para descrever a interação nesse processo.

4 ESPALHAMENTO COMPTON GRAVITACIONAL

Esse capítulo é dedicado exclusivamente ao estudo do espalhamento Compton gravitacional. Esta abordagem é feita considerando tanto o caso à temperatura zero, bem como a análise à temperatura finita, utilizando os conceitos prévios do formalismo TFD.

O espalhamento Compton é interessante porque permite analisar como ocorre a interação entre férmions e fótons, além de examinar a conservação de energia, momento e a seção de choque. Também é possível utilizar a TFD para estudar os efeitos térmicos nesse processo (CABRAL; SANTOS, 2023). De forma similar, podemos aplicar a GEM para descrever esse espalhamento, substituindo o fóton por um gráviton. Nesse caso, o processo envolve um gráviton interagindo com um férmion, onde o pósitron atua como partícula mediadora. Esse estudo possibilita comparar a GEM com a QED, destacando as diferenças entre as seções de choque e outras questões relevantes. Além disso, nesse contexto, vamos utilizar os campos dos férmions e da GEM para calcular a interação. Logo, relembrando as eqs. em (3.23), para férmions, temos que,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \sum_s \left[u_q^{(s)} b_{s,q} e^{-iqx} + v_q^{(s)} c_{s,q}^\dagger e^{iqx} \right], \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} \sum_s \left[\bar{u}_q^{(s)} b_{s,q}^\dagger e^{iqx} + \bar{v}_q^{(s)} c_{s,q} e^{-iqx} \right].\end{aligned}\quad (4.1)$$

De forma análoga, o campo da GEM será escrito como

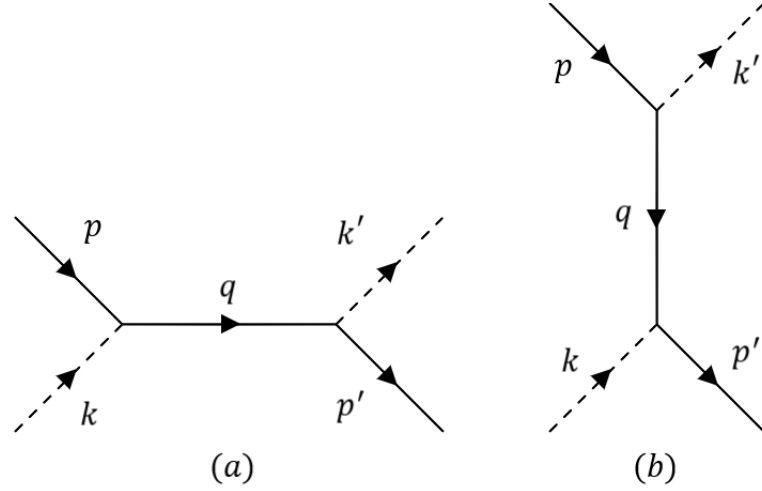
$$A_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} \sum_\lambda \epsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)} \left(a_{\lambda,k} e^{-ikx} + a_{\lambda,k}^\dagger e^{ikx} \right), \quad (4.2)$$

onde k e ω_k são o momento e a frequência angular do gráviton, respectivamente, $\epsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ representa o tensor de polarização da GEM, com λ sendo a própria polarização, e a (a^\dagger) definindo os operadores aniquilação (criação) do gráviton.

A análise do espalhamento Compton gravitacional é feita calculando a amplitude de transição, que é um parâmetro muito importante em física de partículas e está relacionado diretamente com a probabilidade da interação ocorrer. Como resultado, conseguimos calcular a seção de choque do sistema, onde esta, por sua vez, nos descreve como ocorre a interação em uma certa região. O diagrama de Feynman que descreve essa interação está ilustrado na Figura 1.

Na primeira metade do capítulo, faremos uma breve discussão sobre seção de choque e matriz de espalhamento, que são quantidades essenciais em física de partículas. Em seguida, aprofundaremos no espalhamento Compton gravitacional, começando pelos

Figura 1 – Diagrama de Feynman para o espalhamento Compton gravitacional. O diagrama (a) representa o que chamamos de diagrama tipo- s e (b), por sua vez, descreve o diagrama tipo- t .



cálculos no contexto sem temperatura, passando detalhadamente por cada etapa. Posteriormente, introduziremos efeitos térmicos utilizando a TFD, onde observaremos que o formalismo gera equações mais complexas. Ainda assim, apresentaremos todos os detalhes e contribuições. Finalizaremos o capítulo discutindo os resultados e possíveis direções para entender o espalhamento de forma mais completa.

4.1 Conceitos fundamentais sobre seção de choque e a matriz espalhamento

Ao estudar fenômenos que envolvem a interação entre partículas fundamentais, é essencial utilizar ferramentas adequadas para descrever esses comportamentos. No nível da mecânica quântica, essas interações são descritas por um formalismo baseado em uma teoria probabilística. Portanto, o arcabouço matemático usado para descrever essas interações deve respeitar esse formalismo. No contexto de processos de espalhamento, as ferramentas necessárias para calcular a interação entre partículas são a amplitude de transição, a matriz de espalhamento e a seção de choque. Cada uma delas é expressa em termos da probabilidade de uma determinada interação ocorrer, com suas respectivas descrições matemáticas, nas quais uma depende da outra. Nesta seção, apresentaremos os conceitos dessas quantidades, relacionando-os e descrevendo como podemos analisar essas interações.

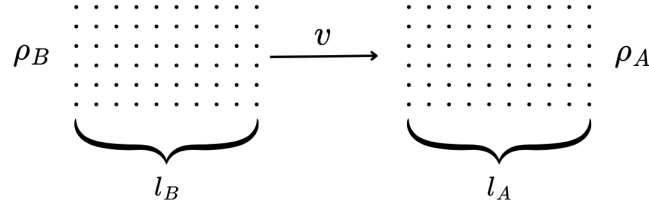
4.1.1 Uma breve introdução à seção de choque

A seção de choque é o parâmetro experimental que mede a probabilidade de uma certa interação ocorrer em um sistema com um conjunto de partículas. Imagine a seção de

choque como sendo a colisão de dois feixes acelerados, onde ao interagirem ambos serão espalhados. A probabilidade para esta colisão ocorrer, será proporcional a sua seção de choque. A grosso modo, seção de choque diferencial é a área na qual um fluxo de partículas espalhadas passam, e esse fluxo está diretamente relacionado a uma região descrita por um ângulo sólido $d\Omega$. No contexto deste trabalho, ao analisar as particularidades do espalhamento Compton gravitacional, estaremos fazendo uma descrição da probabilidade de uma interação gráviton-férmion ocorrer em uma região. A seção de choque é expressa em unidades de área, mais especificamente em *barns* ($1\text{barn} = 10^{-24}\text{cm}^2$). Também é possível escrever a seção de choque em termos do volume e da massa, ou seja, $1/\text{cm}$ e cm^2/g , respectivamente.

Considere um conjunto de partículas alvo A , em repouso, com densidade ρ_A e comprimento l_A . Em direção a este alvo, há um conjunto de partículas B , com densidade ρ_B , comprimento l_B e velocidade v , como mostra a Figura 2 (PESKIN, 2018).

Figura 2 – Conjunto de partículas do tipo A (direita) e do tipo B (esquerda), com suas respectivas densidades e comprimentos do conjunto.



Esperamos que o número de espalhamentos seja proporcional aos parâmetros que constituem os conjuntos. Portanto, a seção de choque σ para este sistema será a razão do número total de espalhamentos e das quantidades que os constituem:

$$\sigma \equiv \frac{N_e}{\rho_A l_A \rho_B l_B \mathbb{A}}, \quad (4.3)$$

onde \mathbb{A} é a área efetiva da seção de choque comum aos dois conjuntos. Essa definição é simétrica para ambas as regiões, ou seja, é análoga a considerar B em repouso ou trabalhar em outro referencial. Os feixes formados pelas partículas não serão constantes, mas vamos considerar que a região de interação, bem como a largura do pacote de onda, são pequenas em comparação ao diâmetro do feixe. Assim, podemos considerar ρ_A e ρ_B como constantes e lembrar que, ao analisar em um acelerador de partículas, devemos considerar uma integral sobre toda a área do feixe, isto é,

$$N_e = \sigma l_A l_B \int d^2x \rho_A(x) \rho_B(x). \quad (4.4)$$

Assumindo densidades constantes, ou calculando a área efetiva dos feixes, a equação anterior se resume a

$$N_e = \frac{\sigma N_A N_B}{\mathbb{A}}, \quad (4.5)$$

onde N_A e N_B são os números totais de partículas em A e B , respectivamente.

O formalismo apresentado é uma visão mais geral, clássica, de como ocorre a seção de choque em sistemas de partículas. Contudo, o intuito deste trabalho é descrever processos físicos levando em conta parâmetros quânticos. Na próxima seção vamos estudar como obter a seção de choque em termos dos estados iniciais e finais de partículas. Assim, a nível fundamental, podemos analisar diferentes tipos de processos, como espalhamento Compton (CABRAL; SANTOS, 2023), espalhamento elétron-pósitron (SOUZA et al., 2019), espalhamento Möller (SANTOS; KHANNA, 2019), etc. Além disso, em experimentos, geralmente especificamos o momento das partículas presentes no sistema a fim de estudar os processos em questão. Dessa forma, teremos uma seção de choque que descreverá a interação entre partículas com estados finais caracterizados no espaço de momento. Ao fazer isso, a seção de choque assume uma estrutura infinitesimal. Para contornar isso, definimos a seção de choque diferencial em termos dos respectivos momentos e integramos sobre todo o espaço, respeitando a conservação do 4-momento do sistema. No caso em que analisamos apenas duas partículas, as únicas componentes não restritas do momento serão descritas pelos ângulos de espalhamento θ e ϕ de uma delas.

4.1.2 A matriz espalhamento S

Tendo feito uma introdução mais casual da seção de choque, podemos realizar a seguinte pergunta: Como calcular σ para processos de espalhamento em termos dos estados finais e iniciais das partículas? Para responder esta pergunta, devemos primeiro construir a ideia de "matriz espalhamento". Matriz espalhamento S , matriz S ou S -matrix, do inglês, é uma ferramenta que relaciona os estados de partículas interagentes no espaço de Hilbert. Em outras partículas, ela é responsável por nos dizer como os campos das partículas interagem e como podemos utilizar tais informações para analisar os diagramas de Feynman do processo (PESKIN, 2018).

Todo processo físico pode ser considerado como sendo a transição de um estado inicial, para um estado final, representados como $|i\rangle$ e $|f\rangle$, respectivamente. Essa transição de um estado para outro, é caracterizada diretamente por um operador unitário S . Em outras palavras, no contexto de teoria quântica de campos, a matriz S é representada como o termo que conecta os estados de partícula livre em um sistema no espaço de Hilbert. Este parâmetro pode ser definido em qualquer espaço solucionável, como o espaço de Minkowski, por exemplo. Podemos definir a matriz S como

$$S^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \tau[\mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2) \dots \mathcal{L}_I(x_n)], \quad (4.6)$$

com τ sendo o operador ordenamento temporal e \mathcal{L}_I a Lagrangiana de interação. Para o espalhamento Compton gravitacional, por exemplo, que descreve a interação gráviton-férmion a Lagrangiana de interação será dada por (2.25).

Nas próximas seções, vamos mostrar como ocorre a atuação do operador S em conjunto dos estados assintóticos finais e iniciais. Além disso, é importante ressaltar que, a fim de estudar a interação entre grávitons e férmions via espalhamento Compton gravitacional, em conjunto com introdução de efeitos térmicos no sistema, é necessário que a análise seja feita no que chamamos à nível de árvore (ou *tree level*, do inglês). Esta escolha considera apenas interações do tipo $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$, ou seja, duas partículas que entram, interagem entre si, e saem. Fazemos essa consideração selecionando o termo de segunda ordem do operador $S^{(n)}$. Logo, o termo $S^{(2)}$ estará descrevendo justamente o que queremos encontrar numa interação entre duas partículas. De forma geral, utilizar a primeira ordem nos resulta em decaimento de partícula, que não é o foco deste trabalho. Ademais, considerar ordem superiores a 2 faz com que surjam os efeitos de loop, que são correções quânticas das interações entre partículas (CASCIOLI; MAIERHÖFER; POZZORINI, 2012; ARKANI-HAMED et al., 2023). Como o foco deste trabalho é descrever espalhamento Compton gravitacional com efeito térmicos, não é nosso objetivo se aprofundar em tal natureza.

4.2 Espalhamento Compton gravitacional à temperatura zero

Como dito anteriormente, uma das quantidades mais importante em física de partículas é a amplitude de transição \mathcal{M} . Ela descreve a probabilidade de uma certa interação ocorrer, sendo escrita em termos da matriz espalhamento $S^{(n)}$ e dos estados assintóticos $|f\rangle$ e $|i\rangle$. Logo, podemos escrever que a amplitude de transição é escrita como

$$\mathcal{M} = \langle f | S^{(n)} | i \rangle. \quad (4.7)$$

A matriz espalhamento $S^{(n)}$, por sua vez, será dada por

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \tau[\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2) \dots \mathcal{L}(x_n)]. \quad (4.8)$$

Para estudar espalhamento Compton gravitacional utilizando o formalismo da TFD, é necessário considerar o termo de segunda ordem da matriz espalhamento, que é escrito como

$$S^{(2)} = -\frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y \tau[\mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y)]. \quad (4.9)$$

Os estados assintóticos finais e iniciais, são escritos como

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |e_i, g_i\rangle = b_{s,p}^\dagger a_{\lambda,k}^\dagger |0\rangle; \\ |f\rangle &= |e_f, g_f\rangle = b_{s',p'}^\dagger a_{\lambda',k'}^\dagger |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde e_i , e_f , g_i e g_f representam os estados iniciais e finais do elétron e do gráviton, respectivamente. Esses estados estão relacionados diretamente com o processo que queremos analisar. Os mesmos descrevem as partículas iniciais e finais do sistema. Como queremos

estudar o espalhamento Compton gravitacional à nível de árvore, as partículas iniciais e finais obrigatoriamente serão um elétron e um gráviton. A Lagrangiana de interação gráviton-férmion, por sua vez, será dada por (2.25). Com estes parâmetros em mãos, podemos substituí-los na amplitude de transição e resolve-la.

4.2.1 Cálculo da amplitude de transição à temperatura zero

O cálculo de \mathcal{M} é longo, então vamos realizá-lo por partes. Vale ressaltar que vamos trabalhar em unidades de Planck, ou seja, $\hbar = c = 1$. Ademais, vamos acrescentar um termo multiplicativo de 2 na conta devido ao fator de simetria dos diagramas. Essa representação nos indica que os diagramas são simétricos, ou seja, os processos de espalhamento inversos são análogos àqueles na trajetória convencional. Dito isso, vamos começar primeiro pela multiplicação das lagrangianas de interação contidas no operador $\hat{S}^{(2)}$ em (4.8), ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I(x)\mathcal{L}_I(y) &= - \frac{\kappa^2}{8} A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi} (\bar{\psi}_x \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x - \partial^\mu \bar{\psi}_x \gamma^\nu \psi_x) (\bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y - \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y) \\ &= - \frac{\kappa^2}{8} A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi} [\bar{\psi}_x \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y - \bar{\psi}_x \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y \\ &\quad - \partial^\mu \bar{\psi}_x \gamma^\nu \psi_x \bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y + \partial^\mu \bar{\psi}_x \gamma^\nu \psi_x \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y].\end{aligned}\quad (4.11)$$

Podemos dividir (4.11) de tal forma que teremos duas equações representando férmions e antiférmions com energia positiva e negativa, respectivamente, ou seja, podemos escrever $\psi = \psi^+ + \psi^-$ e $\bar{\psi} = \bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-$ de tal forma que o sinal positivo e negativo contido nos índices representam a energia correspondente. Em outras palavras, utilizando as equações (3.23) e (4.2), respectivamente, para os campos de férmions, temos que

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_x^- &= \int d^3p N_p \sum_s \bar{u}_p^{(s)} b_{s,p}^\dagger e^{ipx} \\ \psi_x^+ &= \int d^3p N_p \sum_s u_p^{(s)} b_{s,p} e^{-ipx}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Para o campo da GEM, por sua vez, vamos ter que

$$\begin{aligned}A_{\mu\nu}^- &= \int d^3k N_k \sum_\lambda \epsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)} a_{\lambda,k}^\dagger e^{ikx} \\ A_{\mu\nu}^+ &= \int d^3k N_k \sum_\lambda \epsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)} a_{\lambda,k} e^{-ikx}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Logo, ao substituir os novos termos na eq. (4.11), teremos um grande número de equações para resolver. Fazendo uma projeção do resultado que queremos obter, chegamos a conclusão que se considerarmos todas as equações presentes nesse novo termo, algumas expressões vão possuir valor esperado nulo ou não irão contribuir com o tipo de espalhamento que estamos analisando. Levando isso em consideração, para sermos mais precisos, vamos escrever apenas os termos favoráveis para o espalhamento em questão. Assim, a equação

se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(x)\mathcal{L}_I(y) = & - \frac{\kappa^2}{8} A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi} (\bar{\psi}_x^- \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y^+ - \bar{\psi}_x^- \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y^+ - \\ & - \partial^\mu \bar{\psi}_x^- \gamma^\nu \psi_x \bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y^+ + \partial^\mu \bar{\psi}_x^- \gamma^\nu \psi_x \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y^+). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Note que no meio das equações resultantes temos termos que não utilizam os índices + e -, isto é $\psi_x \bar{\psi}_y$. Isso se dá pois, posteriormente, os mesmos vão representar o propagador fermiônico. Então por simplicidade, vamos escreve-los dessa forma. Por enquanto, vamos nomear cada termo dentro do parênteses. Logo,

$$\mathcal{L}_I(x)\mathcal{L}_I(y) \equiv -\frac{\kappa^2}{8} A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi} (\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4), \quad (4.15)$$

onde,

$$\Xi_1 = \bar{\psi}_x^- \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y^+, \quad (4.16)$$

$$\Xi_2 = -\bar{\psi}_x^- \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y^+, \quad (4.17)$$

$$\Xi_3 = -\partial^\mu \bar{\psi}_x^- \gamma^\nu \psi_x \bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y^+, \quad (4.18)$$

$$\Xi_4 = \partial^\mu \bar{\psi}_x^- \gamma^\nu \psi_x \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y^+. \quad (4.19)$$

Resolvendo termo a termo, substituindo a eq. (4.12) nas equações anteriores, temos que

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= - \int \int d^3p \, d^3p' \, N_p \, N_{p'} \, e^{ipx} e^{-ip'y} \sum_{s,s'} \bar{u}_p^{(s)} b_{s,p}^\dagger \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y^+ u_{p'}^{(s')} b_{s',p'}, \\ \Xi_2 &= - \int \int d^3p \, d^3p' \, N_p \, N_{p'} \, e^{ipx} e^{-ip'y} \sum_{s,s'} \bar{u}_p^{(s)} b_{s,p}^\dagger \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y^+ u_{p'}^{(s')} b_{s',p'}, \\ \Xi_3 &= - \int \int d^3p \, d^3p' \, N_p \, N_{p'} \, e^{ipx} e^{-ip'y} \sum_{s,s'} p^\mu \bar{u}_p^{(s)} b_{s,p}^\dagger \gamma^\nu \psi_x \bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y^+ u_{p'}^{(s')} b_{s',p'}, \\ \Xi_4 &= - \int \int d^3p \, d^3p' \, N_p \, N_{p'} \, e^{ipx} e^{-ip'y} \sum_{s,s'} i p^\mu \bar{u}_p^{(s)} b_{s,p}^\dagger \gamma^\nu \psi_x \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y^+ u_{p'}^{(s')} b_{s',p'}. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever a amplitude de transição (4.7) como

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{1}{2} \int \int d^4x \, d^4y \, \langle f | \tau [\mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y)] | i \rangle \\ &= \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x \, d^4y \, \langle f | \tau [A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi} (\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4)] | i \rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

O termo $A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi}$, por sua vez, vai seguir a mesma análise de ψ , pois, posteriormente, ao atuarmos os estados assintóticos $\langle f |$ e $| i \rangle$ nos pares criação e aniquilação, vamos possuir valores esperados nulos. Dito isso, podemos reescreve-lo como

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi} &= A_{\mu\nu}^- A_{\alpha\xi}^+ + A_{\mu\nu}^+ A_{\alpha\xi}^-. \\ A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi} &= \int \int d^3k \, d^3k' \, N_k \, N_{k'} \sum_{\lambda\lambda'} \epsilon_{\mu\nu}^\lambda \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda'} (a_{\lambda,k}^\dagger a_{\lambda',k'} e^{ikx} e^{-ik'y} + a_{\lambda,k} a_{\lambda',k'}^\dagger e^{-ikx} e^{ik'y}). \end{aligned}$$

Como foi dito no início da seção, os estados assintóticos $\langle f |$ e $| i \rangle$ vão descrever as partículas livres do sistema. Logo, podemos escreve-los como $\langle f | = \langle e_f | \langle g_f |$ e $| i \rangle =$

$|e_i\rangle |g_i\rangle$, onde e e g representam os estados das partículas livres fermiônicas e bosônicas, respectivamente. Ou seja, podem ser escritos como $\langle f| = \langle 0| b_f a_f$ e $|i\rangle = b_i^\dagger a_i^\dagger |0\rangle$. Dito isso, quando formos atuar esses estados na eq. (4.20), cada termo irá interagir com o par correspondente. Levando em conta isso, vamos começar analisando inicialmente como ocorre a atuação desses estados no termo Ξ_1 , pois para os termos seguintes o processo será similar. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\langle f| \Xi_1 |i\rangle &= \langle 0| b_f \tau \left[- \int \int d^3p d^3p' N_p N_{p'} e^{ipx} e^{-ip'y} \sum_{s,s'} \bar{u}_p^{(s)} b_{s,p}^\dagger \right. \\
&\quad \times \left. \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \psi_y \gamma^\alpha i p'^\xi u_{p'}^{(s')} b_{s',p'}^\dagger \right] b_i^\dagger |0\rangle \\
&= - \int \int d^3p d^3p' N_p N_{p'} e^{ipx} e^{-ip'y} \sum_{s,s'} \langle 0| b_f \tau [b_{s,p}^\dagger b_{s',p'}^\dagger] b_i^\dagger |0\rangle \\
&\quad \times \bar{u}_p^{(s)} \gamma^\mu \langle 0| \tau [\partial^\nu \psi_x \bar{\psi}_y] |0\rangle \gamma^\alpha i p'^\xi u_{p'}^{(s')}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Utilizando o operador evolução temporal, não vamos ter mudança pois $\tau[b_{s,p}^\dagger b_{s',p'}] = [b_{s,p}^\dagger b_{s',p'}]$. Além disso, $\langle 0| \psi_x \bar{\psi}_y |0\rangle$ será o nosso propagador. A derivada que acompanha o operador será realizada posteriormente quando utilizarmos a definição do mesmo. Queremos resolver $\langle 0| b_f b_{s,p}^\dagger b_{s',p'}^\dagger b_i^\dagger |0\rangle$, e para isso vamos utilizar as relações de anti comutação. Temos que

$$\{b, b^\dagger\} = b b^\dagger + b^\dagger b = \frac{1}{N'_p} \delta_{s,s'} \delta^3(p - p'), \tag{4.22}$$

onde $N'_p = N_p = \frac{m}{(2\pi)^3 p_0}$. Se fizermos as seguintes operações relacionadas ao anti comutador,

$$\{b, b^\dagger\} |0\rangle = b b^\dagger |0\rangle + b^\dagger b |0\rangle = b b^\dagger |0\rangle \tag{4.23}$$

$$\langle 0| \{b, b^\dagger\} = \langle 0| b b^\dagger + \langle 0| b^\dagger b = \langle 0| b b^\dagger, \tag{4.24}$$

vamos observar que podemos escrever uma expressão para $\langle 0| b_f b_{s,p}^\dagger b_{s',p'}^\dagger b_i^\dagger |0\rangle$. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle 0| \{b, b^\dagger\} \{b, b^\dagger\} |0\rangle &= \langle 0| b_f b_{s,p}^\dagger b_{s',p'}^\dagger b_i^\dagger |0\rangle \\
&= \frac{1}{N'_p} \delta_{s_f,s} \delta^3(p_f - p) \frac{1}{N'_{p'}} \delta_{s_i,s'} \delta^3(p_i - p').
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Utilizando as propriedades das deltas e integrando nos momentos, obtemos a seguinte expressão para (4.21),

$$\langle f| \Xi_1 |i\rangle = -e^{ip_f x} e^{-ip_i y} \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu \langle 0| \tau [\partial^\nu \psi_x \bar{\psi}_y] |0\rangle \gamma^\alpha i p_i^\xi u_{p_i}^{si}. \tag{4.26}$$

Se fizermos o mesmo para Ξ_2, Ξ_3 e Ξ_4 , vamos encontrar resultados semelhantes àqueles encontrados na equação anterior. Os mesmos serão apresentados posteriormente. Agora vamos realizar o mesmo passo a passo, porém analisando os campos $A_{\mu\nu}$ e $A_{\alpha\xi}$. Dito isso,

temos que

$$\begin{aligned}
\langle f | \tau[A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi}] | i \rangle &= \langle f | \tau[A_{\mu\nu}^- A_{\alpha\xi}^+ + A_{\mu\nu}^+ A_{\alpha\xi}^-] | i \rangle \\
&= \int \int d^3k d^3k' N_k N_{k'} \sum_{\lambda\lambda'} \epsilon_{\mu\nu}^\lambda \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda'} \\
&\times \left(\langle f | \tau[a_{\lambda,k}^\dagger a_{\lambda',k'}] | i \rangle e^{ikx} e^{-ik'y} \right. \\
&+ \left. \langle f | \tau[a_{\lambda,k} a_{\lambda',k'}^\dagger] | i \rangle e^{-ikx} e^{ik'y} \right). \tag{4.27}
\end{aligned}$$

De forma análoga às operações anteriores, $\langle f | \tau[a^\dagger a] | i \rangle = \langle f | a^\dagger a | i \rangle$. Substituindo os estados $\langle f |$ e $| i \rangle$, temos que $\langle f | \tau[a^\dagger a] | i \rangle = \langle 0 | a_f a_{\lambda,k}^\dagger a_{\lambda',k'} a_i^\dagger | 0 \rangle$. Para bósons, segue a relação de comutação

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = \frac{1}{N'_k} \delta_{\lambda,\lambda'} \delta^3(k - k'). \tag{4.28}$$

De forma análoga ao processo anterior, faz-se

$$\langle 0 | [a, a^\dagger] = \langle 0 | aa^\dagger - \langle 0 | a^\dagger a = \langle 0 | aa^\dagger \tag{4.29}$$

$$[a, a^\dagger] | 0 \rangle = aa^\dagger | 0 \rangle - a^\dagger a | 0 \rangle = aa^\dagger | 0 \rangle, \tag{4.30}$$

e obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [a_f, a_{\lambda,k}^\dagger] [a_{\lambda',k'}^\dagger, a_i^\dagger] | 0 \rangle &= \langle 0 | a_f a_{\lambda,k}^\dagger a_{\lambda',k'}^\dagger a_i^\dagger | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{N'_k} \delta_{\lambda_f, \lambda} \delta^3(k_f - k) \frac{1}{N'_{k'}} \delta_{\lambda_i, \lambda'} \delta^3(k_i - k'). \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Utilizando as propriedades das deltas, obtemos por fim

$$\langle f | \tau[A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi}] | i \rangle = \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} e^{ik_f x} e^{-ik_i y} + e^{-ik_i x} e^{-ik_f y} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_i} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_f}. \tag{4.32}$$

Tendo encontrado os principais termos que compõem a amplitude de transição, podemos voltar na eq. (4.20) e calcular cada um dos termos da distributiva, onde ao fim de cada processo, juntaremos cada parte restante. Chamando de \mathcal{M}_{Ξ_1} , podemos escrever a amplitude de transição que acompanha apenas Ξ_1 como

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\Xi_1} &= \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y \sum_{\lambda} \sum_s [\epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} (e^{ik_f x} e^{-ik_i y} + e^{-ik_i x} e^{ik_f y}) \\
&\times (-e^{ip_f x} e^{-ip_i y} \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu \langle 0 | \tau[\partial^\nu \psi_x \bar{\psi}_y] | 0 \rangle \gamma^\alpha i p_i^\xi u_{p_i}^{si}) \\
&= -\frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} e^{ix(k_f + p_f)} e^{-iy(k_i + p_i)} \\
&\times \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu \langle 0 | \tau[\partial^\nu \psi_x \bar{\psi}_y] | 0 \rangle \gamma^\alpha i p_i^\xi u_{p_i}^{si} \\
&- \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} e^{-ix(k_i + p_f)} e^{iy(k_f - p_i)} \\
&\times \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu \langle 0 | \tau[\partial^\nu \psi_x \bar{\psi}_y] | 0 \rangle \gamma^\alpha i p_i^\xi u_{p_i}^{si}. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

É sabido que os diagramas de Feynman são representações que descrevem o espalhamento, e que estão relacionados diretamente com a amplitude de transição. Com isso em mente, o primeiro termo da expressão está relacionado diretamente ao diagrama do tipo "s". O outro por sua vez, está relacionado ao diagrama "t". Ambos formam a descrição completa da interação entre as partículas do sistema à temperatura zero.

Vamos utilizar a definição do propagador a fim de escrever uma expressão geral para a amplitude de transição. Ao fazer isso, temos uma descrição completa do problema não mais em termos das posições e momentos em conjunto e sim em termos somente dos momentos das partículas. Dito isso, o propagador é definido como

$$\langle 0 | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0 \rangle = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2}, \quad (4.34)$$

onde usamos do fato que $\frac{1}{\not{q}-m} = \frac{\not{q}+m}{q^2-m^2}$. Logo, podemos reescrever (4.33) como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\Xi_1} &= -\frac{\kappa^2}{16} \int \int \int d^4 x d^4 y \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \\ &\times e^{ix(k_f+p_f)} e^{-iy(k_i+p_i)} \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^{\mu} (-iq^{\nu}) \gamma^{\alpha} i p_i^{\xi} u_{p_i}^{s_i} \\ &- \frac{\kappa^2}{16} \int \int \int d^4 x d^4 y \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \\ &\times e^{-ix(k_i-p_f)} e^{iy(k_f-p_i)} \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^{\mu} (-iq^{\nu}) \gamma^{\alpha} i p_i^{\xi} u_{p_i}^{s_i}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Utilizando a relação $\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{\pm i k(a-b)} = \delta^n(a-b)$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\Xi_1} &= -\frac{\kappa^2}{16} \int d^4 q \delta^4(k_f + p_f - q) \delta^4(k_i + p_i - q) \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \\ &\times \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^{\mu} (-iq^{\nu}) \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \gamma^{\alpha} i p_i^{\xi} u_{p_i}^{s_i} \\ &- \frac{\kappa^2}{16} \int d^4 q \delta^4(p_f - k_i - q) \delta^4(p_i - k_f - q) \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \\ &\times \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^{\mu} (-iq^{\nu}) \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \gamma^{\alpha} i p_i^{\xi} u_{p_i}^{s_i}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Por fim, utilizando a propriedade das deltas de Dirac, podemos reescrever a equação anterior como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\Xi_1} &= -\frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(k_f + p_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^{\mu} (k_f^{\nu} + p_f^{\nu}) (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \gamma^{\alpha} p_i^{\xi} u_{p_i}^{s_i} \\ &- \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^{\mu} (p_f^{\nu} - k_i^{\nu}) (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \gamma^{\alpha} p_i^{\xi} u_{p_i}^{s_i}. \end{aligned}$$

De forma análoga para Ξ_2, Ξ_3 e Ξ_4 , vamos ter que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\Xi_2} = & - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(k_f + p_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^{\mu} (k_f^{\nu} + p_f^{\nu}) (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \\
& \times (k_f^{\alpha} + p_f^{\alpha}) \gamma^{\xi} u_{p_i}^{s_i} \\
& - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^{\mu} (p_i^{\nu} - k_f^{\nu}) (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \\
& \times (p_f^{\alpha} - k_i^{\alpha}) \gamma^{\xi} u_{p_i}^{s_i}, \\
\mathcal{M}_{\Xi_3} = & - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(k_f + p_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} p_f^{\mu} \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^{\nu} (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \gamma^{\alpha} p_i^{\xi} u_{p_i}^{s_i} \\
& - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} p_f^{\mu} \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^{\nu} (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \gamma^{\alpha} p_i^{\xi} u_{p_i}^{s_i}, \\
\mathcal{M}_{\Xi_4} = & - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(k_f + p_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} p_f^{\mu} \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^{\nu} (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \\
& \times (k_f^{\alpha} + p_f^{\alpha}) \gamma^{\xi} u_{p_i}^{s_i} \\
& - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda} \sum_s \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} p_f^{\mu} \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^{\nu} (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \\
& \times (p_i^{\alpha} - k_f^{\alpha}) \gamma^{\xi} u_{p_i}^{s_i}.
\end{aligned}$$

Como vimos, o primeiro termo representa o diagrama tipo "s", enquanto o segundo representa o diagrama tipo "t". Logo, vamos nomear os termos que compõem "s" como \mathcal{M}_a , e os termos que compõem "t" como \mathcal{M}_b . Fazer isso nos permite obter uma descrição completa de todos os termos encontrados até então, permitindo que escrevamos ambos os diagramas em função das funções obtidas. Assim, nossa amplitude de transição será dada por

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b, \quad (4.37)$$

onde temos que \mathcal{M}_a será dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_a = & - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(k_f + p_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda s} [\bar{u}_{p_f}^{sf} (k_f^{\nu} + p_f^{\nu}) \epsilon_{\nu} \not{\epsilon} (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \\
& \times \epsilon_{\xi} \not{p}_i^{\xi} u_{p_i}^{s_i} + p_f^{\mu} \bar{u}_{p_f}^{sf} \epsilon_{\mu} \not{\epsilon} (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \epsilon_{\alpha} \not{\epsilon} (k_f^{\alpha} + p_f^{\alpha}) u_{p_i}^{s_i} + \\
& + p_f^{\mu} \bar{u}_{p_f}^{sf} \epsilon_{\mu} \not{\epsilon} (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \epsilon_{\xi} \not{p}_i^{\xi} u_{p_i}^{s_i} + \bar{u}_{p_f}^{sf} (k_f^{\nu} + p_f^{\nu}) \epsilon_{\nu} \not{\epsilon} (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \\
& \times (k_f^{\alpha} + p_f^{\alpha}) \epsilon_{\alpha} \not{\epsilon} u_{p_i}^{s_i}, \\
\mathcal{M}_a = & - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(k_f + p_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda s} [\bar{u}_{p_f}^{sf} (2p_f + k_f) \cdot \epsilon_f^* \not{\epsilon}_f^*] (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \\
& \times [\not{\epsilon}_i \epsilon_i \cdot (2p_i + k_i) u_{p_i}^{s_i}], \quad (4.38)
\end{aligned}$$

e \mathcal{M}_b , por sua vez, será dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_b = & - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda s} [\bar{u}_{p_f}^{sf} (2p_f - k_i) \cdot \epsilon_i \not{\epsilon}_i] (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \\
& \times [\not{\epsilon}_i^* \epsilon_i^* \cdot (2p_i - k_f) u_{p_i}^{s_i}]. \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Aqui, usamos a propriedade $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_\mu \epsilon_\nu$. Além disso, os termos $\not{\epsilon}$ estão relacionados às polarizações contraídas com as matrizes gamma, ou seja, $\not{\epsilon} = \gamma^\mu \epsilon_\mu$. E assim, obtemos que a amplitude de transição total será dada pela soma de ambos, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(k_f + p_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda_s} [\bar{u}_{p_f}^{s_f} (2p_f + k_f) \cdot \epsilon_f^* \not{\epsilon}_f^*] (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \\ & \times [\not{\epsilon}_i \epsilon_i \cdot (2p_i + k_i) u_{p_i}^{s_i}] \\ & - \frac{\kappa^2}{16} \frac{1}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \sum_{\lambda_s} [\bar{u}_{p_f}^{s_f} (2p_f - k_i) \cdot \epsilon_i \not{\epsilon}_i] (\not{p}_i - \not{k}_f + m) \\ & \times [\epsilon_i^* \epsilon_i^* \cdot (2p_i - k_f) u_{p_i}^{s_i}]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Com isso, conseguimos descrever a seção de choque do sistema à temperatura zero. Essa quantidade física é essencial no estudo da física de partículas e é o principal foco deste trabalho. O cálculo será realizado considerando referenciais convencionais em pesquisas, ou seja, o referencial do centro de massa. Essa abordagem nos permite reescrever a amplitude obtida não mais em termos de momentos, mas sim em termos de funções trigonométricas e frequências do sistema. Isso nos proporciona uma descrição mais precisa do ângulo de espalhamento das interações envolvidas.

4.2.2 Seção de choque à temperatura zero

Nesta seção, realizaremos o cálculo da seção de choque diferencial para o espalhamento Compton gravitacional ($g + f \rightarrow g + f$). Como mencionado anteriormente, a seção de choque é uma quantidade crucial no estudo de espalhamentos, permitindo a análise de como ocorre a transferência de energia, momento e outras propriedades das partículas interagentes ao longo do processo. Além disso, vamos analisar o espalhamento gráviton-elétron no referencial do centro de massa (CM). Essa escolha é essencial, pois temos o observador se movendo junto ao centro de massa do sistema. Ademais, devido a proporção das contas, os cálculos dos traços e contrações das métricas foram omitidos parcialmente. Dito isso, temos que, neste referencial

$$\begin{aligned} p_i &= (E, 0, 0, \omega); \\ k_i &= (\omega, 0, 0, -\omega); \\ p_f &= (E, -\omega \sin \theta, 0, -\omega \cos \theta); \\ k_f &= (\omega, \omega \sin \theta, 0, \omega \cos \theta); \end{aligned} \quad (4.41)$$

com θ representando o ângulo de espalhamento e ω a frequência. Note que para o momento do gráviton, temos que $m_g = 0$. Logo, pela relação de dispersão, $|E_k|^2 = |\vec{p}|^2 = |\vec{p}'|^2$. Dito isso, a seção de choque diferencial é definida por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle, \quad (4.42)$$

onde $s = (2E)^2$. Com isso em mente, para determinar σ , precisamos calcular o módulo da amplitude. Somando sob todas as polarizações do elétron, a densidade de probabilidade total será escrita como

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}|^2 = \langle |\mathcal{M}_a|^2 \rangle + \langle |\mathcal{M}_b|^2 \rangle + \langle 2 \text{Re } \mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b \rangle. \quad (4.43)$$

Vamos começar calculando $\langle |\mathcal{M}_a|^2 \rangle$, que será dada por

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_a|^2 \rangle &= \mathcal{M}_a \mathcal{M}_a^\dagger = \frac{1}{4} \sum_\lambda \sum_s \left(\frac{\kappa^2}{16 (k_f + p_f)^2 - m^2} \right)^2 [\bar{u}_{p_f}^{sf} (2p_f + k_f) \cdot \epsilon_f^* \not{\epsilon}_f^*] \\ &\times (k_f + \not{p}_f + m) [\not{\epsilon}_i \epsilon_i \cdot (2p_i + k_i) u_{p_i}^{si} [\bar{u}_{p_i}^{si} (2p_i + k_i) \cdot \epsilon_i^* \not{\epsilon}_i^*] \\ &\times (k_f + \not{p}_f + m) [\not{\epsilon}_f \epsilon_f \cdot (2p_f + k_f) u_{p_f}^{sf}] \\ &= \frac{1}{4} \sum_\lambda \sum_s \left(\frac{\kappa^2}{16 (k_f + p_f)^2 - m^2} \right)^2 [(2p_f^\nu + k_f^\nu) \epsilon_\nu^* \epsilon_\mu^*] [(2p_i^\zeta + k_i^\zeta) \epsilon_\zeta \epsilon_\alpha] \\ &\times [(2p_i^\sigma + k_i^\sigma) \epsilon_\sigma^* \epsilon_\rho^*] [(2p_f^\xi + k_f^\xi) \epsilon_\xi \epsilon_\lambda] [\bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \gamma^\alpha u_{p_i}^{si} \\ &\times \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\rho (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \gamma^\lambda u_{p_f}^{sf}]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Vamos dividir a equação em duas partes. Portanto, vamos escrever que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \sum_\lambda \left(\frac{\kappa^2}{16 (k_f + p_f)^2 - m^2} \right)^2 [(2p_f^\nu + k_f^\nu) \epsilon_\nu^* \epsilon_\mu^*] [(2p_i^\zeta + k_i^\zeta) \epsilon_\zeta \epsilon_\alpha] \\ &\times [(2p_i^\sigma + k_i^\sigma) \epsilon_\sigma^* \epsilon_\rho^*] [(2p_f^\xi + k_f^\xi) \epsilon_\xi \epsilon_\lambda] \\ B &= \sum_s [\bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \gamma^\alpha u_{p_i}^{si} \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\rho (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \gamma^\lambda u_{p_f}^{sf}]. \end{aligned}$$

Vamos começar resolvendo A . Neste contexto, vamos utilizar a seguinte relação para a polarização do gráviton.

$$\sum_\lambda \epsilon_{\mu\nu}(k, \lambda) \epsilon_{\alpha\rho}(k, \lambda) = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\rho}). \quad (4.45)$$

Note que nesta equação, teremos que utilizar esta propriedade duas vezes. Podemos manipular A de tal forma que a equação, utilizando essa relação, se torna

$$\begin{aligned} A &= \frac{\kappa^4}{4096 ((k_f + p_f)^2 - m^2)^2} (k_f^\nu + 2p_f^\nu) (k_f^\xi + 2p_f^\xi) (k_i^\zeta + 2p_i^\zeta) (k_i^\sigma + 2p_i^\sigma) \\ &\times (g^{\alpha\sigma} g^{\zeta\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\zeta\sigma} - g^{\alpha\zeta} g^{\rho\sigma}) (-g^{\lambda\xi} g^{\mu\nu} + g^{\lambda\nu} g^{\mu\xi} + g^{\lambda\mu} g^{\nu\xi}). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para B , por sua vez, da forma como está escrita, conseguimos expressar em termos de traço de matrizes. Portanto, teremos que

$$B = \sum_s \text{Tr} [\bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \gamma^\alpha u_{p_i}^{si} \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\rho (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \gamma^\lambda u_{p_f}^{sf}], \quad (4.47)$$

e utilizando propriedades de traço, podemos reescreve-la como

$$B = \text{Tr} [\sum_s u_{p_f}^{sf} \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \gamma^\alpha u_{p_i}^{si} \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\rho (\not{k}_f + \not{p}_f + m) \gamma^\lambda]. \quad (4.48)$$

Além disso, podemos utilizar a seguinte propriedade

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad (4.49)$$

e reescrever B de forma que a mesma se torna

$$B = \text{Tr}[(\gamma \cdot p_f + m) \gamma^\mu (\gamma \cdot (k_f + p_f) + m) \gamma^\alpha (\gamma \cdot p_i + m) \gamma^\rho (\gamma \cdot (k_f + p_f) + m) \gamma^\lambda] \quad (4.50)$$

E assim, tendo encontrado estes termos, podemos reescrever $\langle |\mathcal{M}_a|^2 \rangle$ como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_a|^2 \rangle &= \frac{\kappa^4}{4096 ((k_f + p_f)^2 - m^2)^2} (k_f^\nu + 2p_f^\nu) (k_f^\xi + 2p_f^\xi) (k_i^\zeta + 2p_i^\zeta) (k_i^\sigma + 2p_i^\sigma) \\ &\times (g^{\alpha\sigma} g^{\zeta\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\zeta\sigma} - g^{\alpha\zeta} g^{\rho\sigma}) (-g^{\lambda\xi} g^{\mu\nu} + g^{\lambda\nu} g^{\mu\xi} + g^{\lambda\mu} g^{\nu\xi}) \\ &\times \text{Tr}[(\gamma \cdot p_f + m) \gamma^\mu (\gamma \cdot (k_f + p_f) + m) \gamma^\alpha (\gamma \cdot p_i + m) \gamma^\rho (\gamma \cdot (k_f + p_f) + m) \gamma^\lambda]. \end{aligned}$$

De agora em diante, vamos utilizar as variáveis de Mandelstam para descrever as densidades de probabilidade. Estas variáveis representam a energia, momento e os ângulos em processos de espalhamento. As mesmas serão utilizadas em termos do referencial de centro de massa (CM). Dito isso, as variáveis de Mandelstam são definidas como

$$s = 2p_i \cdot k_i = 2p_f \cdot k_f; \quad (4.51)$$

$$t = -2p_i \cdot p_f = -2k_i \cdot k_f; \quad (4.52)$$

$$u = -2p_i \cdot k_f = -2p_f \cdot k_i. \quad (4.53)$$

Em termos de θ , temos

$$s = (2\omega)^2; \quad t = -2\omega^2(1 - \cos \theta); \quad u = -2\omega^2(1 + \cos \theta). \quad (4.54)$$

Resolvendo $\langle |\mathcal{M}_a|^2 \rangle$ por meio de métodos computacionais, utilizando os parâmetros apresentados, e ainda aplicando o limite relativístico, ou seja, $m \rightarrow 0$, além do pacote FeynCalc (MERTIG; BÖHM; DENNER, 1991) junto ao programa *Wolfram Mathematica*, nós obtemos

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_a|^2 \rangle &= - \frac{\kappa^4}{128 (m^2 - 4\omega^2)^2} (m^2 + 4\omega^2)^2 (m^4 - 2\omega^2 \cos \theta \\ &\times (m^2 - 4\omega^2) - 10m^2\omega^2 - 8\omega^4). \\ &= - \frac{1}{16} \kappa^4 \omega^4 (\cos \theta - 1). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Analogamente, para $\langle |\mathcal{M}_b|^2 \rangle$ e $\langle 2 \text{Re } \mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b \rangle$, vamos obter que

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_b|^2 \rangle &= - \frac{\kappa^4}{128 (-2\omega^2 \cos \theta + m^2 + 2\omega^2)^2} (2\omega^2 \cos \theta + m^2 - 2\omega^2)^2 \\ &\times (m^4 + \cos \theta (8\omega^4 - 6m^2\omega^2) + 2m^2\omega^2 - 8\omega^4) \\ &= - \frac{1}{16} \kappa^4 \omega^4 (\cos \theta - 1), \end{aligned} \quad (4.56)$$

e também

$$\begin{aligned}
\langle 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b \rangle &= \frac{\kappa^4}{1024 (m^2 - 4\omega^2) (-2\omega^2 \cos \theta + m^2 + 2\omega^2)} \\
&\times (564m^8 + 847m^6\omega^2 - 1496m^4\omega^4 + 2\omega^6 \cos 3\theta (5m^2 + 48\omega^2) \\
&- 828m^2\omega^6 + 4\omega^4 \cos 2\theta (42m^4 + 247m^2\omega^2 + 176\omega^4) + \omega^2 \cos \theta \\
&\times (847m^6 + 2672m^4\omega^2 + 150m^2\omega^4 - 2144\omega^6) + 1344\omega^8) \\
&= \frac{1}{128} \kappa^4 \omega^4 (28 \cos \theta + 3 \cos 2\theta - 7). \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Com todos os termos encontrados, podemos retornar em (4.43) e simplificar a expressão, resultando em

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{3}{16} \kappa^4 \omega^4 \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right). \tag{4.58}$$

Substituindo a equação acima em (4.42), obtemos a seção de choque diferencial como segue

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) &= \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \\
&= \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{3}{16} \kappa^4 \omega^4 \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\
&= \frac{3\kappa^4 \omega^2 \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{4096\pi^2}. \tag{4.59}
\end{aligned}$$

A seção de choque σ será encontrada através da integral sob o ângulo sólido. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{3\kappa^4 \omega^2 \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{4096\pi^2} \sin \theta d\phi d\theta \\
&= \frac{\kappa^4 \omega^2}{1024\pi}. \tag{4.60}
\end{aligned}$$

Embora estejamos utilizando um formalismo semelhante ao do eletromagnetismo, existem diferenças fundamentais entre ambos. Enquanto na QED as cargas geram o campo, na GEM o campo é gerado por massas. Além disso, no eletromagnetismo, o campo é descrito por vetores, enquanto na GEM é descrito por tensores. Além disso, as constantes de acoplamento são diferentes para as duas teorias. Ou seja, para a QED (CABRAL; SANTOS, 2023),

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{QED}} = \frac{2e^4}{64\pi^2 (2\omega)^2} \left(\frac{\cos \theta + 1}{2} + \frac{2}{\cos \theta + 1} \right). \tag{4.61}$$

Comparando com a equação (4.59), temos que a constante de acoplamento da QED é sem dimensão, enquanto que a constante de acoplamento gravitacional κ tem dimensão de energia. Logo, para comparar as duas teorias, precisamos multiplicar o resultado da GEM

por uma energia característica de forma a igualar as unidades das seções de choque. Essas distinções sugerem que a Seção de Choque para o espalhamento Compton gravitacional pode apresentar diferenças significativas entre as duas teorias (CABRAL; SANTOS, 2023). Na próxima seção vamos realizar o mesmo cálculo, considerando agora o formalismo da TFD. para introduzir os efeitos térmicos.

4.3 Espalhamento Compton gravitacional à temperatura finita

Nessa seção vamos considerar os efeitos térmicos do espalhamento Compton gravitacional. Vimos no Cap. (3) que a TFD é um arcabouço matemático dentro da teoria quântica de campos que nos permite introduzir temperatura no sistema. De forma análoga à temperatura zero, a amplitude de transição térmica será escrita como,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\beta) &= \langle f, \beta | S^{(n)} | i, \beta \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y \langle f, \beta | \tau[\hat{\mathcal{L}}_I(x) \hat{\mathcal{L}}_I(y)] | i, \beta \rangle,\end{aligned}\quad (4.62)$$

onde os estados assintóticos do sistema, por sua vez, são dados por

$$\begin{aligned}|f, \beta\rangle &= b_f^\dagger(\beta) a_f^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle \\ |i, \beta\rangle &= b_i^\dagger(\beta) a_i^\dagger(\beta) |0(\beta)\rangle.\end{aligned}\quad (4.63)$$

A Lagrangiana de interação nesse formalismo passa a ser

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_I(x) &= \mathcal{L}_I(x) - \tilde{\mathcal{L}}_I(x). \\ &= -\frac{i\kappa}{4} A_{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\mu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi) + \frac{i\kappa}{4} \tilde{A}_{\mu\nu} (\tilde{\bar{\psi}} \gamma^\mu \partial^\nu \tilde{\psi} - \partial^\mu \tilde{\bar{\psi}} \gamma^\nu \tilde{\psi}),\end{aligned}\quad (4.64)$$

onde os termos til surgem da construção do espaço de Hilbert duplicado, como descrito no Cap. (3). Além disso, a seção de choque diferencial para esse processo será dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\beta = \frac{1}{64\pi^2 s} \mathcal{M}(\beta). \quad (4.65)$$

A partir daqui, o cálculo vai seguir de forma análoga ao início do capítulo.

4.3.1 Cálculo da amplitude de transição à temperatura finita

Vamos começar resolvendo as lagrangianas de maneira análoga à temperatura zero. Para isso, substituiremos, inicialmente, a Eq. (4.64) nas lagrangianas da Eq. (4.62), separadamente, o que resultará em uma equação que depende dos campos de ambos os espaços contraídos entre si, ou seja,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_I(x) \hat{\mathcal{L}}_I(y) &= -\frac{\kappa^2}{8} \left[A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi} (\bar{\psi}_x \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x - \partial^\mu \bar{\psi}_x \gamma^\nu \psi_x) (\bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y - \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y) \right. \\ &\quad - A_{\mu\nu} \tilde{A}_{\alpha\xi} (\bar{\psi}_x \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x - \partial^\mu \bar{\psi}_x \gamma^\nu \psi_x) (\tilde{\bar{\psi}}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \tilde{\psi}_y - \partial^\alpha \tilde{\bar{\psi}}_y \gamma^\xi \tilde{\psi}_y) \\ &\quad - \tilde{A}_{\mu\nu} A_{\alpha\xi} (\tilde{\bar{\psi}}_x \gamma^\mu \partial^\nu \tilde{\psi}_x - \partial^\mu \tilde{\bar{\psi}}_x \gamma^\nu \tilde{\psi}_x) (\bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y - \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y) \\ &\quad \left. + \tilde{A}_{\mu\nu} \tilde{A}_{\alpha\xi} (\tilde{\bar{\psi}}_x \gamma^\mu \partial^\nu \tilde{\psi}_x - \partial^\mu \tilde{\bar{\psi}}_x \gamma^\nu \tilde{\psi}_x) (\tilde{\bar{\psi}}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \tilde{\psi}_y - \partial^\alpha \tilde{\bar{\psi}}_y \gamma^\xi \tilde{\psi}_y) \right].\end{aligned}\quad (4.66)$$

Ao analisar as possíveis contrações dos campos da Lagrangiana de interação, vamos observar que existirão termos com valor esperado nulo e que não contribuem para o espalhamento em questão. Portanto, ao realizar a distributiva, obteremos equações semelhantes, com termos a mais referentes ao espaço til. Para fins de completude, consideraremos apenas os termos relevantes para os cálculos. Se dividirmos os campos de fermi em ψ^+ e ψ^- , a Eq. (4.66) se torna

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_I(x)\hat{\mathcal{L}}_I(y) = & - \frac{\kappa^2}{8} \left[A_{\mu\nu}A_{\alpha\xi}(\bar{\psi}_x^- \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y^+ - \bar{\psi}_x^- \gamma^\mu \partial^\nu \psi_x \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y^+ \right. \\ & - \partial^\mu \bar{\psi}_x^- \gamma^\nu \psi_x \bar{\psi}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \psi_y^+ + \partial^\mu \bar{\psi}_x^- \gamma^\nu \psi_x \partial^\alpha \bar{\psi}_y \gamma^\xi \psi_y^+) \\ & + \tilde{A}_{\mu\nu}\tilde{A}_{\alpha\xi}(\tilde{\bar{\psi}}_x^- \gamma^\mu \partial^\nu \tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \tilde{\psi}_y^+ - \tilde{\bar{\psi}}_x^- \gamma^\mu \partial^\nu \tilde{\psi}_x \partial^\alpha \tilde{\bar{\psi}}_y \gamma^\xi \tilde{\psi}_y^+ \\ & \left. - \partial^\mu \tilde{\bar{\psi}}_x^- \gamma^\nu \tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y \gamma^\alpha \partial^\xi \tilde{\psi}_y^+ + \partial^\mu \tilde{\bar{\psi}}_x^- \gamma^\nu \tilde{\psi}_x \partial^\alpha \tilde{\bar{\psi}}_y \gamma^\xi \tilde{\psi}_y^+) \right]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Vamos analisar como atuar os estados assintóticos para cada termo presente na equação anterior. Se substituirmos os campos de Fermi, teremos uma equação extensa. Logo, por simplicidade, vamos omitir os termos que não serão relevantes para a análise, como as integrais, exponenciais e etc, e mostrar apenas os operadores criação e aniquilação. Além disso, eles estarão nas mesmas posições independentemente dos termos que substituirmos, o que faz com que o cálculo feito em um valha para o restante. Note que os estados dependem tanto dos operadores de campo dos férmions quanto dos operadores da GEM. Para facilitar o entendimento, eles serão atuados de forma que apenas os operadores associados às partículas ficarão explícitos. Ou seja, ao atuar os estados em férmions, apenas a operação do mesmo será mostrada. Para bósons, será análogo. Com isso em mente, ao analisar o caso que não contém termos til, os operadores vão atuar da seguinte maneira:

$$\langle f, \beta | \tau \{ b_{s,p}^\dagger b_{s',p'} \} | i, \beta \rangle = \langle 0(\beta) | b_f(\beta) \tau \{ b_{s,p}^\dagger b_{s',p'} \} b_i^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle. \quad (4.68)$$

Utilizando as transformações de Bogoliubov, Eq. (3.15), nos operadores independentes de β , teremos que

$$\begin{aligned} \langle f, \beta | \tau \{ b_{s,p}^\dagger b_{s',p'} \} | i, \beta \rangle &= \langle 0(\beta) | b_f(\beta) \tau \left\{ \left(U(\beta) b_{s,p}^\dagger(\beta) + V(\beta) \tilde{b}_{s,p}(\beta) \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(U(\beta) b_{s',p'}(\beta) + V(\beta) \tilde{b}_{s',p'}^\dagger(\beta) \right) \right\} b_i^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= U^2(\beta) \langle 0(\beta) | b_f(\beta) b_{s,p}^\dagger(\beta) b_{s',p'}(\beta) b_i^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Note que os termos cruzados e os termos que acompanham apenas $V(\beta)$ são nulos. Isso se dá pois os estados finais e iniciais atuam diretamente no espaço em que os mesmos são construídos, ou seja, o espaço não til. Logo, nos resta apenas utilizar a propriedade das deltas de Dirac, e assim podemos reescrever a equação anterior como

$$\langle f, \beta | \tau \{ b_{s,p}^\dagger b_{s',p'} \} | i, \beta \rangle = U^2(\beta) \frac{1}{N_p} \delta_{s_f, s} \delta^3(p_f - p) \frac{1}{N_{p'}} \delta_{s_i, s'} \delta^3(p_i - p'). \quad (4.70)$$

Voltando na Eq. (4.67), vamos fazer o mesmo para os termos til. Logo, temos que

$$\langle f, \beta | \tau \{ \tilde{b}_{s,p}^\dagger \tilde{b}_{s',p'} \} | i, \beta \rangle = \langle 0(\beta) | b_f(\beta) \tau \{ \tilde{b}_{s,p}^\dagger \tilde{b}_{s',p'} \} b_i^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle. \quad (4.71)$$

Utilizando as transformações de Bogoliubov, obtemos como segue

$$\begin{aligned} \langle f, \beta | \tau \{ \tilde{b}_{s,p}^\dagger \tilde{b}_{s',p'} \} | i, \beta \rangle &= \langle 0(\beta) | b_f(\beta) \tau \{ \left(U(\beta) \tilde{b}_{s,p}^\dagger(\beta) - V(\beta) b_{s,p}(\beta) \right) \\ &\quad \times \left(U(\beta) \tilde{b}_{s',p'}(\beta) - V(\beta) b_{s',p'}^\dagger(\beta) \right) \} b_i^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= V^2(\beta) \langle 0(\beta) | b_f(\beta) \tau \{ b_{s,p}(\beta) b_{s',p'}^\dagger(\beta) \} b_i^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= V^2(\beta) \langle 0(\beta) | b_f(\beta) b_{s',p'}^\dagger(\beta) b_{s,p}(\beta) b_i^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Novamente, os termos cruzados se anulam seguido dos que contêm U^2 . Substituindo as deltas, encontramos que

$$\langle f, \beta | \tau \{ \tilde{b}_{s,p}^\dagger \tilde{b}_{s',p'} \} | i, \beta \rangle = V^2(\beta) \frac{1}{N_{p'}} \delta_{s_f, s'} \delta^3(p_f - p') \frac{1}{N_p} \delta_{s_i, s} \delta^3(p_i - p). \quad (4.73)$$

Agora podemos utilizar o que encontramos nas equações (4.73) e (4.70) para escrever a amplitude de transição. Logo, substituindo ambas as equações em (4.62), agora considerando os termos omitidos dos campos, obtemos que a amplitude de transição será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\beta) = & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) e^{ip_f x} e^{-ip_i y} \sum_s \left[\bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu q^\nu \langle 0(\beta) | \tau [\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle \right. \\ & \times \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} + \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu q^\nu q^\alpha \langle 0(\beta) | \tau [\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i} \\ & + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\nu \gamma^\alpha \langle 0(\beta) | \tau [\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\nu \\ & \times \langle 0(\beta) | \tau [\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle q^\alpha \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i} \left. \right] \left(\langle f, \beta | \tau [A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi}] | i, \beta \rangle \right) \\ & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y V^2(\beta) e^{ip_i x} e^{-ip_f y} \sum_s \left[\bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\mu q^\nu \langle 0(\beta) | \tau [\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle \right. \\ & \times \gamma^\alpha p_f^\xi u_{p_f}^{s_f} + \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\mu q^\nu q^\alpha \langle 0(\beta) | \tau [\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle \gamma^\xi u_{p_f}^{s_f} \\ & + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\nu \gamma^\alpha \langle 0(\beta) | \tau [\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle p_f^\xi u_{p_f}^{s_f} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\nu \\ & \times \langle 0(\beta) | \tau [\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle q^\alpha \gamma^\xi u_{p_f}^{s_f} \left. \right] \left(\langle f, \beta | \tau [\tilde{A}_{\mu\nu} \tilde{A}_{\alpha\xi}] | i, \beta \rangle \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

A equação anterior contém todas as interações referentes ao processo que estamos estudando. Os termos que multiplicam $U^2(\beta)$ representam os diagramas s e t no espaço til, e os termos que acompanham $V^2(\beta)$, por sua vez, descrevem os mesmos tipos de diagramas no espaço não til. Além disso, a equação contém os termos $\langle 0(\beta) | \tau [\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle$ e $\langle 0(\beta) | \tau [\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle$, que representam o propagador do espalhamento. Note que a segunda parte da equação é idêntica a primeira trocando apenas os índices finais para iniciais e vice-versa. Além disso, para fins didáticos, vamos simplificar a equação anterior escrevendo que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\beta) = & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) e^{ip_f x} e^{-ip_i y} \sum_s [\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4] C \\ & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y V^2(\beta) e^{ip_i x} e^{-ip_f y} \sum_s [\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4] \tilde{C}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde temos que

$$\Xi_1 = \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu q^\nu \langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i}, \quad (4.76)$$

$$\Xi_2 = \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu q^\nu q^\alpha \langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i}, \quad (4.77)$$

$$\Xi_3 = p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\nu \gamma^\alpha \langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle p_i^\xi u_{p_i}^{s_i}, \quad (4.78)$$

$$\Xi_4 = p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\nu \langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle q^\alpha \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i}, \quad (4.79)$$

para a primeira parte e

$$\Theta_1 = \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\mu q^\nu \langle 0(\beta) | \tau[\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle \gamma^\alpha p_f^\xi u_{p_f}^{s_f}, \quad (4.80)$$

$$\Theta_2 = \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\mu q^\nu q^\alpha \langle 0(\beta) | \tau[\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle \gamma^\xi u_{p_f}^{s_f}, \quad (4.81)$$

$$\Theta_3 = p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\nu \gamma^\alpha \langle 0(\beta) | \tau[\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle p_f^\xi u_{p_f}^{s_f}, \quad (4.82)$$

$$\Theta_4 = p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\nu \langle 0(\beta) | \tau[\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle q^\alpha \gamma^\xi u_{p_f}^{s_f}, \quad (4.83)$$

para a segunda. Além disso, $C = \langle f, \beta | \tau[A_{\mu\nu} A_{\alpha\xi}] | i, \beta \rangle$ e $\tilde{C} = \langle f, \beta | \tau[\tilde{A}_{\mu\nu} \tilde{A}_{\alpha\xi}] | i, \beta \rangle$. Partindo de C e \tilde{C} , podemos fazer novamente a análise de como os estados finais e iniciais atuam, só que dessa vez nos campos da GEM. Novamente, omitindo os termos não importantes para o cálculo em questão, temos que para o espaço não til,

$$\begin{aligned} C &= \langle 0(\beta) | a_f(\beta) \tau[(A_{\mu\nu}^- A_{\alpha\beta}^+) + (A_{\mu\nu}^+ A_{\alpha\beta}^-)] a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle \\ &= \langle 0(\beta) | a_f(\beta) \tau[a_{\lambda,k}^\dagger a_{\lambda',k'}] a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle \\ &+ \langle 0(\beta) | a_f(\beta) \tau[a_{\lambda',k'}^\dagger a_{\lambda,k}] a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Utilizando as transformações de Bogoliubov, Eq. (3.16), temos que

$$\begin{aligned} C &= \langle 0(\beta) | a_f(\beta) \left(U'(\beta) a_{\lambda,k}^\dagger(\beta) + V'(\beta) \tilde{a}_{\lambda,k}(\beta) \right) \\ &\times \left(U'(\beta) a_{\lambda',k'}(\beta) + V'(\beta) \tilde{a}_{\lambda',k'}^\dagger(\beta) \right) a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle \\ &+ \langle 0(\beta) | a_f(\beta) \left(U'(\beta) a_{\lambda',k'}^\dagger(\beta) + V'(\beta) \tilde{a}_{\lambda',k'}(\beta) \right) \\ &\times \left(U'(\beta) a_{\lambda,k}(\beta) + V'(\beta) \tilde{a}_{\lambda,k}^\dagger(\beta) \right) a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle \\ &= U'^2(\beta) \langle 0(\beta) | a_f(\beta) a_{\lambda,k}^\dagger(\beta) a_{\lambda',k'}(\beta) a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle \\ &+ U'^2(\beta) \langle 0(\beta) | a_f(\beta) a_{\lambda',k'}^\dagger(\beta) a_{\lambda,k}(\beta) a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Podemos utilizar as propriedades das deltas e escrever a equação anterior da seguinte forma

$$\begin{aligned} C &= U'^2(\beta) \left(\frac{1}{N_k} \delta_{\lambda_f, \lambda} \delta^3(k_f - k) \frac{1}{N_{k'}} \delta_{\lambda_i, \lambda'} \delta^3(k_i - k') \right. \\ &+ \left. \frac{1}{N_{k'}} \delta_{\lambda_f, \lambda'} \delta^3(k_f - k') \frac{1}{N_k} \delta_{\lambda_i, \lambda} \delta^3(k_i - k) \right). \end{aligned} \quad (4.86)$$

De forma análoga para o espaço til, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{C} &= \langle 0(\beta) | a_f(\beta) \tau [(\tilde{A}_{\mu\nu}^- \tilde{A}_{\alpha\beta}^+) + (\tilde{A}_{\mu\nu}^+ \tilde{A}_{\alpha\beta}^-)] a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | a_f(\beta) \tau [\tilde{a}_{\lambda,k} \tilde{a}_{\lambda',k'}^\dagger] a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle \\
&+ \langle 0(\beta) | a_f(\beta) \tau [\tilde{a}_{\lambda,k}^\dagger \tilde{a}_{\lambda',k'}] a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle,
\end{aligned} \tag{4.87}$$

que substituindo as transformações de Bogoliubov, nos resulta em

$$\begin{aligned}
\tilde{C} &= \langle 0(\beta) | a_f(\beta) \left(U'(\beta) \tilde{a}_{\lambda,k}(\beta) + V'(\beta) a_{\lambda,k}^\dagger(\beta) \right) \\
&\times \left(U'(\beta) \tilde{a}_{\lambda',k'}^\dagger(\beta) + V'(\beta) a_{\lambda',k'}(\beta) \right) a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle \\
&+ \langle 0(\beta) | a_f(\beta) \left(U'(\beta) \tilde{a}_{\lambda',k'}^\dagger(\beta) + V'(\beta) a_{\lambda',k'}(\beta) \right) \\
&\times \left(U'(\beta) \tilde{a}_{\lambda,k}(\beta) + V'(\beta) a_{\lambda,k}^\dagger(\beta) \right) a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle \\
&= V'^2(\beta) \langle 0(\beta) | a_f(\beta) a_{\lambda,k}^\dagger(\beta) a_{\lambda',k'}(\beta) a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle \\
&+ V'^2(\beta) \langle 0(\beta) | a_f(\beta) a_{\lambda,k}(\beta) a_{\lambda',k'}^\dagger(\beta) a_i^\dagger | 0(\beta) \rangle.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Por fim, utilizando as deltas, encontramos que

$$\begin{aligned}
\tilde{C} &= V'^2(\beta) \left(\frac{1}{N_k} \delta_{\lambda_f, \lambda} \delta^3(k_f - k) \frac{1}{N_{k'}} \delta_{\lambda_i, \lambda'} \delta^3(k_i - k') \right. \\
&+ \left. \frac{1}{N_{k'}} \delta_{\lambda_f, \lambda'} \delta^3(k_f - k') \frac{1}{N_k} \delta_{\lambda_i, \lambda} \delta^3(k_i - k) \right).
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Se reescrevermos ambos C e \tilde{C} , adicionando os termos omitidos nas definições do campo, obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned}
C &= \int \int d^3k d^3k' \sum_{\lambda\lambda'} \epsilon_{\mu\nu}^\lambda \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda'} \left[U'^2(\beta) \left(\delta_{\lambda_f, \lambda} \delta^3(k_f - k) \delta_{\lambda_i, \lambda'} \delta^3(k_i - k') \right) \right. \\
&\times \left. e^{ikx} e^{-ik'y} + U'^2(\beta) \left(\delta_{\lambda_f, \lambda'} \delta^3(k_f - k') \delta_{\lambda_i, \lambda} \delta^3(k_i - k) \right) e^{-ikx} e^{ik'y} \right] \\
C &= \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu\nu}^\lambda \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda'} U'^2(e^{ik_fx} e^{-ik_iy} + e^{-ik_ix} e^{ik_fy})
\end{aligned} \tag{4.90}$$

e também

$$\begin{aligned}
\tilde{C} &= \int \int d^3k d^3k' \sum_{\lambda\lambda'} \epsilon_{\mu\nu}^\lambda \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda'} \left[V'^2(\beta) \left(\delta_{\lambda_f, \lambda} \delta^3(k_f - k) \delta_{\lambda_i, \lambda'} \delta^3(k_i - k') \right) \right. \\
&\times \left. e^{ikx} e^{-ik'y} + V'^2(\beta) \left(\delta_{\lambda_f, \lambda'} \delta^3(k_f - k') \delta_{\lambda_i, \lambda} \delta^3(k_i - k) \right) e^{-ikx} e^{ik'y} \right] \\
\tilde{C} &= \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu\nu}^\lambda \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda'} V'^2(e^{ik_fx} e^{-ik_iy} + e^{-ik_ix} e^{ik_fy}).
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Tendo encontrado ambos, podemos retornar na equação (4.75) e escreve-la como

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\beta) = & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) U'^2(\beta) e^{ip_fx} e^{-ip_iy} \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \left[\bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu q^\nu \right. \\
& \times \langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle \gamma^\alpha p_i^{s_i} u_{p_i}^{s_i} + \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu q^\nu q^\alpha \langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle \\
& \times \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\nu \gamma^\alpha \langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\nu \\
& \times \langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle q^\alpha \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i} \left. \right] \left(e^{ik_fx} e^{-ik_iy} + e^{-ik_ix} e^{ik_fy} \right) \\
& - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y V^2(\beta) V'^2(\beta) e^{ip_ix} e^{-ip_fy} \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_i} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_f} \left[\bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\mu q^\nu \right. \\
& \times \langle 0(\beta) | \tau[\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle \gamma^\alpha p_f^{s_f} u_{p_f}^{s_f} + \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\mu q^\nu q^\alpha \langle 0(\beta) | \tau[\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle \\
& \times \gamma^\xi u_{p_f}^{s_f} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\nu \gamma^\alpha \langle 0(\beta) | \tau[\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle p_f^\xi u_{p_f}^{s_f} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\nu \\
& \times \langle 0(\beta) | \tau[\tilde{\psi}_x \tilde{\bar{\psi}}_y] | 0(\beta) \rangle q^\alpha \gamma^\xi u_{p_f}^{s_f} \left. \right] \left(e^{ik_fx} e^{-ik_iy} + e^{-ik_ix} e^{ik_fy} \right). \tag{4.92}
\end{aligned}$$

Note que a equação anterior representa os quatro diagramas de Feynman para este tipo de processo. Isso pode ser percebido ao realizar a distributiva, o que resulta em quatro termos, cada um representando um diagrama. Além disso, observamos que o segundo termo, que representa o espaço til, é idêntico ao primeiro, trocando-se os índices iniciais pelos finais e vice-versa. Dito isso, podemos realizar todo o cálculo para o primeiro termo e fazer as devidas trocas para encontrar o segundo. Portanto, para facilitar a compreensão, podemos expressar $\mathcal{M}(\beta)$ como

$$\mathcal{M}(\beta) = D_1 + D_2, \tag{4.93}$$

onde

$$\begin{aligned}
D_1 = & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) U'^2(\beta) e^{ip_fx} e^{-ip_iy} \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} [\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4] \\
& \times (e^{ik_fx} e^{-ik_iy} + e^{-ik_ix} e^{ik_fy}) \tag{4.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 = & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y V^2(\beta) V'^2(\beta) e^{-ip_ix} e^{ip_fy} \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_i} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_f} [\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4] \\
& \times (e^{ik_fx} e^{-ik_iy} + e^{-ik_ix} e^{ik_fy}) \tag{4.95}
\end{aligned}$$

Agora, como dito anteriormente, podemos resolver apenas D_1 e depois fazer as devidas substituições em D_2 , pois, temos que o mesmo contribui de forma semelhante ao primeiro. Além disso, podemos fazer a análise de D_1 abordando apenas os termos contidos em Ξ_1 . Fazemos isso para que o processo fique compreensível, podendo ser aplicado para os termos

seguintes posteriormente. Portanto, podemos escrever, que

$$\begin{aligned}
D_1 = & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) U'^2(\beta) e^{ip_f x} e^{-ip_i y} \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \Xi_1 (e^{ik_f x} e^{-ik_i y} + e^{-ik_i x} e^{ik_f y}) \\
= & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) U'^2(\beta) e^{ix(p_f+k_f)} e^{-iy(p_i+k_i)} \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \Xi_1 \\
& - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) U'^2(\beta) e^{ix(p_f-k_i)} e^{-iy(p_i-k_f)} \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \Xi_1 \\
= & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) U'^2(\beta) e^{ix(p_f+k_f)} e^{-iy(p_i+k_i)} \\
& \times \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu q^\nu \langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} \\
& - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) U'^2(\beta) e^{ix(p_f-k_i)} e^{-iy(p_i-k_f)} \\
& \times \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu q^\nu \langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i}.
\end{aligned} \tag{4.96}$$

O propagador térmico para férmions é dado por

$$\langle 0(\beta) | \tau[\psi_x \bar{\psi}_y] | 0(\beta) \rangle = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \Delta(q, \beta), \tag{4.97}$$

onde $\Delta(q, \beta) = S^{(0)}(q) + S^{(\beta)}(q)$, e

$$\begin{aligned}
S^{(0)}(q) &= \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \\
S^{(\beta)}(q) &= \frac{2\pi i}{e^{\beta q_0} + 1} \left[\frac{(\gamma^0 \xi - \gamma \cdot \vec{q} + m)}{2\xi} \Delta_1 \delta(q^0 - \xi) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\gamma^0 \xi + \gamma \cdot \vec{q} + m)}{2\xi} \Delta_2 \delta(q^0 + \xi) \right],
\end{aligned} \tag{4.98}$$

onde temos também que,

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \begin{pmatrix} 1 & e^{\beta q_0/2} \\ e^{\beta q_0/2} & -1 \end{pmatrix} \\
\Delta_2 &= \begin{pmatrix} -1 & e^{\beta q_0/2} \\ e^{\beta q_0/2} & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Se substituirmos o propagador em (4.96), a mesma poderá ser escrita como

$$\begin{aligned}
D_1 = & - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \\
& \times \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu q^\nu i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{ix(p_f+k_f-q)} e^{-iy(p_i+k_i-q)} \Delta^{ab}(q) \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} \\
& - \frac{\kappa^2}{16} \int \int d^4x d^4y U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \\
& \times \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu q^\nu i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{ix(p_f-k_i-q)} e^{-iy(p_i-k_f-q)} \Delta^{ab}(q) \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i}.
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Utilizando a seguinte relação,

$$\int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} e^{\pm i q(x-y)} = \delta^n(x-y), \quad (4.101)$$

podemos escrever D_1 como

$$\begin{aligned} D_1 = & - \frac{\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu q^\nu \\ & \times i \int d^4 q \delta^4(p_f + k_f - q) \delta^4(p_i + k_i - q) \Delta^{ab}(q) \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} \\ & - \frac{\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu q^\nu \\ & \times i \int d^4 q \delta^4(p_f - k_i - q) \delta^4(p_i - k_f - q) \Delta^{ab}(q) \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} D_1 = & - \frac{\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu (p_f^\nu + k_f^\nu) i \Delta^{ab}(p_f + k_f) \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} \\ & - \frac{\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu (p_i^\nu - k_f^\nu) i \Delta^{ab}(p_i - k_f) \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i}, \end{aligned} \quad (4.103)$$

onde a delta resultante some devido a conservação de momento. Se fizermos o mesmo para todos os termos omitidos, vamos encontrar que

$$\begin{aligned} D_1 = & - \frac{i\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} [\bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu (p_f^\nu + k_f^\nu) \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} \\ & + \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu (p_f^\nu + k_f^\nu) (p_f^\alpha + k_f^\alpha) \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\nu \gamma^\alpha \\ & \times \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\xi p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\nu \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} (p_f^\alpha + k_f^\alpha) \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i}] \\ & - \frac{i\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} [\bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu (p_i^\nu - k_f^\nu) \Delta_{(p_i-k_f)}^{ab} \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} \\ & + \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\mu (p_i^\nu - k_f^\nu) (p_i^\alpha - k_f^\alpha) \Delta_{(p_i-k_f)}^{ab} \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\nu \gamma^\alpha \\ & \times \Delta_{(p_i-k_f)}^{ab} \gamma^\xi p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{s_f} \gamma^\nu \Delta_{(p_i-k_f)}^{ab} (p_i^\alpha - k_f^\alpha) \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i}]. \end{aligned} \quad (4.104)$$

E para encontrar D_2 , podemos partir de D_1 , trocando apenas os índices finais por iniciais e vice-versa. Logo, temos que D_2 será dado por

$$\begin{aligned} D_2 = & - \frac{i\kappa^2}{16} V^2(\beta) V'^2(\beta) \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_i} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_f} [\bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\mu (p_i^\nu + k_i^\nu) \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} \gamma^\alpha p_f^\xi u_{p_f}^{s_f} \\ & + \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\mu (p_i^\nu + k_i^\nu) (p_i^\alpha + k_i^\alpha) \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} \gamma^\xi u_{p_f}^{s_f} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\nu \gamma^\alpha \\ & \times \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} \gamma^\xi p_f^\xi u_{p_f}^{s_f} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\nu \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} (p_i^\alpha + k_i^\alpha) \gamma^\xi u_{p_f}^{s_f}] \\ & - \frac{i\kappa^2}{16} V^2(\beta) V'^2(\beta) \sum_{\lambda s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_i} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_f} [\bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\mu (p_f^\nu - k_i^\nu) \Delta_{(p_f-k_i)}^{ab} \gamma^\alpha p_f^\xi u_{p_f}^{s_f} \\ & + \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\mu (p_f^\nu - k_i^\nu) (p_f^\alpha - k_i^\alpha) \Delta_{(p_f-k_i)}^{ab} \gamma^\xi u_{p_f}^{s_f} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\nu \gamma^\alpha \\ & \times \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} \gamma^\xi p_f^\xi u_{p_f}^{s_f} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{s_i} \gamma^\nu \Delta_{(p_f-k_i)}^{ab} (p_f^\alpha - k_i^\alpha) \gamma^\xi u_{p_f}^{s_f}]. \end{aligned} \quad (4.105)$$

E assim, podemos retornar na eq. (4.93) e escrever a amplitude de transição total como

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\beta) = & - \frac{i\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} [\bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu (p_f^\nu + k_f^\nu) \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} \\
& + \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu (p_f^\nu + k_f^\nu) (p_f^\alpha + k_f^\alpha) \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\nu \gamma^\alpha \\
& \times \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\xi p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\nu \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} (p_f^\alpha + k_f^\alpha) \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i}] \\
& - \frac{i\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_f} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_i} [\bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu (p_i^\nu - k_f^\nu) \Delta_{(p_i-k_f)}^{ab} \gamma^\alpha p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} \\
& + \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu (p_i^\nu - k_f^\nu) (p_i^\alpha - k_f^\alpha) \Delta_{(p_i-k_f)}^{ab} \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\nu \gamma^\alpha \\
& \times \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\xi p_i^\xi u_{p_i}^{s_i} + p_f^\mu \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\nu \Delta_{(p_i-k_f)}^{ab} (p_i^\alpha - k_f^\alpha) \gamma^\xi u_{p_i}^{s_i}] \\
& - \frac{i\kappa^2}{16} V^2(\beta) V'^2(\beta) \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_i} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_f} [\bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\mu (p_i^\nu + k_i^\nu) \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} \gamma^\alpha p_f^\xi u_{p_f}^{sf} \\
& + \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\mu (p_i^\nu + k_i^\nu) (p_i^\alpha + k_i^\alpha) \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} \gamma^\xi u_{p_f}^{sf} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\nu \gamma^\alpha \\
& \times \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} \gamma^\xi p_f^\xi u_{p_f}^{sf} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\nu \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} (p_i^\alpha + k_i^\alpha) \gamma^\xi u_{p_f}^{sf}] \\
& - \frac{i\kappa^2}{16} V^2(\beta) V'^2(\beta) \sum_{\lambda_s} \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda_i} \epsilon_{\alpha\xi}^{\lambda_f} [\bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\mu (p_f^\nu - k_i^\nu) \Delta_{(p_f-k_i)}^{ab} \gamma^\alpha p_f^\xi u_{p_f}^{sf} \\
& + \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\mu (p_f^\nu - k_i^\nu) (p_f^\alpha - k_i^\alpha) \Delta_{(p_f-k_i)}^{ab} \gamma^\xi u_{p_f}^{sf} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\nu \gamma^\alpha \\
& \times \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} \gamma^\xi p_f^\xi u_{p_f}^{sf} + p_i^\mu \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\nu \Delta_{(p_f-k_i)}^{ab} (p_f^\alpha - k_i^\alpha) \gamma^\xi u_{p_f}^{sf}]. \tag{4.106}
\end{aligned}$$

Podemos escrever a equação anterior, para melhor compreensão, em termos dos momentos em comum de cada expressão, exatamente como fizemos em (4.40). Isso facilitará o processo quando formos calcular a amplitude de probabilidade. Além disso, podemos definir novos parâmetros que ajudarão no cálculo da seção de choque, deixando mais organizado. Os mesmos irão conter a γ contraída com os tensores de polarizações, de forma que $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_\mu \epsilon_\nu$ e $\not{\epsilon} = \gamma^\mu \epsilon_\mu$. Logo, os novos termos serão dados por

$$\mathcal{M}(\beta) = \mathcal{M}_a(\beta) + \mathcal{M}_b(\beta), \tag{4.107}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_a(\beta) = & - \frac{i\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda_s} [\bar{u}_{p_f}^{sf} (2p_f + k_f) \cdot \epsilon_f^{*g} \not{\epsilon}_f^{*g}] \\
& \times \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} [\not{\epsilon}_i^g \epsilon_i^g \cdot (2p_i + k_i) u_{p_i}^{s_i}] \\
& - \frac{i\kappa^2}{16} V^2(\beta) V'^2(\beta) \sum_{\lambda_s} [\bar{u}_{p_i}^{si} (2p_i + k_i) \cdot \epsilon_i^{*g} \not{\epsilon}_i^{*g}] \\
& \times \Delta_{(p_i+k_i)}^{ab} [\not{\epsilon}_f^g \epsilon_f^g \cdot (2p_f + k_f) u_{p_f}^{sf}], \tag{4.108}
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_b(\beta) = & - \frac{i\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \sum_{\lambda s} [\bar{u}_{p_f}^{sf}(2p_f - k_i) \cdot \epsilon_i^g \not{\epsilon}_i^g] \\
& \times \Delta_{(p_f - k_i)}^{ab} [\not{\epsilon}_f^{*g} \epsilon_f^{*g} \cdot (2p_i - k_f) u_{p_i}^{si}] \\
& - \frac{i\kappa^2}{16} V^2(\beta) V'^2(\beta) \sum_{\lambda s} [\bar{u}_{p_i}^{si}(2p_i - k_f) \cdot \epsilon_f^g \not{\epsilon}_f^g] \\
& \times \Delta_{(p_i - k_f)}^{ab} [\not{\epsilon}_i^{*g} \epsilon_i^{*g} \cdot (2p_f - k_i) u_{p_f}^{sf}].
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Com isso, temos o que é necessário para calcular a seção de choque σ do sistema. Nesta seção, encontramos as amplitudes \mathcal{M}_a e \mathcal{M}_b do sistema. Ambas são escritas em termos dos momentos associados a cada partícula, desempenhando assim um papel fundamental no cálculo da seção de choque. Além disso, as novas equações apresentam alguns termos a mais quando comparadas ao caso para temperatura zero. As funções térmicas descrevem o processo, como o nome sugere, termicamente, de forma que se fizermos $\beta \rightarrow \infty$, voltamos ao caso sem temperatura ($U^2(\infty)U'^2(\infty) = 1$ e $V^2(\infty)V'^2(\infty) = 0$). O mesmo vale, para o propagador térmico (4.98). Portanto, nos resta apenas calcular a Seção de choque diferencial do sistema e discutir como este processo se diferencia do caso particular.

4.3.2 Seção de choque à temperatura finita

Novamente vamos dedicar uma seção exclusivamente para o cálculo da Seção de choque, onde desta vez à temperatura finita. Devido a proporção dos cálculos realizados, a análise é feita através de cálculos computacionais. Além disso, o referencial adotado será o mesmo para o caso à temperatura zero, ou seja, o referencial do centro de massa. Dito isso, a amplitude de probabilidade será dada por

$$\langle |\mathcal{M}(\beta)|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}(\beta)|^2 = \langle |\mathcal{M}_a(\beta)|^2 \rangle + \langle |\mathcal{M}_b(\beta)|^2 \rangle + \langle 2 \text{Re } \mathcal{M}_a^\dagger(\beta) \mathcal{M}_b(\beta) \rangle. \tag{4.110}$$

Vamos começar resolvendo $\langle |\mathcal{M}_a|^2 \rangle$. Se fizermos o cálculo apenas com os termos que acompanham $U^2(\beta)U'^2(\beta)$ vamos obter o mesmo resultado que encontraríamos caso considerássemos a equação por completo. Logo, a contribuição $V^2(\beta)V'^2(\beta)$ pode ser

adicionada posteriormente. Dito isso, temos que

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}_a(\beta)|^2 \rangle &= \mathcal{M}_a(\beta) \mathcal{M}_a^\dagger(\beta) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\lambda s} \left(\frac{\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \right)^2 [\bar{u}_{p_f}^{sf}(2p_f + k_f) \cdot \epsilon_f^{*g} \not{\epsilon}_f^{*g}] \\
&\times \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} [\not{\epsilon}_i^g \epsilon_i^g \cdot (2p_i + k_i) u_{p_i}^{si}] [\bar{u}_{p_i}^{si}(2p_i + k_i) \cdot \epsilon_i^{*g} \not{\epsilon}_i^{*g}] \\
&\times \Delta_{(p_f+k_f)}^{*ab} [\epsilon_f^g \not{\epsilon}_f^g \cdot (2p_f + k_f) u_{p_f}^{sf}] \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\lambda s} \left(\frac{\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \right)^2 [(2p_f^\nu + k_f^\nu) \epsilon_\nu^{*g} \epsilon_\mu^{*g}] [(2p_i^\zeta + k_i^\zeta) \epsilon_\zeta \epsilon_\alpha] \\
&\times [(2p_i^\sigma + k_i^\sigma) \epsilon_\sigma^* \epsilon_\rho^*] [(2p_f^\xi + k_f^\xi) \epsilon_\xi \epsilon_\lambda] [\bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\alpha u_{p_i}^{si} \\
&\times \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\rho \Delta_{(p_f+k_f)}^{*ab} \gamma^\lambda u_{p_f}^{sf}].
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Vamos dividir a equação em duas partes. Temos que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda} \left(\frac{\kappa^2}{16} U^2(\beta) U'^2(\beta) \right)^2 [(2p_f^\nu + k_f^\nu) \epsilon_\nu^{*g} \epsilon_\mu^{*g}] [(2p_i^\zeta + k_i^\zeta) \epsilon_\zeta \epsilon_\alpha] \\
&\times [(2p_i^\sigma + k_i^\sigma) \epsilon_\sigma^* \epsilon_\rho^*] [(2p_f^\xi + k_f^\xi) \epsilon_\xi \epsilon_\lambda], \\
B &= \sum_s [\bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\alpha u_{p_i}^{si} \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\rho \Delta_{(p_f+k_f)}^{*ab} \gamma^\lambda u_{p_f}^{sf}].
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Começando por A , vamos resolver a mesma utilizando a seguinte propriedade

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu\nu}(k, \lambda) \epsilon_{\alpha\rho}(k, \lambda) = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\rho}). \tag{4.113}$$

Substituindo, vamos encontrar que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\kappa^4 U^4(\beta) U'^4(\beta)}{4096} (k_f^\nu + 2p_f^\nu) (k_f^\xi + 2p_f^\xi) (k_i^\zeta + 2p_i^\zeta) (k_i^\sigma + 2p_i^\sigma) \\
&\times (g^{\alpha\sigma} g^{\zeta\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\zeta\sigma} - g^{\alpha\zeta} g^{\rho\sigma}) (-g^{\lambda\xi} g^{\mu\nu} + g^{\lambda\nu} g^{\mu\xi} + g^{\lambda\mu} g^{\nu\xi}).
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Ao analisar B , por sua vez, podemos reescrevê-la como

$$B = \sum_s Tr[\bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\alpha u_{p_i}^{si} \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\rho \Delta_{(p_f+k_f)}^{*ab} \gamma^\lambda u_{p_f}^{sf}], \tag{4.115}$$

e utilizando propriedades envolvendo traço, obtemos

$$B = Tr \sum_s [u_{p_f}^{sf} \bar{u}_{p_f}^{sf} \gamma^\mu \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\alpha u_{p_i}^{si} \bar{u}_{p_i}^{si} \gamma^\rho \Delta_{(p_f+k_f)}^{*ab} \gamma^\lambda]. \tag{4.116}$$

Assim, fica viável utilizarmos a seguinte propriedade

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m. \tag{4.117}$$

Ao substituí-la, obtemos que

$$B = Tr[(\not{p}_f + m) \gamma^\mu \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\alpha (\not{p}_i + m) (\Delta_{(p_f+k_f)}^{*ab} \gamma^\lambda)]. \tag{4.118}$$

Juntando A e B teremos que a amplitude de probabilidade $\langle |\mathcal{M}_a(\beta)|^2 \rangle$ poderá ser reescrita como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_a(\beta)|^2 \rangle &= \frac{\kappa^4 U^4(\beta) U'^4(\beta)}{4096} (k_f^\nu + 2p_f^\nu) (k_f^\xi + 2p_f^\xi) (k_i^\zeta + 2p_i^\zeta) (k_i^\sigma + 2p_i^\sigma) \\ &\times (g^{\alpha\sigma} g^{\zeta\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\zeta\sigma} - g^{\alpha\zeta} g^{\rho\sigma}) (-g^{\lambda\xi} g^{\mu\nu} + g^{\lambda\nu} g^{\mu\xi} + g^{\lambda\mu} g^{\nu\xi}) \\ &\times \text{Tr}[(\not{p}_f + m) \gamma^\mu \Delta_{(p_f+k_f)}^{ab} \gamma^\alpha (\not{p}_i + m) \Delta_{(p_f+k_f)}^{*ab} \gamma^\lambda]. \end{aligned} \quad (4.119)$$

A partir daqui, por simplicidade, vamos realizar os cálculos computacionalmente. Fazemos isso pois estamos trabalhando com matrizes, e realizar as contas a mão exige muito tempo. Ademais, caso tivéssemos feito as operações levando em conta os termos de $V^2(\beta) V'^2(\beta)$, encontraríamos um resultado semelhante. Porém, os resultados que queremos são àqueles referentes ao espaço de medida. Além disso, vamos utilizar apenas a equação (4.119). Portanto, a partir das funções térmicas derivadas das transformações de Bogoliubov, podemos escrever que

$$U^4(\beta) U'^4(\beta) = \left(\frac{1}{1 - e^{-2\beta\omega}} \right)^2 = \left(\frac{1 + \coth \beta\omega}{2} \right)^2. \quad (4.120)$$

Assim, é correto escrevermos que $\langle |\mathcal{M}_a(\beta)|^2 \rangle$ será dado por

$$\langle |\mathcal{M}_a(\beta)|^2 \rangle = -\frac{1}{16} \kappa^4 \omega^4 (\cos \theta - 1) \frac{1 + \mathcal{A}(\beta)}{(1 + e^{-2\beta\omega})^2} \left(\frac{1 + \coth \beta\omega}{2} \right)^2, \quad (4.121)$$

onde

$$\mathcal{A}(\beta) = e^{-2\beta\omega} + e^{-4\beta\omega} (4\pi^2 \omega^2 \Gamma_1^2 + 1), \quad (4.122)$$

com $\Gamma_1 = (\delta(2\omega) \Delta_1 - \delta(2\omega) \Delta_2)$. Para a amplitude $\langle |\mathcal{M}_b(\beta)|^2 \rangle$, por sua vez, teremos que

$$\langle |\mathcal{M}_b(\beta)|^2 \rangle = -\frac{1}{16} \kappa^4 \omega^4 (\cos \theta - 1) \frac{1 + \mathcal{B}(\beta)}{(1 + e^{-2\beta\omega})^2} \left(\frac{1 + \coth \beta\omega}{2} \right)^2, \quad (4.123)$$

na qual a segunda função térmica é definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\beta) &= e^{-2\beta\omega} - e^{-4\beta\omega} \left\{ \frac{\pi^2 \omega^2}{2} \left[1 + (\delta(2\omega - \xi_2) \Delta'_1 - 3\delta(2\omega + \xi_2) \Delta'_2) \Gamma_2 \right. \right. \\ &\quad - \xi_2^{-2} \left(2 \cos \theta (\omega^2 \Gamma_3^2 - 2\xi_2^2 \delta(2\omega + \xi_2) \Delta'_2 \Gamma_2) + \cos 2\theta (\xi_2^2 \Gamma_2^2 - 4\omega^2 \Gamma_3^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\omega^2 \cos 3\theta \Gamma_3^2 + 2\xi_2 \omega \Gamma_3 \Gamma_4) + 4\omega^2 \Gamma_3^2 - 2\omega \xi_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \right) \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (4.124)$$

com $\Gamma_2 = (\delta(2\omega - \xi_2) \Delta'_1 + \delta(2\omega + \xi_2) \Delta'_2)$, $\Gamma_3 = (\delta(2\omega - \xi_2) \Delta'_1 - \delta(2\omega + \xi_2) \Delta'_2)$ e $\Gamma_4 = (\delta(2\omega - \xi_2) \Delta'_1 + 2\delta(2\omega + \xi_2) \Delta'_2)$. Por fim, a média $\langle 2 \text{Re} \mathcal{M}_a^\dagger(\beta) \mathcal{M}_b(\beta) \rangle$ é dada por

$$\langle 2 \text{Re} \mathcal{M}_a^\dagger(\beta) \mathcal{M}_b(\beta) \rangle = \frac{1}{128} \kappa^4 \omega^4 (28 \cos \theta + 3 \cos 2\theta - 7) \frac{1 + \eta \mathcal{C}(\beta)}{(1 + e^{-2\beta\omega})^2} \left(\frac{1 + \coth \beta\omega}{2} \right)^2, \quad (4.125)$$

onde o novo termo é definido por

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\beta) = & e^{-2\beta\omega} \left(56 \cos \theta + 6 \cos 2\theta - 14 \right) - e^{-4\beta\omega} \left\{ 2\pi^2 \omega^2 \left[2 \cos \theta \Gamma_1 \left(2\delta(2\omega - \xi_2) \Delta'_1 \right. \right. \right. \\
& + 17\delta(2\omega + \xi_2) \Delta'_2 \left. \right) - \xi_2^{-1} \left(14\omega \Gamma_1 \Gamma_3 - 45\omega \cos \theta \Gamma_5 \Gamma_3 + \cos 2\theta \Gamma_1 \left(21\delta(2\omega - \xi_2) \Delta'_1 \right. \right. \\
& + 16\delta(2\omega + \xi_2) \Delta'_2 \left. \right) + 34\omega \cos 2\theta \Gamma_1 \Gamma_3 + \cos 3\theta \Gamma_1 \left(3\omega \Gamma_3 + 2\xi_2 \Gamma_2 \right) \left. \right. \\
& \left. \left. + \Gamma_1 \left(9\delta(2\omega - \xi_2) \Delta'_1 + 16\delta(2\omega + \xi_2) \Delta'_2 \right) \right] + 3\xi_2^{-1} - 28 \cos \theta + 7 \right\}, \quad (4.126)
\end{aligned}$$

onde $\Gamma_5 = (\delta(2\omega) \Delta_1 + \delta(2\omega) \Delta_2)$, $\eta = 1/(28 \cos \theta + 3 \cos 2\theta - 7)$. Com isso, conseguimos escrever a amplitude de probabilidade total realizando a soma das três equações resultantes. Ou seja, temos que

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}(\beta)|^2 \rangle = & -\frac{1}{16} \kappa^4 \omega^4 \frac{1}{(1 + e^{-2\beta\omega})^2} \left(\frac{1 + \coth \beta\omega}{2} \right)^2 \\
& \times \left[(\cos \theta - 1)(1 + \mathcal{A}(\beta)) + (\cos \theta - 1)(1 + \mathcal{B}(\beta)) \right. \\
& \left. - \frac{1}{8} (28 \cos \theta + 3 \cos 2\theta - 7)(1 + \eta \mathcal{C}(\beta)) \right], \quad (4.127)
\end{aligned}$$

que reescrevendo, para maior legibilidade, nos retorna

$$\langle |\mathcal{M}(\beta)|^2 \rangle = \frac{3}{16} \kappa^4 \omega^4 \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \frac{1 - \mathcal{D}(\beta)}{(1 + e^{-2\beta\omega})^2} \left(\frac{1 + \coth \beta\omega}{2} \right)^2, \quad (4.128)$$

onde

$$\mathcal{D}(\beta) = (\cos \theta - 1)(\mathcal{A}(\beta) + \mathcal{B}(\beta)) - \frac{\mathcal{C}(\beta)}{8}. \quad (4.129)$$

Se tomarmos $\beta \rightarrow \infty$ retornamos ao caso particular, encontrado em (4.58). Note que todos os termos das funções térmicas dependem de exponenciais negativas. Ademais, nestas expressões temos que $\xi_1 = m_g = 0$ e $\xi_2 = (2\omega^2(1 + \sin \theta + \cos \theta) + \omega^2 \sin 2\theta)^{1/2}$. Com estes resultados, a seção de choque diferencial será encontrada de maneira direta, sendo escrita como

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\beta = & \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}(\beta)|^2 \rangle. \\
= & \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{3}{16} \kappa^4 \omega^4 \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \frac{1 - \mathcal{D}(\beta)}{(1 + e^{-2\beta\omega})^2} \left(\frac{1 + \coth \beta\omega}{2} \right)^2 \\
= & \frac{3\kappa^4 \omega^2 \cos^4(\theta/2)}{4096\pi^2} \frac{1 - \mathcal{D}(\beta)}{(1 + e^{-2\beta\omega})^2} \left(\frac{1 + \coth \beta\omega}{2} \right)^2. \quad (4.130)
\end{aligned}$$

Para maior simplicidade podemos escrever que

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\beta = \alpha(\beta) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right), \quad (4.131)$$

onde $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$ é a seção de choque diferencial à temperatura zero, encontrada em (4.59), e

$$\alpha(\beta) \equiv \frac{1 - \mathcal{D}(\beta)}{(1 + e^{-2\beta\omega})^2} \left(\frac{1 + \coth \beta\omega}{2} \right)^2. \quad (4.132)$$

Assim, vimos que o cálculo para a seção de choque do espalhamento Compton gravitacional à temperatura finita segue um formalismo análogo ao caso sem temperatura. Logo, podemos afirmar que o método via temperatura zero é um caso particular do espalhamento com temperatura. Além disso, não foi possível solucionar a integral a fim de encontrar a seção de choque pois a mesma depende das deltas de Dirac, que por sua vez dependem do ângulo de espalhamento θ . Porém, é possível analisar o comportamento da seção de choque em temperaturas muito altas, ou seja, quando $T \rightarrow \infty$, o que leva a $\beta \rightarrow 0$. Como resultado, observamos que as exponenciais presentes na seção de choque não divergem e que a função térmica $\coth \beta\omega$ domina toda a equação. Logo, a contribuição da temperatura torna-se o fator predominante no processo, evidenciando e tornando mais relevantes os efeitos térmicos. Essa predominância pode ocorrer em regiões de altíssimas temperaturas, como o núcleo de objetos compactos, como estrelas de nêutrons, pulsares, e etc.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O MP enfrenta dificuldades ao tentar relacionar seus conceitos em conjunto com o que é proposto pela RG. Apesar disso, existem formulações que buscam superar essas limitações. Em física de partículas, alguns modelos propõem descrever interações envolvendo o gráviton, como o Gravitoeletromagnetismo (GEM). A GEM tenta descrever a gravidade de forma análoga ao eletromagnetismo. Como resultado, é possível construir uma Lagrangiana para essa teoria, o que permite sua quantização.

Neste trabalho, exploramos formas de analisar o espalhamento Compton por meio da teoria GEM. Nesse formalismo, decompomos o tensor de Weyl em componentes gravitoelétricas e gravitomagnéticas, permitindo assim a construção de uma Lagrangiana, que pode ser utilizada para descrever a interação gráviton-férmion. O espalhamento Compton gravitacional é um processo que examina a interação entre grávitons e férmions e, utilizando a GEM, conseguimos descrever a amplitude de probabilidade e calcular a seção de choque do sistema. Observa-se que a seção de choque diferencial na GEM difere em unidades da seção de choque diferencial na QED. Na QED, a constante de acoplamento é adimensional, enquanto que na GEM ela possui unidades de inverso de energia. Portanto, ao calcularmos a seção de choque de uma interação envolvendo a GEM, é necessário multiplicar a constante de acoplamento da mesma por um fator com unidade de energia, ajustando assim o problema.

Há diferentes formas de introduzir temperatura no sistema, como os métodos de CTP, Matsubara e TFD. Para diagramas no nível de árvore, onde não há efeitos de loop, a TFD se mostra mais eficiente para descrever processos de espalhamento. Além disso, podemos obter uma descrição mais completa ao introduzir temperatura por meio da TFD. Observamos que esse método envolve a duplicação do espaço de Hilbert usual, o que nos obriga a redefinir os operadores de campo usando as transformações de Bogoliubov. Como resultado, surgem funções térmicas que respeitam as estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein. Embora os cálculos sejam extensos, o formalismo permite focar nos termos de medida, diretamente relacionados aos elementos 1,1 da matriz térmica. Essa abordagem destaca a importância dos efeitos térmicos nesses processos, onde as funções térmicas desempenham um papel predominante. Nesse contexto, a seção de choque diferencial do espalhamento Compton gravitacional apresenta funções térmicas que dominam toda a seção de choque quando consideramos o limite de altas temperaturas, $\beta \rightarrow 0$. Já no limite de baixas temperaturas, isto é, $\beta \rightarrow \infty$, recuperamos a seção de choque à temperatura zero. Considerar os efeitos térmicos é essencial, pois, além de descrever os efeitos em processos reais, nos dá uma visão sobre fenômenos que ocorrem no interior de estrelas, onde as temperaturas são extremamente altas.

Como perspectivas futuras, é possível investigar o espalhamento Compton gravitacional em ordens superiores da matriz S , onde os métodos alternativos para introduzir temperatura, mencionados anteriormente, provavelmente forneceriam uma análise mais detalhada desse problema. Além disso, podemos explorar os efeitos da Violação de Lorentz ao aplicarmos um campo de fundo ao espalhamento. Essa análise nos permitiria entender melhor como uma possível unificação do MP e da RG aconteceria, visto que em um contexto de violação nas simetrias de Lorentz essas teorias devem ser unificadas.

REFERÊNCIAS

- ABDALLA, E. Teoria quântica da gravitação: cordas e teoria m. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 27, p. 147–155, 2005.
- ARKANI-HAMED, N. et al. All loop scattering as a counting problem. **arXiv preprint arXiv:2309.15913**, 2023.
- BAKOPOULOS, A. Gravitoelectromagnetism: Basic principles, novel approaches and their application to electromagnetism. **arXiv preprint arXiv:1610.08357**, 2016.
- BEL, L. Sur la radiation gravitationnelle. **COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L ACADEMIE DES SCIENCES**, GAUTHIER-VILLARS/EDITIONS ELSEVIER 23 RUE LINOIS, 75015 PARIS, FRANCE, v. 247, n. 15, p. 1094–1096, 1958.
- CABRAL, D.; SANTOS, A. Compton scattering in TFD formalism. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 83, n. 1, p. 25–32, 2023.
- CABRAL, D.; SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Violation of Lorentz symmetries and thermal effects in Compton scattering. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 138, n. 1, p. 91–105, 2023.
- CALLEN, H. B.; SCOTT, H. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1998.
- CARLIP, S. Quantum gravity: a progress report. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 64, n. 8, p. 885–943, 2001.
- CASCIOLI, F.; MAIERHÖFER, P.; POZZORINI, S. Scattering amplitudes with open loops. **Physical Review Letters**, APS, v. 108, n. 11, p. 111601–111605, 2012.
- CIUFOLINI, I.; PAVLIS, E. C. A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense–Thirring effect. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 431, n. 7011, p. 958–960, 2004.
- COSTA, L. F. O.; HERDEIRO, C. A. Gravitoelectromagnetic analogy based on tidal tensors. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 78, n. 2, p. 024021–024028, 2008.
- DANEHKAR, A. On the significance of the Weyl curvature in a relativistic cosmological model. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 24, n. 38, p. 3113–3127, 2009.
- DEBEVER, R. La super-énergie en relativité générale. **Bull. Soc. Math. Belg**, v. 10, p. 112–147, 1959.
- GOZZI, E.; PENCO, R. Three approaches to classical thermal field theory. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 326, n. 4, p. 876–910, 2011.
- HEAVISIDE, O. A gravitational and electromagnetic analogy. **The Electrician**, v. 31, n. Part I, p. 281–282, 1893.

IORIO, L. A critical analysis of a recent test of the Lense–Thirring effect with the Lageos satellites. **Journal of Geodesy**, Springer, v. 80, p. 128–136, 2006.

JESUS, W. et al. Gravitational electron–positron scattering. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 137, n. 2, p. 260–265, 2022.

KELDysh, L. V. Diagram technique for nonequilibrium processes. In: **Selected Papers of Leonid V Keldysh**. [S.l.]: World Scientific, 2024. p. 47–55.

KHANNA, F. C. **Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications**. [S.l.]: World Scientific, 2009.

KUBO, R.; TODA, M.; HASHITSUME, N. **Statistical physics II: nonequilibrium statistical mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 31.

LENSE, J.; THIRRING, H. Über den einfluß der eigenrotation der zentralkörper auf die bewegung der planeten und monde nach der einsteinschen gravitationstheorie. **Physikalische Zeitschrift**, S. Hirzel Verlag, v. 19, p. 156–163, 1918.

LORENTZ, H. A. Considerations on gravitation. **Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences**, v. 2, p. 559–574, 1899.

MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. **Progress of Theoretical Physics**, Oxford University Press, v. 14, n. 4, p. 351–378, 1955.

MATTE, A. Sur de nouvelles solutions oscillatoires des equations de la gravitation. **Canadian Journal of Mathematics**, Cambridge University Press, v. 5, p. 1–16, 1953.

MERTIG, R.; BÖHM, M.; DENNER, A. Feyn calc-computer-algebraic calculation of Feynman amplitudes. **Computer Physics Communications**, Elsevier, v. 64, n. 3, p. 345–359, 1991.

MOREIRA, M. A. O modelo padrão da física de partículas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 31, p. 1306–1316, 2009.

PATHRIA, R. K. **Statistical Mechanics: International Series of Monographs in Natural Philosophy**. [S.l.]: Elsevier, 2017. v. 45.

PESKIN, M. E. **An introduction to quantum field theory**. [S.l.]: CRC press, 2018.

RAMOS, J.; MONTIGNY, M. de; KHANNA, F. C. On a lagrangian formulation of gravitoelectromagnetism. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 42, n. 10, p. 2403–2420, 2010.

REMIDDI, E. Generalised cuts and Wick rotations. **Loops and Legs in Quantum Field Theory**, v. 303, p. 86–96, 2018.

RIVELLES, V. O. A teoria de cordas e a unificação das forças da natureza. **Física na Escola**, v. 8, n. 1, p. 10–16, 2007.

ROVELLI, C. **Quantum gravity**. [S.l.]: Cambridge university press, 2004.

ROVELLI, C. Loop quantum gravity. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 11, p. 1–69, 2008.

- SALINAS, S. R. **Introdução à física estatística**. [S.l.]: Edusp, 1999.
- SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Gravitational Casimir effect at finite temperature. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer, v. 55, p. 5356–5367, 2016.
- SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Quantized gravitoelectromagnetism theory at finite temperature. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 31, n. 20n21, p. 1650122–1650140, 2016.
- SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Gravitational Bhabha scattering. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 34, n. 20, p. 205007–205017, 2017.
- SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Thermal corrections for gravitational Möller scattering. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 34, n. 08, p. 1950044–1950054, 2019.
- SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Gravitational Möller scattering, Lorentz violation and finite temperature. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 35, n. 26, p. 2050213–2050234, 2020.
- SOUZA, P. et al. On Lorentz violation in $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ scattering at finite temperature. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 791, p. 195–200, 2019.
- ULHOA, S.; SANTOS, A.; KHANNA, F. C. Scattering of fermions by gravitons. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 49, n. 4, p. 54–64, 2017.
- UMEZAWA, H.; MATSUMOTO, H.; TACHIKI, M. Thermo field dynamics and condensed states. 1982.
- ZHOU, Y. Singularity of Feynman propagator and Cutkosky’s cutting rules. **arXiv preprint hep-ph/0508225**, 2005.