



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Física

Espalhamento Bhabha com violação da simetria de Lorentz

Daniel Souza Cabral

Orientador: Prof. Dr. Alesandro Ferreira dos Santos

Cuiabá
Julho 2022

Daniel Souza Cabral

Espalhamento Bhabha com violação da simetria de Lorentz

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal de Mato Grosso para obtenção do título de bacharel em física.

Orientador: Prof. Dr. Alesandro Ferreira dos Santos

Cuiabá
Julho 2022

Resumo

Neste trabalho será estudado o espalhamento Bhabha, um dos processos mais recorrentes da eletrodinâmica quântica, sob efeitos de violações das simetrias de Lorentz e CPT. Para isso é feito um estudo acerca da teoria do Modelo Padrão e suas características, analisando posteriormente sua extensão, que leva em conta tais quebras de simetria. Sendo assim, será calculado, de forma analítica utilizando propriedades da teoria quântica de campos, grandezas úteis provenientes deste espalhamento, tal como a seção de choque diferencial. Os resultados obtidos serão comparados com dados de três experimentos diferentes, buscando estimar um valor limite para o parâmetro que caracteriza a violação de Lorentz.

Palavras-chave: Eletrodinâmica quântica, Modelo Padrão estendido, violação de Lorentz, espalhamento Bhabha.

Abstract

In this work, the Bhabha scattering, one of the most recurrent in quantum electrodynamics, will be studied under the effects of violations of Lorentz and CPT symmetries. For this, a study is made about the theory of the Standard Model and its characteristics, later analyzing its extension, which takes into account such symmetry breaks. Therefore, using quantum field theory properties in an analytical form, will be calculated some quantities on this scattering such as the differential cross section. The results achieved here are compared with experimental data from three different experiments, seeking to estimate a limit value for the parameter that characterizes the Lorentz violation.

Keywords: Quantum electrodynamics, Standard Model Extended, Lorentz violation, Bhabha scattering.

Agradecimentos

Quero deixar registrado o meu agradecimento à todas as pessoas que estiveram ao meu lado oferecendo apoio, incentivos e inspirações, os quais foram imprescindíveis para a obtenção desta conquista.

Primeiramente, aos meus pais por todo o apoio financeiro e emocional, assim como por toda a confiança e aposta à mim dedicada.

Aos meus irmãos Pedro Cabral, Luanna Resende, Matheus Brito, Samuel Cirqueira e Gustavo Cabral, por sempre confiarem em mim e pelo amparo nos momentos em que mais precisei.

Aos meus amores Thais, Michelly e Analu Ferreira que sempre confiaram e acreditaram em mim e me fizeram sorrir mesmo nos momentos em que não haviam motivos. Bem como aos meus amigos Kevin, Alberto e Lincoln; e minhas amigas Ana Paula Xavier e Jenniffer Gonçalves, que foram fundamentais para minha convivência e permanência em Cuiabá.

Agradeço, também, à todos os meus amigos e companheiros de graduação, que estiveram ao meu lado em todos os momentos durante o curso e tornaram o caminho mais prazeroso, em especial à Eduardo Vasques, Temerson Lara, Luana Zambonnini, Liziê Moreira, Rafael Dumer, Vitor Scherner, Emily Gonçalves, Lucas Evangelista, Tamires Lima, Ricardo Menezes, Ludmila Nogueira e Henrique Apocalypse.

Dedico um agradecimento também aos professores Alesandro dos Santos, Jeferson de Oliveira, Pablo de Souza, Daniela Maionchi, Teldo Pereira, Maurício Godoy e Eralci Therézio. Bem como ao meu professor do ensino médio Ramon Xavier que, além de complementarem enormemente a minha formação, me mostraram os melhores caminhos, dando apoio à segui-los.

Registro, inclusive, um agradecimento à UFMT pelo apoio financeiro a mim concedido por alguns períodos da minha graduação.

Por fim, agradeço à todos os meus amigos e familiares que não pude citar aqui mas que estão sempre presentes em minha vida, acadêmica e pessoal.

Lista de Figuras

1	Representação do cone de luz para duas coordenadas espaciais e a temporal. Ref. [1] adaptada.	19
2	Componentes básicos e principais de um diagrama de Feynman Ref [2].	57
3	Diagramas de Feynman para o espalhamento Bhabha. Ref [2].	63
4	Seção de choque diferencial multiplicada por s (curva sólida vermelha) em relação aos valores experimentais obtidos por [3] à uma energia de 29 GeV. . .	67
5	Seção de choque diferencial multiplicada por s (curva sólida vermelha) em relação aos valores experimentais obtidos por [4] para energias de 14 (círculo azul), 34.8 (diamante amarelo) e 43.6 GeV (estrela verde).	68
6	Superfície potencial (4.10) em função de ϕ_1 e ϕ_2 (esquerda). Gráfico deste mesmo potencial para o plano $\phi_2 = 0$ (direita).	71
7	Superfície potencial (4.12) em função de ϕ_1 e ϕ_2 (esquerda). Gráfico deste mesmo potencial para o plano $\phi_2 = 0$ (direita).	71
8	Esquema para rotações passiva (esquerda), onde o sistema de coordenadas sofre uma rotação por um ângulo θ , e ativa (direita) onde o vetor posição é rotacionado por um ângulo $-\theta$	74
9	Relação entre as transformações passiva (esquerda) e ativa (direita) para a posição do elétron (círculo preenchido) imerso em um campo de fundo, gerado por placas paralelas.	75
10	Boost de velocidade v feito no referencial S' em relação à S , no qual há uma partícula (círculo preenchido) e um personagem em repouso.	76
11	Boost de velocidade $-v$ realizado na partícula em relação ao referencial S' , no qual há um personagem em repouso.	76
12	Relação entre as transformações de observador (esquerda) e de partícula (direita) para o movimento do elétron (círculo preenchido) imerso em um campo de fundo, gerado por placas paralelas.	77
13	Diagramas de Feynman para as contribuições do termo W_1 . Modificado da Ref [2].	84
14	Diagramas de Feynman para as contribuições do termo W_2 . Modificado da Ref [2].	84
15	Diagramas de Feynman para as contribuições do termo W_3 . Modificado da Ref [2].	85

Lista de Tabelas

1	Descrição da classificação das partículas elementares.	13
2	Descrição das forças e partículas intermediadoras.	14
3	Valores para os parâmetros de corte e limites superiores para o termo de violação de Lorentz obtidos a partir de experimentos distintos.	91

Sumário

Introdução	10
1 Física moderna e as partículas do Modelo Padrão	13
1.1 Partículas elementares e interações fundamentais	13
1.2 Seção de choque	14
1.3 Relatividade especial	15
1.3.1 Relatividade Galileana	15
1.3.2 Transformações de Lorentz	16
1.3.3 Notação covariante e contravariante	19
1.3.4 4-Vetores	20
1.4 Mecânica quântica	21
1.4.1 Descrição clássica	21
1.4.2 Oscilador harmônico clássico	23
1.4.3 Descrição quântica	24
1.4.4 Oscilador harmônico quântico	25
1.5 Simetrias discretas e número quânticos	27
1.5.1 Paridade	27
1.5.2 Conjugação de carga	28
1.5.3 Reversão temporal	29
1.5.4 Simetrias CP e CPT	30
2 Teoria de campos	31
2.1 Campo clássico	31
2.1.1 Invariância e teorema de Noether	32
2.1.2 Transformações de Gauge	34
2.2 Segunda quantização	36
2.3 Campo de Dirac	39
2.3.1 Soluções particulares	41
2.3.2 Solução geral	42
2.3.3 Quantização do campo de Dirac	43
2.3.4 Propagador de Feynman	45
2.4 Campo de Fótons	46
2.4.1 Eletrodinâmica clássica	46
2.4.2 Liberdade de escolha de calibre	47
2.4.3 Solução geral	49
2.4.4 Quantização do campo fotônico	50
2.4.5 Propagador de Feynman	51
2.5 Modelo Padrão	52

3	Eletrodinâmica quântica e o espalhamento Bhabha	53
3.1	A hamiltoniana da QED	53
3.1.1	Operador de evolução temporal	54
3.1.2	Matriz espalhamento	56
3.2	Regras de Feynman	57
3.3	Cálculo da seção de choque diferencial	59
3.3.1	Fator de fluxo	60
3.3.2	Elemento do espaço de fase invariante de Lorentz	60
3.4	Espalhamento Bhabha	62
3.4.1	Amplitude de probabilidade	63
3.4.2	Seção de choque para o espalhamento Bhabha	66
4	Violação de Lorentz	69
4.1	Quebra espontânea de simetria	69
4.1.1	Mecanismo de Higgs	69
4.1.2	Transformação de observadores e partículas	73
4.2	Modelo Padrão Mínimo Estendido	79
4.2.1	Eletrodinâmica Quântica Estendida	81
4.3	Espalhamento Bhabha	83
4.4	Cálculo da amplitude com violação	86
4.4.1	Campo de fundo do tipo-tempo	87
4.4.2	Campo de fundo do tipo-espaço	91
	Conclusão	93
A	Matrizes gama e suas propriedades	94
B	Derivada covariante e invariância de gauge local	95
C	Variáveis de Mandelstam, média sob helicidades e truque de Casimir	96
	Referências Bibliográficas	99

Introdução

Desde a Grécia antiga, existe a ideia de que a matéria poderia ser dividida diversas vezes até que se chegasse em um ponto final. Tal limite, se trata de uma partícula que não pode mais ser dividida, isto é, indestrutível e não possui estrutura interna, conhecida como átomo.

Com o avanço da ciência, se inicia a descoberta de novas partículas bem como o desenvolvimento de novas teorias fundamentais, com a Mecânica Quântica e a Relatividade como pilares, para explicar suas interações [5]. A partir daí, surgem novas visões sobre o que se conhece em relação à matéria, incluindo a concepção de que o átomo não é indivisível como se pensava, mas possui constituintes. Com isso, surge a necessidade de uma teoria geral para descrever todas partículas elementares e explicar como interagem entre si.

Com essa finalidade, surge o Modelo Padrão (MP), que apesar de possuir tal nome, se trata de uma teoria, caracterizada por muitos cientistas como bastante elegante e relativamente completa a cerca da natureza, que descreve as partículas elementares, suas propriedades fundamentais e suas interações, exceto a gravidade [6]. O MP é construído com base em teorias de grupos de Lie, tendo como estrutura primordial o produto $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ [7].

Esta teoria pode ser dividida em setores, de forma que cada um destes é responsável por explicar um conjunto de determinadas partículas e interações. Dentre estes, está o setor que descreve o bóson de Higgs, partícula responsável pela geração de massa para os outros corpos presentes no MP. Este processo ocorre por uma quebra espontânea de simetria, onde esta ideia é oriunda do estudo da física da matéria condensada [8].

O fato do MP não incluir a gravidade faz com que esta seja incompleta, no que diz respeito à descrição da matéria e suas interações. Tal situação sugere que o Modelo Padrão não seja fundamental, mas efetivo. Por outro lado, as teorias mais conhecidas que abordam todas as forças fundamentais incluem a teoria das cordas e modelos supersimétricos [6].

Ainda em teoria das cordas, *A. Kostelecký* e *S. Samuel* estudaram um processo similar àquele do mecanismo de Higgs, voltando o olhar para componentes de campos tensoriais que possuem valor esperado no vácuo não nulo. Foi visto então, que este fato ocasiona uma violação da simetria de Lorentz na teoria [9].

Após isso, *S. Carroll*, *G. Field* e *R. Jackiw* estudaram a quebra de simetria de Lorentz e de paridade através da introdução de um vetor de fundo na teoria, utilizando dados astrofísicos para calcular possíveis limites observacionais dos parâmetros que caracterizam tal violação [10]. E, a partir dessa ideia, *D. Colladay* e *A. Kostelecký* introduzem uma extensão para a teoria do Modelo Padrão, denominado Modelo Padrão Estendido (MPE), que leva em conta a interação gravitacional e todos os fatores que violam as simetrias de Lorentz e CPT, através de campos tensoriais de fundo [11, 12].

Acredita-se que os campos de fundo que aparecem no MPE podem ter origem em transições de fase de uma teoria mais fundamental que trata da unificação entre o Modelo Padrão e a Relatividade Geral. Com isso, a busca pela quebra de simetria de Lorentz reside no fato de

que, esta pode ser um resquício observável da teoria primordial. Espera-se que essa, por sua vez, descreva a natureza em que a escala de energia envolvida seja da ordem de Planck, isto é, 10^{19}GeV [13].

Além disso, tal modelo estendido leva em conta a quebra destas simetrias em todos os setores do MP. Contudo, aqui será abordado apenas aquele que diz respeito às interações eletromagnéticas. Com o foco, em especial, para o espalhamento Bhabha, que trata da interação entre elétrons e pósitrons através de fótons intermediadores [2]. Esta reação é muito importante pois é uma das formas utilizadas para se determinar a luminosidade de um dado equipamento. Esta por sua vez esta relacionada à precisão na determinação de outras grandezas [14].

A partir disso, o objetivo deste presente trabalho é obter a seção de choque diferencial (grandeza que quantifica uma dada reação) para o espalhamento Bhabha, em processos com e sem termos que quebram a simetria de Lorentz e CPT. Os resultados serão sempre comparados com dados experimentais, com o intuito de se obter limites para os parâmetros de violação.

Primeiro, no capítulo introdutório, é necessário se tornar familiar à teoria do Modelo Padrão, fazendo uma breve discussão sobre a teoria e conceitos importantes como o de seção de choque, por exemplo. Após isso, como o MP descreve partículas fundamentais, é necessário uma breve revisão a cerca da Relatividade Restrita e Mecânica Quântica para a descrição da dinâmica de corpos que possuem dimensões pequenas e altas energias. Posteriormente, é abordado alguns conceitos de simetrias e grandezas importantes, bem como suas conservações.

No segundo capítulo, é feita uma abordagem sobre as características da teoria de campos, partindo de uma teoria clássica, olhando para simetrias e conservações à luz do teorema de Noether. E, após isso, chega-se à formulação de campos quânticos à luz do formalismo de segunda quantização. Com estas ideias bem difundidas, é possível descrever o comportamento dos elétrons e pósitrons, bem como dos fótons. Com isso, por completeza, é abordado também os outros setores do Modelo Padrão.

No capítulo 3, faz-se a união da descrição da dinâmica dos elétrons e pósitrons com aquela dos fótons, discutindo então a Eletrodinâmica Quântica. Esta, por sua vez, é abordada a partir da teoria da perturbação com base no formalismo de séries de Dyson, chegando à matriz espalhamento. A partir da qual são derivadas as regras de Feynman, que permitem calcular a amplitude de probabilidade e, posteriormente, a seção de choque. Tais resultados são comparados com dados oriundos de 2 experimentos distintos.

No último capítulo é abordada a violação de Lorentz, encarada como uma violação espontânea, voltando o olhar para a quebra de simetria mais familiar, o mecanismo de Higgs. Após isso, é enunciado o MPE e seus termos de violação. A partir do qual é extraído a Eletrodinâmica Quântica estendida e sua aplicação para o espalhamento Bhabha. É comparado, por fim, os resultados obtidos com dados de 3 experimentos diferentes, com o intuito de se sugerir um limite ao parâmetro de violação.

Neste trabalho, foram utilizadas unidades naturais, isto é $c = \hbar = \epsilon_0 = 1$, onde estas são a velocidade da luz, a constante de Planck reduzida e a permissividade elétrica no vácuo, respec-

tivamente. Entretanto, as grandezas são restauradas, a fim de se reobter as unidades de medida correta, no momento de se fazer comparações experimentais.

Além disso, para se calcular contrações de tensores e realizar simplificações necessárias, foi utilizado o pacote *FeynCalc*’ do programa *Wolfram Mathematica*.

1 Física moderna e as partículas do Modelo Padrão

1.1 Partículas elementares e interações fundamentais

Por partícula elementar entende-se aquela que não possui estrutura interna, isto é, corpos que compõem a matéria mas que não possuem composição. O MP propõe que exista na natureza um tipo de partículas elementares, chamadas de férmions, que interagem entre si através de campos, autogerados, trocando outro conjunto de corpos elementares, denominados bósons [15].

Caracteriza-se, então, estas partículas da seguinte forma: Os Férmions são partículas que possuem spin semi-inteiro e, por isso, obedecem o princípio da exclusão de Pauli e a estatística de Fermi-Dirac; Os Bósons possuem spin inteiro e obedecem a estatística de Bose-Einstein [16].

As partículas fermiônicas podem ser divididas em duas classes, os Quarks que carregam carga “cor” interagindo entre si através da interação forte e os Léptons que são “brancos”, isto é, não possuem cor. Além disso, ambos os grupos possuem spin $1/2$ [17].

Com tudo isso em vista, é possível descrever estas partículas elementares de uma forma esquemática de acordo com a Tabela 1. Estes corpos fundamentais, possuem seis “sabores”, ou tipos, para os quarks tem-se: Up, Down, Charm, Strange, Top e Bottom; enquanto que a classe dos Léptons é composta por: Elétron, Múon, Tau e seus respectivos neutrinos [17].

Geração	Quarks	Léptons
Primeira geração	Up Down	Elétron Neutrino do elétron
Segunda geração	Charm Strange	Múon Neutrino do Múon
Terceira geração	Top Bottom	Tau Neutrino do Tau

Tabela 1: Descrição da classificação das partículas elementares.

Além disso, as partículas fundamentais possuem parceiras, denominadas antipartículas, que compartilham o mesmo valor de spin e massa diferindo apenas nos sinais da carga elétrica e dos números quânticos, como o número leptônico por exemplo [6].

Entre os léptons, os neutrinos, como os nomes sugerem, são neutros enquanto que os outros possuem carga $-e$. Além disso, cada geração (ou família) superior à primeira é instável e, por isso, possuem uma meia vida implicando no decaimento em partículas de uma família inferior [15].

Como mencionado, os quarks possuem carga cor e, por isso, interagem entre si através da força forte formando sistemas que não possuem cor, os chamados Hádrons [17]. Estes sistemas podem ser de dois tipos, um par quark-antiquark, denominado Méson, ou um sistema de 3 quarks, os Bárions [6].

Já no que diz respeito às interações fundamentais, é necessário voltar a atenção para as qua-

tro forças da natureza: A gravidade, caracterizada por uma atração devido à partículas massivas; A eletromagnética, causada pela carga elétrica; A força forte que descreve a interação dentro de um núcleo atômico; A força fraca que explica os decaimentos em processos de reações e espalhamentos.

Na Tabela 2 é mostrada uma relação entre as forças, seus bósons intermediadores e sua característica particular de interação.

Interação	Bóson intermediador	Característica
Eletromagnética	Fóton	Através da carga elétrica
Forte	Glúons	Através da carga cor
Gravitacional	Gráviton	Através da carga massa
Fraca	Bósons Z^0 e W^\pm	Através do decaimento de sabores

Tabela 2: Descrição das forças e partículas intermediadoras.

Os bósons das interações eletromagnética e forte possuem massa e cargas nulas e também um alcance infinito, embora os campos gerados pelos glúons sejam confinados. As partículas que carregam a informação da força fraca são massivas e, além disso, W^+ , W^- e Z^0 atingem curtas distâncias e possuem cargas positiva, negativa e neutra, respectivamente. Além disso, todos estes possuem spin-1 [15].

O gráviton nunca foi detectado e, por questões de simetria, foi postulado como o intermediador da interação gravitacional possuindo massa nula e spin-2 [6, 17].

A força nuclear forte pode ser dividida em duas, fundamental e residual, esta primeira está relacionada com a interação entre cores enquanto que esta última é a responsável pela coesão do par próton-nêutron formando o núcleo, por exemplo [6, 17]. O maior esforço da física de partículas é estudar o comportamento de sistemas, em geral espalhamentos e colisões, em que partículas elementares interagem através das forças fundamentais da natureza, para isso é necessário a definição de uma grandeza denominada seção de choque.

1.2 Seção de choque

Para realizar medições e observações a cerca destas partículas e suas interações, é realizado diversos experimentos de espalhamentos, em geral, entre os corpos [18]. A seção de choque σ é uma grandeza, medida experimentalmente com dimensão de área, que fornece a probabilidade de acontecer um dado processo e permite, através de comparações de intensidade de feixes espalhados, a determinação do comportamento e “comprovações” das previsões feitas pela teoria [18, 14].

Usualmente, para se obter esta grandeza, é feita uma integração sob o ângulo de espalhamento θ , da seguinte grandeza

$$d\sigma(\theta) = \frac{\text{Densidade de estados finais}}{\text{Fluxo inicial de partículas}} W_{fi} \quad (1.1)$$

conhecida como seção de choque diferencial, que fornece o número de partículas espalhadas em um certo ângulo sólido $d\Omega$ [19]. Esta é usualmente medida em Barns (bn), onde $1m^2 = 10^{27}bn$.

A quantidade W_{fi} em (1.1) é a densidade de probabilidade de que partículas no estado inicial $|i\rangle$ decaiam em partículas finais $|f\rangle$ que é escrita, no espaço dos momentos, como

$$W_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{V} \delta^4 \left(\sum p_{\text{inicial}} - \sum p_{\text{final}} \right) \langle |M_{fi}|^2 \rangle, \quad (1.2)$$

onde, o termo V^{-1} é um fator de normalização e $(2\pi)^4 \delta^4(p)$ é a função delta de Dirac definida no espaço-tempo dos momentos para assegurar as conservações de energia-momento [14].

O fator $\langle |M_{fi}|^2 \rangle$ merece um tratamento especial, pois a grandeza M_{fi} é a amplitude de espalhamento que descreve como se dá o processo e que leva em conta todas as características do espalhamento estudado. Isto é, enquanto W_{fi} descreve a densidade de probabilidades de evolução de estados iniciais para finais, o termo M_{fi} fornece a amplitude de probabilidade para esta transição.

Por outro lado, é necessário, em geral, tomar a média sob todas as helicidades possíveis (diferentes projeções do spin na direção do momento) para todas as partículas. Isso se deve ao fato de que, em geral, o feixe inicial de partículas é não polarizado e a direção dos spins finais não são medidas [2]. Por essa razão, a seção de choque diferencial depende de $\langle |M_{fi}|^2 \rangle$ em vez de simplesmente $|M_{fi}|^2$.

Em suma, o Modelo Padrão é uma teoria que prevê todas as partículas elementares e suas interações partindo da ideia de que um férmion elementar gera um campo que, por meio deste, interage com outros trocando bósons mediadores de força [6]. É possível estudar essas previsões através de reações e processos de espalhamento, onde este é caracterizado por uma quantidade denominada seção de choque [19]. Por fim, é importante salientar que, para o cálculo da seção de choque diferencial, é necessário a utilização das técnicas fornecidas pela teoria quântica de campos, de maneira que este estudo tem como base fundamental a unificação entre a relatividade especial e a mecânica quântica moderna [18, 20, 21].

1.3 Relatividade especial

1.3.1 Relatividade Galileana

Para falar sobre relatividade é necessário, primeiramente, retornar à mecânica newtoniana, para isso pode-se enunciar as três leis de newton como [22]:

- 1ª Lei: Existem referenciais (chamados inerciais) em relação aos quais toda partícula isolada descreve um movimento retilíneo e uniforme.
- 2ª Lei: Em qualquer referencial inercial, a dinâmica de uma partícula é regida por $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.
- 3ª Lei: A cada ação corresponde uma reação de mesma intensidade e sentido oposto.

Dado essas leis para o movimento de corpos, é preciso conhecer como a descrição do movimento é alterada em relação à dois referenciais inerciais diferentes. E, as expressões que fornecem tais relações são as chamadas transformações de Galileu [23]. Supondo um referencial S' se movendo com velocidade constante V (na direção x em configuração *standard*) em relação à um outro S , as coordenadas são transformadas da seguinte forma

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (1.3)$$

Dessa forma, é possível extrair a transformação de velocidades, ou seja, para um corpo se movendo com velocidade $v = dr/dt$ em relação à S , irá se mover com velocidade

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - V \frac{dt}{dt'} = \frac{dx}{dt} - V = v_x - V, \quad (1.4)$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = v_y, \quad (1.5)$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} = v_z. \quad (1.6)$$

em relação à S' .

Pela primeira lei de Newton, é implícito que o tempo é absoluto apesar de estar expressado de maneira explícita nas transformações de Galileu, em outras palavras, a distância temporal entre dois eventos é a mesma em qualquer referencial. O que resta é verificar que a distância espacial entre dois pontos a e b (que é medida a tempo fixo $t_a = t_b$) também é invariante, ou seja,

$$\begin{aligned} (\Delta S')^2 &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = (x'_b - x'_a)^2 + (y'_b - y'_a)^2 + (z'_b - z'_a)^2 \\ &= (x_b - Vt_b - x_a + Vt_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2 \\ &= [x_b - x_a + V(t_a - t_b)]^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2 \\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta S)^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Logo, na relatividade de Galileu, os intervalos espacial e temporal são absolutos.

1.3.2 Transformações de Lorentz

Apesar do fato de que as transformações de Galileu conectam a descrição de fenômenos observados por dois referenciais diferentes, elas não são válidas para o eletromagnetismo. E, motivado por essa teoria e pelo comportamento da luz, Einstein utilizou das transformações de Lorentz para conectar dois referenciais inerciais de uma forma correta [1].

Tal teoria obedece dois postulados fundamentais, o primeiro que expressa a equivalência entre quaisquer dois referenciais de forma a não existir um observador privilegiado e, com isso, todas as leis físicas são invariantes sob transformações de tais referenciais. E o segundo que se trata da constância da velocidade da luz, a qual é a mesma para todo e qualquer referencial

inercial e seu valor é $c = 2,997924580 \times 10^8 m/s$ no vácuo [23, 1].

Supondo dois referenciais S e S' onde este se move com uma velocidade V em relação ao primeiro, tais transformações de coordenadas (supondo o movimento relativo apenas na direção x) são descritas por

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - Vx). \quad (1.8)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}$.

A partir desse ponto, começa-se a tratar o tempo não mais como o parâmetro com o qual a posição varia e que juntamente com as coordenadas configuram um conjunto espacial e temporal, mas sim como uma coleção de quatro coordenadas no chamado espaço-tempo.

Normalmente, é mais usual descrever essas quatro coordenadas em termos de um vetor coluna onde, pelas transformações já mencionadas, pode-se conceber a seguinte matriz de aplicação linear

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_{11} + xa_{12} + ya_{13} + za_{14} \\ ta_{21} + xa_{22} + ya_{23} + za_{24} \\ ta_{31} + xa_{32} + ya_{33} + za_{34} \\ ta_{41} + xa_{42} + ya_{43} + za_{44} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Logo, por comparação entre as Eqs. (1.8) e (1.9), tem-se

$$\begin{cases} ta_{11} + xa_{12} + ya_{13} + za_{14} = \gamma t - \gamma Vx; \\ ta_{21} + xa_{22} + ya_{23} + za_{24} = \gamma x - \gamma Vt; \\ ta_{31} + xa_{32} + ya_{33} + za_{34} = y; \\ ta_{41} + xa_{42} + ya_{43} + za_{44} = z, \end{cases} \quad (1.10)$$

ou seja, é possível escrever a matriz de transformação como

$$T \equiv \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -V\gamma & 0 & 0 \\ -V\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

É importante notar que as transformações de Lorentz mais gerais possíveis podem conter *boosts* (empurrões) nas três dimensões espaciais, bem como rotações nestas. Por transformações de *boost* entende-se a descrição da conexão entre dois referenciais, em que um se move em relação ao outro. Dessa maneira, a matriz Λ descrita por (1.11) é a transformação relacionada a apenas um boost (na direção x) por simplicidade.

Além disso, pelo segundo postulado, nota-se que para qualquer referencial inercial o deslo-

camento espacial da luz ($c = 1$) pode ser escrito como

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 \rightarrow dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0. \quad (1.12)$$

É introduzido, portanto, um intervalo espaço-temporal

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1.13)$$

de tal maneira que este pode ser classificado em três tipos distintos, intervalos tipo-luz ($ds^2 = 0$), tipo-espaço ($ds^2 < 0$) e tipo-tempo ($ds^2 > 0$) [24].

Sendo assim, o que antes se tinha como intervalos espacial e temporal absolutos, agora tem-se um intervalo espaço-temporal absoluto, o que implica em uma não conservação dos intervalos espacial e temporal separadamente. Em outras palavras, sejam dois eventos a e b , em relação ao referencial S , separados por intervalos de tempo $\Delta t = t_b - t_a$, no referencial S' pode-se escrever

$$\Delta t' = t'_b - t'_a = \gamma(t_b - Vx_b) - \gamma(t_a - Vx_a) = \gamma\Delta t + V\gamma(x_a - x_b). \quad (1.14)$$

Entretanto, se o evento ocorre no mesmo lugar em S , a Eq. (1.14) se torna

$$\Delta t' = \gamma\Delta t = \gamma\tau, \quad (1.15)$$

onde τ é dito intervalo de tempo próprio, e este fenômeno é denominado dilatação temporal [23, 1].

Fazendo de maneira análoga, para um intervalo espacial entre dois eventos que no referencial S é $\Delta x = x_b - x_a$, em S' este intervalo será

$$\Delta x' = x'_b - x'_a = \gamma(x_b - Vt_b) - \gamma(x_a - Vt_a) = \gamma\Delta x + \gamma V(t_a - t_b) \quad (1.16)$$

mas se a medida for feita ao mesmo tempo em S , a Eq. (1.16) passa a ser

$$L_0 = \Delta x' = \gamma\Delta x, \quad (1.17)$$

onde L_0 é comprimento próprio que é medido em S' . Este fenômeno é denominado contração de comprimento ou de Lorentz [23, 1].

Outra consequência importante é a composição de velocidades. Para entendê-la, suponha a componente x da velocidade de um corpo medida pelo referencial S' , isto é,

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d[\gamma(x - Vt)]}{d[\gamma(t - Vx)]} = \frac{dx - Vdt}{dt - Vdx} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - V\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x}, \quad (1.18)$$

onde v_x é a componente x da velocidade medida em S .

Analogamente, para as outras componentes chega-se à

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{d[\gamma(t - Vx)]} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - Vv_x}, \quad (1.19)$$

e, também,

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{d[\gamma(t - Vx)]} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - Vv_x}. \quad (1.20)$$

Pelo fato de se classificar os eventos em três tipos (tipo-espaço, tipo-tempo e tipo-luz) e por conta da estrutura da Eq. (1.12) verifica-se que os eventos do tipo-luz são aqueles que estão situados na hiper-superfície de um cone no espaço-tempo com vértice na origem $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$. Com isso pode-se dizer que os fenômenos do tipo-tempo são classificados pelos pontos que estão dentro do hiper-volume delimitado por tal superfície, enquanto que os do tipo-espaço ficam do lado de fora dessa figura geométrica. Essa abordagem pode ser esquematizada de uma maneira pictórica como mostrado na Figura 1.

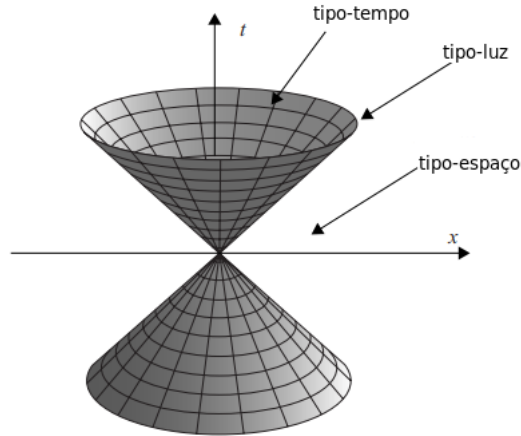


Figura 1: Representação do cone de luz para duas coordenadas espaciais e a temporal. Ref. [1] adaptada.

1.3.3 Notação covariante e contravariante

Para o que se segue, e por simplicidade, é necessário tomar as seguintes mudanças de notação

$$s \equiv x^\mu \quad x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z, \quad (1.21)$$

ou seja, nesta notação, um ponto no espaço-tempo é escrito da seguinte forma

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (1.22)$$

Além disso, o intervalo desse espaço-tempo passa a ser reescrito como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (1.23)$$

de maneira que é adotada uma notação chamada de convenção de soma de Einstein, que subentende implicitamente uma soma entre todas as coordenadas sempre que houverem dois índices repetidos [24].

A Eq. (1.23) pode ser posta numa forma matricial da seguinte maneira

$$ds^2 \equiv dx^\mu dx_\mu = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu, \quad (1.24)$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

é a chamada métrica do espaço-tempo de Minkowski.

A partir desse tensor métrico dado em (1.25), é possível extrair uma identidade denominada levantamento e abaixamento de índices, escrita como

$$\eta_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu; \quad \eta^{\mu\nu} A_\nu = A^\mu, \quad (1.26)$$

de tal forma que, os vetores com índice superior são denominados contravariantes enquanto que no segundo caso se tem os vetores covariantes.

Como exemplo, para $x^\mu = (t, x, y, z)$ tem-se

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (t, -x, -y, -z). \quad (1.27)$$

1.3.4 4-Vetores

Além do vetor posição x^μ dado em (1.27), os vetores dinâmicos (velocidade, momento, força e etc...) tem suas “versões relativísticas”, como por exemplo

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) = (\gamma, \gamma \vec{v}) \quad (1.28)$$

para a velocidade, onde $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ é a velocidade tridimensional usual.

E também,

$$p^\mu = m v^\mu = (m\gamma, m\gamma \vec{v}) = (m\gamma, \gamma \vec{p}) \quad (1.29)$$

para o momento, com $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ sendo o momento linear clássico.

Outro vetor de suma importância é a derivada no espaço-tempo dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad (1.30)$$

onde, atuando em um vetor como aquele dado por (1.27) fornece

$$\partial_\mu x^\mu = \frac{\partial(t)}{\partial t} + \frac{\partial(-x)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} + \frac{\partial(-z)}{\partial z} = -2 \quad (1.31)$$

Tais vetores, em contraponto aos da dinâmica newtoniana, são denominados quadri vetores por terem quatro componentes em vez de três. E nessa nova mecânica, os referenciais, como mencionado, se transformam de acordo com as transformações de Lorentz e, conseqüentemente, os 4-vetores são aqueles que se transformam da seguinte forma

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu; \quad x^\mu = (\Lambda^\mu_\nu)^{-1} x'^\nu \quad (1.32)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -V\gamma & 0 & 0 \\ -V\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

De tal forma que a transformação inversa $(\Lambda^\nu_\mu)^{-1}$ pode ser obtida pela mudança $V \rightarrow -V$.

1.4 Mecânica quântica

Além da teoria da relatividade, a física moderna desenvolvida no século passado também conta com a formulação da mecânica quântica moderna. Esta, por sua vez, descreve o comportamento de partículas de dimensões relativamente pequenas nas quais aparecem fenômenos sem análogos na teoria clássica.

Dessa forma, para melhor interpretação, é necessário dar início à uma discussão sobre as características da mecânica clássica aplicando-as à um oscilador harmônico. A partir daí, a descrição quântica da dinâmica deste mesmo sistema pode ser obtida através de um formalismo denominado quantização canônica.

1.4.1 Descrição clássica

Resolver um problema de mecânica clássica para uma partícula significa encontrar a posição em função do tempo ou, ao menos, a equação de movimento do problema, que é uma equação diferencial cuja solução fornece tal função. De forma que, a partir dessa, é possível obter todas as informações do sistema.

Para obter a equação de movimento de um sistema clássico é preciso partir da função lagrangiana, isto é, uma relação matemática que trata da diferença entre as energias cinética e potencial,

$$L = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) - V(q_1, q_2, \dots, q_N) = T(\dot{q}_i) - V(q_i), \quad (1.34)$$

onde q_i e \dot{q}_i são as coordenadas e velocidades generalizadas da i -ésima partícula, respectivamente. Aqui o índice varia conforme o número N de graus de liberdade do sistema, ou seja, $i = 1, 2, \dots, N$.

Dessa forma, partindo das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.35)$$

chega-se facilmente às equações de movimento que regem o sistema [22].

Além disso, a partir de uma transformada de Legendre, é definido uma grandeza denominada momento canonicamente conjugado

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.36)$$

e uma nova função escalar, conhecida como Hamiltoniana

$$H(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - L(\dot{q}, q_i). \quad (1.37)$$

Destas, pode-se determinar as equações de movimento a partir de um conjunto de $2N$ equações diferenciais parciais de primeira ordem conhecidas como equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{cases} \quad (1.38)$$

Em geral, na maior parte dos casos físicos de interesse, a função Hamiltoniana é igual a energia total do sistema, e é sempre conservada quando o potencial não possui dependência explícita do tempo [22].

Como é possível extrair todas as informações do sistema a partir da hamiltoniana, é comum, e geralmente usual, conceber funções dinâmicas que podem expressar quantidades físicas importantes para a caracterização do movimento. Por função dinâmica entende-se: relações matemáticas que dependam das coordenadas, dos momentos e, em alguns casos, do tempo. Há, a partir daí, a necessidade de definir um novo operador chamado parênteses de Poisson que, para duas funções dinâmicas F e G , toma a seguinte forma

$$\{F(q_i, p_i, t), G(q_i, p_i, t)\} = \{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (1.39)$$

Dessa definição, é possível extrair de (1.39) as relações

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0; \quad \{q_i, p_j\} = -\{p_j, q_i\} = \delta_{ij}, \quad (1.40)$$

onde δ_{ij} é a “função” delta de Kronecker.

1.4.2 Oscilador harmônico clássico

É sabido que o oscilador harmônico é um dos sistemas de mais importância na física, pois qualquer sistema pode ser tomado, em uma primeira aproximação, como um oscilador ou um conjunto de osciladores [22]. Para entender seu movimento escreve-se sua lagrangiana, sabendo que as energias potencial e cinética são

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2; \quad V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2, \quad (1.41)$$

onde m é sua massa e ω_0 sua frequência natural de oscilação.

Então a lagrangiana do oscilador se torna

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2, \quad (1.42)$$

a partir da qual o momento canonicamente conjugado à coordenada x é escrito

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad (1.43)$$

A hamiltoniana, pela transformação de Legendre, vem a ser simplesmente

$$H(p_x, x) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2x^2}{2}. \quad (1.44)$$

Considerando uma constante E que tem unidades de energia, podemos reescrever (1.44) como

$$H = E \frac{p_x^2}{2mE} + E \frac{m\omega_0^2x^2}{2E} = E \left(\frac{p_x}{\sqrt{2mE}} \right)^2 + E \left(\sqrt{\frac{m}{2E}} \omega_0 x \right)^2. \quad (1.45)$$

A qual se parece com a equação de uma elipse. Além disso, renomeando as funções entre parênteses em (1.45) como funções posição e momento modificadas $\chi(t)$ e $\rho(t)$, respectivamente, chega-se à seguinte relação

$$H = E\rho^2(t) + E\chi^2(t), \quad (1.46)$$

onde

$$\rho(t) = \frac{p_x}{\sqrt{2mE}}, \quad \chi(t) = \sqrt{\frac{m}{2E}} \omega_0 x. \quad (1.47)$$

É fácil ver que a equação (1.46) configura uma circunferência de raio $\sqrt{H/E}$ no espaço de fase modificado $\chi \times \rho$, logo podemos representar um ponto nesse espaço por uma função $a(t)$

definida no plano complexo fazendo as seguintes definições

$$\begin{aligned} a(t) &= \chi(t) + i\rho(t) = \sqrt{\frac{m}{2E}}\omega_0 x + i\frac{p_x}{\sqrt{2mE}}; \\ a^*(t) &= \chi(t) - i\rho(t) = \sqrt{\frac{m}{2E}}\omega_0 x - i\frac{p_x}{\sqrt{2mE}}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Com isso, obtém-se uma forma de reescrever as funções χ e ρ em termos de $a(t)$ e $a^*(t)$ como

$$\chi(t) = \frac{1}{2}(a(t) + a^*(t)), \quad \rho(t) = \frac{1}{2i}(a(t) - a^*(t)). \quad (1.49)$$

E, finalmente, a partir de (1.49) a hamiltoniana modificada (1.46) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$H = E \left(\frac{a^2 + a^{*2}}{4} + \frac{aa^*}{2} - \frac{a^2 + a^{*2}}{4} + \frac{aa^*}{2} \right) = E(aa^*). \quad (1.50)$$

Mas, por questões de simetria, a Eq. (1.50) pode ser dada por

$$H = \frac{E}{2}(a(t)a^*(t) + a^*(t)a(t)). \quad (1.51)$$

1.4.3 Descrição quântica

Para a abordagem de um sistema quântico é necessário, primeiramente, transformar as quantidades que descrevem as posições e os momentos, bem como a hamiltoniana, em operadores lineares, isto é,

$$q_i(t), p_i(t) \longrightarrow \hat{q}_i(t), \hat{p}_i(t); \quad H(q_i(t), p_i(t), t) \longrightarrow \hat{H}(\hat{q}_i(t), \hat{p}_i(t), t). \quad (1.52)$$

Entretanto, será utilizado aqui uma descrição da dinâmica que trata os operadores como sendo constantes no tempo (representação de Schrödinger). Além disso, por consequência, é necessário alterar também o parênteses de Poisson pelo operador de comutação multiplicado por um fator $-i$, isto é

$$\{F, G\} \longrightarrow -i[\hat{F}, \hat{G}]. \quad (1.53)$$

Sendo assim, as relações dadas em (1.40) passam a ser

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0; \quad [\hat{q}_j, \hat{p}_k] = -[\hat{p}_k, \hat{q}_j] = i\delta_{jk}, \quad (1.54)$$

onde esse processo é denominado quantização canônica [21].

Um resultado importante da mecânica quântica é o princípio da incerteza de Heisenberg que diz que, dado dois operadores \hat{A} e \hat{B} , o produto das incertezas (ou variância) destes obedece a

seguinte relação

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle}{2i} \quad (1.55)$$

isto é, para os operadores de posição e momento \hat{q}_j e \hat{p}_k , com $j, k = 1, 2, 3$ representando as coordenadas do espaço, as Eqs. (1.54) e (1.55) fornecem

$$\Delta q_i \Delta p_j \geq \frac{\langle i \delta_{ij} \rangle}{2i} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (1.56)$$

que é uma identidade muito recorrente e importante [20].

Outra relação de incerteza muito importante é a de energia-tempo dada por

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2} \quad (1.57)$$

onde esta implica na restrição da escala de tempo de medição de um estado quântico com energia média ΔE [25].

1.4.4 Oscilador harmônico quântico

Como o oscilador harmônico é um sistema físico de grande interesse, é importante discutir sua formulação com base na teoria quântica. A partir do formalismo de quantização canônica, é possível obter a dinâmica deste, isto é, fazendo $x \rightarrow \hat{x}$ e $p_x \rightarrow \hat{p}_x$, e tomando as relações de comutação apresentadas em (1.54).

Com isso, partindo da formulação clássica já abordada e das funções complexas (1.48) pode-se conceber os seguintes operadores

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2mE}}(m\omega_0\hat{x} + i\hat{p}_x), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2mE}}(m\omega_0\hat{x} - i\hat{p}_x). \quad (1.58)$$

Esses operadores são denominados operadores de levantamento e abaixamento (ou criação e aniquilação, no contexto da teoria de campos) pois eles diminuem ou aumentam o nível de energia em uma unidade cada vez que aplicados, a menos de um fator. Para estes chega-se à seguinte relação de comutação

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \frac{1}{2mE} [(m\omega_0\hat{x} + i\hat{p}_x), (m\omega_0\hat{x} - i\hat{p}_x)] = \\ &= \frac{1}{2mE} \{ m^2\omega_0^2[\hat{x}, \hat{x}] - im\omega_0[\hat{x}, \hat{p}_x] + im\omega_0[\hat{p}_x, \hat{x}] + [\hat{p}_x, \hat{p}_x] \} = \\ &= \frac{1}{2mE} \{ -im\omega_0(i) - im\omega_0(i) \} = \frac{1}{2mE} (2m\omega_0) = \frac{\omega_0}{E}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Lembrando a relação deduzida no decorrer do estudo da “velha mecânica quântica” [25], faz-se a escolha $E = \hbar\omega_0 = \omega_0$. Então a Eq. (1.59) se torna simplesmente

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1. \quad (1.60)$$

Como os operadores escada atuando nos autoestados de energia $|n\rangle$ o modificam, é necessário definir um limite para que não hajam energias negativas, para isso é tomado no nível fundamental

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad (1.61)$$

além disso, estes operadores atuando nos níveis de energia são definidos como [26]

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle; \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.62)$$

Com tudo isso, partindo de (1.50) o operador hamiltoniano pode ser escrito como

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\omega_0}{2}(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) = \omega_0\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \quad (1.63)$$

Apesar do fato de que os operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} não são hermitianos, o operador $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ que aparece no hamiltoniano é um observável e é frequentemente denominado operador número \hat{N} pois ele fornece o nível de energia n o qual o oscilador se encontra, isto é,

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle \equiv \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (1.64)$$

Logo, é fácil verificar que os vetores $|n\rangle$ são autoestados do hamiltoniano

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle = \omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle, \quad (1.65)$$

onde E_n são as autoenergias do oscilador harmônico. Além disso, o vetor que caracteriza o estado fundamental é $|0\rangle$ cuja energia pode ser extraída da relação

$$\hat{H}|0\rangle = \omega_0\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|0\rangle = \omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)|0\rangle = \frac{\omega_0}{2}|0\rangle. \quad (1.66)$$

Uma coisa importante a se notar é que diferentemente da energia, a posição do oscilador não assume valores discretos, em vez disso o operador \hat{x} possui um espectro contínuo, ou seja, na representação dos autoestados localizados, o vetor de estado do sistema pode ser escrito como

$$|\psi_n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n(x)|x\rangle dx, \quad (1.67)$$

onde o índice n representa o nível de energia no qual o oscilador se encontra, enquanto que

$$\Psi_n(x) = \langle x|n\rangle \quad (1.68)$$

é a função de onda o n -ésimo estado e $|\Psi_n(x)|^2 dx$ exprime a probabilidade de se encontrar a partícula entre x e $x + dx$.

Outra identidade bastante importante é a chamada relação de completeza, dado por

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \hat{1}, \quad (1.69)$$

para os vetores de espectro discreto, e

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \hat{1}, \quad (1.70)$$

para os autoestados contínuos. Onde $\hat{1}$ é o operador identidade.

1.5 Simetrias discretas e número quânticos

Por números quânticos entende-se grandezas quantizadas, sem analogia na teoria clássica, que são conservadas através de reações e processos. Destes, é possível definir dois tipos, os números quânticos aditivos e multiplicativos [27].

Sejam $N = \sum_i n_i$ e $M = \sum_i m_i$, onde n_i e m_i são os conjuntos de números quânticos do sistema antes e depois do processo, respectivamente. Os conjuntos dos n 's e m 's são ditos números quânticos aditivos se satisfazem a seguinte relação de conservação

$$N = \sum_i n_i = M = \sum_i m_i. \quad (1.71)$$

De forma inteiramente análoga, para $N' = \prod_i n_i$ e $M' = \prod_i m_i$ define-se como números quânticos multiplicativos aqueles conjuntos que se conservam da seguinte maneira

$$N' = \prod_i n_i = M' = \prod_i m_i. \quad (1.72)$$

Em outras palavras, dado um conjunto de números quânticos para o sistema antes e depois da reação, se tal processo preserva a soma destes números dizemos que estes são aditivos. Do contrário, se a reação preserva o produto destes, por consequência estes serão multiplicativos de tal forma que esta conservação exprime uma simetria a cerca do sistema [27].

É sabido que a existência de simetrias em sistemas físicos está fortemente ligada à leis de conservação que regem a teoria [28]. Por isso, é importante estudar o comportamento de sistemas quânticos mediante à aplicação de operadores, como a conjugação de carga, reversão temporal e paridade por exemplo, nos vetores de estado destes.

1.5.1 Paridade

Seja $\psi(x, t)$ uma solução da equação de Schrödinger, unidimensional por simplicidade. Existem duas condições que podem ser satisfeitas

$$\text{a) } \psi(-x, t) = \psi(x, t); \quad \text{b) } \psi(-x, t) = -\psi(x, t); \quad (1.73)$$

de maneira que, se (1.73a) é respeitada se diz que a função de onda tem paridade par, enquanto que para (1.73b) a paridade é ímpar.

A partir destas relações é definido o operador paridade \hat{P} o qual aplicado em uma função de onda troca o sinal da sua parte espacial, isto é,

$$\hat{P}\psi(x,t) = \psi(-x,t). \quad (1.74)$$

Veja ainda que, com base em (1.73) e (1.74), tal operador paridade é hermitiano e possui autovalores ± 1 em relação à cada paridade, ou seja,

$$\text{a) } \hat{P}|\psi\rangle = |\psi\rangle; \quad \text{b) } \hat{P}|\psi\rangle = -|\psi\rangle. \quad (1.75)$$

Para antipartículas fermiônicas com spin $1/2$ a paridade apresenta autovalor $p = +1$ enquanto que para suas respectivas antipartículas este valor é $p = -1$. Já para os bósons, a paridade tem o mesmo valor tanto para as partículas quanto para suas antipartículas. Além disso, a paridade é um número quântico multiplicativo, e portanto para um sistema composto, teremos pra função de onda total a seguinte paridade

$$p_\psi = \prod_n p_n. \quad (1.76)$$

Bem como a paridade, existem números quânticos que se comportam da mesma forma como por exemplo, os números bariônico e leptônico e a carga elétrica. Por fim, a paridade apesar de ser conservada nas interações eletromagnética e forte ela é quebrada no decaimento de partículas através da força fraca [27].

1.5.2 Conjugação de carga

Outro operador de suma importância em física de partículas é o operador de conjugação de carga \hat{C} , que atua em um auto-estado $|\psi\rangle$ da seguinte forma

$$\hat{C}|\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle, \quad (1.77)$$

onde $|\bar{\psi}\rangle$ representa a antipartícula, de forma análoga se tem

$$\hat{C}|\bar{\psi}\rangle = |\psi\rangle. \quad (1.78)$$

Com as equações (1.77) e (1.78) é possível extrair

$$\hat{C}^2|\psi\rangle = \hat{C}\hat{C}|\psi\rangle = \hat{C}|\bar{\psi}\rangle = |\psi\rangle, \quad (1.79)$$

ou ainda, para seus autovalores e autovetores

$$\hat{C}^2 |\psi\rangle = c\hat{C} |\psi\rangle = c^2 |\psi\rangle, \quad (1.80)$$

onde $c = \pm 1$.

Como a paridade, o autovalor de conjugação também é um número quântico multiplicativo. Este operador representa trocar uma partícula por sua respectiva antipartícula e com isso realiza uma troca de sinal em todos os números quânticos do sistema, como por exemplo, para um próton

$$\hat{Q} |p\rangle = q |p\rangle, \quad (1.81)$$

o antipróton toma a forma

$$\hat{Q} |\bar{p}\rangle = -q |\bar{p}\rangle, \quad (1.82)$$

onde \hat{Q} é o operador de carga elétrica e q seu respectivo autovalor.

Verifica-se que da mesma forma que a carga, a paridade e o número bariônico também invertem o sinal, formando assim uma “verdadeira” conjugação de carga.

É importante notar que o auto-estado $|p\rangle$ que caracteriza a dinâmica do próton não pode ser um autovetor do operador de conjugação, desde que esse o troca pelo estado do antipróton $|\bar{p}\rangle$. Entretanto, para partículas neutras ($q = 0$) que possuem todos os números quânticos nulos, vale a relação $\hat{C} |\psi\rangle = |\psi\rangle$.

Outro fato de suma importância é a característica de que, bem como para o operador de paridade, a conservação da conjugação de carga ocorre na interação forte mas não em processos de decaimento governados pela força fraca [27].

1.5.3 Reversão temporal

Outra operação importante também pode ser tomada, a reversão temporal. Esta, como o nome sugere, se refere à trocar um estado $|\psi\rangle$ por outro $|\psi'\rangle$ que evolui na direção oposta do tempo fazendo a troca de momentos linear e angular da seguinte forma: $p \rightarrow -p$ e $L \rightarrow -L$. Ou seja, é definido um operador \hat{T} como sendo

$$\hat{T} |\psi\rangle = |\psi'\rangle. \quad (1.83)$$

Dessa maneira, aplicando (1.83) na equação de Schrödinger chega-se à

$$\hat{T} \hat{H} |\psi\rangle = \hat{T} E |\psi\rangle = E \hat{T} |\psi\rangle = E |\psi'\rangle, \quad (1.84)$$

se a condição $[\hat{T}, \hat{H}] = 0$ é satisfeita, então a Eq. (1.84) passa a ser

$$\hat{T} \hat{H} |\psi\rangle = \hat{H} \hat{T} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi'\rangle = E |\psi'\rangle, \quad (1.85)$$

ou seja, $|\psi'\rangle$ também é solução da equação de Schrödinger com autoenergia E . Nota-se que aplicar o operador \hat{T} em um sistema é como fazer, para o processo, o “filme rodar ao contrário”.

1.5.4 Simetrias CP e CPT

As conservações de paridade e conjugação de carga, como mencionado, são quebradas na interação fraca, entretanto era esperado que decaimentos possuísem uma simetria CP, isto é, uma conservação sob a atuação dos operadores $\hat{C}\hat{P}$ em conjunto [27].

Entretanto, é verificado uma pequena quebra dessa simetria para o méson K e essa violação pode ser quantificada por um fator $\varepsilon = 2,3 \times 10^{-3}$. Isso ocorre porque em uma pequena fração do tempo os mésons se encontram em um estado no qual este pode decair em produtos que não preservam CP [27].

Mais uma vez, é procurado uma simetria total e, se o sistema é invariante sob a transformação de reversão temporal se diz que existe uma simetria T. Com isso pode-se dizer que, mesmo que CP seja quebrada é esperado que uma simetria CPT seja mantida, mesmo na interação fraca [27]. Se esta conservação for violada, é esperado que o valor do parâmetro de violação seja relativamente pequeno [6].

Tendo em vista as discussões sobre a teoria da mecânica quântica, pode-se notar que esta não é útil para descrever situações onde o número de partículas é variável. Para abranger tal problema, é necessário a formulação de uma teoria que disponha de um número muito grande de graus de liberdade.

Para este fim, visando resolver problemas deste tipo, é utilizado o formalismo da teoria quântica de campos, levando em conta ainda os postulados e consequências da relatividade restrita.

2 Teoria de campos

Antes de se descrever o comportamento de partículas através de uma teoria de campos, é necessário primeiramente retomar os conceitos e características de campo, dando ênfase aos principais resultados. Para isso, é feito uma abordagem à este problema, partindo da teoria a cerca de campos clássicos.

2.1 Campo clássico

Partindo da discussão realizada na Seção 1.4.1, nota-se que, a partir da função lagrangiana, é possível extrair totalmente a dinâmica de sistemas mecânicos. De tal forma que esta fornece as equações de movimento através das equações de Euler-Lagrange obtidas com o princípio da mínima ação.

Em termos práticos, para um sistema com N graus de liberdade, a ação é definida como

$$S = \int_{t_0}^{t_f} L(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t), t) dt. \quad (2.1)$$

De tal forma que, pelo princípio de Hamilton, o conjunto de trajetórias que o sistema irá tomar será aquele que minimiza o funcional S [22]. E ainda, este só é mínimo para as coordenadas que são soluções para a coleção de equações diferenciais dada por (1.35).

Sendo assim, essa formulação permite determinar, por exemplo, o movimento de uma cadeia de N osciladores acoplados. Entretanto, esta não é útil para um sistema cujo o número de osciladores, ou graus de liberdade, tende ao infinito, tal como a onda em uma corda.

Ao resolver o problema de uma onda em uma corda, por exemplo, a preocupação está em determinar o deslocamento vertical $\phi(x, t)$ de cada infinitésimo da corda em função da posição horizontal x e do tempo t . É possível, então, interpretar essa função deslocamento como sendo um campo escalar, que nada mais é que uma relação matemática que fornece um número para cada ponto do espaço (a reta horizontal no caso da corda) em um dado instante de tempo [21].

Portanto, é preciso fazer a troca $q_i(t) \rightarrow \phi_i(\vec{x}, t)$, onde \vec{x} implica um caso mais geral de um vetor no espaço tridimensional, em vez de unidimensional como na corda. Com isso, a langragiana se torna um funcional do campo da seguinte forma

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_i(\vec{x}, t), \vec{\nabla} \phi_i(\vec{x}, t), \dot{\phi}_i(\vec{x}, t), \vec{x}, t), \quad (2.2)$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots, N$, pois esta representação permite tratar um sistema genérico com N campos independentes, como por exemplo para a lagrangiana de Schrödinger que possui $N = 2$, se tratando dos campos ψ e ψ^* .

A primeira coisa a se notar da Eq. (2.2) é que o funcional L na verdade é uma soma de todas as lagrangianas infinitesimais $\mathcal{L} d^3x$ do sistema, onde esta última função é denominada densidade lagrangiana.

Para facilitar e reduzir os cálculos, é necessário realizar a seguinte mudança de notação

$$t, \vec{x} \rightarrow x^\mu, \quad \phi_i(\vec{x}, t) \rightarrow \phi_i(x^\mu), \quad \dot{\phi}_i(\vec{x}, t), \vec{\nabla} \phi_i(\vec{x}, t) \rightarrow \partial_\mu \phi_i(x^\mu). \quad (2.3)$$

Note que neste ponto é utilizado $\mu = 0, 1, 2, 3$, onde x^0 representa a coordenada temporal e x^i (com $i = 1, 2, 3$) representam as três coordenadas espaciais, mas em um formalismo não relativístico, portanto é inválido utilizar a métrica do espaço de Minkowski.

A partir destas definições, a ação para o caso da teoria de campos será dada por

$$S = \int L dt = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i(x^\mu), \partial_\mu \phi_i(x^\mu), x^\mu). \quad (2.4)$$

Tomando variações nos campos através de um parâmetro ε em conjunto com campos arbitrários $\eta_i(x^\mu)$ que se anulam nos extremos A e B , ou seja,

$$\phi'_i(x^\mu) = \phi_i(x^\mu) + \varepsilon \eta_i(x^\mu); \quad \eta_i(A) = \eta_i(B) = 0, \quad (2.5)$$

e minimizando a ação (2.4), é possível chegar nas equações de Euler-Lagrange para campos

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0, \quad (2.6)$$

onde essas formam uma “versão contínua” das Eqs. (1.35) na formulação da mecânica de partículas [20, 21, 22].

É possível ainda, definir um campo canonicamente conjugado à ϕ_i como

$$\pi_i(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)}, \quad (2.7)$$

o qual leva a formulação de uma densidade hamiltoniana a partir de uma transformada de Legendre, isto é,

$$\mathcal{H}(\phi_i, \vec{\nabla} \phi_i, \pi_i, x^\mu) = \sum_{i=1}^N \pi_i \partial_0 \phi_i - \mathcal{L}(\phi_i, \vec{\nabla} \phi_i, \partial_0 \phi_i, x^\mu). \quad (2.8)$$

Por fim, analogamente ao caso da lagrangiana, a hamiltoniana do sistema é escrita como

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left(\sum_{i=1}^N \pi_i \partial_0 \phi_i - \mathcal{L} \right) = \sum_{i=1}^N \int d^3x (\pi_i \partial_0 \phi_i) - L. \quad (2.9)$$

2.1.1 Invariância e teorema de Noether

Suponha que as coordenadas, bem como os campos, sejam sujeitos à transformações infinitesimais do tipo

$$x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x^\mu, \phi); \quad \phi'_i(x^\mu) = \phi_i(x^\mu) + \varepsilon \Psi_i(x^\mu, \phi), \quad (2.10)$$

onde ε é um parâmetro infinitesimal e X^μ e Ψ_i são denominados geradores das transformações de coordenadas e dos campos, respectivamente.

A variação na densidade lagrangiana até primeira ordem perante esta transformação é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi'_i, \partial_\mu \phi'_i, x^{\mu'}) &= \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, x^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \varepsilon X^\mu + \\ &+ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \varepsilon \Psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \varepsilon (\partial_\mu \Psi_i - \partial_\nu \phi_i \partial_\mu X^\nu) \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

lembrando sempre que $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

Ao tomar a minimização da ação, a Eq. (2.11) fornecerá a seguinte relação

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \Psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu \Psi_i \right] - T^\mu_\nu \partial_\mu X^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} X^\mu = 0, \quad (2.12)$$

onde,

$$T^\mu_\nu = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}, \quad (2.13)$$

é denominado tensor hamiltoniano.

A Eq. (2.13) pode ser escrita também na forma

$$-\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] (\Psi_i - X^\nu \partial_\nu \phi_i) = \sum_{i=1}^N \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \Psi_i - T^\mu_\nu X^\nu \right], \quad (2.14)$$

de maneira que (2.13) e (2.14) representam uma condição conhecida como identidade de Rund-Trautman para campos [28].

É fácil ver que, se além de invariante, o funcional da ação é um extremo para o conjunto de campos $\phi_i(x^\mu)$, então são válidas as equações de Euler-Lagrange (2.6), de tal maneira que a identidade (2.14) implica em

$$\partial_\mu j^\mu = \sum_{i=1}^N \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \Psi_i - T^\mu_\nu X^\nu \right] = 0, \quad (2.15)$$

que é o teorema de Noether para campos, onde a quantidade

$$j^\mu \equiv \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \Psi_i - T^\mu_\nu X^\nu \right], \quad (2.16)$$

é a corrente conservada perante as transformações dadas pelos geradores Ψ_i e X^ν .

Portanto, para uma simetria sob as transformações dadas por (2.10) haverá uma conservação da corrente de Noether, que por sua vez implica em uma “carga” conservada, a qual pode ser

escrita como

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} j^0 d^3x = \text{constante.} \quad (2.17)$$

Além destas transformações infinitesimais, existem as transformações de Gauge, ou calibre, as quais são muito importantes para o campo eletromagnético e estão relacionadas com um grau de liberdade de escolha para o potencial.

2.1.2 Transformações de Gauge

Pelo teorema de Helmholtz, é possível caracterizar o campo magnético da magnetostática, a partir das seguintes leis

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (2.18)$$

considerando ainda que o campo \vec{B} vá a zero no infinito [29].

Sabendo ainda que o divergente do rotacional de um vetor qualquer é nulo, é possível notar que a partir de (2.18) se pode extrair o seguinte potencial \vec{A} definido como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.19)$$

Além disso, outro resultado muito importante do cálculo vetorial diz que para um campo escalar qualquer f se tem $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$ [29]. Dessa maneira se pode “calibrar” o potencial vetor como

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f, \quad (2.20)$$

de tal forma que a equação do campo, que é a grandeza física de interesse, não se altera, ou seja

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.21)$$

Olhando agora para a lei de Ampère, verifica-se que para essa transformação de Gauge (ou calibre), se tem

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}') = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') - \nabla^2 \vec{A}' = \mu_0 \vec{J}. \quad (2.22)$$

Analisando o termo $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}')$ com mais cuidado em (2.22) percebe-se que

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 f, \quad (2.23)$$

e como discutido, a função f pode ser escolhida arbitrariamente sem que o significado físico do campo se altere, logo, fazendo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\nabla^2 f \quad (2.24)$$

a Eq. (2.11) fornecerá apenas

$$\nabla^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{J} \quad (2.25)$$

e à essa transformação (2.24) se dá o nome de calibre de Coulomb [29].

Outra escolha frequentemente utilizada é dado por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.26)$$

onde V é o potencial elétrico. A Eq. (2.26) representa o calibre de Lorentz [29].

Uma abordagem similar pode ser utilizada em teoria de campos. Se uma lagrangiana não se altera sob uma transformação de campo pela aplicação de um elemento de algum grupo de Lie (como $U(1)$, $SU(2)$ ou $SU(3)$, por exemplo), que permite um certo grau de liberdade de escolha, é dito que esta teoria é invariante de Gauge [27].

Por exemplo, seja a densidade Lagrangiana do campo (relativístico) de Klein-Gordon carregado ϕ , que descreve uma partícula de spin 0, carga elétrica q e massa m , dada por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (2.27)$$

e seja $g = e^{i\theta}$ um elemento do grupo unitário, tal que é feita uma transformação do tipo

$$\phi' = g\phi = e^{i\theta}\phi; \quad \phi'^\dagger = g^*\phi^\dagger = e^{-i\theta}\phi^\dagger. \quad (2.28)$$

Aplicando as transformações (2.28) em (2.27) chega-se à seguinte lagrangiana transformada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \partial_\mu \phi'^\dagger \partial^\mu \phi' - m^2 \phi'^\dagger \phi' = \partial_\mu (e^{-i\theta} \phi^\dagger) \partial^\mu (e^{i\theta} \phi) - m^2 (e^{-i\theta} \phi^\dagger) (e^{i\theta} \phi) = \\ &= \partial_\mu (e^{-i\theta} \phi^\dagger) \partial^\mu (e^{i\theta} \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \end{aligned} \quad (2.29)$$

mas note que se o parâmetro θ não depender das coordenadas do espaço, a Eq. (2.29) se torna simplesmente

$$\mathcal{L}' = e^{-i\theta} e^{i\theta} \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi = \mathcal{L}. \quad (2.30)$$

Ou seja, neste caso onde a transformação não depende do espaço, a lagrangiana é dita invariante por transformação de Gauge global [20]. Para o caso onde $\theta = \theta(x)$, chamada transformação de Gauge local, é necessário avaliar os seguintes termos

$$\begin{aligned} \partial_\mu (e^{-i\theta} \phi^\dagger) \partial^\mu (e^{i\theta} \phi) &= \left(e^{-i\theta} \partial_\mu \phi^\dagger - i e^{-i\theta} \phi^\dagger \partial_\mu \theta \right) \left(e^{i\theta} \partial^\mu \phi + i e^{i\theta} \phi \partial^\mu \theta \right) = \\ &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \phi^\dagger \phi \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - i \phi^\dagger \partial_\mu \theta \partial^\mu \phi + i \phi \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \theta \end{aligned} \quad (2.31)$$

isto é, com (2.31) a Eq. (2.29) fornecerá

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \phi^\dagger \phi \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - i \phi^\dagger \partial_\mu \theta \partial^\mu \phi + i \phi \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \theta \quad (2.32)$$

que não é invariante.

Este problema pode ser contornado, conforme mostrado no Apêndice B, fazendo a troca

$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$, onde este operador é denominado derivada covariante. Sendo assim, com esta definição, a densidade Lagrangiana de Klein-Gordon (2.27) invariante de Gauge local passa a ser simplesmente

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (2.33)$$

2.2 Segunda quantização

Um exemplo comum de teoria de campos clássica e não-relativística é dado pela densidade de lagrangiana de Schrödinger

$$\mathcal{L}(\psi, \vec{\nabla} \psi, \dot{\psi}) = i\psi^* \dot{\psi} - \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \vec{\nabla} \psi - V(\vec{x}, t) \psi^* \psi \quad (2.34)$$

pois esta, pelas equações de Euler-Lagrange para campos (2.6) fornece

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} \right] - \vec{\nabla} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \psi^*)} \right] = i\dot{\psi} - V(\vec{x}, t) \psi + \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.35)$$

que é a equação de Schrödinger para três dimensões espaciais [25, 26].

E por construção, para os dois campos independentes $\psi(\vec{x}, t)$ e $\psi^*(\vec{x}, t)$ é possível escrever os dois campos canonicamente conjugados como

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^*; \quad \pi^*(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0, \quad (2.36)$$

e, com isso, a densidade hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} + \pi^* \dot{\psi}^* - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \vec{\nabla} \psi + V(\vec{x}, t) \psi^* \psi. \quad (2.37)$$

Sabendo que $V(\vec{x}, t)$ é um escalar e usando a definição de derivada do produto, a densidade hamiltoniana (2.37) pode ser dada como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m} \left[\vec{\nabla}(\psi^* \vec{\nabla} \psi) - \psi^* \nabla^2 \psi \right] + \psi^* V(\vec{x}, t) \psi \\ &= \frac{1}{2m} \vec{\nabla}(\psi^* \vec{\nabla} \psi) + \psi^* \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}, t) \right) \psi. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Agora, calculando a hamiltoniana do sistema, chega-se à

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2m} \vec{\nabla}(\psi^* \vec{\nabla} \psi) \right] + \int d^3x \psi^* \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}, t) \right) \psi, \quad (2.39)$$

de forma que o primeiro termo do lado direito é nulo pois, pela condição de normalização, os

campos têm que ir a zero nos extremos, isto é,

$$\begin{aligned} \int d^3x \left[\frac{1}{2m} \vec{\nabla}(\psi^* \vec{\nabla} \psi) \right] &= \frac{1}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{2m} \left[\psi^*(+\infty) \vec{\nabla} \psi(+\infty) - \psi^*(-\infty) \vec{\nabla} \psi(-\infty) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Com isso, retornando à (2.39) a hamiltoniana do sistema é simplesmente

$$H = \int d^3x \psi^* \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}, t) \right) \psi. \quad (2.41)$$

É importante notar que está sendo tratado um campo não quântico, pois todo o desenvolvimento é baseado na relação de transformação canônica dos parênteses de Poisson, dados por

$$\{\psi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad \{\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{y}, t)\} = \{\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)\} = 0. \quad (2.42)$$

Para que seja possível obter um campo que obedeça os postulados da mecânica quântica é necessário impor o formalismo de quantização canônica analogamente ao já discutido. Entretanto aqui será tomado o formalismo da segunda quantização, pois agora o desenvolvimento se refere a campos e não mais partículas. Esta abordagem consiste em fazer a troca dos campos por operadores de campo $\psi, \psi^* \rightarrow \hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ e $\pi \rightarrow \hat{\pi} = i\hat{\psi}^\dagger$, os quais obedecem as seguintes propriedades

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{y}, t)] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad [\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{y}, t)] = [\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{y}, t)] = 0. \quad (2.43)$$

conhecidas como relações de comutação à tempos iguais [21].

Como visto anteriormente na Seção 2.1, um campo pode ser interpretado como uma coleção muito grande de osciladores harmônicos, de tal forma que os operadores de campo podem ser decompostos, em uma série de Fourier, da seguinte forma

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = \sum_n \hat{a}_n(t) u_n(\vec{x}); \quad \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t) = \sum_n \hat{a}_n^\dagger(t) u_n^*(\vec{x}). \quad (2.44)$$

onde $u_n(\vec{x})$ e $u_n^*(\vec{x})$ são as autofunções complexas enquanto que $\hat{a}_n^\dagger(t)$ e $\hat{a}_n(t)$ são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente.

Retomando a Eq. (2.41), a hamiltoniana para o campo quântico de Schrödinger será

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \int d^3x \hat{\psi}^\dagger \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}, t) \right) \hat{\psi} = \\
 &= \sum_{n, n'} \int d^3x \hat{a}_n^\dagger(t) u_n^*(\vec{x}) \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}, t) \right) \hat{a}_{n'}(t) u_{n'}(\vec{x}) = \\
 &= \sum_{n, n'} \int d^3x \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_{n'}(t) u_n^*(\vec{x}) u_{n'}(\vec{x}) \epsilon_{n'} = \sum_n \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_n(t) \epsilon_n
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

onde foram utilizadas as relações

$$\int d^3x u_n^*(\vec{x}) u_{n'}(\vec{x}) = \delta_{n, n'} \tag{2.46}$$

e, também,

$$\left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}, t) \right) u_n(x) = \epsilon_n u_n(x). \tag{2.47}$$

Nesta representação de campos os vetores são expressos no espaço de Fock, onde este é uma coleção de infinitos espaços de Hilbert. De forma que, um estado genérico pode ser escrito da seguinte forma

$$|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_i! \dots}} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \dots (\hat{a}_i^\dagger)^{n_i} \dots |0\rangle \tag{2.48}$$

onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo do campo [21].

Pela Eq. (2.48) nota-se uma principal diferença entre os formalismos contínuo (campos) e discreto (partículas), que está na interpretação dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger . Na abordagem do oscilador harmônico, estes atuam diminuindo e aumentando os níveis de energia de um único corpo, enquanto que no contínuo eles criam e aniquilam partículas em um determinado nível de energia.

Apesar do fato de que na segunda quantização a posição não seja mais o autovalor de um operador \hat{x} , é possível ainda sim descrever estados localizados a partir dos operadores de campo (2.44), como por exemplo um estado genérico

$$|x_1, x_2, \dots, x_n, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{\psi}^\dagger(x_1, t) \hat{\psi}^\dagger(x_2, t) \dots \hat{\psi}^\dagger(x_n, t) |0\rangle \tag{2.49}$$

isto é, estes operadores atuam criando e aniquilando partículas em posições bem definidas.

Uma observação importante é a de que a Eq. (2.48) permite um número arbitrário de partículas para um determinado nível de energia, e isto é devido à forma do procedimento de quantização utilizado em (2.43). Esta propriedade está relacionada com o fato de que tal relação é exclusiva para campos de partículas bosônicas, para os férmions é necessário levar em consideração o princípio de exclusão de Pauli, como a formulação da mecânica de Dirac por exemplo.

2.3 Campo de Dirac

A equação de Dirac descreve a dinâmica de partículas de spin-1/2 (férmions) levando em conta os fenômenos da mecânica quântica e da relatividade restrita. Tal estudo é necessário para a descrição de todos os léptons e anti-léptons do Modelo Padrão [27]. Seja $\psi(\vec{x}, t)$ o campo (espinor) de Dirac e $\bar{\psi}(\vec{x}, t)$ seu adjunto, a densidade lagrangiana para este problema é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (2.50)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac (para maiores detalhes veja o Apêndice A) e, também,

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (2.51)$$

A razão de se utilizar o campo adjunto em vez do campo conjugado é que o termo $\psi^\dagger \psi$ não é invariante relativístico, isto é, apenas $\bar{\psi} \psi$ é invariante de Lorentz [18].

Partindo da Eq. (2.50) as equações de Euler-Lagrange fornecem

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (2.52)$$

conhecida como equação de Dirac [21].

Tomando os campos canonicamente conjugados, nota-se que

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi} \gamma^0 = i\psi^\dagger; \quad \bar{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0, \quad (2.53)$$

e, por construção, a densidade hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \bar{\psi} (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^j \partial_j - m) \psi = -\bar{\psi} (i\gamma^j \partial_j - m) \psi. \quad (2.54)$$

Mas, pela equação de Dirac,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^j \partial_j - m) \psi = 0 \rightarrow i\gamma^0 \partial_0 \psi = -(i\gamma^j \partial_j - m) \psi, \quad (2.55)$$

então reescrevendo (2.54), chega-se à

$$\mathcal{H} = i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi = i\psi^\dagger \partial_0 \psi. \quad (2.56)$$

Como as matrizes γ^μ possuem ordem 4×4 , é necessário que o campo ψ seja um vetor

coluna com quatro componentes, isto é,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1(x^\mu) \\ \psi^2(x^\mu) \\ \psi^3(x^\mu) \\ \psi^4(x^\mu) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1(x^\mu) \\ u^2(x^\mu) \\ v^1(x^\mu) \\ v^2(x^\mu) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

e também, a partir de (2.51), o espinor adjunto será

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} u^* & v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* & -v^* \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Partindo de uma transformada de Fourier no espaço-tempo é possível escrever para uma componente do espinor

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \psi(k^\mu) e^{-ik_\nu x^\nu} \quad (2.59)$$

que aplicando na equação de Dirac (2.52) implica em

$$\begin{aligned} i\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi(x^\mu) - m\psi(x^\mu) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha \psi(k^\mu) \partial_\alpha e^{-ik_\nu x^\nu} - m \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \psi(k^\mu) e^{-ik_\nu x^\nu} = \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\gamma^\alpha k_\alpha - m] \psi(k^\mu) e^{-ik_\nu x^\nu} = 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

sabendo que a transformada só é nula quando o integrando for zero chega-se à

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.61)$$

que nada mais é que a equação de Dirac no espaço dos momentos.

Agora, retornando à notação definida por (2.57), utilizando as relações dadas por (A.2) e (A.5), obtém-se

$$(\gamma^\nu k_\nu - m)\psi = (\gamma^\nu k_\nu - Im)\psi = \begin{pmatrix} k_0 - m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -(k_0 + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = 0 \quad (2.62)$$

lembrando que

$$k_\mu = \eta_{\mu\nu} k^\nu = (k_0, -\vec{k}), \quad (2.63)$$

e os espinores u_k e v_k representam u e v no espaço dos momentos.

A Eq. (2.62) fornece, então, o seguinte sistema

$$\begin{cases} (k_0 - m)u_k - (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})v_k = 0, \\ (k_0 + m)v_k - (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})u_k = 0; \end{cases} \quad (2.64)$$

e para que essa solução exista é necessário que a matriz do sistema tenha determinante nulo, ou

seja,

$$\begin{aligned} -(k_0 - m)(k_0 + m) + (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 &= -(k_0^2 - m^2) + \vec{k}^2 \cdot \vec{\sigma}^2 = \\ &= -k_0^2 + m^2 + \vec{k}^2 = 0 \rightarrow k_0^2 = m^2 + \vec{k}^2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Mas, utilizando unidades naturais, $E = \omega_k = k_0$, a Eq. (2.65) fornecerá

$$k_0 = E = \pm \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}, \quad (2.66)$$

que nada mais é que a expressão relativística para a energia. Entretanto, (2.66) permite tanto estados com energias positivas quanto negativas.

Com isso, Dirac percebeu que este problema poderia ser resolvido considerando um conceito novo, a existência de antipartículas, de tal maneira que a solução do espinor descrevesse o comportamento do sistema da seguinte forma

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{partícula} \\ \text{antipartícula} \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

onde u e v possuem duas componentes cada um. Isto é, nesta notação é dito que o quadri-espinor é uma coleção de dois bi-espinores que representam a partícula e sua antipartícula, de forma que cada uma de suas componentes representa a função de onda relacionada aos estados de spin up e down separadamente [21].

Como, em mecânica quântica, a evolução temporal do sistema é proporcional à e^{-iEt} . É comum inferir que a solução de $u(t)$ contempla a energia de repouso positiva ($E = m$), enquanto que para $v(t)$ a energia de repouso seria negativa ($E = -m$) [27].

2.3.1 Soluções particulares

Agora, se faz necessário obter a solução da equação de Dirac para um referencial em movimento e, para isso, supondo soluções do tipo ondas planas

$$\psi(k^\mu, s) = u(k^\mu, s)e^{-ik_\nu x^\nu}; \quad \psi(k^\mu, s) = v(k^\mu, s)e^{ik_\nu x^\nu}, \quad (2.68)$$

a Eq. (2.52) fornecerá

$$(i\partial - m)\psi = 0 \rightarrow \begin{cases} (\not{k} - m)u(k^\mu, s) = 0, \\ (\not{k} + m)v(k^\mu, s) = 0, \end{cases} \quad (2.69)$$

onde $s = 1, 2$ representa os estados de spin.

Com isso, pode-se verificar que as soluções são do tipo

$$u(k^\mu, s) = (\not{k} + m)u(0, s); \quad v(k^\mu, s) = (\not{k} - m)v(0, s); \quad (2.70)$$

pois,

$$\begin{aligned} (\not{k} + m)(\not{k} - m) &= \not{k}^2 - m^2 = \gamma^\nu k_\nu \gamma^\mu k_\mu - m^2 = \gamma^\nu \gamma^\mu k_\nu k_\mu - m^2 = \eta^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma^\nu k_\nu k_\mu - m^2 \\ &= \eta^{\mu\nu} k_\nu k_\mu - m^2 = E^2 - \vec{k}^2 - m^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.71)$$

implicando que a solução de (2.70) é satisfeita.

Note que em (2.70) os bi-espinores $u(0, s)$ e $v(0, s)$ são calculados no referencial que estão em repouso e podem ser escritos como

$$u(0, 1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u(0, 2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v(0, 1) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v(0, 2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

onde

$$A = \frac{1}{\sqrt{2m(k_0 + m)}} \quad (2.73)$$

é uma constante de normalização.

Dessa maneira, com as Eqs. (2.70), (2.72) e (2.73) é possível escrever em sua totalidade as componentes do campo de Dirac para partículas de spin 1/2 em um referencial em movimento.

Explicitando, por fim, as relações de normalização e ortogonalidade entre todas as componentes dos espinores (2.70) se tem

$$\bar{u}(k^\mu, s)u(k^\mu, s') = \delta_{ss'}; \quad \bar{v}(k^\mu, s)v(k^\mu, s') = -\delta_{ss'}; \quad \bar{u}(k^\mu, s)v(k^\mu, s') = 0, \quad (2.74)$$

assim como,

$$u^\dagger(k^\mu, s)u(k^\mu, s') = \frac{k_0}{m} \delta_{ss'}; \quad v^\dagger(k^\mu, s)v(k^\mu, s') = \frac{k_0}{m} \delta_{ss'}, \quad (2.75)$$

onde $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ e $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$.

2.3.2 Solução geral

Como os bi-espinores u e v já foram calculados, a solução geral do problema pode ser escrita como uma combinação de infinitas ondas planas separadas por intervalos infinitesimalmente próximos no espaço dos momentos, ou seja,

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{s=1}^2 \left[a(k^\mu, s) u(k^\mu, s) e^{-ik_\nu x^\nu} + b^*(k^\mu, s) v(k^\mu, s) e^{ik_\nu x^\nu} \right] \quad (2.76)$$

e, também,

$$\psi^\dagger(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{s=1}^2 \left[a^*(k^\mu, s) u^\dagger(k^\mu, s) e^{ik_\nu x^\nu} + b(k^\mu, s) v^\dagger(k^\mu, s) e^{-ik_\nu x^\nu} \right] \quad (2.77)$$

que implica na seguinte solução adjunta

$$\bar{\psi}(x^\mu) = \psi^\dagger \gamma^0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{s=1}^2 \left[a^*(k^\mu, s) \bar{u}(k^\mu, s) e^{ik_\nu x^\nu} + b(k^\mu, s) \bar{v}(k^\mu, s) e^{-ik_\nu x^\nu} \right], \quad (2.78)$$

onde a soma é realizada sob todos os estados de spin para um caso de superposição mais geral possível.

Voltando à equação (2.56) com base em (2.76) e (2.77) chega-se ao seguinte formato para a hamiltoniana

$$H = \int d^3x \left(i\psi^\dagger \partial_0 \psi \right) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 m \left[a^*(k^\mu, s) a(k^\mu, s) - b(k^\mu, s) b^*(k^\mu, s) \right]. \quad (2.79)$$

2.3.3 Quantização do campo de Dirac

Após todos estes cálculos é possível quantizar o campo de Dirac através da quantização canônica, isto é, transformando os campos em operadores

$$\hat{\psi}(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{s=1}^2 \left[\hat{a}(k^\mu, s) u(k^\mu, s) e^{-ik_\nu x^\nu} + \hat{b}^\dagger(k^\mu, s) v(k^\mu, s) e^{ik_\nu x^\nu} \right], \quad (2.80)$$

seu hermitiano conjugado,

$$\hat{\psi}^\dagger(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{s=1}^2 \left[\hat{a}^\dagger(k^\mu, s) u^\dagger(k^\mu, s) e^{ik_\nu x^\nu} + \hat{b}(k^\mu, s) v^\dagger(k^\mu, s) e^{-ik_\nu x^\nu} \right], \quad (2.81)$$

bem como seu operador de campo ajunto

$$\hat{\bar{\psi}}(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{s=1}^2 \left[\hat{a}^\dagger(k^\mu, s) \bar{u}(k^\mu, s) e^{ik_\nu x^\nu} + \hat{b}(k^\mu, s) \bar{v}(k^\mu, s) e^{-ik_\nu x^\nu} \right]. \quad (2.82)$$

Diferentemente do formalismo de segunda quantização, discutido na Seção 2.2, a presente abordagem se trata de um campo fermiônico e, por isso, os operadores devem ser anti-simétricos para que o princípio de exclusão de Pauli seja obedecido pelas funções de onda [21]. Em vez de relações de comutação é necessário definir relações de anti-comutação, as quais são dadas por

$$\{\hat{\psi}(x^\mu), \hat{\psi}^\dagger(x^{\mu'})\} = \delta^3(x^\mu - x^{\mu'}); \quad \{\hat{\psi}(x^\mu), \hat{\psi}(x^{\mu'})\} = \{\hat{\psi}^\dagger(x^\mu), \hat{\psi}^\dagger(x^{\mu'})\} = 0. \quad (2.83)$$

Além disso, a partir da equação (2.79) o operador hamiltoniano pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= : \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 m \left[\hat{a}^\dagger(k^\mu, s) \hat{a}(k^\mu, s) - \hat{b}(k^\mu, s) \hat{b}^\dagger(k^\mu, s) \right] : = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 m \left[\hat{a}^\dagger(k^\mu, s) \hat{a}(k^\mu, s) - \hat{b}^\dagger(k^\mu, s) \hat{b}(k^\mu, s) \right], \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde essa operação : (...) :, denominada ordenamento normal, é utilizada para manter a ordem correta dos operadores a fim de remover possíveis divergências. Esta atua fazendo com que o operador com o subscrito \dagger sempre apareça primeiro afim de que valha as seguintes definições

$$\hat{a}(k^\mu, s) |0\rangle = 0; \quad \hat{b}(k^\mu, s) |0\rangle = 0. \quad (2.85)$$

Note que, ao contrário do caso da mecânica quântica para partículas descrita na Seção 1.4.4 que interpreta o vetor $|0\rangle$ como o estado fundamental, a formulação contínua o trata como o estado de vácuo. Isto é, enquanto que para um oscilador este estado representa o nível de menor energia, a abordagem de campos o vê como o estado que não contém partícula alguma.

Estes operadores de criação e aniquilação, partindo da Eq. (2.83) obedecem as seguintes relações de anti-comutação

$$\{\hat{a}(k^\mu, s), \hat{a}^\dagger(k^{\mu'}, s')\} = \{\hat{b}(k^\mu, s), \hat{b}^\dagger(k^{\mu'}, s')\} = (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ss'} \quad (2.86)$$

de forma que todas as outras combinações são nulas.

Retornando à Eq. (2.50) à luz das discussões realizadas nas Seções 2.1.1 e 2.1.2, nota-se que lagrangiana de Dirac é invariante sob uma transformação de Gauge global, ou seja, haverá uma corrente de Noether conservada dada por

$$j^\mu = -i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} \psi^\dagger \right] = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.87)$$

e a carga total conservada será descrita pelo operador (observável) carga

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= : \int d^3x j^0 : = : \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(x^\mu) \hat{\psi}(x^\mu) : = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{s=1}^2 \left[\hat{a}^\dagger(k^\mu, s) \hat{a}(k^\mu, s) - \hat{b}^\dagger(k^\mu, s) \hat{b}(k^\mu, s) \right]. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Daqui percebe-se que, enquanto os operadores $\hat{a}^\dagger(k^\mu, s)$ e $\hat{a}(k^\mu, s)$ agem criando e aniquilando partículas fermiônicas com momento k^μ , spin s e carga $+1$, os operadores $\hat{b}^\dagger(k^\mu, s)$ e $\hat{b}(k^\mu, s)$, atuam de forma análoga mas em relação às suas respectivas antipartículas com carga -1 . Sendo assim, torna-se importante escrever os operadores número como

$$n_a(k^\mu, s) = \hat{a}^\dagger(k^\mu, s) \hat{a}(k^\mu, s); \quad n_b(k^\mu, s) = \hat{b}^\dagger(k^\mu, s) \hat{b}(k^\mu, s); \quad (2.89)$$

e o número total de partículas é dado por

$$N = \int d^3k \sum_{s=1}^2 [n_a(k^\mu, s) + n_b(k^\mu, s)] = \int d^3k \sum_{s=1}^2 [\hat{a}^\dagger(k^\mu, s) \hat{a}(k^\mu, s) + \hat{b}^\dagger(k^\mu, s) \hat{b}(k^\mu, s)]. \quad (2.90)$$

Analogamente ao discutido para o campo escalar não relativístico na Seção 2.2 pode-se

escrever um vetor genérico no espaço de Fock como

$$|n_1 s_1, \bar{n}_2 \bar{s}_2, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} [\hat{a}^\dagger(k_1^\mu, s_1)]^{n_1} [\hat{b}^\dagger(k_2^\mu, s_2)]^{n_2} \dots |0\rangle \quad (2.91)$$

mas, neste caso $n_k = 0, 1$ para todo k , pelo princípio de exclusão de Pauli. Isto é,

$$(\hat{a}^\dagger)^2 = (\hat{b}^\dagger)^2 = 0. \quad (2.92)$$

De forma análoga à Eq. (2.49), pode-se ter para partículas localizadas

$$|x^\mu\rangle = \hat{\psi}(x^\mu) |0\rangle = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \hat{a}^\dagger(k^\mu, s) \bar{u}(k^\mu, s) e^{ik_\nu x^\nu} |0\rangle, \quad (2.93)$$

e para antipartículas

$$|\bar{x}^\mu\rangle = \hat{\bar{\psi}}(x^\mu) |0\rangle = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \hat{b}^\dagger(k^\mu, s) v(k^\mu, s) e^{ik_\nu x^\nu} |0\rangle. \quad (2.94)$$

Ou seja, os operadores $\hat{\psi}(x^\mu)$ e $\hat{\bar{\psi}}(x^\mu)$ quando atuando no estado de vácuo criam, respectivamente, uma partícula e uma antipartícula no ponto x^μ em uma superposição de estados de momentos e spin.

2.3.4 Propagador de Feynman

O propagador de Feynman $S_F(x^\mu - y^\mu)$ é uma função de Green que expressa a amplitude de probabilidade de um férmion ser criado no ponto x^μ se propagando até ser aniquilado no ponto y^μ . Este pode ser dado como um valor esperado no vácuo pela seguinte relação

$$iS_F(x^\mu - y^\mu) = \langle 0 | T (\hat{\psi}(x^\mu) \hat{\bar{\psi}}(y^\mu)) | 0 \rangle, \quad (2.95)$$

onde $T(\hat{A}\hat{B})$ é o operador de ordenamento temporal dado por

$$T(\hat{A}(x^\mu) \hat{B}(y^\mu)) = \begin{cases} \hat{A}(x^\mu) \hat{B}(y^\mu) & \text{se } x^0 > y^0; \\ -\hat{B}(y^\mu) \hat{A}(x^\mu) & \text{se } y^0 > x^0. \end{cases} \quad (2.96)$$

Com as equações (2.95) e (2.96), o propagador de Feynman toma a seguinte forma

$$iS_F(x^\mu - y^\mu) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \hat{\psi}(x^\mu) \hat{\bar{\psi}}(y^\mu) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \hat{\bar{\psi}}(y^\mu) \hat{\psi}(x^\mu) | 0 \rangle, \quad (2.97)$$

onde $\theta(x)$ é a função degrau de Heaviside.

Por fim a Eq. (2.97), com (2.93) e (2.94) após alguns cálculos e relações dadas pela teorema

dos resíduos [21, 30], pode-se escrever o propagador de Feynman como

$$S_F(x^\mu - y^\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik_\mu(x^\mu - y^\mu)} i \frac{\not{k} + m}{\vec{k}^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (2.98)$$

onde \not{k} é definido conforme (A.3).

Frequentemente, a Eq. (2.98) é escrita como

$$S_F(x^\mu - y^\mu) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S_F(k^\mu) e^{-ik_\mu(x^\mu - y^\mu)} \quad (2.99)$$

com

$$S_F(k^\mu) = i \frac{\not{k} + m}{\vec{k}^2 - m^2} \quad (2.100)$$

sendo o propagador de Feynman no espaço dos momentos.

2.4 Campo de Fótons

Foi visto, na Seção 1.1, que os fótons são partículas de spin-1 e, portanto, bósons. Dessa maneira, sua dinâmica não pode ser descrita pela mecânica de Dirac, a qual abrange apenas férmions de spin-1/2. Como os fótons são os mediadores da força eletromagnética, é necessário retornar ao estudo da eletrodinâmica clássica.

2.4.1 Eletrodinâmica clássica

Sabendo que as equações de Maxwell, para o vácuo, são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (2.101)$$

é possível colocá-las em uma forma covariante.

Sendo assim, no contexto da relatividade especial é comum definir o quadrivetor potencial eletromagnético como

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (2.102)$$

onde ϕ é o potencial eletrostático e \vec{A} o potencial vetor auxiliar. De tal maneira que, com (2.102) os campos físicos são dados por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.103)$$

Além disso, no formalismo tensorial, é definido um tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.104)$$

que possui a seguinte forma matricial

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.105)$$

Consequentemente, é definido uma quantidade denominada tensor eletromagnético dual dado por

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (2.106)$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o simbolo de Levi-Civita.

E portanto, a partir das Eqs. (2.104) e (2.106) é possível re-obter as equações de Maxwell em uma forma covariante como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu; \quad \partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.107)$$

$J^\mu = (\rho, \vec{J})$ é o quadrivetor corrente.

Relembrando, também, a densidade lagrangiana do campo eletromagnético (para o vácuo e sem fontes) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.108)$$

A partir da qual o campo canonicamente conjugado pode ser extraído como

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} = -(\partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0), \quad (2.109)$$

e, consequentemente a densidade hamiltoniana será

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} = \pi^\mu \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -(\partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0) \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\partial_0 A_\nu \partial^0 A^\nu + \vec{\nabla} A_\nu \vec{\nabla} A^\nu \right] + \frac{1}{2} \left[\partial_0 A_\nu \partial^\nu A_0 + \vec{\nabla} A_\nu \partial^\nu \vec{A} \right]. \end{aligned} \quad (2.110)$$

2.4.2 Liberdade de escolha de calibre

Partindo da discussão realizada na Seção 2.1.2, como o vetor A^μ não é a grandeza física de interesse na eletrodinâmica clássica, existe, sob uma transformação de gauge, uma certa liberdade de escolha, de tal maneira que as equações de campo (2.103) são mantidas inalteradas. Isto é, adicionar ao potencial um gradiente de um campo escalar χ ,

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi, \quad (2.111)$$

permite “calibrar” o 4-potencial de maneira arbitrária, mantendo as equações de campo. Como exemplo, existem os gauges de Lorentz e de Coulomb. Essas condições são dadas por

$$\begin{cases} \partial_\mu A^\mu = 0; & \text{Gauge de Lorentz} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0; & \text{Gauge de Coulomb.} \end{cases} \quad (2.112)$$

Tomando o gauge de Lorentz em (2.112), as soluções do potencial (levando em conta a polarização $\varepsilon^\mu(p)$) podem ser decompostas em ondas planas do tipo

$$A^\mu \propto e^{-ip_\nu x^\nu} \varepsilon^\mu(p) \quad (2.113)$$

de forma que

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu \left[e^{-ip_\nu x^\nu} \varepsilon^\mu(p) \right] = -ip_\mu e^{-ip_\nu x^\nu} \varepsilon^\mu(p) = -ie^{-ip_\nu x^\nu} p_\mu \varepsilon^\mu(p) = 0. \quad (2.114)$$

Ou seja,

$$p_\mu \varepsilon^\mu(p) = 0 \quad (2.115)$$

indicando que o vetor de polarização é perpendicular ao quadrimomento.

Tomando agora o gauge de Coulomb em (2.112), nota-se que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-ip_\nu x^\nu} \varepsilon^1(p) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{-ip_\nu x^\nu} \varepsilon^2(p) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[e^{-ip_\nu x^\nu} \varepsilon^3(p) \right] \\ &= -ie^{-ip_\nu x^\nu} [p_1 \varepsilon^1(p) + p_2 \varepsilon^2(p) + p_3 \varepsilon^3(p)] = -ie^{-ip_\nu x^\nu} \vec{p} \cdot \vec{\varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (2.116)$$

isto é,

$$\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon} = 0, \quad (2.117)$$

implicando no fato de que as partes espaciais do momento e da polarização são perpendiculares, a polarização é transversa ao campo.

É importante salientar que, em comparação à equação de Proca que descreve a dinâmica de uma partícula massiva de spin 1, como o fóton não possui massa, não é possível construir um terceiro vetor de polarização que é normalizável e ao mesmo tempo transverso à sua propagação [21]. Logo, os vetores de polarização podem ser escritos como

$$\varepsilon^\mu(p, 0) = 0; \quad \varepsilon^\mu(p, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon^\mu(p, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon^\mu(p, 3) = 0. \quad (2.118)$$

Note que, ao falar de posição e momento, estas grandezas estão sendo tratadas no contexto da relatividade restrita. Ou seja, aqui está sendo usado $x^\mu \equiv x$ e $p^\mu \equiv p$ apenas por simplicidade.

Por outro lado, os vetores do tipo \vec{p} estão sendo abordados como sendo do espaço tridimensional usual da mecânica newtoniana.

2.4.3 Solução geral

Além de tudo, ao contrário da eletrodinâmica clássica, o campo A^μ possui uma importância muito grande desde que, em QED, este descreve o próprio comportamento dos fótons [20]. Com isso, retornando ao Ansatz proposto na Eq. (2.113) nota-se que a solução geral para este campo é uma combinação de todas as soluções particulares possíveis, isto é,

$$A_\mu = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}(2\pi)^3} \sum_\lambda \left[d(p, \lambda) \varepsilon_\mu(p, \lambda) e^{ip_\nu x^\nu} + d^*(p, \lambda) \varepsilon_\mu^*(p, \lambda) e^{-ip_\nu x^\nu} \right]. \quad (2.119)$$

E, pela Eq. (2.109), o campo conjugado vem a ser

$$\pi_\mu = -(\partial_0 A_\mu - \partial_\mu A_0) = -\partial_0 A_\mu \quad (2.120)$$

pois $\varepsilon_0(p, \lambda) = 0$.

Impondo o gauge de Lorentz, o segundo termo da Eq. (2.110) se anula, e então a densidade hamiltoniana toma a seguinte forma

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \left[\partial_0 A_\nu \partial^0 A^\nu + \vec{\nabla} A_\nu \vec{\nabla} A^\nu \right] = -\frac{1}{2} \left[\pi_\nu \pi^\nu + \vec{\nabla} A_\nu \vec{\nabla} A^\nu \right], \quad (2.121)$$

e, consequentemente, a hamiltoniana do sistema se torna

$$H = \int d^3 x \mathcal{H} = -\frac{1}{2} \int d^3 x \left[\pi_\nu \pi^\nu + \vec{\nabla} A_\nu \vec{\nabla} A^\nu \right]. \quad (2.122)$$

Com as transformadas de Fourier dos campos dadas por (2.119) e (2.120) a hamiltoniana (2.122) fica

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 p \sum_\lambda (-\eta_{\lambda\lambda}) p_0 [d(p, \lambda) d^*(p, \lambda) + d^*(p, \lambda) d(p, \lambda)]. \quad (2.123)$$

Onde foram utilizadas as relações da função delta de Dirac

$$\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{\pm i(p \pm p')x} = \delta^3(\vec{p} \pm \vec{p}'), \quad (2.124)$$

e, da ortogonalidade entre as polarizações

$$\varepsilon_\mu(p, \lambda) \varepsilon^\mu(p, \lambda') = \eta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.125)$$

2.4.4 Quantização do campo fotônico

Analogamente ao caso fermiônico da mecânica de Dirac, é possível quantizar o campo que descreve os fótons através do formalismo de segunda quantização. Neste caso, é necessário fazer as trocas $A_\mu \rightarrow \hat{A}_\mu$ e $\pi_\mu \rightarrow \hat{\pi}_\mu$ de forma que

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}(2\pi)^3} \sum_\lambda \left[\hat{d}(p, \lambda) \epsilon_\mu(p, \lambda) e^{ip_\nu x^\nu} + \hat{d}^\dagger(p, \lambda) \epsilon_\mu^\dagger(p, \lambda) e^{-ip_\nu x^\nu} \right], \quad (2.126)$$

e, também, o campo conjugado

$$\hat{\pi}_\mu = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}(2\pi)^3} \sum_\lambda (-ip_0) \left[\hat{d}(p, \lambda) \epsilon_\mu(p, \lambda) e^{ip_\nu x^\nu} - \hat{d}^\dagger(p, \lambda) \epsilon_\mu^\dagger(p, \lambda) e^{-ip_\nu x^\nu} \right]. \quad (2.127)$$

Além disso, estes devem obedecer as seguintes relações de comutação para tempos iguais

$$[\hat{A}_\nu(x), \hat{\pi}^\mu(y)] = i\eta_\nu^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad [\hat{A}_\nu(x), \hat{A}^\mu(y)] = [\hat{\pi}_\nu(x), \hat{\pi}^\mu(y)] = 0. \quad (2.128)$$

Finalmente, partindo de (2.123), o operador hamiltoniano do sistema será dado por

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \int d^3 x : \left(\pi_\nu \pi^\nu + \vec{\nabla} A_\nu \vec{\nabla} A^\nu \right) : = \int d^3 p \sum_\lambda (-\eta_{\lambda\lambda}) p_0 \hat{d}^\dagger(p, \lambda) \hat{d}(p, \lambda) \quad (2.129)$$

mas como o campo eletromagnético admite apenas duas polarizações $\lambda = 1, 2$, tem-se $\eta_{11} = \eta_{22} = -1$ e a Eq. (2.129) implicará em

$$\hat{H} = \int d^3 p \sum_{\lambda=1}^2 p_0 \hat{d}^\dagger(p, \lambda) \hat{d}(p, \lambda). \quad (2.130)$$

Ou seja, o campo eletromagnético pode ser visto como uma coleção de infinitos osciladores harmônicos, com duas polarizações possíveis, distribuídos de forma contínua no espaço dos momentos. Este fato permite, de maneira análoga à já discutida, definir o operador número $\hat{n}(p, \lambda) = \hat{d}^\dagger(p, \lambda) \hat{d}(p, \lambda)$.

Os operadores de criação e aniquilação no campo fotônico desempenha um papel similar ao já discutido nas Seções 2.2 e 2.3.3. Por isso é importante definir

$$\hat{d}(p, \lambda) |0\rangle = 0 \quad (2.131)$$

e suas relações de comutação,

$$[\hat{d}(p, \lambda), \hat{d}^\dagger(p', \lambda')] = 2p_0(2\pi)^3 \delta_{\lambda, \lambda'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.132)$$

com todas as outras sendo nulas.

Além disso, pode-se construir um vetor genérico no espaço de Fock como

$$|n_1 \lambda_1, n_2 \lambda_2, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} \left[\hat{d}^\dagger(p_1, \lambda_1) \right]^{n_1} \left[\hat{d}^\dagger(p_2, \lambda_2) \right]^{n_2} \dots |0\rangle \quad (2.133)$$

onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo da teoria, e os n_k podem assumir qualquer valor pois o fóton é uma partícula bosônica.

Um estado localizado pode ser construído, também, da seguinte forma

$$|x\rangle = \hat{A}_\mu(x) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2p_0}(2\pi)^3} \sum_\lambda \hat{d}^\dagger(p, \lambda) \varepsilon_\mu^\dagger(p, \lambda) e^{-ip_\nu x^\nu} |0\rangle, \quad (2.134)$$

ou seja, o operador de campo \hat{A}_μ cria um fóton localizado no espaço-tempo, levando em conta uma superposição de estados de momento e polarização.

2.4.5 Propagador de Feynman

Por fim, para calcular o propagador de Feynman $D_F(x - y)$ para o fóton, deve-se tomar o seguinte valor esperado no vácuo

$$-iD_{\mu\nu}^F(x - y) = \langle 0 | \hat{T} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(y) \} | 0 \rangle. \quad (2.135)$$

Se, a partir de (2.126) for definido a relação $\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu^+ + \hat{A}_\mu^-$, onde cada um destes termos estão relacionados às frequências positiva e negativa respectivamente. Isto é,

$$\hat{A}_\mu^+ \propto \hat{d}(p, \lambda); \quad \hat{A}_\mu^- \propto \hat{d}^\dagger(p, \lambda), \quad (2.136)$$

de maneira que este fato possui as seguintes implicações

$$\hat{A}_\mu^+ |0\rangle = 0; \quad \langle 0 | \hat{A}_\mu^- = 0. \quad (2.137)$$

Sendo assim, retornando à (2.126) chega-se à

$$\begin{aligned} -iD_{\mu\nu}^F(x - y) &= \langle 0 | \hat{T} \left\{ \left(\hat{A}_\mu^+(x) + \hat{A}_\mu^-(x) \right) \left(\hat{A}_\nu^+(y) + \hat{A}_\nu^-(y) \right) \right\} | 0 \rangle \\ &= \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \hat{A}_\mu^+(x) \hat{A}_\nu^-(y) | 0 \rangle + \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \hat{A}_\nu^+(y) \hat{A}_\mu^-(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Realizando estes cálculos das médias no vácuo obtém-se

$$\begin{aligned} -iD_{\mu\nu}^F(x - y) &= \theta(x_0 - y_0) \int \frac{d^3 p}{2p_0(2\pi)^3} (-\eta_{\mu\nu}) e^{ip_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \\ &\quad + \theta(y_0 - x_0) \int \frac{d^3 p}{2p_0(2\pi)^3} (-\eta_{\nu\mu}) e^{ip_\alpha(y^\alpha - x^\alpha)} \end{aligned} \quad (2.139)$$

ou ainda, como anteriormente, após o uso do teorema dos resíduos

$$D_{\mu\nu}^F(x-y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} e^{ip_\alpha(y^\alpha - x^\alpha)} \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\alpha(y^\alpha - x^\alpha)} D_{\mu\nu}^F(p). \quad (2.140)$$

De forma que

$$D_{\mu\nu}^F(p) = -\frac{i\eta_{\mu\nu}}{p^2} \quad (2.141)$$

é o propagador de Feynman para o fóton no espaço dos momentos. Daqui pode-se ver que $D_{\mu\nu}^F(x-y)$ fornece a amplitude de probabilidade de que um fóton seja criado no ponto x^μ do espaço-tempo e se propague até ser destruído em y^μ .

2.5 Modelo Padrão

Como o Modelo Padrão é a teoria que trata das partículas elementares e suas interações, é importante olhar para a formulação matemática dessa lei. Esta é dividida em setores, e para cada um deles se tem uma Lagrangiana associada que representam teorias abordadas recorrentemente no estudo da física básica, por exemplo [31].

Sabendo que os férmions elementares são partículas de spin 1/2, o setor fermiônico é descrito pela teoria de Dirac

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi, \quad (2.142)$$

já para o setor dos bósons intermediadores das interações, se tem a seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \text{Tr}\{W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}\} - \frac{1}{2} \text{Tr}\{G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}\}, \quad (2.143)$$

onde os tensores $W_{\mu\nu}$ e $G_{\mu\nu}$ representam as interações fraca e forte, assim como $F_{\mu\nu}$ representa o campo eletromagnético.

Por fim, além dos campos de spin 1/2 e 1 há também, no Modelo Padrão, o setor de Higgs que é escalar. Este descreve o bóson de Higgs, uma partícula de spin 0, que está relacionada com as massas das outras partículas. A Lagrangiana que descreve tal comportamento é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda^2 (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (2.144)$$

onde μ e λ são constantes reais.

A partir do conhecimento das Lagrangianas que regem o comportamento da matéria e suas interações, pode-se voltar o foco a apenas um dado conjunto de partículas sujeitas a determinadas forças específicas. Como um exemplo, se tem as teorias da cromodinâmica quântica, que rege a interação entre os quarks através de Glúons intermediadores, e a eletrodinâmica quântica, que será tratada com mais detalhes no próximo capítulo.

3 Eletrodinâmica quântica e o espalhamento Bhabha

3.1 A hamiltoniana da QED

Após o estudo das dinâmicas dos campos de Dirac e eletromagnético livres (isto é, teorias que não aparecem termos de interação nas Lagrangianas), é necessário agora descrever a dinâmica de interações entre as partículas caracterizadas por estes campos.

Dentre estas teorias de interação, está a eletrodinâmica quântica (QED, do inglês *Quantum Electrodynamics*), uma subárea do Modelo Padrão, que une as duas Lagrangianas abordadas nas Seções 2.3 e 2.4. Esta teoria trata da interação entre férmions por meio da força eletromagnética, ou seja, através da troca de fótons virtuais.

Dessa forma, esta teoria pode ser descrita pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}'_{\text{Dirac}} \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L}_{EM} e $\mathcal{L}'_{\text{Dirac}}$ são, respectivamente, as lagrangianas eletromagnética (2.108) e de Dirac invariante de Gauge local (2.142). Isto é,

$$\mathcal{L}'_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi, \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ é a lagrangiana de Dirac usual, dada por (2.50) e \mathcal{D}_μ é o operador derivada covariante apresentado em (B.3).

A razão pela qual esta teoria deve ser invariante de Gauge local, é que a carga elétrica seja conservada como discutido na Seção 2.1.2. Além disso, a Eq. (3.1) toma a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi = \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (3.3)$$

a qual fornece a seguinte densidade hamiltoniana

$$\mathcal{H}_{\text{QED}} = \mathcal{H}_{\text{EM}} + \mathcal{H}_{\text{Dirac}} + q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi = \mathcal{H}_{\text{EM}} + \mathcal{H}_{\text{Dirac}} + \mathcal{H}_{\text{int}}. \quad (3.4)$$

onde \mathcal{H}_{int} representa a densidade hamiltoniana da interação.

Sendo assim, sem o termo de interação, a partir do formalismo de segunda quantização análogo ao já discutido, lembrando as Eqs. (2.91) e (2.133), seria possível escrever estados genéricos, no espaço de Fock como

$$|k_1 s_1, \dots, \bar{k}_1 \bar{s}_1, \dots, p_1 \lambda_1, \dots\rangle = \hat{a}^\dagger(k_1, s_1) \cdots \hat{b}^\dagger(k_1, s_1) \cdots \hat{d}^\dagger(p_1, \lambda_1) \cdots |0\rangle. \quad (3.5)$$

Logo, a equação (3.5) teria então, um significado bastante robusto e importante. Esta unificaria as discussões realizadas até agora à respeito dos campos de Dirac e do Fóton. Onde, os operadores \hat{a}^\dagger , \hat{b}^\dagger e \hat{d}^\dagger atuando no estado de vácuo criam uma partícula, antipartícula e um

fóton, respectivamente. Aqui é utilizado as letras k (\vec{k}) e s (\vec{s}) para os 4-momentos e spins dos férmions (antiférmions) enquanto que p e λ representam o 4-momento e a polarização do fóton.

Por outro lado, note que, em (3.4), estão presentes as dinâmicas do férmion (2.56) e do fóton (2.121) livres e, além destes, aparece também o fator de interação, dado pelo último termo, devido à invariância de Gauge.

Dessa forma, é possível proceder de maneira similar à realizada até agora em relação à segunda quantização, porém, se faz necessário levar em conta também a interação entre os campos. Ou seja, partindo de (3.4), pode-se escrever o seguinte operador hamiltoniano

$$\hat{H}_{\text{QED}} = \hat{H}_{\text{EM}} + \hat{H}_{\text{Dirac}} + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (3.6)$$

onde cada um destes termos do lado direito representam a quantização dos campos eletromagnético e de Dirac livres e do termo de interação, respectivamente.

Uma coisa importante a se notar é que, a partir da Eq. (3.3), as equações de Euler-Lagrange fornecem

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi = 0, \quad (3.7)$$

para o campo ψ e, também,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = qj^\nu, \quad (3.8)$$

para o campo A_μ , onde j^ν é a corrente de Noether conservada (2.87).

Com isso, é possível notar que as soluções para os campos da QED serão, naturalmente, diferentes daquelas obtidas para as teorias livres, invalidando a ideia de um estado genérico para a QED dado pela Eq. (3.4). Apesar disso, a Eq. (3.6) sugere que após a quantização, para um parâmetro q relativamente pequeno, a dinâmica da teoria pode ser tratada de forma perturbativa.

3.1.1 Operador de evolução temporal

Para este fim, a Hamiltoniana (3.6) é redefinida como

$$\hat{H}_{\text{QED}} \equiv \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (3.9)$$

ou seja,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \int d^3x (q\hat{\psi}\gamma^\mu\hat{A}_\mu\hat{\psi}). \quad (3.10)$$

Dessa maneira, na representação de Heisenberg pode-se tomar o operador de campo (interagente) para os férmions como

$$\hat{\psi}(x^\mu) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} \hat{\psi}(t_0, \vec{x}) e^{-i\hat{H}(t-t_0)}, \quad (3.11)$$

mas, já na representação da interação, se tem

$$\hat{\psi}^{(I)}(x^\mu) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{\psi}(t_0, \vec{x}) e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}, \quad (3.12)$$

que é o operador de campo livre, já descrito anteriormente por (2.80). Sendo assim, com as Eqs. (3.11) e (3.12) chega-se à

$$\hat{\psi}(x^\mu) = e^{i\hat{H}(t-t_0)} e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{\psi}^{(I)}(x^\mu) e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} = \hat{U}^\dagger(t-t_0) \hat{\psi}^{(I)}(x^\mu) \hat{U}(t-t_0) \quad (3.13)$$

onde

$$\hat{U}(t-t_0) \equiv e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (3.14)$$

é o operador unitário de evolução temporal.

A partir de (3.14) pode-se extrair a seguinte equação de movimento

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t-t_0) &= (i\hat{H}_0) e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} + e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} (-i\hat{H}) e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\ &= ie^{i\hat{H}_0(t-t_0)} (\hat{H}_0 - \hat{H}) e^{-i\hat{H}(t-t_0)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

mas, lembrando que $\hat{H}_{\text{int}} = \hat{H} - \hat{H}_0$, esta identidade implica em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t-t_0) &= (-i) e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}_{\text{int}} e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \\ &= (-i) \hat{H}_I e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} e^{-i\hat{H}(t-t_0)} = (-i) \hat{H}_I \hat{U}(t-t_0). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Veja que \hat{H}_{int} depende dos campos interagentes ψ e A_μ que são soluções de (3.7) e (3.8). Por outro lado, \hat{H}_I é a hamiltoniana da interação na representação da interação, isto é, esta depende dos campos livres $\psi^{(I)}$ e $A_\mu^{(I)}$. Ou seja, partindo de (3.10) obtém-se

$$\hat{H}_I = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}_{\text{int}} e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} = \int d^3x \left(q \hat{\psi}^{(I)} \gamma^\mu \hat{A}_\mu^{(I)} \hat{\psi}^{(I)} \right). \quad (3.17)$$

Além disso, retornando à (3.16), é possível verificar que a solução para o operador de evolução temporal em termos de H_I é dada por

$$\hat{U}(t-t_0) = \hat{T} \exp \left\{ \left[-i \int_{t_0}^t d\tau \hat{H}_I(\tau) \right] \right\}, \quad (3.18)$$

conforme mostrado nas Refs. [19, 18].

A forma expandida, em termos de séries, da Eq. (3.18) é dada por

$$\begin{aligned} \hat{U}(t-t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 \cdots dt_n \hat{T} [\hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) \cdots \hat{H}_I(t_n)] \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 \hat{T} [\hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2)] + \cdots \end{aligned} \quad (3.19)$$

conhecidas como séries de Dyson.

3.1.2 Matriz espalhamento

A partir da lagrangiana da QED pode-se extrair todas as características das interações entre as partículas previstas pela teoria. Sabendo que a seção de choque diferencial é uma grandeza importante que é útil para descrever processos de espalhamentos, se faz necessário calculá-la à luz da eletrodinâmica quântica.

Tal grandeza, conforme a Eq. (1.1), possui uma dependência com a densidade de probabilidades de que tal processo ocorra, isto é,

$$d\sigma(\theta) \propto W_{fi}. \quad (3.20)$$

Seja uma transição entre dois estados, partindo de um inicial $|\phi_i(t_0)\rangle$ para um final $|\phi_f(t)\rangle$. Supondo que todo o processo seja descrito por partículas que estão inicialmente livres no limite assintótico $t_0 \rightarrow -\infty$, interagem, e evoluem para um estado final livre em $t \rightarrow +\infty$. A densidade de probabilidade de que tal reação aconteça, também conhecida como elemento $\{fi\}$ da matriz de espalhamento, é dada por

$$W_{fi} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \langle \phi_f(t) | \hat{U}(t, t_0) | \phi_i(t_0) \rangle = \langle f | \hat{U}(+\infty, -\infty) | i \rangle. \quad (3.21)$$

Com o operador de evolução dado por (3.19), como $|i\rangle \neq |f\rangle$, a Eq. (3.21) fornece

$$W_{fi}^{(0)} = \langle f | i \rangle = 0 \quad (3.22)$$

para o termo de ordem zero e

$$W_{fi}^{(1)} = (-i) \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f | \hat{H}_I(t) | i \rangle \quad (3.23)$$

para o termo de primeira ordem.

Bem como para o termo de segunda ordem, tem-se

$$W_{fi}^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \langle f | \hat{T} [\hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2)] | i \rangle, \quad (3.24)$$

e assim por diante, de tal maneira que

$$W_{fi} = \sum_{n=0}^{\infty} W_{fi}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \langle f | \hat{T} [\hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) \cdots \hat{H}_I(t_n)] | i \rangle. \quad (3.25)$$

Analisando cuidadosamente a Eq. (3.23), lembrando a hamiltoniana dada por (3.17),

chega-se à

$$W_{fi}^{(1)} = (-iq) \int d^4x \langle f | : \hat{\psi}^{(I)} \gamma^\mu \hat{A}_\mu^{(I)} \hat{\psi}^{(I)} : | i \rangle, \quad (3.26)$$

onde os operadores são avaliados à tempos iguais então não é necessário o operador \hat{T} . Além disso, o operador de ordenamento normal é utilizado para evitar possíveis divergências.

Analogamente, para o termo de segunda ordem, se tem

$$W_{fi}^{(2)} = \frac{(-iq)^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle f | \hat{T} \left[\hat{\psi}^{(I)}(x) \gamma^\mu \hat{A}_\mu^{(I)}(x) \hat{\psi}^{(I)}(x) \hat{\psi}^{(I)}(y) \gamma^\nu \hat{A}_\nu^{(I)}(y) \hat{\psi}^{(I)}(y) \right] | i \rangle, \quad (3.27)$$

entre outros.

Sabendo que, conforme a equação (1.2), se tem

$$W_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{V} \delta^4 \left(\sum p_{\text{inicial}} - \sum p_{\text{final}} \right) \langle |M_{fi}|^2 \rangle \quad (3.28)$$

é possível obter a média da amplitude de probabilidade $\langle |M_{fi}|^2 \rangle$ de que esta reação ocorra e, com isso, a seção de choque diferencial.

Usualmente, os termos de ordem superior à segunda não são considerados pois dependem de potências maiores do fator de perturbação q que, em geral, é muito pequeno. Além disso, as contribuições (3.26) e (3.27) podem ser calculadas apenas avaliando os operadores de criação e aniquilação presentes nos campos, porém, a quantidade de termos a serem analisados é muito grande.

3.2 Regras de Feynman

Para este fim, o físico Richard Feynman então desenvolveu, de maneira pictórica, formas mais práticas de se calcular esta amplitude a partir de diagramas, onde cada um deles representa um termo a ser somado em tal grandeza [2]. Estes diagramas são compostos de linhas curvas, seguimentos orientados e vértices como mostrado na Figura 2. Supondo a direção do tempo fluindo da esquerda para a direita, um fóton (γ) é representado por uma linha ondulada, um elétron (e^-) por um seguimento orientado e o pósitron (e^+) por um seguimento orientado na direção contrária do tempo [27].

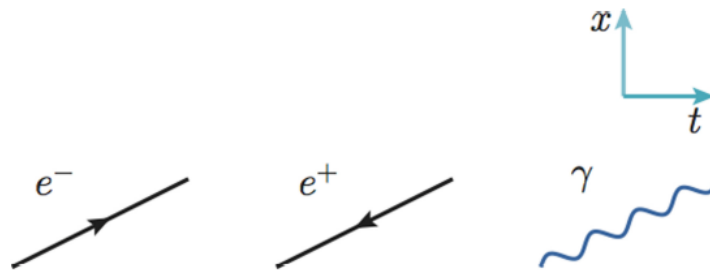


Figura 2: Componentes básicos e principais de um diagrama de Feynman Ref [2].

Consequentemente para se montar a amplitude de probabilidade de um dado processo ocorrer é necessário seguir alguns passos [14, 20, 2]. Estas regras, são extraídas da lagrangiana e podem, também, ser visualizadas a partir das equações (3.26) e (3.27).

Em outras palavras, para se calcular a grandeza M_{fi} deve-se seguir a seguinte sequência de passos:

- Para cada vértice de um dado diagrama é necessário multiplicar um termo

$$-iq\gamma^\mu = ie\gamma^\mu \quad (3.29)$$

onde $q = -e$ é a carga do elétron.

- Para cada linha externa que está “entrando” deve-se multiplicar, para partículas, um espinor u e \bar{v} para antipartículas.
- Para cada linha externa que está “saindo” deve-se multiplicar um espinor \bar{u} para partículas e v para antipartículas.
- Para cada fóton intermediador com quadrimomento p , multiplica-se um propagador de Feynman

$$D_{\mu\nu}^F(p) = -i\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2}. \quad (3.30)$$

- Para garantir a conservação do momento multiplica-se, a cada vértice, toda a expressão por

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left[\sum (p_{\text{entra}}) - \sum (p_{\text{sai}}) \right] \quad (3.31)$$

onde p_{entra} e p_{sai} representam os 4-momentos antes e depois da reação, respectivamente.

- Agora é necessário integrar sobre o momento do fóton mediador e, por fim, excluir uma função $-i(2\pi)^4 \delta(\sum p)$ restante.

É importante salientar que, para estas regras e diagramas de Feynman, é tomado uma ideia de que um par férmion-antiférmion se move livremente até o momento em que interagem entre si. E, que, após isso é “produzido” um fóton virtual que se propaga, também livremente, até o ponto em que este interage com outro par livre.

Isto é, se torna possível descrever os espalhamentos a partir dos campos que são soluções das teorias livres, como já apresentados, levando em conta o caráter das interações apenas nos vértices dos diagramas. Em outras palavras, o operador derivada covariante presente em (3.3) pode ser entendido como sendo uma derivada usual, e dessa forma \mathcal{L}_{QED} trataria apenas dos campos livres $\psi^{(I)}$ e $A_\mu^{(I)}$ enquanto que, os termos de interação, estão inseridos em \mathcal{D}_μ e são explicitados nos vértices.

Note que, pela primeira regra, é necessário multiplicar o termo (3.29) à cada vértice. Esta quantidade nada mais é que o fator que aparece na derivada covariante multiplicando o acopla-

mento dos operadores de campo. Este aparece também em ordem n na grandeza $W_{fi}^{(n)}$, indicando que para essa contribuição haverá diagramas com n vértices.

Dessa maneira, os diagramas de Feynman de um dado processo de espalhamento podem ser extraídos a partir da Eq. (3.25), simplesmente pela análise de vértices, termos de acoplamento entre campos, propagadores e fatores não nulos.

3.3 Cálculo da seção de choque diferencial

Além disso, a seção de choque diferencial, como mostrado em (1.1), é dada por

$$d\sigma(\theta) = \frac{\text{Densidade de estados finais}}{\text{Fluxo inicial de partículas}} W_{fi}. \quad (3.32)$$

Então, olhando agora para o número de estados finais (em uma dimensão), este pode ser descrito a partir da seguinte expressão no espaço de fase

$$N(p) = \frac{L}{2\pi} \Delta p \quad (3.33)$$

e, em três dimensões,

$$N(p) = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta^3 p. \quad (3.34)$$

Seja um espalhamento do tipo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, é sabido que para partículas de mesma massa, se tem $E_1 = E_2$. Logo, para cada reação haverá uma energia total conservada equivalente à $2E$ antes e depois do processo. Dessa maneira, a densidade de estados disponíveis será dada por

$$n(p) = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{2E}, \quad (3.35)$$

onde foi tomado o limite $\Delta^3 p \rightarrow d^3 p$.

Já para se obter o fluxo inicial de partículas ϕ , pode-se interpretar o processo como sendo a dinâmica de um projétil atingindo um alvo fixo. Sendo assim, se tem

$$\phi_1 = |\vec{v}| \frac{2E_1}{V} \quad (3.36)$$

para o projétil em movimento com velocidade relativa \vec{v} , e apenas $\phi_2 = 2E_2/V$ para o alvo. Com tudo isso, ao colidir partículas do tipo 1 contra partículas do tipo 2, gerando estados possíveis

de partículas 3 e 4, pode-se escrever a seção de choque diferencial do processo (3.32) como

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \frac{V}{|\vec{v}_1|2E_1} \frac{V}{2E_2} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_3}{2E_3} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3} W_{fi} \\
 &= \frac{1}{|\vec{v}_A|4E_1E_2} \frac{d^3p_3d^3p_4}{4E_3E_4} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B) \langle |M_{if}|^2 \rangle \\
 &\equiv \frac{\langle |M_{if}|^2 \rangle}{F} d\text{Lips},
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

onde,

$$F = |\vec{v}_1|4E_1E_2; \quad d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{d^3p_3d^3p_4}{(2\pi)^6 4E_3E_4}. \tag{3.38}$$

3.3.1 Fator de fluxo

A grandeza F presente na Eq. (3.38) é denominada fator de fluxo e está relacionada com os fluxos das partículas 1 e 2, conforme descrito por ϕ_1 e ϕ_2 .

Como o espalhamento é relativístico, a escolha do referencial é arbitrária, logo pode-se tomar o sistema em que a partícula 2 está parada. Assim, a velocidade relativa será $|\vec{v}_1| = |\vec{p}_1|/E_1$ e a equação (3.38) fornecerá

$$\begin{aligned}
 F &= 4 \frac{|\vec{p}_1|}{E_1} E_1 E_2 = 4 |\vec{p}_1| E_2 = 4m_2 \sqrt{E_1^2 - m_1^2} = 4 \sqrt{E_1^2 E_2^2 - m_1^2 m_2^2} \\
 &= 4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Dessa maneira, como (3.39) trata apenas de escalares, é um invariante de Lorentz, isto é, esta mesma forma é mantida para o referencial do centro de massa. Portanto, levando em conta as aproximações de altas energias ($m \rightarrow 0$), e as variáveis de Mandelstam, chega-se à

$$F = 4 \sqrt{(E^2 + |\vec{p}|^2)^2 - m^4} = 4 \sqrt{(2E^2)^2} = 4 \sqrt{4E^2 |\vec{p}|^2} = 4 |\vec{p}| \sqrt{4E^2} = 4 |\vec{p}| \sqrt{s}. \tag{3.40}$$

Onde foi utilizado os fatos de que

$$p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \theta = E^2 + |\vec{p}|^2 \tag{3.41}$$

para partículas de mesma massa no referencial do centro de massa, conforme a Eq. (C.5).

3.3.2 Elemento do espaço de fase invariante de Lorentz

Já o segundo termo presente em (3.38), é denominado como (*Lorentz invariant phase space element*) elemento do espaço de fase invariante de Lorentz. Como o nome sugere, este é um elemento infinitesimal do espaço de fase que é invariante sob transformações de Lorentz.

Sabendo que

$$\int \frac{d^3 p_4}{E_4} \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) = \frac{1}{E_4} \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) \quad (3.42)$$

e convertendo p_3 para coordenadas esféricas, a diferencial no espaço de fase pode ser dada como

$$d^3 p_3 = |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| d\Omega = |\vec{p}_3| E_3 dE_3 d\Omega \quad (3.43)$$

lembrando que,

$$E_3^2 = |\vec{p}_3|^2 - m_3^2 \rightarrow E_3 dE_3 = |\vec{p}_3| d|\vec{p}_3|. \quad (3.44)$$

Como as grandezas físicas de importância são extraídas partindo de integrações no espaço de fase, é útil remover uma das dependências dos momentos tridimensionais, isto é, tomando (3.42) para a partícula 4, por exemplo.

Logo, com isso e com as Eqs. (3.42) a (3.44), retornando à (3.38) obtém-se

$$d\text{Lips} = \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}_3| dE_3}{4E_4} \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2). \quad (3.45)$$

Introduzindo as variáveis $C = E_1 + E_2$ e $C' = E_3 + E_4$, verifica-se que no referencial do centro de massa, onde $E dE = p dp$, se tem

$$dC' = dE_3 + dE_4 = \frac{p}{E_3} dp + \frac{p}{E_4} dp = \frac{C'}{E_3 E_4} p dp = \frac{C'}{E_4} dE_3 \quad (3.46)$$

então, a equação (3.45) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} d\text{Lips} &= \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}|}{4} \left[\frac{dE_3}{E_4} \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) \right] = \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}|}{4} \left[\frac{dC'}{C'} \delta(C' - C) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}|}{4C} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Mas, como $C = E_1 + E_2 = 2E = \sqrt{s}$, tem-se

$$d\text{Lips} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}|}{4\sqrt{s}} d\Omega. \quad (3.48)$$

Agora, retornando as Eqs. (3.40) e (3.48) à (3.37), chega-se finalmente à seguinte forma para a seção de choque diferencial

$$d\sigma = \frac{1}{4|\vec{p}|\sqrt{s}} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}|^2}{4\sqrt{s}} \langle |M_{fi}|^2 \rangle d\Omega = \frac{\langle |M_{fi}|^2 \rangle}{64\pi^2 s} d\Omega, \quad (3.49)$$

conforme obtido pelas Refs. [14, 19].

Veja que a Eq. (3.49) não faz referência à nenhuma reação de espalhamento em específico.

De fato, as características do processo estão totalmente incluídas na determinação da amplitude de espalhamento M_{fi} . Isto é, a seção de choque diferencial de um processo específico (com uma energia E no referencial do centro de massa), depende apenas do elemento W_{fi} da matriz de espalhamento da determinada reação.

3.4 Espalhamento Bhabha

Um dos processos mais importantes em QED é o espalhamento Bhabha, que consiste em um par elétron-pósitron interagindo entre si através de um fóton virtual intermediador [32]. Isto é, tal reação é caracterizada por estados de momento e spin bem definidos, sendo

$$|i\rangle = |1, 2\rangle = \hat{a}^\dagger(p_1, s_1) \hat{b}^\dagger(p_2, s_2) |0\rangle, \quad (3.50)$$

para o inicial, e

$$|f\rangle = |3, 4\rangle = \hat{a}^\dagger(p_3, s_3) \hat{b}^\dagger(p_4, s_4) |0\rangle, \quad (3.51)$$

para o final.

Partindo da Eq. (3.26), o fator de primeira ordem do elemento W_{if} da matriz de espalhamento será identicamente nulo, ou seja $W_{if}^{(1)} = 0$. Isto ocorre pois, por conta dos operadores de criação e aniquilação dos fótons, aparecem estados não compatíveis (ortogonais), que não contribuem para a soma total.

Em outras palavras, por conta do operador de campo \hat{A}_μ haverá termos do tipo

$$\langle \phi | \hat{d}^\dagger(p, \lambda) | \phi' \rangle = \langle \phi | \phi', p, \lambda \rangle = 0; \quad \langle \phi | \hat{d}(p, \lambda) | \phi' \rangle = 0. \quad (3.52)$$

Por este motivo, a primeira contribuição para o espalhamento será o termo de segunda ordem que, a partir de (3.27), pode ser reescrito em uma forma mais explícita como

$$W_{fi}^{(2)} = \frac{(-iq)^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle 3, 4 | \hat{T} [\hat{\psi}(x) \gamma^\mu \hat{A}_\mu(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) \gamma^\nu \hat{A}_\nu(y) \hat{\psi}(y)] | 1, 2 \rangle \quad (3.53)$$

onde, aqui é omitido o subscrito (I) subentendo que os campos tratados são os já discutidos na formulação da teoria livre.

Para resolver (3.53) é necessário avaliar o operador de ordenamento temporal. Tal processo pode ser feito a partir do teorema de Wick que relaciona tal operação com a de ordenamento e contrações entre os campos, conforme as Refs. [19, 18].

Utilizando tal resultado e, supondo $x^0 < y^0$, realizando alguns cálculos a expressão (3.53) fornece os seguintes termos não nulos

$$\begin{aligned} W_{fi}^{(2)} = & -e^2 \int d^4x d^4y \langle 3, 4 | : \hat{\psi}^-(x) \gamma^\mu \hat{\psi}^-(x) iD_{\mu\nu}^F(x-y) \hat{\psi}^+(y) \gamma^\nu \hat{\psi}^+(y) : | 1, 2 \rangle \\ & - e^2 \int d^4x d^4y \langle 3, 4 | : \hat{\psi}^-(x) \gamma^\mu \hat{\psi}^+(x) iD_{\mu\nu}^F(x-y) \hat{\psi}^+(y) \gamma^\nu \hat{\psi}^-(y) : | 1, 2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde, por simplicidade foi tomado

$$\hat{\psi}^+ \propto \hat{a}; \quad \hat{\psi}^- \propto \hat{a}^\dagger; \quad \hat{\bar{\psi}}^+ \propto \hat{b}; \quad \hat{\bar{\psi}}^- \propto \hat{b}^\dagger. \quad (3.55)$$

É importante dizer que, é possível reduzir todos estes cálculos avaliando apenas diagramas com base nas regras de Feynman discutidas na Seção 3.2. Dessa maneira, olhando com atenção para a Eq. (3.54), o espalhamento Bhabha até a aproximação de segunda ordem, pode ser caracterizado como um processo que ocorre de duas formas diferentes (referentes às duas contribuições presentes em $W_{fi}^{(2)}$), como descrito na Figura 3.

A primeira imagem representa o caso onde o elétron de 4-momento p_1 encontra um pósitron de momento p_2 e se aniquilam gerando um fóton de momento $p_1 + p_2$ que, por sua vez, decai em um par elétron pósitron através de um processo de criação de pares. Já a segunda figura representa um elétron se propagando que muda seu movimento emitindo um fóton, e este encontra um pósitron fazendo-o alterar seu movimento.

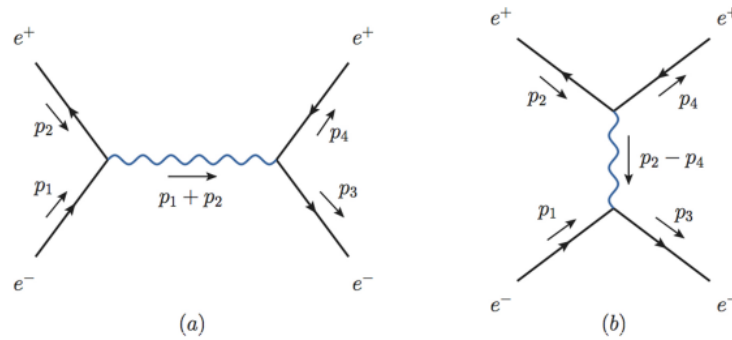


Figura 3: Diagramas de Feynman para o espalhamento Bhabha. Ref [2].

3.4.1 Amplitude de probabilidade

Partindo disso, desde que o processo pode ocorrer de duas maneiras diferentes, a probabilidade total do evento $W_{fi}^{(2)}$ é dada pela soma das reações individuais representadas por cada diagrama, conforme (3.54). Dessa forma, pode-se ver que a amplitude de probabilidade (total) é dada pela contribuição dos dois diagramas distintos, isto é,

$$iM_{fi} = iM_a + iM_b. \quad (3.56)$$

Seguindo as regras de Feynman mencionadas, para o primeiro processo, descrito pela Figura 3 (a), se tem

$$iM_a = -(ie)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4). \quad (3.57)$$

Bem como para o segundo processo, dado pela Figura 3 (b), chega-se à

$$iM_b = (ie)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(p_4) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_2 - p_4)^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_1), \quad (3.58)$$

de forma que, o sinal é trocado pois deve-se levar em conta a característica anticomutativa ao tratar a troca de posição de espiniores em sistemas fermiônicos.

Sabendo que a seção de choque depende do módulo quadrado da amplitude de probabilidade pode-se, a partir de (3.56), escrever

$$|M_{fi}|^2 = M_{fi} M_{fi}^\dagger = |M_a|^2 + |M_b|^2 + M_a^\dagger M_b + M_a M_b^\dagger = |M_a|^2 + |M_b|^2 + 2\text{Re}\{M_a^\dagger M_b\}, \quad (3.59)$$

onde, deste é possível ver que tais termos representam, respectivamente, as probabilidades dos dois diagramas separados e um termo de interferência.

Tratando a contribuição do primeiro diagrama separadamente, a Eq. (3.57) fornece

$$\begin{aligned} |M_a|^2 &= \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)] [\bar{v}(p_2) \gamma^\nu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\nu v(p_4)]^\dagger \\ &= \frac{e^4}{s^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)] [\bar{u}(p_3) \gamma_\nu v(p_4)]^\dagger [\bar{v}(p_2) \gamma^\nu u(p_1)]^\dagger \\ &= \frac{e^4}{s^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)] [\bar{v}(p_4) \gamma_\nu u(p_3)] [\bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2)] \\ &= \frac{e^4}{s^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2)] [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)] [\bar{v}(p_4) \gamma_\nu u(p_3)]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Analogamente, para o segundo diagrama chega-se à

$$|M_b|^2 = \frac{e^4}{t^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(p_4)] [\bar{v}(p_4) \gamma^\nu v(p_2)] [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_1) \gamma_\nu u(p_3)], \quad (3.61)$$

bem como, para o termo de interferência

$$2\text{Re}\{M_a^\dagger M_b\} = -2 \frac{e^4}{st} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_1) \gamma^\nu u(p_3)] [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)] [\bar{v}(p_4) \gamma_\nu v(p_2)]. \quad (3.62)$$

Tomando a média sob as helicidades, chega-se à

$$\langle |M_a|^2 \rangle = \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr}\{(\not{p}_3 + m) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m) \gamma_\nu\} \text{Tr}\{(\not{p}_2 - m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu\}, \quad (3.63)$$

para o primeiro termo,

$$\langle |M_b|^2 \rangle = \frac{e^4}{4t^2} \text{Tr}\{(\not{p}_3 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu\} \text{Tr}\{(\not{p}_2 - m) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m) \gamma^\nu\}, \quad (3.64)$$

para o segundo termo, e também

$$2\langle \text{Re}\{M_a^\dagger M_b\} \rangle = \frac{e^4}{2st} \text{Tr}\{(\not{p}_2 - m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m)\gamma_\nu\}, \quad (3.65)$$

para o termo de interferência.

Onde, para estes cálculos, foram utilizados as variáveis de Mandelstam no referencial do centro de massa, o truque de Casimir e as identidades de completeza entre os espinores, conforme descrito no Apêndice C.

Além disso, veja que no limite de altas energias, se tem

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{(\not{p}_2 - m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu\} &= \text{Tr}\{\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\} = \text{Tr}\{\gamma^\alpha p_{2\alpha}\gamma^\mu\gamma^\beta p_{1\beta}\gamma^\nu\} \\ &= 4p_{2\alpha}p_{1\beta}(\eta^{\beta\nu}\eta^{\alpha\mu} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta}) \\ &= 4(p_2^\mu p_1^\nu - \eta^{\mu\nu}p_1 \cdot p_2 + p_2^\nu p_1^\mu), \end{aligned} \quad (3.66)$$

e, analogamente,

$$\text{Tr}\{(\not{p}_3 + m)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m)\gamma_\nu\} = 4(p_{3\mu}p_{4\nu} - \eta_{\mu\nu}p_3 \cdot p_4 + p_{3\nu}p_{4\mu}), \quad (3.67)$$

onde, foram utilizadas as propriedades das matrizes de Dirac como mostrado no Apêndice A.

Utilizando as Eqs. (3.63), (3.66) e (3.67), neste mesmo limite ($m \rightarrow 0$), chega-se à

$$\begin{aligned} \langle |M_a|^2 \rangle &= \frac{16e^4}{4s^2} (p_2^\mu p_1^\nu - \eta^{\mu\nu}p_1 \cdot p_2 + p_2^\nu p_1^\mu) (p_{3\mu}p_{4\nu} - \eta_{\mu\nu}p_3 \cdot p_4 + p_{3\nu}p_{4\mu}) \\ &= \frac{8e^4}{s^2} \{(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)\}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

ou, em termos das variáveis de Mandelstam s , t e u , a Eq. (3.68) fornece

$$\langle |M_a|^2 \rangle = \frac{8e^4}{s^2} \left\{ \left(-\frac{t}{2}\right) \left(-\frac{t}{2}\right) + \left(-\frac{u}{2}\right) \left(-\frac{u}{2}\right) \right\} = 2e^4 \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right). \quad (3.69)$$

Fazendo, para os termos da amplitude devidas ao diagrama (b) e de interferência, de maneira análoga ao realizado para $|M_a|^2$, obtém-se

$$\langle |M_b|^2 \rangle = 2e^4 \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} \right); \quad 2\langle \text{Re}\{M_a^\dagger M_b\} \rangle = 4e^4 \left(\frac{u^2}{st} \right). \quad (3.70)$$

Por fim, retornando à (3.56) e (3.59), se tem

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \langle |M_a|^2 \rangle + \langle |M_b|^2 \rangle + 2\langle \text{Re}\{M_a^\dagger M_b\} \rangle, \quad (3.71)$$

e, pelas Eqs. (3.69) e (3.70), a média do quadrado da amplitude total vem a ser simplesmente

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = 2e^4 \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{st} \right). \quad (3.72)$$

Note que, utilizar as regras de Feynman torna o cálculo do elemento da matriz espalhamento mais simples. Retomando as Eqs. (3.25) e (3.28), é fácil ver que

$$W_{fi} \approx W_{fi}^{(2)} = \frac{(2\pi)^4}{V} \delta^4 \left(\sum p_{\text{inicial}} - \sum p_{\text{final}} \right) 2e^4 \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{st} \right), \quad (3.73)$$

de forma que não seja necessário nenhum cálculo explícito de integrais dadas por (3.54).

3.4.2 Seção de choque para o espalhamento Bhabha

Como calculado em (3.49), a seção de choque diferencial depende apenas de M_{if} que caracteriza o processo estudado. Logo, de acordo com resultados anteriores obtidos por (3.72), se tem para o espalhamento Bhabha,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{\alpha^2}{2s} \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{st} \right), \quad (3.74)$$

onde $\alpha = e^2/4\pi$ é a constante de estrutura fina.

Com as definições dadas em (C.12), chega-se à

$$\frac{t^2 + u^2}{s^2} = \frac{s^2}{4s^2} [(1 - \cos \theta)^2 + (1 + \cos \theta)^2] = \frac{1}{2} [1 + \cos^2 \theta], \quad (3.75)$$

bem como,

$$\frac{s^2 + u^2}{t^2} = \left[s^2 + \frac{s^2}{4} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) \right] \left[\frac{s^2}{4} (1 - \cos \theta)^2 \right]^{-1} = \frac{5 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2}, \quad (3.76)$$

e, também,

$$\frac{2u^2}{st} = \left[2\frac{s^2}{4} (1 + \cos \theta)^2 \right] \left[-\frac{s^2}{2} (1 - \cos \theta) \right]^{-1} = -\frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)}. \quad (3.77)$$

Por fim, definindo $x = \cos \theta$, a seção de choque diferencial (3.72), após realizadas algumas manipulações, pode ser reescrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{1 + x^2}{2} + \frac{4 + (1 + x)^2}{(1 - x)^2} - \frac{(1 + x)^2}{(1 - x)} \right] = \frac{\alpha^2}{4s} \frac{(x^2 + 3)^2}{(1 - x)^2}. \quad (3.78)$$

Embora seja exigido cálculos complicados, a seção de choque pode ser obtida através da integração de (3.78). Esta, por sua vez, pode ser utilizada para o cálculo de decaimentos, meia

vidas e várias outras grandezas de interesse [27].

É preciso lembrar que, ao se trabalhar com unidades naturais, é necessário reinserir as constantes fundamentais para que seja possível realizar comparações experimentais. Sabendo que (3.78) tem dimensões de área enquanto que α é adimensional e s tem dimensões de energia ao quadrado, se faz necessário reescreve-la como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (mc^2)^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \frac{\alpha^2 (x^2 + 3)^2}{4s (1-x)^2}, \quad (3.79)$$

onde m é a massa do elétron. Levando em conta que mc^2 tem unidades de energia e \hbar/mc possui dimensões de comprimento.

Dessa maneira, (3.79) vem a ser

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \hbar^2 c^2}{4s} \frac{(x^2 + 3)^2}{(1-x)^2}, \quad (3.80)$$

de forma que, esta agora está corretamente em unidades de área.

A Eq. (3.80) pode ser vista a partir da Figura 4. Esta imagem mostra uma comparação da seção de choque diferencial obtida, multiplicada por s , por resultados experimentais alcançados por [3]. Estes valores foram obtidos para reações cuja energia do centro de massa é de 29 GeV. Os dados se encontram na Tabela XII deste mesmo trabalho.

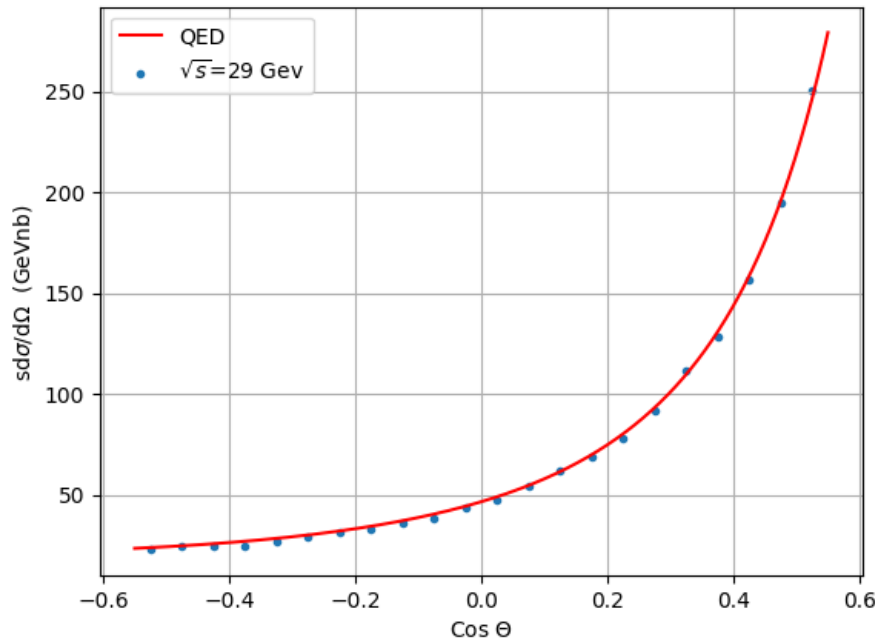


Figura 4: Seção de choque diferencial multiplicada por s (curva sólida vermelha) em relação aos valores experimentais obtidos por [3] à uma energia de 29 GeV.

A Figura 5 mostra uma comparação similar à anterior mas, utilizando os dados obtidos por

[4] para energias de 14, 34.8 e 43.6 GeV. Tais valores se encontram na Tabela 2 desta referência.

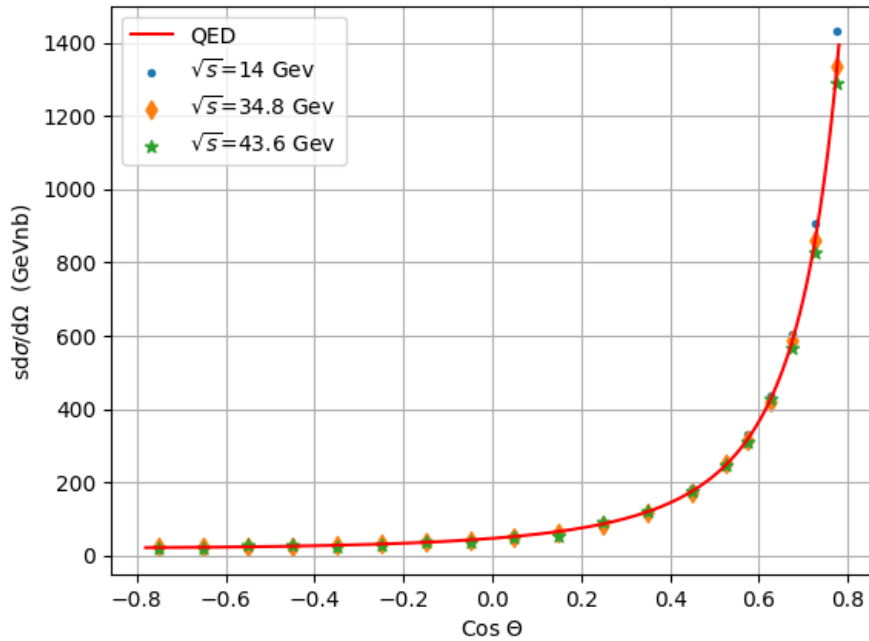


Figura 5: Seção de choque diferencial multiplicada por s (curva sólida vermelha) em relação aos valores experimentais obtidos por [4] para energias de 14 (círculo azul), 34.8 (diamante amarelo) e 43.6 GeV (estrela verde).

Dado tais resultados, é possível utiliza-los como base para o cálculo da seção de choque diferencial a partir de processos que levam em conta alguns mecanismos de quebra espontânea de simetria. Como será visto no próximo capítulo.

4 Violação de Lorentz

4.1 Quebra espontânea de simetria

Uma quebra espontânea de simetria ocorre quando campos, vetores ou tensores adquirem valores não nulos no vácuo, ou seja, havendo uma direção preferencial. Isto acontece no conhecido mecanismo de Higgs, no qual as simetrias sob grupos de Lie são espontaneamente quebradas por um estado de vácuo assimétrico. Extraído a partir de ideias similares da física da matéria condensada, esta quebra de simetria atua na teoria gerando massa [33].

Similarmente, em teorias de alta dimensionalidade como a teoria de cordas, algumas componentes de um dado tensor (que aparece na Lagrangiana) podem possuir dependência quadrática positiva, isto é, contribuindo negativamente para o potencial da interação [9].

Isso implica no fato de que aparecerão estados de vácuo não verdadeiros. Estes são instáveis, de tal maneira que ao se fazer perturbações em torno destes pontos, chega-se ao verdadeiro estado vácuo, quebrando portanto a simetria do sistema.

O estado de vácuo $|0\rangle$ é definido pela situação onde não há nenhum campo, ou seja, $\psi_i = 0$. Por outro lado, outra definição alternativa totalmente válida, é

$$\hat{H}|0\rangle = 0, \quad (4.1)$$

isto é, esse estado é aquele que caracteriza o ponto zero de energia.

4.1.1 Mecanismo de Higgs

A partir do teorema de Goldstone, é possível dizer que para uma teoria, na qual ocorra quebra de simetria global sob algum grupo de Lie, existem partículas de massa nula [34]. Entretanto, quando a Lagrangiana exibe simetria local, consequentemente existe um acoplamento entre as correntes conservadas e os bósons de Gauge. E, neste caso, uma quebra espontânea de simetria fará com que algum bóson adquira massa [35].

A partir disso, retornando à teoria de Klein-Gordon, é possível descrever a dinâmica de um bóson de spin 0 e massa m_0 carregado, acoplado ao campo de Gauge A_μ e que desempenha auto interações, através da seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu\psi^\dagger\mathcal{D}^\mu\psi - m_0^2\psi^\dagger\psi + f^2\left(\psi^\dagger\psi\right)^2 \quad (4.2)$$

onde f é um fator de acoplamento.

Pode-se, também, descrever ψ em termos de dois campos reais ϕ_1 e ϕ_2 da seguinte forma

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2); \quad \psi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2), \quad (4.3)$$

de tal maneira que a Eq. (4.2) passa a ser

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu\phi_1\mathcal{D}^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_1\phi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu\phi_2\mathcal{D}^\mu\phi_2 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_2\phi_2 + \frac{1}{4}f^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (4.4)$$

Note que (4.4) nada mais é que a combinação de duas equações de Klein-Gordon usuais para campos não carregados. Sendo assim, utilizando a seguinte notação de dubleto

$$\Phi_a = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

a Lagrangiana (4.2) passa a ser

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu\Phi_a\mathcal{D}^\mu\Phi_a - \frac{1}{2}m_0^2\Phi_a\Phi_a + \frac{1}{4}f^2(\Phi_a\Phi_a)^2. \quad (4.6)$$

Note que a Lagrangiana dada por (4.6) é invariante de Gauge local perante a ação do grupo $SU(2)$ sob o dubleto Φ_a . Isto é, esta teoria não se altera sob transformações do tipo

$$\Phi'_a = \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(x) & \sin\theta(x) \\ -\sin\theta(x) & \cos\theta(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \cos\theta(x) + \phi_2 \sin\theta(x) \\ -\phi_1 \sin\theta(x) + \phi_2 \cos\theta(x) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

onde $\theta(x)$ é uma função arbitrária do espaço-tempo. Por outro lado, o campo vetorial de Gauge se transforma de acordo com o Apêndice B, conforme já mostrado.

Além disso, supondo uma soma sob índices latinos repetidos, as equações de movimento para (4.6) vem a ser

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = qj^\nu; \quad j^\mu = i\Phi_a\mathcal{D}^\mu\Phi_a \quad (4.8)$$

para o campo A^μ e, ainda,

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\Phi_a + (m_0^2 - f^2\Phi_b\Phi_b)\Phi_a = 0 \quad (4.9)$$

para o campo dubleto Φ_a .

Olhando para (4.6) é possível ver que, para uma relação do tipo $L = T - U$ analogamente à mecânica clássica (onde T é a energia cinética, que possui dependência quadrática nas derivadas e U como sendo a energia potencial, contendo os termos de interação), se tem

$$U(\Phi_a) = \frac{1}{2}m_0^2\Phi_a\Phi_a - \frac{1}{4}f^2(\Phi_a\Phi_a)^2. \quad (4.10)$$

A partir de (4.10) pode-se ver que os extremos serão

$$\Phi_a = 0; \quad \Phi_a\Phi_a = \frac{m_0^2}{f^2}, \quad (4.11)$$

onde apenas este primeiro é um mínimo, conforme a Figura 6.

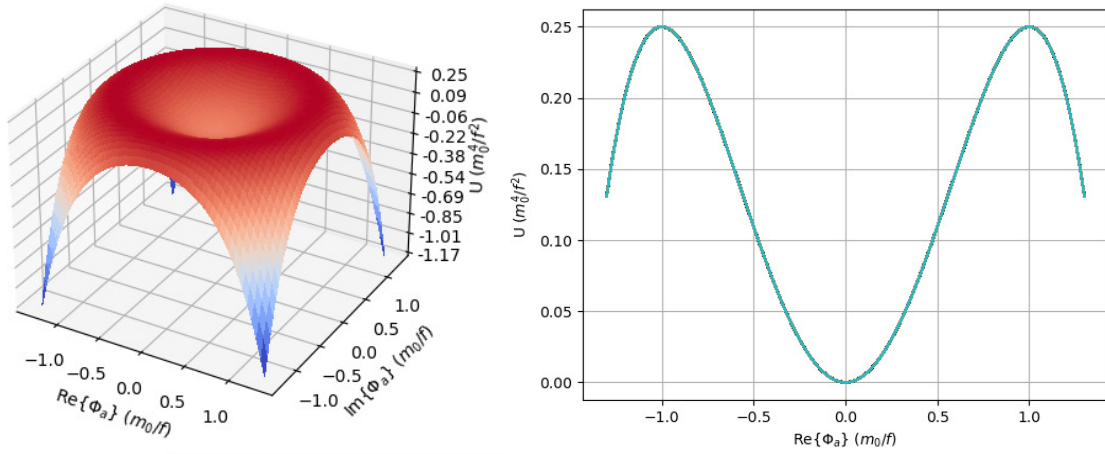


Figura 6: Superfície potencial (4.10) em função de ϕ_1 e ϕ_2 (esquerda). Gráfico deste mesmo potencial para o plano $\phi_2 = 0$ (direita).

Por outro lado, se $m_0^2 < 0$ e $f^2 < 0$, seria possível escolher constantes reais μ e λ tal que $m_0 = i\mu$ e $f = i\lambda$. Com isso, o potencial (4.10) se tornaria

$$U(\Phi_a) = -\frac{1}{2}\mu^2\Phi_a\Phi_a + \frac{1}{4}\lambda^2(\Phi_a\Phi_a)^2, \quad (4.12)$$

de tal maneira que os pontos do extremo passam a ser dados por

$$\Phi_a = 0; \quad \Phi_a\Phi_a = \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \quad (4.13)$$

assim como mostrado na Figura 7. Além disso, o potencial (4.12) nada mais é que o potencial que descreve o setor de Higgs do Modelo Padrão, como apresentado em (2.144).

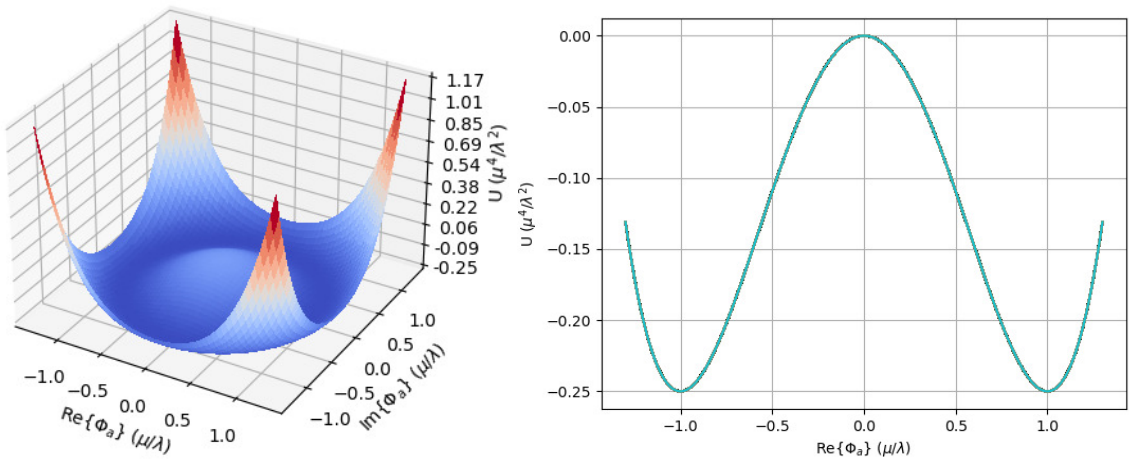


Figura 7: Superfície potencial (4.12) em função de ϕ_1 e ϕ_2 (esquerda). Gráfico deste mesmo potencial para o plano $\phi_2 = 0$ (direita).

Olhando para (4.13) pode-se notar que, ao tomar o estado de vácuo do sistema como sendo aquele em que $\Phi = 0$ e $A_\mu = 0$, aparecem problemas como a descrição da interação, por exem-

plo. Isto é, as regras de Feynman descritas na Seção 3.2 não se aplicam nas proximidades deste ponto, desde que esse é um ponto de equilíbrio instável e, portanto, as séries de Dyson não convergem.

Além do mais, os níveis de mais baixa energia são aqueles cujos valores dos campos $(\phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)})$ levam o potencial U ao seu mínimo. Estes pontos, conforme (4.13), podem ser descritos a partir de

$$\phi_1^{(0)} = \frac{\mu}{\lambda} \cos \alpha; \quad \phi_2^{(0)} = \frac{\mu}{\lambda} \sin \alpha, \quad (4.14)$$

com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Como estes valores de campo representam os pontos de mais baixa energia, pode-se defini-los como sendo os verdadeiros estados de vácuo $|0\rangle$, conforme a relação (4.1). Entretanto, note que neste mesmo estado a média

$$\langle \Phi_a \Phi_a \rangle = \frac{\mu^2}{\lambda^2} \quad (4.15)$$

ou seja, o campo $\Phi_a \Phi_a$ adquire valor esperado vácuo diferente de zero, e isto configura uma quebra espontânea de simetria.

Uma solução possível para este problema é escolher um estado de vácuo específico, fazendo $\alpha = 0$ em (4.1.1) por exemplo, de forma que

$$\phi_1^{(0)} = \frac{\mu}{\lambda}; \quad \phi_2^{(0)} = 0, \quad (4.16)$$

implicando nos valores esperados, neste estado, $\langle \phi_1^{(0)} \rangle = \mu/\lambda$ e $\langle \phi_2^{(0)} \rangle = 0$.

Com isso, é preciso redefinir os campos de tal maneira que

$$\eta_1 = \phi_1 - \frac{\mu}{\lambda}; \quad \eta_2 = \phi_2, \quad (4.17)$$

implicando nas seguintes médias para o estado de vácuo

$$\langle \eta_1 \rangle = \langle \phi_1^{(0)} \rangle - \frac{\mu}{\lambda} = 0; \quad \langle \eta_2 \rangle = \langle \phi_2^{(0)} \rangle = 0. \quad (4.18)$$

Por fim, retornando as definições (4.17) à Lagrangiana (4.4), fazendo todas as manipulações e simplificações necessárias, chega-se às seguintes relações

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \partial_\nu \eta_1 \partial^\nu \eta_1 - \frac{1}{2} (2\mu^2) \eta_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\nu \eta_2 \partial^\nu \eta_2, \quad (4.19)$$

para os campos escalares, e também,

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\nu\beta} F^{\nu\beta} - \frac{1}{2} \left(\frac{q\mu}{\lambda} \right)^2 A_\nu A^\nu, \quad (4.20)$$

para o campo de Gauge. Já para o termo de interação, se tem a seguinte Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = iqA_\nu \left[\frac{\mu}{\lambda} \partial^\nu \eta_1 + \eta_1 \partial^\nu \eta_1 + \eta_2 \partial^\nu \eta_2 \right] - \frac{q^2}{2} A_\nu A^\nu \left[\frac{2\mu}{\lambda} \eta_1 - \eta_1^2 - \eta_2^2 \right] \\ - \frac{1}{4} \lambda^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 - \lambda \mu \eta_1 (\eta_1^2 + \eta_2^2), \end{aligned} \quad (4.21)$$

como o obtido por [35].

Voltando o olhar para a teoria de Klein-Gordon livre de um campo ψ , é fácil ver que o termo que contém a massa é da forma

$$\frac{1}{2} M^2 \psi, \quad (4.22)$$

e, então, é possível obter as massas das partículas aqui abordadas comparando este fato com as equações (4.19) e (4.20).

Para as partículas descritas pelos campos A_μ , η_1 e η_2 aparecem as massas $q\mu/\lambda$, $\sqrt{2}\mu$ e 0, respectivamente. Então, partindo da ideia inicial, nota-se que por conta de uma quebra espontânea de simetria, na qual os estados de vácuo degenerados possuem valores esperados não nulos, bósons de Gauge podem ganhar massa.

As Lagrangianas (4.19), (4.20) e (4.21) representam as dinâmicas dos campos η_1 , η_2 , A_μ livres bem como os termos de interação mútua entre estes, respectivamente. Isto é, a quebra espontânea de simetria faz com que uma teoria que descreve um campo de Klein-Gordon interagindo com um campo de Gauge, dada por (4.2), implique em uma teoria interagente distinta, onde agora as massas das partículas são diferentes.

O campo η_1 é o campo que interage com as partículas e lhes dá massa através do chamado Mecanismo de Higgs (processo apresentado nesta seção). De forma que a partícula intermediária deste é o bóson de Higgs, cujo nome se deve à Peter Higgs que previu sua existência [34]. Sendo assim, o processo de quebra de simetria na física tem um papel muito importante.

Logo, olhando para a simetria de Lorentz, se faz muito importante analisar os efeitos que uma assimetria, em relação à relatividade restrita, poderia ocasionar na formulação de uma teoria.

4.1.2 Transformação de observadores e partículas

Quando se fala sobre rotação é sabido que existem duas formas de realiza-la. Isto é, seja um vetor que caracteriza um ponto no espaço, a rotação deste pode ser realizada de maneira ativa ou passiva [22].

Em outras palavras, dado um vetor posição $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, é possível realizar uma rotação, por um ângulo θ , em torno do eixo Z aplicando a seguinte matriz transformação

$$A_p = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

isto é, a transformação será dada por

$$\vec{r}'_p = A_p \vec{r} = x(\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) + y(\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) + z\vec{k}. \quad (4.24)$$

A transformação representada por (4.24) é dita rotação passiva pois ela descreve uma rotação no eixo de coordenadas, mantendo os pontos do espaço fixos. Já o ponto de vista ativo é caracterizado pela matriz transformação

$$A_a = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

logo, o vetor posição transformado será

$$\vec{r}'_a = A_a \vec{r} = (x \cos \theta - y \sin \theta) \vec{i} + (x \sin \theta + y \cos \theta) \vec{j} + z\vec{k}. \quad (4.26)$$

Entretanto, note que ao realizar uma transformação ativa por um ângulo $-\theta$, a Eq. (4.26) fornece

$$\vec{r}''_a = (x \cos \theta + y \sin \theta) \vec{i} + (-x \sin \theta + y \cos \theta) \vec{j} + z\vec{k} \quad (4.27)$$

comparando com (4.24), é fácil ver que $\vec{r}'_p = \vec{r}''_a$.

Ou seja, uma transformação de rotação passiva por um ângulo θ é totalmente equivalente à uma rotação ativa por um ângulo de $-\theta$. Isso pode ser visto, ilustrativamente, a partir da Figura 8 que mostra a equivalência destas duas transformações através das componentes dos vetores posição.

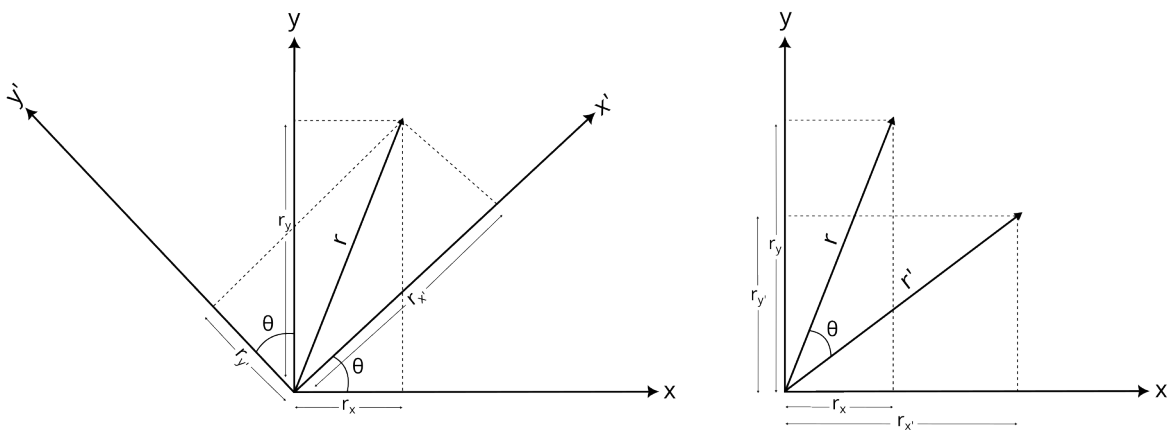


Figura 8: Esquema para rotações passiva (esquerda), onde o sistema de coordenadas sofre uma rotação por um ângulo θ , e ativa (direita) onde o vetor posição é rotacionado por um ângulo $-\theta$.

Entretanto, suponha um sistema em que há um elétron sujeito à um campo de fundo, na direção y , devido à placas paralelas carregadas. Neste caso pode-se descrever, de forma

pictórica, as transformações de rotação ativa ou passiva em relação à posição do elétron conforme a Figura 9.

Neste problema bidimensional, seja $\vec{r} = (r_x, 0)$ o vetor posição da carga em relação à S , então uma rotação passiva por um ângulo θ fará com que a posição passe a ser $\vec{r}' = (r_{x'}, r_{y'})$ em relação à S' . Por outro lado, realizando uma rotação ativa por um ângulo $-\theta$ no elétron, seu novo vetor posição será dado por $\vec{r}' = (r_{x'}, r_{y'})$, mas dessa vez em relação ao próprio S .

Isto é, a rotação passiva faz com que a posição do elétron tenha componentes nas direções dos eixos x' e y' mas ainda sim, este é perpendicular à direção do campo. Por outro lado, uma transformação ativa faz com que o vetor posição ganhe uma componente na direção do campo de fundo. Nota-se então que há um problema em relação à preservação de simetria descrito anteriormente. Este fato é ilustrado pela Figura 9.

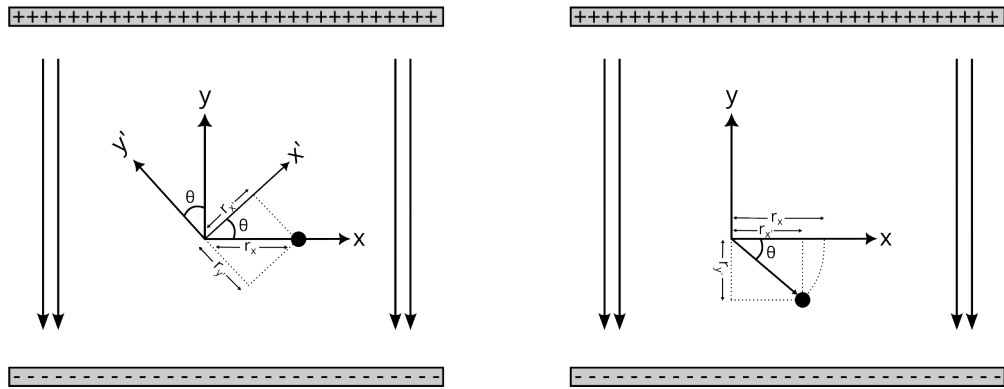


Figura 9: Relação entre as transformações passiva (esquerda) e ativa (direita) para a posição do elétron (círculo preenchido) imerso em um campo de fundo, gerado por placas paralelas.

Retornando à discussão realizada na Seção 1.3.2, as transformações de Lorentz envolvem boosts e rotações. Logo, pela teoria da relatividade, pode-se notar que as descrições físicas entre dois referenciais, cujos respectivos eixos fazem ângulos entre si, são as mesmas.

Dessa forma, supondo um sistema onde há um corpo que se move livremente em relação à um observador, é possível separar também dois pontos de vista distintos, de partícula e de observador. No que diz respeito à um boost de observador, considera-se a conexão entre a descrição de dois referenciais distintos, se movendo entre si, a cerca do movimento do corpo. Ou seja, o boost é feito para o observador, como mostrado na Figura 10.

De outra maneira, a transformação de partícula é caracterizada pela descrição do movimento do corpo através de um boost realizado no próprio corpo. Isto é, mantêm-se o referencial parado e dá-se uma velocidade à própria partícula, assim como ilustrado na Figura 11.

Sendo assim, suponha um elétron se movendo com velocidade $-v$ em relação à um referencial S' , como na Figura 11. Este movimento, então, pode ser descrito como se o observador (personagem da imagem) estivesse parado no referencial S' e realizasse um boost, com velocidade $-v$, no elétron. Isto caracteriza uma transformação de partícula.

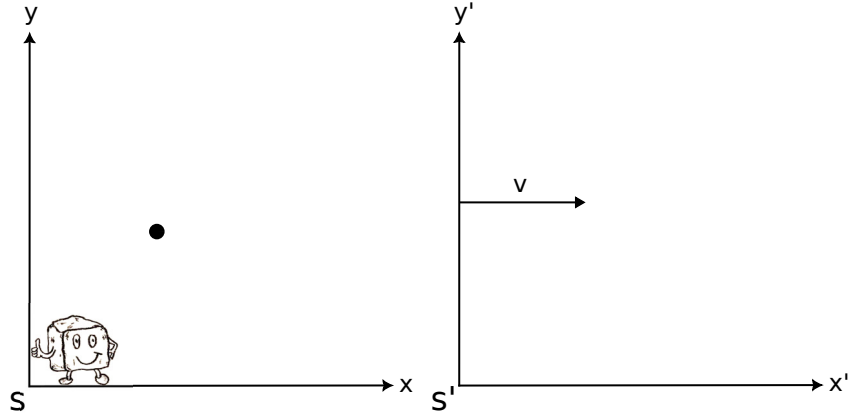


Figura 10: Boost de velocidade v feito no referencial S' em relação à S , no qual há uma partícula (círculo preenchido) e um personagem em repouso.

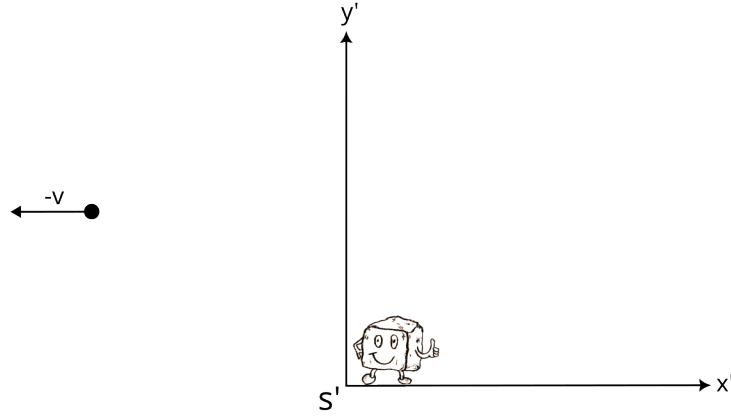


Figura 11: Boost de velocidade $-v$ realizado na partícula em relação ao referencial S' , no qual há um personagem em repouso.

Em outra perspectiva, esta dinâmica pode ser vista como se a carga estivesse parada em um referencial S junto ao personagem, e fosse realizada uma análise a partir de um sistema S' que se move com velocidade v em relação ao primeiro. Ou seja, uma transformação de observador, conforme a Figura 10.

A partir disso, note que estas duas descrições são equivalentes, ou seja, há uma simetria entre estes dois pontos de vista de transformação entre sistemas coordenados.

Porém, seja uma situação física em que se queira descrever o movimento de um elétron sujeito à um campo elétrico \vec{E} devido à placas paralelas como descrito pela Figura 12. Fazendo um boost de partícula, pode-se ver que a força exercida sobre a carga é dada por

$$\vec{F} = -e\vec{E}. \quad (4.28)$$

E, por consequência, desde que esta força é constante no tempo, a equação de movimento

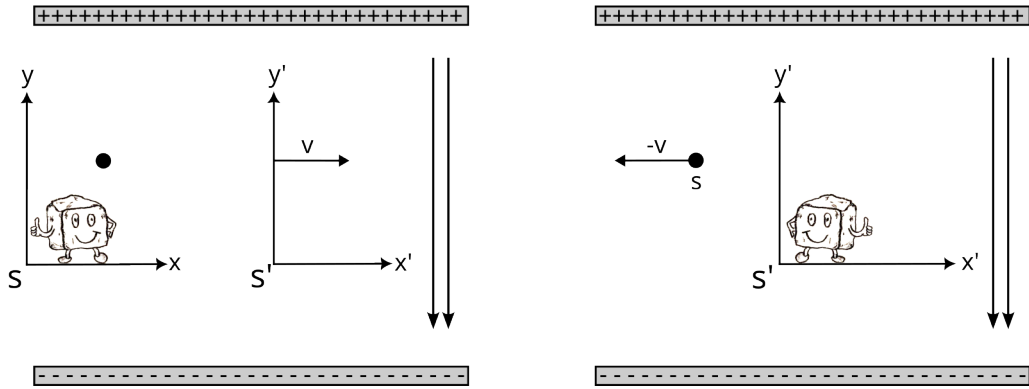


Figura 12: Relação entre as transformações de observador (esquerda) e de partícula (direita) para o movimento do elétron (círculo preenchido) imerso em um campo de fundo, gerado por placas paralelas.

fornece para a componente vertical do movimento

$$\frac{dp_y}{dt} = F \rightarrow p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-v_y^2}} = Ft, \quad (4.29)$$

utilizando as expressões de momento relativístico dados na Seção 1.3.4.

A Eq. (4.29) representa um elétron em que inicialmente sua velocidade não possuía componente na direção y mas que foi acelerado por um campo elétrico constante até um determinado instante t . Agora, evidenciando a velocidade vertical, chega-se à

$$v_y = \frac{\frac{F}{m}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m}\right)^2}} \quad (4.30)$$

e, com isso, a distância percorrida vem a ser

$$y(t) = \frac{F}{m} \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{1 + \left(\frac{F\tau}{m}\right)^2}} d\tau = \frac{m}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m}\right)^2} - 1 \right). \quad (4.31)$$

Note que, tomando o limite não relativístico ($m \gg Ft$), verifica-se que

$$\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{m}\right)^2 \quad (4.32)$$

e, consequentemente, a Eq. (4.31) fornece

$$y(t) = \frac{F}{2m} t^2, \quad (4.33)$$

isto é, neste limite é retomado a expressão clássica para o deslocamento sujeito à uma força

constante.

Por outro lado, as conexões entre os referenciais a partir de uma transformação de observador são dadas pelas relações matriciais abordadas na Seção 1.3.2. Ou seja, para este caso, os campos elétrico \vec{E}' e magnético \vec{B}' devido às placas no referencial S' são dados por

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E}; \quad \vec{B}' = -\gamma \vec{v} \times \vec{E}, \quad (4.34)$$

onde E e B são os campos medidos em S [13].

Isto é, devido ao boost de observador, aparecerá no referencial S' um campo magnético que antes não havia, e também um campo elétrico distinto, em que ambos são perpendiculares ao movimento da carga. Além disso, a força que o elétron estará sujeito é dado por

$$\vec{F}' = -e\vec{E}' = -e\gamma\vec{E} = \gamma\vec{F} \quad (4.35)$$

e, com isso, a equação de movimento para a componente vertical do elétron vem a ser

$$F = \frac{dp'_y}{dt'} \rightarrow p' = \frac{mv'_y}{\sqrt{1-v_y'^2}} = F't'. \quad (4.36)$$

E, a distância vertical percorrida pelo elétron nesse caso será

$$y'(t') = \frac{F'}{m} \int_0^{t'} \frac{\tau}{\sqrt{1 + \left(\frac{F'\tau}{m}\right)^2}} d\tau = \frac{m}{F'} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{F't'}{m}\right)^2} - 1 \right). \quad (4.37)$$

É importante notar que, partindo da equação (4.35) lembrando que t é o tempo próprio, pode-se obter a seguinte relação

$$Ft = \frac{F'}{\gamma} \gamma t' = F't', \quad (4.38)$$

onde γ é o fator de Lorentz que depende da velocidade relativa entre os referenciais. Ou seja, reescrevendo de (4.37) com base em (4.31), tem-se

$$y'(t) = \frac{m}{\gamma F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m}\right)^2} - 1 \right) = y(t) \sqrt{1-v^2}. \quad (4.39)$$

Portanto, a Eq. (4.39) mostra que, por mais que há uma simetria sobre transformações de partícula e observador, há uma assimetria quando trata-se o sistema sujeito à um campo elétrico externo devido às placas paralelas, por exemplo. Pode-se mostrar que o alcance, distância percorrida horizontalmente toma uma forma análoga, isto é

$$x'(t) = x(t) \sqrt{1-v^2} \quad (4.40)$$

como mostrado por [13].

Porém, note que, quando se toma o limite não relativístico de baixas energias, se tem $v_y \rightarrow 0$ e consequentemente a Eq. (4.39) fornece

$$y(t) = y'(t). \quad (4.41)$$

Por fim, é constatado que existe uma assimetria tanto entre as descrições de observador e partícula, quanto entre aquelas de rotação, no que diz respeito às transformações de Lorentz para sistemas imersos em um campo de fundo. O que não ocorre para partículas livres. E ainda, esta violação é mais pronunciada quando são analisados sistemas com altas velocidades, isto é, altas energias.

Dessa maneira, analogamente ao caso do capacitor de placas paralelas, a simetria sob as transformações de Lorentz pode ser quebrada por um campo vetorial constante de fundo, acoplado aos campos dinâmicos que aparecem nas Lagrangianas das teorias. É importante notar que, este campo de fundo se transforma de maneira invariante sob transformações de observador assim como o campo elétrico.

4.2 Modelo Padrão Mínimo Estendido

Conforme visto na Seção 4.1.1, ocorre uma quebra espontânea de simetria com geração de massa na teoria por conta do termo de massa possuir um sinal negativo na expressão do potencial (4.12). Analogamente, se aparecerem em alguma teoria (no termo de potencial) dependências quadráticas nos tensores de Lorentz cujos coeficientes são negativos, haverá uma violação desta simetria.

O Modelo Padrão Estendido é a teoria, invariante sob transformações de observador, que contém todos os termos do Modelo Padrão usual em conjunto com os campos da relatividade geral, os acoplamentos adicionais entre estes, bem como termos que violam a simetria de Lorentz (via transformações de partícula) e CPT [31].

A Lagrangiana do Modelo Padrão Estendido contém um número muito grande de termos, incluindo fatores de altas dimensionalidades (termos não renormalizáveis). Uma alternativa usual para se evitar a obtenção de infinitos é trabalhar com um subconjunto desta teoria, conhecido como Modelo Padrão Mínimo Estendido [31].

Para as Lagrangianas, a violação de Lorentz pode ser caracterizada por tensores constantes de fundo que se transformam de forma análoga ao já discutido na Seção 4.1.2, para o campo elétrico de um capacitor. Existem dois tipos de quebra de simetria, denominadas CPT ímpar e CPT par. Este primeiro está relacionado à Lagrangianas que violam, ao mesmo tempo, as simetrias de Lorentz e CPT, enquanto que o último diz respeito apenas às transformações de Lorentz [12].

Os termos CPT ímpar e CPT par são caracterizados, sucintamente falando, pelo número de índices de Lorentz (índices gregos que variam de 0 a 3) que aparecem nos tensores de fundo.

Isto é, a violação da simetria CPT segue a paridade da quantidade de índices que o campo de fundo apresenta.

Em outras palavras, para as Lagrangianas CPT ímpar aparecem, acoplado aos campos dinâmicos, os tensores constantes com um número ímpar de índices, podendo possuir 1, 3, 5, \dots índices. Enquanto que para as teorias CPT par, este campo de fundo possui um número par de índices, partindo de 2.

Então, para o Modelo Padrão Mínimo Estendido se tem as seguintes Lagrangianas CPT ímpar, de ordem 1,

$$\mathcal{L} = a_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (4.42)$$

para os férmions, bem como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & k_\mu^{(0)} F^\mu + \frac{1}{2} k_\alpha^{(1)} \varepsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} F_\lambda F_{\mu\nu} + k_\alpha^{(2)} \varepsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} \text{Tr} \left\{ W_\lambda W_{\mu\nu} + g^{(2)} W_\lambda W_\mu W_\nu \right\} \\ & + k_\alpha^{(3)} \varepsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} \text{Tr} \left\{ G_\lambda G_{\mu\nu} + g^{(3)} G_\lambda G_\mu G_\nu \right\}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

para os bósons de gauge, e por fim,

$$\mathcal{L} = i k^\mu \phi^\dagger \mathcal{D}_\mu \phi, \quad (4.44)$$

para o bóson de higgs. Onde os vetores de Lorentz k_μ e a_μ representam o campo de fundo constante enquanto que os fatores g caracterizam os acoplamentos.

Já para as termos CPT par de ordem 2, se tem as seguintes Lagrangianas,

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} c_{\mu\nu} \gamma^\mu \mathcal{D}^\nu \psi, \quad (4.45)$$

para o setor dos férmions, e também,

$$\mathcal{L} = k_{(0)}^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}_\nu \phi + k_{(1)}^{\mu\nu} \phi^\dagger F_{\mu\nu} \phi + k_{(2)}^{\mu\nu} \phi^\dagger W_{\mu\nu} \phi \quad (4.46)$$

para o setor de Higgs. E, por fim, o próximo termo CPT par para os bósons de Gauge é de ordem 4 e é dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} k_{\alpha\lambda\mu\nu}^{(1)} F^{\alpha\lambda} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} k_{\alpha\lambda\mu\nu}^{(2)} \text{Tr} \left\{ W^{\alpha\lambda} W^{\mu\nu} \right\} - \frac{1}{2} k_{\alpha\lambda\mu\nu}^{(3)} \text{Tr} \left\{ G^{\alpha\lambda} G^{\mu\nu} \right\}, \quad (4.47)$$

onde $c_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu}^{(i)}$ e $k_{\alpha\lambda\mu\nu}^{(i)}$, presentes nas Eqs. (4.45) à (4.47), são os tensores constantes de fundo que violam a simetria de Lorentz.

Os setores do Modelo Padrão Mínimo Estendido dados pelas Eqs. (4.42) - (4.47) foram propostos por *D. Colladay* e *A. Kostelecký* para descrever os férmions fundamentais e suas interações levando em conta as violações das simetrias de Lorentz e CPT [12].

Comparando estas relações com aquelas dadas por (2.142) - (2.144) para o Modelo Padrão

usual, é direto verificar que, por uma construção análoga à realizada na Seção 3.1, pode-se chegar à formulação de uma QED estendida. Isto é, uma teoria que trata das interações entre férmions através do campo eletromagnético, levando em conta termos com violação de Lorentz, seja CPT par ou ímpar.

4.2.1 Eletrodinâmica Quântica Estendida

Olhando para (4.42) e (4.43), relembrando da discussão realizada para a Eletrodinâmica Quântica dada pela Eq. (3.1), a lagrangiana da QED com violação de Lorentz, CPT ímpar de ordem 1, pode ser dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi + a_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi + \frac{1}{2}k_\alpha \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} A_\lambda F_{\mu\nu}. \quad (4.48)$$

Ou ainda,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi + a_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi + k_\alpha A_\lambda \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} \partial_\mu A_\nu, \quad (4.49)$$

onde

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\lambda\nu\mu}\partial_\nu A_\mu = \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu}\partial_\mu A_\nu, \quad (4.50)$$

utilizando as propriedades do simbolo de Levi-Civita.

A partir de (4.49) pode-se extrair as equações de movimento como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi \quad (4.51)$$

para o campo A_μ , e

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m + a_\mu \gamma^\mu)\psi = 0, \quad (4.52)$$

para o campo fermiônico.

Note que, as equações de movimento (4.51) e (4.52) implicam em soluções para o campo diferentes daqueles livres já discutidos nas Seções 2.3 e 2.4 o que implicaria na obtenção de novos propagadores de Feynman. Por outro lado, seguindo uma discussão análoga à realizada na Seção 3.1 é possível descrever a QED estendida partindo da ideia de que os férmions são partículas livres que interagem entre si em um determinado ponto e se propagam, após isso, de forma livre novamente.

Ou seja, é possível interpretar a dinâmica dos campos como tendo um caráter livre nos limites assintóticos. Levando em conta as interações em pontos específicos, caracterizados pelos vértices dos diagramas que representam determinado processo de espalhamento.

Com isso, os termos de violação aparecem apenas nos vértices dos diagramas de interação, em vez de proceder com cálculos de novos propagadores. Com este intuito, defini-se um novo

operador derivada covariante da seguinte forma

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu + igb^\nu {}^*F_{\mu\nu} \quad (4.53)$$

onde,

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad (4.54)$$

é o tensor eletromagnético dual, b^ν é o vetor de fundo constante que caracteriza a violação e g é o fator de acoplamento. Conforme proposto na Ref. [36].

A partir desta nova definição (4.53), pode-se escrever a Lagrangiana da QED estendida como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi. \quad (4.55)$$

Olhando para a Eq. (4.50) e, lembrando que o operador de campo do fóton livre é descrito por uma superposição de ondas planas, isto é $A_\mu \propto e^{-ip \cdot x}$, pode-se escrever a seguinte relação

$$\partial_\mu A_\nu = -ip_\mu A_\nu, \quad (4.56)$$

de forma que, retornando à (4.53), a derivada covariante será dada por

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu - g\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^\nu p^\alpha A^\beta. \quad (4.57)$$

onde p^μ é o 4-momento do fóton intermediador.

Sendo assim, a densidade Lagrangiana (4.55) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (4.58)$$

onde, cada uma dessas lagrangianas representam as teorias eletromagnética livre (2.108) e de Dirac invariante de Gauge (2.142), e por fim o termo de interação, de forma que

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - ig\bar{\psi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu b^\nu p^\alpha A^\beta\psi. \quad (4.59)$$

Como (4.59) não apresenta derivadas dos campos é possível escrever $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$ e, por conta disso, a hamiltoniana da interação será dada por

$$H_{\text{int}} = \int \mathcal{H}_{\text{int}} d^3x = \int d^3x \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi + ig\bar{\psi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu b^\nu p^\alpha A^\beta\psi \right). \quad (4.60)$$

Ao tratar a QED com o termo de violação de Lorentz como uma teoria livre nos limites $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow \infty$ mas que desempenha interações em pontos característicos do espaço-tempo, pode-se proceder perturbativamente com o termo de interação. Sendo assim, as regras de Feynman podem ser aplicadas no presente caso, levando em conta algumas modificações nos vértices.

4.3 Espalhamento Bhabha

Supondo uma reação que parte do estado inicial $|i\rangle = |1, 2\rangle$ decaindo ao estado final $|f\rangle = |3, 4\rangle$. Como já discutido, para o espalhamento Bhabha, o primeiro termo não nulo do elemento W_{fi} da matriz de espalhamento é de segunda ordem e é dado por

$$W_{fi}^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \langle f | \hat{T} [\hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2)] | i \rangle. \quad (4.61)$$

Sejam os campos $\hat{\psi}$ e \hat{A}_μ dados pelas soluções para as teorias livres, partindo da Eq. (4.60), chega-se à

$$\begin{aligned} W_{fi}^{(2)} = & \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle 3, 4 | \hat{T} \left\{ \left[q \hat{\psi}(x) \gamma^\mu \hat{A}_\mu(x) \hat{\psi}(x) + ig \hat{\psi}(x) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{A}^\beta(x) \hat{\psi}(x) \right] \right. \\ & \times \left. \left[q \hat{\psi}(y) \gamma^\mu \hat{A}_\mu(y) \hat{\psi}(y) + ig \hat{\psi}(y) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{A}^\beta(y) \hat{\psi}(y) \right] \right\} | 1, 2 \rangle \end{aligned} \quad (4.62)$$

que fornecerá quatro contribuições diferentes, isto é

$$W_{fi}^{(2)} = W_0 + W_1 + W_2 + W_3. \quad (4.63)$$

De tal maneira que, de uma forma mais explícita, estas contribuições são dadas por

$$W_0 = -\frac{q^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle 3, 4 | \hat{T} [\hat{\psi}(x) \gamma^\mu \hat{A}_\mu(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) \gamma^\nu \hat{A}_\nu(y) \hat{\psi}(y)] | 1, 2 \rangle; \quad (4.64)$$

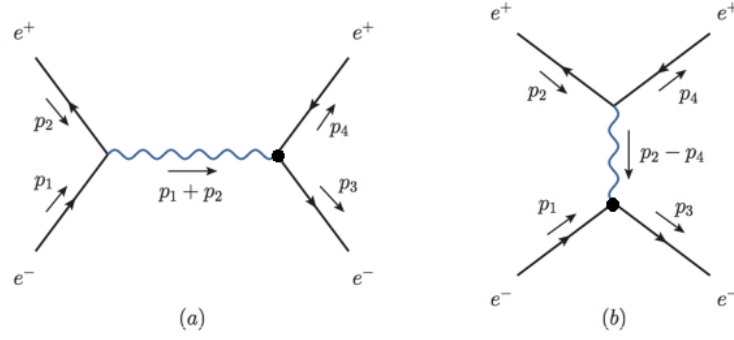
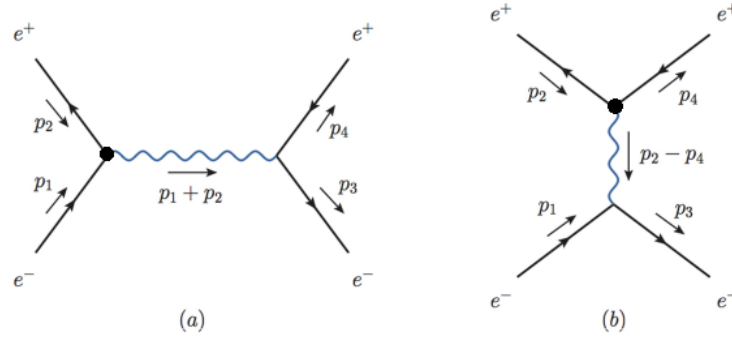
$$W_1 = -\frac{iqg}{2!} \int d^4x d^4y \langle 3, 4 | \hat{T} [\hat{\psi}(x) \gamma^\rho \hat{A}_\rho(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{A}^\beta(y) \hat{\psi}(y)] | 1, 2 \rangle; \quad (4.65)$$

$$W_2 = -\frac{iqg}{2!} \int d^4x d^4y \langle 3, 4 | \hat{T} [\hat{\psi}(x) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{A}^\beta(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) \gamma^\rho \hat{A}_\rho(y) \hat{\psi}(y)] | 1, 2 \rangle; \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} W_3 = & \frac{g^2}{2!} \int d^4x d^4y \langle 3, 4 | \hat{T} \left[\hat{\psi}(x) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{A}^\beta(x) \hat{\psi}(x) \right. \\ & \times \left. \hat{\psi}(y) \varepsilon_{\sigma\omega\delta\rho} \gamma^\sigma b^\omega p^\delta \hat{A}^\rho(y) \hat{\psi}(y) \right] | 1, 2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.67)$$

É importante notar que, a contribuição dada pelo termo W_0 nada mais é que a densidade de probabilidade já obtida para o espalhamento sem violação de Lorentz. Isto é, esse termo é descrito pelos dois diagramas usuais do espalhamento Bhabha.

Tornando o olhar para os termos W_1 e W_2 , a partir do teorema de Wick e identidades dos


 Figura 13: Diagramas de Feynman para as contribuições do termo W_1 . Modificado da Ref [2].

 Figura 14: Diagramas de Feynman para as contribuições do termo W_2 . Modificado da Ref [2].

operadores de criação e aniquilação, chega-se às seguintes relações

$$\begin{aligned}
 W_1 = & -iqg \int d^4x d^4y \langle 3,4 | : \hat{\psi}^-(x) \gamma_\rho \hat{\psi}^-(x) iD_F^{\rho\beta}(x-y) \hat{\psi}^+(y) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{\psi}^+(y) : |1,2 \rangle \\
 & - iqg \int d^4x d^4y \langle 3,4 | : \hat{\psi}^-(x) \gamma_\rho \hat{\psi}^+(x) iD_F^{\rho\beta}(x-y) \hat{\psi}^+(y) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{\psi}^-(y) : |1,2 \rangle ;
 \end{aligned}
 \quad (4.68)$$

bem como,

$$\begin{aligned}
 W_2 = & -iqg \int d^4x d^4y \langle 3,4 | : \hat{\psi}^-(x) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{\psi}^-(x) iD_F^{\rho\beta}(x-y) \hat{\psi}^+(y) \gamma_\rho \hat{\psi}^+(y) : |1,2 \rangle \\
 & - iqg \int d^4x d^4y \langle 3,4 | : \hat{\psi}^-(x) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{\psi}^+(x) iD_F^{\rho\beta}(x-y) \hat{\psi}^+(y) \gamma_\rho \hat{\psi}^-(y) : |1,2 \rangle .
 \end{aligned}
 \quad (4.69)$$

Analogamente ao caso da QED usual, as Eqs. (4.68) e (4.69) fornecem dois diagramas de Feynman cada um. Para o primeiro se tem as representações dadas pela Figura 13 e para o

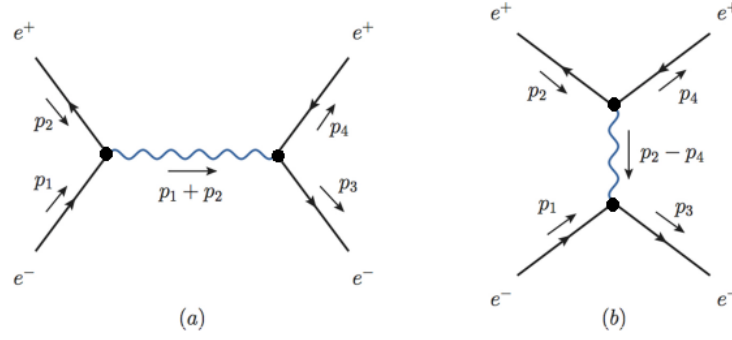


Figura 15: Diagramas de Feynman para as contribuições do termo W_3 . Modificado da Ref [2].

segundo, a Figura 14. E, por fim, para o termo W_3 se tem

$$\begin{aligned}
 W_3 = & g^2 \int d^4x d^4y \langle 3, 4 | : \hat{\psi}^-(x) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{\psi}^-(x) iD_F^{\rho\beta}(x-y) \\
 & \times \hat{\psi}^+(y) \epsilon_{\sigma\omega\delta\rho} \gamma^\sigma b^\omega p^\delta \hat{\psi}^+(y) : | 1, 2 \rangle \\
 & + g^2 \int d^4x d^4y \langle 3, 4 | : \hat{\psi}^-(x) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu b^\nu p^\alpha \hat{\psi}^+(x) iD_F^{\rho\beta}(x-y) \\
 & \times \hat{\psi}^+(y) \epsilon_{\sigma\omega\delta\rho} \gamma^\sigma b^\omega p^\delta \hat{\psi}^-(y) : | 1, 2 \rangle ,
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

de maneira que os diagramas para esta densidade de probabilidade são dados pela Figura 15.

Note que as formas dos diagramas são as mesmas que no caso anterior, porém, levando em conta modificações nos vértices, que são referentes à violação de Lorentz.

Com isso, é possível modificar as regras de Feynman de tal forma a se adequar ao problema com a quebra de simetria de forma que tal modificação é feita apenas no vértice. Isto é, para o qual seria multiplicado um termo $-iq\gamma^\mu$ como de costume, agora para o vértice com violação (círculo preenchido no diagrama) será multiplicado um termo $-g\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu b^\nu p^\alpha$.

Além disso, como $W_{fi} \propto \langle |M_{fi}|^2 \rangle$, deve-se levar em conta a contribuição de todos os diagramas, de forma que

$$M_{fi} = M_0 + M_1 + M_2 + M_3. \tag{4.71}$$

Mas, pelas regras de Feynman, é possível ver facilmente que $M_1 = M_2$, implicando em $M_{fi} = M_0 + 2M_1 + M_3$. Logo, a média do módulo quadrado da amplitude de probabilidade para este processo será de tal forma que

$$|M_{fi}|^2 = |M_0 + 2M_1 + M_3|^2 \approx |M_0|^2 + 4|M_1|^2 + 2M_0^\dagger M_1 + 2M_0 M_1^\dagger + M_0^\dagger M_3 + M_0 M_3^\dagger, \tag{4.72}$$

de forma que os termos com dependência de ordem superior à segunda no fator g foram desprezados. Isto é, como essa perturbação é suposta relativamente pequena, este termo pode ser descartado.

Como a grandeza de interesse é a seção de choque diferencial, é necessário tomar a média, sobre as helicidades, do módulo quadrado das amplitudes de probabilidade. Para isso, é preciso

analisar a seguinte relação

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \langle |M_0|^2 \rangle + 4\langle |M_1|^2 \rangle + 2\langle |M_0^\dagger M_1| \rangle + 2\langle |M_0 M_1^\dagger| \rangle + \langle |M_0^\dagger M_3| \rangle + \langle |M_0 M_3^\dagger| \rangle. \quad (4.73)$$

Sabendo que o primeiro termo em (4.72) é aquele já calculado para o caso sem violação, resta apenas calcular a amplitude com quebra de simetria.

4.4 Cálculo da amplitude com violação

Relembrando as amplitudes para o espalhamento usual, descrito em (3.57) e (3.58), se tem

$$iM_{oa} = -\frac{ie^2}{(p_1 + p_2)^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4), \quad (4.74)$$

e, também

$$iM_{ob} = \frac{ie^2}{(p_2 - p_4)^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(p_4) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1). \quad (4.75)$$

Para as contribuições dos diagramas (a) e (b), presentes na Figura 13 ou na Figura 14 (onde $iM_1 = iM_{1a} + iM_{1b}$), seguindo as regras de Feynman, chega-se à

$$iM_{1a} = (ie)(-g\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^\nu) \bar{v}(p_2) \gamma_\rho u(p_1) \left[-i \frac{\eta^{\rho\beta}}{(p_1 + p_2)^2} \right] \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (p_1 + p_2)^\alpha v(p_4), \quad (4.76)$$

para o primeiro diagrama, e também

$$iM_{1b} = -(ie)(-g\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^\nu) \bar{v}(p_2) \gamma_\rho v(p_4) \left[-i \frac{\eta^{\rho\beta}}{(p_2 - p_4)^2} \right] \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (p_2 - p_4)^\alpha u(p_1). \quad (4.77)$$

Já para as contribuições dos diagramas (a) e (b) presentes na Figura 15 (onde $iM_3 = iM_{3a} + iM_{3b}$), se tem

$$\begin{aligned} iM_{3a} &= (-g\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^\nu) \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (p_1 + p_2)^\alpha u(p_1) \left[-i \frac{\eta^{\rho\beta}}{(p_1 + p_2)^2} \right] \\ &\quad \times \bar{u}(p_3) (-g\varepsilon_{\sigma\omega\delta\rho}b^\omega) \gamma^\sigma (p_1 + p_2)^\delta v(p_4), \end{aligned} \quad (4.78)$$

assim como

$$\begin{aligned} iM_{3b} &= -(-g\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^\nu) \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (p_2 - p_4)^\alpha v(p_4) \left[-i \frac{\eta^{\rho\beta}}{(p_2 - p_4)^2} \right] \\ &\quad \times \bar{u}(p_3) (-g\varepsilon_{\sigma\omega\delta\rho}b^\omega) \gamma^\sigma (p_2 - p_4)^\delta u(p_1). \end{aligned} \quad (4.79)$$

E ainda, de uma forma mais compacta

$$iM_{1a} = -geb^{\nu} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{(p_1 + p_2)^{\alpha}}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^{\beta} u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^{\mu} v(p_4) \right], \quad (4.80)$$

bem como,

$$iM_{1b} = geb^{\nu} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{(p_2 - p_4)^{\alpha}}{(p_2 - p_4)^2} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^{\beta} v(p_4) \bar{u}(p_3) \gamma^{\mu} u(p_1) \right]. \quad (4.81)$$

Da mesma forma, se tem

$$iM_{3a} = -ig^2 b^{\nu} b_{\omega} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\sigma\omega\delta\beta} \frac{(p_1 + p_2)^{\alpha} (p_1 + p_2)^{\delta}}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^{\mu} u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_{\sigma} v(p_4) \right], \quad (4.82)$$

e, novamente

$$iM_{3b} = ig^2 b^{\nu} b_{\omega} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\sigma\omega\delta\beta} \frac{(p_2 - p_4)^{\alpha} (p_2 - p_4)^{\delta}}{(p_2 - p_4)^2} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^{\mu} v(p_4) \bar{u}(p_3) \gamma_{\sigma} u(p_1) \right]. \quad (4.83)$$

Para o que segue é importante lembrar que, no referencial do centro de massa, se tem

$$p_1 = (E, \vec{p}); \quad p_2 = (E, -\vec{p}); \quad p_3 = (E, \vec{p}'); \quad p_4 = (E, -\vec{p}'), \quad (4.84)$$

de tal maneira que

$$p_1 + p_2 = (2E, 0); \quad p_2 - p_4 = (0, -\vec{p} + \vec{p}'). \quad (4.85)$$

Além disso, a partir daqui, por simplicidade, é necessário definir dois casos diferentes para o 4-vetor do campo de fundo. Estes são definidos quando b^{ν} é do tipo-espaço ou do tipo-tempo.

4.4.1 Campo de fundo do tipo-tempo

Seja o 4-vetor, que caracteriza a violação, dado por $b^{\nu} = (b_0, \vec{0})$. As Eqs. (4.80) e (4.81) só serão não-nulas para $\nu = 0$, ou seja,

$$iM_{1a} = -geb_0 \epsilon_{\mu 0 \alpha \beta} \frac{(p_1 + p_2)^{\alpha}}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^{\beta} u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^{\mu} v(p_4) \right], \quad (4.86)$$

e, também,

$$iM_{1b} = geb_0 \epsilon_{\mu 0 \alpha \beta} \frac{(p_2 - p_4)^{\alpha}}{(p_2 - p_4)^2} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^{\beta} v(p_4) \bar{u}(p_3) \gamma^{\mu} u(p_1) \right]. \quad (4.87)$$

Bem como para

$$iM_{3a} = -ig^2 b_0^2 \epsilon_{\mu 0 \alpha \beta} \epsilon^{\sigma 0 \delta \beta} \frac{(p_1 + p_2)^{\alpha} (p_1 + p_2)^{\delta}}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^{\mu} u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_{\sigma} v(p_4) \right] \quad (4.88)$$

e, ainda,

$$iM_{3b} = ig^2 b_0^2 \varepsilon_{\mu 0 \alpha \beta} \varepsilon^{\sigma 0 \delta \beta} \frac{(p_2 - p_4)^\alpha (p_2 - p_4)_\delta}{(p_2 - p_4)^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(p_4) \bar{u}(p_3) \gamma_\sigma u(p_1)]. \quad (4.89)$$

Além disso, note que o símbolo de Levi-Civita será não-nulo apenas se $\mu \neq \alpha \neq \beta \neq 0$. Entretanto, se $\alpha \neq 0$, nota-se que $(p_1 + p_2)^\alpha = 0$ por consequência de (4.85), logo $M_{1a} = 0$ assim como $M_{3a} = 0$. Por conta disso, a média sobre as helicidades do módulo quadrado da amplitude de espalhamento, para um processo com violação de Lorentz, será

$$\begin{aligned} \langle |M_1|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ s_3, s_4}} |M_{1b}|^2 = \frac{g^2 e^2 b_0^2}{4t^2} \varepsilon_{\mu 0 \alpha \beta} \varepsilon_{\omega 0 \nu \rho} (p_2 - p_4)^\alpha (p_2 - p_4)^\nu \\ &\times \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \gamma^\beta \not{p}_4 \gamma^\rho \right\} \text{Tr} \left\{ \not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\omega \right\}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Onde foram utilizados as relações descritas no Apêndice C de uma forma análoga ao já feito para o caso do espalhamento sem violação.

As operações de traço presentes em (4.90) podem ser resolvidas, partindo de uma análise de propriedade das matrizes de Dirac, como

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \not{p}_2 \gamma^\beta \not{p}_4 \gamma^\rho \right\} &= 4 \left(p_2^\beta p_4^\rho + \frac{t}{2} \eta^{\beta\rho} + p_4^\beta p_2^\rho \right); \\ \text{Tr} \left\{ \not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\omega \right\} &= 4 \left(p_3^\mu p_1^\omega + \frac{t}{2} \eta^{\mu\omega} + p_1^\mu p_3^\omega \right). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Sendo assim, retornando (4.91) à (4.90) chega-se à

$$\begin{aligned} \langle |M_1|^2 \rangle &= 4 \frac{g^2 e^2 b_0^2}{t^2} \varepsilon_{\mu 0 \alpha \beta} \varepsilon_{\omega 0 \nu \rho} (p_2 - p_4)^\alpha (p_2 - p_4)^\nu \\ &\times \left(p_2^\beta p_4^\rho + \frac{t}{2} \eta^{\beta\rho} + p_4^\beta p_2^\rho \right) \left(p_3^\mu p_1^\omega + \frac{t}{2} \eta^{\mu\omega} + p_1^\mu p_3^\omega \right). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Com as relações dadas no Apêndice C sobre variáveis de Mandelstam e referencial do centro de massa, é possível chegar à seguinte forma para a média do módulo quadrado da amplitude de probabilidade,

$$\langle |M_1|^2 \rangle = 16 \frac{g^2 e^2 b_0^2 E^2}{(1 - \cos \theta)} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (4.93)$$

O próximo termo a ser calculado será $\langle |M_0^\dagger M_1| \rangle$, e para isso note que,

$$M_0^\dagger M_1 = M_{1b} (M_{0a}^\dagger + M_{0b}^\dagger), \quad (4.94)$$

mas, a partir de (4.74) e (4.75), vê-se que a amplitude M_0 é uma grandeza real, enquanto que $M_1 = M_{1b}$ é um imaginário puro. Sendo assim, é fácil ver que

$$M_0 M_1^\dagger = M_{1b}^\dagger (M_{0a} + M_{0b}) = -M_{1b} (M_{0a} + M_{0b}) = -M_0^\dagger M_1, \quad (4.95)$$

e, conseqüentemente, a amplitude total terá uma contribuição do tipo $\langle |M_0^\dagger M_1| \rangle + \langle |M_0 M_1^\dagger| \rangle = 0$.

Agora, olhando para o termo $\langle |M_0^\dagger M_3| \rangle$ vê-se que

$$\begin{aligned} M_0^\dagger M_3 &= M_{3b}(M_{0a}^\dagger + M_{0b}^\dagger) = \frac{g^2 e^2 b_0^2}{(p_1 + p_2)^2} \epsilon_{\mu 0 \alpha \beta} \epsilon^{\sigma 0 \delta \beta} \frac{(p_2 - p_4)^\alpha (p_2 - p_4)_\delta}{(p_2 - p_4)^2} \\ &\quad \times [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(p_4) \bar{u}(p_3) \gamma_\sigma u(p_1)] [\bar{v}(p_2) \gamma^\nu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\nu v(p_4)]^\dagger \\ &\quad - \frac{g^2 e^2 b_0^2}{(p_2 - p_4)^2} \epsilon_{\mu 0 \alpha \beta} \epsilon^{\sigma 0 \delta \beta} \frac{(p_2 - p_4)^\alpha (p_2 - p_4)_\delta}{(p_2 - p_4)^2} \\ &\quad \times [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(p_4) \bar{u}(p_3) \gamma_\sigma u(p_1)] [\bar{v}(p_2) \gamma^\nu v(p_4) \bar{u}(p_3) \gamma_\nu u(p_1)]^\dagger, \end{aligned} \quad (4.96)$$

onde, tomando a média sobre as helicidades chega-se à

$$\begin{aligned} \langle M_0^\dagger M_3 \rangle &= -\frac{g^2 e^2 b_0^2}{4t} \epsilon_{\mu 0 \alpha \beta} \epsilon^{\sigma 0 \delta \beta} (p_2 - p_4)^\alpha (p_2 - p_4)_\delta \left\{ \frac{1}{s} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu \not{p}_3 \gamma_\sigma \not{p}_1 \gamma_\nu] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{t} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma_\sigma \not{p}_1 \gamma_\nu] \right\} \\ &= g^2 e^2 b_0^2 E^2 \frac{(-\cos \theta + 6 \cos 2\theta + \cos 3\theta + 58)}{4(1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Além disso, como M_0 e M_3 são puramente reais, se tem $\langle |M_0^\dagger M_3| \rangle + \langle |M_0 M_3^\dagger| \rangle = 2\langle |M_0 M_3^\dagger| \rangle$. Sendo assim, retornando agora ao problema inicial, isto é, voltando o olhar para a Eq. (4.72), com base nos resultados obtidos em (3.72), (4.93) e (4.97), se tem

$$\begin{aligned} \langle |M_{fi}|^2 \rangle &= \langle |M_0|^2 \rangle + 4\langle |M_1|^2 \rangle + 2\langle |M_0^\dagger M_3| \rangle \\ &= 2e^4 \left[\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} + \frac{5 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} - \frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)} \right] \\ &\quad + \frac{g^2 e^2 b_0^2 E^2}{(1 - \cos \theta)} \left[64 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{(-\cos \theta + 6 \cos 2\theta + \cos 3\theta + 58)}{2} \right], \end{aligned} \quad (4.98)$$

e, simplificando, chega-se à

$$\begin{aligned} \langle |M_{fi}|^2 \rangle &= \frac{e^4 (7 + \cos 2\theta)^2}{4(\cos \theta - 1)^2} \\ &\quad + \frac{g^2 e^2 b_0^2 E^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) (-65 \cos \theta + 6 \cos 2\theta + \cos 3\theta + 122)}{(\cos \theta - 1)^2}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Por fim, para a obtenção da seção de choque diferencial, basta inserir (4.99) na definição dada por (3.49), isto é,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{256\pi^2 E^2} \langle |M_{fi}|^2 \rangle, \quad (4.100)$$

lembrando que $s = 4E^2$. Logo, pode-se escrever apenas

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4(7 + \cos 2\theta)^2}{256\pi^2 s(\cos \theta - 1)^2} + \frac{g^2 e^2 b_0^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (-65 \cos \theta + 6 \cos 2\theta + \cos 3\theta + 122)}{256\pi^2 (\cos \theta - 1)^2} \quad (4.101)$$

conforme o obtido por [36].

Tal resultado foi obtido também, em um formalismo de campos à temperatura finita, por [37] como sendo um caso particular de espalhamento à um valor limite de temperatura $T \rightarrow 0$.

É útil reescrever (4.101) de uma forma mais conveniente como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{QED}} + \Gamma, \quad (4.102)$$

onde, este primeiro termo trata-se daquele obtido para o caso da QED usual dado por (3.78) e o Γ engloba os fatores que caracterizam a violação de Lorentz.

Novamente, aqui se faz necessário reescrever (4.102) introduzindo as constantes fundamentais afim de restaurar a unidade de medida correta da seção de choque diferencial. Entretanto, olhando apenas para o termo que contém a violação, pode-se reescreve-lo como

$$\Gamma(x) = \frac{g^2 b_0^2 \alpha^2 \hbar^2 c^2}{32} \frac{[x^3 + 6x^2 - (6 + 3x)(1 - x^2) - 65x]}{(1 - x)}, \quad (4.103)$$

com $x = \cos \theta$, sabendo que (gb_0) tem dimensão de inverso de energia.

Substituindo os valores das constantes em (4.103) chega-se à

$$\Gamma(x) = g^2 b_0^2 \frac{[x^3 + 6x^2 - (6 + 3x)(1 - x^2) - 65x]}{(1 - x)} 0.647968 (GeV)^2 nb. \quad (4.104)$$

Seguindo os resultados de [3] presentes na Tabela XIII, o valor mais preciso obtido para a grandeza $s d\sigma/d\Omega$ é quando $x = -0.275$, com um desvio de $\pm 0.7 GeV^2 nb$. Isso implica que, partindo de (4.104) deveria se esperar que

$$|s\Gamma(-0.275)| = g^2 b_0^2 544.941 (GeV)^4 nb \leq 0.7 (GeV)^2 nb, \quad (4.105)$$

ou seja,

$$gb^0 \leq 1.284 \times 10^{-3} (GeV)^{-1}. \quad (4.106)$$

Nesta análise, é suposto que, se o melhor resultado não foi capaz de detectar, no valor da seção de choque diferencial, os termos que caracterizam a violação de Lorentz, então este pode fornecer um limite superior para tal parâmetro. De forma que este é dado por (4.106).

Esta abordagem, entretanto, é grosseira pois não leva em conta o erro experimental em relação ao valor da seção de choque analítica para o caso sem violação. Para se obter um resultado mais rigoroso, deve-se tomar como guia os parâmetros de corte Λ_{\pm} relacionados à cada experimento.

Esta grandeza é definida a partir da razão entre as seções de choque diferenciais [3], de tal maneira que, esta fornece uma boa aproximação para o valor limite do erro experimental partindo da expressão

$$\left| \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{QED}} - 1 \right| = \frac{3s}{\Lambda_{\pm}^2} \frac{(1-x^2)}{(3+x^2)}. \quad (4.107)$$

Rearranjando os termos, a Eq.(4.107) fornece o seguinte limite

$$g^2 b_0^2 \leq \frac{24}{\Lambda_{\pm}^2} \left| \frac{(3+x^2)(1+x)}{x^3 + 6x^2 - (6+3x)(1-x^2) - 65x} \right|, \quad (4.108)$$

que para $x = 0.525$ implica em,

$$g b_0^{\pm} \leq \frac{1.78058666194}{\Lambda_{\pm}}. \quad (4.109)$$

Os valores de (4.109) para três experimentos diferentes é mostrado na Tabela 3. Para cada um destes testes, são obtidos valores para os parâmetros de cortes Λ_+ e Λ_- . Quanto maior o valor destes termos, maiores são as precisões dos resultados encontrados e, conseqüentemente, estes fornecem os limites os quais a violação de Lorentz deve seguir.

Experimento	Referência	Λ_+ (GeV)	$g b_0^+$ (GeV) ⁻¹	Λ_- (GeV)	$g b_0^-$ (GeV) ⁻¹
JADE	[38]	178	10^{-2}	200	8.9×10^{-3}
HRS	[3]	154	1.1×10^{-2}	220	8×10^{-3}
TASSO	[4]	435	4×10^{-3}	590	3×10^{-3}

Tabela 3: Valores para os parâmetros de corte e limites superiores para o termo de violação de Lorentz obtidos a partir de experimentos distintos.

4.4.2 Campo de fundo do tipo-espaço

Suponha agora que o 4-vetor que descreva o campo de fundo seja dado por $b^\nu = (0, \vec{b})$. Desta forma, nota-se de (4.80) e (4.81) que todos os termos para $\nu = 0$ serão nulos. Sendo assim chega-se às seguintes relações

$$iM_{1a} = -geb^j \epsilon_{\mu j \alpha \beta} \frac{(p_1 + p_2)^\alpha}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^\beta u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4) \right], \quad (4.110)$$

e, também,

$$iM_{1b} = geb^j \epsilon_{\mu j \alpha \beta} \frac{(p_2 - p_4)^\alpha}{(p_2 - p_4)^2} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^\beta v(p_4) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \right], \quad (4.111)$$

onde $j = 1, 2, 3$.

Além disso, a partir das relações dadas na Eq. (4.85), nota-se que $M_{1a} \neq 0$ apenas para $\alpha = 0$, enquanto que $M_{1b} \neq 0$ para $\alpha \neq 0$. Com isso, na formulação do campo de fundo do

tipo-espaço obtém-se

$$iM_{1a} = -\frac{2Ege}{(p_1 + p_2)^2} b^j \epsilon_{\mu j 0 \beta} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^\beta u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4) \right], \quad (4.112)$$

e, também,

$$iM_{1b} = geb^j \epsilon_{\mu j k \beta} \frac{(p_2 - p_4)^k}{(p_2 - p_4)^2} \left[\bar{v}(p_2) \gamma^\beta v(p_4) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \right], \quad (4.113)$$

com $j, k = 1, 2, 3$.

Análises análogas, podem ser feitas para as contribuições dos termos M_{3a} e M_{3b} , entretanto tal cálculo não será realizado aqui, por conta de possuir um desenvolvimento extenso. Para este caso, pode-se conferir a Ref [36]. Este trabalho, fornece a seção de choque diferencial (com um termo de violação caracterizado por um vetor do tipo-espaço), a qual depende fortemente dos ângulos da projeção dos momentos das partículas na direção do campo de fundo.

Conclusão

É possível ver que no exemplo simplista do campo de placas paralelas dado na Seção 4.1.2, em análise das Eqs. (4.39) e (4.40), a visualização da quebra de simetria é mais expressiva para sistemas com altas velocidades, isto é, altas energias. Este fato implica que, como suposto, a violação de Lorentz esteja intrínseca na teoria fundamental da unificação, que é característica de energias da ordem da escala de Planck.

Em um processo real, isto é, o espalhamento Bhabha, a Tabela 3 mostra resultados muito importantes. Baseados na acurácia dos dados analisados, o valor mais preciso alcançado como limitante para o termo de violação foi aquele fornecido pelo experimento TASSO, realizado por [4].

Para este experimento foi obtido, com maior precisão (isto é, com base no parâmetro de corte Λ_-) o seguinte resultado

$$gb_0 \leq 3 \times 10^{-3} (GeV)^{-1} = 3 \times 10^{-12} (eV)^{-1}.$$

Com isso, levando em conta a unidade obtida, nota-se que para uma grande defasagem no valor real da Seção de Choque diferencial seria necessário escalas de energias muito altas. Isto é, para o resultado obtido, seria necessário uma energia da ordem de $1TeV$ para que haja uma variação de, no máximo, 3 unidades no valor real medido.

Apêndice

A Matrizes gama e suas propriedades

Dada a equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (\text{A.1})$$

o 4-vetor γ^μ é definido no espaço como

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3). \quad (\text{A.2})$$

É muito comum a utilização da notação *slash* de Feynman que é definida pela contração de um dado vetor a^μ com as matrizes de dirac, isto é,

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu. \quad (\text{A.3})$$

As matrizes gama são dadas por

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ou em termos das matrizes σ de Pauli

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Tais matrizes obedecem as seguintes propriedades:

- $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4I$;
- $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$;
- $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho}$;
- $\text{Tr}\{\gamma^\mu\} = 0$;

- $\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4\eta^{\mu\nu}$;
- $\text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})$;
- $\text{Tr}\{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}\} = \text{Tr}\{\gamma^{\mu_n} \dots \gamma^{\mu_1}\}$;
- O traço de qualquer produto de um número ímpar de γ^μ é zero.

B Derivada covariante e invariância de gauge local

A dinâmica de um campo que descreve partículas de spin 1/2 é dado pela lagrangiana de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (\text{B.1})$$

então fazendo uma transformação local do tipo $\phi' = e^{i\theta(x)}\phi$, a lagrangiana transformada se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i\bar{\psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \psi' - m\bar{\psi}' \psi' = ie^{-i\theta} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\theta} \psi) - me^{-i\theta} e^{i\theta} \bar{\psi} \psi \\ &= ie^{-i\theta} \bar{\psi} \gamma^\mu \left(e^{i\theta} \partial_\mu \psi + ie^{i\theta} \psi \partial_\mu \theta \right) - m\bar{\psi} \psi \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \theta = \mathcal{L} - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \theta \neq \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Por outro lado, conforme o teorema de Noether para que haja carga conservada localmente (carga elétrica no caso do eletromagnetismo), é necessário que haja uma simetria sob transformações de Gauge local. Para que o sistema possua tal invariância, é necessário introduzir o operador

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (\text{B.3})$$

conhecido como derivada covariante. Onde A_μ é um campo invariante de Gauge (ou potencial vetor, na interação eletromagnética) que se transforma como

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta. \quad (\text{B.4})$$

Logo, retornando à (B.3), após essa definição a nova lagrangiana será

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi \quad (\text{B.5})$$

de forma que a transformação local forneça

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu \mathcal{D}'_\mu \psi' - m\bar{\psi}'\psi' = ie^{-i\theta}\bar{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + iqA'_\mu \right) (e^{i\theta}\psi) - m\bar{\psi}\psi \\
 &= ie^{-i\theta}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\theta}\psi) - q\bar{\psi}\gamma^\mu A'_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \\
 &= i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \partial_\mu \theta - q\bar{\psi}\gamma^\mu \left[A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \theta \right] \psi - m\bar{\psi}\psi \\
 &= i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) \psi - m\bar{\psi}\psi \\
 &= i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L}.
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Ou seja, a definição de derivada covariante, através de uma interação com o campo de Gauge A_μ , introduz a conservação da carga localmente por meio da invariância da teoria. No que diz respeito à eletrodinâmica quântica, a carga eletrônica é $q = -e$ e a derivada covariante se torna apenas

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \tag{B.7}$$

Note que, havendo outros campos de Gauge adicionais à teoria, estes também devem aparecer em (B.7) para que seja garantida a invariância de toda a teoria sobre as transformações de calibre locais.

C Variáveis de Mandelstam, média sob helicidades e truque de Casimir

No referencial do centro de massa pode-se considerar um processo cujo quadri-vetor de momento para a i -ésima partícula é dado por

$$P_i^\mu = (E_i, \vec{P}_i), \tag{C.1}$$

e, com isso, se tem

$$(P_i)^2 = P_i^\mu P_{i\mu} = E_i^2 - \vec{p}_i^2 = m_i^2. \tag{C.2}$$

Para um espalhamento com duas partículas 1 e 2 interagindo entre si resultando em outras partículas 3 e 4, pode se definir as grandezas denominadas variáveis de Mandelstam s , t e u . Estas, então, são dadas por

$$\begin{aligned}
 s &= (P_1 + P_2)^2 = (P_3 + P_4)^2; \\
 t &= (P_1 - P_3)^2 = (P_2 - P_4)^2; \\
 u &= (P_1 - P_4)^2 = (P_2 - P_3)^2,
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

onde, é possível reescreve-las, com base em (C.1) e (C.2), como

$$s = (P_1)^2 + (P_2)^2 + 2P_1P_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2). \quad (\text{C.4})$$

Neste mesmo referencial (centro de massa) e para reações com partículas de mesma massa, pode-se tomar

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}|; \quad E_1 = E_2 = E, \quad (\text{C.5})$$

e, portanto, a equação (C.2) se torna,

$$m^2 = E^2 - |\vec{p}|^2. \quad (\text{C.6})$$

No limite de altas energias, caracterizado por $m \approx 0$, a (C.3) é reescrita como

$$\begin{aligned} s &= 2(P_1 \cdot P_2) = 2(P_3 \cdot P_4); \\ t &= -2(P_1 \cdot P_3) = -2(P_4 \cdot P_2); \\ u &= -2(P_1 \cdot P_4) = -2(P_3 \cdot P_2). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Além disso, neste mesmo limite, a Eq. (C.6) vem a ser

$$E^2 = |\vec{p}|^2 \quad (\text{C.8})$$

de forma que sendo uma colisão frontal, com $\phi = \pi$ o ângulo entre \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , pode-se reescrever (C.4) como

$$s = 2m^2 + 2(E^2 - |\vec{p}|^2 \cos \phi) = 2E^2 + 2|\vec{p}|^2 = 4E^2. \quad (\text{C.9})$$

Analogamente, as demais variáveis de Mandelstam se tornam

$$\begin{aligned} t &= (P_1)^2 + (P_3)^2 - 2P_1P_3 = 2m^2 - 2[E^2 + |\vec{p}|^2 \cos(\pi - \theta)] \\ &= -2E^2(1 - \cos \theta) = -4E^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

bem como

$$\begin{aligned} u &= (P_1)^2 + (P_4)^2 - 2P_1P_4 = 2m^2 - 2[E^2 - |\vec{p}|^2 \cos(\pi + \theta)] \\ &= -2E^2(1 + \cos \theta) = -4E^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Utilizando relações trigonométricas, é possível reescrever estas variáveis, em termos do ângulo de espalhamento θ como

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta); \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta). \quad (\text{C.12})$$

Como mencionado, em um processo onde o feixe inicial de partículas, bem como os produtos finais, não são polarizados, é necessário fazer uma média do módulo da amplitude ao quadrado sob todas as possíveis helicidades. Isto significa que, para um processo de espalhamento $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, é preciso somar sobre os estados possíveis de spin para os 4 momentos e dividir pelo número de partículas.

Ou seja, para o módulo descrito pela Eq. (3.60), pode-se tomar a média como

$$\begin{aligned} \langle |M_a|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ s_3, s_4}} |M_a|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ s_3, s_4}} \frac{e^4}{s^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2)] \\ &\quad \times [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)] [\bar{v}(p_4) \gamma_\nu u(p_3)] \equiv \frac{e^4}{4s^2} \sum_{s_1, s_2} I_1 \sum_{s_3, s_4} I_2. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \sum_{s_1, s_2} I_1 &= \sum_{s_1, s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\mu u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\nu v(p_2, s_2)] \\ &= \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 - m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\nu \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

bem como,

$$\begin{aligned} \sum_{s_3, s_4} I_2 &= \sum_{s_3, s_4} [\bar{u}(p_3, s_3) \gamma_\mu v(p_4, s_4)] [\bar{v}(p_4, s_4) \gamma_\nu u(p_3, s_3)] \\ &= \text{Tr} \left\{ (\not{p}_3 + m) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m) \gamma_\nu \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

As relações dadas por (C.14) e (C.15) são conhecidas como truque de Casimir que parte da relação de completeza entre os espinores de Dirac. São elas

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m; \quad \sum_s v(k, s) \bar{v}(k, s) = \not{k} - m. \quad (\text{C.16})$$

Referências

- [1] D. McMahon, *Relativity Demystified*. McGraw, 2006.
- [2] A. C. Aguilar, “Diagramas de feynman: O poder de uma imagem,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 40, 2018.
- [3] M. Derrick, K. Gan, P. Kooijman, J. Loos, B. Musgrave, L. Price, J. Schlereth, K. Sugano, J. Weiss, D. Wood, *et al.*, “Experimental study of the reactions $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$ and $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$ at 29 gev,” *Physical Review D*, vol. 34, no. 11, p. 3286, 1986.
- [4] W. Braunschweig, R. Gerhards, F. Kirschfink, H.-U. Martyn, P. Rosskamp, B. Bock, H. Fischer, H. Hartmann, J. Hartmann, E. Hilger, *et al.*, “A study of bhabha scattering at petra energies,” *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 37, no. 2, pp. 171–177, 1988.
- [5] S. F. Novaes, “Standard model: An introduction,” *arXiv preprint hep-ph/0001283*, 2000.
- [6] M. A. Moreira, “O modelo padrão da física de partículas,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 31, no. 1, pp. 1306–1, 2009.
- [7] M. K. Gaillard, P. D. Grannis, and F. J. Sciulli, “The standard model of particle physics,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 71, no. 2, p. S96, 1999.
- [8] J. J. M. Pimenta, L. F. B. Belussi, É. R. T. Natti, and P. L. Natti, “O bóson de higgs,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 35, 2013.
- [9] V. A. Kostelecký and S. Samuel, “Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory,” *Physical Review D*, vol. 39, no. 2, p. 683, 1989.
- [10] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, “Limits on a lorentz-and parity-violating modification of electrodynamics,” *Physical Review D*, vol. 41, no. 4, p. 1231, 1990.
- [11] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “Cpt violation and the standard model,” *Physical Review D*, vol. 55, no. 11, p. 6760, 1997.
- [12] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Physical Review D*, vol. 58, no. 11, p. 116002, 1998.
- [13] H. Belich, T. Costa-Soares, M. Santos, and M. Orlando, “Violação da simetria de lorentz,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 29, pp. 57–64, 2007.
- [14] F. K. Nóbrega and L. F. Mackedanz, “Espalhamento bhabha: Um estudo detalhado,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 40, 2018.

- [15] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, *An introduction to the standard model of particle physics*. Cambridge university press, 2007.
- [16] S. R. Salinas, *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.
- [17] G. L. Kane, *Modern elementary particle physics: the fundamental particles and forces?* Addison-Wesley Pub, updated ed ed., 1993.
- [18] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*. Frontiers in Physics, Westview Press; CRC Press, first edition ed., 2018.
- [19] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory And The Standard Model*. Cambridge University Press, 1st. ed., 2014.
- [20] D. McMahon, *Quantum Mechanics Demystified*. McGraw-Hill, 2005.
- [21] W. Greiner, J. Reinhardt, and D. Bromley, *Field Quantization*. Springer, 1 ed., 1996.
- [22] N. A. Lemos, *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [23] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s relativity*. Clarendon Press; Oxford University Press, 1992.
- [24] H. Stephani, *Relativity: An introduction to special and general relativity*. Cambridge university press, 2004.
- [25] A. F. R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica*. Edusp, 2003.
- [26] J. J. Sakurai and J. J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics (2nd Edition)*. Addison Wesley, 2 ed., 2010.
- [27] D. McMahon, *Quantum field theory demystified*. McGraw Hill Professional, 2008.
- [28] D. E. Neuenschwander, *Emmy Noether’s Wonderful Theorem*. Johns Hopkins U. P., first ed., 2011.
- [29] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 3rd ed ed., 1999.
- [30] E. Butkov, *Mathematical physics*. World Student, Addison-Wesley Educational Publishers Inc, new ed ed., 1973.
- [31] R. Bluhm, “Overview of the standard model extension: implications and phenomenology of lorentz violation,” in *Special Relativity*, pp. 191–226, Springer, 2006.
- [32] H. Bhabha, “The scattering of positrons by electrons with exchange on dirac’s theory of the positron,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, vol. 154, no. 881, pp. 195–206, 1936.

- [33] P. Higgs, “Prehistory of the higgs boson,” *Comptes Rendus Physique*, vol. 8, no. 9, pp. 970–972, 2007.
- [34] P. W. Higgs, “Broken symmetries and the masses of gauge bosons,” *Physical Review Letters*, vol. 13, no. 16, p. 508, 1964.
- [35] P. W. Higgs, “Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons,” *Physical review*, vol. 145, no. 4, p. 1156, 1966.
- [36] B. Charneski, M. Gomes, R. V. Maluf, and A. J. da Silva, “Lorentz violation bounds on bhabha scattering,” *Phys. Rev. D*, vol. 86, p. 045003, Aug 2012.
- [37] A. F. Santos and F. C. Khanna, “Lorentz violation in bhabha scattering at finite temperature,” *Phys. Rev. D*, vol. 95, p. 125012, Jun 2017.
- [38] W. Bartel, L. Becker, C. Bowdery, D. Cords, R. Eichler, R. Felst, D. Haidt, H. Krehbiel, B. Naroska, J. Olsson, *et al.*, “Measurement of the processes $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ and $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ at petra,” *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 19, no. 3, pp. 197–203, 1983.