



**UFMT – UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO**  
**IF – INSTITUTO DE FÍSICA**

---

**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

---

**SEÇÃO DE CHOQUE DOS ESPALHAMENTOS  
ELÉTRON-PÓSITRON E BHABHA À TEMPERATURA FINITA  
NO CONTEXTO DE VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ**



**PABLO RODRIGO ALVES DE SOUZA**

*Orientador*

---

**Professor [Doutor]**

**ALESANDRO FERREIRA DOS SANTOS**

---

*Cuiabá/MT  
05 de Março de 2021*

**Figura central: pintura da artista Roshan Houshmand, inspirada nos eventos de colisões de partículas na câmara de bolhas do Laboratório Nacional Brookhaven, nos Estados Unidos (Fonte:  
<https://www.bnl.gov/60th/houshmand.asp>).**



# Resumo

Neste trabalho, investigamos os efeitos da violação das simetrias de Lorentz e CPT sobre dois conhecidos processos na eletrodinâmica quântica, a interação elétron-pósitron e o espalhamento Bhabha, e ambos no contexto de temperatura finita. O mecanismo de violação foi implementado de maneira explícita, via derivada covariante não-mínima, construída com um campo tensorial de fundo de quarta ordem acoplado à intensidade de campo eletromagnético; enquanto que a temperatura foi introduzida via formalismo da dinâmica de campos térmicos. Tais inclusões, à nível de árvore, além de reproduzir o termo da seção de choque proporcional à  $e^4$  semelhante à obtida da versão usual, fornece-nos também novas contribuições de vértice proporcionais ao quadrado da constante de acoplamento do setor de violação,  $\lambda^2$ ; além da temperatura se fazer fortemente presente como um fator global na seção de choque total do processo. Adicionalmente, a seção de choque convencional é retomada nas condições limites de  $\lambda$  e  $T$  tendendo a zero, como se esperava.

# Abstract

In this work we investigate the effects of the violation of the Lorentz and CPT symmetries on two well-known processes in quantum electrodynamics, the electron-positron process and the Bhabha scattering, and both in the context of finite temperature. The violation mechanism is explicitly implemented via a non-minimal covariant derivative, constructed with a rank-4 background tensor field coupled to the electromagnetic field intensity; while temperature is introduced via the formalism of the thermal field dynamics. Such tree-level inclusions, in addition to reproducing the term in  $e^4$  proportional cross section similar to that obtained from the usual version, also provide us with new vertex contributions proportional to the square of the coupling constant of the violation sector,  $\lambda^2$ ; in addition to temperature being strongly present as a global factor in the total cross section of the process. Additionally, the conventional cross section resumes under the  $\lambda$  and  $T$  boundary conditions tending to zero, as expected.

# Agradecimentos

*Gostaria de agradecer aos esforços abnegados bem como a grande compreensão com a qual teve meu orientador, o Professor Dr. Alesandro Ferreira dos Santos frente às nossas dificuldades e circunstancialidades que se assomaram ao longo de nossa caminhada. Agradecimentos também ao Professor Dr. Sérgio da Costa Ulhoa por suas conversas e notas essenciais a este trabalho. Por fim, meus agradecimentos ao Professor Dr. Teldo Anderson, coordenador da Pós-Graduação do IF-MT, pelo suporte institucional.*

O presente trabalho foi realizado, em partes, com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

*Dedico este trabalho à minha mãe, Lucila Griggi Alves de Souza, e à memória de meu  
pai, Juarêz Távora Alves de Souza.*



VIDAS NEGRAS BRASILEIRAS  
TAMBÉM IMPORTAM



---

*“Quem come do fruto do conhecimento, é sempre expulso  
de algum paraíso.”*

**Melanie Klein**

# Índice

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Índice</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Acrônimos</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivações . . . . .	2
1.2 Objetivos . . . . .	6
1.3 Hipóteses . . . . .	7
1.4 Perspectivas . . . . .	7
1.5 Elementos léxicos, figuras, notação e organização do texto . . . . .	7
<b>2 Cinemática de espalhamento e seção de choque</b>	<b>10</b>
2.1 A área efetiva de choque . . . . .	11
2.2 Cinemática de espalhamento . . . . .	12
2.3 A seção de choque na eletrodinâmica quântica . . . . .	13
<b>3 Espalhamentos elétron-pósitron e Bhabha à temperatura zero</b>	<b>18</b>
3.1 As equações da eletrodinâmica quântica . . . . .	19
3.2 A seção de choque fria do espalhamento elétron-pósitron . . . . .	21
3.3 A seção de choque fria do espalhamento Bhabha . . . . .	26
<b>4 Violação da simetria de Lorentz e o modelo padrão estendido</b>	<b>35</b>
4.1 As assimetrias da natureza . . . . .	36
4.2 A violação da simetria de Lorentz . . . . .	39
4.3 O modelo padrão estendido . . . . .	40
4.4 VSL via acoplamento não mínimo . . . . .	42
4.5 O espalhamento elétron-pósitron CPT-par . . . . .	45

<b>5 A dinâmica de campos térmicos</b>	<b>53</b>
5.1 Ideias preliminares . . . . .	54
5.2 O espaço de Hilbert térmico . . . . .	56
5.3 A operação “til” . . . . .	58
5.4 Funções de distribuição . . . . .	60
5.5 A transformação de Bogoliubov . . . . .	62
5.6 Operadores térmicos de aniquilação e criação . . . . .	63
5.7 A seção de choque no formalismo da DCT . . . . .	65
5.8 O propagador do fóton termal . . . . .	68
<b>6 Resultados para o espalhamento elétron-pósitron</b>	<b>75</b>
6.1 Fundamentos . . . . .	76
6.2 A amplitude de espalhamento . . . . .	78
6.3 As contribuições de vértices . . . . .	79
<b>7 Resultados para o espalhamento Bhabha</b>	<b>82</b>
7.1 A amplitude de espalhamento e seção de choque geral . . . . .	83
7.2 A contribuição de paridade ímpar . . . . .	86
<b>8 Conclusões</b>	<b>93</b>
<b>Apêndice</b>	<b>94</b>
<b>A Algumas integrais úteis</b>	<b>95</b>
<b>B Traços sobre as matrizes de Dirac</b>	<b>97</b>
<b>C Cálculo dos fatores eletrônicos e muônicos</b>	<b>98</b>
<b>D Fatores térmicos</b>	<b>100</b>
<b>E Amplitude térmica da interação elétron-pósitron</b>	<b>103</b>
<b>F Amplitude térmica do Espalhamento Bhabha</b>	<b>114</b>
<b>G Webliografia</b>	<b>122</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>123</b>

# Lista de Figuras

1.1	Típico processo onde se mostra um canal convencional (construído com vértices $-ie\gamma^\mu \equiv \bullet <$ ) adicionado de um canal com um dos vértices gerado por violação de Lorentz $\otimes <$ . . . . .	5
1.2	O espalhamento $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$ e um dos três canais do processo Bhabha. . . . .	6
1.3	Canal do espalhamento $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$ com a produção de um par de quarks virtuais. . . . .	6
1.4	Os três canais do espalhamento Bhabha: (t) espalhamento, (s) aniquilação e (u) interferência. . . . .	7
2.1	Dois grupos de partículas (A e B) em rota de choque a uma velocidade relativa de $v_{rel} =  \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B $ . . . . .	11
2.2	Choque de um par de partículas de momentos $p_\mu^1$ e $p_\mu^2$ gerando as partículas emergentes de momento $p_\mu^3$ e $p_\mu^4$ através de um ângulo $\theta$ . . . . .	13
2.3	Duas das $i$ -ésimas partículas do grupo inicial $N_i$ chocam-se, gerando duas das $f$ -ésimas partículas do grupo emergente $N_f$ . . . . .	14
2.4	Volume do espaço de fase e seus três eixos $n_x$ , $n_y$ e $n_z$ . . . . .	14
2.5	Seção de choque total $\mu$ (linhas cheias), fotoelétrico (linhas com símbolos cheios) e produção de pares (linhas com símbolos vazios) e efeito Compton (curvas em destaque acima do gráfico)(Extraído de [33]). . . . .	16
2.6	Comparação entre os valores teórico e experimental para o $\sigma$ do espalhamento Bhabha em função da energia $E_{CM} = \sqrt{s}$ em GeV ( Como mostrado em [35]). . . . .	17
3.1	Diagramas do espalhamento elétron-pósitron e Bhabha e seus vértices $\Gamma_{(0)}^\mu = -ie\gamma^\mu \equiv \bullet <$ . . . . .	21
4.1	Vértices: (a) EDQ convencional (construído com vértices $-ie\gamma^\mu \equiv \bullet <$ ) e (b) com contribuição de violação de Lorentz (vértices $(\otimes <)$ ). Em (c) mostra-se um típico processo com a contribuição advinda da violação de Lorentz e/ou de CPT. . . . .	41
4.2	Diagramas dos espalhamentos elétron-pósitron e Bhabha. . . . .	45
5.1	Sistema físico F na presença de um banho térmico a uma dada temperatura finita T. . . . .	54
5.2	Espaço de Hilbert duplicado (ou termal) $\mathbb{H}_T$ formado pelo produto direto entre os sub-espacos $\mathbb{H}$ (físico) e $\tilde{\mathbb{H}}$ (dual, ou "til"). . . . .	55
5.3	Espaço de operadores duplicado, $\mathfrak{S}_T$ , formado pela soma direta entre os sub-espacos $\mathfrak{S}$ (físico) e $\tilde{\mathfrak{S}}$ (dual, ou "til"). . . . .	60
5.4	O propagador térmico do fóton. . . . .	68
5.5	Gráfico da temperatura solar (Adaptado de <a href="https://solarscience.msfc.nasa.gov/interior.shtml">https://solarscience.msfc.nasa.gov/interior.shtml</a> . Acessado em 22/09/2019.) . . . . .	74
6.1	Vértices da EDQ usual e aquele advindo da violação de Lorentz, respectivamente. . . . .	77
6.2	Resultado gráfico para o espalhamento elétron-pósitron. . . . .	81
7.1	Resultado gráfico para o espalhamento Bhabha. . . . .	92

D.1 Curvas dos fatores térmicos. . . . .	102
--	-----

# Acrônimos

**DCT** Dinâmica de Campos Térmicos

**EDQ** Eletrodinâmica Quântica

**EDQE** Eletrodinâmica Quântica Estendida

**MP** Modelo Padrão das Interações Fundamentais

**MPE** Modelo Padrão Estendido

**QES** Quebra Espontânea de Simetria de Higgs-Englert

**RG** Relatividade Geral

**RR** Relatividade Restrita

**VEV** Valor Esperado do Vácuo

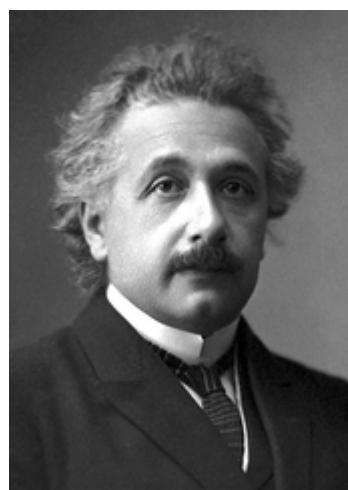
**VSL** Violação da Simetria de Lorentz

**VSCPT** Violação da Simetria CPT

**VSLCPT** Violação da Simetria de Lorentz e de CPT



# Introdução



*“As coisas mais maravilhosas que podemos experimentar são as misteriosas. Elas são a origem de toda verdadeira arte e ciência. Aquele para quem essa sensação é um estranho, aquele que não mais consegue parar para admirar e extasiar-se em veneração, é como se estivesse morto: seus olhos estão fechados.”*

**Albert Einstein**

**A** compreensão da estrutura íntima da matéria na escala de energias próximas da grande unificação ( $\sim 10^{19}$  GeV) requer a consideração de dois importantes ingredientes, a saber: (1) a possibilidade da violação da simetria de Lorentz, e (2) os intensos efeitos da temperatura. No primeiro caso, uma das consequências é o surgimento do chamado modelo padrão estendido, uma teoria à baixas energias que emerge de sua versão fundamental [11, 12, 13, 14, 15, 16]. O segundo fator, a alta temperatura, aparece como um parâmetro natural em condições igualmente extremas, como nos processos de interação que ocorrem em sistemas astrofísicos. Neste último caso, destaca-se o formalismo da dinâmica de campos térmicos cujos ingredientes básicos envolvem mapeamentos entre espaços de operadores e a chamada transformação de Bogoliubov cujo principal objetivo é escrever o valor esperado de observáveis como uma média sobre estados no equilíbrio térmico [43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52].

Frente a tal cenário se faz pertinente indagar: quais seriam os possíveis efeitos desses fatores intensos em processos elementares? Mais precisamente, como se comportariam as seções de choque da eletrodinâmica quântica sujeitas a tais extremos? Nesta introdução delimitaremos nossas motivações, objetivos e hipóteses levantadas tendo como objetivo principal responder tais questões. Ao final, teceremos detalhes sobre a organização do conteúdo e elementos prévios de leitura da tese, como abreviações, termos e notação empregada.

## 1.1 Motivações

Finalizado entre as décadas de 60 e 70 o chamado Modelo Padrão das Interações Fundamentais (MP) é a melhor descrição da estrutura fundamental da matéria detectável, sendo capaz de prever suas partículas, interações, spins, cargas, massas, dentre outras propriedades, previsões estas confirmadas tanto no regime de baixas quanto no de altas energias<sup>1</sup> [1, 2]. Formalmente, o modelo é um arcabouço teórico que engloba teoria de grupo, simetrias de coordenadas, fase, e quiral, o mecanismo de Quebra Espontânea de Simetria de Higgs-Englert (QES) e, por fim, duas estatísticas classificadoras das partículas, a estatística de Fermi-Dirac e a estatística de Bose-Einstein. O modelo se estrutura num produto direto semi simples entre grupos de calibre irreduzíveis, ou seja,

$$\text{SU}_C(3) \otimes \text{SU}_I(2) \otimes \text{U}_Y(1). \quad (1.1)$$

No que concerne ao seu conteúdo físico, este se realiza através dos números quânticos. Além do número quântico de cor  $C$ , o setor forte apresenta também o número quântico de sabor, dado aos quarks, enquanto o setor eletrofraco apresenta números quânticos de isospin  $I$  e hipercarga  $Y$ . Essas cargas relacionam-se entre si, e com carga elementar  $Q$ , através da fórmula constitutiva de Gell-Mann-Nishijima,  $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$ , sendo  $I_3$  a terceira componente de isospin. Antes do acionamento do mecanismo de QES, os setores forte ( $\text{SU}_C(3)$ ) e eletrofraco ( $\text{SU}_I(2) \times \text{U}_Y(1)$ ) encontram-se unificados, e nesse estágio todos os entes físicos são não massivos. Entretanto, no Valor Esperado do Vácuo (VEV) ( $\sim 256$  GeV) o mecanismo é acionado, desacoplando todos os três setores do modelo e com a consequente geração de escala de massa determinada a partir dos parâmetros livres, constantes de acoplamento e ângulos de mistura que emergem no processo.

Não obstante esse grande sucesso preditivo, e por ser o modelo científico mais confirmado experimentalmente, o modelo padrão permanece sem respostas satisfatórias para algumas questões importantes das quais pode-se citar: (i) a enorme disparidade no valor da energia do vácuo dado pelas medidas cosmológicas e aquele fornecido pela teoria quântica de campos [3], (ii) a incompreensão da hierarquia de calibre [4], (iii) as oscilações de neutrinos e a origem desconhecida de sua massa [5]; (iv) a existência

<sup>1</sup>A mais recente e impressionante ratificação do modelo padrão foi a comprovação experimental do bóson de Higgs em 2012, partícula prevista desde a década de 60.

de partículas cósmicas com energias superiores ao permitido [6, 7]; (v) a assimetria na distribuição da carga do elétron [8] e (vi) as discrepâncias entre as medidas experimentais e teóricas sobre o tamanho do próton [9], dentre outras. Entretanto, duas questões centrais assolam o modelo padrão da física de partículas. A primeira é a completa falha na incorporação da gravidade dentro de um quadro unificado com as outras três forças fundamentais [10]; e a segunda é o fato do MP, quer teórico quer experimentalmente, estar considerado apenas à  $T = 0$ , isto é, ele não leva em conta processos à temperaturas não nulas. A primeira dificuldade expressa-se no considerável gap entre as intensidades das interações forte, fraca e eletromagnética em relação à gravidade (Tabela 1.1), enquanto que a segunda faz com que as seções de choque e outras quantidades não sejam parametrizadas pela temperatura. Foi nessa tensão de esforços que se configurou a grande motivação a partir da qual possibilidades para além do próprio modelo padrão fossem consideradas.

Força	Intensidade
Forte	$10^1$
Fraca	$10^{-2}$
eletromagnética	$10^{-5}$
Gravitacional	$10^{-40}$

Tabela 1.1: Intensidade relativa entre as interações fundamentais.

É nesse cenário que se apresenta, no âmbito de um dos pilares da física, uma proposta surgida no seio da teoria unificada e que interfere, em parte, com o próprio tecido da realidade ao colocar em cheque um dos ramos da simetria de Lorentz<sup>2</sup>. Seu mecanismo parte do pressuposto de que essa simetria fundamental da natureza, do ponto de vista da partícula, pode ser violada nas proximidades da escala de Planck,

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \sim 10^{19} \text{ GeV}. \quad (1.2)$$

Tal hipótese foi inicialmente levantada por J. D. Bjorken inspirado nos trabalhos de Y. Nambu sobre o supercondutor. Bjorken apresentou uma possível origem dinâmica para o campo eletromagnético num modelo com Violação da Simetria de Lorentz (VSL) [19, 20]. Entretanto, tal mecanismo (de violação) ganhou impulso num trabalho publicado no final da década de 1980 no âmbito das teorias de corda, uma vez que a violação estaria substancialmente presente nessa escala [21]. Subsequentemente, esse mecanismo foi utilizado para englobar o MP e a Relatividade Geral (RG) adicionados de todos os possíveis termos de violação  $\mathcal{L}_{\text{VSL}}$  [27, 28]:

$$\mathcal{L}_{\text{MPE}} = \mathcal{L}_{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{RG}} + \mathcal{L}_{\text{VSL}}. \quad (1.3)$$

Essa teoria, conhecida como Modelo Padrão Estendido (MPE), passou a ser considerada a descrição fundamental da física, já que consegue descrever unificadamente as quatro interações. Uma de suas grandes vantagens é a de conseguir recuperar o modelo padrão convencional como seu subproduto natural a emergir no limiar de baixas energias [17, 18]. O mecanismo de violação é acionado através da inclusão de campos de fundo, chamados também de tensores de Lorentz (com ou sem dinâmica) acoplados aos campos físicos de interesse. De modo geral, esses termos tomam a forma de

$$\lambda \mathbf{K}_L C_F^{(1)} \Gamma \dots C_F^{(i)}, \quad (1.4)$$

com  $C_F^{(i)}$  campos físicos,  $\Gamma$  certas matrizes,  $\lambda$  a constante de acoplamento e  $\mathbf{K}_L$  um dado campo de Lorentz.

<sup>2</sup>Como sabemos, existem dois pontos de “vista” a partir da qual a simetria de Lorentz se realiza: pelo referencial do observador e pelo referencial da partícula.

Existem duas vias a partir das quais o mecanismo pode ser acionado, a saber, (*i*) de maneira que ela ocorra espontaneamente (quebra espontânea da simetria) e (*ii*) de modo que ela ocorra explicitamente (quebra explícita da simetria). No primeiro caso, os termos de violação são incluídos na lagrangiana do modelo de maneira a afetar os propagadores da teoria [27, 28]. É o exemplo do setor de puro-fóton estendido na qual os tensores de Lorentz são acoplados ao campo de calibre. A segunda maneira é introduzi-los como termos adicionais nas derivadas covariantes, ou seja, como termos não-mínimos dados basicamente por [32, 37]:

$$\lambda \mathbf{K}_L \Gamma C_F. \quad (1.5)$$

No primeiro caso, além de guardar todas as características da sua versão a baixas energias, como micro causalidade, positividade da energia, conservação da energia e momento, hermiticidade, quantização convencional, invariância de Lorentz (do observador) e invariância de calibre, é renormalizável por contagem de potência. Isso decorre do fato da quebra de simetria ocorrer espontaneamente. No segundo caso, a violação de Lorentz é introduzida via derivada covariante não-mínima, fornecendo um modelo estendido que, embora não renormalizável por contagem de potência apresenta todas as grandezas de interesse calculadas satisfatoriamente em nível de árvore, já que o parâmetro de violação é muito pequeno e em geral abaixo do limite inferior de

$$|\lambda \mathbf{K}_L| \sim 10^{-12} (eV)^{-1}. \quad (1.6)$$

Como se nota, a não renormalizabilidade aparece por conta do parâmetro de violação ter unidade de massa, o que não é considerada uma falha grave da teoria, já que a mesma é compreendida como sendo a versão à baixas energias da teoria fundamental <sup>3</sup>.

Uma importante via de acesso ao mecanismo de violação de Lorentz, e que está relacionado diretamente com possibilidades experimentais, é uma aguardada violação CPT<sup>4</sup>. Segundo o teorema CPT, toda teoria de campo local relativística é invariante pela transformação combinada CPT. Noutros termos, se a teoria é invariante de Lorentz então ela é invariante por CPT. Com efeito, se CPT é violada então a simetria de Lorentz (da partícula) também o será<sup>5</sup>. Por conseguinte, qualquer violação de CPT observável deve ser descrita pelo MPE.

São muitas as vantagens ao se considerar uma extensão do modelo padrão equipado com violação de Lorentz e de CPT. Além da motivação original, a unificação da gravidade com as três forças fundamentais e do ganho de se trabalhar com uma teoria que guarda todas as características do modelo padrão convencional, podemos elencar algumas outras. Em essência, a inclusão de termos de violação de Lorentz e de CPT é capaz de produzir contribuições de vértices adicionais proporcionais aos parâmetros de violação  $|\lambda \mathbf{K}_L|$ . É o que ocorre no setor de férmions: além dos vértices usuais da eletrodinâmica quântica ( $\bullet <$ ) surgem também contribuições associadas à quebra de simetria ( $\otimes <$ ) gerando, à nível de árvore, gráficos adicionais, como é mostrado na Figura (1.1). Por exemplo, no contexto da equação de Dirac foram obtidas contribuições de vértices nos espalhamentos elétron-pósitron [32], Bhabha [37] e também no espectro do hidrogênio [38]. A violação de Lorentz também está relacionada ao surgimento de fases topológicas e geométricas, como em [39, 40, 41, 42], onde os autores trabalharam também no âmbito da equação de Dirac e no limite não relativístico.

---

<sup>3</sup>Embora é preciso notificar que a teoria com operador de ordem três também apresenta parâmetro de violação com dimensão de massa.

<sup>4</sup>Muito embora não se tenha encontrado até hoje nenhum indício nesse sentido.

<sup>5</sup>A inversa nem sempre é verdadeira, pois a violação da simetria de Lorentz não necessariamente implica na violação de CPT.

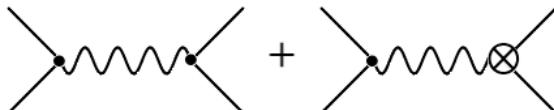


Figura 1.1: Típico processo onde se mostra um canal convencional (construído com vértices  $-ie\gamma^\mu \equiv \bullet <$ ) adicionado de um canal com um dos vértices gerado por violação de Lorentz  $\otimes <$ .

No que se refere aos setores, a parte de calibre do MPE apresenta dois subsetores que geram contribuições de vértices entre férmiões e fótons, um CPT-par e outro CPT-ímpar. Por exemplo, considerando-se cálculos no limite ultra relativístico, em [38, 39, 40] foi explorado o subsetor CPT-ímpar, implementado via acoplamento não-mínimo de campos de fundo como  $\mathbf{K}_\mu$  e  $\gamma_5 \mathbf{K}_\mu$  com a intensidade de campo dual  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/2$ ; enquanto que em [32] os autores vasculharam os efeitos de uma violação de Lorentz CPT-par via termo não-mínimo proporcional a  $\mathbf{K}_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu F^{\alpha\beta}$  sobre a seção de choque do espelhamento  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  à  $T = 0$ .

Outro ingrediente interessante ao se estudar a física na escala de Planck é o fator “temperaturas extremas”, neste caso, altíssimas temperaturas. Embora todos os processos controlados a envolverem interações de partículas ocorram à temperatura nula, como nos grandes aceleradores, em sistemas astrofísicos, porém, seus efeitos são irremediavelmente elevados. Por exemplo, eventos no Sol encontram-se numa faixa de temperatura média que vai de 1eV( $\sim 1000$ K) na superfície a 10KeV( $\sim 10^7$ K) próximo a seu centro. Por conseguinte, investigar o comportamento da matéria submetida a tais condições como nas proximidades da origem do universo, no estado supercomprimido de uma estrela de nêutrons, no regime de unificação eletrofraca, no desconfinamento quark no interior dos hadrons ou no processo de evolução estelar exige o estudo de teorias de campo num contexto de temperatura finita [43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52]. Portanto, escala de Planck e temperaturas extremas estão indissociáveis.

Existem dois modos básicos usados para se incluir a temperatura no sistema. Um é o formalismo de tempo imaginário proposto por Matsubara [81]. Um segundo, criada por Takahashi e Umezawa, um formalismo de tempo real conhecido como Dinâmica de Campos Térmicos (DCT) é muito útil no estudo de sistemas que se encontram no equilíbrio térmico [44, 45, 47]<sup>6</sup>. Neste último caso a inclusão da temperatura é implementada através da reconstrução do espaço de Hilbert por meio de um produto direto entre dois subespaços:  $|0, \tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$  com  $|0\rangle \in \mathcal{H}$  e seu recíproco  $|\tilde{0}\rangle \in \widetilde{\mathcal{H}}$ . Esse estado é capaz de fornecer a correta álgebra dos números  $c$  incorporada à temperatura. Para isso, introduz-se a chamada operação til,  $\sim$ , um mapeamento entre os dois subespaços executado pelo objeto  $\mathbf{J}$  tal que  $\mathbf{J}\mathcal{O}\mathbf{J} = \widetilde{\mathcal{O}}$  e  $\mathbf{J}|0\rangle = |\tilde{0}\rangle$ . Além disso, uma operação unitária  $\mathcal{U}(\beta)$ , conhecida como transformação de Bogoliubov, é responsável pela termalização dos operadores de criação e aniquilação,  $a(\beta) = \mathcal{U}^\dagger(\beta)a\mathcal{U}(\beta)$  (com  $\beta = (k_B T)^{-1}$ ) bem como pela termalização do vácuo do sistema, isto é, levando-o do estado “frio” (à  $T = 0$ )  $|0, \tilde{0}\rangle$  ao vácuo térmico:  $|0(\beta)\rangle = \mathcal{U}(\beta)|0, \tilde{0}\rangle$ . Com efeito, o valor esperado de um dado observável  $\mathcal{O}$ , no equilíbrio térmico, pode então ser calculado através de uma média sobre estados de vácuo em equilíbrio térmico [44, 45, 47, 48, 49]:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle. \quad (1.7)$$

São sensíveis os efeitos da temperatura em seções de choque de espalhamento em vários processos quânticos. Cálculos teóricos demonstraram tais efeitos aparecendo no gravitoelétricismo quântico [55], efeito Casimir [56], na lei de Stefan-Boltzmann [57, 58] bem como no espalhamento férmiton-gráviton [59]. Efeitos combinados da temperatura e da violação de Lorentz e CPT também foram calculados [60, 63], em especial no cálculo da seção de choque do espalhamento Bhabha à temperatura finita e no contexto de

<sup>6</sup>Embora a DCT já seja usada em sistemas fora do equilíbrio. Em verdade existe um segundo formalismo de tempo real criado independentemente por Schwinger e Keldysh e que também é adequado ao estudo de sistemas fora do equilíbrio [85, 86, 87].

VSL CPT-ímpar implementado via derivada covariante não mínima [77].

## 1.2 Objetivos

O principal objetivo da presente tese é investigar processos que ocorrem na eletrodinâmica quântica submetidos às condições extremas de temperatura e no contexto de violação de simetria de Lorentz. Em particular, estamos interessados em calcular a seção de choque para dois dos mais importantes processos de interação na EDQ, o espalhamento  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  [61] e Bhabha [62] (Figura 4.2).

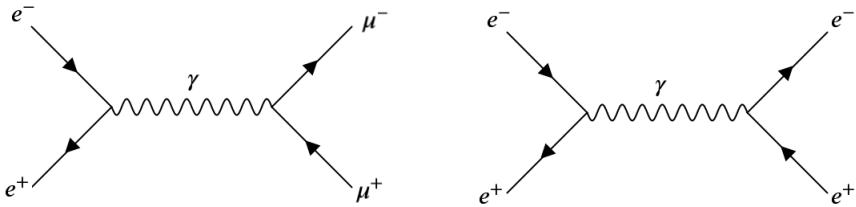


Figura 1.2: O espalhamento  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  e um dos três canais do processo Bhabha.

A escolha pelo processo  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  é motivado pelo fato de ser o melhor teste para a eletrodinâmica quântica, uma vez que fornece o valor mais preciso para a constante de estrutura fina:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}. \quad (1.8)$$

Em especial os valores de  $\alpha_{EDQ}$  obtidos via decaimento muônico  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  são frequentemente considerados possíveis indícios de uma física além do modelo padrão [53]. O espalhamento  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  também fornece o número correto de cor ( $n = 3$ ) para os hadrons [54]. De fato, a depender da energia envolvida o processo elétron-pósitron pode gerar graus de liberdade adicionais, como mostrado na Figura (1.3). A razão entre as seções de choque fornece o fator correto para o número de cor:

$$\frac{\sigma(e\bar{e} \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu})} = 3 \sum_i^3 e_{qi}^2, \quad (1.9)$$

com  $e_{qi}$  a carga do respectivo quark.

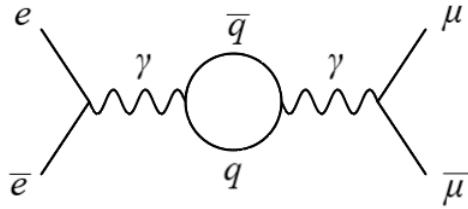


Figura 1.3: Canal do espalhamento  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  com a produção de um par de quarks virtuais.

Incluímos também o espalhamento Bhabha. Tal escolha se deve à sua relevância histórica nos processos leptônicos. Neste caso, leva-se em conta três canais cuja nomenclatura é dada pelas chamadas variáveis de Mandelstam: canais  $s$ ,  $t$  e  $u$  (Figura 1.4). Os cálculos para ambos os processos foram executados levando-se em conta os efeitos de um banho térmico a uma dada temperatura  $T$  implementada via formalismo da DCT. Como mecanismo de violação de Lorentz utilizamos uma derivada covariante não mínima construída com um campo de Lorentz de quarta ordem CPT-par ( $K_{\mu\nu\theta\rho}$ ) interagindo com a intensidade de campo eletromagnético  $F^{\mu\nu}$ :

$$\mathcal{D}_\mu := \partial_\mu - ieA_\mu(x) + \frac{\lambda}{2}\mathbf{K}_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\nu F^{\alpha\beta}(x), \quad (1.10)$$

sendo  $\lambda$  a constante que acoplamento entre os campos.

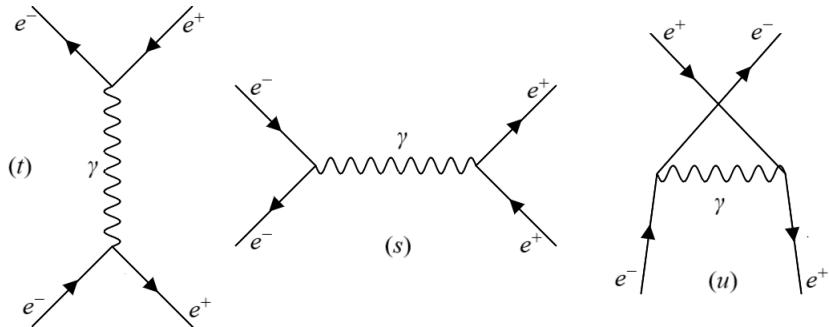


Figura 1.4: Os três canais do espalhamento Bhabha: (t) espalhamento, (s) aniquilação e (u) interferência.

## 1.3 Hipóteses

A pressuposição de processos a ocorrem na escala de Planck ou em eventos astrofísicos implica algumas hipóteses que serão úteis na orientação em direção de nossos objetivos. Tais hipóteses são:

- (i) a existência de pequenos efeitos advindos da violação de Lorentz na teoria à baixa energia;
- (ii) ação térmica intensa;
- (iii) ambos os efeitos emergindo em conjunto e afetando de alguma maneira as seções de choque.

Acreditamos que, embora pequenos, os efeitos da violação de Lorentz e (ou) CPT estejam presentes. Aditivamente, fenomenologicamente a temperatura deve comparecer de modo significativo. Neste novo cenário, embora não haja uma relação matemática direta entre violação da simetria de Lorentz e altas temperaturas é coerente postularmos que os dois efeitos coexistam e cujos resquícios devem, de alguma forma, estar presentes nas seções de choque da teoria à baixas energias.

## 1.4 Perspectivas

Embora os processos elétron-pósitron e Bhabha sejam o centro deste trabalho, temos em perspectiva estudar outros processos, como o Möller e a interação leptônica via troca de grávitons nessas mesmas circunstâncias de altíssimas temperaturas e violação de Lorentz.

## 1.5 Elementos léxicos, figuras, notação e organização do texto

**Elementos léxicos.** Tendo em vista que este trabalho se encontra no âmbito da teoria quântica de campos, suprimimos a necessidade de distinguir entre o termo clássico “lagrangiana” e o quântico, “lagrangiano”. Não obstante, para se evitar qualquer ambiguidade e embora seja padrão escrever “lagrangiana”, vamos abusar sutilmente da grafia e usar o termo “lagrangeana”, sendo este último não tão incomum quanto parece. Com isso visamos dar mais uniformidade junto ao nome do eminentíssimo cientista Joseph-Louis Lagrange.

Ressaltamos que as palavras “quadrilinear” e “termalizado(a)s” parece não existirem em nossa língua portuguesa<sup>7</sup>. Porquanto “um problema sem solução é, por definição, um problema solucionado”, mantivemos o uso dos referidos léxicos!

**Figuras.** Ao serem referenciadas no texto algumas figuras aparecerão marcadas com o sinal (\*) (Ex.: Figura 1.1\*) indicando que a mesma encontra-se exposta no fim da seção ou do capítulo. Estas diferem daquelas figuras que, na ausência do referido sinal, encontram-se no próprio corpo do texto pelo motivo de estarem relacionadas diretamente à uma demonstração ou conceito imprescindível que ali pretende-se expor. Para desenhar os gráficos de Feynman usamos dois excelentes sítios: Feynman diagram maker: <https://www.aidansean.com/feynman/> e Draw Feynman diagram online: <https://feynman.aivazis.com/>.

**Breve notação.** A notação empregada foi a menos rebuscada possível, até ao ponto de nenhuma informação ser perdida. No que se refere à assinatura da métrica plana usamos a convenção corrente na teoria quântica de campos,

$$\text{Diag}(\eta_{\mu\nu}) = (1, -1, -1, -1). \quad (1.11)$$

Enquanto índices gregos correm de 0 a 4, com  $\mu = 0$  sendo a componente temporal, os índices latinos variam de 1 a 3. Naturalmente, a convenção de Einstein foi utilizada, isto é, dados quaisquer quadrivetores  $A_\mu$  e  $B_\mu$  tem-se

$$\sum_{\mu=1}^3 A_\mu B^\mu \equiv A_\mu B^\mu = A_0 B^0 + A_i B^i. \quad (1.12)$$

Além disso, usaremos, sempre que necessário, uma escrita econômica tal que

$$C^2 \equiv C_{\mu\nu\dots} C^{\mu\nu\dots} \text{ e } (\partial B)^2 \equiv (\partial_\alpha B^{\mu\nu\dots})(\partial^\alpha B_{\mu\nu\dots}). \quad (1.13)$$

Sejam os 4-momentos  $p_i$  e  $q_j$ , os spin  $s$  e  $s'$ , o fator de Boltzman  $\beta$  e os operadores  $\hat{\mathcal{C}}$ ,  $\hat{\mathcal{D}}$  e  $\hat{\mathcal{E}}$  segue-se a seguinte notação simplificadora:

$$[\hat{\mathcal{C}}_{p_i} \circ \hat{\mathcal{D}} \circ \hat{\mathcal{E}}_{q_j}] (\beta, s) \equiv \hat{\mathcal{C}}_{p_i}(\beta, s_i) \circ \hat{\mathcal{D}}(\beta) \circ \hat{\mathcal{E}}_{q_j}(\beta, s_j), \quad \delta_{pq}^3 \equiv \delta^3(p - q) \text{ (Dirac)} \text{ e } \delta_{ss'} \text{ (Kronecker)}, \quad (1.14)$$

na qual o sinal “ $\circ$ ” representa qualquer uma das operações de soma, subtração ou produto. Como se nota, uma vez que  $\hat{\mathcal{D}}$  não depende de nenhuma variável de 4-momento, sua forma do lado direito da equivalência apresentará dependência apenas em  $\beta$ . Os espinores  $u$  e  $v$  também serão reescritos economicamente quando formarem produtos:

$$u(p_i, \sigma_i)v(q_j, \sigma_j) \equiv [u(p_i)u(q_j)](\sigma). \quad (1.15)$$

com  $i, j = 1, 2, 3, 4$  índices de partículas e que serão bem específicos sem que se confundam com as componentes espaciais dos índices do espaço-tempo. Algumas vezes esses espinores poderão ser grafados numa forma ainda mais simplificada:

$$u(p_i, \sigma_i)v(q_j, \sigma_j) \equiv [u(i)v(j)](\sigma). \quad (1.16)$$

Esses espinores não podem ser confundidos com os fatores térmicos  $u(\beta)$  e  $v(\beta)$ , funções apenas da temperatura e sempre escritos em letra tipo escritor. Os operadores de campo de Dirac e do fóton

---

<sup>7</sup>Embora neste último caso haja a palavra “termalizar”. Buscamos por léxicos em alguns sítios, dos quais citamos os dicionários eletrônicos na rede: <https://dicionario.priberam.org/quadrilinear> e <https://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=quadrilinear>.

serão grafados genericamente da seguinte forma:

$$A^\mu(x) = \int d^3\kappa \sum_r \epsilon_r^\mu \left[ a_r(\kappa) e^{-i\kappa x} + a_r^\dagger(\kappa) e^{+i\kappa x} \right] (\sigma) \quad \text{e} \quad \Psi(x) = \int dq \left[ c_q u(q) e^{-iqx} + d_q^\dagger u(q) e^{iqx} \right] (\sigma) \quad (1.17)$$

para as quais a escolha simplificadora para os fatores foi tomada:  $N_q = \sqrt{m/VE_q} = 1$  e  $N_k = \sqrt{1/V\omega_k} = 1$ , com o segundo fator se referindo ao caso do fóton e  $V$  o volume de controle sobre a qual condições periódicas de contorno são impostas aos campos que ele envolve. Valemo-nos também das chamadas unidade naturais ( $u.n$ ) tais que  $\hbar = c = k_B = 1$ .

**Organização e distribuição do texto.** Esta tese encontra-se distribuída em sete capítulos, um apêndice e a referência bibliográfica; ou três partes:

**I. Referencial teórico.** Os capítulos de 2 a 5 coligem os pilares matemáticos e conceituais de nosso trabalho: teoria das seções de choque (capítulo 2); cálculo da seção de choque do espalhamento elétron-pósitron e Bhabha da EDQ usual (capítulo 3); apresentação do mecanismo de violação da simetria de Lorentz e o modelo padrão estendido (capítulo 4); seguida da construção da teoria quântica de campos no formalismo da dinâmica de campos térmicos (capítulo 5).

**II. Resultados, conclusões e perspectivas.** Os dois últimos capítulos são devotados aos nossos resultados: determinação da seção de choque do processo  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  (capítulo 6) e Bhabha (capítulo 7) à temperatura finita no contexto de violação da simetria de Lorentz, e o capítulo 8 dedicado às nossas conclusões e perspectivas.

**III. Apêndices e referências bibliográficas.** No apêndice, encontram-se todos os cálculos acessórios necessários ao acompanhamento dos capítulos. Nos quatro primeiros apêndices,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  encontram-se cálculos *pró-forma*. Há de se observar que, tanto no capítulo 3 quanto nos capítulos 6 e 7 já se parte das matrizes de espalhamento como dadas. Quanto às amplitudes  $\mathcal{M}_\lambda(\beta)$  que aparecem nos capítulos de resultados, as mesmas são detalhadamente deduzidas nos apêndices  $E$  e  $F$ , respectivamente, não como uma mera subdivisão para diminuir o tamanho dos referidos capítulos. Outrossim destinam-se, além de explicitar todos os passos matemáticos envolvidos na determinação das matrizes de espalhamento, mas sobretudo na nossa particular demonstração da forma específica do que nomeamos de matriz  $4 \times 4$  de operação dual ( $\eta$ ), fundamental para que o fator térmico correto surja.

Por fim, além das informações especializadas coligidas na bibliografia, seguem-se, por vezes no próprio corpo do texto e organizadas no apêndice intitulado “webliografia”, hiperlinks caso se deseja acessar rapidamente informações acessórias.

Capítulo **2**

## Cinemática de espalhamento e seção de choque



---

*“Para combater um calculista, primeiro é preciso aprender a calcular.”*

**Allan Kardec**

 apagar das luzes do século XIX testemunhou revelações sem precedentes no âmbito da estrutura da matéria, a começar pela descoberta do elétron por J.J. Thomson em 1897 [70], seguido, no alvorecer do século XX com as de Ernest Rutherford em 1911, que, além de revelar a existência das chamadas partículas  $\alpha$  e  $\beta$  demonstrou o incrível fato da estrutura nuclear atômica [65, 66] pondo fim no paradigma dos entes maciços de John Dalton. Subsequentemente, em 1923, Arthur Compton demonstra experimentalmente o efeito fotoelétrico [67] previsto por Einstein em 1905, efeito este igualmente importante uma vez que postulava não menos que uma certa natureza corpuscular de ondas eletromagnéticas [68]. Entre o final da década de 20 e o começo da década de 1970 os famosos experimentos de difração de elétrons executados por C. J. Davisson & Germer [69]; G. P. Thomson [70] e C. Jonsson [71, 72] são publicados. Hoje, um quadro detalhado da estrutura fundamental da matéria encontra-se pintado, indo do Raio-X[73], passando pelo próton [74] e o nêutron [75] ao bóson de Higgs [76, 99, 100]. Estava assim inaugurada a era das radiações e da física de partículas.

Nessa jornada aos diminutos confins da estrutura da matéria e da radiação e suas mútuas interações emerge uma quantidade fundamental no estudo de eventos de choque e espalhamento, a seção de choque  $\sigma$ . Neste capítulo a definiremos e a construiremos no âmbito da eletrodinâmica quântica, enfatizando processos gerais que envolvem um par de partículas incidentes e um par de partículas emergentes.

## 2.1 A área efetiva de choque

A chamada *seção de choque*  $\sigma$  é a grandeza fundamental a partir da qual outras quantidades são determinadas em processos envolvendo a interação da radiação com a matéria e da matéria com a própria matéria, sendo, pois, útil em estimativas de taxas de decaimento, coeficientes de penetração, correções de cargas e massas, determinação de raios atômicos e nucleares, dentre outras.

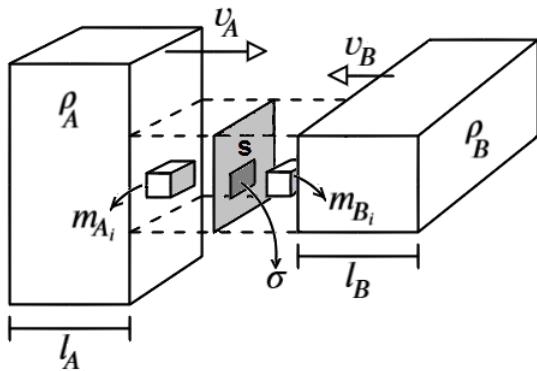


Figura 2.1: Dois grupos de partículas (A e B) em rota de choque a uma velocidade relativa de  $v_{rel} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ .

Tecnicamente ela fornece a probabilidade de uma dada interação ocorrer e, sendo escrita como o quadrado do comprimento,  $\sigma \sim [L]^2$ , corresponde à área efetiva de choque por átomo, sendo preferencialmente medida em *barns*:  $1 \cdot barn = 10^{-24} cm^2$ . Outras unidades frequentes são as de seção de choque por volume ( $1/cm$ ) e por massa ( $cm^2/g$ ), chamadas de coeficientes de atenuação ou penetração.

Consideremos duas porções de matéria A e B (distintas ou não) movendo-se em direções opostas com velocidade relativa  $v_{rel} = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$  chocando-se posteriormente dentro de uma região (área) delimitada  $S$  (Figura 3.14). A figura mostra um dos i-ésimos eventos de colisão envolvendo as partículas de massa  $m_{A_i}$  e  $m_{B_i}$  e a seção de choque  $\sigma_i$  correspondente. Enquanto  $S$  delimita a região onde os choques ocorrem,  $\sigma$  representa a área efetiva de eventos de choque por átomo. O número de eventos de interação por átomo,  $\bar{N}_{ev}$ , é diretamente proporcional aos comprimentos  $l_A$  e  $l_B$  ao longo da direção de movimento, bem como do número de partículas por unidade de volume (densidades numéricas)  $\rho_A$  e  $\rho_B$ :  $\bar{N}_{ev} \propto \rho_A l_A \rho_B l_B$  a partir da

qual a seção de choque emerge como a constante de proporcionalidade:  $\sigma = \bar{N}_{ev}/\rho_A l_A \rho_B l_B$ . Tomando-se o grupo de partículas B como alvo ( $\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$ ) o resultado acima pode ser deduzido compreendendo-se que  $\sigma$  é diretamente proporcional ao fluxo de eventos  $\Phi_{ev} = \bar{N}_{ev}/\Delta t S$  por fluxo de partículas incidentes  $\Phi_{in} = \rho_A v_A$ , por número de alvos  $N_B = \rho_B l_B S$ , isto é,

$$\sigma = \frac{1}{N_B} \frac{\Phi_{ev}}{\Phi_{in}} = \frac{\bar{N}_{ev} S / \Delta t}{(\rho_B l_B) \rho_A (l_A / \Delta t)} = \frac{\bar{N}_{ev}}{\rho_A l_A \rho_B l_B}. \quad (2.1)$$

Levando-se em conta a interação da radiação com a matéria, feixes de fótons, por exemplo, ao colidirem com átomos-alvo podem sofrer espalhamentos, absorções fotoelétricas, efeito Compton e, caso a energia envolvida seja suficientemente alta, produzir pares elétron-pósitron [34]. O número  $\Delta N = N - N_o$  de fótons absorvidos e (ou) desviados ao colidirem com átomos-alvo de uma dada amostra é proporcional ao número total de fótons  $N$  que atravessam a placa de espessura  $\Delta x$  e à probabilidade que os mesmos tem de interagir com os átomos da amostra, isto é,  $\Delta N = -N \mu \Delta x$ . Tomando-se o limite apropriado e integrando-se na sequência, obtemos  $N = N_o \exp(-\mu d)$ , que é a lei de atenuação para feixes de fótons, com  $\mu = \sigma/V$  o coeficiente de atenuação do material. Somando-se os efeitos de espalhamento coerente  $\sigma_{coer}$  (quando o feixe espalhado tem a mesma energia do feixe incidente), fotoelétrico  $\sigma_{fot}$ , Compton  $\sigma_{comp}$  e produção de pares  $\sigma_{par}$  é costume definir o coeficiente de atenuação total:  $\mu = \sum_i \frac{\sigma_i}{V}$  (com  $i$  a espécie do efeito) sendo o coeficiente massivo obtido dividindo-se  $\mu$  pela densidade do material:  $\bar{\mu} = \mu/\rho$ . O gráfico da Figura 2.5\* resume os principais efeitos que decorrem da interação da radiação eletromagnética com os átomos dos elementos mais abundantes no corpo humano.

## 2.2 Cinemática de espalhamento

Nota-se a relevância da seção de choque no que tange as estimativas de quantidades atômicas e subatômicas quando as energias envolvidas são relativamente baixas. Entretanto, em casos mais extremos, como nas colisões de partículas elementares em aceleradores, no fenômeno de raios cósmicos e nos processos que ocorrem no interior de estrelas, por exemplo, muitas informações de saída podem ocorrer, a depender da natureza dos entes envolvidos bem como do tipo de espalhamento em questão, isto é, caso se tratem de partículas fermiônicas de mesma carga, de cargas opostas, mesma massa, massas distintas; se o espalhamento é elástico, inelástico ou profundamente inelástico, etc. Não obstante um certo limite a partir da qual a geometria passa a atuar num dado processo, a seção de choque se dará fundamentalmente como uma resposta às variáveis dinâmicas envolvidas, como momentos, spins, massas, energias e helicidades, por exemplo. Para ilustrar, na Figura 2.6\* são mostradas as curvas teórica e experimental da seção de choque do espalhamento Bhabha em função da energia do centro de massa  $E_{CM}$ .

Interessa-nos aqueles processos para os quais as partículas apresentam estados  $|\Psi(x, s)\rangle$ , 4-momento  $p_\mu$ , spin  $s$  e energia  $E$ . Consequentemente a construção da seção de choque deve levar em conta esses novos ingredientes, sendo necessário definir-se, portanto, a natureza dos campos bem como os elementos cinemáticos e dinâmicos dos entes participantes. Tomemos inicialmente choques envolvendo um par de partículas incidentes, cada uma com energia  $E_i$ , e um par de partículas emergentes, cada uma com energia  $E_f$ :  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  [35, 36, 88]. Para simplificar as passagens, além do limite ultra relativístico,  $m_i^2 \approx m_f^2 = 0$ , adotaremos também o referencial no centro de massa CM (Figura 2.2) tal que

$$p_1 = (E_i, \mathbf{p}); \quad p_3 = (E_f, \mathbf{p}); \quad p_2 = (E_i, -\mathbf{p}); \quad p_4 = (E_f, -\mathbf{p}), \quad \sqrt{s} = E_{CM} = 2E, \quad (2.2)$$

com  $p_1$  e  $p_2$  os 4-momentos das partículas incidentes e  $p_3$  e  $p_4$  os 4-momentos das partículas emergentes. O momento transportado pelo fóton virtual será  $\kappa = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ , ou  $\kappa^\beta = (\sqrt{s}, 0)$ . Da conservação da

energia:  $E'^2 = E^2$  (com  $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$ ) obtemos  $|\mathbf{p}'|^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2 - m'^2$ , e que, no regime ultra-relativístico, fica  $|\mathbf{p}'| \approx |\mathbf{p}|$  (com  $\mathbf{p}'$  o momento inicial e  $\mathbf{p}$  o momento final).

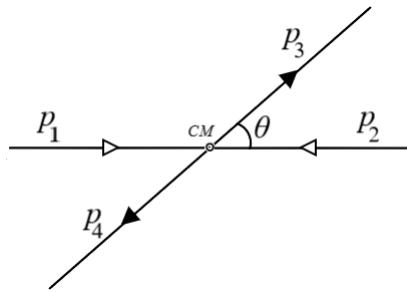


Figura 2.2: Choque de um par de partículas de momentos  $p_\mu^1$  e  $p_\mu^2$  gerando as partículas emergentes de momento  $p_\mu^3$  e  $p_\mu^4$  através de um ângulo  $\theta$ .

As chamadas variáveis de Mandelstam são aqui ingredientes fundamentais. Estando relacionadas aos canais nos processos de espalhamento as três variáveis são dadas por [89]:

$$(p_1 \cdot p_2) = \frac{s}{2} - m^2, \quad (p_1 \cdot p_3) = m^2 - \frac{t}{2}, \quad (p_1 \cdot p_4) = m^2 - \frac{u}{2}, \quad t = \left(2m^2 - \frac{s}{2}\right)\left(1 - \cos(\theta)\right), \quad (2.3)$$

$$u = \left(2m^2 - \frac{s}{2}\right)\left(1 + \cos(\theta)\right), \quad s + t + u = \sum_i m_i^2,$$

ou ainda

$$(p_1 \cdot p_2) = \frac{s}{2}, \quad (p_1 \cdot p_3) = -\frac{t}{2}, \quad (p_1 \cdot p_4) = -\frac{u}{2}, \quad t = -\frac{s}{2}\left(1 - \cos(\theta)\right), \quad s + t + u = 0, \quad (2.4)$$

caso o limite ultrarrelativístico seja tomado.

## 2.3 A seção de choque na eletrodinâmica quântica

Em mecânica quântica não relativística o principal objeto é a função  $\Psi(x, t)$ . Desta se extrai a densidade de probabilidade  $|\Psi(x, t)|^2$  a partir da qual todos os observáveis de interesse são obtidos. No âmbito da física de partículas, a quantidade mais importante é a amplitude de transição ou matriz de espalhamento:

$$\mathcal{M} = \langle f | S^{(n)} | i \rangle, \quad (2.5)$$

com  $\langle f |$  e  $\langle i |$  os estados assintóticos de partículas iniciais e finais. É com esse ingrediente que se obtém a probabilidade de espalhamento  $|\mathcal{M}|^2$ , com

$$S^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=0}^n \int dx_i \left[ : \widehat{\mathcal{H}}_I(x_i) : \right] \quad (2.6)$$

o operador matricial, sendo  $\widehat{\mathcal{H}}_I$  o hamiltoniano de interação avaliado sob ordenamento de Wick “ $: \dots :$ ” e subentendido sob ordenamento temporal  $\mathbb{T}$ .

Analisemos a interação do tipo  $i = 1, 2, \dots, N_i \rightarrow f \geq i, \dots, N_f$ , isto é, estados iniciais de  $N_i$  entes gerando estados finais de  $N_f$  entes. A Figura 2.3 mostra duas partículas (momento  $p_1^\mu$  e momento  $p_2^\mu$ ) chocando-se através da seção de choque  $d\sigma$  dentro de um volume de controle  $V$  gerando, no processo, duas outras partículas (momento  $p_3^\mu$  e momento  $p_4^\mu$ ) pertencentes ao grupo de partículas emergentes  $N_f$ , as quais são espalhadas, atravessando a superfície que compõe o elemento de ângulo sólido  $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$ .

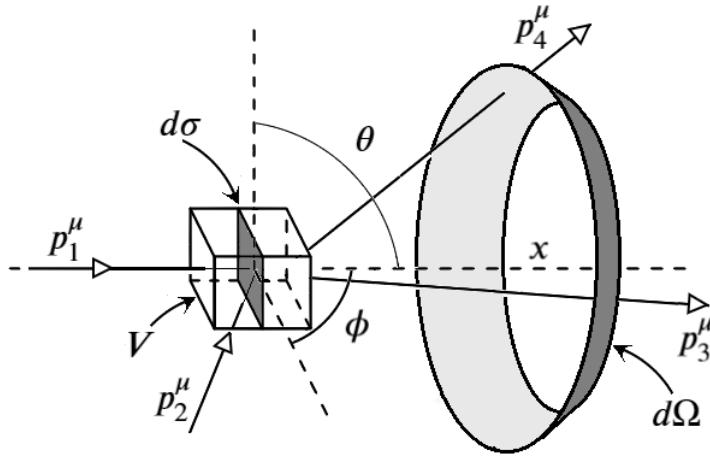


Figura 2.3: Duas das  $i$ -ésimas partículas do grupo inicial  $N_i$  chocam-se, gerando duas das  $f$ -ésimas partículas do grupo emergente  $N_f$ .

Seja então a seção de choque diferencial  $d\sigma$  definida como

$$d\sigma = \frac{\mathcal{W}_{fi}}{\Phi_i} d^3\eta_f, \quad (2.7)$$

em que  $d^3\eta_f$ ,  $\mathcal{W}_{fi}$  e  $\Phi_i$  são, respectivamente, o número de partículas no volume  $V = L^3$ , a densidade de probabilidade da interação ocorrer e o fluxo de partículas incidentes. Para uma normalização de caixa cúbica num espaço de fase homogêneo e isotrópico (Figura 2.4) o número de estados quânticos no volume para cada partícula será

$$d^3n = dn_x dn_y dn_z = \left( \frac{L_x}{2\pi} dp_x \right) \left( \frac{L_y}{2\pi} dp_y \right) \left( \frac{L_z}{2\pi} dp_z \right) = V \frac{d^3p}{(2\pi)^3},$$

na qual  $p_x = p_y = p_z = p$  e  $L_x = L_y = L_z = L$ . Observa-se que para cada uma das partículas finais existe um número quântico  $dn$  para cada eixo de comprimento  $L$  do espaço de fase:  $p_f \rightarrow dn_x, dn_y, dn_z$ . Se  $2E$  fornece o número de partículas nesse espaço, os estados quânticos permitidos por partícula, para cada partícula emergente, no volume  $V$ , serão dados por

$$d^3\eta_f = \prod_{f \geq i}^{N_f} \frac{d^3n_f}{2E_f} = \prod_{f \geq i}^{N_f} \left( \frac{dn_x dn_y dn_z}{2E} \right)_f = \prod_{f \geq i}^N V_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 f 2E_f}. \quad (2.8)$$

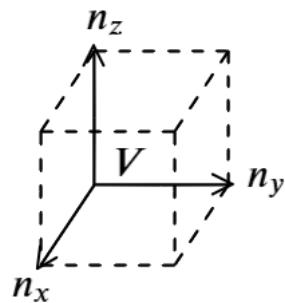


Figura 2.4: Volume do espaço de fase e seus três eixos  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ .

Uma vez que as partículas em cada feixe tem, em média, a mesma velocidade, o fluxo  $\Phi_i$  depende da velocidade relativa entre as partículas incidentes,  $v_{rel} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$  bem como de fatores de densidade

numérica  $2E/V$ , isto é,

$$\Phi_i = v_{rel} \prod_{i=1}^{N_i} \left( \frac{2E}{V} \right)_i = \frac{v_{rel}}{V^{N_i}} \prod_{i=1}^{N_i} (2E)_i, \quad (2.9)$$

com a notação tal que  $(2E)_i = 2E_1, 2E_2, \dots$ . A densidade de probabilidade do choque ocorrer,  $W_{fi}$ , será proporcional à probabilidade de espalhamento  $|\mathcal{M}|^2$  dividida por  $N = N_i + N_f$  fatores em  $V$ .  $W_{if}$  também é proporcional a um fator em delta de Dirac,

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma_f p_f^\mu - \Sigma_i p_i^\mu). \quad (2.10)$$

Esse fator expressa apenas a conservação do momento-energia:  $\sum_{f \geq i} p_f^\mu = \sum_i p_i^\mu$ , com  $\Sigma_f p_f^\mu$  e  $\Sigma_i p_i^\mu$  os 4-momentos totais final e inicial, respectivamente. Isso significa que  $\mathcal{W}_{if}$  pode ser dada desconsiderando-se tal fator, isto é,

$$\mathcal{W}_{fi} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{V^{N_i+N_f}}. \quad (2.11)$$

Esses ingredientes, ao serem levados na seção de choque diferencial, fornecem:

$$d\sigma = \frac{1}{\frac{V^{N_i+N_f} v_{rel}}{V^{N_i}} \prod_{i=1}^{N_i} (2E)_i} \frac{V^{N_f}}{(2\pi)^{3N_f}} \prod_{f \geq i}^{N_f} \frac{d^3 p_f}{(2E)_f} |\mathcal{M}|^2 = \frac{d\text{Lips}}{v_{rel} \prod_{i=1}^{N_i} (2E)_i} |\mathcal{M}|^2,$$

com

$$d\text{Lips} = \frac{1}{(2\pi)^{3N_f}} \prod_{f \geq i}^{N_f} \frac{d^3 p_f}{(2E)_f}, \quad (2.12)$$

o elemento diferencial do espaço de fase invariante de Lorentz. Em processos que envolvem partículas com spins é necessário tomar uma média sobre os spins das partículas incidentes, conjuntamente com uma soma sobre as variáveis de spins de todas as partículas envolvidas, isto é,

$$|\mathcal{M}|^2 \longrightarrow \left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{1}{\prod_{i=1}^{N_i} (2s+1)_i} \prod_{j=1}^{N_i+N_f} \sum_{s_j} |\mathcal{M}|^2, \quad (2.13)$$

levando-nos a

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{-3N_f}}{v_{rel} \prod_{i=1}^{N_i} (2E)_i (2s+1)_i} \prod_{f \geq i}^{N_f} \frac{d^3 p_f}{(2E)_f} \prod_{j=1}^{N_i+N_f} \sum_{s_j} |\mathcal{M}|^2. \quad (2.14)$$

Se todas as  $N = N_i + N_f$  partículas tiverem a mesma energia,  $E = E_i = E_f$ , adotando-se ainda o referencial do centro de massa,  $s = 4E^2 = E_{CM}^2$  e usando-se coordenadas esféricas o elemento dLips poderá ser simplificado para

$$d\text{Lips} = \frac{1}{(2\pi)^{N_f}} \frac{|\Sigma_f \mathbf{p}_f|}{\sqrt{s}} d\Omega \quad (2.15)$$

sendo  $v_{rel} \prod_{i=1}^{N_i} (2E)_i = 2^{N_i} \sqrt{s} |\Sigma_i \mathbf{p}_i|$ . Considerando-se que todas as partículas envolvidas possuem o mesmo spin, teremos,  $\prod_{i=1}^{N_i} (2s+1)_i = (2s+1)^{N_i}$ . Com efeito, a seção de choque diferencial tomará a seguinte forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2^N \pi^{N_f} s} \frac{|\Sigma_f \mathbf{p}_f|}{|\Sigma_i \mathbf{p}_i|} \left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle, \quad (2.16)$$

com

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{\prod_{j=1}^N \sum_{j=1}^{N_i} |\mathcal{M}|^2}{(2s+1)^{N_i}}. \quad (2.17)$$

Neste trabalho os processos envolvem apenas partículas de spin 1/2. Ao contabiliza-los introduz-se

um fator  $1/(2s_i + 1)$  para cada uma das  $i$  partículas incidentes. Neste caso, como  $s_i = 1/2$  o fator vale simplesmente  $1/2$  para cada partícula no feixe do grupo de partículas  $N_i$ . Retornando-se ao processo em que  $N_i = N_f = 2$ , reescrevendo-se (2.17) e retornando-a em (2.16) a seção de choque diferencial pode então ser reescrita:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{p}'|}{64\pi^2 s|\mathbf{p}|} \left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle, \quad (2.18)$$

com  $\mathcal{M}$  a amplitude de transição e  $\mathbf{p}'$  e  $\mathbf{p}$  o momento total das partículas incidentes e emergentes, respectivamente. Nessa equação tem-se ainda que

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2, \quad (2.19)$$

com a soma executada sobre as variáveis de spins de todas as partículas envolvidas:  $\sum_{\text{Spins}} \equiv \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{s_3} \sum_{s_4}$ .

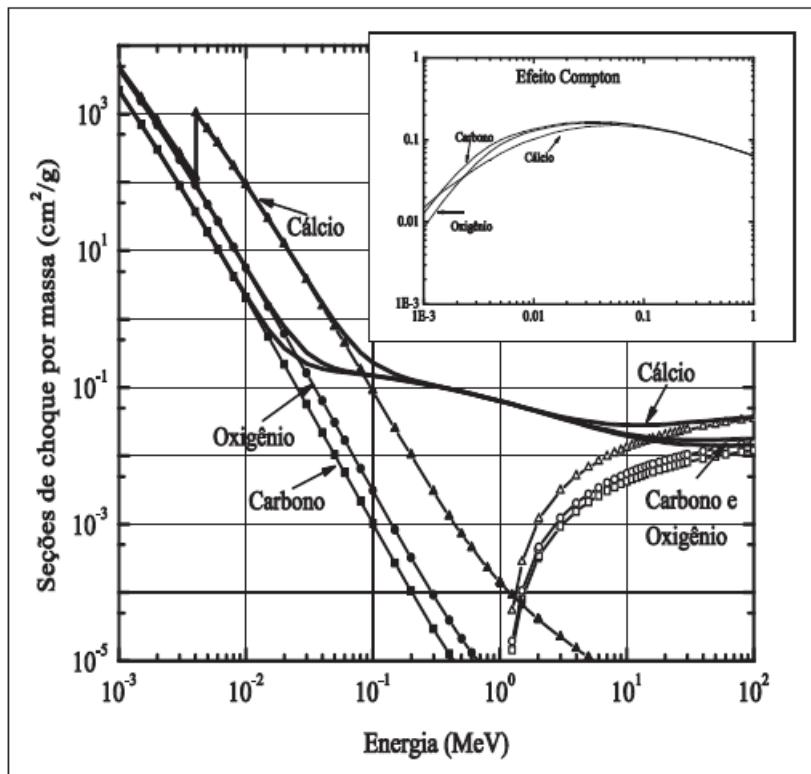


Figura 2.5: Seção de choque total  $\mu$  (linhas cheias), fotoelétrico (linhas com símbolos cheios) e produção de pares (linhas com símbolos vazios) e efeito Compton (curvas em destaque acima do gráfico)(Extraído de [33]).

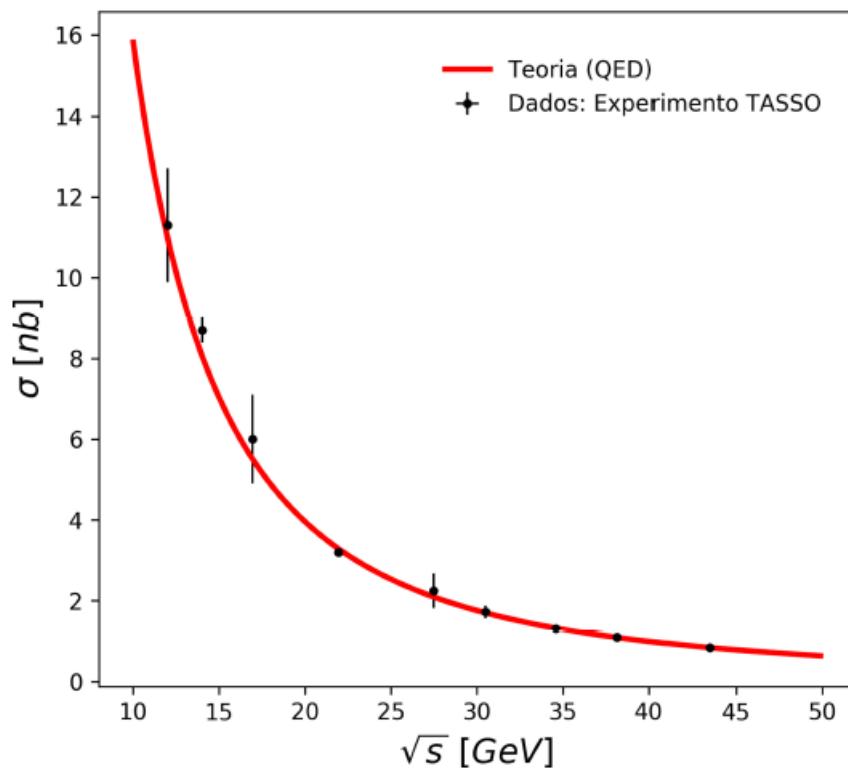
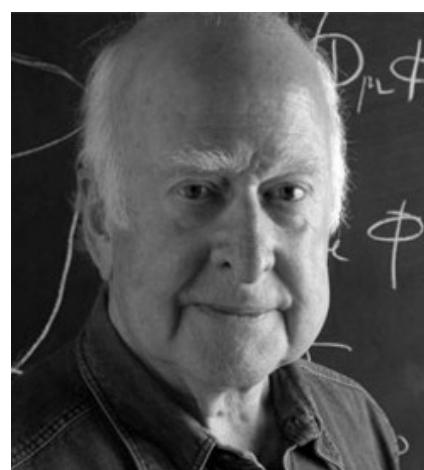


Figura 2.6: Comparação entre os valores teórico e experimental para o  $\sigma$  do espalhamento Bhabha em função da energia  $E_{CM} = \sqrt{s}$  em GeV (Como mostrado em [35]).

Capítulo **3**

## Espalhamentos elétron-pósitron e Bhabha à temperatura zero



*“É muito agradável ter razão de vez em quando. (...) foi uma longa espera.”*

**Peter Higgs**

Sobre a descoberta, em julho de 2012 pela equipe do CERN, da partícula que leva seu nome e que havia sido prevista, independentemente, por ele e F. Englert na década de 60.

**E**sta seção é dedicada à determinação das conhecidas seções de choque dos espalhamentos elétron-pósitron [61] e Bhabha [62]. Todos os cálculos foram executados à nível de árvore, uma vez que correções além dessa ordem são desprezíveis na constante de acoplamento de quebra de simetria quando as seções de choque são calculadas no contexto de violação de Lorentz - como veremos nos capítulos 5 e 6, motivo pela qual não faz sentido considerá-las aqui. A determinação da amplitude de espalhamento foi dada, em ambos os casos, mediante primeiros princípios e não pelo uso das regras de Feynman. O motivo é que o fator térmico que aparece quando se refaz esses mesmos cálculos no formalismo da dinâmica de campos térmicos está intrinsecamente ligado à obtenção da amplitude de espalhamento<sup>1</sup>.

Inicialmente são expostas as equações básicas da eletrodinâmica quântica e em seguida calcula-se a seção de choque da interação elétron-pósitron, finalizando com a determinação da seção de choque do espalhamento Bhabha.

## 3.1 As equações da eletrodinâmica quântica

Tanto a interação elétron-pósitron quanto Bhabha são descritas pela lagrangeana do setor eletrodinâmico:

$$\mathcal{L}_{EDQ} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\Psi - \frac{1}{2\zeta}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (3.1)$$

com  $\zeta$  o calibre de Feynman,  $\Psi$  o operador de campo de férmons,  $A_\mu$  o operador de campo do fóton,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  a intensidade de campo eletromagnético e  $D_\mu$  a derivada covariante,

$$D_\mu := \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (3.2)$$

com a carga elementar  $e$  representando a constante de acoplamento mínimo entre fótons e férmons. O termo  $(\partial A)^2$  é introduzido para garantir a renormalizabilidade do modelo. De (3.1) extrai-se o termo de interação e o respectivo vértice:

$$\mathcal{L}_I = -i\bar{\Psi}\Gamma_{(0)}^\mu\Psi A_\mu \text{ (a)} \quad \text{com} \quad \Gamma_{(0)}^\mu = -ie\gamma^\mu \text{ (b)}, \quad (3.3)$$

sendo

$$\Psi(x) = \int d\mathbf{q} \left[ c_{\mathbf{q}} u(\mathbf{q}, \sigma) e^{i\mathbf{x}\mathbf{q}} + d_{\mathbf{q}}^\dagger v(\mathbf{q}, \sigma) e^{-i\mathbf{x}\mathbf{q}} \right] \quad (3.4)$$

a estrutura do operador de onda. Vimos anteriormente que a amplitude de transição (ou de espalhamento)  $\mathcal{M}$  é escrita como uma média:  $\mathcal{M} = \langle f | S^{(2)} | i \rangle$ , com

$$|i\rangle = c_{p_i}^\dagger(s_i) d_{p_j}^\dagger(s_j) |0\rangle \quad \text{e} \quad |f\rangle = c_{p_k}^\dagger(s_k) d_{p_l}^\dagger(s_l) |0\rangle \quad (3.5)$$

os estados assintóticos iniciais e finais,  $s_i$  e  $\sigma_i$  as variáveis de spin, e com  $c_q^\dagger$  ( $d_q^\dagger$ ) e  $c_q$  ( $d_q$ ) os operadores de criação e aniquilação (respectivamente). Estes últimos obedecem as relações de anti-comutação:

$$\{c_{p_i}(s_i); c_{q_j}^\dagger(\sigma_j)\} = \delta_{s_i\sigma_j} \delta^{(3)}(p_i - q_j) \quad \text{e} \quad \{d_{p_i}(s_i); d_{q_j}^\dagger(\sigma_j)\} = \delta_{s_i\sigma_j} \delta^{(3)}(p_i - q_j), \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>Implicando na existência de uma certa matriz cujos elementos atuam sobre os operadores de criação e aniquilação, como expomos no apêndices E e F.

sendo todas as outras iguais a zero. O posicionamento relativo  $\mathcal{O}^\dagger \mathcal{O}$  entre operadores de criação e aniquilação internamente ao braket acarreta que

$$\langle 0 | \mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} | 0 \rangle = 0, \quad \text{pois} \quad \mathcal{O}|0\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle 0 | \mathcal{O}^\dagger = 0. \quad (3.7)$$

O propagador do fóton à temperatura zero é descrito pelo valor esperado no vácuo frio do bilinear sobre o campo de calibre:

$$\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = i \int \frac{d^4 \kappa_{(l)}}{(2\pi)^4} e^{-i \kappa_{(l)}(x-y)} \frac{\eta_{\mu\nu}}{\kappa_{(l)}^2}, \quad (3.8)$$

sendo  $l$  o índice contador de canais: um canal para o espalhamento elétron-pósitron e dois para o espalhamento Bhabha:  $l = 1$  para o canal  $t$  e  $l = 2$  para o canal  $s$ ; além disso, no referencial do centro de massa, tem-se  $|\kappa_0|_{(1)} = |p_3 - p_1|$ ,  $|\kappa_0|_{(2)} = |p_2 + p_4|$  com  $|\kappa_0| = E_{CM} = 2E$ . Quanto ao operador  $S^{(2)}$  ele é o termo de segunda ordem da matriz- $S$ :

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{x_1} \int_{x_2} dx_1 dx_2 [ : \widehat{\mathcal{H}}_1(x_1) \widehat{\mathcal{H}}_2(x_2) : ] = \frac{(-i)^2}{2} \iint dx dy [ : \mathcal{L}_1(x) \mathcal{L}_2(y) : ], \quad (3.9)$$

com  $\widehat{\mathcal{H}}_I$  a hamiltoniana de interação. Nessa equação “: :” representa o operador ordenamento de Wick<sup>2</sup>. Essas considerações levam-nos imediatamente à amplitude de transição:

$$\mathcal{M} = \langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{(-i)^2}{2} \iint dx dy \langle f | : \mathcal{F}_{(0,0)}^{\mu\nu} A_\mu(x) A_\nu(y) : | i \rangle, \quad (3.10)$$

em que

$$\mathcal{F}_{(0,0)}^{\mu\nu} = \bar{\Psi}(x) \Gamma_{(0)}^\mu \Psi(x) \bar{\Psi}(y) \Gamma_{(0)}^\nu \Psi(y) \quad (3.11)$$

representa o quadrilinear da interação em questão. A relação

$$[\bar{v}(2) \Gamma^\mu u(1)] [\bar{u}(1) \Gamma_\mu v(2)] = [\Gamma^\mu \bar{u}(1) u(1)] [\Gamma_\mu \bar{v}(2) v(2)], \quad (3.12)$$

em conjunto com as regras de completeza

$$\sum_{\text{Spin}} \bar{u}(i) u(i) = (p'_i + m) \quad \text{e} \quad \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(i) v(i) = (p'_i - m), \quad (3.13)$$

também serão uteis. Por intermédio dessas equações, a seção de choque pode ser calculada:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{p}'|}{64\pi^2 s |\mathbf{p}|} \left\langle \left| \mathcal{M} \right|^2 \right\rangle, \quad (3.14)$$

resultado este demonstrado no capítulo 2, com  $|\mathbf{p}'|$  e  $|\mathbf{p}|$  os momentos final e inicial, respectivamente. Por fim, temos,

$$\left\langle \left| \mathcal{M} \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} \left| \mathcal{M} \right|^2. \quad (3.15)$$

O fator  $(2s+1)^{-2} = \frac{1}{4}$  surge devido aos spins  $s = \frac{1}{2}$  dos férnions incidentes e  $\Sigma_{\text{Spins}}$  são as somas sobre os spins de todas as partículas envolvidas (Figura 3.1).

<sup>2</sup>Fica subentendida a operação de ordenamento no tempo, comumente grafada como  $\mathbb{T}$ .

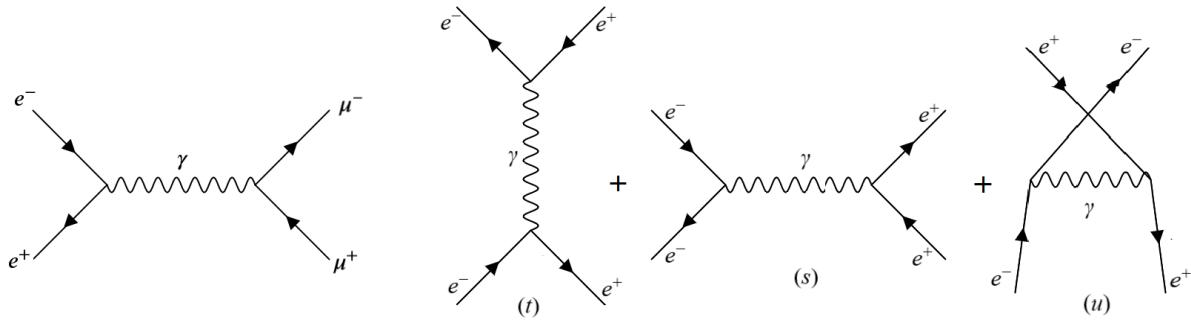


Figura 3.1: Diagramas do espalhamento elétron-pósitron e Bhabha e seus vértices  $\Gamma_{(0)}^\mu = -ie\gamma^\mu \equiv \bullet <$ .

## 3.2 A seção de choque fria do espalhamento elétron-pósitron

Iniciaremos com o espalhamento elétron-pósitron. Os índices de partículas 1 e 2 se referem aos elétrons interagindo no vértice  $x^\mu$ , enquanto que os índices 3 e 4 referem-se aos muôns emergindo no vértice  $y^\mu$ . Muito embora neste capítulo os efeitos de violação da simetria de Lorentz não sejam levados em conta, por padronização de grafia manteremos o nome geral dos vértices como sendo  $\Gamma_{(a)}^\mu = (-ie^2\gamma^\mu, \Gamma_{(1)}^\mu)$ , com  $a = 0$  representando o vértice da EDQ e  $a = 1$  o vértice advindo da violação de Lorentz.

### Cálculo do quadrilinear

Com (3.4) escreve-se o quadrilinear da interação:

$$\mathcal{P}_{(0,0)}^{\mu\nu} = \bar{\Psi}_2(x)\Gamma_{(0)}^\mu\Psi_1(x)\bar{\Psi}_3(y)\Gamma_{(0)}^\nu\Psi_4(y). \quad (3.16)$$

Vamos iniciar a partir de  $\bar{\Psi}_2(x)\Gamma_{(0)}^\mu\Psi_1(x)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_2\Gamma_{(0)}^\mu\Psi_1 &= \iint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \left\{ \left[ c_{\mathbf{q}_2} \bar{u}(2) e^{i\mathbf{q}_2 x} + d_{\mathbf{q}_2}^\dagger \bar{v}(2) e^{-i\mathbf{q}_2 x} \right] \Gamma_{(0)}^\mu \left[ c_{\mathbf{q}_1}^\dagger u(1) e^{-i\mathbf{q}_1 x} + d_{\mathbf{q}_1} v(1) e^{i\mathbf{q}_1 x} \right] \right\} (\mathbf{q}, \sigma) \\ &= \iint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \left\{ c_{\mathbf{q}_2} c_{\mathbf{q}_1}^\dagger \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) e^{ix(q_2 - q_1)} + c_{\mathbf{q}_2} d_{\mathbf{q}_1} \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) e^{+ix(q_2 + q_1)} + \right. \\ &\quad \left. + d_{\mathbf{q}_2}^\dagger c_{\mathbf{q}_1}^\dagger \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) e^{-ix(q_2 + q_1)} + d_{\mathbf{q}_2}^\dagger d_{\mathbf{q}_1} \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) e^{-ix(q_2 - q_1)} \right\} (\mathbf{q}, \sigma). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Com um cálculo semelhante,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_3\Gamma_{(0)}^\mu\Psi_4 &= \iint d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \left[ c_{\mathbf{q}_3} \bar{u}(3) e^{i\mathbf{q}_3 y} + d_{\mathbf{q}_3}^\dagger \bar{v}(3) e^{-i\mathbf{q}_3 y} \right] \Gamma_{(0)}^\mu \left[ c_{\mathbf{q}_4}^\dagger u(4) e^{-i\mathbf{q}_4 y} + d_{\mathbf{q}_4} v(4) e^{i\mathbf{q}_4 y} \right] \right\} (\mathbf{q}, \sigma) \\ &= \iint d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ c_{\mathbf{q}_3} c_{\mathbf{q}_4}^\dagger \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\mu u(4) e^{iy(q_3 - q_4)} + c_{\mathbf{q}_3} d_{\mathbf{q}_4} \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\mu v(4) e^{+iy(q_3 + q_4)} + \right. \\ &\quad \left. + d_{\mathbf{q}_3}^\dagger c_{\mathbf{q}_4}^\dagger \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\mu u(4) e^{-iy(q_3 + q_4)} + d_{\mathbf{q}_3}^\dagger d_{\mathbf{q}_4} \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\mu v(4) e^{-iy(q_3 - q_4)} \right\} (\mathbf{q}, \sigma). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Do produto desses dois resultados emergirá

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(0,0)}^{\mu\nu} &= \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\ &\quad c_{\mathbf{q}_2}^\dagger c_{\mathbf{q}_1} c_{\mathbf{q}_3}^\dagger c_{\mathbf{q}_4} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{+ix(q_2 - q_1)} e^{+iy(q_3 - q_4)} + \\ &\quad c_{\mathbf{q}_2}^\dagger c_{\mathbf{q}_1} c_{\mathbf{q}_3}^\dagger d_{\mathbf{q}_4} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{+ix(q_2 - q_1)} e^{+iy(q_3 + q_4)} + \\ &\quad c_{\mathbf{q}_2}^\dagger c_{\mathbf{q}_1} c_{\mathbf{q}_3} c_{\mathbf{q}_4} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{+ix(q_2 - q_1)} e^{-iy(q_3 + q_4)} + \\ &\quad \left. c_{\mathbf{q}_2}^\dagger c_{\mathbf{q}_1} d_{\mathbf{q}_3}^\dagger d_{\mathbf{q}_4} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{+ix(q_2 - q_1)} e^{+iy(q_3 - q_4)} \right\} (\mathbf{I}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
& + \iiint \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 \mathrm{d}q_4 \left\{ \right. \\
& c_{q_2}^\dagger d_{q_1} c_{q_3}^\dagger c_{q_4} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} + \\
& c_{q_2}^\dagger d_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{+iy(q_3+q_4)} + \\
& c_{q_2}^\dagger d_{q_1} d_{q_3} c_{q_4}^\dagger \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3+q_4)} \text{ (II)} + \\
& c_{q_2}^\dagger d_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3-q_4)} \left. \right\} + \\
& + \iiint \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 \mathrm{d}q_4 \left\{ \right. \\
& d_{q_2} c_{q_1} c_{q_3}^\dagger c_{q_4} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2+q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} + \\
& d_{q_2} c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2+q_1)} e^{+iy(q_3+q_4)} \text{ (III)} + \\
& d_{q_2} c_{q_1} d_{q_3} c_{q_4} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3+q_4)} + \\
& d_{q_2} c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3-q_4)} \left. \right\} + \\
& + \iiint \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 \mathrm{d}q_4 \left\{ \right. \\
& d_{q_2} d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} \text{ (IV)} + \\
& d_{q_2} c_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3+q_4)} + \\
& d_{q_2} d_{q_1}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3+q_4)} + \\
& d_{q_2} d_{q_1}^\dagger d_{q_3} d_{q_4}^\dagger \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2-q_1)} e^{-iy(q_3-q_4)} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Os canais formados por fatores cujo número de operadores de partículas seja diferente do número de operadores de antipartículas possuem valor esperado nulo, fazendo restar apenas quatro termos fisicamente válidos, quais sejam: (3.19(I)), (3.19(II)), (3.19(III)) e (3.19(IV)), de sorte que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(0,0)}^{\mu\nu} &= \iiint \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 \mathrm{d}q_4 \left\{ \right. \tag{3.20} \\
& c_{q_2}^\dagger c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} + \\
& c_{q_2}^\dagger d_{q_1} d_{q_3} c_{q_4}^\dagger \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3+q_4)} \text{ (I)} + \\
& d_{q_2} c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2+q_1)} e^{+iy(q_3+q_4)} + \\
& d_{q_2} d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} \text{ (II)} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

## A amplitude de probabilidade

Sobre o resultado precedente atua-se então o ordenamento de Wick “: :”, ou seja, os operadores de criação serão movidos para a esquerda e os operadores de aniquilação para a direita; especificamente:  $d_q^\dagger c_q^\dagger \times$ (operadores de aniquilação). Além disso, para se evitar cálculos desnecessários, antecipamos o fato de que os canais formados com as peças (3.20(I)) e (3.20(II)) se cancelarão mutuamente. Com efeito, utilizando o propagador do fóton em (3.8) e retornando-se (3.20) em (3.10), teremos

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \iint \mathrm{d}x \mathrm{d}y \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \left\langle f \left| : \mathcal{P}_{(0,0)}^{\mu\nu} A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| l \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{a,b} \iint dx dy \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \left\{ \right. \\
&\quad \left\langle f \left| d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_2}^{\dagger(J)} d_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{(L)} A_\mu(x) A_\nu(y) \right| i \right\rangle \times \\
&\quad \times \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} (\mathbf{I}) + \\
&\quad + \left\langle f \left| d_{q_4}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} d_{q_2}^{(K)} c_{q_1}^{(L)} A_\mu(x) A_\nu(y) \right| i \right\rangle \times \\
&\quad \times \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} (\mathbf{II}) \left. \right\}
\end{aligned}$$

Façamos os cálculos inicialmente para o valor esperado (3.21I). Juntamente com os estados assintóticos em (3.5), necessitaremos movimentar operadores por intermédio das relações em (3.6) bem como daquelas de anti-comutação ali subentendidas. Além disso (3.7) também será usada. Com isso em mente, teremos,

$$\begin{aligned}
(3.21\mathbf{I}) &= \left\langle f \left| \left[ c_{q_2}^\dagger d_{q_1}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} \right] (\sigma) A_\mu(x) A_\nu(y) \right| i \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| \left[ d_{p_4} c_{p_3} c_{q_1}^\dagger d_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} c_{p_4}^\dagger d_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| \left[ (d_{p_4} \cdot d_{q_1}^\dagger) (c_{p_3} \cdot c_{q_2}^\dagger) (c_{q_4} \cdot c_{p_1}^\dagger) (d_{q_3} \cdot d_{p_2}^\dagger) \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| \left[ \left[ \delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} - d_{q_1}^\dagger d_{p_4} \right] \left[ \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} - c_{q_2}^\dagger c_{p_3} \right] \right. \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \left. \left[ \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} - c_{p_1}^\dagger c_{q_4} \right] \left[ \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} - d_{p_2}^\dagger d_{q_3} \right] \right] (\sigma, s) \right| 0 \right\rangle \\
&= \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle.
\end{aligned}$$

Similar procedimento usa-se para determinar o segundo termo:

$$\begin{aligned}
(3.21\mathbf{II}) &= \left\langle f \left| \left[ c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} c_{q_1} \right] (\sigma) A_\mu(x) A_\nu(y) \right| i \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| \left[ d_{p_4} c_{p_3} c_{q_1}^\dagger d_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} c_{p_4}^\dagger d_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| \left[ (d_{p_4} \cdot d_{q_4}^\dagger) (c_{p_3} \cdot c_{q_3}^\dagger) (c_{q_1} \cdot c_{p_1}^\dagger) (d_{q_2} \cdot d_{p_2}^\dagger) \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle \\
&= \delta_{s_1 \sigma_1} \delta_{s_2 \sigma_2} \delta_{s_3 \sigma_3} \delta_{s_4 \sigma_4} \delta_{p_1 q_1}^{(3)} \delta_{p_2 q_2}^{(3)} \delta_{p_3 q_3}^{(3)} \delta_{p_4 q_4}^{(3)} \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle.
\end{aligned}$$

De posse do propagador do fóton em (3.8) e retornando-se (3.21I) e (3.21II) em sua precedente (3.21), teremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= -\frac{i}{2} \sum_{a,b} \iint dx dy \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \int \frac{d^4 \kappa}{(2\pi)^4 \kappa^2} e^{-i\kappa(x-y)} \left\{ \right. \\
&\quad \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \times \\
&\quad \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(0)\mu} u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} (\mathbf{I}) + \\
&\quad + \delta_{s_1 \sigma_1} \delta_{s_2 \sigma_2} \delta_{s_3 \sigma_3} \delta_{s_4 \sigma_4} \delta_{p_1 q_1}^{(3)} \delta_{p_2 q_2}^{(3)} \delta_{p_3 q_3}^{(3)} \delta_{p_4 q_4}^{(3)} \times \\
&\quad \left. \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(0)\mu} v(4) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} (\mathbf{II}) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Vamos agora lançar mão das propriedades do delta de Kronecker:  $\Sigma_\sigma f(\sigma) \delta_{\sigma s} = f(s)$  e de Dirac:  $\int dx f(x) \delta(x - y) = f(y)$  bem como dos resultados (A.6) e (A.7) que constam no apêndice A, e que são  $\int dx \delta(\epsilon - x) \delta(x - \eta) = \delta(\epsilon - \eta)$  e  $\iint dx dy \int d^4 \kappa_{(l)} e^{-i\kappa_{(l)}(x-y)} e^{-ix(p_1 - p_3)} e^{iy(p_4 - p_2)} = \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$ . Com isso,

ficamos com

$$\begin{aligned}
 (3.21\mathbf{I}) &= -i \sum_{a,b} \iint dx dy \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \int \frac{d^4 \kappa}{(2\pi)^4} e^{i\kappa(x-y)} \frac{1}{\kappa^2} [\bar{u}(2) \Gamma_{(0)}^\mu v(1)](\mathbf{q}, \sigma) [\bar{v}(3) \Gamma_{(0)\mu} u(4)](\mathbf{q}, \sigma) \\
 &\quad \times e^{-ix(q_1-q_3)} e^{iy(q_4-q_2)} \delta_{s_1 s_4} \delta_{s_2 s_3} \delta_{s_3 s_2} \delta_{s_4 s_1} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \\
 &= \frac{-i}{\kappa^2} \int \frac{d^4 \kappa}{(2\pi)^4} \left\{ \int d^4 x e^{-ix(p_4-p_2+\kappa)} \right\} \left\{ \int d^4 y e^{-iy(p_3-p_1-\kappa)} \right\} [\bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\mu v(4) \bar{v}(2) \Gamma_{(0)\mu} u(1)](\mathbf{p}, s) \\
 &= \frac{-i}{\kappa^2} \left\{ \int \frac{d^4 \kappa}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + \kappa) \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - \kappa) \right\} [\bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\mu v(4) \bar{v}(2) \Gamma_{(0)\mu} u(1)](\mathbf{p}, s) \\
 &= -i \frac{\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\kappa^2 (2\pi)^4} [\bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\mu v(4) \bar{v}(2) \Gamma_{(0)\mu} u(1)](\mathbf{p}, s). \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

O fator  $\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)/(2\pi)^4$  representa apenas a conservação do momento-energia, por isso pode ser descartado, o que nos dá,

$$(3.21\mathbf{I}) = -\frac{i}{\kappa^2} [\bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\mu v(4) \bar{v}(2) \Gamma_{(0)\mu} u(1)](\mathbf{p}, s). \tag{3.23}$$

Os cálculos para (3.21III) são idênticos, mostrando-nos que há, em verdade, apenas um canal: (3.21I) = (3.21III); o que era de se esperar para o espalhamento elétron-pósitron. Dessa forma a amplitude de probabilidade do espalhamento elétron-pósitron finalmente revela-se claramente:

$$\boxed{\mathcal{M}_{(00)} = -\frac{i}{\kappa^2} [\bar{u}(3) \Gamma_{(0)}^\mu v(4)](\mathbf{p}, s) [\bar{v}(2) \Gamma_{(0)\mu} u(1)](\mathbf{p}, s)}. \tag{3.24}$$

### A seção de choque

Munidos de (3.24) e seu complexo conjugado e retornando-as em (3.15) ficamos com

$$\begin{aligned}
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{M}_{(00)} \mathcal{M}_{(00)}^\dagger = \frac{1}{4\kappa^4} \sum_{\text{Spin}} [\bar{v}(2) \Gamma_{(0)}^\mu u(1)](\mathbf{p}, s) [\bar{u}(3) \Gamma_{(0)\mu} v(4)](\mathbf{p}, s) \\
 &\quad \times [\bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\nu v(2)](\mathbf{p}, s) [\bar{v}(4) \Gamma_{(0)\nu} u(3)](\mathbf{p}, s) = \frac{1}{4s^2} \sum_{\text{Spin}} [\Gamma_{(0)}^\mu \bar{u}(1) u(1)](\mathbf{p}, s) [\Gamma_{(0)}^\nu \bar{v}(2) v(2)](\mathbf{p}, s) \\
 &\quad \times [\Gamma_{(0)\mu} \bar{u}(3) u(3)](\mathbf{p}, s) [\Gamma_{(0)\nu} \bar{v}(4) v(4)](\mathbf{p}, s) \\
 &= \frac{e^4}{4s^2} \mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{M}_{(00)\mu\nu}, \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

com  $\kappa^4 = (\kappa^\mu \kappa_\mu)^2 = s^2 = (2E)^4$ , na qual

$$\mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} = \left[ \gamma^\mu \left( \sum_{\text{Spin}} \bar{u}(1) u(1) \right) \gamma^\nu \left( \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(2) v(2) \right) \right](\mathbf{p}, s) = tr \left\{ \gamma^\mu (p_1^\perp + m_e) \gamma^\nu (p_2^\perp - m_e) \right\} \text{ e} \tag{3.26}$$

$$\mathbb{M}_{(00)}^{\mu\nu} = \left[ \gamma^\mu \left( \sum_{\text{Spin}} \bar{u}(3) u(3) \right) \gamma^\nu \left( \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(4) v(4) \right) \right](\mathbf{p}, s) = tr \left\{ \gamma^\mu (p_3^\perp + m_\mu) \gamma^\nu (p_4^\perp - m_\mu) \right\}, \tag{3.27}$$

são os fatores eletrônico e muônico, que encontram-se calculados no apêndice C:

$$(C.2) = \mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} = 4 \left( p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} [(p_1 \cdot p_2) + m_e^2] \right),$$

$$(C.3) = \mathbb{M}_{(00)}^{\mu\nu} = 4 \left( p_3^\mu p_4^\nu + p_3^\nu p_4^\mu - g^{\mu\nu} \left[ (p_3 \cdot p_4) + m_\mu^2 \right] \right). \quad (3.28)$$

O produto  $\mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{M}_{(00)\mu\nu}$  também encontra-se calculado no mesmo apêndice; o qual vale,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{M}_{(00)\mu\nu} &= 64 \left( E^4 + (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p})^2 \right) + 16s \left( m_e^2 + m_\mu^2 \right) = 64 \left[ E^4 + \left( E^4 - E^2(m_e^2 + m_\mu^2) + m_e^2 m_\mu^2 \right) \cos^2(\theta) \right] \\ &\quad + 16s \left( m_e^2 + m_\mu^2 \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

com  $|\mathbf{p}|^2 = E^2 + m^2$  e

$$(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p})^2 = |\mathbf{p}'|^2 |\mathbf{p}|^2 \cos^2(\theta) = \left( E^4 - E^2(m_e^2 + m_\mu^2) + m_e^2 m_\mu^2 \right) \cos^2(\theta), \quad (3.30)$$

com  $\theta$  o ângulo entre a linha de interação do par elétron-pósitron e a linha de espalhamento do par múon-anti-múon. Retornando-se (3.29) em (3.25) seguido de uma breve álgebra, fornece-nos:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}|^2 = e^4 \left\{ \left( 1 + \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{E^2} \right) + \left( 1 - \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2(\theta) + 4 \frac{m_e^2 m_\mu^2}{E^4} \cos^2(\theta) \right\}. \quad (3.31)$$

Resta o fator de inelasticidade em (3.14), que é dado pela raiz

$$\frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} = \sqrt{\frac{1 - (m_\mu/E)^2}{1 - (m_e/E)^2}}. \quad (3.32)$$

Assim, levando-as em (3.14) a seção de choque diferencial à  $T = 0$  é finalmente determinada:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}) &= \frac{|\mathbf{p}'|}{64\pi^2 s |\mathbf{p}|} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \\ &= \frac{\alpha^2}{4s} \left\{ \left( 1 + \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{E^2} \right) + \left( 1 - \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{E^2} \right) \cos^2(\theta) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{m_e^2 m_\mu^2}{E^4} \cos^2(\theta) \right\} \sqrt{\frac{1 - (m_\mu/E)^2}{1 - (m_e/E)^2}}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

com  $\alpha = e^2/4\pi$ . Uma vez que  $\int d\Omega = 4\pi$  e  $\int d\Omega \cos^2(\theta) = \frac{4\pi}{3}$  a integração do resultado acima leva-nos à seção de choque fria total do espalhamento elétron-pósitron :

$$\sigma(e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left\{ \left( 1 + \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{2E^2} \right) + 4 \frac{m_e^2 m_\mu^2}{E^4} \cos^2(\theta) \right\} \sqrt{\frac{1 - (m_\mu/E)^2}{1 - (m_e/E)^2}}. \quad (3.34)$$

## Límite ultrarrelativístico

Experimentalmente, para que o par  $e\bar{e}$  interaja gerando o par  $\mu\bar{\mu}$  é necessário que os elétrons tenham uma energia de  $E > m_\mu \gg m_e$  implicando em  $m_e^2 \approx 0$ , uma vez que um múon tem massa da ordem de 200 vezes a massa de um elétron. Essa aproximação ultra-relativística faz com que o fator inelástico em (3.32) fique agora dado por

$$|\mathbf{p}'|/|\mathbf{p}| \approx \sqrt{1 - (m_\mu/E)^2} \quad (3.35)$$

afetando os resultados anteriores de modo que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}) = \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2} \left\{ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2(\theta) \right\} \sqrt{1 - \left(\frac{m_\mu}{E}\right)^2} \quad (3.36)$$

ou

$$\sigma(e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CM}^2} \left(1 + \frac{m_\mu^2}{2E^2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{m_\mu}{E}\right)^2},$$

ou ainda

$$\sigma(e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CM}^2}, \quad (3.37)$$

se  $m_\mu^2 \approx 0$ .

### 3.3 A seção de choque fria do espalhamento Bhabha

Vamos agora executar os cálculos para o espalhamento Bhabha. Como sabemos, diferentemente do espalhamento elétron-pósitron o espalhamento Bhabha apresenta três canais fisicamente válidos: o canal de aniquilação  $t$ , o de espalhamento  $s$  e o de mistura  $u$ , como indicado na Figura (3.1). Quanto aos índices de partículas temos: 1 e 3 para o par incidente e 2 e 4 para o emergente.

#### O quadrilinear

Para o cálculo do quadrilinear vamos iniciar nomeando-o como  $\mathcal{Q}_{(00)}^{\mu\nu}$ :

$$\mathcal{Q}_{(00)}^{\mu\nu} = \bar{\Psi}_1(x)\Gamma_{(0)}^\mu\Psi_3(x)\bar{\Psi}_4(y)\Gamma_{(0)}^\nu\Psi_2(y). \quad (3.38)$$

Por intermédio de (3.3) e (3.4) os bilineares são montados. Primeiramente

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1\Gamma_{(0)}^\mu\Psi_3 &= \iint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_3 \left[ c_{\mathbf{q}_1}^\dagger \bar{u}(1) e^{i\mathbf{q}_1 x} + d_{\mathbf{q}_1} \bar{v}(1) e^{-i\mathbf{q}_1 x} \right] (\mathbf{q}, \sigma) \Gamma_{(0)}^\mu \left[ c_{\mathbf{q}_3} u(3) e^{-i\mathbf{q}_3 x} + d_{\mathbf{q}_3}^\dagger v(3) e^{-i\mathbf{q}_3 x} \right] (\mathbf{q}, \sigma) \\ &= \iint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_3 \left\{ c_{\mathbf{q}_1}^\dagger c_{\mathbf{q}_3} u(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) e^{ix(q_1-q_3)} + c_{\mathbf{q}_1}^\dagger d_{\mathbf{q}_3}^\dagger \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) e^{i(q_1-q_3)} \right. \\ &\quad \left. + d_{\mathbf{q}_1} c_{\mathbf{q}_3} \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) e^{-ix(q_1+q_3)} + d_{\mathbf{q}_1} d_{\mathbf{q}_3}^\dagger \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) e^{-ix(q_1+q_3)} \right\} (q, \sigma). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Semelhantemente,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_4\Gamma_{(0)}^\mu\Psi_2 &= \iint d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_4 \left[ c_{\mathbf{q}_4}^\dagger \bar{u}(4) e^{i\mathbf{q}_4 y} + d_{\mathbf{q}_4} \bar{v}(4) e^{-i\mathbf{q}_4 y} \right] (\mathbf{q}, \sigma) \Gamma_{(0)}^\mu \left[ c_{\mathbf{q}_2} u(2) e^{-i\mathbf{q}_2 y} + d_{\mathbf{q}_2}^\dagger q_2 v(2) e^{-i\mathbf{q}_2 y} \right] (\mathbf{q}, \sigma) \\ &= \iint d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_4 \left\{ c_{\mathbf{q}_4}^\dagger c_{\mathbf{q}_2} u(4) \Gamma_{(0)}^\mu u(2) e^{iy(q_4-q_2)} + c_{\mathbf{q}_4}^\dagger d_{\mathbf{q}_2}^\dagger \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\mu v(2) e^{i(q_4+q_2)} \right. \\ &\quad \left. + d_{\mathbf{q}_4} c_{\mathbf{q}_2} \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\mu u(2) e^{-iy(q_4+q_2)} + d_{\mathbf{q}_4} d_{\mathbf{q}_2}^\dagger \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\mu v(2) e^{-iy(q_4-q_2)} \right\} (q, \sigma). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Executando-se então o produto de (3.39) com (3.40):

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{(00)}^{\mu\nu} &= \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\ &\quad \left. c_{\mathbf{q}_1}^\dagger c_{\mathbf{q}_3} c_{\mathbf{q}_4}^\dagger c_{\mathbf{q}_2} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1-q_3)} e^{iy(q_4+q_2)} + \right. \\ &\quad \left. \dots \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
& c_{q_1} c_{q_3}^\dagger c_{q_4} d_{q_2} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} + \\
& c_{q_1} c_{q_3}^\dagger c_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 - q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} + \\
& c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} \Big\} + \\
& + \iiint \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 \mathrm{d}q_4 \Big\{ \\
& c_{q_1} d_{q_3} c_{q_4} c_{q_2}^\dagger \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} + \\
& c_{q_1} d_{q_3} c_{q_4} d_{q_2} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} \\
& c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} + \\
& c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4} d_{q_2} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 - q_2)} \Big\} + \\
& + \iiint \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 \mathrm{d}q_4 \Big\{ \\
& d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} c_{q_2} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} + \\
& d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} d_{q_2} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} + \\
& d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2}^\dagger \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 - q_2)} + \\
& d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger d_{q_4} d_{q_2}^\dagger \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 - q_2)} \Big\} + \\
& + \iiint \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 \mathrm{d}q_4 \Big\{ \\
& d_{q_1}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} c_{q_2}^\dagger \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} + \\
& d_{q_1}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} d_{q_2} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} + \\
& d_{q_1}^\dagger d_{q_3} d_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} + \\
& d_{q_1}^\dagger d_{q_3} d_{q_4}^\dagger d_{q_2} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{-iy(q_4 - q_2)} \Big\}.
\end{aligned}$$

Analizando cada um dos termos acima notamos que aqueles que são formados por fatores cujo número de operadores de partículas seja diferente do número de operadores de antipartículas são todos improváveis, reduzindo-os para apenas a quatro canais:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{(00)}^{\mu\nu} &= \iiint \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 \mathrm{d}q_4 \Big\{ \\
& c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 - q_3)} e^{-iy(q_4 - q_2)} + \\
& c_{q_1} d_{q_3}^{(J)} d_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} + \\
& d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} d_{q_2} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} + \\
& d_{q_1}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} c_{q_2}^\dagger \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} \Big\}. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

### A amplitude de transição

Esse resultado pode então ser levado até (3.10):

$$\mathcal{M}_{(00)} = \frac{1}{2} \iint \mathrm{d}x \mathrm{d}y \left\langle f \left| : \mathcal{D}_{(00)}^{\mu\nu} A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| i \right\rangle \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \iiint \mathrm{d}\mathbf{q}_1 \mathrm{d}\mathbf{q}_2 \mathrm{d}\mathbf{q}_3 \mathrm{d}\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\
&\quad \left\langle f \left| : c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota \right\rangle \times \\
&\quad \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 - q_3)} e^{-iy(q_4 - q_2)} (\mathbf{I}) + \\
&\quad \left\langle f \left| : d_{q_1}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} c_{q_2}^\dagger A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota \right\rangle \times \\
&\quad \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} (\mathbf{II}) + \\
&\quad \left\langle f \left| : c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota \right\rangle \times \\
&\quad \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} (\mathbf{III}) + \\
&\quad \left\langle f \left| : d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} d_{q_2} A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota \right\rangle \times \\
&\quad \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} (\mathbf{IV}) \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Atuando com o ordenamento de Wick e usando-se as relações de anti-comutação (3.6), os estados assintóticos (3.5) e o resultado em (3.7) o primeiro valor esperado é calculado:

$$\begin{aligned}
(3.43(\mathbf{I})) &= \left\langle f \left| : \left[ c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} \right] (\sigma) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| : \left[ d_{p_4} c_{p_3} c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| : \left[ d_{p_4} d_{q_4}^\dagger c_{p_3} c_{q_3}^\dagger c_{q_1} d_{q_2} d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma_q, s_p) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| : \left[ d_{p_4} d_{q_4}^\dagger c_{p_3} c_{q_3}^\dagger d_{q_3} d_{q_2}^\dagger c_{q_1} c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| : \left[ d_{p_4} \cdot d_{q_4}^\dagger c_{p_3} \cdot c_{q_3}^\dagger d_{q_3} \cdot d_{q_2}^\dagger c_{q_1} \cdot c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| \left( \left[ \delta_{s\sigma} \delta_{pq}^{(3)} - d_q d_p^\dagger \right] \left[ \delta_{s\sigma} \delta_{pq}^{(3)} - d_q d_p^\dagger \right] \left[ \delta_{s\sigma} \delta_{pq}^{(3)} - d_q d_p^\dagger \right] \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \left. \left. \left[ \delta_{s\sigma} \delta_{pq}^{(3)} - d_q d_p^\dagger \right] \right) (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle \\
&= \delta_{s_4 s_4} \delta_{s_3 s_3} \delta_{s_2 s_2} \delta_{s_1 s_1} \delta_{p_4 q_4}^{(3)} \delta_{p_3 q_3}^{(3)} \delta_{p_2 q_2}^{(3)} \delta_{p_1 q_1}^{(3)} \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle_{(1)}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo agora o termo (3.43(**III**)):

$$\begin{aligned}
(3.43(\mathbf{III})) &= \left\langle f \left| : \left[ d_{q_1}^\dagger d_{q_3}^\dagger c_{q_4} c_{q_2}^\dagger \right] (\sigma) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| : \left[ d_{p_4} c_{p_3} d_{q_1}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} c_{q_2}^\dagger d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| : \left[ d_{p_4} d_{q_1}^\dagger c_{p_3} c_{q_2}^\dagger d_{q_3} d_{p_2}^\dagger c_{q_4} c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| \left\{ \left[ \delta_{s_4 s_1} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} - d_{q_1} d_{p_4}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_3 s_2} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} - d_{q_2} d_{p_3}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_2 s_3} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} + \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. - d_{q_3} d_{p_2}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_1 s_4} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} - d_{q_4} d_{p_1}^\dagger \right] \right\} (\sigma, s) \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(1)} : \right| 0 \right\rangle \\
&= \delta_{s_4 s_1} \delta_{s_3 s_2} \delta_{s_2 s_3} \delta_{s_1 s_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle_{(1)}
\end{aligned}$$

Para a peça (3.43(**III**)) teremos

$$\begin{aligned}
(3.43(\text{III})) &= \left\langle f \left| : \left[ c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger \right] (\sigma) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| : \left[ d_{p_4} c_{p_3} c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle \\
&= - \left\langle 0 \left| : \left[ d_{p_4} d_{q_4}^\dagger c_{p_3} c_{q_1} d_{q_3} c_{q_2}^\dagger d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle \\
&= - \left\langle 0 \left| \left[ d_{p_4} d_{q_4}^\dagger c_{p_3} c_{q_2}^\dagger d_{q_3} d_{p_2}^\dagger c_{q_1} c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle \\
&= - \left\langle 0 \left| \left\{ \left[ \delta_{s_4 s_4} \delta_{p_4 q_4}^{(3)} - d_{q_4} d_{p_4}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_3 s_2} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} - d_{q_2} d_{p_3}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_1 s_1} \delta_{p_1 q_1}^{(3)} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \left. \left. - d_{q_1} d_{p_1}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_1 s_4} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} - d_{q_4} d_{p_1}^\dagger \right] \right\} (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle \\
&= - \delta_{s_4 s_1} \delta_{s_3 s_2} \delta_{s_2 s_3} \delta_{s_1 s_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(2)}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Por fim segue-se o cálculo de (3.43(IV)):

$$\begin{aligned}
(3.43(\text{IV})) &= \left\langle f \left| : \left[ c_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} d_{q_2} \right] (\sigma) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| : \left[ d_{p_4} c_{p_3} d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} d_{q_2} d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma, s) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| 0 \right\rangle \\
&= - \left\langle 0 \left| \left[ d_{p_4} d_{q_1}^\dagger c_{p_3} c_{q_1}^\dagger d_{q_2} d_{p_2}^\dagger c_{q_4} c_{p_1}^\dagger \right] (\sigma_q, s_p) A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle \\
&= - \delta_{s_4 s_1} \delta_{s_3 s_2} \delta_{s_2 s_3} \delta_{s_1 s_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(2)}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

O subíndice no valor esperado em cada um desses resultados serve apenas como um marcador do canal em questão. Levando-se essas quatro peças em (3.43) obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(00)} &= \frac{1}{2} \iint dx dy \left\langle f \left| : \mathcal{D}_{(00)}^{\mu\nu} A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \iiint \int dq_1 dq_2 dq_3 dq_4 \left\{ \right. \\
&\quad \delta_{s_4 s_4} \delta_{s_3 s_3} \delta_{s_2 s_2} \delta_{s_1 s_1} \delta_{p_4 q_4}^{(3)} \delta_{p_3 q_3}^{(3)} \delta_{p_2 q_2}^{(3)} \delta_{p_1 q_1}^{(3)} \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(1)} \\
&\quad \times \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 - q_3)} e^{-iy(q_4 - q_2)} (\text{I}) + \\
&\quad \delta_{s_4 s_1} \delta_{s_3 s_2} \delta_{s_2 s_3} \delta_{s_1 s_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(1)} \\
&\quad \times \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} (\text{II}) + \\
&\quad - \delta_{s_4 s_1} \delta_{s_3 s_2} \delta_{s_2 s_3} \delta_{s_1 s_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(2)} \\
&\quad \times \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} (\text{III}) + \\
&\quad - \delta_{s_4 s_1} \delta_{s_3 s_2} \delta_{s_2 s_3} \delta_{s_1 s_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(2)} \\
&\quad \times \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(0)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(0)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} (\text{IV}) \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Neste ponto utiliza-se a propriedade da delta de Kronecker e da delta de Dirac (apêndice A):  $\Sigma_\sigma f(\sigma) \delta_{\sigma s} = f(s)$  e  $\int dx f(x) \delta(x - y) = f(y)$ . Com isso ficaremos com<sup>3</sup>:

<sup>3</sup>Veja o apêndice A para detalhes dessa passagem.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(00)} = & \frac{1}{2} \iint dx dy \int d^4 p \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(1)} e^{-ix(p_1-p_3)} e^{iy(p_4-p_2)} [\bar{u}(1) \Gamma^\mu_{(0)} u(3)](p, s) [\bar{v}(4) \Gamma^\nu_{(0)} v(2)](p, s) \\
& + \frac{1}{2} \iint dx dy \int d^4 p \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(1)} e^{ix(p_4-p_2)} e^{iy(p_1-p_3)} [\bar{v}(1) \Gamma^\mu_{(0)} v(3)](p, s) [\bar{u}(4) \Gamma^\nu_{(0)} u(2)](p, s) \\
& - \frac{1}{2} \iint dx dy \int d^4 p \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(2)} e^{-ix(p_4-p_3)} e^{iy(p_1-p_2)} [\bar{u}(1) \Gamma^\mu_{(0)} v(3)](p, s) [\bar{v}(4) \Gamma^\nu_{(0)} u(2)](p, s) \\
& - \frac{1}{2} \iint dx dy \int d^4 p \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(2)} e^{ix(p_1-p_2)} e^{-iy(p_4-p_3)} [\bar{v}(1) \Gamma^\mu_{(0)} u(3)](p, s) [\bar{u}(4) \Gamma^\nu_{(0)} v(2)](p, s).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Existe uma simetria na troca dos vértices ( $x \rightarrow y$  e  $y \rightarrow x$ ) e dos índices das partículas bem como nos índices dos momentos lineares. Isso significa que os primeiros dois termos são iguais, assim como o são os dois últimos. Isso nos polpará linhas de cálculos, deixando-nos apenas com

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(00)} = & \iint dx dy \int d^4 p \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(1)} e^{-ix(p_1-p_3)} e^{iy(p_4-p_2)} [\bar{u}(1) \Gamma^\mu_{(0)} u(3)](p, s) [\bar{v}(4) \Gamma^\nu_{(0)} v(2)](p, s) \\
& - \iint dx dy d^4 p \left\langle 0 \left| A_\mu(x) A_\nu(y) \right| 0 \right\rangle_{(2)} e^{-ix(p_4-p_3)} e^{iy(p_1-p_2)} [\bar{u}(1) \Gamma^\mu_{(0)} v(3)](p, s) [\bar{v}(4) \Gamma^\nu_{(0)} u(2)](p, s).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Neste ponto o vértice (3.3) e o propagador do fóton em (3.8) devem ser usados, de modo que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(00)} = & i \iint dx dy \int d^4 p \int \frac{d^4 \kappa_{(l)}}{(2\pi)^4} e^{-i\kappa_{(1)}(x-y)} \frac{\eta_{\mu\nu}}{\kappa_{(1)}^2} \times \\
& e^{-ix(p_1-p_3)} e^{iy(p_4-p_2)} [\bar{u}(1) \Gamma^\mu_{(0)} u(3)](p, s) [\bar{v}(4) \Gamma^\nu_{(0)} v(2)](p, s) + \\
& - i \iint dx dy d^4 p \int \frac{d^4 \kappa_{(2)}}{(2\pi)^4} e^{-i\kappa_{(l)}(x-y)} \frac{\eta_{\mu\nu}}{\kappa_{(2)}^2} \times \\
& e^{-ix(p_4-p_3)} e^{iy(p_1-p_2)} [\bar{u}(1) \Gamma^\mu_{(0)} v(3)](p, s) [\bar{v}(4) \Gamma^\nu_{(0)} u(2)](p, s),
\end{aligned} \tag{3.49}$$

com  $l = 1$  se referindo ao canal  $t$  e  $l = 2$  ao canal  $s$ ; além disso  $|\kappa_0|_{(1)} = |p_3 - p_1| = |\kappa_0|_{(2)} = |p_2 + p_4| = |\kappa_0| = E_{CM} = 2E$ . No apêndice A demonstra-se que

$$\iint dx dy \int d^4 \kappa_{(l)} e^{-i\kappa_{(l)}(x-y)} e^{-ix(p_1-p_3)} e^{iy(p_4-p_2)} = \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \tag{3.50}$$

Levando-a em (3.49), teremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = & + \frac{ie^2}{t} \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^4} [\bar{u}(1) \gamma^\mu u(3)](p, s) [\bar{v}(4) \gamma_\mu v(2)](p, s) + \\
& - \frac{ie^2}{s} \frac{\delta^4(p_2 + p_4 - p_3 - p_1)}{(2\pi)^4} [\bar{v}(4) \gamma^\mu u(3)](p, s) [\bar{u}(1) \gamma_\mu v(2)](p, s).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Novamente aqui desconsidera-se os fatores nas deltas por conta de expressarem apenas a lei de conservação de energia-momento, fornecendo-nos, finalmente, a amplitude de transição do espalhamento Bhabha à

$T = 0$ :

$$\mathcal{M}_{(00)} = \mathcal{M}_{(00)}^{(t)} + \mathcal{M}_{(00)}^{(s)}, \quad (3.52)$$

na qual

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)} &= +\frac{ie^2}{t} \left[ \bar{u}(1) \gamma^\mu u(3) \right] (p, s) \left[ \bar{v}(4) \gamma_\mu v(2) \right] (p, s) \quad \text{e} \\ \mathcal{M}_{(00)}^{(s)} &= -\frac{ie^2}{s} \left[ \bar{u}(1) \gamma^\mu u(3) \right] (p, s) \left[ \bar{v}(4) \gamma_\mu v(2) \right] (p, s) \end{aligned} \quad (3.53)$$

representam a amplitude advinda do canal  $t$  e aquela advinda do canal  $s$ .

### A seção de choque

A equação (3.52) implica na existência de um termo de mistura (interferência) associado ao produto entre ambos os canais. De fato, uma vez escritos seus complexos conjugados obtém-se

$$\mathcal{M}_{(00)} \mathcal{M}_{(00)}^\dagger = \mathcal{M}_{(00)}^{(t)} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)\dagger} + \mathcal{M}_{(00)}^{(s)} \mathcal{M}_{(00)}^{(s)\dagger} - 2 \mathcal{M}_{(00)}^{(s)} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)\dagger}. \quad (3.54)$$

Tomando-se então médias e somas adequadas sobre as variáveis de spin, encontramos que

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 = \langle |\mathcal{M}_{(00)}^{(t)}|^2 \rangle + \langle |\mathcal{M}_{(00)}^{(s)}|^2 \rangle - \langle 2 \mathcal{M}_{(00)}^{(s)} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)\dagger} \rangle, \quad (3.55)$$

sendo

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}^{(t)}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)\dagger} \quad (a), \quad \langle |\mathcal{M}^{(s)}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_{(00)}^{(s)} \mathcal{M}_{(00)}^{(s)\dagger} \quad (b) \quad \text{e} \\ \langle 2 \mathcal{M}_{(00)}^{(s)} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)\dagger} \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_{(00)}^{(s)} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)\dagger}. \quad (c) \end{aligned} \quad (3.56)$$

### Canal $t$

Sejam as seguintes nomeações temporárias:

$$A^\mu = \bar{u}(3) \gamma^\mu u(1); \quad B_\mu = \bar{v}(2) \gamma_\mu v(4); \quad \bar{C}^\nu = \bar{u}(1) \gamma^\nu u(3); \quad \bar{D}_\nu = \bar{v}(4) \gamma_\nu v(2). \quad (3.57)$$

Com elas calcula-se o canal  $t$ :

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{(00)}^{(t)}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_{(00)}|_t^2 = \frac{e^4}{4t^2} \sum_{\text{Spins}} A^\mu B_\mu \bar{C}^\nu \bar{D}_\nu = \frac{e^4}{4t^2} \left\{ \sum_{\text{Spins}} A^\mu \bar{C}^\nu \right\} \left\{ \sum_{\text{Spins}} B_\mu \bar{D}_\nu \right\} \\ &= \frac{e^4}{4t^2} \mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{T}'_{\mu\nu(00)}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

na qual

$$\mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu} = \sum_{\text{Spins}} A^\mu \bar{C}^\nu = \left\{ \sum_{\text{Spin}} \bar{u}(3) u(3) \right\} \gamma^\mu \left\{ \sum_{\text{Spin}} \bar{u}(1) u(1) \right\} \gamma^\nu, \quad (3.59)$$

$$\mathbb{T}'_{\mu\nu(00)} = \sum_{\text{Spins}} B_\mu \bar{D}_\nu = \left\{ \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(2) v(2) \right\} \gamma_\mu \left\{ \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(4) v(4) \right\} \gamma_\nu. \quad (3.60)$$

Usando as regras em (3.12) e (3.13)  $\mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu}$  e  $\mathbb{T}'_{\mu\nu(00)}$  tornam-se

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu} &= e^2 t_r \left\{ (p_3^\mu + m) \gamma^\mu (p_1^\nu + m) \gamma^\nu \right\} \quad \text{e} \\ \mathbb{T}_{(00)\mu\nu} &= e^2 t_r \left\{ (p_3^\mu - m) \gamma_\mu (p_1^\nu - m) \gamma_\nu \right\},\end{aligned}\quad (3.61)$$

sendo  $t_r$  o traço sobre as matrizes de Dirac. No apêndice C encontram-se os cálculos detalhados desses traços: de acordo com (C.4), tomando-se  $\varepsilon_i = \varepsilon_j = +1$  para o cálculo de  $\mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu}$  obtemos

$$\mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu} = 4e^2 \left\{ p_3^\mu p_1^\nu + p_3^\nu p_1^\mu - g^{\mu\nu} ((p_3 \cdot p_1) + m^2) \right\}. \quad (3.62)$$

Para se determinar  $\mathbb{T}'_{(00)}^{\mu\nu}$  basta trocar os índices de partícula: 3 por 2 e 1 por 4. O produto em (3.58) também encontra-se no apêndice C; ele nos dá,

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{T}'_{\mu\nu(00)} &= 32e^4 \left[ (2m^2 - (p_1 \cdot p_3))m^2 + (p_2 \cdot p_4)m^2 + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - (2m^2 - (p_1 \cdot p_3))(p_2 \cdot p_4) + \right. \\ &\quad \left. -(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) \right].\end{aligned}\quad (3.63)$$

Lançando-se mão das variáveis de Mandelstam em (2.3) chega-se ao resultado:

$$\mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{T}'_{\mu\nu(00)} = 32e^4 \left[ I(m) + \frac{s^2 + u^2}{4} \right], \quad (3.64)$$

com

$$I(m) = m^2 (2m^2 + (t - s - u)). \quad (3.65)$$

Dessa forma, retornando-se este resultado em (3.58a) o valor esperado da probabilidade de transição para o canal  $t$  é calculado

$$\langle |\mathcal{M}^{(t)}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{t^2} \left[ I(m) + \frac{s^2 + u^2}{4} \right]. \quad (3.66)$$

## Canal $s$

Usando as nomeações em (3.57) os cálculos para o canal  $s$  ficarão da seguinte forma

$$\begin{aligned}\langle |\mathcal{M}^{(s)}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}_{(00)}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \sum_{\text{Spin}} A^\mu B_\mu \bar{C}^\nu \bar{D}_\nu \\ &= \frac{e^4}{4s^2} \left\{ \sum_{\text{Spins}} A^\mu \bar{D}^\nu \right\} \left\{ \sum_{\text{Spins}} B_\mu \bar{C}_\nu \right\} \\ &= \frac{e^4}{4s^2} \mathbb{S}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{S}'_{\mu\nu(00)},\end{aligned}\quad (3.67)$$

sendo, agora,

$$\mathbb{S}_{(00)}^{\mu\nu} = \sum_{\text{Spins}} A^\mu \bar{D}^\nu = \left\{ \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(4)v(4) \right\} \gamma^\mu \left\{ \sum_{\text{Spin}} \bar{u}(3)u(3) \right\} \gamma^\nu, \quad (3.68)$$

$$\mathbb{S}'_{\mu\nu(00)} = \sum_{\text{Spins}} B_\mu \bar{C}_\nu = \left\{ \sum_{\text{Spin}} \bar{u}(1) u(1) \right\} \gamma_\mu \left\{ \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(2) v(2) \right\} \gamma_\nu. \quad (3.69)$$

Aplicando (3.12) e (3.13) e em seguida remetendo-nos ao apêndice C para seus traços, obteremos:

$$\mathbb{S}'_{\mu\nu(00)} = e^2 \text{tr} \left\{ (p'_1 + m) \gamma_\mu (p'_2 - m) \gamma_\nu \right\} = 4 \left[ p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - g_{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2) + g_{\mu\nu} m^2 \right], \quad (3.70)$$

$$\mathbb{S}_{(00)}^{\mu\nu} = \text{tr} \left\{ (p'_4 - m) \gamma^\mu (p'_3 + m) \gamma^\nu \right\} = 4 \left[ p_{4\mu}^{\phantom{\mu}\nu} p_{3\nu}^{\phantom{\nu}\mu} + p_{4\nu}^{\phantom{\nu}\mu} p_{3\mu}^{\phantom{\mu}\nu} - g^{\mu\nu} (p_3 \cdot p_4) + g^{\mu\nu} m^2 \right]. \quad (3.71)$$

Ao uso das variáveis em (2.3) segue-se o produto

$$\mathbb{S}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{S}'_{(00)\mu\nu} = 32e^4 \left[ \text{II}(m) + \frac{u^2 + t^2}{4} \right], \quad (3.72)$$

em que

$$\text{II}(m) = m^2 (6m^2 - (s + t + u)). \quad (3.73)$$

Dessa forma, retornando-se este resultado em (3.58b) o valor esperado da probabilidade de transição para o canal  $s$  é calculado:

$$\langle |\mathcal{M}_{(00)}^{(s)}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{s^2} \left[ \text{II}(m) + \frac{u^2 + t^2}{4} \right]. \quad (3.74)$$

### Canal de interação $u$

Para o cálculo deste canal teremos

$$\left\langle 2\mathcal{M}_{(00)}^{(s)} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)\dagger} \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_{(00)}^{(s)} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)\dagger} = \frac{e^4}{2ts} \sum_{\text{Spins}} A^\mu \bar{D}_\nu B_\mu \bar{C}^\nu = \frac{e^4}{2ts} \mathbb{U}_{(0000)}.$$

Neste caso, temos

$$\mathbb{U}_{(0000)} = \sum_{\text{Spin}} A^\mu \bar{D}_\nu B_\mu \bar{C}^\nu \quad (3.75)$$

$$= \text{tr} \left\{ (p'_3 + m) \gamma^\mu (p'_4 - m) \bar{\gamma}_\nu (p'_2 - m) \gamma_\mu (p'_1 + m) \bar{\gamma}^\nu \right\}, \quad (3.76)$$

sobre a qual usamos as nomeações (3.57). Invocando-se o apêndice C e as variáveis (2.3) chega-se a

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{(0000)} &= -16e^4 \left[ 2m^4 + (p_1 \cdot p_2)m^2 - (p_1 \cdot p_3)m^2 + (p_2 \cdot p_3)m^2 + (p_1 \cdot p_4)m^2 - (p_2 \cdot p_4)m^2 \right. \\ &\quad \left. + (p_3 \cdot p_4)m^2 + 2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \right] \\ &= -32e^4 \left[ \text{III}(m) + \frac{u^2}{4} \right], \end{aligned} \quad (3.77)$$

com

$$\text{III}(m) = m^2 \left( m^2 + \frac{s-t-3u}{2} \right). \quad (3.78)$$

Assim, levando  $\mathbb{U}_{(0000)}$  em (3.75), o termo cruzado da seção de choque é encontrado:

$$\left\langle 2\mathcal{M}_{(00)}^{(s)} \mathcal{M}_{(00)}^{(t)\dagger} \right\rangle = -\frac{16e^4}{ts} \left[ \text{III}(m) + \frac{u^2}{4} \right]. \quad (3.79)$$

### A seção de choque diferencial

Finalmente, com as peças (3.66), (3.74) e (3.79) determinadas, levando-as até (3.54) a seção de choque do espalhamento Bhabha é calculada:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(e\bar{e} \rightarrow e\bar{e}) = \left(\frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2}\right) \left\{ \frac{u^2+t^2}{s^2} + \frac{u^2+s^2}{t^2} + 2\frac{u^2}{ts} + 4\left(\frac{I(m)}{s^2} + \frac{II(m)}{t^2} + 2\frac{III(m)}{ts}\right) \right\}}, \quad (3.80)$$

com  $\alpha = e^2/4\pi$  e  $I(m)$ ,  $II(m)$  e  $III(m)$  dadas respectivamente por (3.65), (3.73) e (3.78).

### O limite ultra-relativístico

O resultado anterior é o caso relativístico, evidenciado pela presença da massa devido aos termos  $I(m)$ ,  $II(m)$  e  $III(m)$ . Entretanto, no limite ultra-relativístico (quando  $m^2 \sim 0$ ) esses três termos são identicamente nulos,

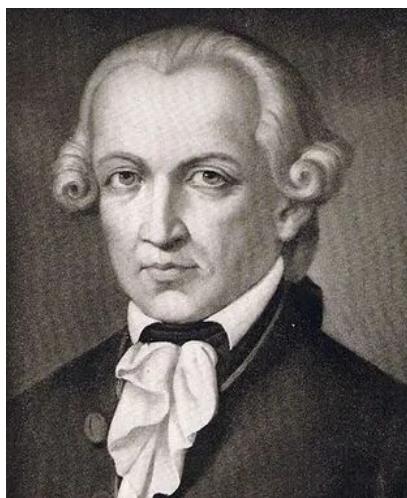
$$I(m) = II(m) = III(m) \approx 0, \quad (3.81)$$

levando-nos a uma expressão mais simplificada da seção de choque fria do espalhamento Bhabha:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(e\bar{e} \rightarrow e\bar{e}) = \left(\frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2}\right) \left\{ \frac{u^2+t^2}{s^2} + \frac{u^2+s^2}{t^2} + 2\frac{u^2}{ts} \right\}}, \quad (3.82)$$

agora com as variáveis de Mandelstam dadas por (2.2).

## Violação da simetria de Lorentz e o modelo padrão estendido



---

*“Ninguém vai à experiência sem antes consultar a teoria.”*

**Immanuel Kant**

**A**s leis da natureza emergem como um substrato de algo mais profundo, mais fundamental. Em verdade, as leis da física (clássicas ou quânticas) acham-se subordinadas aos chamados *princípios de simetria*. Tais princípios garantem que as leis da física sejam verdades *apodíticas*, isto é, que sejam universais e necessárias, caso contrário poderiam mudar com o tempo, o lugar, ou com o gosto de quem as observasse, transformando o universo em um palco de acontecimentos bizarros.

Quatro grupos de simetrias balizam a física: o grupo de Galileu, o de Poincaré, a simetria discreta CPT e por fim as chamadas transformações de calibre. Entretanto, não obstante esse caráter fundamental conferido às transformações invariantes de simetria, parece imprescindível que algumas delas sejam violadas. Como exemplo, temos a violação das transformações de paridade P [95, 96], reversão temporal T e conjugação de carga C, todas no âmbito da física de partículas. É nesse mesmo âmbito que emerge o imprescindível mecanismo da QES [99, 100, 101]. No contexto da matéria condensada temos a conhecida quebra de simetria nos materiais ferromagnéticos e nos supercondutores [90], isso para citar apenas alguns exemplos.

No final da década de 80, a VSL é apresentada no âmbito das teorias de corda [21], e na década seguinte o mecanismo é usado na construção de uma teoria fundamental [27, 28]. Nesse contexto, a unificação é executada mediante extensão: uma teoria construída englobando o MP com a RG por meio da inclusão de todos os possíveis termos de violação de Lorentz e CPT:  $\mathcal{L}_{\text{MPE}} = \mathcal{L}_{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{RG}} + \mathcal{L}_{\text{VSLCPT}}$  [30].

Neste capítulo serão explorados os fundamentos, consequências e alguns resultados da VSL, o chamado MPE e alguns de seus setores. O capítulo é finalizado com o cálculo da seção de choque do processo de espalhamento elétron-pósitron nesse novo contexto.

## 4.1 As assimetrias da natureza

Impor simetria a uma teoria ou modelo significa estabelecer conservação à quantidades de interesse. Em mecânica clássica, da estrutura do grupo de simetria em questão aplicada à ação, como translações, rotações e deslocamentos no tempo, segue-se a conservação do *momentum*, dos *momenta* e da energia, respectivamente. Neste caso, as leis da mecânica não devem mudar frente às transformações de Galileu. Já na mecânica quântica, o princípio de simetria na qual subjazem leis de conservação fica expresso pelo comutador do operador H (que aqui deve ser independente do tempo e representar a energia de um sistema fechado) e um operador hermitiano  $\hat{O}$  (que faz o papel de um observável de interesse),  $[H, \hat{O}] = 0$ , levando a conservação da energia E do sistema. Em teorias de campo é necessário que a ação do modelo seja invariante frente às chamadas transformações de calibre, cuja consequência é a possibilidade de descrição das interações e inclusão de novos graus de liberdade na teoria. Na relatividade, o grupo de simetria que deixa invariante as equações de Maxwell são as transformações de Lorentz, cujas formas não homogêneas compõem-se de três rotações espaciais:  $(\mu, v) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ , três mudanças de velocidade:  $(\mu, v) = (0, 1), (0, 2), (0, 3)$  e quatro translações espaço-temporais:  $a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ . Essas dez transformações não afetam o bilinear:  $x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu$  e, consequentemente, a distância entre dois pontos  $ds^2 = ds'^2$ . Dessa isotropia e homogeneidade do espaço-tempo segue a conservação do 4-momento  $p_\mu$  e 4-momento angular  $L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$ ; uma decorrência imediata do teorema de Noether, a afirmar que “toda transformação de simetria encontra-se associada uma grandeza conservada” [88].

Não obstante os princípios de simetria serem fundamentais na construção das teorias e modelos em

física é surpreendente o fato de que a violação de alguns desses princípios é tão ou mais fundamental que a própria conservação da simetria. De fato, basta notar que toda massa detectável do universo é simplesmente o resultado do importante mecanismo da QES. Sua gênese começa na matéria condensada, no trabalho de P. W. Anderson sobre geração local de massa [92]. Outras influências importantes foram as de Nambu [93, 94] e o de Wu [95]. Esta demonstrou experimentalmente o fenômeno da quebra da paridade nas interações fracas, resultado previsto um ano antes por Lee e Yang [96]. O fato era que a direção preferencial dos elétrons em um decaimento  $\beta$  do cobalto 60 deveria ser a mesma frente uma reflexão de espelho<sup>1</sup>. Entretanto o esperado não aconteceu: os experimentos mostravam inicialmente que os elétrons eram emitidos contrariamente ao spin do núcleo; por outro lado, diante da mesma experiência feita segundo uma reflexão espelho, os elétrons seguiam a mesma direção do spin do núcleo, que agora estava na direção oposta à anterior. Ainda a nível das interações fracas uma outra simetria importante mostrou-se não realizar-se, a helicidade. Esta é definida por  $\Lambda = L \cdot P / |P|$ , que é diferente no decaimento do  $\pi^+$  ( $\pi^+ \rightarrow \nu_\mu + \mu^+$ ) em relação ao decaimento do  $\pi^-$  ( $\pi^- \rightarrow \nu_\mu + \mu^-$ ). A conjugação de carga, operação envolvida aqui, é tal que grandezas como a carga Q e a estranheza S trocam de sinal, mas os momentos lineares P e angulares L preservam-se. Isso deveria apenas trocar o sinal do  $\pi^+$ , transformando-o na sua anti-partícula, deixando  $\Lambda$  invariante. Mas Ducas e seus colaboradores experimentais mostraram exatamente o contrário: a helicidade nos dois casos resultava diferente [97].

Tais trabalhos influenciaram a descoberta do chamado mecanismo da Quebra Espontânea de Simetria por Goldstone, Salam, Weinberg [98], Higgs [99], Kibble e Englert [100], colocando o fenômeno no âmbito de uma teoria mais profunda, o modelo padrão da física de partículas. Na linguagem da teoria de grupos, o MP é escrito na forma de um produto entre três grupos semi-simples  $SU_C(3) \times SU_I(2) \times U_Y(1)$ , com C o índice associado ao número quântico de cor, I de isospin e Y o de hipercarga fraca. À 256 GeV o setor de Higgs quebra a simetria eletrofraca do grupo  $SU_I(2) \times U_Y(1)$  gerando massa para os léptons<sup>2</sup>. A conservação da carga impede que a componente (superior) positiva do dubbleto de Higgs interaja com a componente (superior) do dubbleto de léptons, gerando um modelo onde os neutrinos não apresentam massa<sup>3</sup>. Isso pode ser visto na prescrição de Yukawa dos vértices das interações entre o setor de bósons escalares e o de léptons

$$\mathcal{L}_Y^H = f \bar{L} R \Phi - U(\Phi) = f \left( \overline{\nu_L^l}, \overline{l_L} \right) (e_R) \begin{pmatrix} \phi_{(+)} \\ \phi_{(0)} \end{pmatrix} - U(\Phi), \quad (4.1)$$

com  $f$  a constante de estrutura da teoria e  $\Phi^\dagger = (\phi_{(+)}, \phi_{(0)})$  o dubbleto de escalares.  $\overline{\nu_L^l}$  é qualquer um dos neutrinos de mão esquerda do lepton  $\overline{l_L}$  correspondente ( $\overline{e_L}$ ,  $\overline{\mu_L}$ ,  $\overline{\tau_L}$ ). Como o vértice  $\overline{\nu_L^l} e_R \phi^{(+)}$  viola a conservação da hipercarga, a quebra de simetria ocorre no momento em que, à 256 GeV, por um processo de escolha de calibre unitário, o menor estado de energia do dubbleto de escalares é tomado como sendo

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{(0)} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

A teoria não admite termos ímpares em  $\Phi$ , pois estes violariam tanto a simetria  $U(1)$  quanto a simetria

<sup>1</sup>Reflexão que ocorre quando se executa mudanças discretas nas coordenadas:  $x \rightarrow x$ ,  $y \rightarrow y$ ,  $z \rightarrow -z$ , por exemplo.

<sup>2</sup>Nesse momento, apenas os efeitos eletrodinâmicos quânticos - simetria  $U_E(1)$  de carga elétrica, são perceptíveis:  $SU_I(2) \times U_Y(1) \xrightarrow{256\text{GeV}} U_E(1)$ . Embora o setor de Higgs interaja fracamente com o setor eletromagnético, por correções quânticas também acopla-se a este, fazendo com que o fóton da EDQ surja como uma mistura da simetria anterior via ângulo de Weinberg  $\theta_W$ , da terceira componente da estrutura  $SU_I(2)$  com a componente de  $SU_Y(1)$ . Entretanto, embora interaja com quarks de hadrons distintos, gerando massa para os mesmos, o setor de Higgs, por não incorporar número quântico de cor, não interage com quarks dentro de um mesmo hadron, tendo como consequência a não existência de massa para os glúons.

<sup>3</sup>Massa que, embora muito pequena experimentalmente, é não nula.

discreta  $\phi \rightarrow -\phi$ . Isso impõe a seguinte construção para o potencial de auto-interação

$$U(\Phi) = \frac{1}{2}\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \frac{1}{4}\lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 = \frac{1}{2}\phi_{(0)}^2\left(\frac{\lambda}{2}\phi_{(0)}^2 + \mu^2\right). \quad (4.3)$$

Desde que o termo adimensional  $\lambda$  seja positivo, deixando  $U(\Phi_0)$  crescente e estabilizando-se em dois mínimos, o caminho para o mecanismo da quebra espontânea da simetria fica estabelecido.  $U(\Phi_0)$  não é construído de forma arbitrária, mas pela necessidade de simetria sob transformações de fase e de renormalizabilidade<sup>4</sup>. Dessa forma, o modelo apresenta dois mínimos relativos:  $\eta = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda}$ , e um máximo em  $\phi_{(0)} = 0$ , conforme constata-se ao escrever o potencial em termos do parâmetro  $\eta$

$$U(\phi_{(0)}) = \frac{\lambda}{2}\phi_{(0)}^2\left(\frac{1}{2}\phi_{(0)}^2 - \eta^2\right). \quad (4.4)$$

Entretanto, o resultado acima ainda fornece energia mínima trivial, além de massa negativa ( $\mu^2 < 0$ ), desestabilizando a teoria e gerando estados de tárquions. Uma maneira de contornar esse problema é deslocar o mínimo do potencial através da redefinição do campo  $\phi_{(0)}$  ao redor de sua flutuação:

$$\phi'_{(0)} = \phi_{(0)} + \eta, \quad (4.5)$$

mudando o potencial para

$$U'(\phi_{(0)}) = \frac{\lambda}{4}\phi'^4_{(0)} - \lambda\eta\phi'^3_{(0)} + \lambda\eta^2\phi'^2_{(0)} - \frac{\lambda}{4}\eta^4, \quad (4.6)$$

que não é mais simétrico sob transformações discretas  $\phi'_{(0)} \rightarrow -\phi'_{(0)}$  devido ao termo de ordem três. Entretanto, a massa do Higgs é agora positiva e dada por  $m_\phi = \sqrt{-2\mu^2/\lambda}$  [101]. As massas das outras partículas são expressas, por exemplo, por fatores nos termos de interações quárticas entre os campos envolvidos e que sejam quadráticos no campo de Higgs. No setor escalar tais termos são introduzidos por produtos como  $(D^\mu\Phi_{(0)})^\dagger(D^\mu\Phi_{(0)})$  adicionados às lagrangianas, com

$$D^\mu\Phi_{(0)} = \partial^\mu\Phi_{(0)} - igB_a^\mu\Phi_{(0)}\frac{\sigma^a}{2} - ig'Q_Y Y^\mu\Phi_{(0)}, \quad (4.7)$$

sendo  $\sigma^a$  as matrizes de Pauli,  $B_{\mu a}$  e  $Y_\mu$  os campos de calibre,  $Q_Y$  a hipercarga fraca,  $g$  e  $g'$  as constantes de acoplamento e  $\Phi_{(0)}$  dado por (4.2). Selecionando algumas peças do produto tais como  $g^2 B_{\mu a} \phi_{(0)} \frac{\sigma^a}{2} B^{\mu a} \sigma_a \phi_{(0)}$  e  $g'^2 Q_Y Y_\mu \phi_{(0)} Q_Y Y^\mu \phi_{(0)}$ , com a flutuação do campo  $\phi_{(0)}$  ao redor de seu vácuo não trivial  $\eta$ , identifica-se os termos de massa associados aos bósons vetoriais:

$$g^2\eta^2 B_{\mu a}\frac{\sigma^a}{2}B^{\mu a}\sigma_a, \text{ e } g'^2\eta^2 Q_Y Y_\mu Q_Y Y^\mu, \quad (4.8)$$

com  $m_B = (g\eta)^2$  e  $m_Y = (g'\eta)^2$  as massas positivas dos bósons  $B_\mu$  e  $Y_\mu$  (lembando que  $\mu^2 < 0$ ).

Esse é um exemplo de como a violação de uma simetria é capaz de produzir resultados surpreendentes. No caso acima, é como se a simetria, ao quebrar-se, permanecesse escondida na forma dos parâmetros gerados, compondo as massas das partículas. É por esses motivo que usa-se, muitas vezes, o termo “simetria escondida” ao invés de “simetria quebrada”.

---

<sup>4</sup>Motivo pela qual se diz que a escala de massa  $\mu^2$  da teoria ser gerada espontaneamente, e não de forma *ad hoc*.

## 4.2 A violação da simetria de Lorentz

A ideia fundamental por trás da VSL é que ela ocorre devido à existência de um campo tensorial de fundo. Apresentaremos agora esse mecanismo através de dois exemplos: o primeiro trás a quebra da covariância de Lorentz quando uma partícula carregada encontra-se na presença de um campo elétrico uniforme [90, 91]; e o segundo é uma breve exposição do mecanismo no âmbito das teorias de corda [21].

### Quebra da covariância de Lorentz na presença de um campo constante

Seja  $S$  um sistema de referência em repouso em relação a um campo elétrico de fundo e constante,  $\mathbf{E}$ . Nesse referencial o campo medido será justamente  $\mathbf{E}$ . Por outro lado, num referencial  $S'$  movendo-se relativamente a  $S$  com velocidade constante  $\mathbf{u}$ , além do novo campo  $\mathbf{E}'$  será medido um campo magnético  $\mathbf{B}'$  transversos à velocidade  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{E}' = \gamma \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{E}', \quad (4.9)$$

com  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ . Essas duas equações indicam que, sob o ponto de vista do observador o campo eletromagnético segue uma lei de transformação tensorial (ou covariante).

Seja agora um elétron que se move com velocidade  $\mathbf{u}$  medida a partir do mesmo referencial  $S$  anterior, isto é, em repouso em relação ao campo de fundo  $\mathbf{E}$ . Ao aplicar-se um “empurrão” sobre a partícula (ou, equivalentemente, “mover” os pontos do espaço por uma velocidade  $-\mathbf{v}$ ) não haverá mudança alguma no campo elétrico:  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ . Isto é, o campo elétrico comporta-se como um escalar. É possível mostrar que

$$\delta E = E'(x) - E(x) = \left( \frac{x}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + ct \frac{\partial E}{\partial x} \right) \delta \alpha, \quad (4.10)$$

sendo  $\delta \alpha$  um pequeno ângulo de desvio decorrente da transformação. Esse resultado leva à conclusão de que, do ponto de vista do observador o campo eletromagnético comporta-se como um tensor, mas, do ponto de vista da partícula ele comporta-se como um escalar. Isso significa que a covariância foi espontaneamente quebrada na presença de um campo tensorial de fundo no momento em que a partícula foi submetida a uma transformação de Lorentz<sup>5</sup>. Nota-se ainda que, do ponto de vista do observador em  $S$  o elétron move-se com velocidade  $\mathbf{u}$ , portanto, com deslocamento  $\mathbf{D} = \mathbf{u}\Delta t$ ; e que, depois do “empurrão” sua velocidade diminui para  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ , deslocando-se uma distância  $\mathbf{d} = (\mathbf{u} - \mathbf{v})\Delta t$ .

### Violão de Lorentz no âmbito das teorias de corda

O mecanismo da VSL foi proposto, no âmbito das teorias de corda, no trabalho de Kostelecky e Samuel em 1989 [21]<sup>6</sup>. Segundo eles, a existência de campos tensoriais de fundo acoplados a campos escalares podia gerar valores quadráticos para as massas negativas, desestabilizando o modelo e quebrando espontaneamente a simetria de Lorentz. Para os autores a violação da simetria de Lorentz 10-dimensional era a própria resposta para a compactificação de 6 das 10 dimensões [21].

Consideremos o potencial independente do tempo da teoria de corda de Witten até segunda ordem no campo tensorial de fundo  $\mathbf{T}$ :

$$\mathfrak{V}(S^i, \mathbf{T}^j) = \frac{1}{2} m_{ij}^2 S^i S^j + \frac{1}{2} M_{ij}^2 \mathbf{T}^i \mathbf{T}^j + \frac{1}{3!} \sum_k g_{ijk} S^i S^j S^k + \frac{1}{2} \sum_k h_{ijk} S^i \mathbf{T}^j \mathbf{T}^k, \quad (4.11)$$

<sup>5</sup>Também chamada de transformação ativa, em contraste com a transformação passiva, a do observador. Para uma leitura didática e detalhada sobre a violação de Lorentz veja as referências [90, 91].

<sup>6</sup>Além de uma teoria unificada, os autores buscavam também uma resposta para o problema da compactificação dimensional.

com  $S^i$  conjuntos de campos escalares,  $g_{ijk}$  e  $h_{ijk}$  as constantes de acoplamento e  $m_{ijk}^2$  e  $M_{ijk}^2$  os termos quadráticos sobre os elementos de massa dos campos associados. A variação desse potencial em relação ao campo de Lorentz fornece

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{V}}{dT^i} &= \frac{1}{2}M_{ij}^2 \left\{ \mathbf{T}^i \frac{d\mathbf{T}^j}{dT^i} + \mathbf{T}^i \frac{d\mathbf{T}^j}{dT^i} \right\} + \frac{1}{2} \sum_k h_{ijk} S^i \left\{ \mathbf{T}^j \frac{d\mathbf{T}^k}{dT^i} + \mathbf{T}^k \frac{d\mathbf{T}^j}{dT^i} \right\} = M_{ij}^2 \mathbf{T}^j + \frac{1}{2} \sum_k h_{ijk} \left\{ S^k \mathbf{T}^j + S^j \mathbf{T}^k \right\}, \\ &= \left\{ M_{ij}^2 + \sum_k h_{ijk} S^k \right\} \mathbf{T}^j,\end{aligned}\quad (4.12)$$

a partir da qual se extrai o valor esperado do termo quadrático da massa do campo  $\mathbf{T}^i$ :

$$\mathfrak{M}_{ij}^2 = \left\langle 0 \left| M_{ij}^2 + \sum_k h_{ijk} S^k \right| 0 \right\rangle = M_{ij}^2 + \sum_k h_{ijk} \left\langle S^k \right\rangle. \quad (4.13)$$

Como se nota, esse resultado pode não ser positivo definido. De fato, agora há a possibilidade da existência de valores esperados negativos para o campo escalar,

$$\sum_k h_{ijk} \left\langle S^k \right\rangle = \sum_k h_{ijk} \left\langle 0 \left| S^k \right| 0 \right\rangle < 0, \quad (4.14)$$

gerando autovalores negativos para  $\mathfrak{M}_{ij}^2$ , desestabilizando a teoria e quebrando espontaneamente a simetria de Lorentz.

### 4.3 O modelo padrão estendido

Tendo então sua gênese no âmbito das teorias de cordas, o chamado Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma construção teórica baseada no mecanismo da VSL. Tal mecanismo pode ser acionado de dois modos: (*i*) com termos que violam diretamente a simetria de Lorentz, ou (*ii*) com termos que violam a simetria CPT. O segundo modo está diretamente associado ao teorema CPT: “*Toda teoria de campo local e relativística é invariante pela transformação combinada CPT.*” Como um corolário desse teorema, a Violação da Simetria CPT (VSCPT) implica a VSL (muito embora esta não implique aquela). Isso significa que qualquer detecção da violação CPT seria o indício de uma teoria além do MP; uma teoria quântica de campos unificada por VSL conhecida como Modelo Padrão Estendido (MPE). A lagrangeana desse modelo é composto pelo MP ( $\mathcal{L}_{\text{MP}}$ ), pela RG ( $\mathcal{L}_{\text{RG}}$ ) adicionados de todos os possíveis termos de violação ( $\mathcal{L}_{\text{VSL}}$ ),

$$\mathcal{L}_{\text{MPE}} = \mathcal{L}_{\text{MP}} + \mathcal{L}_{\text{RG}} + \mathcal{L}_{\text{VSL}}. \quad (4.15)$$

Trata-se da teoria mais fundamental da qual dispomos, uma teoria que contempla uma descrição, embora não unificada, é a mais completa<sup>7</sup>. A partir das baixas energias, por onde se acessa o MP e a RG, à medida que se aproxima da escala de energias de Planck a simetria de Lorentz é espontaneamente quebrada pela presença de tensores de Lorentz, como vimos na seção anterior.

De modo geral, os termos de acoplamento contidos na lagrangeana  $\mathcal{L}_{\text{VSL}}$  tomam a forma  $\lambda \mathbf{K}_L \mathbf{C}_F^i \mathbf{M} \mathbf{D}_j^{(n)} \mathbf{C}_F^j$ , com  $\mathbf{C}_F^i$   $i$ -campos físicos,  $\mathbf{D}_j^{(n)}$  possíveis derivadas de ordem  $n$ ,  $\mathbf{M}$  certas matrizes,  $\lambda$  a constante de acoplamento e  $\mathbf{K}_L$  um dado campo de Lorentz. Existem dois modos de acionamento do mecanismo: a forma espontânea e a explícita. No primeiro caso os termos de VSL são escritos na lagrangeana de modo a afetar os propagadores da teoria [27, 28]. É o caso do setor de puro-fóton estendido na qual os tensores de

<sup>7</sup>Mesmo aqui no MPE o setor da gravidade continua não renormalizável.

Lorentz são acoplados ao campo de calibre. A outra maneira é introduzi-los como termos não-mínimos nas derivadas covariantes, dados basicamente por parcelas da forma geral [32, 37]

$$\lambda \mathbf{K}_L M C_F. \quad (4.16)$$

No primeiro caso, além de guardar todas as características da sua versão a baixas energias, como micro causalidade, positividade da energia, conservação da energia e momento, hermiticidade, quantização convencional, invariância de Lorentz (do observador) e invariância de calibre, é renormalizável por contagem de potência. Isso decorre do fato da quebra de simetria ocorrer espontaneamente. No segundo caso, a violação de Lorentz é introduzida via derivada covariante não-mínima, fornecendo um modelo estendido que, embora não renormalizável por contagem de potência (por conta do parâmetro de violação ter unidade de massa) apresenta todas as grandezas de interesse calculadas satisfatoriamente à nível de árvore. Esse parâmetro é muito pequeno e em geral abaixo do limite superior de

$$|\lambda \mathbf{K}_L| \sim 10^{-12} (eV)^{-1}, \quad (4.17)$$

motivo pela qual essa não renormalizabilidade não constituir uma falha grave da teoria, uma vez que a mesma é compreendida como sendo a versão à baixas energias de sua versão unificada. Como esse parâmetro de violação é muito pequeno, termos nas seções de choque de ordens maiores que dois na constante de acoplamento  $\lambda$  são desconsiderados. Uma descrição detalhada dos limites e restrições desses parâmetros de violação pode ser vista em [26]<sup>8</sup>.

A inclusão de termos de VSL e de VSLCPT é capaz de produzir contribuições de vértices adicionais proporcionais ao parâmetro de violação  $|\lambda \mathbf{K}_L|$ . Por exemplo, no setor de férmiões, além dos vértices convencionais (Figura D.1a) aparecerão também contribuições associadas à quebra de simetria (Figura D.1b), gerando, à nível de árvore, gráficos adicionais (Figura D.1c).

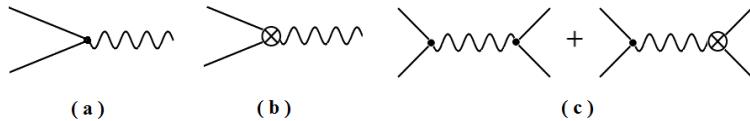


Figura 4.1: Vértices: (a) EDQ convencional (construído com vértices  $-ie\gamma^\mu \equiv \bullet <$ ) e (b) com contribuição de violação de Lorentz (vértices  $\otimes <$ ). Em (c) mostra-se um típico processo com a contribuição advinda da violação de Lorentz e/ou de CPT.

## O setor fermiônico estendido

Como exemplo, o setor de férmiões do MPE é representado pela seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{Est.}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{VSL}}, \quad (4.18)$$

na qual

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \overline{\Psi} \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \Psi, \quad (4.19)$$

fornecerá as informações referentes a eletrodinâmica de Dirac padrão sem interação, com  $\gamma^s$  e  $\sigma^{s'}$  as matrizes de Dirac e de Pauli, respectivamente. A contribuição de VSL virá de

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{VSL}} = \overline{\Psi} \left\{ i \left[ e^\mu + if^\mu + (c^{\mu\nu} + d^{\mu\nu}\gamma_5)\gamma_\nu + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu\nu}\sigma_{\lambda\nu} \right] \partial_\mu - \left[ (a^\mu + b^\mu\gamma_5)\gamma_\mu + \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \right] \right\} \Psi. \quad (4.20)$$

Nessa equação os tensores  $c^{\mu\nu}$ ,  $d^{\mu\nu}$ ,  $e^\mu$  e  $f^\mu$  são coeficientes adimensionais, enquanto que  $a^\mu$ ,  $b^\mu$  e  $h^{\mu\nu}$  são coeficientes com dimensão de massa. (4.18) pode ser reescrita simplesmente como

<sup>8</sup>Cuja versão atualizada encontra-se disponível em: <https://arxiv.org/abs/0801.0287v14>.

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{\text{Est.}} = \bar{\Psi} \left( i \Gamma_{(\varepsilon)}^\mu \partial_\mu - \mathcal{M} \right) \Psi, \quad (4.21)$$

sendo, agora

$$\Gamma_{(\varepsilon)}^\mu = \gamma^\mu + \varepsilon V^\mu, \quad (4.22)$$

e

$$V^\mu = e^\mu + i f^\mu + (c^{\mu\nu} + d^{\mu\nu} \gamma_5) \gamma_\nu + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu\nu} \sigma_{\lambda\nu}, \quad (4.23)$$

com  $\varepsilon = 0, 1$  (0 para o vértice usual e 1 quando com violação de Lorentz). Aqui a violação também afetará a massa dos fermions

$$\mathcal{M} = m + \varepsilon \left[ (a^\mu + b^\mu \gamma_5) \gamma_\mu + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right]. \quad (4.24)$$

### O setor de puro fóton

Neste caso a extensão é construída mediante violação de CPT. Por conseguinte aparecem aqui dois subsetores: um CPT-par e outro CPT-ímpar. O acoplamento via CPT-par é construído através de um campo tensorial de fundo de rank 4:

$$\mathcal{L}_{\text{EM}}^{\text{CPT}(+)} = -\frac{1}{4} K_{\lambda\mu\nu\alpha} F^{\lambda\mu} F^{\nu\alpha}, \quad (4.25)$$

com  $K_{\lambda\mu\nu\alpha}$  constante e real. Este tensor carrega as mesmas propriedades de simetria do tensor de Riemann, isto é:

$$K_{\lambda\mu\nu\alpha} = -K_{\mu\lambda\nu\alpha}; \quad K_{\lambda\mu\nu\alpha} = -K_{\lambda\mu\alpha\nu}. \quad (4.26)$$

Outra característica desse tensor é que ele apresenta traço duplo nulo:

$$K_{\mu\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.27)$$

o que diminui para 19 o número de componentes independentes. O subsetor ímpar, por outro lado, é representado pelo termo

$$\mathcal{L}_{\text{EM}}^{\text{CPT}(-)} = \frac{1}{4} b^\lambda \epsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} A^\mu F^{\nu\alpha}. \quad (4.28)$$

Dessa forma, com (4.25), (4.28) e adicionando a lagrangeana convencional do fóton  $\mathcal{L}_{\text{EM}}$ , temos

$$\mathcal{L}_{\text{EM}}^{\text{Est.}} = \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{EM}}^{\text{CPT}(-)} + \mathcal{L}_{\text{EM}}^{\text{CPT}(+)} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} b^\lambda \epsilon_{\lambda\mu\nu\alpha} A^\mu F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4} K_{\lambda\mu\nu\alpha} F^{\lambda\mu} F^{\nu\alpha}. \quad (4.29)$$

Assim, define-se a lagrangeana do setor de puro fóton estendido.

## 4.4 VSL via acoplamento não mínimo

Como já dissemos, a VSL também pode ser introduzida via termos adicionais nas derivadas covariantes como termos não-mínimos [32, 37, 77]. Neste caso, ocorre simultaneamente a violação explícita de Lorentz e de CPT (VSLCPT). Com efeito, teremos um subsetor CPT-ímpar, com termo não-mínimo dado por  $i g b^\nu \tilde{F}_{\mu\nu}$  [77], e um subsetor CPT-par, com termo não-mínimo escrito como  $\frac{\lambda}{2} K_{\mu\nu\theta\rho} \gamma^\nu F^{\theta\rho}$  [32, 37]. Com  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$  o tensor eletromagnético dual, essas novas derivadas serão dadas respectivamente por

$$\mathcal{D}_\mu^{\text{CPT}(-)} := \partial_\mu + i e A_\mu + g b^\nu \tilde{F}_{\nu\mu} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_\mu^{\text{CPT}(+)} := \partial_\mu + i e A_\mu + \frac{\lambda}{2} K_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu F^{\alpha\beta}, \quad (4.30)$$

sendo  $g$  e  $\lambda$  as constantes de acoplamento. Essas derivadas levam a novas interações: para o caso CPT-ímpar

$$\mathcal{L}_{\text{ED}}^{\text{CPT}(-)} = -g b^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \partial^\alpha A^\beta, \quad (4.31)$$

e para o CPT-par:

$$\mathcal{L}_{\text{ED}}^{\text{CPT}(+)} = \frac{\lambda}{2} K_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi F^{\alpha\beta}. \quad (4.32)$$

Usando a escrita simplificada dada em (1.12) as respectivas modificações produzidas no setor da eletrodinâmica padrão ficarão como se seguem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ED}}^{\text{Est.}(-)} &= -\frac{1}{4} F^2 - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu - m \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{2\zeta} (\partial A)^2 - g b^\nu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \partial^\alpha A_\beta = \bar{\Psi} \left( \mathcal{D}_\mu^{\text{CPT-impar}} - m \right) \Psi + \\ &\quad -\frac{1}{4} F^2 - \frac{1}{2\zeta} (\partial A)^2; \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ED}}^{\text{Est.}(+)} &= -\frac{1}{4} F^2 - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu - m \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{2\zeta} (\partial A)^2 + -\frac{\lambda}{2} K_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi F^{\alpha\beta} = \bar{\Psi} \left( \mathcal{D}_\mu^{\text{CPT-par}} - m \right) \Psi + \\ &\quad -\frac{1}{4} F^2 - \frac{1}{2\zeta} (\partial A)^2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

com  $\zeta$  o parâmetro de calibre.

## O setor CPT-par

Uma vez que estamos interessados em interações fermiônicas construídas a partir da violação CPT-par [22, 32], vamos extrair aqui as equações dos vértices que emergem do termo de interação (4.32). Notemos que o tensor de Lorentz  $K_{\mu\nu\alpha\beta}$  pode ser reescrito em termos do tensor métrico  $g^{\mu\nu}$  e de um novo tensor de segunda ordem, a saber,  $g_{\alpha\lambda} K^{\lambda\mu\nu} = K_\alpha^{\mu\nu}$ . Fazendo-se  $\gamma = \alpha$ , tem-se [32]

$$K_\alpha^{\mu\alpha\nu} = K^{\mu\nu}. \quad (4.35)$$

Esse novo tensor é completamente simétrico na troca de seus índices:

$$K^{\mu\nu} = K^{\nu\mu}. \quad (4.36)$$

Dessa forma, segundo a referência [22],  $K_{\mu\nu\alpha\beta}$  pode ainda ser reescrito como

$$K_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ g_{\mu\alpha} K_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha} K_{\mu\beta} + g_{\nu\beta} K_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta} K_{\nu\alpha} \right]. \quad (4.37)$$

Com este último resultado, notando-se ainda que  $F^{\alpha\beta} = 2q^\alpha A^\beta$  (com  $q^\alpha$  o 4-momento do fóton) o termo de interação (4.32) pode ser desenvolvido como se segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ED}}^{\text{CPT-par}} &= \frac{\lambda}{2} K_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ g_{\mu\alpha} K_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha} K_{\mu\beta} + g_{\nu\beta} K_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta} K_{\nu\alpha} \right] \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi \cdot 2q^\alpha A^\beta \\ &= \frac{\lambda}{2} \left[ g_{\mu\alpha} \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha} \sigma^{\mu\nu} K_{\mu\beta} + g_{\nu\beta} \sigma^{\mu\nu} K_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta} \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\alpha} \right] q^\alpha A^\beta \bar{\Psi} \Psi \\ &= \frac{\lambda}{2} \left[ \sigma_\alpha^\nu K_{\nu\beta} - \sigma_\alpha^\mu K_{\mu\beta} + \sigma_\beta^\mu K_{\mu\alpha} - \sigma_\beta^\nu K_{\nu\alpha} \right] q^\alpha A^\beta \bar{\Psi} \Psi. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Extraindo uma métrica em cada termo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ED}}^{\text{CPT-par}} &= \frac{\lambda}{2} \left[ g_{\beta\lambda} \sigma^{\lambda\nu} K_{\nu\alpha} - g_{\beta\lambda} \sigma^{\mu\lambda} K_{\mu\alpha} + g_{\alpha\lambda} \sigma^{\mu\lambda} K_{\mu\alpha} g_{\alpha\lambda} \sigma^{\lambda\nu} K_{\nu\beta} \right] q^\beta A^\alpha \bar{\Psi} \Psi \\ &= \frac{\lambda}{2} \left[ g_{\beta\mu} q^\beta A^\alpha \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\alpha} - g_{\beta\nu} q^\beta A^\alpha \sigma^{\mu\nu} K_{\mu\alpha} + g_{\alpha\nu} q^\beta A^\alpha \sigma^{\mu\nu} K_{\mu\beta} - g_{\alpha\mu} q^\beta A^\alpha \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta} \right] \bar{\Psi} \Psi \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda}{2} \left[ \overbrace{q_\mu A^\alpha \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\alpha} - q_\nu A^\alpha \sigma^{\mu\nu} K_{\mu\alpha}}^{\text{I}} + \overbrace{q^\beta A_\nu \sigma^{\mu\nu} K_{\mu\beta} - q^\beta A_\mu \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta}}^{\text{II}} \right] \bar{\Psi} \Psi. \quad (4.39)$$

Com um pouco de álgebra, utilizando a anti-simetria das matrizes  $\sigma$ , vamos calcular cada um desses termos. Primeiramente

$$\begin{aligned} \text{I} &= q_\mu A^\alpha \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\alpha} - q_\nu A^\alpha \sigma^{\mu\nu} K_{\mu\alpha} = q^\mu A_\alpha \sigma_{\mu\nu} K^{\nu\alpha} - q^\nu A_\alpha \sigma_{\mu\nu} K^{\mu\alpha} \\ &= q^\beta A_\alpha \sigma_{\beta\nu} K^{\nu\alpha} - q^\beta A_\alpha \sigma_{\mu\beta} K^{\mu\alpha} = q^\beta A_\alpha \sigma_{\beta\nu} K^{\nu\alpha} - q^\beta A_\alpha (-\sigma_{\beta\mu}) K^{\mu\alpha} \\ &= 2q^\beta \sigma_{\beta\nu} K^{\nu\alpha} A_\alpha \\ &= 2q^\beta \sigma_{\beta\nu} K^{\nu\mu} A_\mu; \end{aligned} \quad (4.40)$$

e em seguida o termo II

$$\begin{aligned} \text{II} &= q^\beta A_\nu \sigma^{\mu\nu} K_{\mu\beta} - q^\beta A_\mu \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta} = q^\beta A_\mu \sigma^{\nu\mu} K_{\nu\beta} - q^\beta A_\mu \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta} \\ &= q^\beta (\sigma^{\nu\mu} K_{\nu\beta} - \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta}) A_\mu = q^\beta ((-\sigma^{\mu\nu}) K_{\nu\beta} - \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta}) A_\mu \\ &= -2q^\beta \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta} A_\mu. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Retornando-as em (4.39), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ED}}^{\text{CPT-par}} &= \frac{\lambda}{2} K_{\mu\nu\alpha\beta} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi F^{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{2} (2q^\beta \sigma_{\beta\nu} K^{\nu\mu} A_\mu - 2q^\beta \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta} A_\mu) \bar{\Psi} \Psi \\ &= \lambda q^\beta (\sigma_{\beta\nu} K^{\nu\mu} - \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta}) A_\mu \bar{\Psi} \Psi, \end{aligned} \quad (4.42)$$

a partir da qual se extrai o vértice da interação

$$\Gamma_{(1)}^\mu = \lambda V^\mu = \lambda q^\beta (\sigma_{\beta\nu} K^{\nu\mu} - \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta}). \quad (4.43)$$

Calculemos agora cada uma das  $\nu = 0, i$  componentes desse tensor. Para  $\mu = 0$ , considerando que a interação entre os férmions  $\bar{\Psi}$  e  $\Psi$  se dá no referencial no centro de massa (implicando  $q^0 = \sqrt{s}$  a energia do centro de massa e que  $q^i = 0$ ) é imediato que

$$V^0 = 0. \quad (4.44)$$

Por outro lado, para as componentes espaciais, tem-se

$$\begin{aligned} V^i &= q^\beta (K^{\nu i} \sigma_{\beta\nu} - K_{\nu\beta} \sigma^{i\nu}) = q^0 (K^{\nu i} \sigma_{0\nu} - K_{00} \sigma^{i\nu}) + q^i (K^{\nu j} \sigma_{j\nu} - K_{\nu j} \sigma^{j\nu}) \\ &= q^0 (K^{0i} \sigma_{00} - K_{00} \sigma^{i0}) + q^0 (K^{ji} \sigma_{0j} - K_{j0} \sigma^{ij}) \\ &= \sqrt{s} \left[ -K_{00} (-\sigma^{0i}) + K^{ij} (-\sigma_{j0}) - (+K_{0j}) \sigma^{ij} \right] \\ &= \sqrt{s} (K_{00} \sigma^{0i} - K^{ji} \sigma_{j0} - K_{0j} \sigma^{ij}), \end{aligned} \quad (4.45)$$

e que, de acordo com [22, 32] cada uma das três componentes acima representam subsetores internos à paridade CPT-par, a saber, ( $i$ ) o subsetor construído com as componentes isotrópicas de paridade CPT-par  $K_{tr}$  de mesmo tamanho, com  $i = 1, 2, 3$ :

$$K^{ii} = K^{00} = \frac{3}{2} K_{tr}; \quad (4.46)$$

(ii) componentes anisotrópicas de paridade CPT-par de tamanhos distintos:

$$K^{ij} = \frac{1}{2} K_{\text{tr}} \delta^{ij} - (K_e)^{ij}, \quad (4.47)$$

sendo  $(K_e)^{ij}$  uma componente anisotrópica de paridade CPT-par; e (iii) componentes de paridade CPT-ímpar:

$$K^{0i} = -K^i. \quad (4.48)$$

Dessa forma, a parte não nula do vértice CPT-par será

$$\Gamma^i = \lambda V^i = \lambda \left( V_{\text{is}(+)}^i + V_{\text{an}(+)}^i + V_{\text{imp}}^i \right), \quad (4.49)$$

com (i) coeficiente isotrópico de paridade par, (ii) coeficiente anisotrópico de paridade par, e (iii) coeficiente de paridade ímpar, nessa sequência<sup>9</sup>:

$$(i) \quad \Gamma_{\text{is}(+)}^i = \sqrt{s} \lambda K_{00} \sigma^{0i}; \quad (ii) \quad \Gamma_{\text{an}(+)}^i = -\sqrt{s} \lambda K^{ij} \sigma_{0j}; \quad (iii) \quad \Gamma_{\text{imp}}^i = \sqrt{s} \lambda K_j \sigma^{ij}. \quad (4.50)$$

## 4.5 O espalhamento elétron-pósitron CPT-par

### Violão CPT-par na eletrodinâmica quântica

No que se segue, mostraremos como a violão de CPT pode interferir na seção de choque do espalhamento elétron-pósitron (Figura 4.2), interação esta que, juntamente com o espalhamento Bhabha, representam os dois mais importantes processos de interação da Eletrodinâmica Quântica (EDQ) [2, 35, 36, 88]. Na referência [32], os autores calcularam a seção de choque do espalhamento elétron-pósitron levando em conta uma violão do tipo CPT-par, enquanto que em [77, 78] os pesquisadores determinaram a seção de choque do espalhamento Bhabha levando-se em conta o setor ímpar da violão CPT.

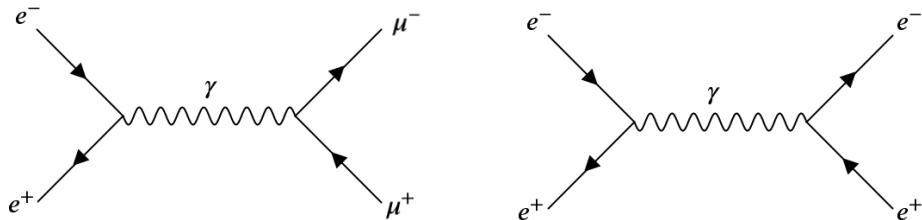


Figura 4.2: Diagramas dos espalhamentos elétron-pósitron e Bhabha.

### A contribuição CPT-par

Antes de iniciarmos o cálculo da amplitude de espelhamento  $\mathcal{M}$ , devemos introduzir os efeitos da violão da simetria de Lorentz via quebra CPT-par. Neste caso, todo o desenvolvimento deve se dar incluindo as contribuições de vértices dadas em (4.50). Vamos nomear o vértice de modo geral tal que

$$\Gamma_{(a)}^\mu = \left( \Gamma_{(0)}^\mu, \Gamma_{(1)}^\mu \right), \quad (4.51)$$

com  $a = 0, 1$  o índice que se refere ao tipo de vértice, de modo que

$$\Gamma_{(0)}^\mu = -ie\gamma^\mu, \quad (4.52)$$

<sup>9</sup>Mais detalhes de cada um desses termos encontram-se em [23, 25].

representa a contribuição de vértice convencional da EDQ, e

$$\Gamma_{(1)}^\mu = -\imath \lambda V^\mu, \quad (4.53)$$

as contribuições advindas da violação CPT-par, lembrando que  $V^0 = 0$  e  $V^i$  é qualquer uma das componentes dadas em (4.49).

## O modelo

A lagrangeana que descreve processos no setor fermiônico com violação de Lorentz CPT-par é dada pela equação (4.33). Tomando apenas a parte de interação:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}^{(1)} = \bar{\Psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu^{\text{CPT}(+)} \Psi = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu \Psi - \lambda \bar{\Psi} V^\mu A_\mu \Psi. \quad (4.54)$$

### Componente de paridade ímpar

Vamos iniciar os cálculos considerando a componente de paridade ímpar listada em (4.50) e embutida em (4.51):

$$\Gamma_{(1)}^i = \sqrt{s} \lambda K_j \sigma^{ij}, \quad (4.55)$$

sendo  $K_j$  as componentes do tensor de Lorentz e  $\sigma_{ij}$  a matriz de Pauli. Com a ajuda das regras de Feynman extraídas a partir da Figura 4.2, a amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}$  para a interação elétron-pósitron pode ser escrita como [2, 35, 36, 88]

$$\mathcal{M}_\lambda = \sum_{a,b} \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \frac{1}{q^2} \bar{u}(1') \Gamma_{\mu(b)} v(2'), \quad (4.56)$$

sobre a qual usamos a forma simplificada de se escrever os spinores:  $u(i) \equiv u(p_i, s_i)$ ;  $\bar{u}(i) \equiv \bar{u}(p_i, s_i)$ ;  $v(i) \equiv v(p_i, s_i)$ ;  $\bar{v}(i) \equiv \bar{v}(p_i, s_i)$ , com  $s_i$  as variáveis de spin (para  $i = 1, 2, 1', 2'$ ). Enquanto  $u$  e  $\bar{u}$  se referem a um férnion incidente e um emergente, respectivamente; para o caso de anti-férnions entrando e saindo teremos  $\bar{v}$  e  $v$ , nessa sequência. Para fótons entrando e saindo tem-se  $\epsilon_\mu$  e  $\epsilon_\mu^*$ , nessa ordem. Notando-se que

$$(\bar{v} \gamma^\mu u)^* = u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger (\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 v = u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu = \bar{u} \gamma^\mu v$$

o conjugado de (4.56) é obtido:

$$\mathcal{M}_\lambda^* = \sum_{a,b} \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(2) \frac{1}{q^2} \bar{v}(2') \Gamma_{\mu(b)}^u u(1'), \quad (4.57)$$

fornecendo-nos

$$\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{4q^2} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \bar{u}(1') \Gamma_{\mu(b)} v(2') \bar{u}(1) \Gamma_{(c)}^v v(2) \bar{v}(2') \Gamma_{v(d)} u(1'). \quad (4.58)$$

Usando o truque de Casimir em (3.12), pode-se escrever (4.58) da seguinte forma

$$\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{4q^4} \mathbb{E}_T^{\mu\nu} \mathbb{M}_{\mu\nu}^T, \quad (4.59)$$

com  $t_r$  o operador traço sobre as matrizes de Dirac, sendo

$$\mathbb{E}_T^{\mu\nu} = \sum_{a,b} \sum_{\text{Spin}} t_r \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \bar{u}(1) \bar{\Gamma}_{(b)}^v v(2) \bar{v}(2) \right\} = \sum_{a,b} t_r \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu \left( \sum_{s_1} u(1) \bar{u}(1) \right) \bar{\Gamma}_{(b)}^v \left( \sum_{s_2} v(2) \bar{v}(2) \right) \right\}. \quad (4.60)$$

Usando agora as relações de completeza em (3.13) tem-se

$$\mathbb{E}_T^{\mu\nu} = \sum_{a,b} \mathbb{E}_{(ab)}^{\mu\nu}, \quad (4.61)$$

sendo, agora

$$\mathbb{E}_{(ab)}^{\mu\nu} = t_r \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu (p_1 + m_e) \bar{\Gamma}_{(b)}^\nu (p_2 + m_e) \right\}. \quad (4.62)$$

Usando novamente (3.12) e (3.13) calcula-se o fator muônico  $\mathbb{M}_T^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_T^{\mu\nu} &= \sum_{c,d} \sum_{\text{Spin}} t_r \left[ \Gamma_{(a)}^\mu u(1') \bar{u}(1') \bar{\Gamma}_{(b)}^\nu v(2') \bar{v}(2') \right] = \sum_{c,d} t_r \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu \left( \sum_{s'_1} u(1') \bar{u}(1') \right) \bar{\Gamma}_{(b)}^\nu \left( \sum_{s'_2} v(2') \bar{v}(2') \right) \right\} \\ &= \sum_{c,d} \mathbb{M}_{(cd)}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

com

$$\mathbb{M}_{(cd)}^{\mu\nu} = t_r \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu (p_1 + m_e) \bar{\Gamma}_{(b)}^\nu (p_2 - m_\mu) \right\}. \quad (4.64)$$

Levando-se em consideração o referencial do centro de massa, tal que  $q^2 = q_\beta q^\beta = s$ , ao executar-se as somas sobre os índices de vértice  $a, b, c$  e  $d$ , teremos

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_\lambda|^2 \rangle &= \frac{1}{4q^4} \mathbb{E}_T^{\mu\nu} \mathbb{M}_{\mu\nu}^T = \frac{1}{4s^2} \sum_{a,b} \mathbb{E}_{(ab)}^{\mu\nu} \sum_{c,d} \mathbb{M}_{(cd)\mu\nu} = \frac{1}{4s^2} \left\{ \mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} (\mathbb{M}_{(00)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(01)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(10)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(11)}^{\mu\nu}) \right. \\ &\quad + \mathbb{E}_{01}^{\mu\nu} (\mathbb{M}_{(00)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(01)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(10)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(11)}^{\mu\nu}) + \mathbb{E}_{10}^{\mu\nu} (\mathbb{M}_{(00)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(01)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(10)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(11)}^{\mu\nu}) + \\ &\quad \left. + \mathbb{E}_{11}^{\mu\nu} (\mathbb{M}_{(00)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(01)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(10)}^{\mu\nu} + \mathbb{M}_{(11)}^{\mu\nu}) \right\}, \end{aligned}$$

com  $q^4 = s^2$ . Executando-se cálculos auxiliares, usando-se as equações para os vértices dadas em (4.52) e (4.53):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(01)}^{\mu\nu} &= t_r \left\{ \Gamma_{(0)}^\mu (p_1 + m_e) \bar{\Gamma}_{(1)}^\nu (p_2 + m_e) \right\} \\ &= -ie\lambda t_r \left\{ \gamma^\mu p_1 V^\nu p_2 + \gamma^\mu p_1 V^\nu m_e + \gamma^\mu V^\nu p_2 m_e - \gamma^\mu V^\nu m_e \right\} \\ &= -ie\lambda t_r \left\{ \gamma^\mu p_1 V^\nu p_2 + (\gamma^\mu p_1 V^\nu + \gamma^\mu V^\nu p_2 - \gamma^\mu V^\nu) m_e \right\} \\ &= -ie\lambda t_r \left\{ \gamma^\mu \gamma^\beta p_{1\beta} V^\nu \gamma^\alpha p_{2\alpha} + (\gamma^\mu \gamma^\alpha p_{1\alpha} V^\nu + \gamma^\mu V^\nu \gamma^\alpha p_{2\alpha} - \gamma^\mu V^\nu) m_e \right\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Recorrendo ao apêndice B para se calcular o traço sobre matrizes gama e tomando-se o limite ultra-relativístico, esse fator se anulará:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(01)}^{\mu\nu} &= t_r \left\{ \Gamma_{(0)}^\mu (p_1 + m_e) \bar{\Gamma}_{(1)}^\nu (p_2 + m_e) \right\} \approx -ie\lambda t_r \left\{ \gamma^\mu \gamma^\beta p_{1\beta} V^\nu \gamma^\alpha p_{2\alpha} \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Com mesmas considerações mostra-se que

$$\mathbb{E}_{(01)}^{\mu\nu} = \mathbb{E}_{(10)}^{\mu\nu} = \mathbb{E}_{(01)}^{\mu\nu} = \mathbb{M}_{(01)}^{\mu\nu} = \mathbb{M}_{(10)}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.67)$$

Vamos calcular agora os termos com configuração (0,0). Lembrando que  $\Gamma_{(0)}^\mu = -ie\gamma^\mu$  e tomando-se o limite  $m_e^2 \approx m_\mu^2 \approx 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} &= e^2 t_r \left\{ \gamma^\mu p_1^\nu \gamma^\nu p_2^\mu \right\} = e^2 t_r \left\{ \gamma^\mu \gamma^\alpha p_{1\alpha} \gamma^\nu \gamma^\beta p_{2\beta} \right\} = e^2 p_{1\alpha} p_{2\beta} T_r [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] \\ &= 4e^2 p_{1\alpha} p_{2\beta} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu}) = 4e^2 (p_1^\mu p_2^\nu - p_1^\beta p_{2\beta} g^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu) \\ &= 4e^2 \left( p_1^\mu p_2^\nu - \frac{s}{2} g^{\mu\nu} + p_1^\nu p_2^\mu \right),\end{aligned}\quad (4.68)$$

na qual, na última igualdade, usamos:

$$p_1^\beta p_{2\beta} = 2E_{CM} = 2(\sqrt{s}/2)^2 = s/2. \quad (4.69)$$

Será necessário o cálculo explícito da componente  $\mu = i$  e  $\nu = j$ . Para simplificar a notação, vamos usar que  $p^i \equiv \mathbf{p}$  e escrever  $p_1^i = -p_2^i \equiv p^i = \mathbf{p}$  (e igualmente para os momentos muônicos:  $p_1'^i = -p_2'^i \equiv p'^i = \mathbf{p}'$ ). Além disso, notando-se que  $g^{ij} = -\delta^{ij}$ , tomando ainda o fato de que a componente  $\mu = 0$  dos vértices  $\Gamma_{(a)}^\mu$  para  $a \neq 0$  são nulas devido a (4.44):  $\Gamma_{(1)}^0 = \lambda V^0 = 0$ , teremos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{(01)}^{ij} &= 4e^2 \left( p_1^i p_2^j - \frac{s}{2} (-\delta^{ij}) + p_2^i p_1^j \right) = 4e^2 \left( p^i (-p^j) + \frac{s}{2} \delta^{ij} + (-p^i) p^j \right) \\ &= e^2 (2s\delta^{ij} - 8p^i p^j).\end{aligned}\quad (4.70)$$

Cálculos semelhantes levam-nos ao fator muônico:

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{(01)}^{ij} &= 4e^2 \left( p_1'^i p_2'^j - \frac{s}{2} (-\delta^{ij}) + p_2'^i p_1'^j \right) = 4e^2 \left( p'^i (-p'^j) + \frac{s}{2} \delta^{ij} + (-p'^i) p'^j \right) \\ &= e^2 (2s\delta^{ij} - 8p'^i p'^j).\end{aligned}\quad (4.71)$$

Usando-se (4.55):  $V_-^i = \sqrt{s}K_j\sigma^{ij}$ , e devido a existência de um produto de quatro matrizes de Dirac, pode se demonstrar que [32]

$$\mathbb{E}_{(11)}^{ij} = 8\lambda^2 s\epsilon^{ikm}\epsilon^{jln}p_n p_m K_k K_l \quad \text{e} \quad \mathbb{M}_{(11)}^{ij} = 8\lambda^2 s\epsilon^{ikm}\epsilon^{jln}p'_n p'_m K_k K_l, \quad (4.72)$$

com  $\epsilon^{klm}$  a delta de Levi-Civita. Com esses ingredientes a equação (4.65) reduz-se para

$$\left\langle |\mathcal{M}_\lambda|^2 \right\rangle = \frac{1}{4q^4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \mathbb{E}_{(ab)}^{ij} \mathbb{M}_{(cd)ij} = \frac{1}{4s^2} \left\{ \mathbb{E}_{(00)}^{ij} \mathbb{M}_{ij(00)} + \mathbb{E}_{(00)}^{ij} \mathbb{M}_{ij(11)} + \mathbb{E}_{(11)}^{ij} \mathbb{M}_{ij(00)} + \mathbb{E}_{(11)}^{ij} \mathbb{M}_{ij(11)} \right\}. \quad (4.73)$$

Substituindo-a na equação (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_\lambda}{d\Omega} &= \frac{1}{(8\pi)^2 s} \left\langle |\mathcal{M}_\lambda|^2 \right\rangle = \frac{1}{(8\pi)^2 s} \frac{1}{4s^2} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \mathbb{E}_{(ab)}^{\mu\nu} \mathbb{M}_{(cd)\mu\nu} = \frac{1}{(8\pi)^2 s} \frac{1}{4s^2} \left\{ \mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{M}_{\mu\nu(00)} + \mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{M}_{\mu\nu(11)} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}_{(11)}^{\mu\nu} \mathbb{M}_{\mu\nu(00)} + \mathbb{E}_{(11)}^{\mu\nu} \mathbb{M}_{\mu\nu(11)} \right\},\end{aligned}\quad (4.74)$$

levando-nos à seção de choque total

$$\sigma_\lambda = \frac{1}{(8\pi)^2 s} \int \left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle d\Omega, \quad (4.75)$$

na qual

$$\begin{aligned} \int \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle d\Omega &= \frac{1}{4s^2} \mathbb{E}_{(00)ij} \int \mathbb{M}_{(00)}^{ij} d\Omega + \frac{1}{4s^2} \mathbb{E}_{(11)ij} \int \mathbb{M}_{(00)}^{ij} d\Omega + \frac{1}{4s^2} \mathbb{E}_{(00)ij} \int \mathbb{M}_{(11)}^{ij} d\Omega + \\ &+ \frac{1}{4s^2} \mathbb{E}_{(11)ij} \int \mathbb{M}_{(11)}^{ij} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.76)$$

A última integral pode ser desprezada, uma vez que ela é proporcional à quarta potência na constante de acoplamento de violação  $\lambda$ :

$$\frac{\mathbb{E}_{(11)ij}}{4s^2} \int \mathbb{M}_{(11)}^{ij} d\Omega = 16\lambda^4 \epsilon^{ikm} \epsilon^{jln} p_n p_m K_k K_l \int \epsilon^{ikm} \epsilon^{jln} p'_n p'_m K_k K_l d\Omega \sim 0, \quad (4.77)$$

portanto

$$\int \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle d\Omega \approx \frac{\mathbb{E}_{(00)ij}}{4s^2} \int \mathbb{M}_{(00)}^{ij} d\Omega + \frac{\mathbb{E}_{(11)ij}}{4s^2} \int \mathbb{M}_{(00)}^{ij} d\Omega + \frac{\mathbb{E}_{(00)ij}}{4s^2} \int \mathbb{M}_{(11)}^{ij} d\Omega. \quad (4.78)$$

Usando o seguinte resultado  $\int p^i p^j d\Omega = \frac{s}{3} \delta^{ij} \pi$  (veja detalhes no apêndice A) as integrais sobre os fatores muônicos podem ser calculadas facilmente:

$$\int \mathbb{M}_{(00)}^{ij} \approx \frac{16}{3} e^2 s^2 \pi \delta^{ij} \quad \text{e} \quad \int \mathbb{M}_{(11)}^{ij} \approx \frac{8}{3} \lambda^2 s^2 \pi (\delta^{ij} |\mathbf{K}|^2 - K^i K^j), \quad (4.79)$$

com  $|\mathbf{K}|^2 = K_i K^i$ . Com essas equações calcula-se cada um dos termos de (4.78):

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}_{(00)ij}}{4s^2} \int \mathbb{M}_{(00)}^{ij} d\Omega &= \frac{16\pi}{3} e^4; \\ \frac{\mathbb{E}_{(11)ij}}{4s^2} \int \mathbb{M}_{(00)}^{ij} d\Omega &= \frac{4\pi}{3} e^2 \lambda^2 (2s |\mathbf{K}|^2 - 8(\mathbf{p} \cdot \mathbf{K})^2); \\ \frac{\mathbb{E}_{(00)ij}}{4s^2} \int \mathbb{M}_{(11)}^{ij} d\Omega &= \frac{4\pi}{3} e^2 \lambda^2 (s |\mathbf{K}|^2 + 4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{K})^2). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Retornando estas últimas em (4.78) obtém-se

$$\begin{aligned} \int \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle d\Omega &= \frac{16\pi}{3} e^4 + \frac{4\pi}{3} e^2 \lambda^2 (2s |\mathbf{K}|^2 - 8(\mathbf{p} \cdot \mathbf{K})^2) + \frac{4\pi}{3} e^2 \lambda^2 (s |\mathbf{K}|^2 + 4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{K})^2) \\ &= \frac{16\pi e^4}{3} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 \left( \frac{3s}{4} |\mathbf{K}|^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{K})^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, levando este resultado em (4.74) a seção de choque do espalhamento  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  no contexto de violação da simetria de Lorentz CPT-par, subsetor de paridade ímpar, é calculada:

$$\boxed{\sigma_\lambda = \sigma_{EDQ} \left\{ 1 + \left( \frac{\lambda}{2e} \right)^2 \left( 3s |\mathbf{K}|^2 - 4(|\mathbf{p}| \cos(\delta) |\mathbf{K}|)^2 \right) \right\}}, \quad (4.81)$$

sendo  $\delta$  o ângulo entre  $|\mathbf{p}|$  e  $|\mathbf{K}|$ , com  $\sigma_{EDQ} = 4\pi\alpha^2/3E_{CM}^2 = e^4/12\pi s$  e  $\alpha = e^2/4\pi$  a seção de choque e a constante de estrutura fina da eletrodinâmica convencional, respectivamente. Para  $|\mathbf{p}| = \sqrt{s}/2$ , dentre as possibilidades possíveis para  $\delta$ , tomemos o caso para o qual  $\delta = 0^\circ$ , fornecendo-nos

$$\sigma_\lambda = \sigma_{EDQ} \left[ 1 + \frac{s}{3} \left( \frac{\lambda |\mathbf{K}|}{e} \right)^2 \right]; \quad (4.82)$$

e aquele para  $\delta = 90^\circ$ :

$$\sigma_\lambda = \sigma_{\text{EDQ}} \left[ 1 + \frac{3s}{4} \left( \frac{\lambda |\mathbf{K}|}{e} \right)^2 \right]. \quad (4.83)$$

### Componente isotrópica de paridade par

Vejamos agora a contribuição do vértice de paridade par dada por (4.50(ii)) e constante em (4.52):

$$\Gamma_{(1)}^i = \lambda V_{\text{is}(+)}^i = \sqrt{s} \lambda K_{00} \sigma^{0i}. \quad (4.84)$$

Neste caso os únicos fatores não nulos serão

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(01)}^{ij} &= e^2 (2s\delta^{ij} - 8p^i p^j), & \mathbb{M}_{(01)}^{ij} &= e^2 (2s\delta^{ij} - 8p'^i p'^j), & \mathbb{E}_{(11)}^{ij} &= 8s\lambda^2 K_{00}^2 p^i p^j, \\ M_{(11)}^{ij} &= 8s\lambda^2 K_{00}^2 p'^i p'^j. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Desprezando-se o termo de ordem superior

$$\mathbb{E}_{(11)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(11)ij} d\Omega \propto \lambda^4 \sim 0, \quad (4.86)$$

segue-se a seção de choque:

$$\begin{aligned} \sigma_{(+)\lambda}^{\text{is}} &= \frac{1}{64\pi^2 s^3} (\mathbb{E}_{(00)}^{ij} + \mathbb{E}_{(11)}^{ij}) \int (\mathbb{M}_{(00)ij} + \mathbb{M}_{(11)ij}) d\Omega \\ &\approx \frac{1}{64\pi^2 s^3} \left\{ \mathbb{E}_{(00)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(00)ij} d\Omega + \mathbb{E}_{(00)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(11)ij} d\Omega + \mathbb{E}_{(11)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(00)ij} d\Omega \right\}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Cada uma dessas integrais são facilmente calculadas. A primeira delas vale

$$\frac{1}{64\pi^2 4s^3} \mathbb{E}_{(00)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(00)ij} d\Omega = \frac{e^4}{12\pi s}. \quad (4.88)$$

Uma vez que

$$\mathbb{E}_{(00)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(11)ij} d\Omega = \mathbb{E}_{(11)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(00)ij} d\Omega = \frac{32\pi}{3} s^3 e^2 \lambda^2 |K_{00}|^2, \quad (4.89)$$

teremos

$$\frac{1}{64\pi^2 4s^3} \left\{ \mathbb{E}_{(00)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(11)ij} d\Omega + \mathbb{E}_{(11)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(00)ij} d\Omega \right\} = \frac{1}{32\pi^2 s^3} \left\{ \mathbb{E}_{(00)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(11)ij} d\Omega \right\} = \frac{e^2 \lambda^2}{12\pi} |K_{00}|^2. \quad (4.90)$$

Finalmente, retornando-se (4.88) e (4.90) em (4.87) obtemos a seção de choque com efeitos da VLCPT-par, subsetor isotrópico de paridade par:

$$\boxed{\sigma_{(+)\lambda}^{\text{is}} = \sigma_{\text{EDQ}} \left[ 1 + s \left( \frac{\lambda K_{00}}{e} \right)^2 \right]}.$$

(4.91)

### Componente anisotrópica de paridade par

Façamos agora o cálculo da contribuição de vértice advinda da componente anisotrópica de paridade par dada em (4.50(iii)):

$$\Gamma_{(1)}^i = \lambda V_{\text{an}(+)}^i = -\sqrt{s} \lambda K^{ij} \sigma_{0j}. \quad (4.92)$$

Agora, os fatores eletrônicos e muônicos tomam a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{(01)}^{ij} &= e^2 \left( 2s\delta^{ij} - 8p^i p^j \right), & \mathbb{M}_{(01)}^{ij} &= e^2 \left( 2s\delta^{ij} - 8p'^i p'^j \right), & \mathbb{E}_{(11)}^{ij} &= 8s\lambda^2 K^{ik} K^{jl} p_l p_k, \\ \mathbb{M}_{(11)}^{ij} &= 8s\lambda^2 K^{ik} K^{jl} p'_l p'_k.\end{aligned}\quad (4.93)$$

A seção de choque, neste caso, tem exatamente a forma geral dada em (4.87), exceto pela diferença entre as componentes do tensor de Lorentz, que agora valem  $K_{ij}$ . Com efeito, de posse dos fatores acima chega-se facilmente no valor das integrais

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{(00)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(00)ij} &= \frac{64\pi}{3} s^2 e^4, \\ \mathbb{E}_{(00)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(11)ij} &= \frac{16\pi s^2 e^2 \lambda^2}{3} \left[ sK^{ij} K_{ij} - 4(p^i K_{ij})^2 \right], \\ \mathbb{E}_{(11)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(00)ij} &= 2 \frac{64\pi s^2 e^2}{3} \lambda^2 (p^i K_{ij})^2,\end{aligned}\quad (4.94)$$

ou melhor

$$\begin{aligned}\frac{1}{64\pi^2 4s^3} \mathbb{E}_{(00)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(00)ij} &= \frac{e^4}{12\pi s}, \\ \frac{1}{64\pi^2 4s^3} \mathbb{E}_{(00)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(11)ij} &= \frac{e^2 \lambda^2}{12\pi 4s} \left[ sK^{ij} K_{ij} - 4(p^i K_{ij})^2 \right], \\ \frac{1}{64\pi^2 4s^3} \mathbb{E}_{(11)}^{ij} \int \mathbb{M}_{(00)ij} &= 2 \frac{e^2 \Lambda^2}{12\pi s} \lambda^2 (p^i K_{ij})^2.\end{aligned}\quad (4.95)$$

De posse dessas peças e retornando-as em (4.87), obtemos a seção de choque com contribuição de vértice advinda da VSLCPT-par no subsetor anisotrópico de paridade par:

$$\sigma_{(+)\lambda}^{\text{an}} = \sigma_{\text{EDQ}} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 \left( \frac{s}{4} K^2 + (\mathbf{p}K)^2 \right) \right], \quad (4.96)$$

com  $(\mathbf{p}K)^2 = (p^i K_{ij})(p_i K^{ij})$  e  $K^2 = K^{ij} K_{ij}$ .

## Conclusões

Os resultados mostrados em (4.81), (4.91) e (4.96) indicam que a violação da simetria de Lorentz emerge como uma contribuição aditiva à seção de choque do MP convencional. Pode-se extrair um fator  $(s/e^2)$  em cada um desses resultados, e considerando-se pequenas as contribuições advindas do parâmetro de violação  $|\lambda K|$ , os três resultados anteriores podem ser tomados genericamente como

$$\sigma_\lambda = \sigma_{\text{EDQ}} \left[ 1 + \frac{s}{e^2} \mathcal{K}^2(|\lambda K|) \right], \quad (4.97)$$

com  $\sigma_{\text{EDQ}}$  dada por (3.36) e  $\mathcal{K}(|\lambda K|)$  uma função do parâmetro de violação podendo estar associada à componente de paridade ímpar, isotrópica de paridade par e anisotrópica de paridade par

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^2(|\lambda K|)^{\text{imp}} &= \frac{3}{4} |\lambda \mathbf{K}|^2 - \left( |\mathbf{p}| \cos(\delta) |\lambda \mathbf{K}| \right)^2, \\ \mathcal{K}^2(|\lambda K|)^{\text{is}(+)} &= (\lambda K_{00})^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{K}^2(|\lambda K|)^{\text{an}(+)} = \frac{s}{4} (\lambda K)^2 + (\mathbf{p} \lambda K)^2,\end{aligned}$$

respectivamente. Para cada uma dessas equações obtém-se, de modo geral, que

$$\mathcal{K}^2(|\lambda K|) = \frac{\sigma_\lambda - \sigma_{\text{EDQ}}}{\sigma_{\text{EDQ}}}. \quad (4.98)$$

Pode-se então comparar esse resultado com os dados experimentais obtidos por M. Derrick e seus colaboradores [102]:

$$\frac{\sigma - \sigma_{\text{EDQ}}}{\sigma_{\text{EDQ}}} = + \frac{2s}{\Lambda_+^2} \quad \text{isto é} \quad \mathcal{K}(|\lambda K|) \sim \frac{e}{\Lambda_+}. \quad (4.99)$$

Lembrando-se que  $|\lambda K|$  no esquema da VSL explícita apresenta unidades de massa, com os dados da carga elementar e de  $\Lambda_+$  [102], obtém-se a seguinte estimativa para o parâmetro de violação [32]:

$$\mathcal{K}(|\lambda K|) \sim 10^{-12}(eV)^{-1}$$

(4.100)

Tal valor é revelador: ele encontra-se dentro de uma faixa padrão e também emergirá em nossos cálculos, quer no espalhamento elétron-pósitron quer no espalhamento Bhabha.

## A dinâmica de campos térmicos



---

*“Meu objetivo é simples. É uma completa compreensão do universo, porque é, como é e porque ele existe em tudo.”*

**Stephen Hawking**

**E**mbora todos os processos controlados que envolvem interação de partículas ocorram num ambiente de temperatura nula, como os eventos nos aceleradores de partículas, os mesmos processos que ocorrem naturalmente na maioria das vezes se encontram à  $T \neq 0$ . Sistemas astrofísicos fornecem abundantes exemplos para a qual (altíssimas) temperaturas estão presentes. Por exemplo, eventos de interações que ocorrem no interior do Sol encontram-se submetidos a uma temperatura média típica da ordem de 1KeV( $\sim 10^7$ K)(Figura\*5.5) [80]. Mesmo nas superfícies estelares a temperatura fica ao redor de 1eV ( $\sim 1000$ K). Altas temperaturas também são ingredientes de teorias unificadas, cuja energia é da ordem da escala de Planck ( $\sim 10^{19}$ GeV) e também do modelo padrão estendido, onde as pequenas violações da simetria de Lorentz podem ocorrer, como visto no capítulo precedente.

Existem dois mecanismos básicos usados para se incluir a temperatura no sistema, a saber, o formalismo de tempo imaginário, proposto por Matsubara [81] e o formalismo de tempo real. Neste último caso, destacam-se duas vertentes, a proposta por Schwinger [85, 86] e Keldysh [87] e aquela apresentada por Takahashi e Umezawa [44, 45]. Neste último caso, o espaço de Hilbert é construído através de um produto direto entre dois sub espaços, um composto por vetores físicos e outro por vetores duais, de modo que o vácuo da teoria, agora duplicado através de um produto tensorial, seja capaz de fornecer a álgebra dos números  $c^s$  tendo a temperatura como um parâmetro. Existe aqui uma transformação unitária, conhecida como transformação de Bogoliubov, que leva o vácuo “frio” ( $\text{à } T = 0$ ) ao vácuo a uma dada temperatura finita. Tal transformação é também responsável pela termalização dos operadores de criação e aniquilação. Outro ingrediente na abordagem de Takahashi e Umezawa é a chamada transformação “til” ( $\sim$ ), que funciona como um mapeamento entre os sub espaços físico e dual. Toda essa construção tem sua razão de ser justamente para que o valor esperado de um dado observável seja calculado como uma media sobre estados de vácuo no equilíbrio térmico, noutros termos,  $\langle \mathcal{O} \rangle = \langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle$ , com  $\mathcal{O}$  um dado observável e  $\beta$  o fator de Boltzman. Esse formalismo ficou conhecido como DCT.

Nas seções de 1 a 6 desenvolve-se as ideias e construções básicas do formalismo da DCT, devotando-se às seções 7 e 8 os dois ingredientes fundamentais da EDQ no contexto da DCT, a saber, a seção de choque  $\sigma$  e o propagador do fóton térmico.

## 5.1 Ideias preliminares

A DCT parte do pressuposto natural de que todo sistema físico encontra-se sob os efeitos de um banho térmico à uma dada temperatura  $T$  que, *a priori*, não necessariamente é zero [44, 45, 50, 47] (Figura 5.1).

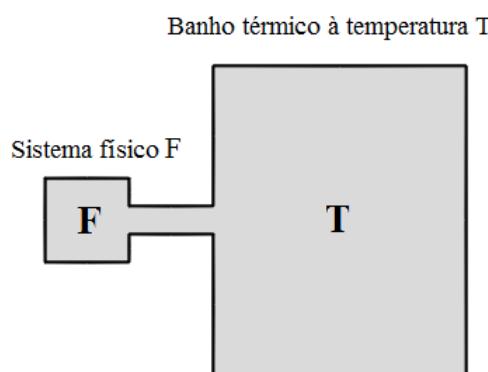


Figura 5.1: Sistema físico F na presença de um banho térmico a uma dada temperatura finita T.

Formalmente, essa termalização é introduzida mediante uma transformação unitária  $\mathcal{U}(\beta)$  sobre os estados, conhecida como transformação de Bogoliubov<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Cujos detalhes serão vistos na seção seguinte.

$$|0(\beta)\rangle = \mathcal{U}(\beta)|0, \tilde{0}\rangle, \quad (5.1)$$

com  $\beta = (k_B T)^{-1}$  e  $k_B (= 1)$  a constante de Boltzmann. O estado fundamental, como descrito acima, chama-se *estado de vácuo térmico*, enquanto que

$$|0, \tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle, \quad (5.2)$$

designa o estado de vácuo à  $T = 0$  e que pertence a um espaço de Hilbert duplicado:  $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}$  (Figura 5.2), para a qual  $|0\rangle$  pertence ao espaço de Hilbert (espaço físico)  $\mathbb{H}$  enquanto que  $|\tilde{0}\rangle$  pertence ao espaço dual  $\widetilde{\mathbb{H}}$ .

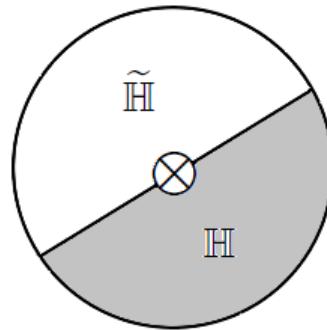


Figura 5.2: Espaço de Hilbert duplicado (ou termal)  $\mathbb{H}_T$  formado pelo produto direto entre os sub-espaços  $\mathbb{H}$  (físico) e  $\widetilde{\mathbb{H}}$  (dual, ou “til”).

A duplicação definida em (5.2) emerge como uma imposição intrínseca à álgebra do espaço de Hilbert, que delega a todo autêntico vetor de estado a característica de fornecer, através da média sobre os observáveis (neste caso no equilíbrio térmico) os coeficientes da expansão vetorial, como será visto mais a frente. No formalismo DCT isso só é cumprido se os estados forem construídos na forma de um produto tensorial entre os vetores  $|0\rangle \in \mathbb{H}$  e  $|\tilde{0}\rangle \in \widetilde{\mathbb{H}}$  para se eliminar a deficiência da não existência da álgebra de número c caso se tente construir estados térmicos convencionalmente, isto é, não duplicados. Dessa forma, dado o operador  $\mathcal{O}_F$  associado a um observável do sistema  $\mathbf{F}$  no equilíbrio térmico a uma dada temperatura  $T$ , sua média será tomada em relação ao vácuo térmico

$$\langle \mathcal{O}_F \rangle = \langle 0(\beta) | \mathcal{O}_F | 0(\beta) \rangle. \quad (5.3)$$

Naturalmente que, à  $T = 0$  o valor esperado é acessado na condição de vácuo “frio”:

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{O}_F | 0(\beta) \rangle \Big|_{\beta \rightarrow \infty} \longrightarrow \langle 0, \tilde{0} | \mathcal{O}_F | 0, \tilde{0} \rangle. \quad (5.4)$$

A existência dos sub-espaços  $\widetilde{\mathbb{H}}$  e  $\mathbb{H}$  pressupõe um mapeamento que leva  $\mathcal{O}_F$  em  $\widetilde{\mathcal{O}}_F$  (e vice-versa) definido pela ação de um operador  $\mathbf{J}$  tal que

$$\mathbf{J} \mathcal{O}_F \mathbf{J} = \widetilde{\mathcal{O}}_F, \quad (5.5)$$

sendo  $\mathbf{J}^2 = 1$ . Tal ação leva o nome de operação til “~”. Enquanto os operadores “não til” atuam nos estados físicos pertencentes ao espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$ , os operadores do tipo “til” atuam apenas em vetores do espaço de Hilbert fictício, o espaço  $\widetilde{\mathbb{H}}$ , isto é,

$$\mathcal{O}|n, \tilde{n}\rangle = (\mathcal{O}|n\rangle) \otimes |\tilde{n}\rangle, \quad \widetilde{\mathcal{O}}|n, \tilde{n}\rangle = |n\rangle \otimes (\widetilde{\mathcal{O}}|\tilde{n}\rangle). \quad (5.6)$$

A termalização do estado de vácuo, isto é, a passagem de  $|0, \tilde{0}\rangle$  para  $|0(\beta)\rangle$  é executada pela transformação

de Bogoliubov  $\mathcal{U}(\beta)$  definida como

$$\mathcal{U}(\beta) = \exp\{-\imath G(\beta)\}, \quad (5.7)$$

sendo  $G(\beta) = -\imath\theta(\beta)(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger)$  e  $a, a^\dagger, \tilde{a}$  e  $\tilde{a}^\dagger$  operadores de criação e aniquilação (bosônicos ou fermiônicos) nos sub-espacos físico e dual, respectivamente, com  $\theta(\beta)$  um fator angular em função de T. Tal transformação relaciona cada operador às suas versões dependentes da temperatura através de relações gerais da forma

$$\mathcal{O}(\beta) = \mathcal{U}(\beta)\mathcal{O}\mathcal{U}^\dagger(\beta) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{O}}(\beta) = \mathcal{U}(\beta)\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{U}^\dagger(\beta), \quad (5.8)$$

de modo que os operadores térmicos  $a(\beta), \tilde{a}(\beta), a^\dagger(\beta)$  e  $\tilde{a}^\dagger(\beta)$  permaneçam a obedecer naturalmente as relações

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle \equiv \tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0 \quad \text{e} \quad a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle \equiv \tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle \neq 0. \quad (5.9)$$

O mecanismo de duplicação não é exclusivo da DCT, sendo necessário, por exemplo, na construção do operador matricial densidade de estado<sup>2</sup>  $\rho \simeq |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ , cujo caráter duplicado é explícito. Em verdade, essa é uma característica de todas as teorias termais [44, 50, 47]. No contexto da DCT os vetores de estado também são objetos duplicados, mas mediante um produto tensorial:  $|m\rangle\otimes|\tilde{n}\rangle$ , e pertencem ao chamado espaço de Hilbert duplicado.

## 5.2 O espaço de Hilbert térmico

A construção do espaço de Hilbert termal  $\mathbb{H}_T$  começa pela procura de um estado térmico  $|0(\beta)\rangle$  (isto é, parametrizado pelo fator de Boltzmann  $\beta = 1/k_B T$ ) que implementa o valor esperado como uma média térmica [50], isto é,

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \langle 0(\beta)|\mathcal{O}|0(\beta)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n \exp[-\beta H] \langle n|O|n\rangle, \quad (5.10)$$

com  $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ . De maneira intuitiva defini-se então um possível candidato a estado térmico como sendo o objeto

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|0(\beta)\rangle = \sum_n c_n(\beta)|n\rangle, \quad (5.11)$$

subentendendo-o um vetor de  $\mathbb{H}$  e, consequentemente, o gerador dos números  $c_n(\beta) = \langle n|0(\beta)\rangle$ . Entretanto, sendo  $\langle n|$  elementos pertencente a um conjunto ortonormal e completo, o desenvolvimento (5.10) leva-nos ao resultado

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|\mathcal{O}|0(\beta)\rangle &= \left( \langle n| \sum_n c_n^*(\beta) \right) \mathcal{O} \left( \sum_m c_m(\beta)|m\rangle \right) \\ &= \sum_m \sum_n c_n^*(\beta) c_m(\beta) \langle n|\mathcal{O}|m\rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_m \sum_n \exp(-\beta E_n) \langle n|\mathcal{O}|m\rangle \delta_{mn} \end{aligned} \quad (5.12)$$

a partir do qual obtém-se que

$$c_m(\beta)c_n^*(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta E_n) \delta_{mn}, \quad (5.13)$$

---

<sup>2</sup>Ingrediente da equação de Liouville-von Neumann dada por  $\imath\partial\rho(t)/\partial t = \widehat{\mathcal{H}}\rho(t)$ , cuja evolução temporal se dá através do liouvilliano  $\widehat{\mathcal{H}}$ .

e que, obviamente, devido ao seu caráter matricial, não se estrutura como os  $c_n$  (já que se esperava  $|c_n|^2 \equiv$  escalar). Nota-se que  $c_n(\beta)$  deve pertencer, na verdade, a um espaço de Hilbert de dimensão maior, formado por um produto direto de duas classes de vetores, os vetores “til” e os “não-til”[48, 49]  $\mathbb{H}_T = \mathbb{H} \otimes \widetilde{\mathbb{H}}$ , com  $\mathbb{H}$  o sub-espaco de Hilbert físico e  $\widetilde{\mathbb{H}}$  o sub-espaco “til”, ou seja

$$|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle. \quad (5.14)$$

Dito isso, o vetor de estado térmico como definido em (5.11) não cumpre a exigência da geração de números  $c$ . Define-se então o seguinte par de objetos, cada um, pois, associado a seu sub-espaco em  $\mathbb{H}_T$

$$c_n(\beta) = h_n(\beta)|m\rangle \quad \text{e} \quad c_m(\beta) = h_m(\beta)|\tilde{m}\rangle. \quad (5.15)$$

Com esses novos ingredientes a estrutura correta do estado  $|0(\beta)\rangle$  será

$$|0(\beta)\rangle = c_n(\beta) \otimes |n\rangle = \sum_n h_n(\beta)|n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle, \quad (5.16)$$

levando-nos ao resultado adequado para a média de  $\mathcal{O}$

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle = \left( \sum_n \langle n, \tilde{n} | h_n^*(\beta) \right) \mathcal{O} \left( \sum_m h_m(\beta) |m, \tilde{m}\rangle \right) = \sum_m \sum_n h_n^*(\beta) h_m(\beta) \langle n, \tilde{n} | \mathcal{O} | m, \tilde{m}\rangle. \quad (5.17)$$

Desenvolvendo o valor esperado remanescente

$$\sum_m \langle n, \tilde{n} | \mathcal{O} | m, \tilde{m}\rangle = \sum_m \left( \langle \tilde{n} | \otimes \langle n | \right) \mathcal{O} \left( |m\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle \right) = \sum_m \langle n | \mathcal{O} | m \rangle \langle \tilde{n} | \tilde{m} \rangle = \sum_m \langle n | \mathcal{O} | m \rangle \delta_{mn} = \langle n | \mathcal{O} | n \rangle, \quad (5.18)$$

e retornando-o em (5.17) chega-se a

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle = \sum_m \sum_n h_n^*(\beta) h_m(\beta) \langle n | \mathcal{O} | m \rangle \delta_{mn} = \sum_n |h_n(\beta)|^2 \langle n | \mathcal{O} | m \rangle. \quad (5.19)$$

Com a ajuda de (5.14) e trocando-se em (5.10)  $\langle n |$  pelo estado  $\langle n, \tilde{n} |$ , o lado esquerdo da igualdade acima pode ainda ser escrito como se segue

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_m \sum_n \exp(-\beta E_n) \langle n, \tilde{n} | \mathcal{O} | m, \tilde{m}\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_m \sum_n \exp(-\beta E_n) \langle \tilde{n} | \left( \langle n | \mathcal{O} | m \rangle \right) \otimes |\tilde{m}\rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_m \sum_n \exp(-\beta E_n) \langle n | \mathcal{O} | m \rangle \langle \tilde{n} | \tilde{m} \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_m \sum_n \exp(-\beta E_n) \langle n | \mathcal{O} | m \rangle \delta_{mn} \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n \exp(-\beta E_n) \langle n | \mathcal{O} | n \rangle. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Então um autêntico coeficiente de expansão  $c_n$  é obtido

$$h_n(\beta) = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \exp(-\beta E_n/2). \quad (5.21)$$

Com efeito, esse resultado leva-nos ao vetor duplicado

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n \exp(-\beta E_n) |n, \tilde{n}\rangle,$$

(5.22)

que é a forma correta do estado térmico procurado.

### 5.3 A operação “til”

Segue-se agora o desenvolvimento e as consequências da álgebra de mapeamento “til”. Com esse objetivo define-se, pois, operadores  $\mathcal{O}$  e  $\widehat{\mathcal{O}}$  tais que

$$[\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j] = \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k, \quad [\widehat{\mathcal{O}}_i, \widehat{\mathcal{O}}_j] = \iota K_{ij}^k \widehat{\mathcal{O}}_k, \quad [\widehat{\mathcal{O}}_i, \mathcal{O}_j] = \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k, \quad (5.23)$$

relações essas conhecidas como termo-álgebras de Lie [52], com  $K_{ij}^k$  sendo as constantes de estrutura que, como tais, são anti-simétricas nas trocas dos índices:  $K_{ij}^k = -K_{ji}^k$ . Seja então o seguinte operador:

$$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} - \widehat{\mathcal{O}}. \quad (5.24)$$

Com efeito, retornando-o nas equações anteriores chega-se nas regras

$$[\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j] = \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k, \quad [\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\mathcal{O}}_j] = -\iota K_{ij}^k \tilde{\mathcal{O}}_k, \quad [\mathcal{O}_i, \tilde{\mathcal{O}}_j] = 0. \quad (5.25)$$

Com a ajuda de (5.24) e de (5.23) demonstra-se a primeira equação de (5.25):

$$[\mathcal{O}_i, \tilde{\mathcal{O}}_j] = \mathcal{O}_i \tilde{\mathcal{O}}_j - \tilde{\mathcal{O}}_j \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i (\mathcal{O}_j - \widehat{\mathcal{O}}_j) - (\mathcal{O}_j - \widehat{\mathcal{O}}_j) \mathcal{O}_i = [\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j] - [\mathcal{O}_i, \widehat{\mathcal{O}}_j] = 0. \quad (5.26)$$

Já a equação do meio em (5.25) é obtida como se segue

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\mathcal{O}}_j] &= \tilde{\mathcal{O}}_i \tilde{\mathcal{O}}_j - \tilde{\mathcal{O}}_j \tilde{\mathcal{O}}_i = (\mathcal{O} - \widehat{\mathcal{O}})_i (\mathcal{O} - \widehat{\mathcal{O}})_j - (\mathcal{O} - \widehat{\mathcal{O}})_j (\mathcal{O} - \widehat{\mathcal{O}})_i \\ &= [\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j] + [\widehat{\mathcal{O}}_j, \mathcal{O}_i] + [\mathcal{O}_j, \widehat{\mathcal{O}}_i] + [\widehat{\mathcal{O}}_i, \widehat{\mathcal{O}}_j] = \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k + \iota K_{ji}^k \mathcal{O}_k + \iota K_{ji}^k \mathcal{O}_k + \iota K_{ij}^k \widehat{\mathcal{O}}_k \\ &= \iota K_{ji}^k \mathcal{O}_k + \iota K_{ji}^k (\mathcal{O} - \widehat{\mathcal{O}})_k \\ &= -\iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k. \end{aligned}$$

Por fim, a última peça de (5.25) se obtém de

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j] &= \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j - \mathcal{O}_j \mathcal{O}_i = (\tilde{\mathcal{O}} - \widehat{\mathcal{O}})_i (\tilde{\mathcal{O}} - \widehat{\mathcal{O}})_j - (\tilde{\mathcal{O}} - \widehat{\mathcal{O}})_j (\tilde{\mathcal{O}} - \widehat{\mathcal{O}})_i \\ &= [\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\mathcal{O}}_j] + [\tilde{\mathcal{O}}_i, \widehat{\mathcal{O}}_j] + [\widehat{\mathcal{O}}_i, \tilde{\mathcal{O}}_j] + [\widehat{\mathcal{O}}_i, \widehat{\mathcal{O}}_j] \\ &= -\iota K_{ij}^k \tilde{\mathcal{O}}_k + [\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\mathcal{O}}_j] + [\widehat{\mathcal{O}}_i, \tilde{\mathcal{O}}_j] + \iota K_{ij}^k \widehat{\mathcal{O}}_k. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Executando-se cálculos auxiliares e levando-se em conta a anti-simetria das constantes de estrutura conclui-se que

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{O}}_i, \widehat{\mathcal{O}}_j] \tilde{\mathcal{O}}_i \widehat{\mathcal{O}}_j - \widehat{\mathcal{O}}_j \tilde{\mathcal{O}}_i &= (\mathcal{O} - \widehat{\mathcal{O}})_i \widehat{\mathcal{O}}_j - \widehat{\mathcal{O}}_j (\mathcal{O} - \widehat{\mathcal{O}})_i = [\mathcal{O}_i, \widehat{\mathcal{O}}_j] + [\widehat{\mathcal{O}}_j, \widehat{\mathcal{O}}_i] \\ &= \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k + \iota K_{ji}^k \widehat{\mathcal{O}}_k, \end{aligned} \quad (5.28)$$

e

$$[\widehat{\mathcal{O}}_i, \widehat{\mathcal{O}}_j] = -[\tilde{\mathcal{O}}_j, \widehat{\mathcal{O}}_i] = (-\iota K_{ji}^k) \mathcal{O}_k + (-\iota K_{ij}^k) \widehat{\mathcal{O}}_k = \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k + \iota K_{ji}^k \widehat{\mathcal{O}}_k. \quad (5.29)$$

Retornando-as na equação (5.27), obtém-se,

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}_i, \tilde{\mathcal{O}}_j] &= -\iota K_{ij}^k \tilde{\mathcal{O}}_k + [\tilde{\mathcal{O}}_i, \widehat{\mathcal{O}}_j] + [\widehat{\mathcal{O}}_i, \tilde{\mathcal{O}}_j] + \iota K_{ij}^k \widehat{\mathcal{O}}_k = -\iota K_{ij}^k \tilde{\mathcal{O}}_k + \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k + \iota K_{ji}^k \widehat{\mathcal{O}}_k + \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k + \iota K_{ji}^k \widehat{\mathcal{O}}_k \\ &= -\iota K_{ij}^k (\mathcal{O} - \widehat{\mathcal{O}})_k + \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k + \iota K_{ji}^k \widehat{\mathcal{O}}_k + \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k + \iota K_{ji}^k \widehat{\mathcal{O}}_k \\ &= \iota K_{ij}^k \mathcal{O}_k. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Devido a (5.2) essas relações são chamadas de álgebra de Lie em  $\mathbb{H}_T$ , ou termal.

Como já foi dito, a duplicação é compreendida como um mapeamento entre os sub-espacos  $\mathbb{H}$  e  $\widetilde{\mathbb{H}}$  definido através da operação

$$\mathbf{J}\mathcal{O}\mathbf{J} = (\mathcal{O})^{\sim} = \widetilde{\mathcal{O}}. \quad (5.31)$$

Assim, para  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{O}$  operadores e  $a$  e  $b$  constantes (complexas ou não), segue-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= 1; \\ [\mathcal{O}, \widetilde{\mathcal{N}}] &= 0; \\ (a\mathcal{N} + b\mathcal{O})^{\sim} &= a^*\widetilde{\mathcal{N}} + b^*\widetilde{\mathcal{O}}; \\ (\mathcal{N}\mathcal{O})^{\sim} &= \widetilde{\mathcal{N}}\widetilde{\mathcal{O}}; \\ (O^\dagger)^{\sim} &= (\widetilde{\mathcal{O}})^\dagger; \\ \mathbf{J}|n\rangle &= (|n\rangle)^{\sim} = |\tilde{n}\rangle; \\ \mathbf{J}|m, \tilde{n}\rangle &= |n, \tilde{m}\rangle, \end{aligned} \quad (5.32)$$

com particular atenção para a seguinte condição:

$$(\widetilde{\mathcal{O}})^{\sim} = \varepsilon \mathcal{O} \begin{cases} \varepsilon = -1, & \text{para férmons,} \\ \varepsilon = +1, & \text{para bósons.} \end{cases} \quad (5.33)$$

Para se obter um dado vetor em  $\mathbb{H}_T$  deve-se inicialmente tomar

$$\mathbf{J}\mathbf{H}\mathbf{J} = (\mathbf{H})^{\sim} = \widetilde{\mathbf{H}}. \quad (5.34)$$

Com efeito, e usando temporariamente  $\alpha_m = 1/\sqrt{m}$ , dado um vetor  $|m\rangle$  em  $\mathbb{H}$ , teremos

$$\mathbf{J}|m\rangle = \mathbf{J}\alpha_m(a^\dagger)^m|0\rangle = \alpha_m\mathbf{J}(a^\dagger)^m\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}|0\rangle = \alpha_m(\tilde{a}^\dagger)^m|\tilde{0}\rangle = |\tilde{m}\rangle, \quad (5.35)$$

sobre a qual usamos (5.32) e (5.33)<sup>3</sup> com

$$|m\rangle = \alpha_m(a^\dagger)^m|0\rangle \in \mathbb{F} \text{ (espaço de Fock).} \quad (5.36)$$

No caso de um vetor  $|m, \tilde{n}\rangle$  pertencente ao espaço de Fock térmico  $\mathbb{F}_T$ , isto é,

$$|m, \tilde{n}\rangle = \alpha_m\alpha_n(a^\dagger)^m(\tilde{a}^\dagger)^n|0, \tilde{0}\rangle, \quad (5.37)$$

teremos

$$\mathbf{J}|m, \tilde{n}\rangle = \alpha_m\alpha_n\mathbf{J}(a^\dagger)^m\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}(\tilde{a}^\dagger)^n\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}|0, \tilde{0}\rangle = \alpha_m\alpha_n(\tilde{a}^\dagger)^m(a^\dagger)^n\mathbf{J}|0, \tilde{0}\rangle. \quad (5.38)$$

Utilizando marcações provisórias nos vetores, nota-se que

$$\mathbf{J}|0_1, \tilde{0}_2\rangle = \mathbf{J}(|0_1\rangle \otimes |\tilde{0}_2\rangle) = (\tilde{0}_1\rangle \otimes |0_2\rangle)^{\sim} = |\tilde{0}_2\rangle \otimes |0_1\rangle = |0_2, \tilde{0}_1\rangle. \quad (5.39)$$

Retornando-a em (5.38), obtém-se

$$\mathbf{J}|m, \tilde{n}\rangle = \alpha_m\alpha_n(\tilde{a}^\dagger)^m(a^\dagger)^n|0_2, \tilde{0}_1\rangle = \overbrace{(\alpha_n(a^\dagger)^n|0_2\rangle)}^{|\tilde{n}\rangle} \otimes \overbrace{(\alpha_m(\tilde{a}^\dagger)^m|\tilde{0}_1\rangle)}^{|\tilde{m}\rangle} = |n, \tilde{m}\rangle,$$

<sup>3</sup>Como simples números é claro que  $\tilde{m} = m$  e, portanto,  $\frac{1}{\sqrt{\tilde{m}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$ .

e assim demonstra-se a regra (5.33), com  $|m, \tilde{m}\rangle$  vetores pertencentes ao espaço de Fock duplicado  $\mathbb{F}_T = \mathbb{F} \otimes \widetilde{\mathbb{F}}$  e

$$|\tilde{m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} (\tilde{a}^\dagger)^m |\tilde{0}\rangle \in \widetilde{\mathcal{F}}. \quad (5.40)$$

Com  $a^\dagger$  e  $\tilde{a}^\dagger$  define-se também um espaço  $\mathfrak{S}_T$  de operadores dobrados, isto é, formados pela soma direta entre os subconjuntos  $\mathfrak{S}$  e  $\widetilde{\mathfrak{S}}$ :  $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \oplus \widetilde{\mathfrak{S}}$  (Figura 5.3).

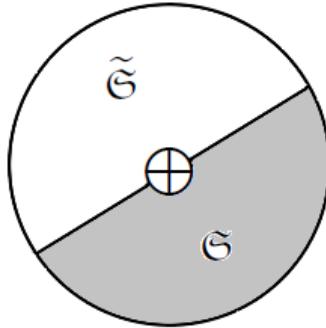


Figura 5.3: Espaço de operadores duplicado,  $\mathfrak{S}_T$ , formado pela soma direta entre os sub-espaços  $\mathfrak{S}$  (físico) e  $\widetilde{\mathfrak{S}}$  (dual, ou "til").

## 5.4 Funções de distribuição

Segue-se agora como essa álgebra de duplicação em conjunto com a operação "til" pode ser aplicadas a sistemas oscilatórios de bósons e de férmiões [50, 44, 47]. Como será notado, alguns passos seguem normalmente como no caso dos osciladores não-termais, enquanto outros são desdobramentos que emergem da álgebra duplicada e das regras de conjugação "til".

A construção de um oscilador de Dirac termal começa com a definição de estados e operadores em consonância com sua versão não-termal:

$$\tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes (\tilde{a}^\dagger |0\rangle) = |0, \tilde{1}\rangle; \quad (5.41)$$

$$a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle = (a^\dagger |0\rangle) \otimes |\tilde{0}\rangle = |1, \tilde{0}\rangle; \quad (5.42)$$

$$a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle = (a^\dagger |0\rangle) \otimes (\tilde{a}^\dagger |0\rangle) = |1, \tilde{1}\rangle; \quad (5.43)$$

$$a|0\rangle = 0, \tilde{a}|\tilde{0}\rangle = 0; \quad a^\dagger |1\rangle = 0, \tilde{a}^\dagger |\tilde{1}\rangle = 0. \quad (5.44)$$

Evidentemente que, devido à estatística envolvida, tais operadores obedecem as seguintes regras

$$\{a, \tilde{a}\} = \{\tilde{a}^\dagger, a\} = \{a^\dagger, \tilde{a}\} = \{a^\dagger, \tilde{a}^\dagger\} = 0; \quad \{\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0; \quad \{\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}\} = \{a^\dagger, a\} = 1. \quad (5.45)$$

Pode-se agora escrever o estado de vácuo térmico em termos dos vetores de base normalizados  $|0, \tilde{0}\rangle$  e  $|1, \tilde{1}\rangle$ :

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{Z}(\beta)}} \sum_m e^{-\beta H/2} |m, \tilde{m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{Z}(\beta)}} \sum_m e^{-\beta E_m/2} |m, \tilde{m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{Z}(\beta)}} (e^{-\beta E_0}|0, \tilde{0}\rangle + e^{-\beta E_1}|1, \tilde{1}\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{Z}(\beta)}} (1 + e^{-\beta \hbar\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle \end{aligned} \quad (5.46)$$

com  $E_0 = 0$  (para férmiões) e  $E_1 = \hbar\omega$ . Levando-se em conta a ortonormalidade dos estados de base, além

de que  $\langle \tilde{1}, 1 | = \langle \tilde{0}, 0 | a^\dagger \tilde{a}$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle &= \frac{1}{(\sqrt{\mathcal{Z}(\beta)})^2} \left( \langle \tilde{0}, 0 | + e^{-\beta \hbar \omega / 2} \langle \tilde{0}, 0 | a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right) \left( \langle \tilde{0}, 0 | + e^{-\beta \hbar \omega / 2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger | \tilde{0}, 0 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \left\{ \langle \tilde{0}, 0 | 0, \tilde{0} \rangle + e^{-\beta \hbar \omega / 2} \langle \tilde{0}, 0 | 1, \tilde{1} \rangle + e^{-\beta \hbar \omega / 2} \langle \tilde{1}, 1 | 0, \tilde{0} \rangle + e^{-\beta \hbar \omega} \langle \tilde{1}, 1 | 1, \tilde{1} \rangle \right\} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.47)$$

de onde se extrai a função de partição fermiônica

$$\mathcal{Z}_F(\beta) = 1 + e^{-\beta \hbar \omega}. \quad (5.48)$$

Por conseguinte, dado o operador número

$$\aleph = a^\dagger a, \quad (5.49)$$

sua média, no equilíbrio térmico, se dará por meio de

$$\begin{aligned} N_F(\beta) &= \langle 0(\beta) | \aleph | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{1 + e^{-\beta \hbar \omega_0}} \langle 0, \tilde{0} | \left( 1 + e^{-\beta \hbar \omega} \tilde{a} a \right) a^\dagger a \left( 1 + e^{-\beta \hbar \omega} \tilde{a} a \right) | 0, \tilde{0} \rangle \quad (5.50) \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\beta \hbar \omega}} \left\{ \langle \tilde{0}, 0 | a^\dagger a | 0, \tilde{0} \rangle + e^{-\beta \hbar \omega / 2} \langle \tilde{0}, 0 | a^\dagger a a^\dagger \langle \tilde{a}^\dagger | 0, \tilde{0} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\beta \hbar \omega / 2} \langle \tilde{0}, 0 | \tilde{a} a a^\dagger a | 0, \tilde{0} \rangle + e^{-\beta \hbar \omega} \langle \tilde{0}, 0 | \tilde{a} a a^\dagger a a^\dagger \langle \tilde{a}^\dagger | 0, \tilde{0} \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Executando-se cálculos auxiliares (utilizando as regras de (5.41)-(5.45)) teremos, primeiramente

$$\langle 0, \tilde{0} | a^\dagger \left( a | 0, \tilde{0} \rangle \right) = 0. \quad (5.51)$$

Em seguida, levando-se em conta que  $\{a^\dagger, a\} = 1$ , teremos

$$\langle 0, \tilde{0} | a^\dagger a a^\dagger \tilde{a}^\dagger | 0, \tilde{0} \rangle = \langle 0, \tilde{0} | a^\dagger a \left( a^\dagger \tilde{a}^\dagger | 0, \tilde{0} \rangle \right) = \langle 0, \tilde{0} | a^\dagger a | 1, \tilde{1} \rangle = \langle 0, \tilde{0} | 1, \tilde{1} \rangle - \langle 0, \tilde{0} | a a^\dagger | 1, \tilde{1} \rangle = 0 \quad (5.52)$$

e

$$\langle 0, \tilde{0} | \tilde{a} a a^\dagger a | 0, \tilde{0} \rangle = \langle 0, \tilde{0} | \tilde{a} a | 0, \tilde{0} \rangle - \langle 0, \tilde{0} | \tilde{a} a a a^\dagger | 0, \tilde{0} \rangle = 0. \quad (5.53)$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{0}, 0 | \tilde{a} a a^\dagger a a^\dagger \tilde{a}^\dagger | 0, \tilde{0} \rangle &= \langle \tilde{0}, 0 | \tilde{a} a a^\dagger a \left( a^\dagger \tilde{a}^\dagger | 0, \tilde{0} \rangle \right) = \langle \tilde{0}, 0 | \tilde{a} a a^\dagger a | 1, \tilde{1} \rangle \quad (5.54) \\ &= \langle \tilde{0}, 0 | \tilde{a} a | 1, \tilde{1} \rangle - \langle \tilde{0}, 0 | \tilde{a} a a a^\dagger | 1, \tilde{1} \rangle = 1. \end{aligned}$$

Juntando-se esses quatro últimos resultados em (5.50) chega-se na função de distribuição para férmons

$$N_F(\beta) = \langle 0(\beta) | \aleph | 0(\beta) \rangle = \frac{e^{-\beta \hbar \omega}}{1 + e^{-\beta \hbar \omega}} = \frac{1}{1 + e^{E/E_T}}, \quad (5.55)$$

com

$$E = \hbar \omega, \text{ e } E_T = \beta^{-1} = T \quad (\text{Lembrando que } k_\beta = 1). \quad (5.56)$$

Com cálculos parecidos pode-se também determinar a função de partição e de distribuição para bôsons, dadas como

$$\mathcal{Z}_B(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}; \quad (5.57)$$

$$N_B(\beta) = \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \quad (5.58)$$

com  $a^\dagger$  e  $a$  obedecendo, pois, regras de comutação.

Os operadores de criação e aniquilação (quer fermiônicos como bosônicos) serão adiante todos reescritos em função da temperatura; segue-se, antes, a construção da chamada transformação de Bogoliubov, o objeto responsável por essa termalização e que até agora esteve implícito na demonstração do estado do vácuo térmico  $|0(\beta)\rangle$ .

## 5.5 A transformação de Bogoliubov

Como mencionado previamente, a termalização do estado de vácuo é executada através da chamada transformação de Bogoliubov. Nas linhas que se seguem, uma vez que a expressão obtida é exatamente a mesma, quer para bósons ou férmons, mudando apenas no caráter estatístico dos operadores de criação e aniquilação. Por uma mera questão de simplicidade algébrica será dada a demonstração apenas para o caso fermiônico [50, 44].

A partir de (5.46) e (5.48) pode-se ainda escrever:

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\beta\hbar\omega}}} \left( 1 + \underbrace{e^{-\beta\hbar\omega/2}}_{\sqrt{e^{-\beta\hbar\omega}}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right) |0, \tilde{0}\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\beta\hbar\omega}}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^{\beta\hbar\omega}}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right) |0, \tilde{0}\rangle \\ &= (\cos(\theta) + \sin(\theta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle = (u_F(\beta) + v_F(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned}$$

com

$$u_F(\beta) = \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\beta\hbar\omega}}} \quad \text{e} \quad v_F(\beta) = \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{\beta\hbar\omega}}} \quad (5.59)$$

fatores termais fermiônicos tais que

$$u_F^2(\beta) + v_F^2(\beta) = 1. \quad (5.60)$$

Sejam agora as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle &= \tilde{a}a |0, \tilde{0}\rangle - a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle = -a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle, \quad (5.61) \\ (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^2 |0, \tilde{0}\rangle &= (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) \underbrace{(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle}_{-\tilde{a}^\dagger a^\dagger |0, \tilde{0}\rangle = |1, \tilde{1}\rangle} = -(\tilde{a}a |1, \tilde{1}\rangle - a^\dagger \tilde{a}^\dagger |1, \tilde{1}\rangle) = -|0, \tilde{0}\rangle, \\ (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^3 |0, \tilde{0}\rangle &= (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) \underbrace{(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^2 |0, \tilde{0}\rangle}_{-|0, \tilde{0}\rangle} = -(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle = a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle \\ (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^4 |0, \tilde{0}\rangle &= (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) \underbrace{(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^3 |0, \tilde{0}\rangle}_{a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle = |1, \tilde{1}\rangle} = (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |1, \tilde{1}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned}$$

Portanto, de modo geral

$$(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^{2n+1} |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^{n+1} a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle \quad \text{e} \quad (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^{2n} |0, \tilde{0}\rangle = (-1)^n |0, \tilde{0}\rangle. \quad (5.62)$$

Reescreve-se agora a equação (5.59) de modo mais conveniente

$$|0(\beta)\rangle = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger - \frac{\theta^3}{3!} a^\dagger \tilde{a}^\dagger + \frac{\theta^5}{5!} a^\dagger \tilde{a}^\dagger + \cdots\right) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (5.63)$$

Com a ajuda dos resultados em (5.61) nota-se que

$$\begin{aligned} \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle &= -\theta (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle, \\ \frac{\theta^2}{2!} |0, \tilde{0}\rangle &= -\frac{\theta^2}{2!} (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^2 |0, \tilde{0}\rangle, \\ \frac{\theta^3}{3!} a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle &= +\frac{\theta^3}{3!} (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^3 |0, \tilde{0}\rangle, \\ \frac{\theta^4}{4!} |0, \tilde{0}\rangle &= +\frac{\theta^4}{4!} (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^4 |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (5.64)$$

levando-se às formas expandidas das ações sobre vácuo frio

$$\begin{aligned} \cos(\theta) |0, \tilde{0}\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} |0, \tilde{0}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^{2n} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= \cos [\theta (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)] |0, \tilde{0}\rangle; \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^{2n+1} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= \sin [\theta (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)] |0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Substituindo-as em (5.63) obtém-se a transformação de Bogoliubov

$$|0(\beta)\rangle = \left(1 - \theta(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) + \frac{\theta^2}{2!} (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^2 - \frac{\theta^3}{3!} (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^3 + \cdots\right) |0, \tilde{0}\rangle = \mathcal{U}(\beta) |0, \tilde{0}\rangle, \quad (5.67)$$

com

$$\boxed{\mathcal{U}(\beta) = e^{-i\mathcal{G}(\theta)}}, \quad (5.68)$$

o operador unitário responsável pela transformação e

$$\mathcal{G}(\theta) = -i\theta(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger). \quad (5.69)$$

Como dito previamente, cálculos para o caso bosônico levam às mesmas expressões para (5.68) e (5.69) diferenciando-se, pois, apenas pela estatística. Neste caso, os fatores térmicos são dados por

$$u_B(\beta) = \cosh(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}} \quad \text{e} \quad v_B(\beta) = \sinh(\theta) = \frac{1}{\sqrt{e^{\beta\hbar\omega} + 1}}, \quad (5.70)$$

sendo, portanto, objetos tais que

$$u_B^2(\beta) - v_B^2(\beta) = 1. \quad (5.71)$$

## 5.6 Operadores térmicos de aniquilação e criação

A transformação  $\mathcal{O}(\beta) = \mathcal{U}(\beta) \mathcal{O} \mathcal{U}^\dagger(\beta)$ , com  $\mathcal{U}(\beta)$  dado por (5.68), indica uma correlação entre um dado operador  $\mathcal{O}$  com sua versão dependente da temperatura [50, 44, 45], a forma  $\mathcal{O}(\beta)$ . De modo a se obter as quatro relações:  $a \rightarrow a(\beta)$ ,  $\tilde{a} \rightarrow \tilde{a}(\beta)$ ,  $a^\dagger \rightarrow a^\dagger(\beta)$  e  $\tilde{a}^\dagger \rightarrow \tilde{a}^\dagger(\beta)$  será necessário usar a seguinte

expansão exponencial

$$e^{-i\mathcal{P}}\mathcal{O}e^{i\mathcal{P}} = \mathcal{O} + i[\mathcal{P}, \mathcal{O}] - \frac{1}{2!}[\mathcal{P}, [\mathcal{P}, \mathcal{O}]] - \frac{i}{3!}[\mathcal{P}, \mathcal{P}, [\mathcal{P}, \mathcal{O}]] + \dots,$$

obtida ao notar-se que  $-(-i)^1 = +i$ ,  $+(-i)^2 = -1$ ,  $-(-i)^3 = -i$ ,  $\dots$  (e assim por diante). Uma vez que o resultado acima envolve comutadores e anti-comutadores, as seguintes relações serão igualmente úteis:

$$\{\mathcal{P}, \mathcal{N}\mathcal{O}\} = \{\mathcal{P}, \mathcal{N}\}\mathcal{O} - \mathcal{N}\{\mathcal{P}, \mathcal{O}\}; \quad (5.72)$$

e

$$[\mathcal{P}\mathcal{N}, \mathcal{O}] = \mathcal{P}\{\mathcal{N}, \mathcal{O}\} - \mathcal{P}\{\mathcal{O}, \mathcal{N}\}. \quad (5.73)$$

Para o cálculo da primeira transformação ( $a \rightarrow a(\beta)$ ) parte-se, portanto, de

$$a(\beta) = e^{-i\mathcal{G}}ae^{i\mathcal{G}} = a + i[\mathcal{G}, a] - \frac{1}{2!}[\mathcal{G}, [\mathcal{G}, a]] - \frac{i}{3!}[\mathcal{G}, [\mathcal{G}, [\mathcal{G}, a]]] + \dots, \quad (5.74)$$

deixando como cálculo auxiliar a determinação dos comutadores. O primeiro deles ficará

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}, a] &= \mathcal{G}a - a\mathcal{G} = -i\theta \left\{ \tilde{a}aa - a^\dagger \tilde{a}^\dagger a - a \overbrace{\tilde{a}a}^{\text{-}\tilde{a}\tilde{a}} + a \overbrace{a^\dagger \tilde{a}^\dagger}^{\text{-}\tilde{a}^\dagger a^\dagger} \right\} = -i\theta \left\{ \{\tilde{a}, aa\} + \{a, a^\dagger \tilde{a}^\dagger\} \right\} \\ &= -i\theta \left\{ \{\tilde{a}, a\}a - a\{\tilde{a}, a\} + \{a, a^\dagger\}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger\{a, \tilde{a}^\dagger\} \right\} \\ &= -i\theta \tilde{a}^\dagger. \end{aligned} \quad (5.75)$$

O próximo será

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}, [\mathcal{G}, a]] &= [\mathcal{G}, -i\theta \tilde{a}^\dagger] = -i\theta \left\{ \mathcal{G}\tilde{a}^\dagger - \tilde{a}^\dagger \mathcal{G} \right\} = -\theta^2 \left\{ \tilde{a}a\tilde{a}^\dagger - a^\dagger \tilde{a}^\dagger \tilde{a} - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}a + \tilde{a}^\dagger a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right\} \\ &= -\theta^2 \left\{ [\tilde{a}a, \tilde{a}^\dagger] - \overbrace{[a^\dagger, \tilde{a}^\dagger]}^0 \tilde{a}^\dagger \right\} \\ &= -\theta^2 \left\{ \tilde{a} \overbrace{\{a, \tilde{a}^\dagger\}}^0 - \overbrace{\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\}}^1 a \right\} \\ &= \theta^2 a. \end{aligned}$$

Por fim, segue-se o cálculo do comutador triplo

$$[\mathcal{G}, \overbrace{[\mathcal{G}, [\mathcal{G}, a]]}^{\theta^2 a}] = \theta^2 \overbrace{[\mathcal{G}, a]}^{-i\theta \tilde{a}^\dagger} = -i\theta^3 \tilde{a}^\dagger, \quad (5.76)$$

e assim por diante. Retornando-as em (5.74) chega-se a

$$\begin{aligned} a(\beta) &= e^{-i\mathcal{G}}ae^{i\mathcal{G}} = a + i(-i\theta \tilde{a}^\dagger) + \frac{-1}{2!}\theta^2 a + \frac{-i}{3!}(-i\theta^3 \tilde{a}^\dagger) + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right)a + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right)\tilde{a}^\dagger \\ &= \cos(\theta)a + \sin(\theta)\tilde{a}^\dagger. \end{aligned}$$

Ou ainda

$$a(\beta) = \mathcal{U}(\beta)a\mathcal{U}^\dagger(\beta) = u_F(\beta)a + v_F(\beta)\tilde{a}^\dagger. \quad (5.77)$$

Levando-se em conta que no caso fermiônico  $\tilde{\mathcal{O}} = -\mathcal{O}$ , a próxima relação é imediatamente obtida:

$$\tilde{a}(\beta) = \mathcal{U}(\beta)\tilde{a}\mathcal{U}^\dagger(\beta) = u_F(\beta)\tilde{a} - v_F(\beta)a^\dagger. \quad (5.78)$$

Atuando com a conjugação  $\dagger$  sobre (5.77) e (5.78) obtém-se

$$a^\dagger(\beta) = \mathcal{U}(\beta)a^\dagger\mathcal{U}^\dagger(\beta) = u_F(\beta)a^\dagger + v_F(\beta)\tilde{a}; \quad \tilde{a}^\dagger(\beta) = \mathcal{U}(\beta)\tilde{a}^\dagger\mathcal{U}^\dagger(\beta) = u_F(\beta)\tilde{a}^\dagger - v_F(\beta)a. \quad (5.79)$$

Embora  $|0(\beta)\rangle = \mathcal{U}(\beta)|0,\tilde{0}\rangle$  não seja um estado de vácuo para os operadores  $a$  e  $\tilde{a}$ , o é para as formas termais. De fato, notando-se que  $\mathcal{U}^\dagger(\beta)\mathcal{U}(\beta) = 1$ , tem-se que

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle = \mathcal{U}(\beta)a\mathcal{U}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \mathcal{U}(\beta)a\mathcal{U}^\dagger(\beta)\mathcal{U}(\beta)|0,\tilde{0}\rangle = 0, \quad (5.80)$$

e igualmente para  $\tilde{a}(\beta)$ :

$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0. \quad (5.81)$$

Entretanto, sendo  $\tilde{a}|0(\beta)\rangle = \frac{v(\beta)}{u(\beta)}|0(\beta)\rangle$ , tem-se

$$a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = \frac{1}{u(\beta)}|0(\beta)\rangle. \quad (5.82)$$

Esses operadores termais obedecem as mesmas regras algébricas das formas não termais, isto é

$$\{a(\beta), a'^\dagger(\beta)\} = \delta^{(3)}(k' - k)\delta_{\lambda'\lambda} \quad \text{e} \quad \{\tilde{a}(\beta), \tilde{a}'^\dagger(\beta)\} = \delta^{(3)}(k' - k)\delta_{\lambda'\lambda}, \quad (5.83)$$

sendo todos os outros anti-comutadores iguais a zero.

Uma vez que a transformação de Bogoliubov em (5.68) no caso bosônico só mudará no caráter de seus operadores, nessa estatística as versões para  $a(\beta)$ ,  $a^\dagger(\beta)$ ,  $\tilde{a}(\beta)$  e  $\tilde{a}^\dagger(\beta)$  podem ser calculadas e são dadas por

$$\begin{aligned} a(\beta) &= u_B(\beta)a + v_B(\beta)\tilde{a}^\dagger; & a^\dagger(\beta) &= u_B(\beta)a^\dagger + v_B(\beta)\tilde{a}; \\ \tilde{a}(\beta) &= u_B(\beta)\tilde{a} + v_B(\beta)a^\dagger; & \tilde{a}^\dagger(\beta) &= u_B(\beta)a^\dagger + v_F(\beta)\tilde{a}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Naturalmente tais operadores devem obedecer regras de comutação

$$[a(\beta), a'^\dagger(\beta)] = \delta^{(3)}(k' - k)\delta_{\lambda'\lambda}; \quad \text{e} \quad [\tilde{a}(\beta), \tilde{a}'^\dagger(\beta)] = \delta^{(3)}(k' - k)\delta_{\lambda'\lambda}, \quad (5.85)$$

sendo iguais a zero nos outros casos. Segue-se também a aniquilação do vácuo térmico

$$a(\beta)|0,(\beta)\rangle \equiv \tilde{a}(\beta)|0,(\beta)\rangle = 0. \quad (5.86)$$

Por fim, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e lembrando que bósons não obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, tem-se

$$(a^\dagger(\beta))^n|0(\beta)\rangle = \frac{1}{u^n(\beta)}|0(\beta)\rangle. \quad (5.87)$$

## 5.7 A seção de choque no formalismo da DCT

Toda a álgebra e construções precedentes constituem as bases para o estudo de sistemas sujeitos a um banho térmico numa dada temperatura T. Com efeito, e uma vez que se objetiva aqui investigar processos

elementares como os que ocorrem em sistemas astrofísicos, e sobretudo aqueles cujas energias envolvidas aproximam-se da escala de Planck ( $10^{-19} GeV$ ), é necessário que os elementos constitutivos básicos para uma teoria quântica de campos sejam reescritos no contexto da DCT; nesse sentido, o formalismo básico pode ser encontrado nas referências [50, 44, 47] enquanto que aplicações da DCT envolvendo, por exemplo, o efeito Casimir, Casimir-Higgs, espelhamento Moller, espalhamento de férmiões com o campo de grávitons e gravitoeletromagnetismo encontram-se em [56, 59, 57, 58, 60, 55].

Uma vez que  $\mathbb{H}_T$  é um operador do espaço dobrado  $\mathfrak{S}_T$ , a (densidade) de hamiltoniano no contexto da dinâmica de campos térmicos será definida simplesmente como

$$\widehat{\mathcal{H}}(\beta) = \mathcal{H}(\beta) - \widetilde{\mathcal{H}}(\beta), \quad (5.88)$$

sendo

$$\mathcal{H}(\beta) = \hbar\omega a^\dagger(\beta)a(\beta), \quad (5.89)$$

e, por conseguinte

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\beta) = \hbar\omega \tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta). \quad (5.90)$$

Tomando-se o caso bosônico (para o qual  $u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1$ ) não é difícil mostrar que  $\mathcal{H}(\beta)$  independe do fator de Boltzmann:  $\mathcal{H}(\beta) = \mathcal{H}$ . De fato, utilizando as transformações de Bogoliubov para bósons ter-se-á

$$\begin{aligned} a^\dagger(\beta)a(\beta) &= (u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a})(u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger) = u^2(\beta)a^\dagger a - u(\beta)v(\beta)a\tilde{a}^\dagger - u(\beta)v(\beta)\tilde{a}a + \\ &\quad + v^2(\beta)\tilde{a}\tilde{a}^\dagger; \\ \tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta) &= (u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a)(u(\beta)\tilde{a} - v(\beta)a^\dagger) = u^2(\beta)\tilde{a}^\dagger\tilde{a} - u(\beta)v(\beta)\tilde{a}a^\dagger - u(\beta)v(\beta)a\tilde{a} + \\ &\quad + v^2(\beta)aa^\dagger. \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\widehat{\mathcal{H}}(\beta) = \hbar\omega \left[ a^\dagger(\beta)a(\beta) - \tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta) \right] \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} &= \hbar\omega \left[ u^2(\beta)a^\dagger a - u(\beta)v(\beta)a\tilde{a}^\dagger - u(\beta)v(\beta)\tilde{a}a + v^2(\beta)\tilde{a}\tilde{a}^\dagger + \right. \\ &\quad \left. - \left( u^2(\beta)\tilde{a}^\dagger\tilde{a} - u(\beta)v(\beta)\tilde{a}a^\dagger - u(\beta)v(\beta)a\tilde{a} + v^2(\beta)aa^\dagger \right) \right] \\ &= \hbar\omega \left[ u^2(\beta)a^\dagger a - v^2(\beta)aa^\dagger - \left( u^2(\beta)\tilde{a}^\dagger\tilde{a} - v^2(\beta)\tilde{a}\tilde{a}^\dagger \right) + \right. \\ &\quad \left. + u(\beta)v(\beta) \left( \tilde{a}^\dagger\tilde{a} - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger \right) + u(\beta)v(\beta) \left( a\tilde{a} - \tilde{a}a \right) \right]. \quad (5.92) \end{aligned}$$

Usando as relações de comutação  $[a, a^\dagger] \equiv [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$  e  $[\tilde{a}, a^\dagger] \equiv [a, \tilde{a}] = 0$  chega-se a

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}(\beta) &= \hbar\omega \left[ a^\dagger(\beta)a(\beta) - \tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta) \right] \\ &= u^2(\beta)a^\dagger a - v^2(\beta)(1 + a^\dagger a) - u^2(\beta)\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + v^2(\beta)(1 + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) \\ &= \hbar\omega \left[ (u^2(\beta) - v^2(\beta))a^\dagger a - (u^2(\beta) - v^2(\beta))\tilde{a}^\dagger\tilde{a} \right] \\ &= \hbar\omega \left[ a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} \right]. \quad (5.93) \end{aligned}$$

Para campos em interação

$$\widehat{\mathcal{H}}(\beta) = \widehat{\mathcal{H}}_0(\beta) + \widehat{\mathcal{H}}_I(\beta) = \mathcal{H}(\beta) - \widetilde{\mathcal{H}}(\beta), \quad (5.94)$$

na qual<sup>4</sup>

$$\mathcal{H}(\beta) = \mathcal{H}_{(0)}(\beta) + \mathcal{H}_{(I)}(\beta) \quad \text{e} \quad \widehat{\mathcal{H}}_{(I)}(\beta) = \mathcal{H}_{(I)}(\beta) - \widetilde{\mathcal{H}}_{(I)}(\beta). \quad (5.95)$$

Pode-se então construir um espaço de Fock térmico a partir do estado de vácuo térmico da partícula

$$\mathcal{F}_T = \left\{ \frac{\left(a^\dagger(\beta)\right)^n}{\sqrt{n!}} \frac{\left(\tilde{a}^\dagger(\beta)\right)^m}{\sqrt{m!}} |0(\beta)\rangle, n, m = 0, 1, 2, \dots \right\}. \quad (5.96)$$

Seguem-se atuações de  $\widehat{\mathcal{H}}(\beta, x)$  sobre alguns desses auto-vetores. De inicio é imediato que

$$\widehat{\mathcal{H}}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0. \quad (5.97)$$

Em seguida, para  $n = 1$  e  $m = 0$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}(\beta)a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle &= \hbar\omega U(\beta)[a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}]U(\beta)a^\dagger U^{-1}(\beta)U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= \hbar\omega U(\beta)a^\dagger|0, \tilde{0}\rangle \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$= \hbar\omega a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle. \quad (5.99)$$

Cálculos semelhantes para  $n = 0$  com  $m = 1$  e  $n = m = 1$  levam respectivamente a

$$\widehat{\mathcal{H}}(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = -\hbar\omega\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle \quad (5.100)$$

e

$$\widehat{\mathcal{H}}(\beta)a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle = 0. \quad (5.101)$$

Devido ao princípio de exclusão, o espaço de Fock para férmons vai até  $m, n = 0, 1$ , cobrindo exatamente os mesmos casos acima.

De modo análogo, reescreve-se a densidade lagrangiana no espaço duplicado:

$$\widehat{\mathcal{L}}(\beta) = \widehat{\mathcal{L}}_{(0)}(\beta) + \widehat{\mathcal{L}}_{(I)}(\beta) = \mathcal{L}(\beta) - \widetilde{\mathcal{L}}(\beta), \quad (5.102)$$

sendo

$$\mathcal{L}(\beta) = \mathcal{L}_{(0)}(\beta) + \mathcal{L}_{(I)}(\beta), \quad (5.103)$$

e

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\beta) = \widetilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\beta) + \widetilde{\mathcal{L}}_{(I)}(\beta). \quad (5.104)$$

Com esses ingredientes pode-se escrever a amplitude de transição na EDQ no formalismo DCT. Considerando-se um processo do tipo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  com  $p_{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) os 4-momentos das partículas, tem-se

$$\mathcal{M}(\beta) = \langle f, \beta | \widehat{S} | \beta, i \rangle,$$

(5.105)

com a matriz-S dada por

$$\widehat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 ds_2 \cdots dx_n \left[ : \widehat{\mathcal{H}}_I(x_1) \widehat{\mathcal{H}}_I(x_2) \cdots \widehat{\mathcal{H}}_I(x_n) : \right], \quad (5.106)$$

<sup>4</sup>Deve-se notar que, embora os operadores pertençam a espaços diferentes, as formas  $\mathcal{O}$  são completamente equivalentes àquelas do espaço dual, os operadores  $\widetilde{\mathcal{O}}$ .

subentendido o ordenamento temporal. Os estados de vácuo térmico assintóticos são escritos como

$$\left| \iota, \beta \right\rangle = c_{p_k}^\dagger(\beta) d_{p_l}^\dagger(\beta) \left| 0(\beta) \right\rangle \quad \text{e} \quad \left| f, \beta \right\rangle = c_{p_m}^\dagger(\beta) d_{p_n}^\dagger(\beta) \left| 0(\beta) \right\rangle \quad (5.107)$$

para os quais  $c_p^\dagger(\beta)$  e  $d_p^\dagger(\beta)$  são operadores termais de aniquilação e criação, respectivamente, e  $k, l, m$  e  $n$  simplesmente índices de partículas. Finalmente, dada a amplitude de transição (5.105), a seção de choque diferencial da EDQ no formalismo DCT pode então ser escrita

$$\boxed{\frac{d\sigma(\beta)}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{p}'|}{64\pi^2 s^2 |\mathbf{p}|} \left\langle \left| \mathcal{M}(\beta) \right|^2 \right\rangle}, \quad (5.108)$$

com  $s^2 = E_{CM} = 2E$ ,  $|\mathbf{p}|$  e  $|\mathbf{p}'|$  os mementos iniciais e finais e

$$\boxed{\left\langle \left| \mathcal{M}(\beta) \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \left| \mathcal{M}(\beta) \right|^2}. \quad (5.109)$$

## 5.8 O propagador do fóton termal

Tendo em vista a investigação de processos de espalhamentos e aniquilações na EDQ no contexto da dinâmica de campos térmicos, é necessário que o propagador do fóton seja escrito em sua forma termalizada. Com efeito, o objetivo é o de se encontrar uma expressão para o valor esperado sobre o vácuo térmico (Figura 5.4)

$$\Delta_{\mu\nu}^{(l)}(x - y, \beta) = \langle 0(\beta) | \left( \mathcal{A}_\mu(x) \widetilde{\mathcal{A}}_\nu^\dagger(y) \right) | 0(\beta) \rangle^{(l)}, \quad (5.110)$$

com  $l$  o contador de possíveis canais em um dado processo. A função de Green acima é conseguida lançando-se mão das transformações de Bogoliubov para bósons [55]

$$x_\mu \swarrow \overbrace{\cdots}^{\gamma_\beta} \nwarrow y_\nu$$

Figura 5.4: O propagador térmico do fóton.

A definição (5.24) fornece quatro possibilidades para o produto de operadores (a menos dos sinais negativos):  $\mathcal{O}\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}\tilde{\mathcal{O}}$ ,  $\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}$  e  $\tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{O}}$ . Devido a duplicação do espaço de operadores, qualquer objeto de  $\mathfrak{S}_T$  (Figura (5.3)) pode ser estruturado na forma de uma matriz coluna:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \tilde{\mathcal{O}} \end{pmatrix}. \quad (5.111)$$

Dessa forma, os quatro bilineares podem então ser arranjados numa matriz  $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}\mathcal{O} & \mathcal{O}\tilde{\mathcal{O}} \\ \tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O} & \tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{O}} \end{pmatrix}. \quad (5.112)$$

Seja então o operador termal de campo do fóton

$$\widehat{\mathcal{A}}_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu(x) + \widetilde{\mathcal{A}}_\mu(x) \in \mathfrak{S}_T. \quad (5.113)$$

Entretanto, é conveniente escrevê-lo como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_\mu^{(1)}(x) \\ \widetilde{\mathcal{A}}_\mu^{(2)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\mu(x) \\ \widetilde{\mathcal{A}}_\mu(x) \end{pmatrix}, \quad (5.114)$$

sendo

$$\mathcal{A}_\mu^{(1)}(x) \equiv \mathcal{A}_\mu(x) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu(k, \lambda) (ae^{-ik_v x^\nu} + a^\dagger e^{+ik_v x^\nu}), \quad (5.115)$$

cuja forma “til” é imediatamente obtida utilizando a relação (5.32):

$$\mathcal{A}_\mu^{(2)}(x) \equiv \widetilde{\mathcal{A}}_\mu(x) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu(k, l\lambda) (\tilde{a}e^{+ik_v x^\nu} + \tilde{a}^\dagger e^{-ik_v x^\nu}). \quad (5.116)$$

Usando-se notação econômica, tal que  $A_\mu \equiv A_\mu(x)$  e  $A_\nu \equiv A_\nu(y)$ , a matriz dos bilineares pode ser construída com as seguintes entradas

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_\mu^{(1)} \mathcal{A}_\nu^{(1)} & \mathcal{A}_\mu^{(1)} \mathcal{A}_\nu^{(2)} \\ \mathcal{A}_\mu^{(2)} \mathcal{A}_\nu^{(1)} & \mathcal{A}_\mu^{(2)} \mathcal{A}_\nu^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu & \mathcal{A}_\mu \widetilde{\mathcal{A}}_\nu \\ \widetilde{\mathcal{A}}_\mu \mathcal{A}_\nu & \widetilde{\mathcal{A}}_\mu \widetilde{\mathcal{A}}_\nu \end{pmatrix}. \quad (5.117)$$

Com esses ingredientes o propagador termal do fóton é escrito na forma de uma matriz  $2 \times 2$ :

$$\left( i\Delta_{\mu\nu}^{mn}(x-y, \beta) \right) = \langle 0(\beta) \left| \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu & \mathcal{A}_\mu \widetilde{\mathcal{A}}_\nu \\ \widetilde{\mathcal{A}}_\mu \mathcal{A}_\nu & \widetilde{\mathcal{A}}_\mu \widetilde{\mathcal{A}}_\nu \end{pmatrix} \right| 0(\beta) \rangle = \begin{pmatrix} i\Delta_{\mu\nu}^{11}(x-y, \beta) & i\Delta_{\mu\nu}^{12}(x-y, \beta) \\ i\Delta_{\mu\nu}^{21}(x-y, \beta) & i\Delta_{\mu\nu}^{22}(x-y, \beta) \end{pmatrix}, \quad (5.118)$$

com  $m, n = 1, 2$  o contador das entradas cuja forma geral é dada por

$$\begin{aligned} i\Delta_{\mu\nu}^{mn}(x-y, \beta) &= \langle 0(\beta) | \left( \mathcal{A}_\mu^m(x) \mathcal{A}_\nu^n(y) \right) | 0(\beta) \rangle = \theta(x_0 - y_0) \langle 0(\beta) | \mathcal{A}_\mu^m(x) \mathcal{A}_\nu^n(y) | 0(\beta) \rangle + \\ &+ \theta(y_0 - x_0) \langle 0(\beta) | \mathcal{A}_\nu^n(y) \mathcal{A}_\mu^m(x) | 0(\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Mais uma vez a notação simplificada para os operadores e outros elementos será considerada. Assim, no que se segue, será calculada a componente  $m = n = 1$  do propagador:

$$\begin{aligned} i\Delta_{\mu\nu}^{11}(x-y, \beta) &= \theta(x_0 - y_0) \langle 0(\beta) | \mathcal{A}_\mu(x) \widetilde{\mathcal{A}}_\nu(y) | 0(\beta) \rangle + \\ &+ \theta(y_0 - x_0) \langle 0(\beta) | \widetilde{\mathcal{A}}_\nu(y) \mathcal{A}_\mu(x) | 0(\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (5.120)$$

De (5.115) e (5.116) o primeiro valor esperado será

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | \mathcal{A}_\mu(x) \widetilde{\mathcal{A}}_\nu(y) | 0(\beta) \rangle &= \int \frac{d^3 k'}{\sqrt{2\omega_{k'}(2\pi)^3}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda'=0}^3 \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu(k', \lambda') \epsilon_\nu(k, \lambda) \\ &\times \langle 0(\beta) | \left[ a' e^{-ik \cdot x} + a'^\dagger e^{+ik \cdot x} \right] \left[ \tilde{a}^\dagger e^{+ik' \cdot x} + \tilde{a} e^{-ik' \cdot x} \right] | 0(\beta) \rangle \\ &= \mathbb{I}_{\mu\nu}(k', \lambda' k, \lambda) \left\{ \langle (\beta) 0 | a' a | 0(\beta) \rangle e^{-i(k' \cdot x + k \cdot y)} + \right. \\ &+ \langle (\beta) 0 | a' a^\dagger | 0(\beta) \rangle e^{-i(k' \cdot x - k \cdot y)} + \langle (\beta) 0 | a'^\dagger a | 0(\beta) \rangle e^{+i(k' \cdot x - k \cdot y)} + \\ &\left. + \langle (\beta) 0 | a'^\dagger a^\dagger | 0(\beta) \rangle e^{+i(k' \cdot x + k \cdot y)} \right\} \eta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.121)$$

com  $\varepsilon_\mu$  o vetor de polarização do fóton,  $a \equiv a(k, \lambda)$  e

$$\mathbb{I}_{\mu\nu}(k', \lambda' k, \lambda) = \int \frac{d^3 k'}{\sqrt{2\omega_{k'}(2\pi)^3}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda'=0}^3 \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu(k', \lambda') \varepsilon_\mu(k, \lambda). \quad (5.122)$$

Usando as transformações de Bogoliubov para bósons dadas em (5.84)-(5.85), as relações de comutação (5.85) e (5.85) bem como (5.86), segue-se os cálculos auxiliares dos valores esperados. Chamando-os temporariamente de  $A, B, C, D$  e iniciando-se com o cálculo de A:

$$\begin{aligned} A &\equiv \langle (\beta)0 | a' a | 0(\beta) \rangle = \left\langle (\beta)0 \left| \left[ ua' + v \tilde{a}'^\dagger \right] (\beta) \left[ ua + v \tilde{a}^\dagger \right] (\beta) \right| 0(\beta) \right\rangle \quad (5.123) \\ &= u^2(\beta) \langle (\beta)0 | a'(\beta) \overbrace{a(\beta)}^0 | 0(\beta) \rangle + u(\beta)v(\beta) \langle (\beta)0 | \overbrace{\tilde{a}'^\dagger(\beta)a'(\beta)}^{\tilde{a}'^\dagger(\beta)a'(\beta)|0(\beta)\rangle=0} | 0(\beta) \rangle + \\ &+ u(\beta)v(\beta) \langle (\beta)0 | \overbrace{\tilde{a}'^\dagger(\beta)a(\beta)}^0 | 0(\beta) \rangle + v^2(\beta) \langle (\beta)0 | \overbrace{\tilde{a}'^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)}^0 | 0(\beta) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Calculando-se B:

$$\begin{aligned} B &\equiv \langle (\beta)0 | a' a^\dagger | 0(\beta) \rangle = \left\langle (\beta)0 \left| \left[ ua' + v \tilde{a}'^\dagger \right] (\beta) \left[ ua^\dagger + v \tilde{a}^\dagger \right] (\beta) \right| 0(\beta) \right\rangle \quad (5.124) \\ &+ \langle (\beta)0 | u^2(\beta)a'(\beta)a^\dagger(\beta) + u(\beta)v(\beta)a'(\beta)\tilde{a}(\beta) + \\ &+ u(\beta)v(\beta)\tilde{a}'^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta) + v^2(\beta)\tilde{a}'^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= u^2(\beta) \langle (\beta)0 | \overbrace{a'(\beta)a^\dagger(\beta)}^{a^\dagger(\beta)a'(\beta)+\delta^{(3)}(k'-k)\delta_{\lambda'\lambda}} | 0(\beta) \rangle \\ &= u^2(\beta)\delta^{(3)}(k'-k)\delta_{\lambda'\lambda}; \end{aligned}$$

Segue-se o termo C:

$$\begin{aligned} C &\equiv \langle (\beta)0 | a'^\dagger a | 0(\beta) \rangle = \left\langle (\beta)0 \left| \left[ ua'^\dagger + v \tilde{a}' \right] (\beta) \left[ ua + v \tilde{a}^\dagger \right] (\beta) \right| 0(\beta) \right\rangle \\ &= \langle (\beta)0 | u^2(\beta)a'^\dagger(\beta)a(\beta) + u(\beta)v(\beta)a'^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + \\ &+ u(\beta)v(\beta)\tilde{a}'^\dagger(\beta)a(\beta) + v^2(\beta)\tilde{a}'^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= v^2(\beta) \langle (\beta)0 | \overbrace{\tilde{a}'^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)}^{\tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}'^\dagger(\beta)+\delta^{(3)}(k'-k)\delta_{\lambda'\lambda}} | 0(\beta) \rangle \\ &= v^2(\beta)\delta^{(3)}(k'-k)\delta_{\lambda'\lambda}. \end{aligned}$$

Por fim

$$\begin{aligned} D &= \langle (\beta)0 | a'^\dagger a^\dagger | 0(\beta) \rangle = \left\langle (\beta)0 \left| \left[ ua'^\dagger + v \tilde{a}' \right] (\beta) \left[ ua^\dagger + v \tilde{a}^\dagger \right] (\beta) \right| 0(\beta) \right\rangle \\ &= \langle (\beta)0 | u_B^2(\beta)a'^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta) + u(\beta)v(\beta)a'^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + \\ &+ u(\beta)v(\beta)\tilde{a}'^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta) + v^2(\beta)\tilde{a}'^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Retornando-as em (5.121) chega-se a

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{A}_\mu(x) \widetilde{\mathcal{A}_\nu(y)} | 0(\beta) \rangle = \mathbb{I}_{\mu\nu}(k', \lambda', k, \lambda) \delta^{(3)}(k' - k) \delta_{\lambda'\lambda} \left[ u^2(\beta) e^{-i(k' \cdot x - k \cdot y)} + v^2(\beta) e^{i(k' \cdot x - k \cdot y)} \right]. \quad (5.125)$$

Neste ponto, dada qualquer  $f(k')$ , escreve-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\mu\nu}(k', \lambda', k, \lambda) \delta^{(3)}(k' - k) \delta_{\lambda'\lambda} f(k') &= \int \frac{d^3 k'}{\sqrt{2\omega_{k'}(2\pi)^3}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \times \\ &\times \sum_{\lambda'=0}^3 \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu(k', \lambda') \varepsilon_\mu(k, \lambda) \delta^{(3)}(k' - k) \delta_{\lambda'\lambda} f(k') \\ &= \int \frac{d^3 k}{2\omega_k(2\pi)^3} f(k) \eta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.126)$$

com

$$\eta_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu(k, \lambda) \varepsilon_\nu(k, \lambda). \quad (5.127)$$

Retornando-as na expressão do propagador em (5.121)

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{A}_\mu(x) \widetilde{\mathcal{A}}_\nu(y) | 0(\beta) \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[ u^2(\beta) e^{-ik \cdot (x-y)} + v^2(\beta) e^{+ik \cdot (x-y)} \right] \eta_{\mu\nu}. \quad (5.128)$$

Cálculos análogos levam ao segundo valor esperado de (5.120):

$$\langle 0(\beta) | \widetilde{\mathcal{A}}_\nu(y) \mathcal{A}_\mu(x) | 0(\beta) \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[ u^2(\beta) e^{+ik \cdot (x-y)} + v^2(\beta) e^{-ik \cdot (x-y)} \right] \eta_{\mu\nu}, \quad (5.129)$$

que, como se vê, difere de (5.128) apenas pelos sinais das exponenciais, uma vez que se trata de uma permutação dos pontos do espaço-tempo  $x_\mu$  com  $y_\nu$ . Retornando-as em (5.120), obtém-se

$$\begin{aligned} i\Delta_{\mu\nu}^{11}(x-y, \beta) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\theta(x_0 - y_0)}{2\omega_k} \left[ u^2(\beta) e^{-ik \cdot (x-y)} + v^2(\beta) e^{-ik \cdot (x-y)} \right] \right\} \\ &+ \frac{\theta(y_0 - x_0)}{2\omega_k} \left[ u^2(\beta) e^{+ik \cdot (x-y)} + v^2(\beta) e^{-ik \cdot (x-y)} \right] \eta_{\mu\nu} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{u^2(\beta)}{2\omega_k} \left[ \theta(x_0 - y_0) e^{-ik \cdot (x-y)} + \theta(y_0 - x_0) e^{+ik \cdot (x-y)} \right] \right\} \\ &+ \frac{v^2(\beta)}{2\omega_k} \left[ \theta(x_0 - y_0) e^{+ik \cdot (x-y)} + \theta(y_0 - x_0) e^{-ik \cdot (x-y)} \right] \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Como  $\omega_k$  é um polo de  $k_0$  pode-se substituir este por aquele e assim usar a fórmula para integrações no plano complexo (teorema de Cauchy):

$$\mp i \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{e^{\pm i\omega_k(x_0 - y_0)}}{k_0^2 - (\omega_k \pm i\zeta)^2} = \frac{1}{2\omega_k} \left[ \theta(x_0 - y_0) e^{\pm i\omega_k(x_0 - y_0)} + \theta(y_0 - x_0) e^{\mp i\omega_k(x_0 - y_0)} \right] \eta_{\mu\nu}. \quad (5.131)$$

Para isso, é necessário expandir o escalar

$$ik \cdot (x - y) \equiv ik_\mu (x^\mu - y^\mu) = ik_0 (x_0 - y_0) - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.132)$$

de modo que as exponenciais em (5.130) fiquem como

$$e^{\pm ik \cdot (x-y)} = e^{\pm ik_\mu \cdot (x-y)^\nu} + e^{\mp ik_0 \cdot (x_0 - y_0)} e^{\pm i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (5.133)$$

Reescrevendo-se então (5.130) já com a substituição de  $k_0$  por  $\omega_k$ , vem que

$$\begin{aligned} i\Delta_{\mu\nu}^{11}(x-y, \beta) = & \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{u^2(\beta)}{2\omega_k} \left[ \theta(x_0 - y_0) e^{+i\omega_k(x_0 - y_0)} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + \theta(y_0 - x_0) e^{-i\omega_k(x_0 - y_0)} e^{+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right] \right. \\ & \left. + \frac{v^2(\beta)}{2\omega_k} \left[ \theta(x_0 - y_0) e^{-i\omega_k(x_0 - y_0)} e^{+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + \theta(y_0 - x_0) e^{+i\omega_k(x_0 - y_0)} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right] \right\} \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Sem embargo, pode-se usar o truque de substituir  $\mathbf{k}$  por  $-\mathbf{k}$  a fim de se fatorar a exponencial em  $\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} i\Delta_{\mu\nu}^{11}(x-y, \beta) = & \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ \frac{u^2(\beta)}{2\omega_k} \left[ \theta(x_0 - y_0) e^{+i\omega_k(x_0 - y_0)} + \theta(y_0 - x_0) e^{-i\omega_k(x_0 - y_0)} \right] \right. \\ & \left. + \frac{v^2(\beta)}{2\omega_k} \left[ \theta(x_0 - y_0) e^{-i\omega_k(x_0 - y_0)} + \theta(y_0 - x_0) e^{+i\omega_k(x_0 - y_0)} \right] \right\} \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.135)$$

Com a posse das equações (5.130) obtém-se a primeira componente do propagador térmico do fóton

$$\begin{aligned} i\Delta_{\mu\nu}^{11}(x-y, \beta) = & \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ -u^2(\beta) \frac{e^{-ik_0(x_0 - y_0)}}{k_0^2 - (\omega_k - i\zeta)^2} + v^2(\beta) \frac{e^{-ik_0(x_0 - y_0)}}{k_0^2 - (\omega_k + i\zeta)^2} \right\} \eta_{\mu\nu} \\ = & -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-i[-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + k_0(x_0 - y_0)]} \left[ \frac{u^2(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k - i\zeta)^2} - \frac{v^2(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k + i\zeta)^2} \right] \eta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.136)$$

ou ainda

$$i\Delta_{\mu\nu}^{11}(x-y, \beta) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik_\alpha(x-y)^\alpha} \Delta_{\mu\nu}^{11}(k, \beta), \quad (5.137)$$

com

$$\Delta_{\mu\nu}^{11}(k, \beta) = \left( \frac{u^2(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k - i\zeta)^2} - \frac{v^2(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k + i\zeta)^2} \right) \eta_{\mu\nu}. \quad (5.138)$$

Existe uma certa simetria entre os elementos diagonais da matriz (5.118) de modo que, com cálculos semelhantes, a componente  $m = n = 2$  vale simplesmente

$$i\Delta_{\mu\nu}^{22}(x-y, \beta) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik_\alpha(x-y)^\alpha} \Delta_{\mu\nu}^{22}(k), \quad (5.139)$$

sendo agora

$$\Delta_{\mu\nu}^{22}(k, \beta) = \left( \frac{v^2(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k - i\zeta)^2} - \frac{u^2(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k + i\zeta)^2} \right) \eta_{\mu\nu}. \quad (5.140)$$

O cálculo das outras componentes no espaço dos momentos levam a

$$\Delta_{\mu\nu}^{12}(k) = \Delta_{\mu\nu}^{21}(k) = u(\beta)v(\beta) \left( \frac{1}{k_0^2 - (\omega_k - i\zeta)^2} - \frac{1}{k_0^2 - (\omega_k + i\zeta)^2} \right) \eta_{\mu\nu}. \quad (5.141)$$

Finalmente, o propagador térmico do fóton será uma matriz  $2 \times 2$

$$\left( \Delta_{\mu\nu}^{mn}(x-y, \beta) \right)_{2 \times 2} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik_\alpha(x-y)^\alpha} \left( \Delta_{\mu\nu}^{mn}(k, \beta) \right)_{2 \times 2}, \quad (5.142)$$

com

$$\left( \Delta_{\mu\nu}^{mn}(k, \beta) \right)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \frac{u^2(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k - i\zeta)^2} - \frac{v^2(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k + i\zeta)^2} & \frac{u(\beta)v(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k - i\zeta)^2} - \frac{u(\beta)v(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k + i\zeta)^2} \\ \frac{u(\beta)v(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k - i\zeta)^2} - \frac{u(\beta)v(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k + i\zeta)^2} & \frac{v^2(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k - i\zeta)^2} - \frac{u^2(\beta)}{k_0^2 - (\omega_k + i\zeta)^2} \end{pmatrix} \eta_{\mu\nu}.$$

A equação (5.142) pode ser separada em duas partes, uma real e outra imaginária

$$\left( \Delta_{\mu\nu}^{mn}(x-y, \beta) \right)_{2 \times 2} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik_\alpha(x-y)^\alpha} \left\{ \left( \Delta_{\mu\nu}^{(0)mn}(k) \right)_{2 \times 2} + \left( \Delta_{\mu\nu}^{(\beta)mn}(k) \right)_{2 \times 2} \right\}, \quad (5.143)$$

sendo

$$\left( \Delta_{\mu\nu}^{(0)mn}(k) \right)_{2 \times 2} = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \eta_{\mu\nu}, \quad (5.144)$$

a parte “fria” do propagador e

$$\left( \Delta_{\mu\nu}^{(\beta)mn}(k) \right)_{2 \times 2} = -i \frac{2\pi\delta(k^2)}{e^{\beta\omega_k} - 1} \begin{pmatrix} 1 & e^{\beta k_0/2} \\ e^{\beta k_0/2} & 1 \end{pmatrix} \eta_{\mu\nu}. \quad (5.145)$$

sua parte termalizada com  $k_0 = E_{CM}$  a energia no referencial do centro de massa. Em verdade, a única componente de (5.143) que tem sentido físico é aquela para a qual  $m = n = 1$ :

$$\Delta_{\mu\nu}^{11}(x-y, \beta) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 \kappa e^{-i\kappa(x-y)} \Delta_{\mu\nu}^{11}(\kappa, \beta), \quad (5.146)$$

na qual escrevemos que

$$\Delta_{\mu\nu}^{11}(\kappa, \beta) = \frac{\Delta(\kappa, \beta)}{\kappa^2} \eta_{\mu\nu} \quad (5.147)$$

e

$$\Delta(\kappa, \beta) = 1 - i \frac{2\pi\delta(\kappa^2)}{e^{\beta\omega_k} - 1}. \quad (5.148)$$

Esse são os ingredientes necessários para se construir uma teoria quântica de campos com temperatura finita via formalismo da DCT; em particular, processos sob a ação de um dado banho térmico envolvendo interações mediadas por fótons.

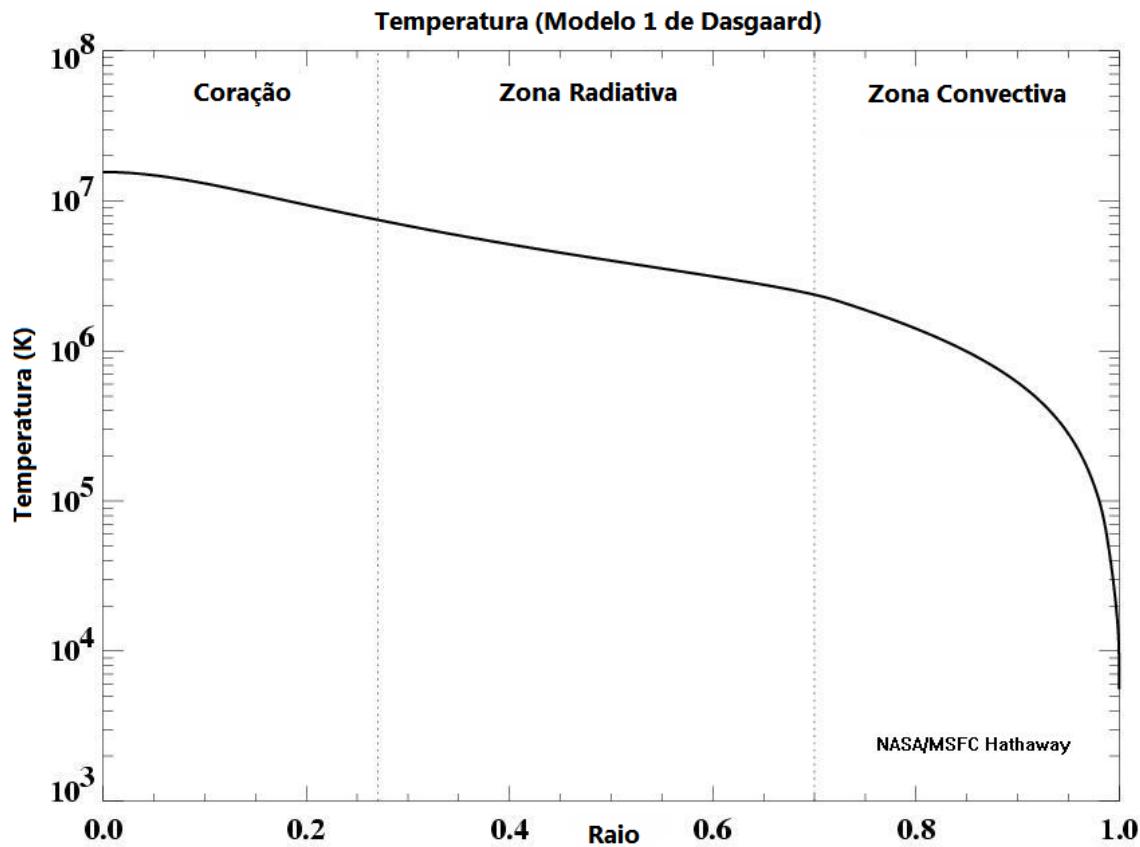
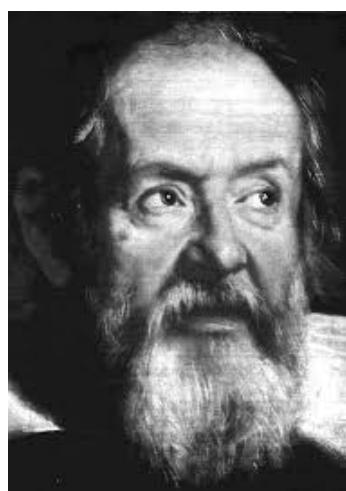


Figura 5.5: Gráfico da temperatura solar (Adaptado de <https://solarscience.msfc.nasa.gov/interior.shtml>. Acessado em 22/09/2019.)

Capítulo

# 6

## Resultados para o espalhamento elétron-pósitron



---

*“O livro da natureza está escrito em linguagem matemática”*  
**Galileu Galilei**

**C**hegamos, finalmente, ao primeiro de nossos resultados. Não por acaso escolhemos os dois principais processos de interação da EDQ: elétron-pósitron e Bhabha. Eles são os melhores testes do modelo padrão. Em particular o espalhamento elétron-pósitron que fornece os valores mais precisos para a constante de estrutura fina.

Partimos da introdução com o pressuposto de que os processos aqui estudados ocorreriam na escala de Planck, a partir da qual levantamos as hipóteses gerais de que: (i) embora pequenos, efeitos de violação de Lorentz na teoria à baixa energia devem existir; (ii) ocorre ação térmica intensa. Em particular de que (iii) ambos os efeitos devem emergir em conjunto e afetando, de alguma maneira, as seções de choque. Veremos, a partir de agora, como essas condições extremas de energia e temperatura responderam a tais hipóteses.

Neste capítulo, apresentamos apenas os resultados para o espalhamento elétron-pósitron, deixando aqueles referentes à interação Bhabha para o capítulo seguinte. Para não deixar os textos extensos, preferimos iniciar os cálculos partindo das amplitudes de transição já determinadas, reservando ao apêndice suas minuciosas demonstrações. Vamos principiar com uma breve revisão dos fundamentos teóricos.

## 6.1 Fundamentos

**EDQ no formalismo DCT:** Temperaturas extremas são ingredientes indissociável de processos na escala de Planck. Investigar o comportamento da matéria submetida a tais condições comumente presentes nos fenômenos astrofísicos exige o estudo de teorias de campo num contexto de temperatura finita. A DCT parte desse pressuposto, isto é, de que todo estado de vácuo dos sistemas estudados nessas circunstâncias é inevitavelmente afetado pela temperatura, incluída no formalismo através da transformação de Bogoliubov [46]. Dessa forma, dado qualquer operador  $\mathcal{O}$ , sua média se dará através de seu valor esperado no vácuo térmico,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle \quad (6.1)$$

com  $\beta = T^{-1}$ ,  $k_\beta = 1$ ,  $|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle$  o estado de vácuo térmico,  $|0, \tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$  um vetor de estado à  $T = 0$  pertencente ao espaço de Hilbert duplicado,  $\mathbb{S}_T = \mathbb{S} \otimes \tilde{\mathbb{S}}$ , e  $U(\beta)$  o operador unitário responsável pela transformação.  $U(\beta)$  também relaciona operadores de partículas às suas versões dependentes da temperatura:

$$c_{p_i}(s_i) = u(\beta)c_{p_i}(\beta, s_i) + v(\beta)\tilde{c}_{p_i}^\dagger(\beta, s_i) \quad \text{e} \quad \tilde{c}_{p_i}(s_i) = u(\beta)\tilde{c}_{p_i}(\beta, s_i) - v(\beta)c_{p_i}^\dagger(\beta, s_i), \quad (6.2)$$

com  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) a variável de spin com  $u(\beta)$  e  $v(\beta)$  os fatores térmicos para férmions. A dependência dos operadores com a temperatura não afeta as relações de anti-comutação entre eles:

$$\{c_p(\beta, s), c_q^\dagger(\beta, \sigma)\} = \delta_{s\sigma}\delta^3(p - q), \quad \{\tilde{c}_p(\beta, s), \tilde{c}_q^\dagger(\beta, \sigma)\} = \delta_{s\sigma}\delta^3(p - q), \quad (6.3)$$

mantendo ainda todos as outras relações iguais a zero. Os estados assintóticos do vácuo são agora parametrizados pela temperatura:

$$|i, \beta\rangle = c_{p_1}^\dagger(\beta, s_1)d_{p_2}^\dagger(\beta, s_2)|0(\beta)\rangle \quad \text{e} \quad |f, \beta\rangle = c_{p_3}^\dagger(\beta, s_3)d_{p_4}^\dagger(\beta, s_4)|0(\beta)\rangle.$$

Nesse contexto, o propagador do fóton também é termalizado:

$$\langle 0(\beta) | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0(\beta) \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik(x-y)} \Delta_{\mu\nu}(\kappa_{(l)}, \beta)_{(11)},$$

sendo  $\Delta_{\mu\nu}(\kappa_{(l)}, \beta)_{(11)}$  a componente física do propagador dado em (5.147), com  $l$  o possíveis canais do espalhamento. Com todos esses ingredientes a seção de choque no contexto da dinâmica de campos térmicos é escrita:

$$\frac{d\sigma(\beta)}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{P}'|}{64\pi^2 s |\mathbf{P}|} \langle |\mathcal{M}(\beta)|^2 \rangle, \quad (6.4)$$

com  $\mathcal{M}(\beta)$  dada por (5.106),  $\langle |\mathcal{M}(\beta)|^2 \rangle$  escrita em (5.109) e  $\sqrt{s} = E_{CM}$  a energia do centro massa, com média tomada sobre todos os spins das partículas envolvidas.

**Eletrodinâmica quântica estendida:** Além de investigar o setor fermiônico levando em conta a dinâmica de campos térmicos, estamos interessados em verificá-lo no contexto de violação de Lorentz. Escolhemos introduzir o mecanismo de violação por meio da quebra da simetria CPT-par via derivada covariante não-mínima com  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  a forma mínima da derivada e  $\lambda$  a constante de acoplamento entre  $K_{\mu\nu\theta\rho}$  e os campos físicos de interesse.

$$\mathfrak{D}_\mu = D_\mu + \frac{\lambda}{2} K_{\mu\nu\theta\rho} \gamma^\nu F^{\theta\rho}, \quad (6.5)$$

Além de apresentar traço duplo nulo,  $K_{\mu\nu\theta\rho}$  é antissimétrico na troca de índices primeiros vizinhos e

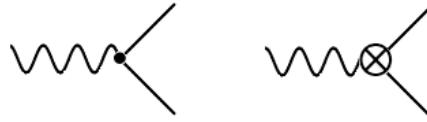


Figura 6.1: Vértices da EDQ usual e aquele advindo da violação de Lorentz, respectivamente.

simétrico na troca de índices segundos vizinhos [41]. A derivada assim modificada fornece-nos a versão estendida da equação de Dirac:  $i\gamma^\mu \mathfrak{D}_\mu \Psi = 0$ , com a matriz de Pauli dada por  $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$ . Assim, a lagrangiana total de interação será, portanto,

$$\mathcal{L}_{EDQE}^I = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu + \lambda \bar{\Psi} (\sigma_{\beta\nu} K^{\nu\mu} - \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta}) \kappa^\beta A^\alpha \Psi, \quad (6.6)$$

na qual  $-e\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu$  representa o termo convencional de interação da EDQ e

$$\mathcal{L}_{CPT+} = \lambda \bar{\Psi} (\sigma_{\beta\nu} K^{\nu\mu} - \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta}) \kappa^\beta A^\alpha \Psi \quad (6.7)$$

o termo de interação adicional que emerge devido à presença do campo de fundo  $K_{\mu\nu\theta\rho}$ , sendo  $K_{\mu\nu}$  um tensor de segunda ordem escrito a partir do primeiro e  $\kappa_\mu$  o 4-momento do fóton. Cada um desses vértices são grafados como  $\Gamma_{(a)}^\mu$ , sendo  $a = 0, 1$  o contador da espécie do vértice tal que

$$\bullet \rightarrow \Gamma_{(0)}^\mu = -ie\gamma^\mu, \quad (6.8)$$

$$\otimes \rightarrow \Gamma_{(1)}^\mu = \lambda V_{(1)}^\mu = -i\lambda (\sigma_{\beta\nu} K^{\nu\mu} - \sigma^{\mu\nu} K_{\nu\beta}) \kappa^\beta, \quad (6.9)$$

como mostrados na Figura 6.1. Vamos examinar o processo a partir do referencial do centro de massa, na qual  $|\kappa_0| = |(p_1 + p_2)_0| = |(p_3 + p_4)_0| = E_{CM}$ , com  $p_1, p_2, p_3, p_4$  o 4-momento do elétron, do pósitron, do mûon e do anti-mûon, respectivamente. Nesse referencial a componente  $\Gamma_{(1)}^0$  é nula, como se pode ver de (6.9). As únicas componentes que contribuirão virão da parte espacial do vértice:  $\Gamma_{(1)}^i = \Gamma_{+is}^i + \Gamma_{+an}^i + \Gamma_{imp}^i$ , nomeadamente a contribuição isotrópica de paridade par, a contribuição anisotrópica de paridade par e a contribuição de paridade ímpar:

$$\Gamma_{iso+}^i = -i\lambda \sqrt{s} K_{00} \sigma^{0i}, \quad \Gamma_{ani+}^i = i\lambda \sqrt{s} K^{ij} \sigma_{0j} \quad \text{e} \quad \Gamma_{imp}^i = -i\sqrt{s} \lambda K_j \sigma^{ij}, \quad (6.10)$$

respectivamente.

## 6.2 A amplitude de espalhamento

A amplitude de espalhamento à temperatura finita e com violação de Lorentz tanto para o espalhamento elétron-pósitron quanto para o espalhamento Bhabha encontram-se deduzidas no apêndice E e F respectivamente. Para a interação elétron-pósitron ela é dada por

$$\mathcal{M}_\lambda(\beta) = \sum_{a,b} \mathcal{M}_{(ab)\lambda}(\beta), \quad (6.11)$$

sendo

$$\mathcal{M}_{(ab)\lambda}(\beta) = i\mathbf{H}_\beta(|\kappa_0|) \frac{\Delta(\kappa, \beta)}{\kappa^2} [\bar{u}(3)\Gamma_{(a)}^\mu v(4)\bar{v}(2)\Gamma_{(b)\mu} u(1)](\mathbf{p}, s), \quad (6.12)$$

com  $\mathbf{H}_\beta(|\kappa_0|)$  dada pela equação (E.33):

$$(E.33) = \mathbf{H}_\beta(|\kappa_0|) = \tanh^2\left(\frac{\beta|\kappa_0|}{2}\right),$$

e  $\Delta(\kappa, \beta)$  escrita em (5.148). Vamos chamar de  $\mathcal{E}$  ao fator térmico:

$$\mathcal{E}(\beta) = \mathbf{H}_\beta^2(|\kappa_0|) |\Delta(\kappa, \beta)|^2 = \tanh^4\left(\frac{\beta E_{CM}}{2}\right) \left[ 1 + \frac{(2\pi s)^2 \delta_{reg}^2(s)}{(e^{\beta E_{CM}} - 1)^2} \right].$$

Em seguida, calculemos a soma:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}_\lambda(\beta)|^2 = \frac{\mathcal{E}(\beta)}{4} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}_\lambda|^2 = \mathcal{E}(\beta) \langle |\mathcal{M}_\lambda|^2 \rangle, \quad (6.13)$$

com

$$\langle |\mathcal{M}_\lambda|^2 \rangle = \frac{1}{4s^2} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \mathbb{E}_{(a,b)}^{\mu\nu} \mathbb{M}_{(c,d)\mu\nu}, \quad (6.14)$$

sendo

$$\mathbb{E}_{(ab)}^{\mu\nu} = tr \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu (\not{p}_1 + m_e) \Gamma_{(b)}^\nu (\not{p}_2 - m_e) \right\} \quad \text{e} \quad \mathbb{M}_{(ab)}^{\mu\nu} = tr \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu (\not{p}_3 + m_\mu) \Gamma_{(b)}^\nu (\not{p}_4 - m_\mu) \right\} \quad (6.15)$$

o fator eletrônico e muônico. Com esses elementos em mãos a expressão da seção de choque diferencial a uma dada temperatura finita  $T$  será escrita como

$$\frac{d\sigma_\lambda(\beta)}{d\Omega} = \mathcal{E}(\beta) \frac{d\sigma_\lambda}{d\Omega}, \quad (6.16)$$

ou melhor,

$\sigma_\lambda(\beta) = \mathcal{E}(\beta) \sigma_\lambda$

(6.17)

na qual

$$\sigma_\lambda = \frac{|\mathbf{p}'|}{64\pi^2 s^2 |\mathbf{p}|} \int \langle |\mathcal{M}_\lambda|^2 \rangle d\Omega = \frac{|\mathbf{p}'|}{64\pi^2 s^2 |\mathbf{p}|} \frac{1}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \mathbb{E}_{(a,b)}^{\mu\nu} \int d\Omega \mathbb{M}_{(c,d)\mu\nu}, \quad (6.18)$$

com integral angular executada apenas sobre o feixe de múons e  $\mathbf{p}'$  e  $\mathbf{p}$  os momentos final e inicial, respectivamente.

## 6.3 As contribuições de vértices

Para o cálculo de cada uma das contribuições dos vértices em (6.8) o limite ultra relativístico será considerado, isto é, com fator de inelasticidade tal que  $|\mathbf{p}'|/|\mathbf{p}| = 1$ . Dessa forma, as partes eletrônicas e muônica de (6.15) resumir-se-ão a

$$\mathbb{E}_{(a,b)}^{\mu\nu} = t_r \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu \not{p}_1 \bar{\Gamma}_{(b)}^\nu \not{p}_2 \right\} \text{ e } \mathbb{M}_{(a,b)}^{\mu\nu} = t_r \left\{ \Gamma_{(c)}^\mu \not{p}_3 \bar{\Gamma}_{(d)}^\nu \not{p}_4 \right\}. \quad (6.19)$$

As componentes não nulas dessas equações são aquelas em que  $a=b$ , uma vez que para  $a \neq b$  há o envolvimento de um número ímpar de matrizes  $\gamma^\alpha$  que, sob operação traço anulam-se; portanto,  $\mathbb{E}_{(01)}^{\mu\nu} = \mathbb{E}_{(10)}^{\mu\nu} = \mathbb{M}_{(01)}^{\mu\nu} = \mathbb{M}_{(10)}^{\mu\nu} = 0$ . Elas também serão nulas para  $\mu=0$  ou  $\nu=0$ , pois associam-se à componente  $\Gamma_{(1)}^0 = 0$ :  $\mathbb{E}_{(ab)}^{0i} = \mathbb{E}_{(ab)}^{i0} = \mathbb{M}_{(ab)}^{0i} = \mathbb{M}_{(ab)}^{i0} = 0$ . Com efeito as componentes não nulas desses fatores serão:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} &= t_r \left\{ \Gamma_{(0)}^i \not{p}_1 \Gamma_{(0)}^j \not{p}_2 \right\}, \quad \mathbb{E}_{(1,1)}^{ij} = t_r \left\{ \Gamma_{(1)}^i \not{p}_1 \Gamma_{(1)}^j \not{p}_2 \right\}, \\ \mathbb{M}_{(0,0)}^{ij} &= t_r \left\{ \Gamma_{(0)}^i \not{p}_4 \Gamma_{(0)}^j \not{p}_3 \right\} \text{ e } \mathbb{M}_{(1,1)}^{ij} = t_r \left\{ \Gamma_{(1)}^i \not{p}_4 \Gamma_{(1)}^j \not{p}_3 \right\}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Retornando-os em (6.18) a seção de choque ficará como

$$\sigma_\lambda = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{4s^3} \left\{ \mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(0,0)ij} + \mathbb{E}_{(1,1)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(1,1)ij} + \mathbb{E}_{(1,1)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(0,0)ij} \right\}. \quad (6.21)$$

### Componente isotrópica de paridade par

Vamos começar com o cálculo da contribuição advinda da componente isotrópica de paridade par  $\Gamma_{iso+}^i = -i\sqrt{s}K_{00}\sigma^{0i}$  dada em (6.10). Retornando este vértice em (6.20) os fatores não nulos ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} &= 2e^2 \left( s\delta^{ij} - 4p^i p^j \right), \quad \mathbb{E}_{(1,1)}^{ij} = 8\lambda^2 sK^2 p^i p^j, \\ \mathbb{M}_{(0,0)}^{ij} &= 2e^2 \left( s\delta^{ij} - 4p'^i p'^j \right) \text{ e } \mathbb{M}_{(1,1)}^{ij} = 8\lambda^2 sK_{00}^2 p'^i p'^j, \end{aligned}$$

que são os mesmos daqueles executados em (4.85), gerando, portanto, integrais iguais às de (4.88) e (4.89):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(0,0)ij} &= \frac{16\pi}{3} 4s^2 e^4 \quad \text{e} \\ \mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(1,1)ij} &= \mathbb{E}_{(1,1)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(0,0)ij} = \frac{16\pi}{3} 2s^3 e^2 \lambda^2 K_{00}^2, \end{aligned}$$

na qual a integral proporcional a  $\lambda^4$  foi desprezada. Substituindo-as em (6.18) e em seguida o resultado em (6.17), obtemos

$$\sigma_{\lambda+}^{\text{iso}}(\beta) = \mathcal{E}(\beta) \sigma_{\text{QED}} \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt{s}|\lambda K_{00}|}{e} \right)^2 \right], \quad (6.22)$$

com  $\mathcal{E}(\beta)$  dado por (6.13), sendo  $\sigma_{\text{QED}}$  simplesmente a seção de choque total da EDQ calculada em (3.36):

$$\sigma_{EDQ}(e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \left(1 + \frac{m_e^2}{2E^2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{m_\mu}{E}\right)^2}.$$

### Contribuição anisotrópica de paridade par

Façamos agora os cálculos para a contribuição anisotrópica de paridade de (6.10) que é  $\Gamma_{ani+}^i = i\lambda\sqrt{s}K^{ij}\sigma_{0j}$ . Neste caso os fatores eletrônicos de (6.21) serão dados por

$$\mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} = 2e^2(s\delta^{ij} - 4p^i p^l) \text{ e } \mathbb{E}_{(1,1)}^{ij} = 8\lambda^2 s K^{ik} K^{jl} p_l p_k, \quad (6.23)$$

sendo exatamente iguais às suas versões muônicas, obtidas simplesmente trocando-se  $p$  por  $p'$ . As integrais em (6.21) para este caso já foram calculadas em (4.94):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(0,0)ij} &= \frac{16\pi}{3} 4s^2 e^4, & \mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(1,1)ij} &= \frac{16\pi}{3} s^2 e^2 \lambda^2 \left( s|\mathbf{K}|^2 - 4(p^i K_{ij})^2 \right), \\ \mathbb{E}_{(1,1)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(0,0)ij} &= \frac{16\pi}{3} 4e^2 s^2 \lambda^2 (p^i K_{ij})^2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

onde  $|\mathbf{K}|^2 = K^{ij} K_{ij}$ . Levando-as em (6.21) e na sequência retornando o resultado em (6.17) chega-se na seção de choque

$$\boxed{\sigma_{\lambda+}^{\text{an}}(\beta) = \mathcal{E}(\beta) \sigma_{EDQ} \left\{ 1 + \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 \left[ \left( \frac{\sqrt{s}|\mathbf{K}|}{2} \right)^2 + (p^i K_{ij})^2 \right] \right\}.} \quad (6.25)$$

Pode-se ainda escolher uma dada direção entre o feixe de partículas e o campo de fundo tal que  $p^i K_{ij} = 0$ , fornecendo-nos

$$\sigma_{\lambda+}^{\text{an}}(\beta) = \mathcal{E}(\beta) \sigma_{EDQ} \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt{s}\lambda|\mathbf{K}|}{2e} \right)^2 \right]. \quad (6.26)$$

### Contribuição de paridade ímpar

Finalmente vamos determinar a componente de paridade ímpar de (6.10):  $\Gamma_{(1)}^i = -i\sqrt{s}\lambda K_j \sigma^{ij}$ . As componentes não nulas das partes eletrônicas são agora dadas por

$$\mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} = 2e^2(s\delta^{ij} - 4p^i p^j) \text{ e } \mathbb{E}_{(1,1)}^{ij} = 8\lambda^2 s \epsilon^{ikl} \epsilon^{jmn} K_k K_l p_m p_n,$$

com as contrapartes muônicas conseguidas trocando-se  $p$  por  $p'$ . As integrais em (6.21) para este caso também já foram calculadas; elas estão coligidas em (4.80) e são,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(0,0)ij} &= \frac{16\pi}{3} 4s^2 e^4, & \mathbb{E}_{(0,0)}^{ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(1,1)ij} &= \frac{16\pi}{3} e^2 \lambda^2 \left( s|\mathbf{K}|^2 + 4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{K})^2 \right), \\ \mathbb{E}_{(1,1)ij} \int d\Omega \mathbb{M}_{(0,0)ij} &= \frac{16\pi}{3} e^2 \lambda^2 \left( s|\mathbf{K}|^2 - 8(\mathbf{p} \cdot \mathbf{K})^2 \right), \end{aligned} \quad (6.27)$$

com  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{K}) = p^i K_j$ . Substituindo esse conjunto de integrais em (6.21) chega-se a

$$\boxed{\sigma_{\lambda}^{imp}(\beta) = \mathcal{E}(\beta) \sigma_{EDQ} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda}{2e} \right)^2 \left( 3s|\mathbf{K}| - 4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{K})^2 \right) \right]}, \quad (6.28)$$

Devido ao ângulo  $\delta$  entre o feixe de partículas e o campo  $\mathbf{K}$ , essa equação fornece-nos ainda duas possibilidades mais evidentes, a saber, quando  $\delta = 0$  e quando  $\delta = \pi/2$ , respectivamente:

$$\sigma_{\lambda}^{imp}(\beta) \Big|_{\alpha=0} = \mathcal{E}(\beta) \sigma_{EDQ} \left[ 1 + 3 \left( \frac{\sqrt{s} |\lambda \mathbf{K}|}{2e} \right)^2 \right] \text{ e } \sigma_{\lambda}^{imp}(\beta) \Big|_{\alpha=\pi/2} = \mathcal{E}(\beta) \sigma_{EDQ} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{s} |\lambda \mathbf{K}|}{e} \right)^2 \right], \quad (6.29)$$

com  $|\mathbf{p}| = \sqrt{s}/2$ .

## Análise dos resultados

O resultado obtido em (6.22) é bastante geral, além de demonstrar claramente os efeitos globais da temperatura sobre o processo, quaisquer que sejam os vértices envolvidos. Como se vê, no caso limite de  $T = 0$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ) para a qual  $\tanh(\beta E_{CM}/2) \rightarrow 1$  e  $(e^{\beta \sqrt{2}/2} - 1)^{-1} \rightarrow 0$  fazendo com que

$$\mathcal{E}(\beta) \Big|_{\beta \rightarrow \infty} \longrightarrow 1,$$

fornecendo-nos

$$\boxed{\sigma_{\lambda}(\beta) \Big|_{\beta \rightarrow \infty} = \sigma_{\lambda}}, \quad (6.30)$$

com  $\sigma_{\lambda}$  dada em (6.18), que é exatamente a expressão geral da seção de choque obtida em [41] considerando-se os efeitos da violação de Lorentz CPT-par mas num processo sem a dinâmica de campos térmicos. Em contraste, os efeitos sobre a seção de choque começam a ser intensos à medida que  $T$  cresce consideravelmente ( $\beta \rightarrow 0$ ). No que se refere ao termo de violação, as estimativas feitas em [41] fornecem limites superiores para  $|\lambda K|$  sempre dentro da ordem de  $10^{-12}(\text{eV})^{-1}$ , sendo relevantes, portanto, na escala de Planck e em processos astrofísicos. Claramente que, para  $T$  e  $\lambda$  simultaneamente desprezíveis (sistema à baixas energias) a seção de choque diferencial da EDQ convencional é retomada, isto é,

$$\boxed{\sigma_{\lambda}(\beta) \Big|_{\beta \rightarrow \infty}^{\lambda=0} = \sigma_{EDQ}}. \quad (6.31)$$

## Os novos diagramas

Na sequência tem-se o conjunto de gráficos representativo do espalhamento elétron-pósitron à temperatura finita e no contexto de violação da simetria de Lorentz e CPT-par. O primeiro diagrama representa o processo da EDQ com seus vértices convencionais  $\bullet <$ . Adicionado a ele estão as três contribuições geradas pela violação de Lorentz com vértices  $\otimes <$ .

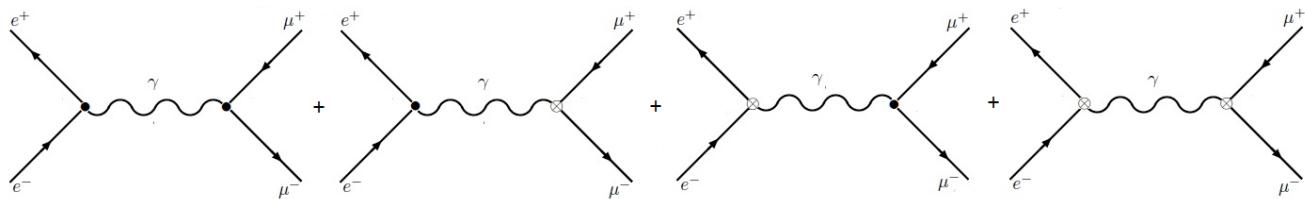


Figura 6.2: Resultado gráfico para o espalhamento elétron-pósitron.

## Resultados para o espalhamento Bhabha



---

*“Os segredos do cosmos começarão a se desvendar.  
Eu, por exemplo, não posso esperar.”*

**Lisa Randall**

**F**inalizamos esta tese com a apresentação de nosso segundo resultado, a determinação da seção de choque do espalhamento Bhabha à temperatura finita e no contexto de violação da simetria de Lorentz.

Diferentemente do caso anterior em que os cálculos foram executados tomando-se o limite ultra-relativístico previamente à determinação dos traços nos fatores eletrônicos e muônicos, aqui os diferentes fatores eletrônicos foram calculados levando-se em conta as massas de todas as partículas, deixando, para o final, o caso particular do limite ultra-relativístico. Uma vez mais, partimos da amplitude de espalhamento como dada, deixando para o apêndice F sua demonstração detalhada.

Cumpre ressaltar também que optamos por apresentar os cálculos apenas para o subsetor de paridade ímpar. Tal escolha, embora arbitrária, não trouxe nenhuma interferência substancial no resultado final, uma vez que, em qualquer um dos três casos, o valor do parâmetro de violação mostrou ser sempre da mesma ordem.

## 7.1 A amplitude de espalhamento e seção de choque geral

As equações (F.25), (F.27) e (F.28), no apêndice F, coligem a estrutura da amplitude de probabilidade termalizada do espalhamento Bhabha CPT-par:

$$\mathcal{M}_\lambda(\beta) = \sum_{a,b} \mathcal{M}_{(ab)\lambda}(\beta), \quad (7.1)$$

sendo

$$\mathcal{M}_{(ab)\lambda}(\beta) = \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(t)}(\beta) + \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(s)}(\beta), \quad (7.2)$$

na qual

$$\mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(t)}(\beta) = +i \frac{\tanh^2\left(\frac{\beta E_{CM}}{2}\right)}{t} \Delta(t, \beta) \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(3) \right] \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(a)}^\nu v(2) \right] (p, s), \quad (7.3)$$

$$\mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(s)}(\beta) = -i \frac{\tanh^2\left(\frac{\beta E_{CM}}{2}\right)}{s} \Delta(s, \beta) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(a)}^\mu u(3) \right] \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\nu v(2) \right] (p, s), \quad (7.4)$$

são as amplitude do canal  $t$  e a do canal  $s$ . Nessas equações temos ainda

$$\Delta(t, \beta) = 1 - i \frac{(2\pi)t\delta(t)}{e^{\beta E_{CM}} - 1} \quad \text{e} \quad \Delta(s, \beta) = 1 - i \frac{(2\pi)s\delta(s)}{e^{\beta E_{CM}} - 1}. \quad (7.5)$$

Com esses ingredientes, pode-se calcular a seção de choque levando-se em contas os três canais

$$\left( \frac{d\sigma_\lambda}{d\Omega} \right)_\beta = \frac{\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda(\beta) \right|^2 \right\rangle}{(8\pi E_{CM})^2} = \left( \frac{d\sigma_\lambda^{(s)}}{d\Omega} \right)_\beta + \left( \frac{d\sigma_\lambda^{(t)}}{d\Omega} \right)_\beta + \left( \frac{d\sigma_\lambda^{(u)}}{d\Omega} \right)_\beta,$$

(7.6)

com

$$\left( \frac{d\sigma_\lambda^{(s)}}{d\Omega} \right)_\beta = \frac{\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda^{(s)}(\beta) \right|^2 \right\rangle}{(8\pi E_{CM})^2}, \quad (7.7)$$

$$\left( \frac{d\sigma_{\lambda}^{(t)}}{d\Omega} \right)_{\beta} = \frac{\left\langle \left| \mathcal{M}_{\lambda}^{(t)}(\beta) \right|^2 \right\rangle}{(8\pi E_{CM})^2} \quad \text{e} \quad \left( \frac{d\sigma_{\lambda}^{(u)}}{d\Omega} \right)_{\beta} = -2 \frac{\Re e \left\{ \mathcal{M}_{\lambda}^{(s)}(\beta) \mathcal{M}_{\lambda}^{\dagger(t)}(\beta) \right\}}{(8\pi E_{CM})^2}, \quad (7.8)$$

sendo

$$\left\langle \left| \mathcal{M}_{\lambda}(\beta) \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left| \mathcal{M}_{\lambda}^{(s)}(\beta) \right|^2 \right\rangle + \left\langle \left| \mathcal{M}_{\lambda}^{(t)}(\beta) \right|^2 \right\rangle - 2\Re e \left\{ \mathcal{M}_{\lambda}^{(s)}(\beta) \mathcal{M}_{\lambda}^{\dagger(t)}(\beta) \right\}, \quad (7.9)$$

na qual o último termo se refere ao canal de mistura,  $u$ .

## Canal s

Primeiramente vamos determinar o termo associado ao canal  $s$  de modo a escrevê-lo em termos dos fatores eletrônicos. Escrevendo-se

$$A_a^{\mu} = \bar{u}(3)\Gamma_{(a)}^{\mu}v(4), \quad B_{va} = \bar{v}(2)\Gamma_{v(a)}u(1), \quad \bar{C}_c^v = \bar{v}(4)\bar{\Gamma}_{(a)}^v u(3), \quad \bar{D}_{v(d)} = \bar{u}(1)\Gamma_{\mu(d)}v(2), \quad (7.10)$$

além do fator térmico que emergirá na sequência dos cálculos:

$$S(\beta) = \tanh^4 \left( \frac{\beta E_{CM}}{2} \right) \left[ 1 + \frac{(2\pi)^2 s^2 \delta^2(s)}{(e^{\beta E_{CM}} - 1)^2} \right]. \quad (7.11)$$

Usando-se as regras em (3.12) e (3.13), calcula-se

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \mathcal{M}_{\lambda}^{(s)}(\beta) \right|^2 \right\rangle &= \frac{1}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \sum_{\text{Spin}} \left| \mathcal{M}_{\lambda}^{(s)} \mathcal{M}_{\lambda}^{\dagger(s)} \right| = \frac{\tanh^4 \left( \frac{\beta E_{CM}}{2} \right)}{4s^2} \sum_{a,b,c,d} \sum_{\text{Spins}} A_a^{\mu} B_{vb} \bar{C}_c^v \bar{D}_{\mu d} |\Delta(s)|^2 \\ &= \frac{\mathcal{S}(\beta)}{4s^2} \left\{ \sum_{a,b} \mathbb{S}_{(ab)}^{\mu\nu} \right\} \left\{ \sum_{c,d} \mathbb{S}'_{(cd)\mu\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbb{S}'_{(ab)\mu\nu} &= \sum_{\text{Spin}} B_{a\mu} \bar{D}_{b\nu} = \text{tr} \left\{ \Gamma_{\mu(a)} \left( \sum_{\text{Spin}} u(1) \bar{u}(1) \right) \bar{\Gamma}_{v(b)} \left( \sum_{\text{Spin}} v(2) \bar{v}(2) \right) \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \Gamma_{\mu(a)} \left( p'_1 + m \right) \bar{\Gamma}_{v(b)} \left( p'_2 - m \right) \right\} \quad \text{e} \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{(ab)}^{\mu\nu} &= \sum_{\text{Spin}} A_a^{\mu} \bar{C}_b^v = \text{tr} \left\{ \Gamma_{(a)}^{\mu} \left( \sum_{\text{Spin}} v(4) \bar{v}(4) \right) \bar{\Gamma}_{(b)}^v \left( \sum_{\text{Spin}} u(3) \bar{u}(3) \right) \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \Gamma_{(a)}^{\mu} \left( p'_4 - m \right) \bar{\Gamma}_{(b)}^v \left( p'_3 + m \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Retornando-se (7.12) em (7.7) a expressão geral da seção de choque para o canal  $s$  é escrita:

$$\left( \frac{d\sigma_{\lambda}^{(s)}}{d\Omega} \right)_{\beta} = \frac{\left\langle \left| \mathcal{M}_{\lambda}^{(s)}(\beta) \right|^2 \right\rangle}{(8\pi E_{CM})^2} = \frac{\mathcal{S}(\beta)}{(8\pi E_{CM})^2} \frac{1}{4s^2} \left\{ \sum_{a,b} \mathbb{S}_{(ab)}^{\mu\nu} \right\} \left\{ \sum_{c,d} \mathbb{S}'_{(cd)\mu\nu} \right\}. \quad (7.15)$$

## Canal t

Os cálculos para o canal  $t$  são semelhantes aos já executados no canal  $s$ : usando-se (3.12) e (3.13) e escrevendo-se previamente

$$\begin{aligned} E_a^\mu &= \bar{u}(3)\Gamma_a^\mu u(1), \quad F_{va} = \bar{v}(2)\Gamma_{v(a)} v(4), \quad \bar{G}_c^\nu = \bar{u}(1)\bar{\Gamma}_{(a)}^\nu u(3), \\ \bar{Z}_{vd} &= \bar{v}(4)\Gamma_{\mu(d)} v(2) \quad \text{e} \\ \mathcal{T}(\beta) &= \tanh^4\left(\frac{\beta E_{CM}}{2}\right) \left[ 1 + \frac{(2\pi)^2 t^2 \delta^2(t)}{(e^{\beta E_{CM}} - 1)^2} \right], \end{aligned} \quad (7.16)$$

o fator térmico associado a este canal, obtém-se

$$\left( \frac{d\sigma_\lambda^{(t)}}{d\Omega} \right)_\beta = \frac{\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda^{(s)}(\beta) \right|^2 \right\rangle}{(8\pi E_{CM})^2} = \frac{\mathcal{T}(\beta)}{(8\pi E_{CM})^2} \frac{1}{4t^2} \left\{ \sum_{a,b} \mathbb{T}_{(ab)}^{\mu\nu} \right\} \left\{ \sum_{c,d} \mathbb{T}'_{(cd)\mu\nu} \right\} \quad (7.17)$$

sendo, agora

$$\mathbb{T}'_{(ab)\mu\nu} = \sum_{\text{Spin}} F_{\mu a} \bar{Z}_{vb} = \text{tr} \left\{ \Gamma_{\mu(a)} \left( p_2 - m \right) \bar{\Gamma}_{v(b)} \left( p_4 - m \right) \right\}, \quad (7.18)$$

$$\mathbb{T}_{(ab)}^{\mu\nu} = \sum_{\text{Spin}} E_a^\mu \bar{G}_b^\nu = \text{tr} \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu \left( p_3 + m \right) \bar{\Gamma}_{(b)}^\nu \left( p_1 + m \right) \right\}. \quad (7.19)$$

## Canal $u$

Para este canal, além das Eqs. (7.2), (7.3) e (7.4) vamos escrever que

$$\mathcal{U}(\beta) = \tanh^4\left(\frac{\beta E_{CM}}{2}\right) \Delta^*(s) \Delta(t), \quad (7.20)$$

com  $\Delta^*(s)$  e  $\Delta(t)$  dadas em (7.5). Dessa forma, obtém-se

$$2\Re e \left\{ \mathcal{M}_\lambda^t(\beta) \mathcal{M}_\lambda^{\dagger s}(\beta) \right\} = \frac{\Re e \left\{ \mathcal{U}(\beta) \right\}}{2ts} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \sum_{\text{Spin}} A_a^\mu \bar{D}_{vd} B_{\mu b} \bar{C}_c^\nu \quad (7.21)$$

$$= \frac{\Re e \left\{ \mathcal{U}(\beta) \right\}}{2ts} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \mathbb{U}_{(abcd)}, \quad (7.22)$$

com

$$\Re e \left\{ \mathcal{U}(\beta) \right\} = \tanh^4\left(\frac{\beta E_{CM}}{2}\right) \left[ 1 + \frac{(2\pi)^2 s \delta(s) t \delta(t)}{(e^{\beta E_{CM}} - 1)^2} \right], \quad (7.23)$$

o fator térmico do canal, sendo

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{(abcd)} &= \sum_{\text{Spin}} A_a^\mu \bar{D}_{vd} B_{\mu b} \bar{C}_c^\nu \\ &= \text{tr} \left\{ \left( p_3 + m \right) \Gamma_{(a)}^\mu \left( p_4 - m \right) \bar{\Gamma}_{(b)} \left( p_2 - m \right) \Gamma_{\mu(c)} \left( p_1 + m \right) \bar{\Gamma}_{(d)}^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Com essas peças, chega-se na expressão da seção de choque para o canal  $u$ :

$$\left( \frac{d\sigma_\lambda^{(u)}}{d\Omega} \right)_\beta = -2 \frac{\Re e \left\{ \mathcal{M}_\lambda^{(s)}(\beta) \mathcal{M}_\lambda^{\dagger t}(\beta) \right\}}{(8\pi E_{CM})^2} = -\frac{\Re e \left\{ \mathcal{U}(\beta) \right\}}{(8\pi E_{CM})^2} \frac{1}{2ts} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \mathbb{U}_{(abcd)}. \quad (7.25)$$

## A seção de choque

Juntando-se as equações (7.15), (7.17) e (7.25) e levando-as na equação (7.6), a expressão geral da seção de choque para o espalhamento Bhabha é obtida:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma_\lambda}{d\Omega} \right)_\beta &= \left( \frac{d\sigma_\lambda^{(s)}}{d\Omega} \right)_\beta + \left( \frac{d\sigma_\lambda^{(t)}}{d\Omega} \right)_\beta + \left( \frac{d\sigma_\lambda^{(u)}}{d\Omega} \right)_\beta = \frac{\mathcal{S}(\beta)}{(8\pi E_{CM})^2} \frac{1}{4s^2} \left\{ \sum_{a,b} \mathbb{S}_{(ab)}^{\mu\nu} \right\} \left\{ \sum_{c,d} \mathbb{S}'_{(cd)\mu\nu} \right\} + \\ &+ \frac{\mathcal{T}(\beta)}{(8\pi E_{CM})^2} \frac{1}{4t^2} \left\{ \sum_{a,b} \mathbb{T}_{(ab)}^{\mu\nu} \right\} \left\{ \sum_{c,d} \mathbb{T}'_{(cd)\mu\nu} \right\} \\ &- \frac{\Re e\{\mathcal{U}(\beta)\}}{(8\pi E_{CM})^2} \frac{1}{2ts} \sum_{a,b,c,d} \mathbb{U}_{(abcd)}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

com  $\mathcal{S}(\beta)$ ,  $\mathbb{S}_{(ab)}^{\mu\nu}$ ,  $\mathbb{S}'_{(cd)\mu\nu}$ ,  $\mathcal{T}(\beta)$ ,  $\mathbb{T}_{(ab)}^{\mu\nu}$ ,  $\mathbb{T}'_{(cd)\mu\nu}$ ,  $\Re e\{\mathcal{U}(\beta)\}$  e  $\mathbb{U}_{(abcd)}$  dadas pelas equações (7.11), (7.14), (7.13), (7.16), (7.18), (7.19), (7.23) e (7.24), respectivamente.

## 7.2 A contribuição de paridade ímpar

Segue-se os cálculos da seção de choque total com a contribuição de vértice de paridade ímpar, isto é,

$$\boxed{\Gamma_{\text{imp}}^i = \sqrt{s}\lambda K_j \sigma^{ij}}, \quad (7.27)$$

que é dado pela Equação (4.50(iii)).

### Contribuição do canal s

O cálculo do fator dado em (7.14) que envolve apenas o vértice usual da EDQ ( $a = b = 0$ ) é conhecido (veja o apêndice C):

$$\mathbb{S}_{(00)}^{\mu\nu} = 4e^4 \left[ p_4^\mu p_3^\nu + p_4^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu} (p_3 \cdot p_4) + g^{\mu\nu} m^2 \right]. \quad (7.28)$$

Para o cálculo que envolve a contribuição CPT-par ( $a = b = 1$ ), uma vez que  $\Gamma_{(1)}^0 = 0$  e usando a Eq. (7.27), a única contribuição virá da parte espacial

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{(11)}^{ij} &= \lambda^2 T_r \left\{ K_l \sigma^{li} (p_4 - m) K_m \sigma^{mj} (p_3 - m) \right\} \\ &= 4s\lambda^2 \left\{ K^i K^j m^2 - g^{ij} |\mathbf{K}|^2 m^2 + p_4^i p_3^j |\mathbf{K}|^2 + p_4^j p_3^i |\mathbf{K}|^2 - p_4^i K^j (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_3) + \right. \\ &\quad \left. - p_4^j K^i (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_3) - p_3^i K^j (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_4) - p_3^j K^i (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_4) + 2g^{ij} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_3)(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_4) + K^i K^j (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4) - g^{ij} |\mathbf{K}|^2 (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4) \right\}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Para determinar as componentes  $\mathbb{S}_{(00)\mu\nu}$  e  $\mathbb{S}_{(11)ij}^0$  basta substituir  $p_3$  por  $p_1$ ,  $p_4$  por  $p_2$  e  $(p' - m)$  por  $(p' + m)$ . Os fatores com configuração (0,1) e (1,0) se anulam, uma vez que envolve o produto de um número ímpar de matrizes  $\gamma$ , enquanto que qualquer configuração (1,1) se um dos índices gregos for zero, já que neste caso  $\Gamma_{(a)}^0 = 0$ :

$$\mathbb{S}_{(01)}^{\mu\nu} = \mathbb{S}_{(10)}^{\mu\nu} = 0, \quad \mathbb{S}_{(11)}^{0\mu} = \mathbb{S}_{(11)}^{\mu 0} = 0. \quad (7.30)$$

Com essas considerações (7.15) torna-se

$$\left( \frac{d\sigma_\lambda^{(s)}}{d\Omega} \right)_\beta^{\text{imp}} = \frac{\mathcal{S}(\beta)}{(8\pi E_{CM})^2} \frac{1}{4s^2} \left\{ \mathbb{S}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{S}'_{(00)\mu\nu} + 2\mathbb{S}_{(00)}^{ij} \mathbb{S}'_{(11)ij} \right\}. \quad (7.31)$$

Para o cálculo de cada um dos termos acima vamos levar em conta o centro de massa do sistema especificado nas equações (2.2) e as variáveis de Mandelstam nas equações (2.3). Com isso, teremos

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{S}'_{(00)\mu\nu} &= 32e^4 \left[ 6m^4 - m^2(s+t+u) + \frac{u^2+t^2}{4} \right], \\ \mathbb{S}_{(00)}^{ij} \mathbb{S}'_{(11)ij} &= -32e^2\lambda^2 \left[ m^2 \left( 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2|\mathbf{K}|^2 \right) + 2|\mathbf{p}|^2 \left( 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 - 2|\mathbf{K}|^2|\mathbf{p}|^2 \right) \right].\end{aligned}\quad (7.32)$$

Retornando-as em (7.31) chega-se a

$$\begin{aligned}\left( \frac{d\sigma_\lambda^{(s)}}{d\Omega} \right)_\beta^{\text{imp}} &= \frac{\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda^{(s)}(\beta) \right|^2 \right\rangle}{(8\pi E_{CM})^2} \\ &= 2 \left( \frac{\alpha^2}{E_{CM}^2} \right) \frac{\mathcal{S}(\beta)}{s^2} \left[ I_\lambda(m) - 2 \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 |\mathbf{p}|^2 \left( 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 - |\mathbf{K}|^2|\mathbf{p}|^2 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^2}{E_{CM}^2} \right) \mathcal{S}(\beta) \left\{ \frac{u^2+t^2}{s^2} \right\},\end{aligned}\quad (7.33)$$

com  $\alpha = e^2/4\pi$  e

$$I_\lambda(m) = m^2 \left[ 6m^2 - (s+t+u) - \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 \left( 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2|\mathbf{K}|^2 \right) \right].\quad (7.34)$$

## Contribuição do canal $t$

O cálculo da seção de choque associado ao canal  $t$  segue os mesmos passos executados para o canal  $s$ . O cálculo do fator dado na equação (7.19) para a configuração  $a = b = 0$  é conhecido:

$$\mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu} = 4e^4 \left[ p_3^\mu p_1^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_3) + g^{\mu\nu}m^2 \right].\quad (7.35)$$

Para contribuição CPT-par a componente não nula ficará

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{(11)}^{ij} &= \lambda^2 t_r \left\{ K_l \sigma^{li} (\not{p}_3 + m) K_m \sigma^{mj} (\not{p}_1 + m) \right\} \\ &= 4se^2\lambda^2 \left\{ K^i K^j m^2 - g^{ij}|\mathbf{K}|^2 m^2 + p_3^i p_1^j |\mathbf{K}|^2 + p_3^j p_1^i |\mathbf{K}|^2 - p_3^i K^j (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_1) \right. \\ &\quad - p_3^j K^i (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_1) - p_1^i K^j (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_3) - p_1^j K^i (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_3) + 2g^{ji}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_3) \\ &\quad \left. + K^i K^j (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3) - g^{ij}|\mathbf{K}|^2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3) \right\}.\end{aligned}\quad (7.36)$$

As formas covariantes são obtidas trocando-se  $p_3$  por  $p_4$ ,  $p_1$  por  $p_2$  e  $(\not{p} + m)$  por  $(\not{p} - m)$ . Usando os mesmos argumentos usados para a contribuição do canal  $s$  anulam os seguintes fatores:

$$\mathbb{T}_{(01)}^{\mu\nu} = \mathbb{T}_{(10)}^{\mu\nu} = 0, \quad \mathbb{T}_{(11)}^{0\mu} = \mathbb{T}_{(11)}^{\mu 0} = 0.\quad (7.37)$$

Da mesma forma, uma vez que  $\mathbb{T}_{(01)}^{\mu\nu} \mathbb{T}_{(11)}^{0\nu} = \mathbb{T}_{(11)}^{0\nu} \mathbb{T}_{(01)}^{\mu\nu}$ , teremos

$$\left( \frac{d\sigma_\lambda^{(t)}}{d\Omega} \right)_\beta^{\text{imp}} = \frac{\mathcal{T}(\beta)}{(8\pi E_{CM})^2} \frac{1}{4t^2} \left\{ \mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{T}'_{(00)\mu\nu} + 2\mathbb{T}_{(00)}^{ij} \mathbb{T}'_{(11)ij} \right\}.\quad (7.38)$$

Considerando-se os momentos a partir do referencial no centro de massa como dados em (2.2) e as variáveis de Mandelstam em (2.3) os dois termos acima são determinados:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(00)}^{\mu\nu} \mathbb{T}'_{(00)\mu\nu} &= 32e^4 \left[ 2m^4 + m^2(t-u-s) + \frac{s^2+u^2}{4} \right], \\ \mathbb{T}_{(00)}^{ij} \mathbb{T}'_{(11)ij} &= -32e^2\lambda^2 \left[ m^2 \left( 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2|\mathbf{K}|^2 \right) - 2|\mathbf{p}|^2 \left( 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2|\mathbf{K}|^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Retornando-as na equação (7.38) chega-se finalmente na contribuição CPT-par da seção para o canal  $t$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma_\lambda^{(t)}}{d\Omega} \right)_\beta^{\text{imp}} &= \frac{\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda^{(t)}(\beta) \right|^2 \right\rangle}{(8\pi E_{CM})^2} \\ &= 2 \left( \frac{\alpha^2}{E_{CM}^2} \right) \frac{\mathcal{T}(\beta)}{t^2} \left[ \Pi_\lambda(m) - 2 \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 |\mathbf{p}|^2 \left( 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 - |\mathbf{K}|^2 |\mathbf{p}|^2 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^2}{E_{CM}^2} \right) \mathcal{T}(\beta) \left\{ \frac{u^2+s^2}{t^2} \right\}, \end{aligned} \quad (7.40)$$

na qual

$$\Pi_\lambda(m) = m^2 \left[ 2m^2 - (s+u-t) - \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 \left( 2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2|\mathbf{K}|^2 \right) \right]. \quad (7.41)$$

## Contribuição do canal de interferência $u$

Para este canal, a análise das configurações possíveis para a equação (7.24) a partir do centro de massa, sob o traço de produto de matrizes  $\gamma^\mu$  e relevância na ordem da constante de acoplamento  $\lambda$  leva-nos a

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{(0001)} &= \mathbb{U}_{(0010)} = \mathbb{U}_{(0100)} = \mathbb{U}_{(1000)} = 0, \\ \mathbb{U}_{(1110)} &= \mathbb{U}_{(1101)} = \mathbb{U}_{(0111)} = \mathbb{U}_{(1011)} = 0, \\ \mathbb{U}_{(1001)} &= \mathbb{U}_{(0011)} = \mathbb{U}_{(1100)} = 0 \\ \mathbb{U}_{(1111)} &\propto \lambda^4 \sim 0, \end{aligned} \quad (7.42)$$

de modo que dos 16 termos gerados apenas quatro não se anulam, fornecendo-nos

$$\sum_{a,b} \sum_{c,d} \mathbb{U}_{(abcd)} = \mathbb{U}_{(0000)} + \mathbb{U}_{(0110)} + \mathbb{U}_{(0101)} + \mathbb{U}_{(1010)}, \quad (7.43)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{(0000)} &= \text{tr} \left\{ (\not{p}_3 + m) \Gamma_{(0)}^\mu (\not{p}_4 - m) \bar{\Gamma}_{(0)\nu} (\not{p}_2 - m) \Gamma_{(0)\mu} (\not{p}_1 + m) \bar{\Gamma}_{(0)}^\nu \right\} \\ \mathbb{U}_{(0110)} &= \text{tr} \left\{ (\not{p}_3 + m) \Gamma_{(0)}^\mu (\not{p}_4 - m) \bar{\Gamma}_{(1)\nu} (\not{p}_2 - m) \Gamma_{(1)\mu} (\not{p}_1 + m) \bar{\Gamma}_{(0)}^\nu \right\} \\ \mathbb{U}_{(0101)} &= \text{tr} \left\{ (\not{p}_3 + m) \Gamma_{(0)}^\mu (\not{p}_4 - m) \bar{\Gamma}_{(1)\nu} (\not{p}_2 - m) \Gamma_{(0)\mu} (\not{p}_1 + m) \bar{\Gamma}_{(1)}^\nu \right\} \\ \mathbb{U}_{(1010)} &= \text{tr} \left\{ (\not{p}_3 + m) \Gamma_{(1)}^\mu (\not{p}_4 - m) \bar{\Gamma}_{(0)\nu} (\not{p}_2 - m) \Gamma_{(1)\mu} (\not{p}_1 + m) \bar{\Gamma}_{(0)}^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

De posse do vértice (7.27) (lembrando que  $\Gamma_{(0)}^\mu = -ie^2\gamma^\mu$ ) e das propriedades do traço sobre as matrizes de Dirac no apêndice B, cada um dos traços acima é calculado:

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{(0000)} &= -32e^4 \left[ m^4 + \frac{m^2}{2}(s-t-3u) + \frac{u^2}{4} \right], \\
\mathbb{U}_{(0110)} &= -32e^2\lambda^2sm^2 \left( |\mathbf{K}|^2|\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 \right), \\
\mathbb{U}_{(0101)} &= -32\frac{e^2\lambda^2s}{2} \left( 2|\mathbf{p}|^2 - m^2 \right) \left[ m^2 - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 \right], \\
\mathbb{U}_{(1010)} &= -32\frac{e^2\lambda^2s}{4} \left[ |\mathbf{p}|^2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 - m^2 \left( 5(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2|\mathbf{K}|^2 + 4|\mathbf{K}|^2|\mathbf{p}|^2 \right) \right].
\end{aligned} \tag{7.45}$$

Levando-as na equação (7.25) obtém-se a contribuição do canal de interferência

$$\begin{aligned}
\left( \frac{d\sigma_\lambda^{(u)}}{d\Omega} \right)_\beta^{\text{imp}} &= -2 \frac{\Re e \left\{ \mathcal{M}_\lambda^{(s)}(\beta) \mathcal{M}_\lambda^{\dagger(t)}(\beta) \right\}}{(8\pi E_{CM})^2} \\
&= 4 \left( \frac{\alpha}{E_{CM}} \right)^2 \frac{\Re e \left\{ \mathcal{U}(\beta) \right\}}{ts} \left\{ \text{III}_\lambda(m) + \frac{s}{4} \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 \times \right. \\
&\quad \times \left. \left[ (|\mathbf{p}|^2 - m^2)(m^2 - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2) + |\mathbf{p}|^2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{E_{CM}} \right)^2 \Re e \left\{ \mathcal{U}(\beta) \right\} \left\{ 2 \frac{u^2}{ts} \right\}
\end{aligned} \tag{7.46}$$

com  $\Re e \left\{ \mathcal{U}(\beta) \right\}$  dado em (7.21) e

$$\text{III}_\lambda(m) = m^2 \left[ m^2 + \frac{s-t-3u}{2} - \frac{s}{4} \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 \left( 9(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2|\mathbf{K}|^2 \right) \right]. \tag{7.47}$$

## A seção de choque diferencial

Obtidas as equações (7.33), (7.40) e (7.46) e retornando-as em (7.6) a seção de choque do espalhamento Bhabha CPT-par, subsetor de paridade ímpar e à temperatura finita é determinada:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{d\sigma_\lambda}{d\Omega} \right)_\beta^{\text{imp}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{E_{CM}} \right)^2 \left\{ \mathcal{S}(\beta) \left( \frac{u^2+t^2}{s^2} \right) + \mathcal{T}(\beta) \left( \frac{u^2+s^2}{t^2} \right) + \Re e \left\{ \mathcal{U}(\beta) \right\} \right. \\
&\quad \times \left. \left( 2 \frac{u^2}{ts} \right) \right\} + 2 \left( \frac{\alpha}{E_{CM}} \right)^2 \left\{ \frac{\mathcal{S}(\beta)}{s^2} \left[ \text{I}_\lambda(m) - 2 \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 |\mathbf{p}|^2 (2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 - |\mathbf{K}|^2|\mathbf{p}|^2) \right] \right. \\
&\quad + \frac{\mathcal{T}(\beta)}{t^2} \left[ \text{II}_\lambda(m) - 2 \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 |\mathbf{p}|^2 (2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 - |\mathbf{K}|^2|\mathbf{p}|^2) \right] + 2 \frac{\Re e \left\{ \mathcal{U}(\beta) \right\}}{ts} \times \\
&\quad \times \left. \left[ \text{III}_\lambda(m) + \frac{s}{4} \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 \left[ (|\mathbf{p}|^2 - m^2)(m^2 - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2) + |\mathbf{p}|^2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 \right] \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{7.48}$$

com  $\text{I}_\lambda(m)$ ,  $\text{II}_\lambda(m)$  e  $\text{III}_\lambda(m)$  dadas pelas equações (7.34), (7.41) e (7.47), respectivamente. Usando as equações dos fatores térmicos (7.11), (7.16) e (7.20) e reescrevendo as variáveis de Mandelstam em termos do ângulo de espalhamento  $\theta$ , o resultado acima pode finalmente ser reescrito com mais detalhes:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{d\sigma_\lambda}{d\cos(\theta)} \right)_\beta^{\text{imp}} = & \sigma_0 \left\{ \mathcal{S}(\beta, \theta) \frac{(4m^2 - E_{CM}^2)^2}{2E_{CM}^4} (1 + \cos^2(\theta)) + \mathcal{T}(\beta, \theta) \frac{(4m^2 - E_{CM}^2)^2 (1 + \cos(\theta))^2 + 4E_{CM}^4}{(4m^2 - E_{CM}^2)^2 (1 - \cos(\theta))^2} \right. \\
& + \left. \frac{\Re e\{\mathcal{U}(\beta, \theta)\}}{2E_{CM}^2} \frac{(4m^2 - E_{CM}^2)(1 + \cos(\theta))^2}{1 - \cos(\theta)} \right\} + 4 \frac{\sigma_0 \mathcal{S}(\beta, \theta)}{E_{CM}^4} \times \\
& \times \left[ I_\lambda(m) - 2 \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 |\mathbf{p}|^2 (2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 - |\mathbf{K}|^2 |\mathbf{p}|^2) \right] + 16 \frac{\sigma_0 \mathcal{T}(\beta, \theta)}{(4m^2 - E_{CM}^2)^2 (1 - \cos(\theta))^2} \times \\
& \times \left[ II_\lambda(m, \theta) - \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 |\mathbf{p}|^2 (2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 - |\mathbf{K}|^2 |\mathbf{p}|^2) \right] \\
& + 16 \frac{\sigma_0 \Re e\{\mathcal{U}(\beta, \theta)\}}{E_{CM}^2 (4m^2 - E_{CM}^2) (1 - \cos(\theta))} \left\{ III_\lambda(m, \theta) + \frac{E_{CM}^2}{4} \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 \times \right. \\
& \left. \times \left[ (|\mathbf{p}|^2 - m^2) (m^2 - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2) + |\mathbf{p}|^2 (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 \right] \right\}, \tag{7.49}
\end{aligned}$$

com

$$\sigma_0 = \pi \left( \frac{\alpha}{E_{CM}} \right)^2, \tag{7.50}$$

sendo, agora

$$\mathcal{S}(\beta, \theta) = \tanh^4 \left( \frac{\beta E_{CM}}{2} \right) \left[ 1 + \frac{(2\pi)^2 E_{CM}^4 \delta^2(E_{CM}^2)}{(e^{\beta E_{CM}} - 1)^2} \right], \tag{7.51}$$

$$\mathcal{T}(\beta, \theta) = \tanh^4 \left( \frac{\beta E_{CM}}{2} \right)^2 \left[ 1 + \frac{\pi^2 (4m^2 - E_{CM}^2)^2 (1 - \cos(\theta))^2 \delta^2[(4m^2 - E_{CM}^2)(1 - \cos(\theta))/4]}{(e^{\beta E_{CM}} - 1)^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
\Re e\{\mathcal{U}(\beta, \theta)\} = & \tanh^4 \left( \frac{\beta E_{CM}}{2} \right)^2 \times \\
& \left[ 1 + \frac{2\pi^2 E_{CM}^2 \delta(E_{CM}^2) (4m^2 - E_{CM}^2) (1 - \cos(\theta)) \delta[(4m^2 - E_{CM}^2)(1 - \cos(\theta))/4]}{(e^{\beta E_{CM}} - 1)^2} \right], \tag{7.52}
\end{aligned}$$

para a qual

$$I_\lambda(m) = m^2 \left\{ 2m^2 - \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 (2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2 |\mathbf{K}|^2) \right\}, \tag{7.53}$$

$$II_\lambda(m, \theta) = m^2 \left\{ m^2 (1 - 4 \cos(\theta)) - E_{CM}^2 (1 - \cos(\theta)) - \frac{E_{CM}^2}{4} \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 (2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2 |\mathbf{K}|^2) \right\},$$

$$III_\lambda(m, \theta) = m^2 \left\{ E_{CM}^2 - m^2 (3 + 2 \cos(\theta)) - \frac{E_{CM}^2}{4} \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 (9(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2 |\mathbf{K}|^2) \right\}.$$

## Análise dos casos limites

O resultado obtido em (7.48) e reescrito em (7.48) representa uma versão estendida da EDQ usual, além de especificar a temperatura a um dado valor T. Sob condições limites ela retoma a seção de choque convencional da interação Bhabha. No limite  $T \rightarrow 0$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ) os fatores térmicos tendem à unidade,

$$\boxed{\mathcal{S}(0) = \mathcal{T}(0) = \mathbb{R}e\{\mathcal{U}(0)\} \rightarrow 1}, \quad (7.54)$$

deixando a seção de choque na sua forma “fria” mas ainda no contexto de violação de Lorentz:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma_\lambda}{d\Omega} \right)_\infty^{\text{imp}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{E_{CM}} \right)^2 \left\{ \left( \frac{u^2 + t^2}{s^2} \right) + \left( \frac{u^2 + s^2}{t^2} \right) + \left( 2 \frac{u^2}{ts} \right) \right\} + \\ &+ 2 \left( \frac{\alpha}{E_{CM}} \right)^2 \left\{ \frac{1}{s^2} \left[ I_\lambda(m) - 2 \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 |\mathbf{p}|^2 (2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 - |\mathbf{K}|^2 |\mathbf{p}|^2) \right] \right. \\ &+ \frac{1}{t^2} \left[ II_\lambda(m) - 2 \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 |\mathbf{p}|^2 (2(\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 - |\mathbf{K}|^2 |\mathbf{p}|^2) \right] + \\ &\left. + \frac{2}{ts} \left[ III_\lambda(m) + \frac{s}{4} \left( \frac{\lambda}{e} \right)^2 \left[ (|\mathbf{p}|^2 - m^2)(m^2 - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2) + |\mathbf{p}|^2 (\mathbf{K} \cdot \mathbf{p})^2 \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Para  $T \rightarrow \infty$  os efeitos da temperatura ficam intensos. No entanto, ao considerarmos  $\lambda \sim 0$ , o resultado anterior torna-se a seção de choque convencional do espalhamento Bhabha:

$$\boxed{\left( \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \right)_\infty = \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2} \left\{ \frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{u^2 + s^2}{t^2} + 2 \frac{u^2}{ts} + \mathcal{C}_0(m) \right\}}, \quad (7.56)$$

com

$$\mathcal{C}_0(m) = 4 \left( \frac{I_0(m)}{s^2} + \frac{II_0(m)}{t^2} + 2 \frac{III_0(m)}{ts} \right) \quad (7.57)$$

e os termos de massa dados por

$$\begin{aligned} I_0(m) &= 2m^4, \\ II_0(m) &= m^2 \left[ 2m^2 - (s + u - t) \right], \\ III_0(m) &= m^2 \left[ m^2 + \frac{s - t - 3u}{2} \right]. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Por fim, no limite ultra-relativístico ( $m^2 \approx 0$ ), tem-se  $I_0(0) = II_0(0) = III_0(0) = 0$  restando apenas os primeiros três termos na equação (7.56):

$$\boxed{\frac{d\sigma_0}{d\Omega}(e\bar{e} \rightarrow e\bar{e}) = \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2} \left\{ \frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{u^2 + s^2}{t^2} + 2 \frac{u^2}{ts} \right\}}, \quad (7.59)$$

como se esperava!

### Os novos diagramas

Abaixo segue o conjunto de gráficos representativo do espalhamento Bhabha no contexto de violação da simetria de Lorentz e CPT-par, subsetor ímpar, à temperatura finita. Os primeiros dois diagramas representam a interação Bhabha com seus vértices usuais:  $\bullet <$ . Adicionado a eles estão as outras três contribuições possíveis geradas pela violação de Lorentz, com vértices  $\otimes <$ .

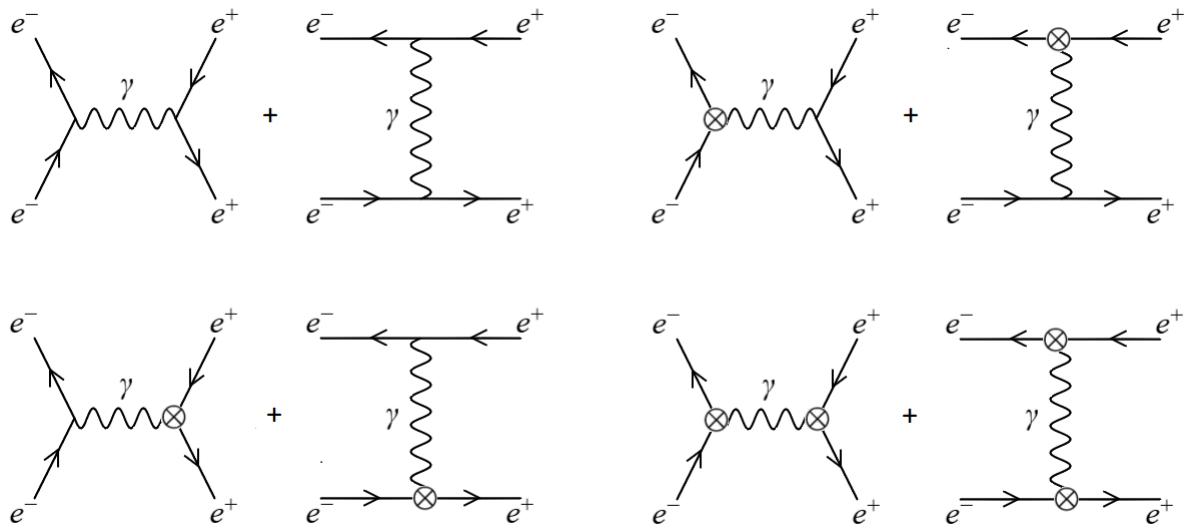


Figura 7.1: Resultado gráfico para o espalhamento Bhabha.

## Conclusões

Nas últimas décadas, um grande esforço teórico e experimental tem sido direcionado na exploração da chamada física além do modelo padrão. Muitas questões não resolvidas no cerne do modelo justificam esse fato: o problema no valor da energia do vácuo; a incompreensão da hierarquia de calibre; a massa não prevista dos neutrinos; partículas cósmicas com energias além do permitido; a assimetria na distribuição da carga do elétron e as discrepâncias entre as medidas experimentais e teóricas sobre o tamanho do próton, dentre outras. No entanto, duas questões fundamentais assolam o modelo padrão. A primeira é a total falha no programa de unificação das quatro forças fundamentais; e a segunda é que o MP, quer teórico quer experimentalmente, leva em conta processos apenas à temperatura nula. Nesse cenário, vários modelos foram criados para tentar sanar algumas dessas questões, principalmente no que se refere ao intrincado problema da unificação, indo da super-simetria a teorias não comutativas, geração de massa via neutrinos estéreis e modelos com maior número de campos escalares, citando apenas algumas.

Contudo, nossa investigação centralizou-se no mecanismo de violação da simetria de Lorentz. Tal ideia, que no âmbito das teorias de corda foi proposta por Kostelecky & S. Samuel em 1989 [21], foi brilhantemente utilizada na construção do chamado MPE, uma teoria remanescente da teoria unificada à baixas energias [27, 28]. Os acoplamentos do campo de Lorentz com os campos físicos foram introduzidos via derivada covariante adicionada de um termo não mínima CPT-par [32, 37]. Neste caso, o modelo assim estendido, embora não renormalizável por contagem de potência, teve todas as seções de choque calculadas satisfatoriamente à nível de árvore, devido ao diminuto valor do parâmetro de violação:  $|\lambda \mathbf{K}_L| \sim 10^{-12}(\text{eV})^{-1}$ , com  $\mathbf{K}_L$  um campo tensorial de fundo de 4<sup>a</sup> ordem acoplado à intensidade de campo eletromagnético.

Adicionalmente, buscamos compreender quais efeitos surgiriam caso a temperatura fosse introduzida nos processos quando no equilíbrio termodinâmico. Dentre as possibilidades, escolhemos o formalismo de tempo real conhecido como dinâmica de campos térmicos, que introduz a temperatura através de uma duplicação do espaço de Hilbert, um mapeamento entre esses subespaços e uma transformação unitária que termaliza os operadores e o estado do vácuo, o que permite escrever valores esperados de observáveis como uma média no equilíbrio térmico [44, 45, 46, 47, 50].

Definimos como alvo o setor fermiônico estendido, focalizando especial atenção aos dois principais processos da EDQ: os espalhamentos elétron-pósitron e Bhabha . Na sequência, estabelecemos algumas hipóteses orientativas: (*i*) embora pequenos, os efeitos de violação da simetria de Lorentz devem existir mesmo à baixa energia; (*ii*) deve ocorrer ação térmica intensa uma vez que, nessa escala, temperaturas extremas não podem ser desprezadas e (*iii*) ambos os efeitos devem coexistir, afetando de alguma maneira as seções de

choque dos referidos processos.

Quer no espalhamento elétron-pósitron ou Bhabha os resultados que obtivemos confirmaram acordo com a literatura vigente: à nível de árvore, a introdução da violação CPT-par, além de reproduzir um termo proporcional a  $e^4$  nas seções de choque semelhante à EDQ usual, reproduziram também novas contribuições de vértices proporcionais ao quadrado do parâmetro de violação,  $|\lambda \mathbf{K}|$ , com  $\lambda$  sendo a constante de acoplamento entre  $\mathbf{K}$  e  $F_{\mu\nu}$ [32, 37, 90]. No caso do espalhamento Bhabha, os cálculos foram executados considerando-se apenas o subsetor de paridade ímpar da violação CPT-par devido ao parâmetro de violação em cada um deles ser da mesma ordem. Entretanto, no espalhamento elétron-pósitron, a seção de choque foi calculada para cada um dos três subsetores: isotrópico e anisotrópico de paridade par e o subsetor de paridade ímpar. Em todos eles a ordem do parâmetro de violação foi de  $|\lambda \mathbf{K}_L| \sim 10^{-12}(\text{eV})^{-1}$ , concordando com o obtido na referência [32]. No que se refere aos efeitos da temperatura, esta emerge como um fator global na nova seção de choque. Seus efeitos são dramáticos à medida que a temperatura torna-se intensa. Em todo caso, a EDQ convencional é retomada nas condições limites de  $\lambda$  e T tendendo a zero, como era esperado.

Os resultados referentes ao espalhamento elétron-pósitron foram publicados em [103]<sup>1</sup>, enquanto que os cálculos referentes ao espalhamento Bhabha encontram-se submetidos para publicação.

Por fim, temos como perspectiva o cálculo da seção de choque do espalhamento Möller e da interação de férmion via troca de gráviton nesse contexto de violação da simetria de Lorentz e à temperatura finita.

---

<sup>1</sup>«<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269319301297>»

## Algumas integrais úteis

**N**este apêndice iremos resolver a integral sobre o bilinear no momento que aparece na seção 2.7.2 do capítulo 2, bem como a integral envolvendo distribuições de Dirac que comparece no cálculo das seções de choque.

### Integral sobre o bilinear $p^i p^j$

Notando-se que

$$\delta^{ij} p_i p_j = p^i p_i = |\mathbf{p}|^2, \quad (\text{A.1})$$

e sendo o elemento de ângulo sólido  $d\Omega = d\phi d\theta \sin(\theta)$  definido dentro do intervalo  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ , a seguinte integral é imediatamente calculada:

$$\delta_{ij} \int p^i p^j d\Omega = \int |\mathbf{p}|^2 d\Omega = (E^2 - m^2) \int d\Omega = \frac{(s - 4m^2)}{4} \int d\Omega, \quad (\text{A.2})$$

sendo  $\sqrt{s} = 2E = E_{\text{CM}}$ . Uma vez que

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \left( \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \right) = 4\pi, \quad \text{teremos} \quad \delta_{ij} \int p^i p^j d\Omega = \int |\mathbf{p}|^2 d\Omega = (s - 4m^2)\pi. \quad (\text{A.3})$$

Multiplicando-se esta última por  $\delta^{ij}$  e observando que  $\delta^{ij} \delta_{ij} = 3$ , tem-se

$$\int p^i p^j d\Omega = \frac{1}{3} (s - 4m^2) \delta^{ij} \pi. \quad (\text{A.4})$$

Por fim, no limite em que  $m^2 \approx 0$  obtemos

$$\int p^i p^j d\Omega = \frac{\pi s}{3} \delta^{ij}. \quad (\text{A.5})$$

### Integral envolvendo distribuições de Dirac

Segue-se o desenvolvimento do fator integral

$$\begin{aligned} \int d^4x \int d^4y \int d^4\kappa e^{-i\kappa(x-y)} e^{ix(p_1+p_2)} e^{-iy(p_3+p_4)} &= \int d^4\kappa \overbrace{\left( \int d^4x e^{-ix(p_1+p_2-\kappa)} \right)}^{\delta^{(4)}(p_1+p_2-\kappa)} \overbrace{\left( \int d^4y e^{-iy(\kappa-(p_1+p_2))} \right)}^{\delta^{(4)}(\kappa-(p_1+p_2))} \\ &= \int d^4\kappa \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \kappa) \delta^{(4)}(\kappa - (p_3 + p_4)) \\ &= \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

sobre a qual usou-se os seguintes resultados

$$\int dx e^{-ix(p-q)} = \delta(p-q) \quad \text{e} \quad \int \delta(\varepsilon - x) \delta(x - \eta) dx = \delta(\varepsilon - \eta). \quad (\text{A.7})$$

# Apêndice B

## Traços sobre as matrizes de Dirac

**S**ão apresentados aqui algumas propriedades do traço envolvem matrizes de Dirac.

### Propriedades dos traços sobre produtos de matrizes

A matriz de Dirac  $\gamma$  relaciona-se com o tensor métrico através do anti-comutador

$$\{\gamma^\mu; \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{B.1})$$

Para operadores na notação “cortada”,  $\mathcal{Q} = \gamma^\alpha C_\alpha$ , segue-se as propriedades

$$tr\{\mathcal{A}\mathcal{B}\} = tr\{\mathcal{B}\mathcal{A}\}, \quad tr\{\mathcal{A} + \mathcal{B}\} = tr\{\mathcal{A}\} + tr\{\mathcal{B}\}, \quad tr\{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}\} = tr\{\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{A}\}. \quad (\text{B.2})$$

O traço será nulo ou não a depender do número de matrizes envolvidas:

$$tr\{\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_n}\} \begin{cases} \neq 0 & \text{se } n \text{ for par;} \\ = 0 & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Com isso em mente, seguem-se alguns resultados:

$$\begin{aligned} tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} &= 4g^{\mu\nu} \\ tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta\} &= 4(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}) \\ tr\{\mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_n\} &= 0 \text{ (para } n \text{ ímpar)} \\ tr\{\mathcal{A}\mathcal{B}\} &= 4(A \cdot B) \\ tr\{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}\} &= 4[(A \cdot B)(C \cdot D) - (A \cdot C)(B \cdot D) + (A \cdot D)(B \cdot C)]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

As identidades seguintes também serão úteis

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4 \\ \gamma^\mu \mathcal{A} \gamma_\mu &= -2\mathcal{A} \\ \gamma^\mu \mathcal{A} \mathcal{B} \gamma_\mu &= -2(A \cdot B) \\ \gamma^\mu \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \gamma_\mu &= -2\mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \\ \gamma^\mu \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \mathcal{D} \gamma_\mu &= 2\mathcal{D} \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} + 2\mathcal{C} \mathcal{B} \mathcal{A} \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

# Cálculo dos fatores eletrônicos e muônicos

**A**qui são calculados os fatores eletrônicos e muônicos da EDQ que figuram no capítulo 4.

## Os fatores eletrônicos e muônicos

Com a ajuda das propriedades do traço sobre as matrizes de Dirac exposta no apêndice precedente, segue-se o cálculo dos fatores eletrônicos  $\mathbb{E}^{\mu\nu}$  e muônicos  $\mathbb{M}^{\mu\nu}$  da seção de choque fria. Começando com os fatores ligados aos vértices da EQD, isto é, para  $a, b = 0$  com  $\Gamma_{(0)}^\mu = -ie^2\gamma^\mu$ . Iniciando com  $\mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu}$ :

$$\mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} = \text{tr} \left[ \gamma^\mu \left( \not{p}_1 + m_e \right) \gamma^\nu \left( \not{p}_2 - m_e \right) \right] = \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 - \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu m_e + \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_2 m_e - \gamma^\mu \gamma^\nu m_e^2 \right\}. \quad (\text{C.1})$$

Calculando cada um desses termos:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \right\} = p_{1\alpha} p_{2\beta} \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \right\} = 4p_{1\alpha} p_{2\beta} \left( g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} \right) \\ &= 4 \left[ p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu} \right], \end{aligned}$$

com  $(p_1 \cdot p_2) = p_1^\mu p_2_\mu$ . Os próximos dois termos são identicamente nulos, uma vez que envolvem um número ímpar de matrizes  $\gamma$ :

$$\mathbf{II} = \text{tr} \left\{ -\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu m_e \right\} = \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_2 m_e \right\} = 0.$$

O último termo envolve o traço sobre duas matrizes apenas:

$$\mathbf{III} = \text{tr} \left\{ -\gamma^\mu \gamma^\nu m_e^2 \right\} = -m_e^2 \text{tr} \left\{ \gamma^\mu \gamma^\nu \right\} = -4m_e^2 g^{\mu\nu}.$$

Retornando-se então **I**, **II**, e **III** em  $\mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu}$ , obtém-se

$$\mathbb{E}_{(00)}^{\mu\nu} = 4 \left( p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} \left[ (p_1 \cdot p_2) + m_e^2 \right] \right). \quad (\text{C.2})$$

Como o fator muônico  $\mathbb{M}_{(00)}^{\mu\nu}$  apresenta forma simétrica em relação a  $\mathbb{E}^{\mu\nu}$  basta trocar a posição dos sinais dentro dos colchetes em (C.1), trocar os índices  $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, m_e$  por  $m_\mu$  e obter

$$\mathbb{M}_{(00)}^{\mu\nu} = 4 \left( p_3^\mu p_4^\nu + p_3^\nu p_4^\mu - g^{\mu\nu} \left[ (p_3 \cdot p_4) + m_\mu^2 \right] \right). \quad (\text{C.3})$$

Um cálculo geral, seguindo os mesmos passos anteriores, nos leva a

$$\mathbb{F}_{(00)}^{\mu\nu} = \text{tr} \left[ \gamma^\mu \left( p_i^\nu + \varepsilon_i m_i \right) \gamma^\nu \left( p_j^\mu + \varepsilon_j m_j \right) \right] = 4 \left( p_i^\mu p_j^\nu + p_i^\nu p_j^\mu - g^{\mu\nu} \left[ (p_i \cdot p_j) - \varepsilon_i \varepsilon_j m_i m_j \right] \right), \quad (\text{C.4})$$

com  $i$  e  $j$  índices de partículas e  $\varepsilon_i, \varepsilon_j = \pm 1$ .

# Apêndice D

## Fatores térmicos

**S**eguem as demonstrações dos fatores térmicos que aparecem nas seções de choque térmicas  $d\sigma(\beta)/d\Omega$ . Nos cálculos abaixo escreve-se  $X(\beta) = |\kappa_0|/T$ .

(i) **fator térmico**  $f(\beta) = (u(\beta) + v(\beta))^4$

Calculando inicialmente a soma:

$$\begin{aligned} u(\beta) + v(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1+e^{X(\beta)}}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^{-X(\beta)}}} = \frac{\sqrt{1+e^{X(\beta)}} + \sqrt{1+e^{-X(\beta)}}}{\sqrt{(1+e^{X(\beta)})(1+e^{-X(\beta)})}} \\ &= \frac{\sqrt{e^{X(\beta)/2}[e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}]} + \sqrt{e^{-X(\beta)/2}[e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}]} }{\sqrt{e^{X(\beta)/2}[e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}]e^{-X(\beta)/2}[e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}]}} \\ &= \frac{\sqrt{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}}[\sqrt{e^{X(\beta)/2}} + \sqrt{e^{-X(\beta)/2}}]}{\sqrt{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}\sqrt{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}}}} \\ &= \frac{\sqrt{e^{X(\beta)/2} + \sqrt{e^{-X(\beta)/2}}}}{\sqrt{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}}}. \end{aligned}$$

Quadrando-a:

$$\begin{aligned} (u(\beta) + v(\beta))^2 &= \frac{(\sqrt{e^{X(\beta)/2}} + \sqrt{e^{-X(\beta)/2}})^2}{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}} = \frac{e^{X(\beta)/2} + 2 + e^{-X(\beta)/2}}{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}} = \frac{e^{X(\beta)/2} + 1 + e^{-X(\beta)/2} + 1}{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2} + 1 - 1} \\ &= \frac{e^{X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}] + e^{-X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}]}{e^{X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}] + e^{-X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} - e^{-X(\beta)/4}]} \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$(u(\beta) + v(\beta))^2 = \frac{[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}][e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}]}{[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}] \left[ e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4} \frac{[e^{X(\beta)/4} - e^{-X(\beta)/4}]}{[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}]} \right]} = \frac{2e^{-X(\beta)/4} \sinh(X(\beta)/4)}{1 + e^{-X(\beta)/4} \tanh(X(\beta)/4)}.$$

Portanto

$$(u(\beta) + v(\beta))^4 = 4 \frac{e^{-X(\beta)/2} \sinh^2(X(\beta)/4)}{[1 + e^{-X(\beta)/4} \tanh(X(\beta)/4)]^2}. \quad (\text{D.1})$$

(ii) fator térmico  $f(\beta) = (u(\beta) - v(\beta))^4$

Calculando a subtração

$$\begin{aligned} u(\beta) - v(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1+e^{X(\beta)}}} - \frac{1}{\sqrt{1+e^{-X(\beta)}}} = \frac{\sqrt{1+e^{X(\beta)}} - \sqrt{1+e^{-X(\beta)}}}{\sqrt{(1+e^{X(\beta)})(1+e^{-X(\beta)})}} \\ &= \frac{\sqrt{e^{X(\beta)/2}} - \sqrt{e^{-X(\beta)/2}}}{\sqrt{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}}}. \end{aligned}$$

Elevando-a ao quadrado,

$$\begin{aligned} (u(\beta) + v(\beta))^2 &= \frac{(\sqrt{e^{X(\beta)/2}} - \sqrt{e^{-X(\beta)/2}})^2}{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}} = \frac{e^{X(\beta)/2} - 2 + e^{-X(\beta)/2}}{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2}} = \frac{e^{X(\beta)/2} - 1 + e^{-X(\beta)/2} - 1}{e^{X(\beta)/2} + e^{-X(\beta)/2} - 1 + 1} \\ &= \frac{e^{X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} - e^{-X(\beta)/4}] - e^{-X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} - e^{-X(\beta)/4}]}{e^{X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}] - e^{-X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}]} \\ &= \frac{[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}][e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}]}{[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}] \left[ e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4} \frac{[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}]}{[e^{X(\beta)/4} - e^{-X(\beta)/4}]} \right]} \\ &= \frac{2e^{-X(\beta)/4} \sinh(X(\beta)/4)}{\coth(X(\beta)/4) - e^{-X(\beta)/2}}. \end{aligned}$$

Quadrando-a novamente, obtém-se

$$(u(\beta) + v(\beta))^4 = 4 \frac{e^{-X(\beta)/2} \sinh^2(X(\beta)/4)}{[\coth(X(\beta)/4) - e^{-X(\beta)/2}]^2} \quad (\text{D.2})$$

(iii) fator térmico  $f(\beta) = (u^2(\beta) + v^2(\beta))^2$

Este fator em específico é imediatamente igual a unidade:

$$u^2(\beta) + v^2(\beta) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+e^{-X(\beta)}}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{1+e^{X(\beta)}}} \right)^2 = \frac{1+e^{X(\beta)} + 1+e^{-X(\beta)}}{(1+e^{-X(\beta)})(1+e^{X(\beta)})} = 1;$$

ou seja,

$$(u^2(\beta) + v^2(\beta))^2 = 1.$$

(iv) fator térmico  $f(\beta) = (u^2(\beta) - v^2(\beta))^2$

A demonstração deste fator é igualmente simples. Tomemos inicialmente

$$\begin{aligned} u^2(\beta) - v^2(\beta) &= \left( \frac{1}{\sqrt{1+e^{-X(\beta)}}} \right)^2 - \left( \frac{1}{\sqrt{1+e^{X(\beta)}}} \right)^2 = \frac{1+e^{X(\beta)} - (1+e^{-X(\beta)})}{(1+e^{-X(\beta)})(1+e^{X(\beta)})} \\ &= \frac{e^{X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}] - e^{-X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}]}{e^{X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}]e^{-X(\beta)/4}[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}]} \\ &= \frac{[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}][e^{X(\beta)/4} - e^{-X(\beta)/4}]}{[e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}][e^{X(\beta)/4} + e^{-X(\beta)/4}]} \\ &= \tanh(X(\beta)/2), \end{aligned}$$

levando-nos a

$$\left( u^2(\beta) - v^2(\beta) \right)^2 = \tanh^2(X(\beta)/2). \quad (\text{D.3})$$

### Análise numérica

Na figura são mostradas as curvas associadas a cada um dos fatores térmicos determinados acima. Por motivos óbvios descartam-se os dois primeiros fatores associados às curvas  $\iota$  e  $\iota\iota$  como quantidades físicas. Quanto à curva  $\iota\iota\iota$  ela é um resultado espúrio: não traz o fator térmico correto. Adota-la como possível seria admitir que a termalização afetaria apenas o propagador do fóton, o que simplesmente não faz sentido, já que todo o sistema encontra-se sob ação do mesmo banho térmico. Resta a curva  $\iota\iota\iota\iota$ . Esta está associada à função que, além de variar continuamente com a temperatura é totalmente finita dentro do intervalo  $[0 \leq T < \infty]$ . Conclui-se, portanto, que o único fator fisicamente aceitável é aquele dado na Equação (D.3).

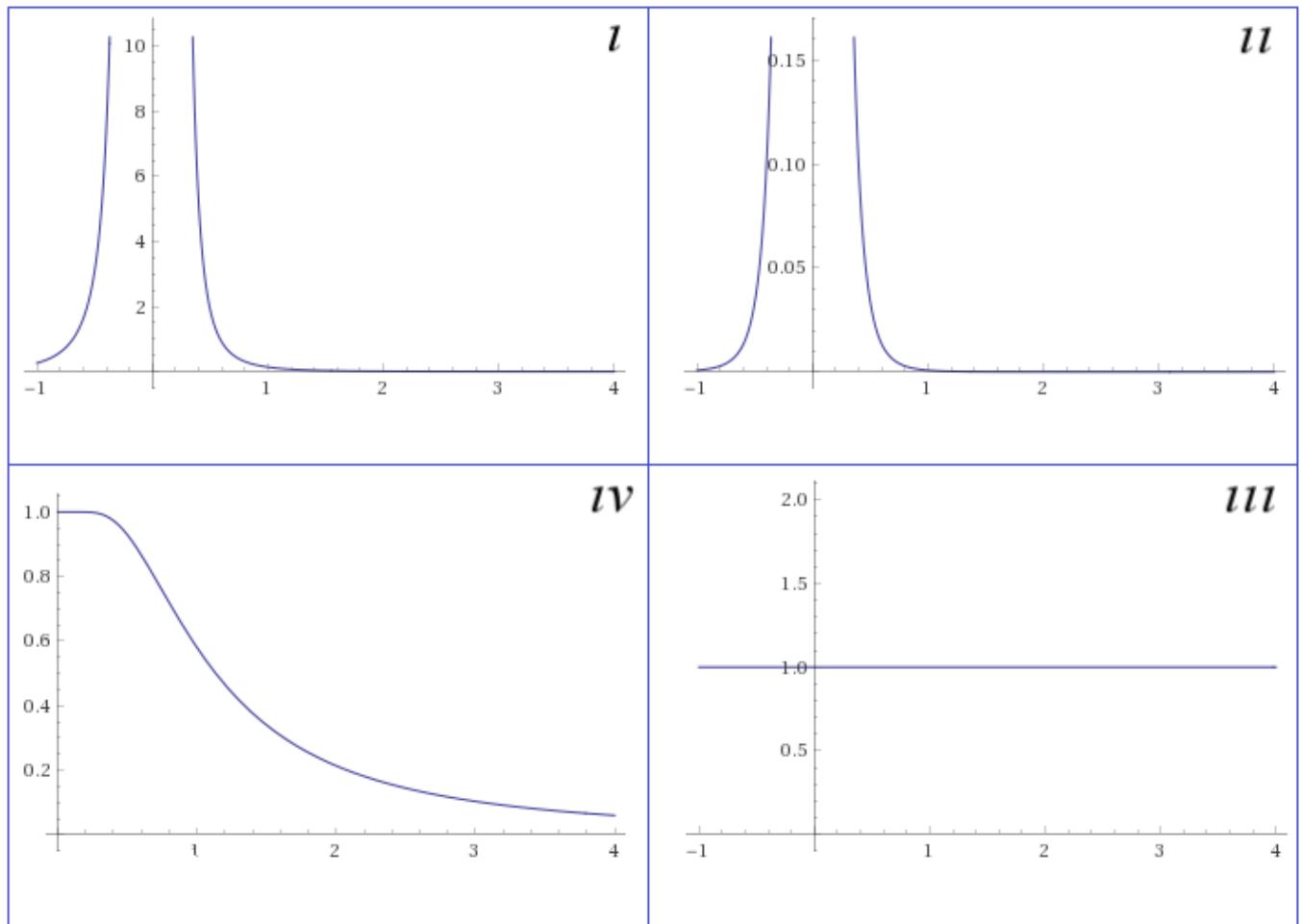


Figura D.1: Curvas dos fatores térmicos.

# Apêndice E

## Amplitude térmica da interação elétron-pósitron

**C**olige-se, na sequência, os operadores de onda  $\Psi$  e os de criação e aniquilação térmicos; com eles demonstra-se a amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}$ , o operador matricial dualidade  $(\eta_{IJKL})_{4 \times 4}$  e a seção de choque térmica  $d\sigma_\lambda(\beta)/d\Omega$  para o espalhamento  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$ .

### Elementos prévios

Começamos organizando as equações e operadores básicos. Os índices de partículas 1 e 2 se referem aos elétrons, interagindo no vértice  $x^\mu$ , enquanto que os índices 3 e 4 referem-se aos múons, emergindo no vértice  $y^\mu$ . De modo geral, os operadores de onda são dados por

$$\bar{\Psi}(x) = \int d\mathbf{q} \left[ c_q \bar{u}(\mathbf{q}, \sigma) e^{i\mathbf{q}x} + d_q^\dagger \bar{v}(\mathbf{q}, \sigma) e^{-i\mathbf{q}x} \right],$$

com  $u(q, \sigma)$  e  $v(q, \sigma)$  o espinor da partícula e antipartícula, respectivamente, sendo  $c_q$  e  $d_q$  seus operadores de criação. Seguem-se as transformações de Bogoliubov para esses operadores,

$$\begin{aligned} c_{qi} &= u(\beta) c_{qi}(\beta, \sigma_i) + v(\beta) \tilde{c}_{qi}^\dagger(\beta, \sigma_i), & \tilde{c}_{qi} &= u(\beta) \tilde{c}_{qi}(\beta, \sigma_i) - v(\beta) c_{qi}^\dagger(\beta, \sigma_i), \\ c_{qi}^\dagger &= u(\beta) c_{qi}^\dagger(\beta, \sigma_i) + v(\beta) \tilde{c}_{qi}(\beta, \sigma_i), & \tilde{c}_{qi}^\dagger &= u(\beta) \tilde{c}_{qi}^\dagger(\beta, \sigma_i) - v(\beta) c_{qi}(\beta, \sigma_i). \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Para se obter as transformações para os  $d_q^s$  basta executar a substituição  $c_q \rightarrow d_q$ . Os estados de vácuo térmicos inicial e final são

$$|i, \beta\rangle = d_{p_2}^\dagger(s_2, \beta) c_{p_1}^\dagger(s_2, \beta) |0(\beta)\rangle \quad \text{e} \quad |f, \beta\rangle = c_{p_3}^\dagger(s_3, \beta) d_{p_4}^\dagger(s_4, \beta) |0(\beta)\rangle, \quad (\text{E.2})$$

segundo-se com as relações de anti-comutação,

$$\{c_p(s), c_q^\dagger(\sigma)\}(\beta) = \delta_{s\sigma} \delta_{pq}^{(3)} \quad \text{e} \quad \{d_p(s), d_q^\dagger(\sigma)\}(\beta) = \delta_{s\sigma} \delta_{pq}^{(3)}, \quad (\text{E.3})$$

sendo todas as outras relações iguais a zero<sup>1</sup>. Tais regras são exatamente as mesmas para as versões duais. Neste ponto, será conveniente reescrever o produto  $\bar{\Psi} \Gamma^\mu \Psi \bar{\Psi} \Gamma^\nu \Psi$  lançando-se mão dos elementos  $\eta_{IJKL}$  de uma certa matriz  $(\eta_{IJKL})_{4 \times 4}$ :

$$\eta_{IJKL} \bar{\Psi}_1^{(I)}(x) \Gamma_{(a)}^\mu \Psi_3^{(J)}(x) \bar{\Psi}_4^{(K)}(y) \Gamma_{(b)}^\nu \Psi_2^{(L)}(y), \quad (\text{E.4})$$

<sup>1</sup>Com estabelecido na introdução a notação para as deltas de Dirac é tal que  $\delta_{pq}^{(3)} \equiv \delta^{(3)}(p - q)$ .

com  $I, J, K, L = 1, 2$  os índices desse espaço interno. Nesse sentido os operadores de onda serão grafados como

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(x)_i^{(I)} &= \int dq_i \left[ c_{q_i}^{(I)} \bar{u}(q_i, \sigma_i) e^{\imath q_i x} + d_{q_i}^{\dagger(I)} \bar{v}(q_i, \sigma_i) e^{-\imath q_i x} \right] \quad (E.5) \\ \Psi(y)_i^{(I)} &= \int dq_i \left[ c_{q_i}^{\dagger(I)} u(q_i, \sigma_i) e^{-\imath q_i x} + d_{q_i}^{(I)} v(q_i, \sigma_i) e^{\imath q_i y} \right],\end{aligned}$$

sendo  $c_q^{(I)s}$  (e os  $d_q^{(I)s}$ ) os componentes do operador  $c$  (e  $d$ ) dados nas linhas de (E.1). Faz-se mister, pois, enquadrar os operadores de criação e aniquilação nessa estrutura de espaço interno, isto é, escrevê-los como

$$c_q^{(I)} = \begin{cases} I = 1; & c_{q_i}^{(1)} = u(\beta) c_q(q_i, \beta) \\ I = 2; & c_{q_i}^{(2)} = v(\beta) c_q^\dagger(q_i, \beta), \end{cases} \quad \tilde{c}_q^{(I)} = \begin{cases} I = 1; & \tilde{c}_{q_i}^{(1)} = u(\beta) \tilde{c}_q(q_i, \beta) \\ I = 2; & \tilde{c}_{q_i}^{(2)} = -v(\beta) c_q^\dagger(q_i, \beta), \end{cases} \quad (E.6)$$

para os quais vale a regra da operação “adaga” para se obter  $c_q^{\dagger(I)}$ . Trata-se de uma maneira conveniente de escrever (E.4). Tais elementos permitirão calcular a amplitude de probabilidade da interação, mais comumente conhecida como matriz de espalhamento  $\mathcal{M}_\lambda(\beta)$ :

$$\mathcal{M}_\lambda(\beta) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \iint dx dy \sum_{\text{Spin}} \langle \mathbf{f}, \beta | : \eta_{ijkl} \mathcal{P}_{(a,b)}^{\mu\nu} A_\mu(x) A_\nu(y) : | \mathbf{i}, \beta \rangle,$$

escrita no contexto de temperatura finita e violação da simetria de Lorentz, na qual  $\mathcal{P}_{(a,b)}^{\mu\nu}$  representa o quadrilinear nos campos fermiônicos:

$$\mathcal{P}_{(a,b)}^{\mu\nu} = \bar{\Psi}_2(x) \Gamma_{(a)}^\mu \Psi_1(x) \bar{\Psi}_3(y) \Gamma_{(b)}^\nu \Psi_4(y). \quad (E.7)$$

Os índices  $a$  e  $b$  representam a espécie do vértice:  $a = 0$  para o vértice da EDQ e  $a = 1$  para vértices advindos da violação de Lorentz.

## Cálculo do quadrilinear

Vamos agora executar o cálculo de (E.7). Partindo do bilinear:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_2^{(I)}(x) \Gamma_{(a)}^\mu \Psi_1^{(J)}(x) &= \iint dq_1 dq_2 \left\{ \left[ c_{q_2}^{(I)} \bar{u}(2) e^{\imath q_2 x} + d_{q_2}^{\dagger(I)} \bar{v}(2) e^{-\imath q_2 x} \right] \Gamma_{(a)}^\mu \left[ c_{q_1}^{\dagger(J)} u(1) e^{-\imath q_1 x} + d_{q_1}^{(J)} v(1) e^{\imath q_1 x} \right] \right\} (q, \sigma) \\ &= \iint dq_1 dq_2 \left\{ c_{q_2}^{(I)} c_{q_1}^{\dagger(J)} \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) e^{\imath x(q_2 - q_1)} + c_{q_2}^{(I)} d_{q_1}^{(J)} \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) e^{+\imath x(q_2 + q_1)} + \right. \\ &\quad \left. + d_{q_2}^{\dagger(I)} c_{q_1}^{(J)} \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) e^{-\imath x(q_2 + q_1)} + d_{q_2}^{\dagger(I)} d_{q_1}^{\dagger(J)} \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) e^{-\imath x(q_2 - q_1)} \right\} (q, \sigma).\end{aligned} \quad (E.8)$$

De modo semelhante,

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_3^{(I)}(y) \Gamma_{(a)}^\mu \Psi_4^{(J)}(y) &= \iint dq_3 dq_4 \left\{ \left[ c_{q_3}^{(I)} \bar{u}(3) e^{\imath q_3 y} + d_{q_3}^{\dagger(I)} \bar{v}(3) e^{-\imath q_3 y} \right] \Gamma_{(a)}^\mu \left[ c_{q_4}^{\dagger(J)} u(4) e^{-\imath q_4 y} + d_{q_4}^{(J)} v(4) e^{\imath q_4 y} \right] \right\} (q, \sigma) \\ &= \iint dq_3 dq_4 \left\{ c_{q_3}^{(I)} c_{q_4}^{\dagger(J)} \bar{u}(3) \Gamma_{(a)}^\mu u(4) e^{\imath y(q_3 - q_4)} + c_{q_3}^{(I)} d_{q_4}^{(J)} \bar{u}(3) \Gamma_{(a)}^\mu v(4) e^{+\imath y(q_3 + q_4)} + \right. \\ &\quad \left. + d_{q_3}^{\dagger(I)} c_{q_4}^{(J)} \bar{v}(4) \Gamma_{(a)}^\mu u(4) e^{-\imath y(q_3 + q_4)} + d_{q_3}^{\dagger(I)} d_{q_4}^{\dagger(J)} \bar{v}(3) \Gamma_{(a)}^\mu v(4) e^{-\imath y(q_3 - q_4)} \right\} (q, \sigma).\end{aligned} \quad (E.9)$$

Daqui em diante devemos nos ater de que a convenção da soma sobre os índices latinos maiúsculos repetidos está subentendida. Executando-se então o produto de (E.8) com (E.9) fornece-nos (E.7):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{(a,b)}^{\mu\nu} = & \eta_{ijkl} \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\
 & c_{q_2}^{\dagger(I)} c_{q_1}^{(J)} c_{q_3}^{\dagger(K)} c_{q_4}^{(L)} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} \\
 & + c_{q_2}^{\dagger(I)} c_{q_1}^{(J)} c_{q_3}^{\dagger(K)} d_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3+q_4)} \\
 & + c_{q_2}^{\dagger(I)} c_{q_1}^{(J)} c_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{(L)} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2-q_1)} e^{-iy(q_3+q_4)} \\
 & + c_{q_2}^{\dagger(I)} c_{q_1}^{(J)} d_{q_3}^{(K)} d_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} \quad (\text{a}) \\
 & + \eta_{ijkl} \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\
 & c_{q_2}^{\dagger(I)} d_{q_1}^{(J)} c_{q_3}^{\dagger(K)} c_{q_4}^{(L)} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} \\
 & + c_{q_2}^{\dagger(I)} d_{q_1}^{(J)} c_{q_3}^{\dagger(K)} d_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{+iy(q_3+q_4)} \\
 & + c_{q_2}^{\dagger(I)} d_{q_1}^{(J)} d_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3+q_4)} \quad (\text{b}) \\
 & + c_{q_2}^{\dagger(I)} d_{q_1}^{(J)} d_{q_3}^{(K)} d_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3-q_4)} \Big\} \\
 & + \eta_{ijkl} \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\
 & d_{q_2}^{(I)} c_{q_1}^{(J)} c_{q_3}^{\dagger(K)} c_{q_4}^{(L)} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2+q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} \\
 & + d_{q_2}^{(I)} c_{q_1}^{(J)} c_{q_3}^{\dagger(K)} d_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2+q_1)} e^{+iy(q_3+q_4)} \quad (\text{c}) \\
 & + d_{q_2}^{(I)} c_{q_1}^{(J)} d_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{(L)} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3+q_4)} \\
 & + d_{q_2}^{(I)} c_{q_1}^{(J)} d_{q_3}^{(K)} d_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3-q_4)} \Big\} \\
 & + \eta_{ijkl} \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\
 & d_{q_2}^{(I)} d_{q_1}^{\dagger(J)} c_{q_3}^{\dagger(K)} c_{q_4}^{(L)} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} \quad (\text{d}) \\
 & + d_{q_2}^{(I)} c_{q_1}^{\dagger(J)} c_{q_3}^{\dagger(K)} d_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3+q_4)} \\
 & + d_{q_2}^{(I)} d_{q_1}^{\dagger(J)} d_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{(L)} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3+q_4)} \\
 & + d_{q_2}^{(I)} d_{q_1}^{\dagger(J)} d_{q_3}^{(K)} d_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2-q_1)} e^{-iy(q_3-q_4)} \Big\}.
 \end{aligned}$$

Nota-se que, os canais formados por fatores cujo número de operadores de partículas seja diferente do número de operadores de antipartículas apresentam valor esperado nulo. Assim, restam apenas quatro canais com valor esperado diferente de zero: (E.10a), (E.10b), (E.10c) e (E.10d). Dessa forma o resultado

anterior reduz-se a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(a,b)}^{\mu\nu} &= \eta_{ijkl} \iiint dq_1 dq_2 dq_3 dq_4 \left\{ \right. \\ &\quad c_{q_2}^{\dagger(I)} c_{q_1}^{(J)} d_{q_3}^{(K)} d_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} \quad (\text{a}) \\ &\quad + c_{q_2}^{\dagger(I)} d_{q_1}^{(J)} d_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{+ix(q_2+q_1)} e^{-iy(q_3+q_4)} \quad (\text{b}) \\ &\quad + d_{q_2}^{(I)} c_{q_1}^{(J)} c_{q_3}^{\dagger(K)} d_{q_4}^{\dagger(L)} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2+q_1)} e^{+iy(q_3+q_4)} \quad (\text{c}) \\ &\quad \left. + d_{q_2}^{(I)} d_{q_1}^{\dagger(J)} c_{q_3}^{\dagger(K)} c_{q_4}^{(L)} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_2-q_1)} e^{+iy(q_3-q_4)} \quad (\text{d}) \right\}. \end{aligned}$$

Será necessário, adiante, evocar o propagador térmico do fóton deduzido no capítulo 5. Ademais, com o intuito de deixar as linhas de equações mais compactas possíveis, sejam as nomeações temporárias:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(l)}(x-y) &= A_\mu(x)A_\nu(y), \\ \langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(l)}(x-y, \beta) \rangle &= \langle 0(\beta) | A_\mu(x)A_\nu(y) | 0(\beta) \rangle = \frac{l}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-y)} \Delta_{\mu\nu}(\kappa_{(l)}, \beta)_{(11)}, \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

sendo  $\Delta_{\mu\nu}(\kappa_{(l)}, \beta)_{(11)}$  a componente física do propagador escrito como

$$\Delta_{\mu\nu}(\kappa_{(l)}, \beta)_{(11)} = \eta_{\mu\nu} \frac{\Delta(\kappa_{(l)}, \beta)}{\kappa_{(l)}^2} \quad \text{na qual} \quad \Delta(\kappa_{(l)}, \beta) = 1 - l \frac{(2\pi)\kappa_{(l)}^2 \delta(\kappa_{(l)}^2)}{e^{\beta E_{CM}} - 1}, \quad (\text{E.11})$$

com  $l$  possíveis canais do espalhamento, caso exista mais de um (que não é o caso espalhamento elétron-pósitron). A segunda equação acima, como se vê, refere-se à parte real do propagador térmico do fóton visto no capítulo 3. Vamos também operar o ordenamento de Wick “: :”, ou seja, os operadores de criação serão movidos para a esquerda e os operadores de aniquilação para a direita; especificamente:  $d_q^\dagger c_q^\dagger \times$  (operadores de aniquilação). Outra observação a se fazer é que, para evitar cálculos desnecessários, antecipamos que os canais formados com as peças (E.10a) e (E.10d) se cancelarão mutuamente. De mais a mais, com as reinscrições (E.10) e retornando-se (E.10) em (E.7) teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda(\beta) &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} \iint dx dy \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \left\langle f, \beta \left| : \eta_{ijkl} \mathcal{P}_{(a,b)}^{\mu\nu} \mathcal{A}_\mu(x) A_\nu(y) : \right| l, \beta \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \iint dx dy \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \left\{ \right. \\ &\quad \eta_{ijkl} \left\langle f, \beta \left| d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_2}^{\dagger(J)} d_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{(L)} \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y) \right| l, \beta \right\rangle \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1-q_3)} e^{iy(q_4-q_2)} \quad (\text{a}) \\ &\quad \left. + \eta_{ijkl} \left\langle f, \beta \left| d_{q_4}^{\dagger(I)} c_{q_1}^{\dagger(J)} d_{q_2}^{(K)} c_{q_3}^{(L)} \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y) \right| l, \beta \right\rangle \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1+q_3)} e^{-iy(q_4+q_2)} \quad (\text{b}) \right\}. \end{aligned}$$

## A matriz de operação dual

Antes de desenvolver cada um dos termos acima devemos calcular a soma  $\eta_{ijkl} \times$  operadores, o que nos levará à própria forma dos objetos  $\eta_{ijkl}$ . As duas primeiras propriedades obedecidas pelos operadores  $\eta_{ijkl}$  é a da neutralidade perante o ordenamento de Wick bem como aos estados do vácuo:

$$\begin{aligned} (\text{A}) \quad &: \eta_{ijkl} \text{ operadores} := \eta_{ijkl} : \text{operadores} : \quad (\text{E.12}) \\ &\eta_{ijkl} \langle 0(\beta) | = \langle 0(\beta) | \eta_{ijkl}. \end{aligned}$$

Essas são características desejável, uma vez que nos permite mover  $\eta_{ijkl}$  e posicioná-lo dentro do braket e vice-versa. Com isso posto, e recorrendo à convenção da soma para índices latinos maiúsculos, vamos

então expandir o fator que aparece no primeiro canal de (E.12):

$$\begin{aligned} \eta_{ijkl} d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_2}^{\dagger(J)} d_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{(L)} &= \eta_{1111} d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(1)} c_{q_4}^{(1)} + \eta_{1112} d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(1)} c_{q_4}^{(2)} + \\ &\quad \eta_{1121} d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(2)} c_{q_4}^{(1)} + \eta_{1122} d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(2)} c_{q_4}^{(2)} + \\ &\quad \eta_{1211} d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_3}^{(1)} c_{q_4}^{(1)} + \eta_{1212} d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_3}^{(1)} c_{q_4}^{(2)} + \\ &\quad \eta_{1221} d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_3}^{(2)} c_{q_4}^{(1)} + \eta_{1222} d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_3}^{(2)} c_{q_4}^{(2)} + \\ &\quad \eta_{2111} d_{q_1}^{\dagger(2)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(1)} c_{q_4}^{(1)} + \eta_{2112} d_{q_1}^{\dagger(2)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(1)} c_{q_4}^{(2)} + \\ &\quad \eta_{2121} d_{q_1}^{\dagger(2)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(2)} c_{q_4}^{(1)} + \eta_{2122} d_{q_1}^{\dagger(2)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(2)} c_{q_4}^{(2)} + \\ &\quad \eta_{2211} d_{q_1}^{\dagger(2)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_3}^{(1)} c_{q_4}^{(1)} + \eta_{2212} d_{q_1}^{\dagger(2)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_3}^{(1)} c_{q_4}^{(2)} + \\ &\quad \eta_{2221} d_{q_1}^{\dagger(2)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_3}^{(2)} c_{q_4}^{(1)} + \eta_{2222} d_{q_1}^{\dagger(2)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_3}^{(2)} c_{q_4}^{(2)}. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Observa-se que o primeiro termo da soma acima ( $d_{q_1}^{\dagger} c_{q_2} d_{q_3} c_{q_4}^{\dagger}$ ) é idêntico àquele que teríamos caso estivéssemos na EDQ à temperatura nula. Os primeiros termos de cada canal são, portanto, cruciais, uma vez que definirão o padrão da configuração dos quartetos de operadores que seguem na soma. Em outras palavras, os 16 termos acima devem apresentar o padrão  $d_{q_1}^{\dagger} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_3} c_{q_4}$ , o que estabelecerá um nexo causal com a forma de cada um dos elementos  $\eta_{ijkl}$  e por conseguinte com a matriz  $(\eta_{ijkl})_{4 \times 4}$ . Como consequência, as entradas, cuja forma geral são dadas por

$$\eta_{ijkl} = \varepsilon_{ijkl} \tilde{\eta}_{ijkl}^{\dagger}, \quad (\text{E.14})$$

com  $\varepsilon_{ijkl}$  constantes a serem determinadas por argumentos físicos, devem ser consideradas como operadores a atuarem nos  $c'$ s e nos  $d'$ s. Como exemplo, a entrada  $\eta_{1111}$  deve ser tal a manter o padrão que vigora nos cálculos do espalhamento elétron-pósitron à  $T = 0$  (como visto no capítulo 3). Sem embargo, uma escolha fisicamente possível para o operador na primeira linha do resultado acima será simplesmente  $\eta_{1111} = \varepsilon_{1111}$  (muito embora esteja evidente que  $\varepsilon_{1111}$  deva ser igual à um!). Assim, usando-se as formas componentes das transformações de Bogoliubov em (E.6) o primeiro termo se apresentará como

$$\eta_{1111}^D d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(1)} c_{q_4}^{(1)} = \eta_{1111}^D [d_{q_1}^{\dagger} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_3} c_{q_4}] (\beta) = \varepsilon_{1111}^D [u^4 d_{q_1}^{\dagger} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_3} c_{q_4}] (\beta) \Rightarrow \eta_{1111}^D = \varepsilon_{1111}^D \quad (\text{E.15})$$

na qual a letra D serve apenas para marcar que se trata de um elemento pertencente à diagonal principal da matriz  $(\eta_{ijkl})_{4 \times 4}$  que se deseja encontrar. Para o segundo termo do resultado acima a forma de  $\eta_{1112}$  que fornece o padrão fisicamente correto a seu termo correspondente na EDQ à temperatura nula é  $\eta_{1112} = \varepsilon_{1112} \tilde{\eta}_{1112}^{\dagger}$ , de sorte que,

$$\begin{aligned} \eta_{1112} [d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(1)} c_{q_4}^{(2)}] (\beta) &= \varepsilon_{1112} \tilde{\eta}_{1112}^{\dagger} [d_{q_1}^{\dagger} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_3}^{\dagger} \tilde{c}_{q_4}^{\dagger}] (\beta) = \varepsilon_{1112} [d_{q_1}^{\dagger} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_3}^{\dagger}] (\beta) (\tilde{\eta}_{1112}^{\dagger} \cdot \tilde{c}_{q_4}^{\dagger} (\beta)) \\ &= \varepsilon_{1112} [d_{q_1}^{\dagger} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_3} c_{q_2}] (\beta). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Tais linhas definem duas outras propriedades que os operadores  $\eta$  devem satisfazer, a saber: ele comuta com todos os outros objetos que não tenham o mesmo índice de partícula e índice de momento:

$$(B) \quad [\tilde{\eta}_q^{\dagger}, \mathcal{O}_k (\beta)] = 0; \quad [\tilde{\eta}_{q_i}^{\dagger}, \mathcal{O}_{q_j} (\beta)] = 0, \quad (\text{E.17})$$

com  $\mathcal{O}(\beta)$  operadores  $c$  ou  $d$ , quer sejam de criação ou aniquilação. Eles também comutam com todos os outro de sua espécie e consigo mesmo:

$$(C) \quad [\tilde{\eta}_{q_i}^{\dagger}, \tilde{\eta}_{q_j}^{\dagger}] = 0, \quad \text{tanto para } i = j \text{ quanto } i \neq j. \quad (\text{E.18})$$

Entretanto, a ação dos operadores  $\eta$  é o de converter a forma “til” em “não-til”, “adaga” em “não-adaga” e vice-versa; isto é,

$$(D) \quad \tilde{\eta}_{q_i}^\dagger \tilde{\mathcal{O}}_{q_i}^\dagger(\beta) = \left( \tilde{\mathcal{O}}_{q_i}^\dagger(\beta) \right)^{\sim\dagger} = \mathcal{O}_{q_i}(\beta) \quad \text{e} \quad \tilde{\eta}_{q_i}^\dagger \mathcal{O}_{q_i}(\beta) = \left( \mathcal{O}_{q_i}(\beta) \right)^{\sim\dagger} = \tilde{\mathcal{O}}_{q_i}^\dagger(\beta), \quad (\text{E.19})$$

assim como foi utilizado em (E.16). Fica claro que (iv) representa um mapeamento entre elementos do espaços de operadores:  $\mathcal{O}_q \oplus \tilde{\mathcal{O}}_q^\dagger$ . Dessa propriedade constrói-se ainda operações unitárias:

$$(E) \quad \tilde{\eta}_{q_i}^\dagger \tilde{\mathcal{O}}_{q_i}^\dagger(\beta) \tilde{\eta}_{q_i}^\dagger = \tilde{\mathcal{O}}_{q_i}^\dagger(\beta) \quad \text{e} \quad \tilde{\eta}_{q_i}^\dagger \mathcal{O}_{q_i}(\beta) \tilde{\eta}_{q_i}^\dagger = \mathcal{O}_{q_i}(\beta). \quad (\text{E.20})$$

(A), (B), (C), (D) e (E) definem, portanto, o que nomeamos por *operação dualidade*, com  $\eta$  o portador dessas propriedades. Vamos tomar um último exemplo da atuação desse operador: para  $\eta_{1121} = \varepsilon_{1121} \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger$  teremos

$$\begin{aligned} \eta_{1121} [d_{q_1}^{\dagger(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_3}^{(2)} c_{q_4}^{(1)}](\beta) &= \varepsilon_{1121} \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger [u^3 v d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3}^\dagger c_{q_4}] (\beta) \\ &= \varepsilon_{1121} [u^3 v d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger] (\beta) (\tilde{\eta}_{q_3}^\dagger \cdot d_{q_3}^\dagger (\beta)) c_{q_4} (\beta) \\ &= \varepsilon_{1121} [u^3 v d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4}] (\beta). \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Em suma, com mais 13 cálculos semelhantes, os 16 elementos do operador  $(\eta_{IJKL}^s)_{4 \times 4}$  para o espalhamento elétron-pósitron podem então ser coligidos segundo a linha que cada um ocupa na matriz:

1 <sup>a</sup> linha	2 <sup>a</sup> linha
$\eta_{1111}^D = \varepsilon_{1111}^D$	$\eta_{1211} = \varepsilon_{1211} \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger$
$\eta_{1112} = \varepsilon_{1112} \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger$	$\eta_{1212}^D = \varepsilon_{1212}^D \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger$
$\eta_{1121} = \varepsilon_{1121} \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger$	$\eta_{1221} = \varepsilon_{1221} \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger$
$\eta_{1122} = \varepsilon_{1122} \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger$	$\eta_{1222} = \varepsilon_{1222} \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger$
3 <sup>a</sup> linha	4 <sup>a</sup> linha
$\eta_{2111} = \varepsilon_{2111} \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger$	$\eta_{2211} = \varepsilon_{2211} \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger$
$\eta_{2112} = \varepsilon_{2112} \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger$	$\eta_{2212} = \varepsilon_{2212} \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger$
$\eta_{2121}^D = \varepsilon_{2121}^D \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger$	$\eta_{2221} = \varepsilon_{2221} \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger$
$\eta_{2122} = \varepsilon_{2122} \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger$	$\eta_{2222}^D = \varepsilon_{2222}^D \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger$

Usando as formas-componentes das transformações de Bogoliubov dadas em (E.6) em conjunto com as entradas acima e colecionando-se os termos semelhantes a equação (E.13) torna-se

$$\begin{aligned} \eta_{IJKL} d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_2}^{\dagger(J)} d_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{(L)} &= \left[ \begin{array}{l} u^4 \varepsilon_{1111} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} + u^3 v \varepsilon_{1112} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} \\ + u^3 v \varepsilon_{1121} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} + u^2 v^2 \varepsilon_{1122} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} \\ + u^3 v \varepsilon_{1211} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} + u^2 v^2 \varepsilon_{1212} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} \\ + u^2 v^2 \varepsilon_{1221} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} + v^3 u \varepsilon_{1222} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} \\ + u^3 v \varepsilon_{2111} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} + u^2 v^2 \varepsilon_{2112} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} \\ + u^2 v^2 \varepsilon_{2121} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} + u v^3 \varepsilon_{2122} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} \\ + u^2 v^2 \varepsilon_{2211} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} + u v^3 \varepsilon_{2212} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} \\ + v^3 u \varepsilon_{2221} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} + v^4 \varepsilon_{2222} d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} \end{array} \right] (\beta), \end{aligned}$$

relembrando que a notação simplificadora foi usada, isto é, tal que  $[\varepsilon_{uv} d^\dagger c^\dagger dc](\beta) \equiv \eta u(\beta)v(\beta)d(\beta)c(\beta) \times d(\beta)c(\beta)$ . Fazendo cada um desses operadores atuarem em seus respectivos termos segundo as definições dadas, colecionando os termos semelhantes, teremos

$$\eta_{ijkl} d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_2}^{\dagger(J)} d_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{(L)} = f(\beta) d_{q_1}^{\dagger}(\beta) c_{q_2}^{\dagger}(\beta) d_{q_3}(\beta) c_{q_4}(\beta), \quad (\text{E.23})$$

na qual estamos chamando

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \varepsilon_{1111} u^4(\beta) + (\varepsilon_{1112} + \varepsilon_{1121} + \varepsilon_{1211} + \varepsilon_{2111}) u^3(\beta)v(\beta) + \\ &+ (\varepsilon_{1222} + \varepsilon_{2122} + \varepsilon_{2212} + \varepsilon_{2221}) v^3(\beta)u(\beta) + (\varepsilon_{1122} + \varepsilon_{1212} + \\ &+ \varepsilon_{1221} + \varepsilon_{2112} + \varepsilon_{2121} + \varepsilon_{2211}) u^2(\beta)v^2(\beta) + \\ &+ \varepsilon_{2222} v^4(\beta). \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Existem quatro possibilidades mais simples para as escolhas das constantes  $\varepsilon'^s$ . Escrevendo por brevidade  $\chi = \beta|\kappa_0| = E_{\text{CM}}/T$  essas quatro possibilidades são:

(i)  $\varepsilon_{1111} = \varepsilon_{2222} = 1$ ;  $\varepsilon_{1112} + \varepsilon_{1121} + \varepsilon_{1211} + \varepsilon_{2111} = \varepsilon_{1222} + \varepsilon_{2122} + \varepsilon_{2212} + \varepsilon_{2221} = 4$  e  $\varepsilon_{1122} + \varepsilon_{1212} + \varepsilon_{1221} + \varepsilon_{2112} + \varepsilon_{2121} + \varepsilon_{2211} = 6$ , donde encontra-se

$$f(\beta) = (u(\beta) + v(\beta))^4 = \frac{4e^{-\chi/2} \sinh^2(\chi/4)}{\left[1 + e^{-\chi/2} \tanh(\chi/4)\right]^2}. \quad (\text{E.25})$$

(ii)  $\varepsilon_{1111} = \varepsilon_{2222} = 1$ ;  $\varepsilon_{1112} + \varepsilon_{1121} + \varepsilon_{1211} + \varepsilon_{2111} = \varepsilon_{1222} + \varepsilon_{2122} + \varepsilon_{2212} + \varepsilon_{2221} = -4$  e  $\varepsilon_{1122} + \varepsilon_{1212} + \varepsilon_{1221} + \varepsilon_{2112} + \varepsilon_{2121} + \varepsilon_{2211} = 6$ , com

$$f(\beta) = (u(\beta) - v(\beta))^4 = \frac{4e^{-\chi/2} \sinh^2(\chi/4)}{\left[\coth(\chi/4) - e^{-\chi/2}\right]^2}. \quad (\text{E.26})$$

(iii)  $\varepsilon_{1111} = \varepsilon_{2222} = 1$ ;  $\varepsilon_{1112} + \varepsilon_{1121} + \varepsilon_{1211} + \varepsilon_{2111} = \varepsilon_{1222} + \varepsilon_{2122} + \varepsilon_{2212} + \varepsilon_{2221} = 0$  e  $\varepsilon_{1122} + \varepsilon_{1212} + \varepsilon_{1221} + \varepsilon_{2112} + \varepsilon_{2121} + \varepsilon_{2211} = 2$ , dando

$$f(\beta) = (u^2(\beta) + v^2(\beta))^2 = 1 \quad (\text{E.27})$$

(iv)  $\varepsilon_{1111} = \varepsilon_{2222} = 1$ ;  $\varepsilon_{1112} + \varepsilon_{1121} + \varepsilon_{1211} + \varepsilon_{2111} = \varepsilon_{1222} + \varepsilon_{2122} + \varepsilon_{2212} + \varepsilon_{2221} = 0$  e  $\varepsilon_{1122} + \varepsilon_{1212} + \varepsilon_{1221} + \varepsilon_{2112} + \varepsilon_{2121} + \varepsilon_{2211} = -2$ , fornecendo

$$f(\beta) = (u^2(\beta) - v^2(\beta))^2 = \tanh^2\left(\frac{\beta E_{\text{CM}}}{2}\right), \quad (\text{E.28})$$

na qual retornamos com as variáveis anteriores:  $\chi = \beta E_{\text{CM}}$ . Os detalhes da dedução de cada uma dessas funções encontram-se no apêndice D. Como visto ali, a única possibilidade fisicamente válida é a configuração dada em (iv). Em verdade, outra configuração possível para as constantes  $\varepsilon'^s$  que fornece  $f(\beta) = \tanh^2(\chi/2)$  é a seguinte:

$$\varepsilon_{1111} = \varepsilon_{2222} = -\varepsilon_{1212} = -\varepsilon_{2121} = 1 \quad \text{e} \quad \varepsilon = 0 \quad \text{para as outras.} \quad (\text{E.29})$$

Isso informa-nos que o fator térmico  $f(\beta)$  fisicamente válido está ligado aos elementos  $\eta^D = \varepsilon^D \tilde{\eta}^\dagger$ . Tal

escolha, além de ser a mais simples possível (sem ser trivial) é a mais conveniente, uma vez que deixa a matriz  $(\eta_{IJKL})_{4 \times 4}$  diagonal:

$$\left( \eta_{IJKL}^D \right)_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & & & \cdots 0' \\ & -\tilde{\eta}_{q_2}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger & & \vdots \\ \vdots & & -\tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger & \\ 0' & \cdots & & \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (\text{E.30})$$

Essa é, pois, a matriz de operação dual a emergir da estrutura de canais do espalhamento elétron-pósitron. Conhecidos os elementos  $\eta_{IJKL}^D$  e substituindo-os na equação (E.23) obtém-se diretamente que

$$\eta_{IJKL} d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_2}^{\dagger(J)} d_{q_3}^{(K)} c_{q_4}^{(L)} = \tanh^2 \left( \frac{\beta |\kappa_0|}{2} \right) [d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4}] (\beta). \quad (\text{E.31})$$

Com cálculos bem semelhantes para o produto de operadores de (E.12b), com a ajuda das transformações de Bogoliubov em (E.6) e com as propriedades de (A) a (D) pode-se igualmente obter as entradas diagonais adequadas. Sem demora, isso deve resultar em

$$\eta_{IJKL} d_{q_4}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} d_{q_2}^{(K)} c_{q_1}^{(L)} = \tanh^2 \left( \frac{\beta |\kappa_0|}{2} \right) [d_{q_4}^\dagger c_{q_3}^\dagger d_{q_2} c_{q_1}] (\beta). \quad (\text{E.32})$$

## A amplitude de espalhamento

Munidos dos resultados (E.31) e (E.32) acima, poderemos calcular os valores esperados em (E.12) e seguir na determinação da amplitude de espalhamento e seção de choque. Por economia de grafia vamos principiar escrevendo que

$$\mathbf{H}_\beta(|\kappa_0|) = \tanh^2 \left( \frac{\beta |\kappa_0|}{2} \right). \quad (\text{E.33})$$

Retornando-se então (E.31), (E.32) e (E.33) em (E.12):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda(\beta) &= \frac{1}{2} \mathbf{H}_\beta(|\kappa_0|) \sum_{a,b} \iint dx dy \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \left\{ \right. \\ &\left\langle f, \beta \left| [d_{q_1}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4}] (\beta) \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y) \right| \iota, \beta \right\rangle \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1-q_3)} e^{iy(q_4-q_2)} + (\mathbf{I}) \right. \\ &\left. \left\langle f, \beta \left| [d_{q_4}^\dagger c_{q_3}^\dagger d_{q_2} c_{q_1}] (\beta) \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y) \right| \iota, \beta \right\rangle \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1+q_3)} e^{-iy(q_4+q_2)} \quad (\mathbf{II}) \right\} \end{aligned}$$

Começando com o valor esperado (E.34I). Usando os estados assintóticos (E.2) e movimentando-se os operadores, usando-se para isso o fato de que certos pares anti-comutam ( $AB = -BA$ ) teremos,

$$\begin{aligned} (\text{E.34I}) &= \left\langle 0(\beta) \left| \left[ d_{p_4} c_{p_3} c_{q_1}^\dagger d_{q_2}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} c_{p_4}^\dagger d_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) \right| 0(\beta) \right\rangle \\ &= \left\langle 0(\beta) \left| \left[ (d_{p_4} \cdot d_{q_1}^\dagger) (c_{p_3} \cdot c_{q_2}^\dagger) (c_{q_4} \cdot c_{p_1}^\dagger) (d_{q_3} \cdot d_{p_2}^\dagger) \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) \right| 0(\beta) \right\rangle. \end{aligned}$$

A última igualdade acima marca onde os pares de operadores não anti-comutam mais, motivo pelo qual (e tão somente por isso) o “.” foi usado. No que se segue deve ficar claro que: 1) as variáveis de spin  $\sigma$  se relacionam com os momentos  $q'^s$  e as variáveis de spin  $s$  com os momento  $p'^s$  de modo que  $[d_q c_p](\beta, \sigma, s) = d_q(\beta, \sigma) c_p(\beta, s)$  2) os operadores  $c'^s$  e  $d'^s$  comutam com os operadores  $\epsilon'^s$  do fóton e 3) todos cálculos

são executados internamente ao braket  $\langle 0(\beta) | \cdots | 0(\beta) \rangle$ . Com efeito, usando as relações de anti-comutação em (E.3), teremos,

$$\begin{aligned} \left[ (d_{p_4} \cdot d_{q_1}^\dagger) (c_{p_3} \cdot c_{q_2}^\dagger) (c_{q_4} \cdot c_{p_1}^\dagger) (d_{q_3} \cdot d_{p_2}^\dagger) \right] (\beta, \sigma, s) &= \left( \left[ \delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} - d_{q_1}^\dagger d_{p_4} \right] \left[ \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} - c_{q_2}^\dagger c_{p_3} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} - c_{p_1}^\dagger c_{q_4} \right] \left[ \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} - d_{p_2}^\dagger d_{q_3} \right] \right) (\beta, \sigma, s). \end{aligned}$$

Quando acionados pelo braket os pares de operadores que restam dão resultado nulo. Retornando-o então em (E.34I) fica-se com

$$(E.34I) = \left\langle f, \beta \left| \left[ c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} \right] (\beta, \sigma) \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y) \right| \iota, \beta \right\rangle = \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y, \beta) \right\rangle.$$

Com mesmo procedimento o valor esperado (E.34II) é também calculado:

$$\begin{aligned} (E.34II) &= \left\langle f, \beta \left| \left[ c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} c_{q_1} \right] (\beta, \sigma) \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y) \right| \iota, \beta \right\rangle \\ &= \left\langle 0(\beta) \left| \left[ (d_{p_4} \cdot d_{q_4}^\dagger) (c_{p_3} \cdot c_{q_3}^\dagger) (c_{q_1} \cdot c_{p_1}^\dagger) (d_{q_2} \cdot d_{p_2}^\dagger) \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y) \right| 0(\beta) \right\rangle \\ &= \delta_{s_1 \sigma_1} \delta_{s_2 \sigma_2} \delta_{s_3 \sigma_3} \delta_{s_4 \sigma_4} \delta_{p_1 q_1}^{(3)} \delta_{p_2 q_2}^{(3)} \delta_{p_3 q_3}^{(3)} \delta_{p_4 q_4}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y, \beta) \right\rangle. \end{aligned}$$

Retornando os resultados finais de (E.34I) e (E.34II) em (E.34):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda(\beta)(e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}) &= \frac{1}{2} \mathbf{H}_\beta(|\kappa_0|) \sum_{a,b} \iint dx dy \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \left\{ \right. \\ &\quad \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y, \beta) \right\rangle \\ &\quad \times \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1-q_3)} e^{iy(q_4-q_2)} \text{ (I)} \\ &\quad + \delta_{s_1 \sigma_1} \delta_{s_2 \sigma_2} \delta_{s_3 \sigma_3} \delta_{s_4 \sigma_4} \delta_{p_1 q_1}^{(3)} \delta_{p_2 q_2}^{(3)} \delta_{p_3 q_3}^{(3)} \delta_{p_4 q_4}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}(x-y, \beta) \right\rangle \\ &\quad \times \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)}^\nu v(4) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1+q_3)} e^{-iy(q_4+q_2)} \text{ (II)} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (E.34)$$

Calculemos com detalhes o primeiro desses canais. Neste ponto, ao evocar o propagador térmico do fóton, além das propriedades da delta de Kronecker e de Dirac:  $\Sigma_\sigma f(\sigma) \delta_{\sigma s} = f(s)$ ,  $\int dx f(x) \delta(x-y) = f(y)$ , necessitaremos também dos seguintes resultados que constam no apêndice A:

$$(A.6) = \int \delta(\epsilon - x) \delta(x - \eta) dx = \delta(\epsilon - \eta) \quad \text{e} \quad (A.7) = \iint dx dy \int d^4 \kappa_{(l)} e^{-i\kappa_{(l)}(x-y)} e^{-ix(p_1-p_3)} e^{iy(p_4-p_2)} = \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).$$

Assim, lançando-se mão do propagador do fóton em (E.10) o canal (E.34I) tomará o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} (E.34I) &= i \sum_{a,b} \iint dx dy \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \int \frac{d^4 \kappa}{(2\pi)^4} e^{-i\kappa(x-y)} \frac{\Delta(\kappa, \beta)}{\kappa^2} \times \\ &\quad \eta_{\mu\nu} \left[ \bar{u}(2) \Gamma_{(a)}^\mu v(1) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(3) \Gamma_{(b)}^\nu u(4) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1-q_3)} e^{iy(q_4-q_2)} \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \\ &= i \frac{\Delta(\kappa, \beta)}{\kappa^2} \int \frac{d^4 \kappa}{(2\pi)^4} \left\{ \int d^4 x e^{-ix(p_4-p_2+\kappa)} \right\} \left\{ \int d^4 y e^{-iy(p_3-p_1-\kappa)} \right\} \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(a)}^\mu v(4) \bar{v}(2) \Gamma_{(b)\mu} u(1) \right] (p, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iota \frac{\Delta(\kappa, \beta)}{\kappa^2} \left\{ \int \frac{d^4 \kappa}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p_4 - p_2 + \kappa) \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - \kappa) \right\} [\bar{u}(3) \Gamma_{(a)}^\mu v(4) \bar{v}(2) \Gamma_{(b)\mu} u(1)](p, s) \\
&= \iota \Delta(\kappa, \beta) \frac{\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\kappa^2 (2\pi)^4} [\bar{u}(3) \Gamma_{(a)}^\mu v(4) \bar{v}(2) \Gamma_{(b)\mu} u(1)](p, s).
\end{aligned}$$

O fator  $\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)/(2\pi)^4$ , por expressar apenas a conservação do momento-energia pode ser descartado; por conseguinte,

$$(E.34I) = \iota \frac{\Delta(\kappa, \beta)}{\kappa^2} [\bar{u}(3) \Gamma_{(a)}^\mu v(4) \bar{v}(2) \Gamma_{(b)\mu} u(1)](p, s). \quad (E.35)$$

Os cálculos para (E.34II) fornecem o mesmo resultado, informando-nos que ambos os termos são, na verdade, o mesmo canal, o que era de se esperar em se tratando do espalhamento elétron-pósitron. Dessa forma, uma vez que (E.34I) = (E.34II) a amplitude de espalhamento (E.34) tornar-se-á simplesmente

$$\boxed{\mathcal{M}_\lambda(\beta) = \sum_{a,b} \mathcal{M}_{(ab)\lambda}(\beta)}, \quad (E.36)$$

na qual estamos chamando

$$\mathcal{M}_{(ab)\lambda}(\beta) = \iota H_\beta(|\kappa_0|) \frac{\Delta(\kappa, \beta)}{\kappa^2} [\bar{u}(3) \Gamma_{(a)}^\mu v(4) \bar{v}(2) \Gamma_{(b)\mu} u(1)](p, s), \quad (E.37)$$

com  $H_\beta(|\kappa_0|)$  dada por (E.33).

### A seção de choque

Dada a equação (E.36) somos assim instados à buscar pela seção de choque. Para tanto, iniciemos por tomar o módulo quadrado da amplitude:

$$|\mathcal{M}_\lambda(\beta)|^2 = \sum_{a,b} \sum_{c,d} \mathcal{M}_{(ab)\lambda}(\beta) \mathcal{M}_{(cd)\lambda}^\dagger(\beta). \quad (E.38)$$

Escrevamos também o fator térmico do espalhamento elétron-pósitron:

$$\boxed{\mathcal{E}(\beta) = \tanh^4 \left( \frac{\beta E_{CM}}{2} \right) |\Delta(\kappa, \beta)|^2}, \quad (E.39)$$

com  $|\kappa_0| = E_{CM}$  e

$$|\Delta(\kappa, \beta)|^2 = 1 + (2\pi)^4 s^2 \delta^2(s) / \left( e^{\frac{\beta E_{CM}}{2}} - 1 \right)^2, \quad (E.40)$$

onde  $\kappa^\mu \kappa_\mu = s$ . Usando-se do truque

$$[\bar{v}(2) \Gamma^\mu u(1)] [\bar{u}(1) \Gamma_\mu v(2)] = [\Gamma^\mu \bar{u}(1) u(1)] [\Gamma_\mu \bar{v}(2) v(2)], \quad (E.41)$$

em conjunto com as regras

$$\sum_{\text{Spin}} \bar{u}(i) u(i) = (p'_i + m) \quad \text{e} \quad \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(i) v(i) = (p'_i - m), \quad (E.42)$$

ficamos com

$$\langle |\mathcal{M}_\lambda(\beta)|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{M}_\lambda(\beta)|^2 = \frac{\mathcal{E}(\beta)}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{M}_{(ab)\lambda}(\beta) \mathcal{M}_{(cd)\lambda}^\dagger(\beta) \quad (E.43)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathcal{E}(\beta)}{4\kappa^4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \sum_{\text{Spin}} \left[ \bar{v}(2) \Gamma_{(a)}^\mu u(1) \right] (p,s) \left[ \bar{u}(3) \Gamma_{(b)\mu} v(4) \right] (p,s) \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\nu v(2) \right] (p,s) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)\nu} u(3) \right] (p,s) \\
&= \frac{\mathcal{E}(\beta)}{4s^2} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \sum_{\text{Spin}} \left[ \Gamma_{(a)}^\mu \bar{u}(1) u(1) \right] (p,s) \left[ \Gamma_{(b)}^\nu \bar{v}(2) v(2) \right] (p,s) \left[ \Gamma_{(c)\mu} \bar{u}(3) u(3) \right] (p,s) \left[ \Gamma_{(d)\nu} \bar{v}(4) v(4) \right] (p,s). \\
&= \frac{\mathcal{E}(\beta)}{4s^2} \left\{ \sum_{a,b} \mathbb{E}_{(ab)}^{\mu\nu} \right\} \left\{ \sum_{c,d} \mathbb{M}_{(cd)\mu\nu} \right\},
\end{aligned}$$

sendo

$$\mathbb{E}_{(ab)}^{\mu\nu} = \left[ \Gamma_{(a)}^\mu \left( \sum_{\text{Spin}} \bar{u}(1) u(1) \right) \right] (p,s) \left[ \Gamma_{(b)}^\nu \left( \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(2) v(2) \right) \right] (p,s) = \text{tr} \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu (p'_1 + m_e) \Gamma_{(b)}^\nu (p'_2 - m_e) \right\}, \quad (\text{E.44})$$

o fator eletrônico, e

$$\mathbb{M}_{(ab)}^{\mu\nu} = \left[ \Gamma_{(a)}^\mu \left( \sum_{\text{Spin}} \bar{u}(3) u(3) \right) \right] (p,s) \left[ \Gamma_{(b)}^\nu \left( \sum_{\text{Spin}} \bar{v}(4) v(4) \right) \right] (p,s) = \text{tr} \left\{ \Gamma_{(a)}^\mu (p'_3 + m_\mu) \Gamma_{(b)}^\nu (p'_4 - m_\mu) \right\}, \quad (\text{E.45})$$

o fator muônico. Nota-se que, tanto  $\mathbb{E}_{(ab)}^{\mu\nu}$  quanto  $\mathbb{M}_{(ab)}^{\mu\nu}$  acham-se escritos em termos do vértice geral  $\Gamma_{(a)}^\mu = (\Gamma_{(0)}, \Gamma_{(1)})^\mu$ , com  $\Gamma_{(0)}^\mu = ie^e \gamma^\mu$  o vértice da EDQ usual e  $\Gamma_{(1)}^\mu$  o vértice que emerge como efeito da VSL. Os fatores com configuração  $a, b = 0$  encontram-se calculados no apêndice C. Com tais peças a seção de choque do espalhamento elétron-pósitron à temperatura finita e no contexto da violação de simetria de Lorentz finalmente pode ser determinada a partir de

$$\boxed{\frac{d\sigma_\lambda(\beta)}{d\Omega}(e\bar{e} \rightarrow e\bar{e}) = \frac{1}{64\pi^2 s^2} \left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda(\beta) \right|^2 \right\rangle}, \quad (\text{E.46})$$

com  $\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda(\beta) \right|^2 \right\rangle$  dada em (E.43).

Apêndice **F**

## Amplitude térmica do Espalhamento Bhabha

**N**a sequência são escritos os operadores de onda  $\Psi$  e calcula-se a amplitude de espalhamento  $\mathcal{M}(\beta)$ , a matriz de operação dual  $(\eta_{IJKL})_{4 \times 4}$  e a seção de choque térmica  $\frac{d\sigma_\lambda(\beta)}{d\Omega}(e\bar{e} \rightarrow e\bar{e})$ . Muito dos cálculos aqui desenvolvidos assemelham-se àquelas executados no apêndice precedente, de modo que algumas passagens serão, portanto, negligenciadas.

### Elementos prévios

A demonstração da amplitude de espalhamento no caso Bhabha, à semelhança do caso elétron-pósitron, começa colecionando suas peças básicas de partida. Permanecem inalteradas tanto as transformações de Bogoliubov dadas em (E.1) bem como as relações de anti-comutação escritas em (E.3). Os estados térmicos inicial e final são agora dados por

$$|\iota, \beta\rangle = d_{p_2}^\dagger(s_2, \beta) c_{p_1}^\dagger(s_1, \beta) |0(\beta)\rangle \quad \text{e} \quad |f, \beta\rangle = c_{p_3}^\dagger(s_3, \beta) d_{p_4}^\dagger(s_4, \beta) |0(\beta)\rangle. \quad (\text{F.1})$$

Neste ponto uma vez mais reescreve-se o produto  $\Psi\Gamma^\mu\Psi\Psi\Gamma^\nu\Psi$  lançando-se mão dos elementos  $\eta_{IJKL}$  de uma certa matriz  $(\eta_{IJKL})_{4 \times 4}$ . A esse quadrilinear daremos o nome de  $\mathcal{Q}_{(ab)}^{\mu\nu}$ :

$$\mathcal{Q}_{(ab)}^{\mu\nu} = \eta_{IJKL} \bar{\Psi}_1^{(I)}(x) \Gamma_{(a)}^\mu \Psi_3^{(J)}(x) \bar{\Psi}_4^{(K)}(y) \Gamma_{(b)}^\nu \Psi_2^{(L)}(y), \quad (\text{F.2})$$

com  $I, J, K, L = 1, 2$ . Segue o operador de onda grafado com esses novos índices:

$$\bar{\Psi}(x)^{(I)} = \int dq \left[ c_q^{(I)} \bar{u}(q, \sigma) e^{iqx} + d_q^{\dagger(I)} \bar{v}(q, \sigma) e^{-iqx} \right], \quad (\text{F.3})$$

sendo os  $c_q^{(I)s}$  (e os  $d_q^{(I)s}$ ) os componentes do operador  $c$  (e  $d$ ) dados nas equações (E.6). Com esses elementos, a matriz de espalhamento é construída:

$$\mathcal{M}_\lambda(\beta) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \iint dx dy \langle f, \beta | \eta_{IJKL} : \mathcal{Q}_{(ab)}^{\mu\nu} A_\mu(x) A_\nu(y) : | \iota, \beta \rangle, \quad (\text{F.4})$$

em que  $a$  e  $b$  representam as espécies de vértices:  $a = 0$  para o vértice da EDQ e  $a = 1$  para o vértice da EDQE com  $\eta_{IJKL}$  os componentes da matriz de operação dual que, como veremos, apresentará uma configuração sutilmente diferente daquela do caso elétron-pósitron.

### Cálculo do quadrilinear

Vamos agora calcular o quadrilinear (F.2). Neste caso temos o par  $e_1\bar{e}_3$  chegando enquanto que  $e_4\bar{e}_2$  é o par que está saindo. Vamos começar com o bilinear:

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_1^{(I)}(\mathbf{x}) \Gamma_{(a)}^{\mu} \Psi_3^{(J)}(\mathbf{x}) &= \iint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_3 \left\{ \left[ c_{q_1}^{(I)} \bar{u}(1) e^{i q_1 x} + d_{q_1}^{\dagger(I)} \bar{v}(1) e^{-i q_1 x} \right] \Gamma_{(a)}^{\mu} \left[ c_{q_3}^{\dagger(J)} u(3) e^{-i q_3 x} + d_{q_3}^{(J)} v(3) e^{i q_3 x} \right] \right\} (\mathbf{q}, \sigma) \\
&= \iint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_3 \left\{ c_{q_1}^{(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} u(3) e^{ix(q_1 - q_3)} + c_{q_1}^{(I)} d_{q_3}^{(J)} \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} v(3) e^{+ix(q_1 + q_3)} + \right. \\
&\quad \left. + d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{(J)} \bar{v}(3) \Gamma_{(a)}^{\mu} u(3) e^{-ix(q_1 + q_3)} + d_{q_1}^{\dagger(I)} d_{q_3}^{\dagger(J)} \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} v(3) e^{-ix(q_1 - q_3)} \right\} (\mathbf{q}, \sigma). \tag{F.5}
\end{aligned}$$

Com um cálculo semelhante,

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_4^{(K)}(\mathbf{y}) \Gamma_{(b)}^{\mu} \Psi_2^{(L)}(\mathbf{y}) &= \iint d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_4 \left\{ \left[ c_{q_4}^{(K)} \bar{u}(4) e^{i q_4 y} + d_{q_4}^{\dagger(K)} \bar{v}(4) e^{-i q_4 y} \right] \Gamma_{(b)}^{\mu} \left[ c_{q_2}^{\dagger(L)} u(2) e^{-i q_2 y} + d_{q_2}^{(L)} v(2) e^{-i q_2 y} \right] \right\} (\mathbf{q}, \sigma) \\
&= \iint d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_4 \left\{ c_{q_4}^{(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} \bar{u}(4) \Gamma_{(c)}^{\mu} u(2) e^{iy(q_4 - q_2)} + c_{q_4}^{(K)} d_{q_2}^{(L)} \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^{\mu} v(2) e^{i(q_4 + q_2)} + \right. \\
&\quad \left. + d_{q_4}^{\dagger(K)} c_{q_2}^{(L)} \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^{\mu} u(2) e^{-iy(q_4 + q_2)} + d_{q_4}^{\dagger(K)} d_{q_2}^{\dagger(L)} \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^{\mu} v(2) e^{-iy(q_4 - q_2)} \right\} (\mathbf{q}, \sigma). \tag{F.6}
\end{aligned}$$

Executando-se então o produto de (F.5) com (F.6), teremos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{(a,b)}^{\mu\nu} &= \eta_{IJKL} \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\
&\quad c_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{(J)} c_{q_4}^{\dagger(K)} c_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} u(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} u(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} \\
&+ c_{q_1}^{(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} c_{q_4}^{(K)} d_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} u(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} u(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} \\
&+ c_{q_1}^{(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} c_{q_4}^{\dagger(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} u(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} v(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{ix(q_1 - q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} \\
&+ c_{q_1}^{(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} d_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} u(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} v(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} \left. \right\} \\
&+ \eta_{IJKL} \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\
&\quad c_{q_1}^{(I)} d_{q_3}^{(J)} c_{q_4}^{(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} v(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} u(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} \\
&+ c_{q_1}^{(I)} d_{q_3}^{(J)} c_{q_4}^{(K)} d_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} v(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} v(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} \\
&+ c_{q_1}^{(I)} d_{q_3}^{(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} v(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} v(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} \\
&+ c_{q_1}^{(I)} d_{q_3}^{(J)} d_{q_4}^{(K)} d_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} v(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} u(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 - q_2)} \left. \right\} \\
&+ \eta_{IJKL} \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\
&\quad d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} c_{q_4}^{(K)} c_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} u(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} u(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{-ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} \\
&+ d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} c_{q_4}^{(K)} d_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} u(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} v(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{-ix(q_1 + q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} \\
&+ d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} d_{q_2}^{\dagger(L)} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} u(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} u(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 - q_2)} \\
&+ d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} d_{q_4}^{(K)} d_{q_2}^{\dagger(L)} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} u(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} v(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{-ix(q_1 + q_3)} e^{-iy(q_4 - q_2)} \left. \right\} \\
&+ \eta_{IJKL} \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\
&\quad d_{q_1}^{\dagger(I)} d_{q_3}^{(J)} c_{q_4}^{(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} v(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} u(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 - q_2)} \\
&+ d_{q_1}^{\dagger(I)} d_{q_3}^{(J)} c_{q_4}^{(K)} d_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} v(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} v(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{iy(q_4 + q_2)} \\
&+ d_{q_1}^{\dagger(I)} d_{q_3}^{(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^{\mu} v(3) \right] (\mathbf{q}, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^{\nu} u(2) \right] (\mathbf{q}, \sigma) e^{-ix(q_1 - q_3)} e^{-iy(q_4 + q_2)} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{F.7}$$

$$+ d_{q_1}^{\dagger(I)} d_{q_3}^{(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} d_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1-q_3)} e^{-iy(q_4-q_2)} \Big\}.$$

Novamente, os canais formados por fatores cujo número de operadores de partícula seja diferente do número de antipartícula são todos improváveis, ou seja, tem valor esperado nulo. Dessa forma o resultado acima se reduz a apenas quatro canais possíveis:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{(a,b)}^{\mu\nu} = & \eta_{IJKL} \iiint dq_1 dq_2 dq_3 dq_4 \Big\{ \\ & c_{q_1}^{(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} d_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1-q_3)} e^{-iy(q_4-q_2)} + \\ & + d_{q_1}^{\dagger(I)} d_{q_3}^{(J)} c_{q_4}^{(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1+q_3)} e^{-iy(q_4+q_2)} \\ & + c_{q_1}^{(I)} d_{q_3}^{(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} c_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1+q_3)} e^{iy(q_4+q_2)} \\ & + d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} c_{q_4}^{(K)} d_{q_2}^{(L)} \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3) \right] (q, \sigma) \left[ \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1-q_3)} e^{iy(q_4+q_2)} \Big\}. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Levando-a até (F.4) gera-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda(\beta) = & \frac{1}{2} \sum_{a,b} \prod_{j=1}^4 \sum_{\sigma_j} \left\langle f, \beta \middle| : \mathcal{D}_{(a,b)}^{\mu\nu} A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota, \beta \rangle = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \sum_{\text{Spin}} \iiint dq_1 dq_2 dq_3 dq_4 \Big\{ \\ & \eta_{IJKL} \left\langle f, \beta \middle| : c_{q_1}^{(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} d_{q_2}^{(L)} \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \right| \iota, \beta \rangle \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(3) \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1-q_3)} e^{-iy(q_4-q_2)} \text{(I)} + \\ & \eta_{IJKL} \left\langle f, \beta \middle| : d_{q_1}^{\dagger(I)} d_{q_3}^{(J)} c_{q_4}^{(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \right| \iota, \beta \rangle \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3) \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1-q_3)} e^{iy(q_4-q_2)} \text{(II)} + \\ & \eta_{IJKL} \left\langle f, \beta \middle| : c_{q_1}^{(I)} d_{q_3}^{(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y) : \right| \iota, \beta \rangle \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3) \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1+q_3)} e^{-iy(q_4+q_2)} \text{(III)} + \\ & \eta_{IJKL} \left\langle f, \beta \middle| : d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} c_{q_4}^{(K)} d_{q_2}^{(L)} \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y) : \right| \iota, \beta \rangle \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(3) \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1+q_3)} e^{iy(q_4+q_2)} \text{(IV)} \Big\}, \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

com  $\mathbf{G}^{(l)}(x-y)$  dada por (E.10). Vamos agora determinar as entradas  $\eta_{IJKL}$ , levando-nos à matriz de operação dual  $(\eta_{IJKL})_{IJKL}$ .

### A matriz de operação dual

Subentendida a convenção da soma para índices latinos maiúsculos vamos expandir então o fator no canal (F.8) e usar, na sequência, as transformações de Bogoliubov na forma de componentes em (E.6), Tal ação fornece-nos

$$\begin{aligned} \eta_{IJKL} c_{q_1}^{(I)} c_{q_2}^{\dagger(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} d_{q_2}^{(L)} = & \eta_{1111} c_{q_1}^{(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_4}^{\dagger(1)} d_{q_2}^{(1)} + \eta_{1112} c_{q_1}^{(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_4}^{\dagger(1)} d_{q_2}^{(2)} + \\ & \eta_{1121} c_{q_1}^{(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_4}^{\dagger(2)} d_{q_2}^{(1)} + \eta_{1122} c_{q_1}^{(1)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_4}^{\dagger(2)} d_{q_2}^{(2)} + \\ & \eta_{1211} c_{q_1}^{(1)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_4}^{\dagger(1)} d_{q_2}^{(1)} + \eta_{1212} c_{q_1}^{(1)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_4}^{\dagger(1)} d_{q_2}^{(2)} + \\ & \eta_{1221} c_{q_1}^{(1)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_4}^{\dagger(2)} d_{q_2}^{(1)} + \eta_{1222} c_{q_1}^{(1)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_4}^{\dagger(2)} d_{q_2}^{(2)} + \\ & \eta_{2111} c_{q_1}^{(2)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_4}^{\dagger(1)} d_{q_2}^{(1)} + \eta_{2112} c_{q_1}^{(2)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_4}^{\dagger(1)} d_{q_2}^{(2)} + \\ & \eta_{2121} c_{q_1}^{(2)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_4}^{\dagger(2)} d_{q_2}^{(1)} + \eta_{2122} c_{q_1}^{(2)} c_{q_2}^{\dagger(1)} d_{q_4}^{\dagger(2)} d_{q_2}^{(2)} + \\ & \eta_{2211} c_{q_1}^{(2)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_4}^{\dagger(1)} d_{q_2}^{(1)} + \eta_{2212} c_{q_1}^{(2)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_4}^{\dagger(1)} d_{q_2}^{(2)} + \\ & \eta_{2221} c_{q_1}^{(2)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_4}^{\dagger(2)} d_{q_2}^{(1)} + \eta_{2222} c_{q_1}^{(2)} c_{q_2}^{\dagger(2)} d_{q_4}^{\dagger(2)} d_{q_2}^{(2)} = \\ & \left[ u^4 \eta_{1111} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + u^3 v \eta_{1112} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + \right. \\ & \left. u^3 v \eta_{1121} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + u^2 v^2 \eta_{1122} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + \right. \\ & \left. u^3 v \eta_{1211} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + u^2 v^2 \eta_{1212} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + \right. \\ & \left. u^3 v \eta_{1221} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + u^2 v^2 \eta_{1222} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + \right. \\ & \left. u^4 \eta_{2111} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + u^3 v \eta_{2112} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + \right. \\ & \left. u^3 v \eta_{2121} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + u^2 v^2 \eta_{2122} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + \right. \\ & \left. u^4 \eta_{2211} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + u^3 v \eta_{2212} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + \right. \\ & \left. u^3 v \eta_{2221} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + u^2 v^2 \eta_{2222} c_{q_1} c_{q_2}^{\dagger} d_{q_4}^{\dagger} d_{q_2} + \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u^2 v^2 \eta_{1221} c_{q_1} c_{q_2}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} + v^3 u \eta_{1222} c_{q_1} c_{q_2}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} + \\
& u^3 v \eta_{2111} c_{q_1} c_{q_2}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} + u^2 v^2 \eta_{2112} c_{q_1} c_{q_2}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} + \\
& u^2 v^2 \eta_{2121} c_{q_1} c_{q_2}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} + u v^3 \eta_{2122} c_{q_1} c_{q_2}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} + \\
& u^2 v^2 \eta_{2211} c_{q_1} c_{q_2}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} + u v^3 \eta_{2212} c_{q_1} c_{q_2}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} + \\
& v^3 u \eta_{2221} c_{q_1} c_{q_2}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} + v^4 \eta_{2222} c_{q_1} c_{q_2}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} \Big] (\beta).
\end{aligned}$$

Deste último resultado faz-se as quatro escolhas que diagonalizam a matriz  $(\eta'_{ijkl})_{ijkl}$ , e que, a não ser pelo índice de partículas, elas coincidem com aquelas do espalhamento elétron-pósitron:

$$\begin{aligned}
\eta_{1111} &= \epsilon_{1111}, \quad \eta_{1212} = \epsilon_{1212} \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger, \quad \eta_{2121} = \epsilon_{2121} \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger, \quad \eta_{2222} = \epsilon_{2222} \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger, \quad (\text{F.10}) \\
\epsilon_{1111} &= -\epsilon_{2121} = -\epsilon_{1212} = \epsilon_{2222} = 1 \quad \text{e} \quad \epsilon = 0 \quad \text{para as outras,}
\end{aligned}$$

gerando-nos tanto a matriz de operação dual:

$$\left( \eta_{ijkl}^D \right)_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & & & \cdots \emptyset \\ & -\tilde{\eta}_{q_3}^\dagger \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger & & \vdots \\ \vdots & & -\tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger & \\ \emptyset & \cdots & \tilde{\eta}_{q_1}^\dagger \tilde{\eta}_{q_3}^\dagger \tilde{\eta}_{q_4}^\dagger \tilde{\eta}_{q_2}^\dagger & \end{pmatrix}, \quad (\text{F.11})$$

quanto o fator térmico fisicamente apropriado:

$$f(\beta) = \left( u^2(\beta) - v^2(\beta) \right)^2 = \tanh^2 \left( \frac{\beta |\kappa_0|_{(1)}}{2} \right), \quad (\text{F.12})$$

com  $|\kappa_0|_{(1)}$  a energia do centro de massa no canal  $l = 1$ . Conhecidos os elementos  $\eta_{ijkl}^D$  e substituindo-os na equação (F.10) é imediato que

$$\eta_{ijkl}^D c_{q_1}^{(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} d_{q_2}^{(L)} = \tanh^2 \left( \frac{\beta |\kappa_0|_{(1)}}{2} \right) \left[ c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} \right] (\beta). \quad (\text{F.13})$$

Cálculos semelhantes lavam-nos à determinação das três matrizes de operação dual e, por conseguinte, aos três canais subsequentes:

$$\eta_{ijkl}^D d_{q_1}^{\dagger(I)} d_{q_3}^{(J)} c_{q_4}^{(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} = \tanh^2 \left( \frac{\beta |\kappa_0|_{(1)}}{2} \right) \left[ d_{q_1}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} c_{q_2}^\dagger \right] (\beta), \quad (\text{F.14})$$

$$\eta_{ijkl}^D c_{q_1}^{(I)} d_{q_3}^{(J)} d_{q_4}^{\dagger(K)} c_{q_2}^{\dagger(L)} = \tanh^2 \left( \frac{\beta |\kappa_0|_{(2)}}{2} \right) \left[ c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger \right] (\beta), \quad (\text{F.15})$$

$$\eta_{ijkl}^D d_{q_1}^{\dagger(I)} c_{q_3}^{\dagger(J)} c_{q_4}^{(K)} d_{q_2}^{(L)} = \tanh^2 \left( \frac{\beta |\kappa_0|_{(2)}}{2} \right) \left[ d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} d_{q_2} \right] (\beta). \quad (\text{F.16})$$

## A amplitude de espalhamento

Como se nota, as escolhas fisicamente válidas para a composição de (F.11) confirmou-se a mesma para todos os quatro canais. Retornando-se (F.13) e os resultados em (F.14) em (F.9) a amplitude torna-se

$$\mathcal{M}_\lambda(\beta) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \iiint dq_1 dq_2 dq_3 dq_4 \left\{ \right. \quad (\text{F.17})$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}_{(1)\beta} \left\langle f, \beta \right| : \left[ c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} \right] (\beta, \sigma) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \left| \iota, \beta \right\rangle \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(3) \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1-q_3)} e^{-iy(q_4-q_2)} \quad (\mathbf{I}) \\
& + \mathbf{H}_{(1)\beta} \left\langle f, \beta \right| : \left[ d_{q_1}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} c_{q_2}^\dagger \right] (\beta, \sigma) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \left| \iota, \beta \right\rangle \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3) \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1-q_3)} e^{iy(q_4-q_2)} \quad (\mathbf{II}) \\
& + \mathbf{H}_{(2)\beta} \left\langle f, \beta \right| : \left[ c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger \right] (\beta, \sigma) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y) : \left| \iota, \beta \right\rangle \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3) \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1+q_3)} e^{-iy(q_4+q_2)} \quad (\mathbf{III}) \\
& + \mathbf{H}_{(2)\beta} \left\langle f, \beta \right| : \left[ d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} d_{q_2} \right] (\beta, \sigma) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y) : \left| \iota, \beta \right\rangle \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(3) \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1+q_3)} e^{iy(q_4+q_2)} \quad (\mathbf{IV})
\end{aligned}$$

com  $\mathbf{H}_{(\iota)\beta} \equiv \mathbf{H}_\beta(|\mathbf{k}_0|_{(\iota)})$  dada em (E.33). Começando com o valor esperado (F.17(I)). Para tanto usaremos os estados em (F.1), o ordenamento de Wick, as nomeações em (E.10) bem como o fato de que  $\langle 0(\beta) | \mathcal{O}(\beta) \cdots \mathcal{O}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle = 0$ . Com efeito, teremos:

$$\begin{aligned}
(F.17(\mathbf{I})) &= \left\langle f, \beta \right| \left[ c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} \right] (\beta, \sigma) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \left| \iota, \beta \right\rangle \\
&= \left\langle 0(\beta) \right| \left[ d_{p_4} c_{p_3} c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \left| 0(\beta) \right\rangle \\
&= \left\langle 0(\beta) \right| \left[ d_{p_4} d_{q_4}^\dagger c_{p_3} c_{q_3}^\dagger c_{q_1} d_{q_2} d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \left| 0(\beta) \right\rangle \\
&= \left\langle 0(\beta) \right| \left[ d_{p_4} d_{q_4}^\dagger c_{p_3} c_{q_3}^\dagger d_{q_3} d_{q_2}^\dagger c_{q_1} c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \left| 0(\beta) \right\rangle,
\end{aligned}$$

lembrando que as variáveis de spin  $\sigma$  se relacionam com os momentos  $q'$ s e as  $s$  com as variáveis de momento  $p'$ s, de modo que  $[d_q c_p](\beta, \sigma, s) = d_q(\beta, \sigma) c_p(\beta, s)$ . Executando-se as movimentações adequadas dos operadores de acordo com as relações de anti-comutação determina-se que:

$$\begin{aligned}
\left[ d_{p_4} \cdot d_{q_4}^\dagger c_{p_3} \cdot c_{q_3}^\dagger d_{q_3} \cdot d_{q_2}^\dagger c_{q_1} \cdot c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) &= \left( \left[ \delta_{s\sigma} \delta_{pq}^{(3)} - d_q d_p^\dagger \right] \left[ \delta_{s\sigma} \delta_{pq}^{(3)} - d_q d_p^\dagger \right] \left[ \delta_{s\sigma} \delta_{pq}^{(3)} - d_q d_p^\dagger \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[ \delta_{s\sigma} \delta_{pq}^{(3)} - d_q d_p^\dagger \right] \right) (\beta, \sigma, s)
\end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Levando-a até (F.9(I)), obteremos

$$\begin{aligned}
(F.9(\mathbf{I})) &= \left\langle f, \beta \right| : \left[ c_{q_1} c_{q_3}^\dagger d_{q_4}^\dagger d_{q_2} \right] (\beta, \sigma) A_\mu(x) A_\nu(y) : \left| \iota, \beta \right\rangle \\
&= \delta_{s_4\sigma_4} \delta_{s_3\sigma_3} \delta_{s_2\sigma_2} \delta_{s_1\sigma_1} \delta_{p_4q_4}^{(3)} \delta_{p_3q_3}^{(3)} \delta_{p_2q_2}^{(3)} \delta_{p_1q_1}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y, \beta) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Semelhantemente para (F.9(II)):

$$\begin{aligned}
(F.9(\mathbf{II})) &= \left\langle f, \beta \right| : \left[ d_{q_1}^\dagger d_{q_3}^\dagger c_{q_4} c_{q_2}^\dagger \right] (\beta, \sigma) A_\mu(x) A_\nu(y) : \left| \iota, \beta \right\rangle \\
&= \left\langle 0(\beta) \right| \left[ d_{p_4} c_{p_3} d_{q_1}^\dagger d_{q_3} c_{q_4} c_{q_2}^\dagger d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \left| 0(\beta) \right\rangle \\
&= \left\langle 0(\beta) \right| \left[ d_{p_4} d_{q_1}^\dagger c_{p_3} c_{q_2}^\dagger d_{q_3} d_{p_2}^\dagger c_{q_4} c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \left| 0(\beta) \right\rangle \\
&= \left\langle 0(\beta) \right| \left\{ \left[ \delta_{s_4\sigma_1} \delta_{p_4q_1}^{(3)} - d_{q_1} d_{p_4}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_3\sigma_2} \delta_{p_3q_2}^{(3)} - d_{q_2} d_{p_3}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_2\sigma_3} \delta_{p_2q_3}^{(3)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - d_{q_3} d_{p_2}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_1\sigma_4} \delta_{p_1q_4}^{(3)} - d_{q_4} d_{p_1}^\dagger \right] \right\} (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y) : \left| 0(\beta) \right\rangle \\
&= \delta_{s_4\sigma_1} \delta_{s_3\sigma_2} \delta_{s_2\sigma_3} \delta_{s_1\sigma_4} \delta_{p_4q_1}^{(3)} \delta_{p_3q_2}^{(3)} \delta_{p_2q_3}^{(3)} \delta_{p_1q_4}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y, \beta) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Para a peça (F.9(III)) encontra-se que,

$$\begin{aligned}
(F.9(\mathbf{III})) &= \left\langle f, \beta \right| : \left[ c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger \right] (\beta, \sigma) A_\mu(x) A_\nu(y) : \left| \iota, \beta \right\rangle \\
&= \left\langle 0(\beta) \right| \left[ d_{p_4} c_{p_3} c_{q_1} d_{q_3} d_{q_4}^\dagger c_{q_2}^\dagger d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y) : \left| 0(\beta) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left\langle 0(\beta) \left| : \left[ d_{p_4} d_{q_4}^\dagger c_{p_3} c_{q_1} d_{q_3} c_{q_2}^\dagger d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y) \right| 0(\beta) \right\rangle \\
&= -\left\langle 0(\beta) \left| \left[ d_{p_4} d_{q_4}^\dagger c_{p_3} c_{q_2}^\dagger d_{q_3} d_{p_2}^\dagger c_{q_1} c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y) \right| 0(\beta) \right\rangle \\
&= -\left\langle 0(\beta) \left| \left\{ \left[ \delta_{s_4 \sigma_4} \delta_{p_4 q_4}^{(3)} - d_{q_4} d_{p_4}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} - d_{q_2} d_{p_3}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_1 \sigma_1} \delta_{p_1 q_1}^{(3)} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. \left. \left. - d_{q_1} d_{p_1}^\dagger \right] \left[ \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} - d_{q_4} d_{p_1}^\dagger \right] \right\} (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y) \right| 0(\beta) \right\rangle \\
&= -\delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y, \beta) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Finalizando com o cálculo de (F.9(IV)):

$$\begin{aligned}
(F.9(IV)) &= \left\langle f, \beta \left| : \left[ c_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} d_{q_2} \right] (\beta, \sigma) A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota, \beta \right\rangle \\
&= \left\langle 0(\beta) \left| \left[ d_{p_4} c_{p_3} d_{q_1}^\dagger c_{q_3}^\dagger c_{q_4} d_{q_2} d_{p_2}^\dagger c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y) \right| 0(\beta) \right\rangle \\
&= -\left\langle 0(\beta) \left| \left[ d_{p_4} d_{q_1}^\dagger c_{p_3} c_{q_1}^\dagger d_{q_2} d_{p_2}^\dagger c_{q_4} c_{p_1}^\dagger \right] (\beta, \sigma, s) \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y) \right| 0(\beta) \right\rangle \\
&= -\delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y, \beta) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Retornando-se as peças (F.9(I)), (F.9(II)), (F.9(III)) e (F.9(IV)) em (F.9) obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda(\beta) &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} \prod_{j=1}^4 \sum_{\sigma_j} \left\langle f, \beta \left| : \mathcal{D}_{(a,b)}^{\mu\nu} A_\mu(x) A_\nu(y) : \right| \iota, \beta \right\rangle \tag{F.19} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{a,b} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \iiint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4 \left\{ \right. \\
&\quad \mathbf{H}_{(1)\beta} \delta_{s_4 \sigma_4} \delta_{s_3 \sigma_3} \delta_{s_2 \sigma_2} \delta_{s_1 \sigma_1} \delta_{p_4 q_4}^{(3)} \delta_{p_3 q_3}^{(3)} \delta_{p_2 q_2}^{(3)} \delta_{p_1 q_1}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y, \beta) \right\rangle \\
&\quad \times \left[ \bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(3) \bar{v}(4) \Gamma_{(b)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1-q_3)} e^{-iy(q_4-q_2)} (\mathbf{I}) \\
&\quad + \mathbf{H}_{(1)\beta} \delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y, \beta) \right\rangle \\
&\quad \times \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3) \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1-q_3)} e^{iy(q_4-q_2)} (\mathbf{II}) \\
&\quad - \mathbf{H}_{(2)\beta} \delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y, \beta) \right\rangle \\
&\quad \times \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3) \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu u(2) \right] (q, \sigma) e^{ix(q_1+q_3)} e^{-iy(q_4+q_2)} (\mathbf{III}) \\
&\quad - \mathbf{H}_{(2)\beta} \delta_{s_4 \sigma_1} \delta_{s_3 \sigma_2} \delta_{s_2 \sigma_3} \delta_{s_1 \sigma_4} \delta_{p_4 q_1}^{(3)} \delta_{p_3 q_2}^{(3)} \delta_{p_2 q_3}^{(3)} \delta_{p_1 q_4}^{(3)} \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y, \beta) \right\rangle \\
&\quad \times \left. \left[ \bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(3) \bar{u}(4) \Gamma_{(b)}^\nu v(2) \right] (q, \sigma) e^{-ix(q_1+q_3)} e^{iy(q_4+q_2)} (\mathbf{IV}) \right\}.
\end{aligned}$$

Usando as propriedades da delta de Kronecker e de Dirac<sup>1</sup> teremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda(\beta) &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \left\{ \right. \\
&\quad + \mathbf{H}_\beta^{(1)}(|\kappa_0|) \iint dx dy \int d^4 p \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y, \beta) \right\rangle e^{-ix(p_1-p_3)} e^{iy(p_4-p_2)} [\bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\mu u(3)] [\bar{v}(4) \Gamma_{(a)}^\nu v(2)] (p, s) \\
&\quad + \mathbf{H}_\beta^{(1)}(|\kappa_0|) \iint dx dy \int d^4 p \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y, \beta) \right\rangle e^{ix(p_4-p_2)} e^{iy(p_1-p_3)} [\bar{v}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3)] [\bar{u}(4) \Gamma_{(a)}^\nu u(2)] (p, s) \\
&\quad - \mathbf{H}_\beta^{(2)}(|\kappa_0|) \iint dx dy \int d^4 p \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y, \beta) \right\rangle e^{-ix(p_4-p_3)} e^{iy(p_1-p_2)} [\bar{u}(1) \Gamma_{(a)}^\mu v(3)] [\bar{v}(4) \Gamma_{(a)}^\nu u(2)] (p, s)
\end{aligned} \tag{F.20}$$

<sup>1</sup>Isto é,  $\sum_\sigma f(\sigma) \delta_{\sigma s} = f(s)$  e  $\int dx f(x) \delta(x-y) = f(y)$ .

$$-\mathbf{H}_\beta^{(2)}(|\kappa_0|) \iint dx dy \int d^4 p \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y, \beta) \right\rangle e^{ix(p_1-p_2)} e^{-iy(p_4-p_3)} [\bar{v}(1)\Gamma_{(a)}^\mu u(3)][\bar{u}(4)\Gamma_{(a)}^\nu v(2)](p, s) \right\}.$$

Levando-se em conta a simetria na troca dos vértices e dos índices das partículas ( $x \rightarrow y$  e  $y \rightarrow x$ ) bem como nos índices dos momentos lineares veremos que os primeiros dois termos são na verdade os mesmos, assim como o são os dois últimos, dessa forma que,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda(\beta) = & \sum_{a,b} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} \left\{ \right. \\ & \mathbf{H}_\beta^{(2)}(|\kappa_0|) \iint dx dy \int d^4 p \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(1)}(x-y, \beta) \right\rangle e^{-ix(p_1-p_3)} e^{iy(p_4-p_2)} [\bar{u}(1)\Gamma_{(a)}^\mu u(3)][\bar{v}(4)\Gamma_{(a)}^\nu v(2)](p, s) \\ & \left. - \mathbf{H}_\beta^{(2)}(|\kappa_0|) \iint dx dy \int d^4 p \left\langle \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(2)}(x-y, \beta) \right\rangle e^{-ix(p_4-p_3)} e^{iy(p_1-p_2)} [\bar{u}(1)\Gamma_{(a)}^\mu v(3)][\bar{v}(4)\Gamma_{(a)}^\nu u(2)](p, s) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

lembrando que  $t = 1$  se refere ao canal  $t$  ( $|\kappa_0|_{(1)} \equiv \sqrt{t}$ ) e  $t = 2$  ao canal  $s$  ( $|\kappa_0|_{(2)} \equiv \sqrt{s}$ ); além disso,

$$|\kappa_0|_{(1)} = |p_3 - p_1|, \quad \text{e} \quad |\kappa_0|_{(2)} = |p_2 + p_4|, \quad (\text{F.22})$$

com  $|\kappa_0| = E_{\text{CM}}$  a energia do centro de massa. Novamente, neste ponto, usaremos o resultado (A.6) do apêndice A:

$$(A.6) = \iint dx dy \int d^4 \kappa_{(l)} e^{-i\kappa_{(l)}(x-y)} e^{-ix(p_1-p_3)} e^{iy(p_4-p_2)} = \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).$$

Usando-a em (F.22) fica-se com:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda(\beta) = & i \sum_{a,b} \frac{\tanh^2\left(\frac{\beta E_{\text{CM}}}{2}\right)}{t} \Delta(t, \beta) \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^4} [\bar{u}(1)\Gamma_{(a)}^\mu u(3) \bar{v}(4)\Gamma_{(b)}^\nu v(2)](p, s) \\ & - i \sum_{a,b} \frac{\tanh^2\left(\frac{\beta E_{\text{CM}}}{2}\right)}{s} \Delta(s, \beta) \frac{\delta^4(p_2 + p_4 - p_3 - p_1)}{(2\pi)^4} [\bar{v}(4)\Gamma_{(a)}^\mu u(3) \bar{u}(1)\Gamma_{(b)}^\nu v(2)](p, s), \end{aligned} \quad (\text{F.23})$$

sendo

$$\Delta(t, \beta) = 1 - i(2\pi)t\delta(t)/(e^{\beta E_{\text{CM}}} - 1) \quad \text{e} \quad \Delta(s, \beta) = 1 - (2\pi)s\delta(s)/(e^{\beta E_{\text{CM}}} - 1). \quad (\text{F.24})$$

Obviamente que os fatores  $\delta^4/(2\pi)^4$  representam apenas leis de conservação de energia-momento, posto que serão omitidos. Dito isso, finalmente, a amplitude de probabilidade termalizada do espalhamento Bhabha no contexto de violação da simetria de Lorentz fica dada por:

$$\mathcal{M}_\lambda(\beta) = \sum_{a,b} \mathcal{M}_{(ab)\lambda}(\beta), \quad (\text{F.25})$$

com

$$\mathcal{M}_{(ab)\lambda}(\beta) = \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(t)}(\beta) + \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(s)}(\beta), \quad (\text{F.26})$$

na qual,

$$\mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(t)}(\beta) = +i \frac{\tanh^2\left(\frac{\beta E_{\text{CM}}}{2}\right)}{t} \Delta(t, \beta) [\bar{u}(1)\Gamma_{(a)}^\mu u(3)][\bar{v}(4)\Gamma_{(a)}^\nu v(2)](p, s) \quad \text{e} \quad (\text{F.27})$$

$$\mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(s)}(\beta) = -i \frac{\tanh^2\left(\frac{\beta E_{\text{CM}}}{2}\right)}{s} \Delta(s, \beta) [\bar{v}(4)\Gamma_{(a)}^\mu u(3)][\bar{u}(1)\Gamma_{(a)}^\nu v(2)](p, s), \quad (\text{F.28})$$

representam a amplitude do canal  $t$  e a do canal  $s$ .

### A seção de choque

Dos três resultados anteriores nota-se que, no cálculo de  $|\mathcal{M}_\lambda(\beta)|^2$  emergirá um termo de mistura associado ao produto entre cada um dos canais. De fato, uma vez escritos seus complexos conjugados obtém-se

$$\mathcal{M}_\lambda(\beta) \cdot \mathcal{M}_\lambda^\dagger(\beta) = \sum_{a,b} \sum_{c,d} \left\{ \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(t)}(\beta) \cdot \mathcal{M}_{(cd)\lambda}^{(t)\dagger}(\beta) + \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(s)}(\beta) \cdot \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{\dagger(s)}(\beta) - 2\Re e \left\{ \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(s)}(\beta) \cdot \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(t)\dagger}(\beta) \right\} \right\}, \quad (\text{F.29})$$

sobre a qual foi necessário tomarmos a parte real do termo de mistura. Tomando-se então médias e somas adequadas sobre as variáveis de spin, encontramos que

$$\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda(\beta) \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda^{(t)}(\beta) \right|^2 \right\rangle + \left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda^{(s)}(\beta) \right|^2 \right\rangle - \left\langle 2\Re e \left\{ \mathcal{M}_\lambda^{(s)}(\beta) \cdot \mathcal{M}_\lambda^{(t)\dagger}(\beta) \right\} \right\rangle, \quad (\text{F.30})$$

com

$$\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda^{(t)}(\beta) \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(t)}(\beta) \cdot \mathcal{M}_{(cd)\lambda}^{(t)\dagger}(\beta) = \mathcal{T}(\beta) \left\{ \sum_{a,b} \mathbb{T}_{(ab)}^{\mu\nu} \right\} \left\{ \sum_{c,d} \mathbb{T}'_{(cd)\mu\nu} \right\}, \quad (\text{F.31})$$

$$\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda^{(s)}(\beta) \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{M}_{(ab)\lambda}^{(s)}(\beta) \cdot \mathcal{M}_{(cd)\lambda}^{(s)\dagger}(\beta) = \mathcal{S}(\beta) \left\{ \sum_{a,b} \mathbb{S}_{(ab)}^{\mu\nu} \right\} \left\{ \sum_{c,d} \mathbb{S}'_{(cd)\mu\nu} \right\} \quad \text{e} \quad (\text{F.32})$$

$$\left\langle 2\Re e \left\{ \mathcal{M}_\lambda^{(s)}(\beta) \cdot \mathcal{M}_\lambda^{(t)\dagger}(\beta) \right\} \right\rangle = 2\Re e \left\{ \mathcal{U}(\beta) \right\} \sum_{a,b} \sum_{c,d} \mathbb{U}_{(abcd)}. \quad (\text{F.33})$$

Os fatores  $\mathcal{T}(\beta)$ ,  $\mathcal{S}(\beta)$ ,  $\Re e\{\mathcal{U}(\beta)\}$ , o escalar  $\mathbb{U}_{(abcd)}$  e os tensores  $\mathbb{T}_{(ab)}^{\mu\nu}$  e  $\mathbb{T}'_{(ab)\mu\nu}$  foram previamente calculados no capítulo 7. Finalmente, essas peça nos permitem calcular a seção de choque do espalhamento Bhabha à temperatura finita e no contexto de violação da simetria de Lorentz:

$$\frac{d\sigma_\lambda(\beta)}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s^2} \left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda(\beta) \right|^2 \right\rangle, \quad (\text{F.34})$$

com  $\left\langle \left| \mathcal{M}_\lambda(\beta) \right|^2 \right\rangle$  dada em (F.30).

## Webliografia

- [1] ROSHAN Houshmand.:  
«<https://www.bnl.gov/60th/houshmand.asp>».
- [2] CRONOLOGIA da descoberta de partículas.:  
«[https://pt.wikipedia.org/wiki/Cronologia\\_da\\_descoberta\\_de\\_part%C3%ADculas](https://pt.wikipedia.org/wiki/Cronologia_da_descoberta_de_part%C3%ADculas)».
- [3] NASA. Solar Physics. Marshal space flight center.:  
«<https://solarscience.msfc.nasa.gov/interior.shtml>».
- [4] BACKGROUND INFORMATION on Lorentz and CPT violation. Alan Kostelecky.:  
«<https://lorentz.sitehost.iu.edu/kostelecky/faq.html>».
- [5] DICIONÁRIO Michaelis.:  
«<https://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=quadrilinear>».
- [6] FEYNMAN DIAGRAM maker.:  
«<https://www.aidansean.com/feynman/>».
- [7] DRAW FEYNMAN diagram online.: «<https://feynman.aivazis.com/>».
- [8] DATA TABLE for Lorentz and CPT Violation V. Alan Kostelecky & N. Russell, (2020).:  
«<https://arxiv.org/abs/0801.0287v14>».

# Referências Bibliográficas

- [1] T. Kioshita, *Quantum Eletrodynamics*, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol. 7 (Word Scientific, 1990).
- [2] M.E. Peskin & D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview, 1995).
- [3] S. Weinberg, Rev. Mod. Phy. **61**, 1 (1989).
- [4] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos & G. Dvali, Phys. Lett. B, **429**, 263 (1998).
- [5] V. Barger, D. Marfatia & K. L. Whisnant, *The Physics of Neutrinos* (Princeton University Press, 2013).
- [6] Laura J. Watson, Daniel J. Mortlock & Andrew H. Jaffe, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. **418**, 206 (2011).
- [7] A. Aab, P. Abreu, M. Aglietta, et, all., Science **357**, 1266 (2017)
- [8] Werner Bernreuther & Mahiko Suzuki, Rev. Mod. Phys. **64**, 633 (1992).
- [9] Aldo Antognini et. al., Science **339** 417 (2013).
- [10] S. Weinberg, Scientific American, Inc. (1999)
- [11] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, Annals Phys. **321**, 150-196 (2006)
- [12] T. Jacobson and A. Mohd, Phys. Rev. D **92**, 124010 (2015)
- [13] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002)
- [14] J. F. Assuncao, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, Phys. Rev. D **96**, no.6, 065021 (2017)
- [15] Y. Ding and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. D **94**, no.5, 056008 (2016)
- [16] V. A. Kostelecký and Z. Li, Phys. Rev. D **99**, no.5, 056016 (2019)
- [17] V. A. Kostelecký & R. Potting, Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991).
- [18] V. A. Kostelecký & R. Potting, Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).
- [19] J. D. Bjorken, Ann. Phys. **24**, 174 (1961).
- [20] Y. Nambu, Progr. Theor. Phys. Suppl. Extra **190** (1968).
- [21] V. A. Kostelecký & S. Samuel, Phys. Rev. D **39**, 863 (1989); Phys. Rev. D **40**, 1886 (1989); Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989).
- [22] V. Alan Kostelecký & Matthew Mewes, Phys. Rev. D **80**, 1 (2009).

- [23] V. A. Kostelecky & M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).
- [24] V. A. Kostelecky & M. Mewes, Phys. Rev. D **85**, 096005 (2012).
- [25] V. A. Kostelecky & M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).
- [26] V. Alan Kostelecky & N. Russell, Rev. Mod. Phys. **83**, 11 (2021).
- [27] Don Colladay & V. A. Kostelecky, **55**, 6760 (1997),
- [28] Don Colladay & V. A. Kostelecky, **58**, 11 (1998).
- [29] V. A. Kostelecky & M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).
- [30] V. A. Kostelecky, PRD **69**, 105009 (2004).
- [31] V. A. Kostelecky & M. Mewes, Phys. Rev. D **85**, 096005 (2012).
- [32] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, R. V. Malufe & F. E. P. dos Santos, Phys. Rev. D. **86**, 125033 (2012).
- [33] Elisabeth M. Y., Rev. Bras. Fís. Méd. **3**, 57 (2009).
- [34] José R. S. et. al., Rev. Bra. Ens. Fís. **39**, 1 (2017).
- [35] Fábio K. N. & Luiz F. M., Rev. Bras. Fís. **40**, 3 (2018).
- [36] Arlene C. A., Rev. Bras. Fís. **40**, 4 (2018).
- [37] B. Charneski, M. Gomes, R. V. Maluf & A. J. da Silva, Phys. Rev. D **86**, 045003 (2012).
- [38] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto & F. M. O. Moucherek, Phys. Rev. D **74**, 065009 (2006).
- [39] H. Belich, L. P. Coletto, T. Costa-Soares, J. A. Elayel-Neto & M. T. D. Orlando, Eur. Phys. J. C. **42**, 127 (2009).
- [40] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr. & J. A. Elayel-Neto, Eur. Phys. J. C. **41**, 421 (2005).
- [41] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto & M. T. D. Orlando, Phys. Lett. B **41**, 3 (2006).
- [42] K. Bakke & H. Belich, Eur. Phys. J. Plus **127**, 102 (2012).
- [43] J. I. Kapusta & C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*, (Cambridge University Press, 1989).
- [44] Y. Takahashi & H. Umezawa. Prog. Theor. Phys. **74**, 429 (1985); Y. Takahashi & H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. B **10**, 1755 (1996).
- [45] Y. Takahashi, H. Umezawa & H. Matsumoto, *Thermofield Dynamics and Condensed States*. (Nort-Holland, Amsterdan, 1982).
- [46] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, & A. E. Santana. *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications*, (World Scientific, Singapore, 2009).
- [47] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Physics*, (AIP, New York, 1993).

- [48] A. E. Santana, A. Matos Neto, J.D.M. Vianna & F.C. Khanna, Int. J. Theor. Phys. **38**, 641 (1999).
- [49] I. Ojima, Ann. Phys. **137**, 1 (1981).
- [50] C. F. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson, & A. E. Santana. *Thermal Quantum Field Theory: Algebrics Aspects and Applications* (World Scientific, Singapore, 2009).
- [51] A. E. Santana, F. C. Khanna, H. Chu & C. Chang, Ann. Phys. **249**, 481 (1996).
- [52] A. E. Santana & F. C. Khanna, Phys. Lett. A **203**, 68 (1995).
- [53] K. Hagiwara, A.D. Martin, D. Nomura & T. Teubner, Phys.Lett. B **649**, 173 (2007).
- [54] Mauro Anselmino et al. *Introdução à QCd perturbativa*, Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- [55] A. F. Santos & F. C. Khanna, In. Mod. Phys. A. **31**, 1650122 (2016).
- [56] A. F. Santos & F. C. Khanna, Int. Jr. Mod. Phys. A, **32** 1750132 (2017).
- [57] A. F. Santos & F. C. Khanna, Phys. Rev. D **95**, 025021 (2017).
- [58] R. G. G. Amorim; J. S. C. Filho; A. F. Santos & S. C. Ulhoa, Adv. High Ene. Phys. **2018**, (2018).
- [59] A. F. Santos; S. C. Ulhoa & F. C. Khanna. Int. Jr. Theor. Phys., **56**, 1995 (2017).
- [60] A. F. Santos & F. C. Khanna, Adv. High Ene. Phys., **2018**, (2018).
- [61] J.E. Augustin et al., Phys. Rev. Lett. **34**, 233 (1975)
- [62] H. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. A. **154**, 195 (1936).
- [63] A. F. Santos & F. C. Khanna, Mod. Phys. Lett. A, **33**, 1850061 (2018).
- [64] J.J. Thomson, Philosophical Magazine. **44**, 293 (1897).
- [65] E. Rutherford. Philosophical Magazine. **47**, 209 (1899).
- [66] E. Rutherford, Philosophical Magazine. **21**, 669 (1911).
- [67] Arthur H. Compton. Phys. Rev. **21**, 483 (1923).
- [68] A. Einstein, *On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light*. Translated by Dirk ter Haar (Pergamon Press, 1967)
- [69] Clinton J. Davisson & Lester H. Germer, Nature **119**, 558 (1927).
- [70] G. P. Thomson, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. **117**, 778 (1928).
- [71] Claus Jönsson, Zeitschrift für Physik. **161**, 454 (1961).
- [72] Claus Jönsson, A. J. Phys. **42**, 4 (1974).
- [73] W.C. Röntgen, Sitzber. Physik. Med. Ges. **137** (1895). Translated in A. Stanton. *On a New Kind of Rays*. Nature **53** (1896).
- [74] E. Rutherford, Philosophical Magazine. **37**, 581 (1919).

- [75] J. Chadwick, Nature **129**, 312 (1932).
- [76] The ATLAS Collaboration. Phys. Lett. B. **716**, 1 (2012).
- [77] A. F. Santos & F. C. Khanna, Phys. Rev. D **95**, 125012 (2017).
- [78] Alesandro F. S., *Lorentz Violation, Bhabha Scattering and Finite Temperature*. VII Escola de Física - Roberto A. Salmeron (2019).
- [79] N. P. Landsman & Ch. G. van Veert, Phys. Rep. **145**, 141 (1987).
- [80] J. Christensen-Dalsgaard, Sp. Sci. Rev. **85**, 19 (1998).
- [81] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
- [82] A. P. de Almeida & J. Frenkel, Phys. Rev. D **47**, 640 (1993).
- [83] A. P. de Almeida, F. T. C. Brandt & J. Frenkel, Phys. Rev. D **49**, 4196 (1994).
- [84] G. Dattolli, Centro Ricerche Frascati. 1009.1711 (2010).
- [85] J. S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 452 (1951).
- [86] J. S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 455 (1951).
- [87] L. V. Keldysh, Jr. Exptl. Theor. Phys. **47**, 1515 (1964).
- [88] Walter Greiner & Joachim Reinhart, *Field Quantization*, (Springer, 2016).
- [89] S. Mandelstam, Phys. Rev. **112**, 1344 (1958).
- [90] H. Belich & E. V. B. Leite, *O Modelo Padrão e Duas Possíveis Rotas de Extensão*, VII Escola de Física - Roberto A. Salmeron (2019).
- [91] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos & M. T. D. Orlando, Rev. Bras. Ens. Fís. **29**, 57 (2007).
- [92] P. W. Anderson, Rev. Mod. Phys. **38**, 298 (1966).
- [93] Y. Nambu, Phys. Rev. **117**, 648 (1960).
- [94] Y. Nambu & Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [95] Wu et. all., Phys. Rev. **105**, 1413 (1957).
- [96] T. D. Lee & C. N. Yang., Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
- [97] Ducas et. All., Phys. Rev. **19**, 253 (1965).
- [98] J. Goldstone, A. Salan & S. Weinberg, Sov. Jr. Nuc. Phys. **24**, 965 (1997).
- [99] P. W. Higgs, Phys. Rev. **13**, 508 (1966).
- [100] F. Englert and Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
- [101] J. J. M. Pimenta & colaboradores, Rev. Bras. Ens. Fís., **35**, 1 (2013).
- [102] M. Derrick et al., Phys. Rev. D **31**, 2352 (1985); D. Bender et al., Phys. Rev. D **30**, 515 (1984); M. E. Levi et al. Phys. Rev. Lett. **51**, 1941 (1983).
- [103] P.R.A. Souza , A.F. Santos, S.C. Ulhoa & F.C. Khanna, Phys. Lett. B **791** 195 (2019).