Sistemas Inteligentes II

Tema 2. Redes bayesianas

Definición formal de red bayesiana

Una red bayesiana es:

- Un conjunto de variables **proposicionales** V
- Un **conjunto de relaciones binarias** definida sobre las variables de V, E
- Una **distribución de probabilidad conjunta** **P** sobre las variables de V

tales que:

- (V, E) forman un grafo **acíclico**, **conexo** y **dirigido** G
- (G, P) cumplen las hipótesis de **independencia condicional**, también llamadas de separación direccional

Definición formal de **variable proposicional**

Una **variable proposicional** es una variable aleatoria que toma un conjunto *exhaustivo* y *excluyente* de valores.

Ejemplos

ColorFavorito={Rojo,Blanco,Verde}

No es un conjunto exhaustivo

EstadoImpresora={Encendida, Enchufada}

No es un conjunto excluyente

EstadoImpresora={Encendida, Apagada}

Conjunto exhaustivo y excluyente

Definición formal de variable proposicional

Una variable proposicional es una variable aleatoria que toma un conjunto *exhaustivo y excluyente* de valores.

¿Cuáles de las siguientes variables son variables proposicionales?

- ✗ OPCIÓN A: Mascota = {Perro, Gato}
- ✗ OPCIÓN B: Enfermedad = {Gripe, Hepatitis, Apendicitis}
- ✗ OPCIÓN C: LenguajeProgramación = {Python, Java, C++}
- ✓ OPCIÓN D: Ventilador = {Encendido, Apagado}
- ✗ OPCIÓN E: NotaSistemaInteligente2 = {Suspenso, Aprobado, Notable, Sobresaliente}

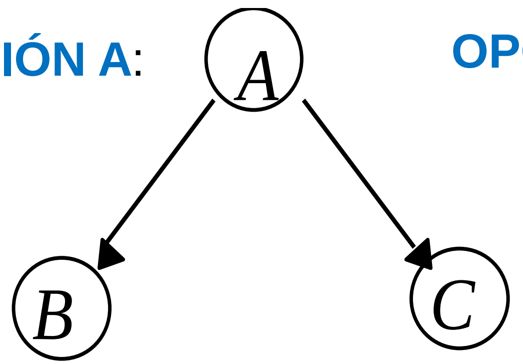
¿Se te ocurren situaciones en las que las opciones A, B , C y E puedan corresponder a variable proposicionales?

Definición formal de red bayesiana

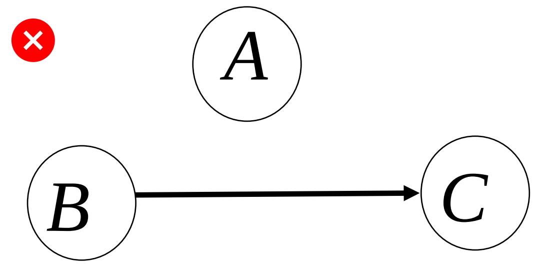
(V, E) forman un grafo **acíclico**, **conexo** y **dirigido** G.

¿Cuáles de los siguientes grafos pueden representar una red bayesiana?

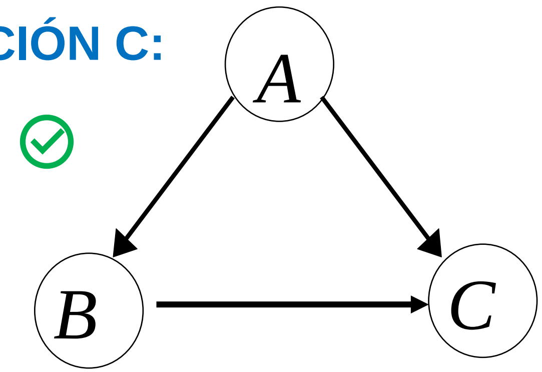
OPCIÓN A:



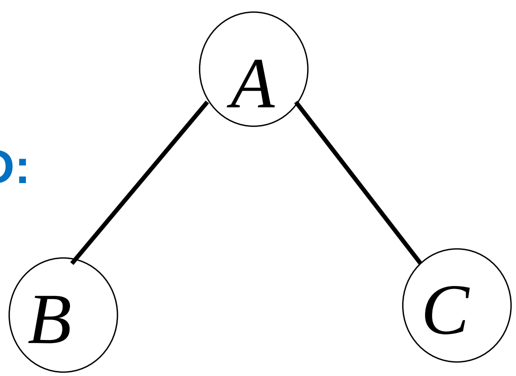
OPCIÓN B:



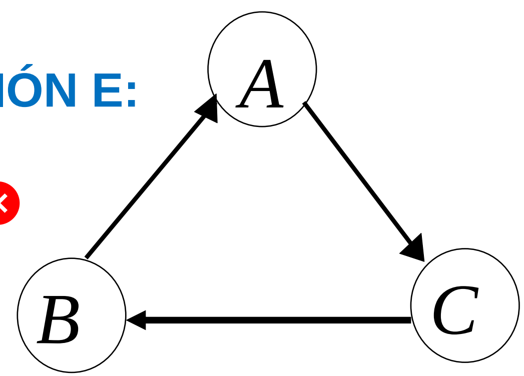
OPCIÓN C:



OPCIÓN D:



OPCIÓN E:



Definición formal de red bayesiana

Hipótesis de independencia condicional

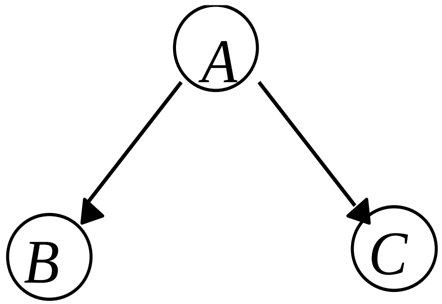
Un grafo acíclico conexo y dirigido $G = (V, E)$ y una distribución de probabilidad conjunta P definida sobre las variables del grafo se dice que cumplen las hipótesis de independencia condicional o separación direccional, si

$$\forall X \in V \text{ y } \forall Y \in V - \{X \cup de(X) \cup pa(X)\}$$

se tiene que

$$X \text{ es independiente de } Y \text{ dado } pa(X)$$

Definición formal de red bayesiana



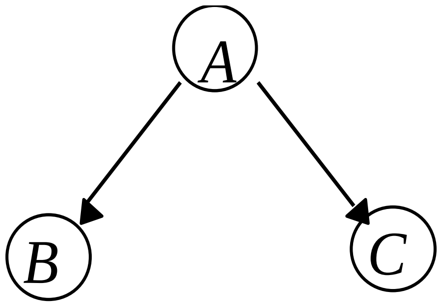
Hipótesis de independencia condicional:

$\forall X \in V$ y $\forall Y \in V - \{X \cup de(X) \cup pa(X)\}$ X es independiente de Y *dado* $pa(X)$

¿Qué relaciones de independencia se deben verificar para que sea una red bayesiana?

- ✗ **OPCIÓN A**: A independiente de B y de C
- ✗ **OPCIÓN B**: A independiente de B dado C
- ✗ **OPCIÓN C**: B independiente de A dado C
- ✓ **OPCIÓN D**: C independiente de B dado A
- ✓ **OPCIÓN E**: B independiente de C dado A

Definición formal de red bayesiana



$P(a_1,b_1,c_1) = 0.05$ $P(a_1,b_1,c_2) = 0.10$
$P(a_1,b_2,c_1) = 0.15$ $P(a_1,b_2,c_2) = 0.05$
$P(a_2,b_1,c_1) = 0.20$ $P(a_2,b_1,c_2) = 0.35$
$P(a_2,b_2,c_1) = 0.05$ $P(a_2,b_2,c_2) = 0.05$

Hipótesis de independencia condicional:

$\forall X \in V$ *y* $\forall Y \in V - \{X \cup de(X) \cup pa(X)\}$ *X* es independiente de *Y dado pa(X)*

¿B es independiente de C dado A?

¿P(B/A,C) =P(B/A)?

¿$P(b_1/c_1, a_1) = P(b_1/a_1)$?

$P(a_1) = 0.35$

$P(a_1,b_1) = 0.15$ $P(a_1,c_1) = 0.20$ $P(a_1,b_1,c_1) = 0.05$

$P(b_1/c_1, a_1) = 0.05/0.20 = 1/4$

NO

$P(b_1/a_1) = 0.15/0.35 = 3/7$

Definición formal de red bayesiana

¿Qué independencias implica la red?

1. Situación laboral independiente de Inversiones y Salud
2. Situación económica independiente de Salud dadas Situación laboral e Inversiones
3. Donaciones independiente de Felicidad, Salud, Situación laboral e Inversiones dada Situación económica
4. Felicidad independiente de Donaciones dada Salud

Teorema fundamental (o de factorización de la probabilidad):

Dada una red bayesiana, su distribución de probabilidad puede expresarse como:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{x_i} P(x_i \,/\, pa(x_i))$$

Demostración:

Sea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una ordenación de las variables en la que los padres de cada nodo aparezcan siempre después de él. Entonces:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{x_i} P(x_i / x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Pero por la forma de escoger la ordenación, el conjunto $\{x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ incluye a todos los padres de X, y, en consecuencia, la separación direccional nos dice que

$$\prod_{x_i} P(x_i / x_{i+1}, \ldots, x_n) = \prod_{x_i} P(x_i \,/\, pa(x_i))$$

Teorema fundamental:

Factorización de la probabilidad

Nos permite describir una red bayesiana a partir de las probabilidades condicionadas de cada nodo dados sus padres en lugar de a partir de la probabilidad conjunta, que:

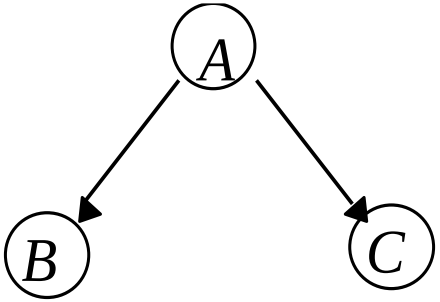
- requiere un ***número de parámetros exponencial*** en el número de nodos.
- plantea el problema de ***verificar la independencia condicional***

Ejemplo 1

Hipótesis de independencia condicional:

$\forall X \in V$ y $\forall Y \in V - \{X \cup de(X) \cup pa(X)\}$

X es independiente de *Y dado pa(X)*



Teorema Fundamental:

$$\boldsymbol{P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{x_i} P(x_i \,/\, pa(x_i))}$$

Parámetros que necesitamos especificar :

$P(a_1)$, $P(b_1/a_1)$, $P(b_1/a_2)$, $P(c_1/a_1)$, $P(c_1/a_2)$

$P(a_1) = 0.6$

$P(b_1/a_1) = 0.3$ $P(b_1/a_2) = 0.4$

$P(c_1/a_1) = 0.7$ $P(c_1/a_2) = 0.2$

Y a partir de ellos podemos determinar la distribución conjunta aplicando el teorema fundamental:

$P(a_1,b_1,c_1) = 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.7$ $P(a_1,b_1,c_2) = 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.3$

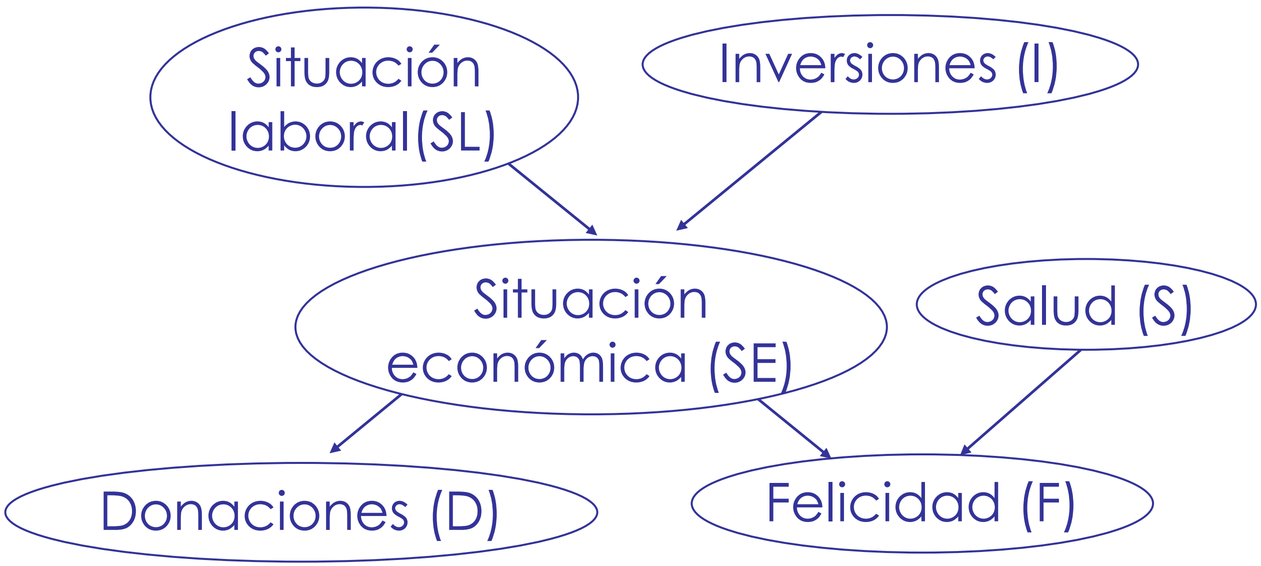
$P(a_1,b_2,c_1) = 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.7$ $P(a_1,b_2,c_2) = 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.3$

$P(a_2,b_1,c_1) = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.2$ $P(a_2,b_1,c_2) = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.8$

$P(a_2,b_2,c_1) = 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.2$ $P(a_2,b_2,c_2) = 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.8$

Ejemplo 2

¿Cómo aplicamos el teorema fundamental a la red?



$$P(D, F, SE, S, SL, I) = P(D/SE) \cdot P(F/SE, S) \cdot P(SE/SL, I) \cdot P(S) \cdot P(SL) \cdot P(I)$$

Ejemplo 2

¿Cómo aplicamos el teorema fundamental a la red?

Suponemos todas las variables binarias

¿Cómo calcularíamos la probabilidad de que la situación laboral sea favorable si sabemos que la persona es feliz?

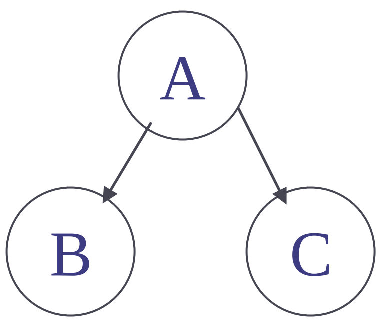
$$P(+sl/+f) = \frac{P(+sl,+f)}{P(+f)} = \frac{\sum_{I,SE,S,D} P(+sl,I,SE,S,D,+f)}{\sum_{SL,I,SE,S,D} P(SL,I,SE,S,D,+f)}$$

$$= \frac{\sum_{I,SE,S,D} P(+sl)P(I)P(SE/+sl,I)P(S)P(D/SE)P(+f/SE,S)}{\sum_{SL,I,SE,S,D} P(SL)P(I)P(SE/SL,I)P(S)P(D/SE)P(+f/SE,S)}$$

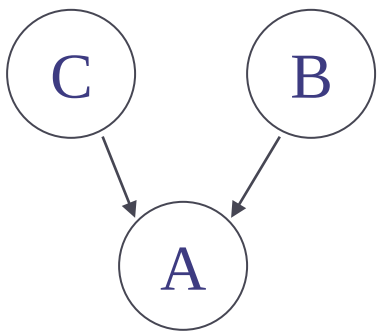
recuerda que $\boldsymbol{P(D,F,SE,S,SL,I) = P(SL)\cdot P(I)\cdot P(SE/SL,I)\cdot P(S)\cdot P(D/SE)\cdot P(F/SE,S)}$

Ejercicio 1

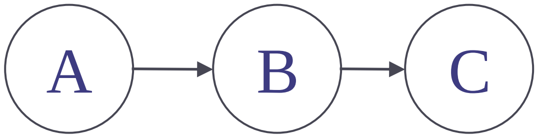
Comprobar qué relaciones de independencia condicional deben darse para todas las posibles estructuras de redes con tres nodos y proponer una distribución conjunta válida con esas relaciones suponiendo todas las variables binarias.



Cola con cola

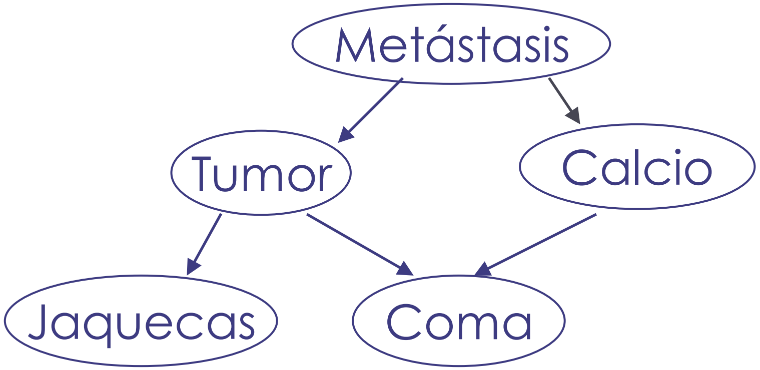


Cabeza con cabeza



Cabeza con cola

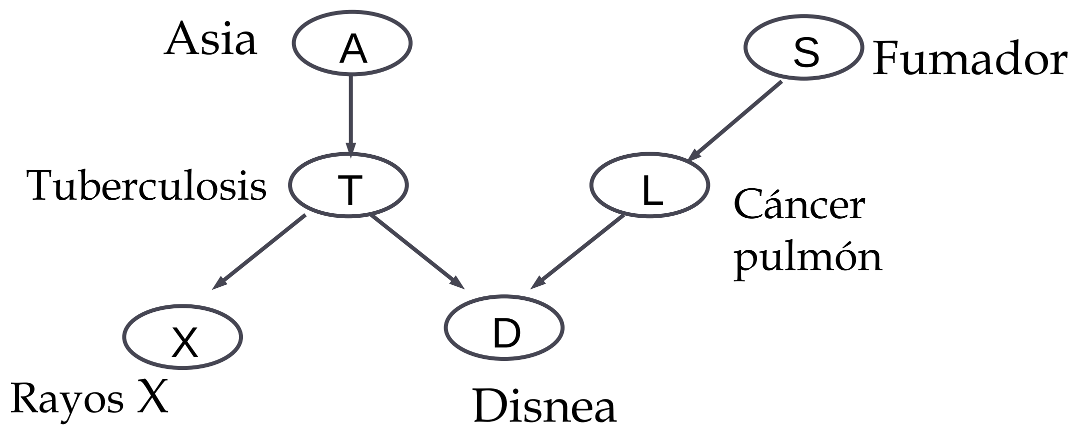
Ejercicio 2



Se pide:

- ¿Qué independencias/dependencias entre las variables de la red implican las hipótesis de independencia condicional?
- Si suponemos ciertas las hipótesis de independencia condicional, ¿cuántas probabilidades sería necesario especificar? Dar estos valores de una forma coherente con el sentido común.
- Si no podemos suponer las hipótesis de independencia condicional, ¿qué probabilidades deberíamos pedir al experto? ¿Cuántos valores son en total?
- ¿Cómo podemos calcular la probabilidad conjunta a partir de las condicionadas? Aplicando el teorema de factorización indica cómo se calcularía la probabilidad de que el paciente tenga metástasis dado que está en coma

Ejercicio 3



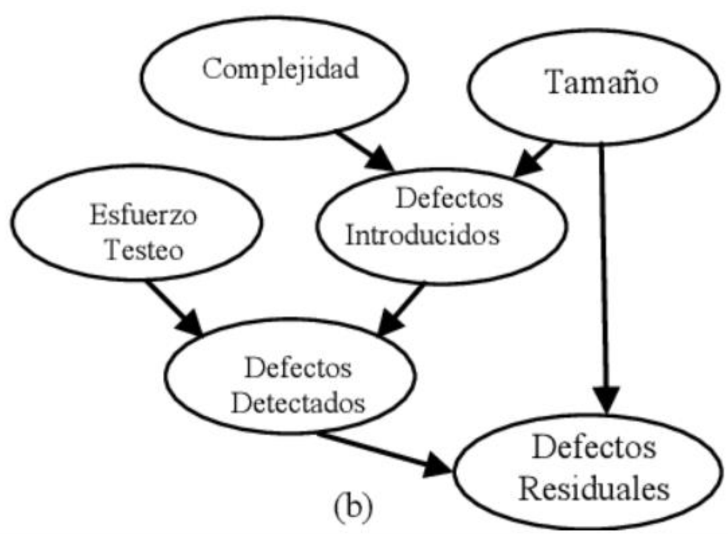
Se pide:

- ¿Qué independencias/dependencias entre las variables de la red implican las hipótesis de independencia condicional?
- Si suponemos ciertas las hipótesis de independencia condicional, ¿cuántas probabilidades sería necesario especificar? Dar estos valores de una forma coherente con el sentido común.
- Si no podemos suponer las hipótesis de independencia condicional, ¿qué probabilidades deberíamos pedir al experto? ¿Cuántos valores son, en total?
- ¿Cómo podemos calcular la probabilidad conjunta a partir de las condicionadas? Aplicando el teorema de factorización, indica cómo se calcularía la probabilidad de que el paciente fume dado que tiene disnea

Ejercicio 4

Se pide:

- ¿Qué independencias/dependencias entre las variables de la red se tienen si sabemos que la red es bayesiana?
- En ese caso, ¿cuántas probabilidades sería necesario especificar?
- Si no sabemos que la red es bayesiana, ¿qué probabilidades deberíamos pedir al experto? ¿Cuántos valores en total?

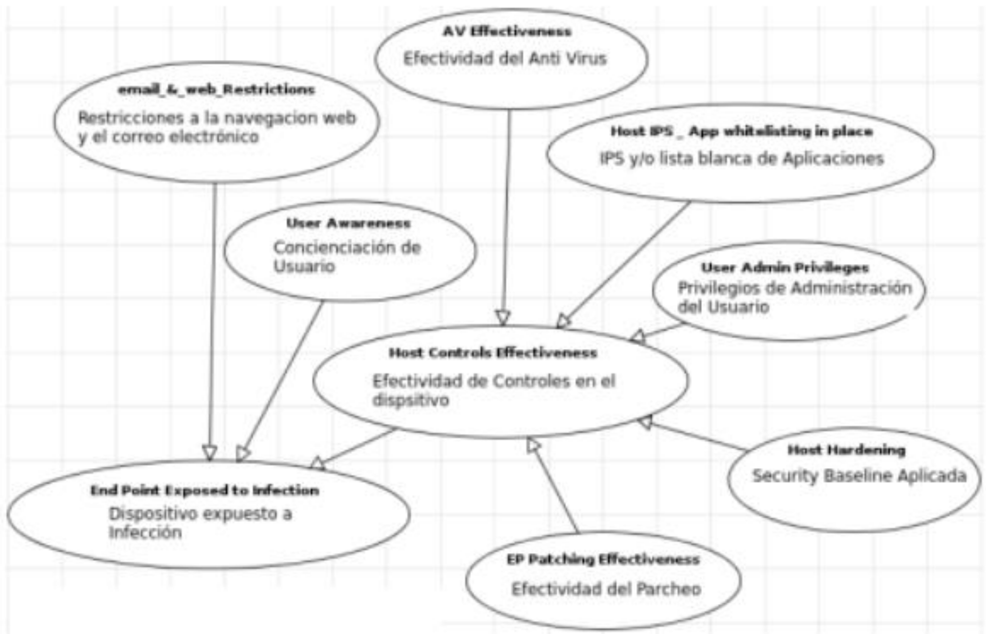


(b)

DOI: 10.4272/978-84-9745-204-5.CH10 • Corpus ID: 63607562
Redes bayesianas en la ingenieria del software
P. J. Gonzalez, I. Román, José Javier Dolado Cosín • Published 2004 • Computer Science

Ejercicio 5

Dada la siguiente red:



Infección por virus informáticos: Una aplicación de las redes Bayesianas (parte 1)

septiembre 17, 2015 · por Miguel A. Sánchez

¿Qué independencias/dependencias entre las variables de la red se tienen si la red es bayesiana?

Si suponemos que es una red bayesiana y que todas las variables son binarias, ¿cuántas probabilidades sería necesario especificar?

¿Cómo aplicaría el teorema fundamental en esta red?