

Тятя! Тятя! Наши сети заменили продавца!

Листочек с задачками №1: всего лишь функция

Решения стараюсь собрать тут:

https://github.com/FUlyankin/neural_nets_prob

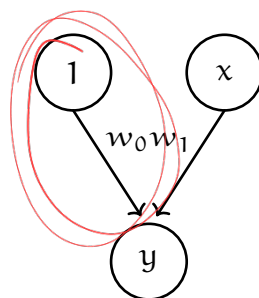
ВШЭ
сезон осень-зима

Ты всего лишь машина, только имитация жизни. Робот сочинит симфонию? Робот превратит кусок холста в шедевр искусства?

Из фильма «Я, робот» (2004)

Упражнение 1 (от регрессии к нейросетке)

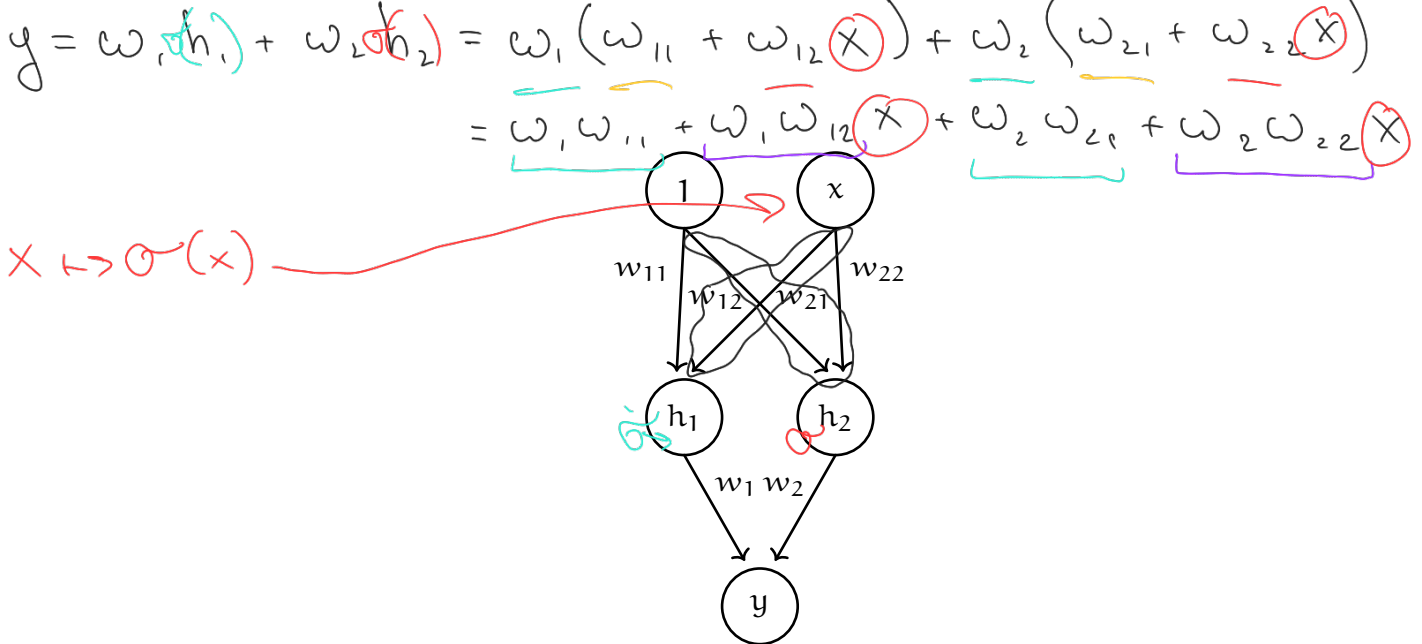
Однажды вечером, по пути с работы¹ Маша зашла в свою любимую кофейню на Тверской. Там, на стене, она обнаружила очень интересную картину:



Хозяин кофейни, Добродум, объяснил Маше, что это Покрас-Лампас так нарисовал линейную регрессию,² и её легко можно переписать в виде формулы: $y_i = w_0 + w_1 \cdot x_i$. Пока Добродум готовил кофе, Маша накидала у себя на бумажке новую картинку:

¹она работает рисёрчером.

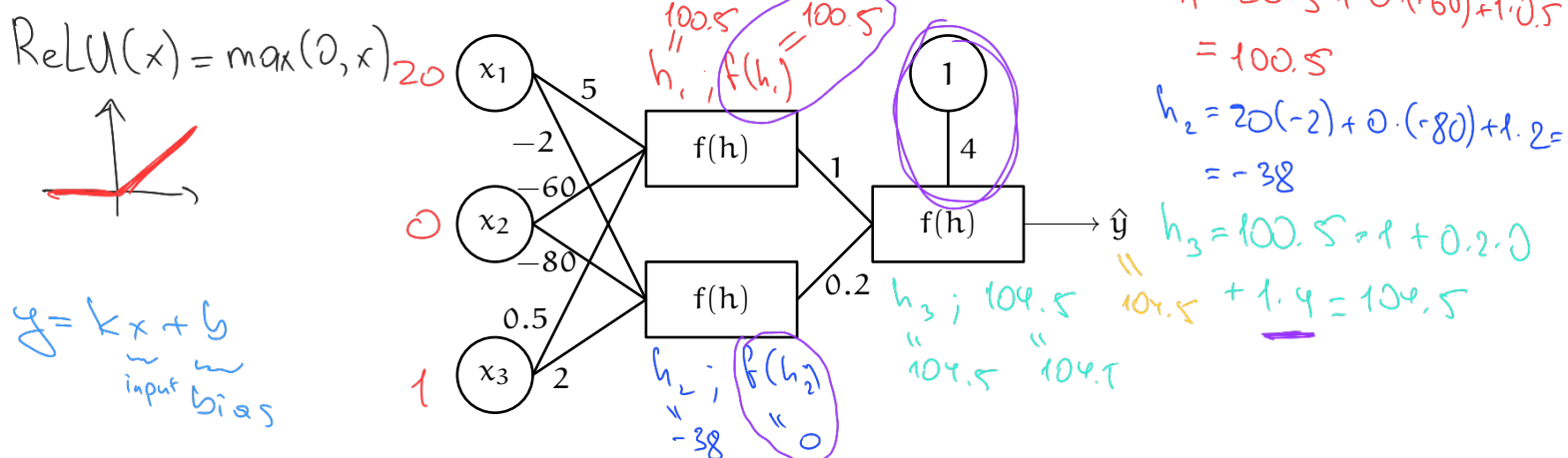
²эксклюзивный заказ был



- Как такая функция будет выглядеть в виде формулы?
- Правда ли, что y будет нелинейно зависеть от x ?
- Если нет, как это исправить и сделать зависимость нелинейной?

Упражнение 2 (из картинки в формулу)

Добродум хочет понять насколько сильно будет заполнена кофейня в следующие выходные. Для этого он обучил нейросетку. На вход она принимает три фактора: температуру за окном, x_1 , факт наличия на Тверской митинга, x_2 и пол баристы на смене, x_3 . В качестве функции активации Добродум использует ReLU.



- В эти выходные за барной³ стойкой стоит Агнесса. Митинга не предвидится, температура будет в районе 20 градусов. Сколько человек придёт в кофейню к Добродуму?
- На самом деле каждая нейросеть — это просто-напросто какая-то нелинейная сложная функция. Запишите нейросеть Добродума в виде функции.

$$\hat{y} = \max(0, 4 + 1 \cdot \max(0, 5 \cdot x_1 - 60 \cdot x_2 + 0.5 \cdot x_3)) + 0.2 \max(0, -2x_1 - 80x_2 + 2x_3)$$

³барной... конечно, кофейня у него...

Упражнение 3 (из формулы в картинку)

Маша написала на бумажке функцию:

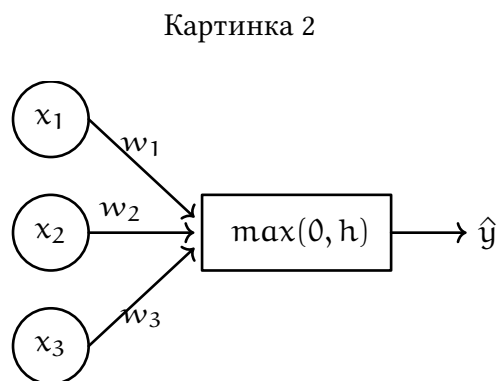
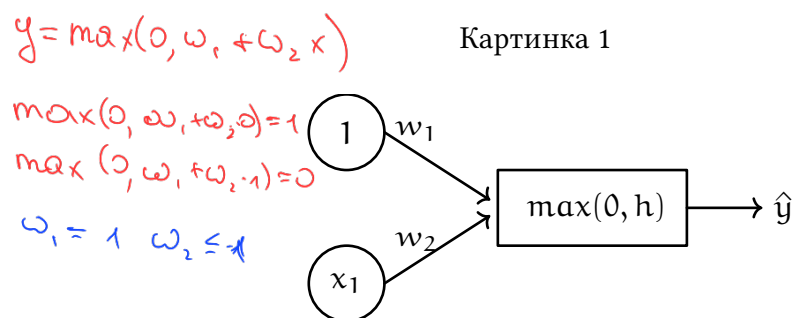
$$y = \max(0, 4 \cdot \max(0, 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1) + 2 \cdot \max(0, 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 7) + 6)$$

Теперь она хочет, чтобы кто-нибудь из её адептов нарисовал её в виде нейросетки. Нарисуй.

Упражнение 4 (армия регрессий)

Парни очень любят Машу,⁴ а Маша с недавних пор любит собирать персептроны и думать по вечерам об их весах и функциях активации. Сегодня она решила разобрать свои залежи из персептронов и как следует упорядочить их.

- а. В ящике стола Маша нашла персептрон с картинки 1 Маша хочет подобрать веса так, чтобы он реализовывал логическое отрицание, то есть превращал $x_1 = 0$ в $y = 1$, а $x_1 = 1$ в $y = 0$ (так работает логическая функция: отрицание).



- б. В тумбочке, среди носков, Маша нашла персептрон, с картинки 2, Маша хочет подобрать такие веса w_i , чтобы персептрон превращал x из таблички в соответствующие y :

x_1	x_2	x_3	y
1	1	2	0.5
1	-1	1	0

- в. Оказывается, что в ванной всё это время валялась куча персептронов с картинки 3 с неизвестной функцией активации (надо самому выбирать).

⁴когда у тебя есть лёрнинг, они так и лезут

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

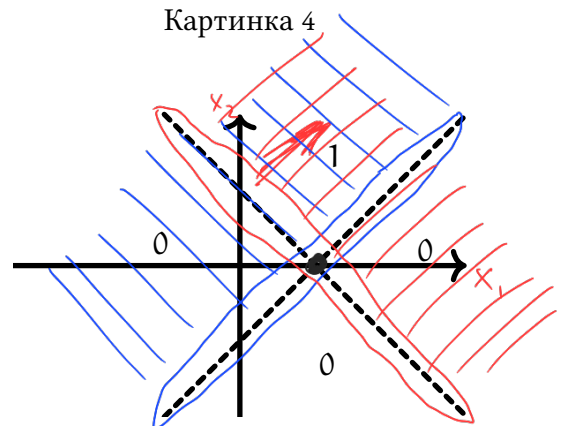
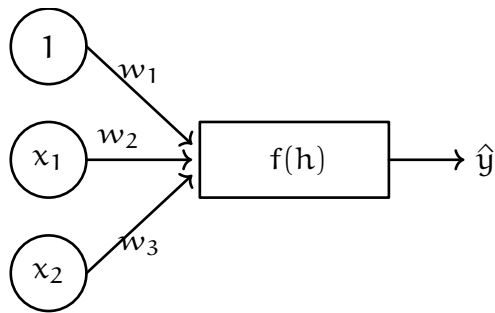
или $\begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$





$$-x_1 + x_2 + 1 = 0$$

Картинка 3



Картинка 4

Маша провела на плоскости две прямые: $x_1 + x_2 = 1$ и $x_1 - x_2 = 1$. Она хочет собрать из персептронов нейросеть, которая будет классифицировать объекты с плоскости так, как показано на картинке 4.

Упражнение 5 (логические функции)

Маша вчера поссорилась с Пашей. Он сказал, что у неё нет логики. Чтобы доказать Паше обратное, Маша нашла теорему, которая говорит о том, что с помощью нейросетки можно аппроксимировать почти любую функцию, и теперь собирается заняться аппроксимацией логических функций. Для начала она взяла самые простые, заданные следующими таблицами истинности:

x_1	x_2	$x_1 \cap x_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x_1	x_2	$x_1 \cup x_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x_1	x_2	$x_1 \text{ XoR } x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Первые два столбика идут на вход, третий получается на выходе. Первая операция — логическое "и" вторая — "или". Операция из третьей таблицы называется "исключающим или" (XoR). Если внимательно приглядеться, то можно заметить, что XoR — это то же самое что и $[x_1 \neq x_2]$ ⁵.

Упражнение 6 (ещё немного про XoR)

Маша заметила, что на XoR ушло очень много персептронов. Она поняла, что первые два персептрона пытаются сварить для третьего нелинейные признаки, которых нейросетке не хватает. Она решила самостоятельно добавить персептрону вход $x_3 = x_1 \cdot x_2$ и реализовать XoR одним персептроном. Можно ли это сделать?

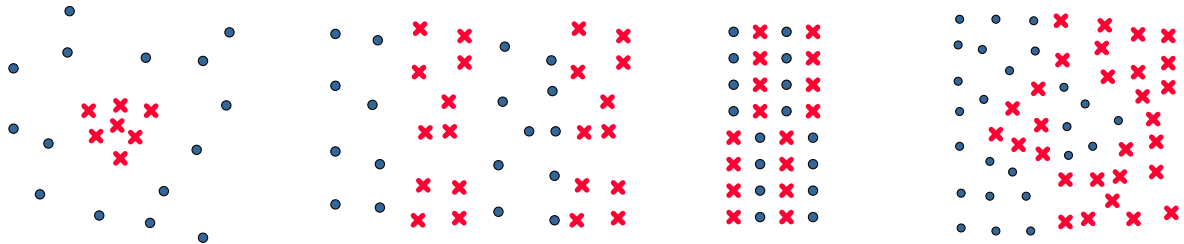
⁵Тут квадратные скобки обозначают индикатор. Он выдаёт 1, если внутри него стоит правда и 0, если ложь.

Упражнение 7 (универсальный классификатор)

Маша задумалась о том, можно ли с помощью нейронной сетки с одним скрытым слоем и ступенчатой функцией активации решить абсолютно любую задачу классификации на два класса со сколь угодно большой точностью. Ей кажется, что да. Как это можно сделать?

Упражнение 8 (минималочка)

Шестилетняя сестрёнка ворвалась в квартиру Маши и разрисовала ей все обои:



Маша по жизни оптимистка. Поэтому она увидела не дополнительные траты на ремонт, а четыре задачи классификации. И теперь в её голове вопрос: сколько минимально нейронов нужно, чтобы эти задачи решить?

Упражнение 9 (универсальный регрессор)

Маша доказала Паше, что у неё всё в полном порядке с логикой. Теперь она собирается доказать ему, что с помощью однослойной нейронной сетки можно приблизить любую непрерывную функцию от одного аргумента $f(x)$ со сколь угодно большой точностью⁶.

Hint: Вспомните, что любую непрерывную функцию можно приблизить с помощью кусочно-линейной функции (ступеньки). Осознайте как с помощью пары нейронов можно описать такую ступеньку. Соедините все ступеньки в сумму с помощью выходного нейрона.

Упражнение 10 (число параметров)

Та, кому принадлежит машин лёрнинг собирается обучить нейронную сеть для решения задачи регрессии. На вход в ней идёт 12 переменных, в сетке есть 3 скрытых слоя. В первом слое 300 нейронов, во втором 200, в третьем 100.

- Сколько параметров предстоит оценить Маше? Сколько наблюдений вы бы на её месте использовали?
- Что Маша должна сделать с внешним слоем, если она собирается решать задачу классификации на два класса и получать на выходе вероятность принадлежности к первому классу?
- Что делать Маше, если она хочет решать задачу классификации на K классов?

⁶<http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap4.html>