



Introducción a la Astrofísica

Eduardo Flández *DF²C*

Índice

1. Introducción	3
1.1. Escalas de tiempo	4
1.2. Tiempo de cruce en sistemas estelares esféricos	7
1.3. Inversión analítica de un perfil superficial	10
1.4. Sistemas sin colisiones y el tiempo de relajación	11
1.4.1. El tiempo de relajación	13
2. Teoría del potencial	17
2.1. Resultados generales	17
2.2. Sistemas esféricos	22
2.2.1. Teoremas de Newton	22
2.2.2. Potenciales de algunos sistemas simples	25
2.3. Problemas Binney	28
2.4. Problemas Auxiliar 1	28
2.5. Problemas Tarea 1	28
3. Órbitas estelares	30
3.1. Órbitas casi circulares: epiciclos y elipsoide de velocidad	30
3.2. Ecuaciones de Hill	36
3.3. Mareas	38
3.4. Los límites de Roche	38
3.5. La zona de Roche	39
3.6. Anillos y Satélites	41
3.7. La esfera de la Hill y el límite de Roche	42
3.8. Problemas Auxiliar 2	43
3.9. Problemas Tarea 2	44
4. Equilibrios de sistemas sin colisión	45
4.1. De discreta a suave	46
4.2. La ecuación de Boltzmann sin colisiones	51
4.3. Funciones de distribución esférica	52
4.3.1. DF ergódicos y la fórmula de inversión de Eddington	52
4.3.2. La esfera isotérmica	53
4.3.3. Funciones de distribución para cúmulos globulares	55
4.3.4. Funciones de distribución anisotrópicas	58
4.4. Problemas	61
5. Estabilidad de sistemas sin colisión	62

6. Dinámica de disco y estructura espiral	63
6.1. Fundamentos de la estructura espiral	63
6.1.1. La geometría de los brazos espirales	63
6.1.2. La fuerza y el número de brazos	63
6.1.3. Brazos delanteros y traseros	63
6.1.4. El pitch angle y el winding problem	64
6.1.5. El teorema anti-espiral	65
6.2. Mecánica ondulatoria de discos que rotan diferencialmente	66
6.2.1. Resonancias	66
6.2.2. Estabilidad local de discos que giran diferencialmente	66
6.2.3. Velocidad de grupo	67
6.3. Barras p. 540/528	68
7. Teoría cinética	69
8. Colisiones y Encuentros de Sistemas Estelares	69
8.1. Fricción Dinámica	69
8.2. Encuentros de alta velocidad	70
8.2.1. Vuelta al equilibrio	70
8.3. Mergers	70
9. Problemas resueltos	70
9.1. P3 Auxiliar 2	70
9.2. T2 P4	73
9.3. T2 P1	78
9.4. T2P2	80
9.5. B&T 4-9	83
9.6. B&T 8-11	85
9.7. Distribución Maxwelliana	87
9.8. B&T 4-25	88
9.9. Variante de la ayudantía	91

1. Introducción

Un sistema estelar es un conjunto gravitacionalmente unido de estrellas u otras masas puntuales. Los sistemas estelares varían en más de catorce órdenes de magnitud en tamaño y masa, desde estrellas binarias hasta cúmulos estelares que contienen 10^2 a 10^6 estrellas, pasando por galaxias que contienen 10^5 a 10^{12} estrellas, hasta vastos cúmulos que contienen miles de galaxias.

El comportamiento de estos sistemas está determinado por las leyes del movimiento de Newton y la ley de la gravedad de Newton, y el estudio de este comportamiento es la rama de la física teórica llamada dinámica estelar. (Hasta el momento, no hay evidencia directa de sistemas estelares en los que los efectos relativistas sean importantes, aunque es probable que dichos sistemas estén presentes en los centros de las galaxias).

La dinámica estelar está directamente relacionada con al menos otras tres áreas de la física teórica. Superficialmente, es lo más cercano a la mecánica celeste, la teoría de los movimientos planetarios -ambas implican el estudio de las órbitas en un campo gravitatorio-, sin embargo, gran parte del formalismo de la mecánica celeste es de poca utilidad en la dinámica estelar, ya que se basa en expansiones perturbadoras, que no convergen cuando se aplican a la mayoría de los sistemas estelares. Las conexiones más fundamentales de la dinámica estelar son con la mecánica estadística clásica, ya que el número de estrellas en un cúmulo estelar o galaxia suele ser tan grande que es necesario un tratamiento estadístico de la dinámica. Finalmente, muchas de las herramientas matemáticas que se han desarrollado para estudiar los sistemas estelares se toman prestadas de la física del plasma, que también implica el estudio de un gran número de partículas que interactúan a través de fuerzas de largo alcance.

Para una orientación inicial, es útil resumir algunos órdenes de magnitud para un sistema estelar típico, aquel al que pertenecemos. Nuestro Sol se encuentra en un sistema estelar llamado Vía Láctea o simplemente Galaxia. La Galaxia contiene cuatro constituyentes principales:

1. Hay alrededor de 10^{11} estrellas, que tienen una masa total $\simeq 5 \times 10^{10}$ masas solares ($5 \times 10^{10} M_{\odot}$; $1 M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30}$ kg). La mayoría de las estrellas en la Galaxia viajan en órbitas casi circulares en un disco delgado cuyo radio es aproximadamente 10^4 parsecs (1 parsec $\equiv 1\text{pc} \equiv 3,086 \times 10^{16}$ m), o 10 kiloparsecs (kpc). El grosor del disco es de aproximadamente 0,5kpc y el Sol está ubicado cerca de su plano medio, a unos 8kpc del centro.
2. El disco también contiene gas, principalmente hidrógeno atómico y molecular, concentrado en nubes con una amplia gama de masas y tamaños, así como pequeñas partículas sólidas ("polvo"), que vuelven opaco el gas

interestelar en longitudes de onda visibles a distancias de varios kpc. La mayor parte del hidrógeno atómico es neutro en lugar de ionizado, por lo que se denota como HI. Juntos, el gas y el polvo se denominan medio interestelar (ISM). La masa total del ISM es solo alrededor de 10 % de la masa de las estrellas, por lo que el ISM tiene poca influencia directa en la dinámica de la Galaxia. Sin embargo, juega un papel central en la química de las galaxias, ya que las densas nubes de gas son los sitios de formación de estrellas, mientras que las estrellas moribundas expulsan material químicamente enriquecido de vuelta al gas interestelar. Los núcleos de los átomos de nuestros cuerpos se ensamblaron en estrellas que estaban ampliamente distribuidas por la Galaxia.

3. En el centro del disco hay un agujero negro, de masa $\simeq 4 \times 10^6 M_\odot$. El agujero negro a veces se llama Sagittarius A* o Sgr A*, por la fuente de radio que se cree que marca su posición, que a su vez lleva el nombre de la constelación en la que se encuentra.
4. Con mucho, el componente más grande, tanto en tamaño como en masa, es el halo oscuro, que tiene un radio de alrededor de 200kpc y una masa de alrededor de $10^{12} M_\odot$ (ambos valores son bastante inciertos). El halo oscuro probablemente esté compuesto por alguna partícula elemental de interacción débil que aún no se ha detectado en el laboratorio. Para la mayoría de los propósitos, el halo interactúa con los otros componentes de la galaxia solo a través de la fuerza gravitacional que ejerce y, por lo tanto, la dinámica estelar es una de las pocas herramientas que tenemos para estudiar este componente misterioso pero crucial del universo.

La velocidad típica de una estrella en una órbita circular en el disco es de aproximadamente 200 km s^{-1} . Vale la pena recordar que 1 km s^{-1} es casi exactamente 1pc (en realidad 1,023) en 1 megaaño (1 megaaño $\equiv 1\text{Myr} = 10^6$ años). Por lo tanto, el tiempo requerido para completar una órbita en el radio solar de 8kpc es 250Myr. Dado que la edad de la galaxia es de unos 10 gigaaños (1 gigaaño $\equiv 1\text{Gyr} = 10^9$ yr), la mayoría de las estrellas del disco han completado más de cuarenta revoluciones, y es razonable supongamos que la Galaxia se encuentra ahora en un estado aproximadamente estable, el estado estacionario

[Binney pagina 3, pdf 15](#)

1.1. Escalas de tiempo

Como se discutió anteriormente, y como se ilustra en la Fig. 1.1, la [formación de una galaxia individual](#) en el escenario estándar de formación jerárquica implica los siguientes procesos:

1. el colapso y la virialización de los halos de materia oscura,
2. el enfriamiento y la condensación del gas dentro del halo,
3. y la conversión de gas frío en estrellas y un agujero negro supermasivo central.

Las estrellas en evolución y los AGN expulsan energía, masa y elementos pesados al medio interestelar, determinando así su estructura y composición química y quizás impulsando vientos al medio intergaláctico. Finalmente, las galaxias pueden fusionarse e interactuar, remodelando su morfología y desencadenando más estallidos estelares y actividad AGN. En general, las propiedades de las galaxias están determinadas por la competencia entre todos estos procesos, y una forma sencilla de caracterizar la importancia relativa de estos procesos es utilizar las escalas de tiempo asociadas a ellos.

- **Tiempo de Hubble:** Es una estimación de la escala de tiempo en la que evoluciona el Universo en su conjunto. Se define como la inversa de la constante de Hubble, que especifica la tasa actual de expansión cósmica. Sería igual al tiempo transcurrido desde el Big Bang si el Universo siempre se hubiera expandido a su ritmo actual. En términos generales, esta es la escala de tiempo en la que se espera una evolución sustancial de la población de galaxias.

- **Tiempo dinámico:** Este es el tiempo requerido para orbitar a través de un sistema dinámico en equilibrio. Para un sistema con masa M y radio R , lo definimos como

$$t_{\text{dyn}} = \sqrt{3\pi/16G\bar{\rho}},$$

donde $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$. Esto está relacionado con el tiempo de caída libre, definido como el tiempo requerido para que una esfera uniforme y sin presión colapse hasta un punto, como

$$t_{\text{ff}} = t_{\text{dyn}}/\sqrt{2}.$$

- **Tiempo de enfriamiento:** Esta escala de tiempo es la relación entre el contenido de energía térmica y la tasa de pérdida de energía (a través del enfriamiento por radiación o por conducción) para un componente de gas.

- **Tiempo de formación de estrellas:** esta escala de tiempo es la relación entre el contenido de gas frío de una galaxia y su tasa de formación de estrellas. Por lo tanto, es una indicación de cuánto tiempo le tomaría a la galaxia quedarse sin gas si no se repone el combustible para la formación de estrellas.

- **Tiempo de enriquecimiento químico:** Es una medida de la escala de tiempo en la que el gas se enriquece en elementos pesados. Este tiempo de enriquecimiento es generalmente diferente para diferentes elementos, dependiendo de la vida útil de las estrellas responsables de la mayor parte de la producción de cada elemento (ver §10,1).

- **Tiempo de fusión:** Este es el tiempo típico que debe esperar un halo o galaxia antes de experimentar una fusión con un objeto de masa similar, y está directamente relacionado con la frecuencia de fusión principal.

- **Tiempo de fricción dinámica:** esta es la escala de tiempo en la que un objeto satélite en un gran halo pierde su energía orbital y gira en espiral hacia el centro. Como veremos en §12,3, esta escala de tiempo es proporcional a $M_{\text{sat}} / M_{\text{main}}$, donde M_{sat} es el masa del objeto satélite y M_{main} es la del halo principal. Por lo tanto, las galaxias más masivas se fusionarán con la galaxia central en un halo más rápidamente que las más pequeñas.

Estas escalas de tiempo pueden proporcionar pautas para incorporar los procesos físicos subyacentes en modelos de formación y evolución de galaxias. En particular, la comparación de escalas de tiempo puede brindar información útil. Como ilustración, considere los siguientes ejemplos:

- Los procesos cuya escala de tiempo es más larga que el tiempo de Hubble generalmente se pueden ignorar. Por ejemplo, las galaxias satélite con masa inferior a un pequeño porcentaje de su halo principal normalmente tienen tiempos de fricción dinámica que exceden el tiempo de Hubble (ver §12,3). En consecuencia, sus órbitas no decaen significativamente. Esto explica por qué los cúmulos de galaxias tienen tantas galaxias "satélite": los halos principales son mucho más masivos que una galaxia típica, por lo que la fricción dinámica es ineficaz.
- Si el tiempo de enfriamiento es más largo que el tiempo dinámico, el gas caliente estará normalmente en equilibrio hidrostático. Sin embargo, en el caso contrario, el gas se enfriá rápidamente, pierde la presión de soporte y colapsa hacia el centro del halo en un tiempo de caída libre sin establecer ningún equilibrio hidrostático.
- Si el tiempo de formación estelar es comparable al tiempo dinámico, el gas se convertirá en estrellas durante su colapso inicial, una situación que puede conducir a la formación de algo parecido a una galaxia elíptica. Por otro lado, si el tiempo de formación estelar es mucho más largo que los tiempos dinámicos y de enfriamiento, el gas se asentará en un disco soportado

centrífugamente antes de formar estrellas, produciendo así una galaxia de disco (ver §1,4,5).

- Si el tiempo de evolución química relevante es más largo que el tiempo de formación de estrellas, se producirá un pequeño enriquecimiento de metales durante la formación de estrellas y todas las estrellas terminarán con la misma metalicidad inicial. En el caso contrario, el gas de formación estelar se enriquece continuamente, por lo que las estrellas formadas en diferentes momentos tendrán diferentes metalicidades y patrones de abundancia (ver §10,4). Hasta ahora hemos evitado una pregunta obvia, a saber, ¿cuál es la escala de tiempo para la formación de galaxias en sí? Desafortunadamente, no existe una única definición útil para tal escala de tiempo. La formación de galaxias es un proceso, no un evento, y como hemos visto, este proceso es una amalgama de muchos elementos diferentes, cada uno con su propia escala de tiempo. Si, por ejemplo, nos interesa su población estelar, podríamos definir el tiempo de formación de una galaxia como la época en que se formó una fracción fija (por ejemplo, 1 % o 50 %) de sus estrellas. Si, por otro lado, nos interesa su estructura, podríamos querer definir el tiempo de formación de la galaxia como la época en que una fracción fija (por ejemplo, 50 % o 90 %) de su masa se reunió por primera vez en un solo objeto Estos dos tiempos de 'formación' pueden diferir mucho para una galaxia dada, e incluso su orden puede cambiar de una galaxia a otra. Por lo tanto, es importante ser preciso en la definición cuando se habla de los tiempos de formación de las galaxias.

1.2. Tiempo de cruce en sistemas estelares esféricos

Si definimos el tiempo de cruce (a veces llamado [tiempo dinámico](#)) como $T_{\text{cross}} = \frac{D}{v}$, donde D representa una escala natural de la extensión del sistema y v representa la velocidad característica de un elemento típico de nuestro contexto, la idea es que es una escala de tiempo que indica los órdenes de magnitud o estimaciones gruesas de lo que demora un objeto en recorrer la extensión relevante de nuestro ambiente y así habla de una cantidad natural para entender su evolución cinética.

Si consideramos para un primer análisis, el objeto simple de un sistema esférico de masa total M , radio R , compuesto de N estrellas con masa constante m , y que está virializado con velocidad una de equilibrio (en el sentido rms) determinada, podemos ver primero que la energía cinética promedio del sistema es:

$$\langle T \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} N m \langle v \rangle^2$$

Y además tendremos que la energía potencial del sistema es:

$$\begin{aligned}\langle U \rangle &= - \int_0^R \frac{GM(< r)dm}{r} = - \int_0^R \frac{GM(< r)(4\pi r^2 \rho dr)}{r} = - \int_0^R \frac{G(\frac{4}{3}\pi \rho r^3)(4\pi r^2 \rho dr)}{r} \\ &= -\frac{16}{3}\pi^2 G \rho^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{16}{15}\pi^2 \rho^2 G R^5\end{aligned}$$

Pero como la densidad es aproximadamente homogénea y podemos decir que vale en promedio $\rho = M \frac{3}{4\pi R^3}$, al remplazar llegamos a que el potencial promedio será

$$\langle U \rangle = -\frac{16}{15} \left(M \frac{3}{4\pi R^3} \right)^2 G R^5 = -\frac{3GM^2}{5R} = -\frac{3G(Nm)^2}{5R}$$

Ahora si utilizamos el [teorema del Virial](#) tendremos que podemos expresar nuestra velocidad como

$$2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0 \Rightarrow 2\frac{1}{2}Nm\langle v \rangle^2 = \frac{3G(Nm)^2}{5R} \Rightarrow \langle v \rangle = \sqrt{\frac{3GNm}{5R}}$$

Ahora si volvemos a nuestra definición del tiempo de cruce, tenemos que para un sistema esférico de radio $R, D = 2R$, y al remplazar nuestra velocidad del virial característica se llega a

$$T_{\text{cross}} = \frac{2R}{\langle v \rangle} = \frac{2R}{\sqrt{\frac{3GNm}{5R}}} = 2\sqrt{\frac{5R^3}{3GNm}}$$

Al mismo tiempo recordamos que la densidad del sistema es $\rho = Nm \frac{3}{4\pi R^3}$, lo que significa que $\frac{1}{4\pi\rho} = \frac{R^3}{3Nm}$. Esto lo remplazamos directamente en nuestra última expresión y queda que

$$T_{\text{cross}} = 2\sqrt{\frac{5}{4\pi G \rho}} \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$$

Esta forma del tiempo de cruce a veces se utiliza como definición alternativa para entender la escala de tiempo en que ocurren ciertos procesos dinámicos en sistemas que no son necesariamente tan simples como una esfera homogénea.

Ahora si seguimos considerando nuestro sistema de juguete, podemos ver que algunos valores extraídos solo con dinámica, son comparables con nuestro tiempo de cruce. Recordando que Newton mostró que para sistemas con simetría esférica, la fuerza queda solo determinada por la masa contenida en ($< r$), concentrada

puntualmente, y así tendremos que la fuerza específica (F por unidad de masa, o el campo de fuerzas que sentiría una masa de prueba) es:

$$\vec{F}(r) = -\frac{GM(< r)}{r^2} \hat{r} = -\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\nabla\Phi(r)$$

En nuestro caso como la densidad es homogénea, tenemos $M(< r) = \frac{4\pi r^3}{3}\rho \Rightarrow \vec{F}(r) = -\frac{4\pi G\rho r}{3} \hat{r}$. Si tuviésemos un movimiento circular uniforme, entonces nuestro F está actuando como una fuerza centrípeta, dejando (si v_c es la velocidad circular):

$$\frac{v_c^2}{r} = \|\vec{F}(r)\| \Rightarrow v_c = \sqrt{rF(r)} = r\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}$$

Con lo que, si el periodo orbital es $T_{\text{orb}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v_c}$, tendremos que el valor final es de

$$T_{\text{orb}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Con lo que encontramos dos cosas: El tiempo en el que orbita el sistema una estrella que tiene movimiento circular perfecta, toma un tiempo de $2 - 3$ unidades de T_{cross} , dejándonos el periodo en escalas propias (y consistentes) a nuestro contexto, y también notamos que el periodo orbital que nos queda es independiente de la posición, dando una rotación rígida.

Acabamos de ver el extremo del movimiento puramente rotacional, que pasa en el otro extremo, dígase el movimiento puramente rectilíneo. Si tenemos una masa de prueba \bar{m} y consideramos el modelo de ecuaciones de movimiento más simple, tendremos:

$$\bar{m}\ddot{r} = -\frac{GM(< r)}{r^2}\bar{m} = -\frac{G4\pi\rho r^3}{3r^2} = -\underbrace{\frac{G4\pi\rho}{3}}_{k>0}r$$

Así nuestra ecuación tiene la forma de un oscilador armónico

$$\ddot{r} + kr = 0$$

Así, por ejemplo, el tiempo $T_{r=0}$ que demora nuestra masa de prueba en llegar al origen del sistema esférica es $1/4$ del periodo T_r de nuestro oscilador armónico (un periodo calcularía el paso "ida y vuelta" por el origen), es decir:

$$T_{r=0} = \frac{1}{4}T_r = \frac{2\pi}{4\omega_r}$$

Pero de la ecuación de movimiento tenemos directamente que $\omega_r = \sqrt{k}$

$$\Rightarrow T_{r=0} = \sqrt{\frac{3\pi}{16G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{16}} * \sqrt{\frac{1}{G\rho}} \approx 0,8T_{\text{cross}}$$

Este resultado es interesante, porque si bien en magnitud los valores son comparables, si la dinámica concordara a la perfección con la idea de estimar el tiempo de cruce desde los principios con los que iniciamos, tendríamos que $2T_{r=0}$ tendría el mismo valor que 1 antes de tomar la aproximación de orden de magnitud. ¿Se les ocurre en qué y cuántos puntos difiere el análisis?

1.3. Inversión analítica de un perfil superficial

En astrofísica, a partir de un perfil de densidad en el espacio, que tenga simetría esférica (puede ser densidad de luminosidad, densidad de masa, etc), este se proyecta en la dirección observada para dejar en un perfil superficial a través de la forma

$$\Sigma(R) = 2 \int_0^\infty \rho(r) dz = 2 \int_R^\infty \frac{\rho(r)r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}} \quad (1)$$

Analíticamente esta es una dirección natural de desarrollo, porque estamos tomando la información de un perfil en 3D y la estamos bajando a 2D. Ahora, en la práctica, el perfil observado es el proyectado, y nos gustaría preguntarnos si es que podemos, a partir de este, generar un perfil en tres dimensiones que sea consistente con lo observado.

La respuesta es afirmativa, pero antes de entregar la fórmula debemos pasar por una técnica de inversión de la ecuación integral de Abel. Sean

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{g(t)}{(t-x)^\alpha} dt, \quad I(t) = -\frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} dx$$

Con $\alpha \in (0, , 1)$. Notamos que si reemplazamos la definición de $f(x)$ en I obtenemos

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \left(\int_x^\infty \frac{g(s)}{(s-x)^\alpha} ds \right) dx \\ &= -\frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \int_x^\infty \frac{g(s)}{(x-t)^{1-\alpha}(s-x)^\alpha} ds dx \end{aligned}$$

En donde, si usamos Fubini y recordamos que $\int_0^1 \frac{du}{u^\alpha(1-u)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}$, podemos notar que finalmente se tiene que $I(t) = g(t)$. Además si en $I(t)$ reemplazamos la variable de integración x por $u = x - t$ y derivamos con respecto a t , obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} dx \\ &= -\frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_t^\infty \frac{df}{dx} \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} dx \end{aligned}$$

Ahora notamos que la Ec. eqrefformula1 se ajusta a nuestra definición del desarrollo anterior después de hacer algunas modificaciones para ajustar $u = r^2$. Esto finalmente nos lleva a

$$\rho(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{d\Sigma}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Si bien esta fórmula es una herramienta interesante, vale notar que solo es válida para invertir distribuciones que sepamos a priori, tienen simetría esférica. Esto nos limita bastante su utilidad, pero es de esperar, pues capturar la anisotropía de una distribución en 3D es un problema inverso sumamente degenerado y nuestra capacidad de modelarla depende de información adicional.

Veamos una aplicación de esto. Consideremos un perfil de de Vaucouleurs (Sersic con $n = 4$), que sabemos presenta un buen ajuste para el brillo superficial de galaxias elípticas. Así por la fórmula que determinamos tenemos que:

$$\begin{aligned} j(r) &= -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{dI}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -\frac{I_e}{\pi} \int_r^\infty \frac{d \left(\exp \left(-7,67 \left[(R/R_e)^{1/4} - 1 \right] \right) \right)}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\ &= K \int_r^\infty \frac{(R/R_e)^{1/4} dR}{e^{7,67(R/R_e)^{1/4}} R \sqrt{R^2 - r^2}}; \quad K \approx 1300 I_e \end{aligned}$$

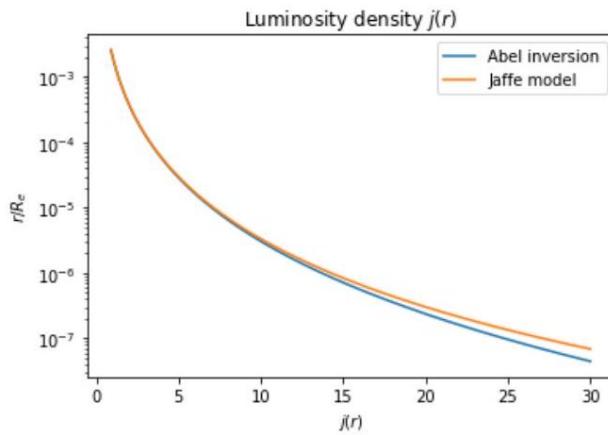
Esta última expresión la podemos integrar numéricamente, y la validamos exitosamente con el modelo de Jaffe

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{4\pi} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2} \left(1 + \frac{r}{r_0} \right)^{-2},$$

perfil tridimensional que se usa para modelar galaxias elípticas:

1.4. Sistemas sin colisiones y el tiempo de relajación

Hay una diferencia fundamental entre las [galaxias](#) y los sistemas que normalmente se tratan en la mecánica estadística, como las [moléculas en una caja](#). Esta diferencia radica en la naturaleza de las fuerzas que actúan entre las partículas constituyentes. La interacción entre dos moléculas es de corto alcance: la fuerza es pequeña a menos que las moléculas estén muy cerca una de la otra, cuando se



vuelve fuertemente repulsiva. En consecuencia, las moléculas en un gas difuso están sujetas a aceleraciones violentas y de corta duración cuando chocan entre sí, intercaladas con períodos mucho más largos cuando se mueven a una velocidad casi constante. En cambio, la fuerza gravitacional que actúa entre las estrellas de una galaxia es de largo alcance.

Considere la fuerza de las estrellas en el cono que se muestra en la figura I sobre una estrella en el vértice del cono.

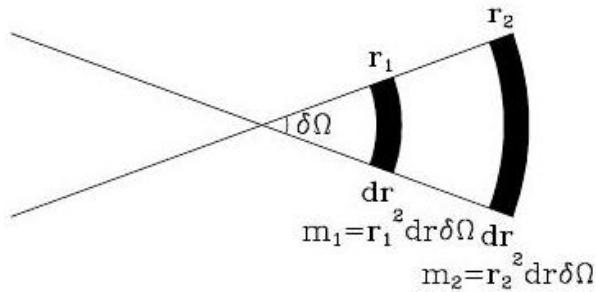


Figura 1: Si la densidad de estrellas fuera la misma en todas partes, las estrellas en cada uno de los segmentos sombreados de un cono contribuirían igualmente a la fuerza sobre una estrella en el vértice del cono. Así, la aceleración de una estrella en el vértice está determinada principalmente por la distribución a gran escala de estrellas en la galaxia, no por los vecinos más cercanos de la estrella.

La fuerza de cualquier estrella disminuye con la distancia r como r^{-2} , pero si la densidad de estrellas es uniforme, el número de estrellas que se atraen por unidad de longitud del cono aumenta como r^2 . Llamemos octava a un factor de dos intervalo de radio, por analogía con la octava musical. Entonces cada octava en radio, de r a $2r$, tiene una longitud proporcional a r , por lo que cada octava atrae la estrella en el vértice con una fuerza proporcional a $r^{-2} \times r^2 \times r = r$. Este simple argumento muestra que **la fuerza sobre la estrella en el vértice está dominada por las estrellas más distantes del sistema, en lugar de por sus vecinas más cercanas**. Por supuesto, si la densidad de las estrellas que se atraen fuera exactamente esférica, la estrella en el vértice no experimentaría ninguna fuerza neta porque sería atraída por igual en todas las direcciones. Pero, en general, la densidad de las estrellas que se atraen cae en una dirección más lentamente que en la dirección opuesta, por lo que la estrella en el ápice está sujeta a una fuerza neta, y esta fuerza está determinada por la estructura de la galaxia en la escala más grande. En consecuencia, en contraste con la situación de las moléculas, la fuerza sobre una estrella no varía rápidamente, y se puede suponer que cada estrella acelera suavemente a través del campo de fuerza generado por la galaxia como un todo. En otras palabras, para la mayoría de los propósitos, **podemos tratar la fuerza gravitacional sobre una estrella como si surgiera de una distribución de densidad suave en lugar de una colección de puntos de masa**.

1.4.1. El tiempo de relajación

Ahora investigamos esta conclusión de forma más cuantitativa, preguntándonos con qué precisión podemos aproximarnos a una **galaxia compuesta por N estrellas idénticas de masa m como una distribución de densidad suave y un campo gravi-**

tatorio. Para responder a esta pregunta, seguimos el movimiento de una estrella individual, llamada estrella en cuestión, a medida que su órbita la lleva una vez a través de la galaxia, y buscamos una estimación del orden de magnitud de la diferencia entre la velocidad real de esta estrella después de este intervalo y la velocidad que habría tenido si la masa de las otras estrellas estuviera distribuida uniformemente. Supongamos que la estrella en cuestión pasa a una distancia b de otra estrella, llamada estrella de campo (Figura 2).

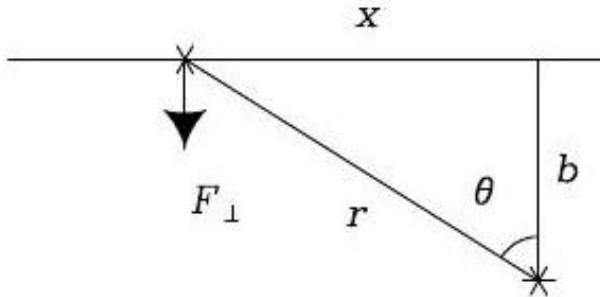


Figura 2: Una estrella de campo se acerca a la estrella en cuestión a una velocidad v y un parámetro de impacto b . Estimamos el impulso resultante a la estrella en cuestión approximando la trayectoria de la estrella de campo como una línea recta.

Queremos estimar la cantidad δv por la cual el encuentro desvía la velocidad v de la estrella en cuestión. En §3.1 d calculamos δv exactamente, pero para nuestros propósitos actuales una estimación aproximada es suficiente. Para hacer esta estimación supondremos que $|\delta v|/v \ll 1$, y que la estrella de campo está estacionaria durante el encuentro. En este caso δv es perpendicular a v , ya que las aceleraciones paralelas a v promedian cero. Podemos calcular la magnitud del cambio de velocidad, $\delta v \equiv |\delta v|$, suponiendo que la estrella en cuestión pasa junto a la estrella de campo en una trayectoria rectilínea e integrando la fuerza perpendicular F_{\perp} a lo largo de esta trayectoria. Situamos el origen del tiempo en el instante de máxima aproximación de las dos estrellas, y encuentre en la notación de la figura 2

$$F_{\perp} = \frac{Gm^2}{b^2 + x^2} \cos \theta = \frac{Gm^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm^2}{b^2} \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2}$$

Pero por las leyes de Newton

$$m\dot{v} = F \quad \text{así} \quad \delta v = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt F_{\perp}$$

y tenemos

$$\delta v = \frac{Gm}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{[1 + (vt/b)^2]^{3/2}} = \frac{Gm}{bv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(1 + s^2)^{3/2}} = \frac{2Gm}{bv} \quad (2)$$

En palabras, δv es aproximadamente igual a la aceleración en el acercamiento más cercano, Gm/b^2 , multiplicado por la duración de esta aceleración $2b/v$. Observe que nuestra suposición de una trayectoria en línea recta se rompe y la ecuación (2) se vuelve inválida cuando $\delta v \simeq v$; de la ecuación (2), esto ocurre si el parámetro de impacto $b \leq b_{90} \equiv 2Gm/v^2$. El subíndice 90 representa una desviación de 90 grados.

Ahora, la densidad superficial de las estrellas de campo en la galaxia anfitriona es de orden $N/\pi R^2$, donde N es el número de estrellas y R es el radio de la galaxia, por lo que al cruzar la galaxia una vez la estrella sujeto sufre

$$\delta n = \frac{N}{\pi R^2} 2\pi b \, db = \frac{2N}{R^2} b \, db$$

encuentros con parámetros de impacto en el rango de b a $b + db$. Cada uno de esos encuentros produce una perturbación δv en la velocidad de la estrella en cuestión, pero debido a que estas pequeñas perturbaciones están orientadas aleatoriamente en el plano perpendicular a v , su media es cero. Aunque el cambio de velocidad medio es cero, el cambio de cuadrado medio no lo es: después de un cruce, esto equivale a

$$\sum \delta v^2 \simeq \delta v^2 \delta n = \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \frac{2N}{R^2} b \, db \quad (3)$$

(Estrictamente, el cambio medio en la velocidad es cero solo si la distribución de las estrellas perturbadoras es la misma en todas las direcciones. Una declaración más precisa es que el cambio medio en la velocidad se debe a la distribución de masa suavizada, y lo ignoramos porque el objetivo de nuestro cálculo es determinar la diferencia entre la aceleración debida a la distribución de masa suavizada y las estrellas reales.)

Integrando la ecuación (3) sobre todos los parámetros de impacto desde b_{\min} hasta b_{\max} , encontramos el cambio de velocidad cuadrático medio por cruce,

$$\Delta v^2 \equiv \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \sum \delta v^2 \simeq 8N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \ln \Lambda \quad (4)$$

donde el factor

$$\ln \Lambda \equiv \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right)$$

se llama **logaritmo de Coulomb**. Nuestra suposición de una trayectoria en línea recta se rompe para parámetros de impacto menores que b_{90} , por lo que establecemos $b_{\min} = f_1 b_{90}$, donde f_1 es un factor de unidad de orden. Nuestra suposición de una distribución homogénea de estrellas de campo se rompe para parámetros de impacto de orden R , por lo que establecemos $b_{\max} = f_2 R$. Luego

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{R}{b_{90}} \right) + \ln (f_2/f_1)$$

En la mayoría de los sistemas de interés $R \gg b_{90}$ (por ejemplo, en una galaxia elíptica típica $R/b_{90} \geq 10^{10}$), por lo que la incertidumbre fraccionaria en $\ln \Lambda$ que surge de los valores inciertos de f_1 y f_2 es bastante pequeño, y perdemos poca precisión al establecer $f_2/f_1 = 1$.

Por lo tanto, los encuentros entre la estrella en cuestión y las estrellas de campo provocan una especie de **difusión de la velocidad de la estrella en cuestión** que es distinta de la aceleración constante causada por la distribución de masa general en el sistema estelar. **Este proceso de difusión a veces se denomina relajación de dos cuerpos, ya que surge del efecto acumulativo de una miríada de encuentros de dos cuerpos entre la estrella en cuestión y las estrellas de campo que pasan.**

La velocidad típica v de una estrella de campo es aproximadamente la de una partícula en una órbita circular en el borde de la galaxia,

$$v^2 \approx \frac{G N m}{R} \quad (5)$$

Si eliminamos R de la ecuación (4) usando la ecuación (5), tenemos

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \approx \frac{8 \ln \Lambda}{N}$$

Si la estrella en cuestión hace muchos cruces de la galaxia, la velocidad v cambiará aproximadamente Δv^2 en cada cruce, por lo que el número de cruces n_{relax} que es requerido para que su velocidad cambie por orden en sí está dado por

$$n_{\text{relax}} \simeq \frac{N}{8 \ln \Lambda}$$

El tiempo de relajación se puede definir como $t_{\text{relax}} = n_{\text{relax}} t_{\text{cross}}$, donde $t_{\text{cross}} = R/v$ es el **tiempo de cruce, el tiempo necesario para que una estrella típica cruce la galaxia una vez**. Además, $\Lambda = R/b_{90} \approx Rv^2/(Gm)$, que es $\approx N$ según la ecuación (5). Así nuestro resultado final es

$$t_{\text{relax}} \simeq \frac{0,1N}{\ln N} t_{\text{cross}}$$

Después de un tiempo de relajación, las pequeñas patadas acumuladas de muchos encuentros con estrellas que pasan han cambiado significativamente la órbita de la estrella en cuestión de la que habría tenido si el campo gravitatorio hubiera sido suave. En efecto, después de un tiempo de relajación una estrella ha perdido la memoria de sus condiciones iniciales. *Las galaxias suelen tener $N \approx 10^{11}$ estrellas y tienen unos cientos de cruces de edad, por lo que para estos sistemas los encuentros estelares no son importantes, excepto muy cerca de sus centros.* En un cúmulo globular, por otro lado, $N \approx 10^5$ y el tiempo de cruce $t_{\text{cross}} \approx 1\text{Myr}$ (Tabla 1,3), por lo que la relajación influye fuertemente en la estructura del clúster durante su vida útil de 10Gyr.

En todos estos sistemas, la dinámica en escalas de tiempo $\leq t_{\text{relax}}$ es la de un sistema sin colisiones en el que las partículas constituyentes se mueven bajo la influencia del campo gravitatorio generado por una distribución de masa suave, en lugar de una colección de puntos de masa. La materia oscura no bariónica tampoco tiene colisiones, ya que tanto las interacciones débiles como las interacciones gravitatorias entre WIMP individuales son insignificantes en cualquier contexto galáctico.

En la mayor parte de este libro nos enfocamos en la dinámica estelar sin colisiones, restringiendo la discusión de la evolución a largo plazo impulsada por los encuentros gravitatorios entre las partículas al Capítulo 7.

2. Teoría del potencial

Gran parte de la masa de una galaxia reside en las estrellas. Para calcular el potencial gravitacional de una gran colección de estrellas, en principio deberíamos simplemente sumar los potenciales de masa puntual de todas las estrellas juntas. Por supuesto, esto *no es factible para las $\approx 10^{11}$ estrellas en una galaxia típica,* y para la mayoría de los propósitos *es suficiente para modelar el potencial suavizando la densidad de masa en las estrellas en una escala que es pequeña en comparación con del tamaño de la galaxia, pero grande en comparación con la distancia media entre las estrellas.*

2.1. Resultados generales

Nuestro objetivo es calcular la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sobre una partícula de masa m_s en la posición \mathbf{x} que es generada por la atracción gravitacional de una distribución de masa $\rho(\mathbf{x}')$. De acuerdo con la ley de gravitación de Newton, la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ puede obtenerse sumando las pequeñas contribuciones

$$\delta\mathbf{F}(\mathbf{x}) = Gm_s \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \delta m(\mathbf{x}') = Gm_s \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'$$

a la fuerza total de cada elemento pequeño de volumen $d^3\mathbf{x}'$ ubicado en \mathbf{x}' . Por lo tanto

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = m_s \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{donde} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv G \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') \quad (6)$$

es el campo gravitacional, la fuerza por unidad de masa.

Si definimos el potencial gravitacional $\Phi(x)$ por

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) \equiv -G \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}} \quad (7)$$

y note que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}$$

encontramos que podemos escribir \mathbf{g} como

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}} \int d^3\mathbf{x}' \frac{G\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \\ &= -\nabla\Phi \end{aligned} \quad (8)$$

donde por simplicidad hemos dejado caer el subíndice \mathbf{x} en el operador de gradiente ∇ .

El potencial es útil porque es un campo escalar que es más fácil de visualizar que el campo gravitatorio vectorial pero contiene la misma información. Además, en muchas situaciones la forma más fácil de obtener g es primero calcular el potencial y luego tomar su gradiente.

Si tomamos la divergencia de la ecuación (6), encontramos

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \int d^3\mathbf{x}' \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \rho(\mathbf{x}') \quad (9)$$

Ahora

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} + \frac{3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^5}$$

Cuando $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \neq 0$ podemos cancelar el factor $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2$ desde la parte superior e inferior del último término de esta ecuación para concluir que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = 0 \quad (\mathbf{x}' \neq \mathbf{x})$$

Por lo tanto, cualquier contribución a la integral de la ecuación (9) debe provenir del punto $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, y podemos restringir el volumen de integración a una pequeña esfera de radio h centrado en este punto. Dado que, para h suficientemente pequeños, la densidad será casi constante en este volumen, podemos sacar $\rho(\mathbf{x}')$ de la integral. Los términos restantes del integrando se pueden ordenar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq h} d^3\mathbf{x}' \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq h} d^3\mathbf{x}' \nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = h} d^2\mathbf{S}' \cdot \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}\end{aligned}\quad (10)$$

El último paso utiliza el teorema de la divergencia para convertir la integral de volumen en una integral de superficie. Ahora en la esfera $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = h$ tenemos $d^2\mathbf{S}' = (\mathbf{x}' - \mathbf{x})h d^2\Omega$, donde $d^2\Omega$ es un pequeño elemento de ángulo sólido. Por tanto, la ecuación (10) se convierte en

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int d^2\Omega = -4\pi G\rho(\mathbf{x})$$

Si en la ecuación (8) sustituimos $\nabla \cdot \mathbf{g}$, obtenemos la ecuación de Poisson que relaciona el potencial Φ con la densidad ρ ;

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \quad (11)$$

Esta es una ecuación diferencial que se puede resolver para $\Phi(\mathbf{x})$ dado $\rho(\mathbf{x})$ y una condición de contorno apropiada. Para un sistema aislado, la condición de frontera es $\Phi \rightarrow 0$ como $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. El potencial dado por la ecuación (7) satisface automáticamente esta condición de contorno. La ecuación de Poisson proporciona una ruta a Φ y luego a g que suele ser más conveniente que las ecuaciones (6) o (7). En el caso especial $\rho = 0$ la ecuación de Poisson se convierte en la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Si integramos ambos lados de la ecuación (11) sobre un volumen arbitrario que contiene una masa total M y luego aplicamos el teorema de la divergencia, obtenemos

$$4\pi GM = 4\pi G \int d^3\mathbf{x} \rho = \int d^3\mathbf{x} \nabla^2 \Phi = \int d^2\mathbf{S} \cdot \nabla \Phi$$

Este resultado es el teorema de Gauss, que establece que la integral de la componente normal de $\nabla\Phi$ sobre cualquier superficie cerrada es igual a $4\pi G$ por la masa contenida dentro de esa superficie.

Dado que g está determinado por el gradiente de un potencial, el campo gravitatorio es conservativo, es decir, el trabajo realizado contra las fuerzas gravitatorias al mover dos estrellas desde el infinito hasta una configuración dada es independiente de la trayectoria a lo largo de la cual se mueven, y se define como la energía potencial de la configuración. De manera similar, el trabajo realizado contra las fuerzas gravitatorias al ensamblar una distribución continua arbitraria de masa $\rho(\mathbf{x})$ es independiente de los detalles de cómo se ensambló la distribución de masa y se define como igual a la energía potencial de la distribución masiva. Se puede obtener una expresión para la energía potencial mediante el siguiente argumento.

Suponga que parte de la masa ya está en su lugar, por lo que la densidad y el potencial son $\rho(\mathbf{x})$ y $\Phi(\mathbf{x})$. Si ahora traemos una pequeña masa adicional δm desde el infinito hasta la posición \mathbf{x} , el trabajo realizado es $\delta m\Phi(\mathbf{x})$. Por lo tanto, si agregamos un pequeño incremento de densidad $\delta\rho(\mathbf{x})$, el cambio en la energía potencial es

$$\delta W = \int d^3x \delta\rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x})$$

De acuerdo con la ecuación de Poisson, el cambio resultante en el potencial $\delta\Phi(\mathbf{x})$ satisface $\nabla^2(\delta\Phi) = 4\pi G(\delta\rho)$, entonces

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int d^3x \Phi \nabla^2(\delta\Phi)$$

Usando el teorema de la divergencia podemos escribir esto como

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int \Phi \nabla(\delta\Phi) \cdot d^2S - \frac{1}{4\pi G} \int d^3x \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi)$$

donde la integral de superficie se anula porque $\Phi \propto r^{-1}$, $|\nabla\delta\Phi| \propto r^{-2}$ como $r \rightarrow \infty$, entonces el integrando $\propto r^{-3}$ mientras que el área de superficie total $\propto r^2$. Pero $\nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) = \frac{1}{2}\delta(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = \frac{1}{2}\delta|\nabla\Phi|^2$. Por eso

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi G} \delta \left(\int d^3x |\nabla\Phi|^2 \right)$$

Si ahora sumamos todas las contribuciones δW , tenemos una expresión simple para la energía potencial,

$$W = -\frac{1}{8\pi G} \int d^3x |\nabla\Phi|^2$$

Para obtener una expresión alternativa para W , aplicamos nuevamente el teorema de la divergencia y reemplazamos $\nabla^2\Phi$ por $4\pi G\rho$ para obtener

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) \quad (12)$$

El **tensor de energía potencial**, en §4.8.3 encontraremos el tensor \mathbf{W} que está definido por

$$W_{jk} \equiv - \int d^3x \rho(\mathbf{x}) x_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \quad (13)$$

donde ρ y Φ son la densidad y el potencial de algún cuerpo, y la integral debe tomarse en todo el espacio. Ahora deducimos algunas propiedades útiles de \mathbf{W} , que se conoce como el **tensor de energía potencial de Chandrasekhar**.

Si sustituimos Φ de la ecuación (7), \mathbf{W} se convierte en

$$W_{jk} = G \int d^3x \rho(\mathbf{x}) x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}$$

Dado que el rango de la integración sobre \mathbf{x}' no depende de \mathbf{x} , podemos llevar la diferenciación dentro de la integral para encontrar

$$W_{jk} = G \int d^3x \int d^3x' \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{x_j (x'_k - x_k)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad (14)$$

Además, dado que \mathbf{x} y \mathbf{x}' son variables ficticias de integración, podemos volver a etiquetarlas y escribir

$$W_{jk} = G \int d^3x' \int d^3x \rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}) \frac{x'_j (x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (15)$$

Finalmente, al intercambiar el orden de integración en la ecuación (15) y sumar el resultado a la ecuación (14), obtenemos

$$W_{jk} = -\frac{1}{2} G \int d^3x \int d^3x' \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{(x'_j - x_j)(x'_k - x_k)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad (16)$$

De esta expresión sacamos la importante inferencia de que el **tensor \mathbf{W} es simétrico**, es decir, que $W_{jk} = W_{kj}$. Si el cuerpo se aplana a lo largo de algún eje, digamos el eje x_3 , W_{33} será más pequeño que los otros componentes porque para la mayoría de los pares de elementos de materia, $|x_3 - x'_3| < |x_1 - x'_1|$ o $|x_2 - x'_2|$.

Cuando tomamos la traza de ambos lados de la ecuación (6), encontramos

$$\begin{aligned}\text{traza}(\mathbf{W}) \equiv \sum_{j=1}^3 W_{jj} &= -\frac{1}{2} G \int d^3 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Comparando esto con la ecuación (12) vemos que la traza (\mathbf{W}) es simplemente la energía potencial gravitatoria total W . Tomando la traza de (13) tenemos

$$W = - \int d^3 \mathbf{x} \rho \mathbf{x} \cdot \nabla \Phi \quad (17)$$

que proporciona otra expresión útil para la energía potencial de un cuerpo.

2.2. Sistemas esféricicos

2.2.1. Teoremas de Newton

Newton demostró dos resultados que nos permiten calcular fácilmente el potencial gravitacional de cualquier distribución de materia esféricamente simétrica:

El primer teorema de Newton Un cuerpo que está dentro de una capa esférica de materia no experimenta ninguna fuerza gravitacional neta de esa capa.

Segundo teorema de Newton La fuerza gravitacional sobre un cuerpo que se encuentra fuera de una capa esférica de materia es la misma que sería si toda la materia de la capa estuviera concentrada en un punto en su centro.

La Figura 3 ilustra la demostración del primer teorema de Newton.

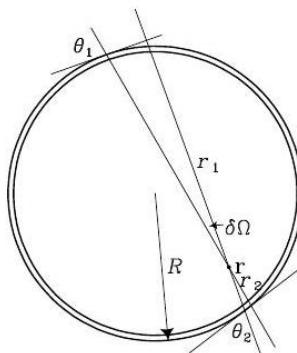


Figura 3: Prueba del primer teorema de Newton.

Considere el cono asociado con un pequeño ángulo sólido $\delta\Omega$ centrado en el punto \mathbf{r} . Este cono corta la capa esférica de materia en dos puntos, a distancias r_1 y r_2 de \mathbf{r} . Consideraciones geométricas elementales nos aseguran que los ángulos θ_1 y θ_2 son iguales, y por tanto que las masas δm_1 y δm_2 contenidas en $\delta\Omega$

donde se cruza con la capa están en la proporción $\delta m_1/\delta m_2 = (r_1/r_2)^2$. Por lo tanto $\delta m_2/r_2^2 = \delta m_1/r_1^2$ y una partícula colocada en \mathbf{r} es atraída igualmente en direcciones opuestas. Sumando todos los conos centrados en \mathbf{r} , se concluye que el cuerpo en \mathbf{r} no experimenta ninguna fuerza neta del caparazón.

Un corolario importante del primer teorema de Newton es que [el potencial gravitacional dentro de una capa esférica vacía es constante porque \$\nabla\Phi = -\mathbf{g} = 0\$](#) . Por lo tanto, podemos evaluar el potencial $\Phi(\mathbf{r})$ dentro del caparazón calculando la expresión integral (7) para \mathbf{r} ubicado en cualquier punto interior. El lugar más conveniente para r es el centro del cascarón, porque entonces todos los puntos del cascarón están a la misma distancia R , y uno inmediatamente tiene

$$\Phi = -\frac{GM}{R}$$

La demostración de su segundo teorema eludió a Newton durante más de diez años. Sin embargo, en retrospectiva, es fácil. El truco (Figura 4) es comparar el potencial Φ en un punto \mathbf{p} ubicado a una distancia r del centro de una capa interior esférica de masa M y radio $a(r > a)$, con el potencial Φ' en un punto \mathbf{p}' ubicado a una distancia a del centro de una capa exterior de masa M y radio r .

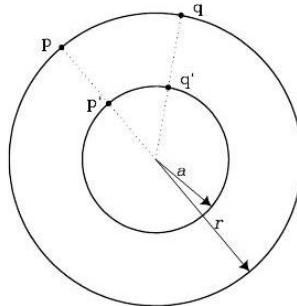


Figura 4: Prueba del segundo teorema de Newton.

Considere la contribución $\delta\Phi$ al potencial en \mathbf{p} de la parte de la capa interna con ángulo sólido $\delta\Omega$ ubicada en \mathbf{q}' . Evidentemente

$$\delta\Phi = -\frac{GM}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}'|} \frac{\delta\Omega}{4\pi}$$

Pero la contribución $\delta\Phi'$ de la materia en la capa exterior cerca de q al potencial en \mathbf{p}' es

$$\delta\Phi' = -\frac{GM}{|\mathbf{p}' - \mathbf{q}|} \frac{\delta\Omega}{4\pi}$$

Finalmente, como $|\mathbf{p} - \mathbf{q}'| = |\mathbf{p}' - \mathbf{q}|$ por simetría, se sigue que $\delta\Phi = \delta\Phi'$, y luego por suma de todos los puntos q y q' que $\Phi = \Phi'$. Pero ya sabemos que $\Phi' = -GM/r$, por lo tanto $\Phi = -GM/r$, que es exactamente el potencial que se generaría al concentrar toda la masa de la capa interna en su centro.

En §2,4 se dan demostraciones alternativas de los teoremas de Newton, usando la maquinaria de los armónicos esféricos.

De los teoremas primero y segundo de Newton, se deduce que la atracción gravitacional de una distribución de densidad esférica $\rho(r')$ en una unidad de masa en el radio r está completamente determinada por la masa interior a r :

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \quad (18)$$

donde

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r')$$

El potencial gravitatorio total puede considerarse como la suma de los potenciales de las capas esféricas de masa $dM(r) = 4\pi\rho(r)r^2 dr$, por lo que podemos calcular el potencial gravitatorio en \mathbf{r} generado por una distribución de densidad esféricamente simétrica arbitraria $\rho(\mathbf{r}')$ sumando las contribuciones a el potencial producido por las capas (i) con $r' < r$, y (ii) con $r' > r$. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= -\frac{G}{r} \int_0^r dM(r') - G \int_r^\infty \frac{dM(r')}{r'} \\ &= -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Vale la pena comprobar que la fuerza $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ obtenida de (19) recupera la expresión simple (18).

Una propiedad importante de una distribución de materia esférica es su velocidad circular $v_c(r)$, definida como la velocidad de una partícula de masa despreciable (una partícula de prueba) en una órbita circular de radio r . Podemos evaluar fácilmente v_c igualando la atracción gravitatoria $|\mathbf{F}|$ de la ecuación (18) a la aceleración centrípeta v_c^2/r :

$$v_c^2 = r|\mathbf{F}| = r \frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r}$$

La frecuencia angular asociada se llama frecuencia circular.

$$\Omega \equiv \frac{v_c}{r} = \sqrt{\frac{GM(r)}{r^3}}$$

La velocidad circular y la frecuencia miden la masa interior a r . Otra cantidad importante es la velocidad de escape v_e definida por

$$v_e(r) \equiv \sqrt{2|\Phi(r)|}$$

Una estrella en r puede escapar del campo gravitatorio representado por Φ solo si tiene una velocidad al menos tan grande como $v_e(r)$, porque solo entonces su (positivo) la energía cinética $\frac{1}{2}v^2$ excede el valor absoluto de su energía potencial (negativa) Φ . La velocidad de escape en r depende de la masa tanto dentro como fuera de r .

Energía potencial de sistemas esféricos La expresión más simple para la energía potencial de un cuerpo esférico se obtiene de la ecuación (17). Sustituyendo la ecuación (18) e integrando sobre todas las direcciones de \mathbf{r} , obtenemos

$$W = -4\pi G \int_0^\infty dr r \rho(r) M(r)$$

Es sencillo mostrar (vea el Problema 2.2) que el tensor de energía potencial de un cuerpo esférico es diagonal, es decir, $W_{jk} = 0$ para $j \neq k$, y tiene la forma

$$W_{jk} = \frac{1}{3} W \delta_{jk},$$

donde δ_{ij} es la unidad si $i = j$ y cero en caso contrario. Se dice que tales tensores son isotrópicos.

2.2.2. Potenciales de algunos sistemas simples

Es instructivo discutir los potenciales generados por varias distribuciones de densidad simples:

(a) Masa puntual

En este caso

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad ; \quad v_c(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad ; \quad v_e(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Los potenciales de esta forma y las órbitas dentro de ellos se denominan con frecuencia keplerianos porque Kepler primero entendió que $v_c \propto r^{-1/2}$ en el sistema solar.

(b) Esfera homogénea

Si la densidad es una constante ρ , tenemos $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ y

$$v_c = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} r$$

Así, en este caso, la velocidad circular aumenta linealmente con el radio, y el período orbital de una masa en una órbita circular es

$$T = \frac{2\pi r}{v_c} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

independiente del radio de su órbita. El inverso de la frecuencia angular de una órbita circular es

$$\frac{r}{v_c} = \sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}} = 0,4886(G\rho)^{-1/2}$$

Si una pequeña masa se suelta desde el reposo en el radio r en el campo gravitatorio de una esfera homogénea, su ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3}r$$

which is the equation of motion of a harmonic oscillator of angular frequency $2\pi/T$. Therefore no matter what is the initial value of r , the test mass will reach $r = 0$ in a quarter of a period, or in a time

$$\sqrt{\frac{3\pi}{16G\rho}} = 0,767(G\rho)^{-1/2}$$

The times in equations (2.37) and (2.39) are rather similar, and this suggests that the time taken for a particle to complete a significant fraction of its orbit is $\sim (G\rho)^{-1/2}$, independent of the size and shape of the orbit. This result also holds for inhomogeneous systems, so long as ρ is replaced by the mean density $\bar{\rho}$ interior to the particle's current radius. Thus we estimate the crossing time (sometimes also called the dynamical time) to be

$$t_{\text{cross}} \simeq t_{\text{dyn}} \simeq (G\bar{\rho})^{-1/2}$$

and shall use this as a measure of the characteristic time associated with the orbital motion of a star. Note that a complete orbital period is larger than t_{cross} by a factor $\simeq 2\pi \simeq 6$.

The potential energy of a homogeneous sphere of radius a and density ρ is conveniently obtained from equation (2.32). We have $M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$, and therefore

$$W = -\frac{16\pi^2}{3}G\rho^2 \int_0^a dr r^4 = -\frac{16}{15}\pi^2 G\rho^2 a^5 = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{a}$$

Sometimes it is useful to characterize the size of a system that lacks a sharp boundary by quoting the gravitational radius, which is defined as

$$r_g \equiv \frac{GM^2}{|W|}$$

For a homogeneous sphere of radius a , $r_g = \frac{5}{3}a$.

From equation (2.28) the gravitational potential of a homogeneous sphere of radius a is

$$\Phi(r) = \begin{cases} -2\pi G\rho(a^2 - \frac{1}{3}r^2) & (r < a) \\ -\frac{4\pi G\rho a^3}{3r} & (r > a) \end{cases}$$

(c) Plummer model We might expect that in many spherical systems the density is roughly constant near the center, and falls to zero at large radii. The potential of a system of this type would be proportional to $r^2 + \text{constant}$ at small radii and to r^{-1} at large radii. A simple potential with these properties is the Plummer model

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}$$

The linear scale of the system that generates this potential is set by the Plummer scale length b , while M is the system's total mass.

From equation (B.53) for ∇^2 in spherical polar coordinates we have

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{3GMb^2}{(r^2 + b^2)^{5/2}}$$

Thus from Poisson's equation (2.10) we have that the density corresponding to the potential (2.44a) is

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{r^2}{b^2} \right)^{-5/2}$$

The potential energy of a Plummer model is

$$W = -\frac{3\pi GM^2}{32b}$$

Plummer (1911) used the potential-density pair that is described by equations (2.44) to fit observations of globular clusters. We shall encounter it again in §4.3.3a as a member of the family of stellar systems known as polytropes.

(d) Isochrone potential The position of a star orbiting in a Plummer potential cannot be given in terms of elementary functions. However, in Chapter 3 we shall see that all orbits are analytic in the isochrone potential

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}$$

2.3. Problemas Binney

2.4. Problemas Auxiliar 1

2.5. Problemas Tarea 1

1. Muestre que el potencial generado por una densidad superficial constante Σ en el plano $z = 0$, corresponde a $\Phi = 2\pi G\Sigma|z| + K$, con K una constante: a) Usando el teorema de Gauss b) Usando la ecuación de Poisson
2. Calcule la distribución de densidad que satisface la siguiente fórmula para la velocidad circular

$$v_c^2 = \frac{Gr_0^3}{r} \left[\ln \left(1 + \frac{r}{r_0} \right) - \arctan \left(\frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \right]$$

Compare con el perfil de densidad de una esfera isoterma.

3. Muestre que la energía potencial de un sistema esférico de masa finita en el cual la densidad satisface $\lim_{r \rightarrow 0} \rho r^{5/2} = 0$, puede escribirse como:

$$W = -\frac{G}{2} \int_0^\infty \left(\frac{M(r)}{r} \right)^2 dr$$

donde $M(r)$ es la masa al interior de un radio r .

4. a) Considere los potenciales de:

- Plummer:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}$$

- Isocrono:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{r^2 + b^2}}$$

Tomando $b = 1$ y $GM = 1$, escriba un código que grafique y compare las velocidades de rotación para ambos potenciales, para una masa puntual y para una distribución esférica homogénea (normalizada de forma que $v_c = 1$ para $r = 1$).

- b) Considere ahora los potenciales en leyes de potencia de:

- Hernquist:

$$\Phi(r) = -4\pi G\rho_0 a^2 \cdot \frac{1}{2(1 + r/a)}$$

- NFW:

$$\Phi(r) = -4\pi G \rho_0 a^3 \ln(1 + r/a)/r$$

Como antes, compare gráficamente las curvas de rotación que resultan de ambos perfiles, normalizando c/r a r/a .

Nota: Las velocidades de rotación las puede extraer tanto analíticamente como numéricamente a partir de los potenciales. Si es que lo hace de forma analítica, debe incluir su desarrollo.

Nota2: Demás está decir que los códigos deben ser incluidos en la entrega. La elección del lenguaje de programación es en principio libre y puede usar las librerías externas que desee, pero ojalá sea fácilmente reproducible.

3. Órbitas estelares

3.1. Órbitas casi circulares: epiciclos y elipsoide de velocidad

En las galaxias de disco, muchas estrellas se encuentran en órbitas casi circulares, por lo que es útil derivar soluciones aproximadas de las ecuaciones

$$\ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} \quad (20)$$

donde

$$\Phi_{\text{eff}} \equiv \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2} \quad (21)$$

que sean válidas para tales órbitas. Definimos

$$x \equiv R - R_g, \quad (22)$$

donde R_g (L_z) es el radio del centro de guía para una órbita de momento angular L_z

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g, 0)} = \frac{L_z^2}{R_g^3} = R_g \dot{\phi}^2$$

Así $(x, z) = (0, 0)$ son las coordenadas en el plano meridional del mínimo en Φ_{eff} . Cuando desarrollamos Φ_{eff} en una serie de Taylor sobre este punto, obtenemos

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi_{\text{eff}}(R_g, 0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} z^2 + O(xz^2) \quad (23)$$

Tenga en cuenta que el término que es proporcional a xz desaparece porque se supone que Φ_{eff} es simétrico con respecto a $z = 0$. Las ecuaciones de movimiento (82) se vuelven muy simples en la aproximación epicíclica en la que despreciamos todos los términos en Φ_{eff} de orden xz^2 o potencias mayores de x y z . Definimos dos nuevas cantidades

$\kappa^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)}; \quad \nu^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)}$

(24)

pues entonces las ecuaciones (82) se convierten en

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\kappa^2 x, \\ \ddot{z} &= -\nu^2 z \end{aligned} \quad (25)$$

Según estas ecuaciones, x e z evolucionan como los desplazamientos de dos osciladores armónicos, con frecuencias κ y ν , respectivamente. Las dos frecuencias

κ y v se denominan **epiciclo o frecuencia radial** y **frecuencia vertical**. Si sustituimos Φ_{eff} de la ecuación (83) obtenemos

$$\kappa^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g,0)} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g,0)} + \frac{3}{R_g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g,0)} \quad (26)$$

$$v^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{(R_g,0)} \quad (27)$$

Dado que la **frecuencia circular** está dada por

$$\Omega^2(R) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R,0)} = \frac{L_z^2}{R^4} \quad (28)$$

la ecuación (88) puede escribirse

$$\kappa^2(R_g) = \left(R \frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2 \right)_{R_g} \quad (29)$$

Tenga en cuenta que los **períodos radial y azimutal** (ecuaciones BT 3.17 y 3.19) son

$$T_r = \frac{2\pi}{\kappa} \quad ; \quad T_\psi = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (30)$$

Muy cerca del centro de una galaxia, donde la velocidad circular aumenta aproximadamente linealmente con el radio, Ω es casi constante y $\kappa \simeq 2\Omega$. En otros lugares, Ω declina con el radio, aunque rara vez más rápido que la disminución de Kepler, $\Omega \propto R^{-3/2}$, que produce $\kappa = \Omega$. Así, en general,

$$\Omega \lesssim \kappa \lesssim 2\Omega$$

Usando las ecuaciones (BT 3.19) y (30), es fácil mostrar que este rango es consistente con el rango de $\Delta\psi$ dado por la ecuación (BT 3.41) para el potencial isócrono.

Es útil definir dos funciones

$$A(R) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} - \frac{dv_c}{dR} \right) = -\frac{1}{2} R \frac{d\Omega}{dR}$$

$$B(R) \equiv -\frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} + \frac{dv_c}{dR} \right) = -\left(\Omega + \frac{1}{2} R \frac{d\Omega}{dR} \right)$$

donde $v_c(R) = R\Omega(R)$ es la velocidad circular en el radio R . Estas funciones están relacionadas con las frecuencias circular y epiciclo por

$$\Omega = A - B \quad ; \quad \kappa^2 = -4B(A - B) = -4B\Omega$$

Los valores que toman A y B en el radio solar se pueden medir directamente a partir de la cinemática de estrellas en la vecindad solar (BM §10,3,3) y se denominan constantes de Oort. Tomando valores para estas constantes de la Tabla 1,2, encontramos que la frecuencia del epíciclo en el Sol es $\kappa_0 = (37 \pm 3) \text{ kms}^{-1}\text{kpc}^{-1}$, y que la relación κ_0/Ω_0 en el Sol es

$$\frac{\kappa_0}{\Omega_0} = 2\sqrt{\frac{-B}{A - B}} = 1,35 \pm 0,05$$

En consecuencia, el Sol realiza alrededor de 1,3 oscilaciones en la dirección radial en el tiempo que tarda en completar una órbita alrededor del centro galáctico. Por lo tanto, su órbita no se cierra sobre sí misma en un marco de inercia, sino que forma una figura de roseta como las discutidas anteriormente para estrellas en potenciales esféricamente simétricos.

Las ecuaciones de movimiento (87) conducen a dos integrales, a saber, las hamiltonianas unidimensionales

$$H_R \equiv \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \kappa^2 x^2) \quad ; \quad H_z \equiv \frac{1}{2} (\dot{z}^2 + v^2 z^2) \quad (31)$$

de los dos osciladores. Por lo tanto, si la órbita de la estrella es lo suficientemente circular como para justificar nuestro truncamiento de la serie para Φ_{eff} (ecuación (85)), entonces la órbita admite tres integrales de movimiento: H_R , H_z y p_ϕ . Todas estas son integrales aislantes.

De las ecuaciones (84), (86), (87) y (31) vemos que el hamiltoniano de tal estrella se compone de tres partes:

$$H = H_R(R, p_R) + H_z(z, p_z) + \Phi_{\text{eff}}(R_g, 0)$$

Por lo tanto, las tres integrales de movimiento pueden elegirse igualmente como (H_R, H_z, p_ϕ) o (H, H_z, p_ϕ) , y en el último caso H_z , que es una integral clásica, está jugando el papel de la tercera integral.

Ahora investigamos qué nos dicen las proporciones de las frecuencias κ, Ω y v sobre las propiedades de la galaxia. En la mayoría de los puntos en un disco galáctico típico (incluyendo la vecindad solar) $v_c \simeq \text{constante}$, y de (29) es fácil mostrar que en este caso $\kappa^2 = 2\Omega^2$. En coordenadas cilíndricas, la ecuación de Poisson para una galaxia axisimétrica es

$$\begin{aligned} 4\pi G\rho &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \\ &\simeq \frac{1}{R} \frac{dv_c^2}{dR} + v^2 \end{aligned}$$

donde en la segunda línea hemos aproximado el lado derecho por su valor en el plano ecuatorial y usamos la ecuación (89). Si la distribución de masa fuera esférica, tendríamos $\Omega^2 \simeq GM/R^3 = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}$, donde M es la masa y $\bar{\rho}$ es la densidad media dentro de la esfera de radio R alrededor del centro galáctico. Del gráfico de la velocidad circular de un disco exponencial que se muestra en la figura 2.17, sabemos que esta relación no está lejos de ser correcta incluso para un disco plano. Por lo tanto, en un punto típico de una galaxia como la Vía Láctea

$$\frac{v^2}{\kappa^2} \simeq \frac{3}{2}\rho/\bar{\rho}$$

That is, the ratio v^2/κ^2 is a measure of the degree to which the galactic material is concentrated towards the plane, and will be significantly greater than unity for a disk galaxy. From Table 1.1 we see that at the Sun $\rho \simeq 0.1 \text{M}_\odot \text{pc}^{-3}$, so the Sun's vertical period of small oscillations is $2\pi/v \simeq 87 \text{Myr}$. For $v_c = 220 \text{km s}^{-1}$ and $R_0 = 8 \text{kpc}$ (Table 1.2) we find $\bar{\rho} = 0.039 \text{M}_\odot \text{pc}^{-3}$. Equation (3.89) then yields $v/\kappa \simeq 2.0$ for the Sun.

From equation (3.88) it is clear that we expect $\Phi_{\text{eff}} \propto z^2$ only for values of z small enough that $\rho_{\text{disk}}(z) \simeq \text{constant}$, i.e., for $z \ll 300 \text{pc}$ at R_0 . For stars that do not rise above this height, equation (3.78b) yields

$$z = Z \cos(\nu t + \zeta)$$

where Z and ζ are arbitrary constants. However, the orbits of the majority of disk stars carry these stars further above the plane than 300pc (Problem 4.23). Therefore the epicycle approximation does not provide a reliable guide to the motion of the majority of disk stars in the direction perpendicular to the disk. The great value of this approximation lies rather in its ability to describe the motions of stars in the disk plane. So far we have described only the radial component of this motion, so we now turn to the azimuthal motion. Equation (3.78a), which governs the radial motion, has the general solution

$$x(t) = X \cos(\kappa t + \alpha),$$

where $X \geq 0$ and α are arbitrary constants. Now let $\Omega_g = L_z/R_g^2$ be the angular speed of the circular orbit with angular momentum L_z . Since $p_\phi = L_z$ is constant, we have

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{R^2} = \frac{L_z}{R_g^2} \left(1 + \frac{x}{R_g}\right)^{-2} \\ &\simeq \Omega_g \left(1 - \frac{2x}{R_g}\right) \end{aligned}$$

Substituting for x from (3.91) and integrating, we obtain

$$\phi = \Omega_g t + \phi_0 - \gamma \frac{X}{R_g} \sin(\kappa t + \alpha),$$

where

$$\gamma \equiv \frac{2\Omega_g}{\kappa} = -\frac{\kappa}{2B},$$

where the second equality is derived using (3.84). The nature of the motion described by these equations can be clarified by erecting Cartesian axes (x, y, z) with origin at the guiding center, $(R, \phi) = (R_g, \Omega_g t + \phi_0)$. The x and z coordinates have already been defined, and the y coordinate is perpendicular to both and points in the direction of rotation.⁵ To first order in the small parameter X/R_g we have

$$\begin{aligned} y &= -\gamma X \sin(\kappa t + \alpha) \\ &\equiv -Y \sin(\kappa t + \alpha) \end{aligned}$$

Equations (3.91) and (3.94) are the complete solution for an equatorial orbit in the epicycle approximation. The motion in the z -direction is independent of the motion in x and y . In the (x, y) plane the star moves on an ellipse called the epicycle around the guiding center (see Figure 3.7). The lengths of the semi-axes of the epicycle are in the ratio

$$\frac{X}{Y} = \gamma^{-1}$$

For a harmonic oscillator potential $X/Y = 1$ and for a Kepler potential $X/Y = \frac{1}{2}$; the inequality (3.82) shows that in most galactic potentials

⁵ In applications to the Milky Way, which rotates clockwise when viewed from the north Galactic pole, either $\hat{\mathbf{e}}_z$ is directed towards the south Galactic pole, or (x, y, z) is a left-handed coordinate system; we make the second choice in this book.

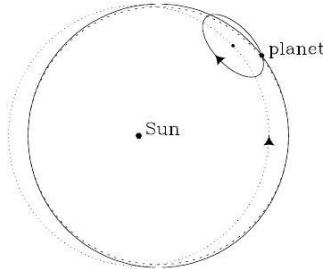


Figure 3.7 An elliptical Kepler orbit (dashed curve) is well approximated by the superposition of motion at angular frequency κ around a small ellipse with axis ratio $\frac{1}{2}$, and motion of the ellipse's center in the opposite sense at angular frequency Ω around a circle (dotted curve).

$Y > X$, so the epicycle is elongated in the tangential direction.⁶ From equation (3.85), $X/Y \simeq 0.7$ in the solar neighborhood. The motion around the epicycle

is in the opposite sense to the rotation of the guiding center around the galactic center, and the period of the epicycle motion is $2\pi/\kappa$, while the period of the guiding-center motion is $2\pi/\Omega_g$.

Consider the motion of a star on an epicyclic orbit, as viewed by an astronomer who sits at the guiding center of the star's orbit. At different times in the orbit the astronomer's distance measurements range from a maximum value Y down to X . Since by equation (3.95), $X/Y = \kappa/(2\Omega_g)$, these measurements yield important information about the galactic potential. Of course, the epicycle period is much longer than an astronomer's lifetime, so we cannot in practice measure the distance to a given star as it moves around its epicycle. Moreover, in general we do not know the location of the guiding center of any given star. But we can measure v_R and $v_\phi(R_0) - v_c(R_0)$ for a group of stars, each of which has its own guiding-center radius R_g , as they pass near the Sun at radius R_0 . We now show that from these measurements we can determine the ratio $2\Omega/\kappa$. We have

$$\begin{aligned} v_\phi(R_0) - v_c(R_0) &= R_0(\dot{\phi} - \Omega_0) = R_0(\dot{\phi} - \Omega_g + \Omega_g - \Omega_0) \\ &\simeq R_0 \left[(\dot{\phi} - \Omega_g) - \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_g} x \right] \end{aligned}$$

With equation (3.92) this becomes

$$v_\phi(R_0) - v_c(R_0) \simeq -R_0 x \left(\frac{2\Omega}{R} + \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_g}$$

⁶ Epicycles were invented by the Greek astronomer Hipparchus (190-120 BC) to describe the motion of the planets about the Sun. Hipparchus also measured the distance to the Moon and discovered the precession of the Earth's spin axis. Epicycles-the first known perturbation expansion - were not very successful, largely because Hipparchus used circular epicycles with $X/Y = 1$. If only he had used epicycles with the proper axis ratio $X/Y = \frac{1}{2}$! If we evaluate the coefficient of the small quantity x at R_0 rather than R_g , we introduce an additional error in $v_\phi(R_0)$ which is of order x^2 and therefore negligible. Making this approximation we find

$$v_\phi(R_0) - v_c(R_0) \simeq -x \left(2\Omega + R \frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_0}$$

Finally using equations (3.83) to introduce Oort's constants, we obtain

$$v_\phi(R_0) - v_c(R_0) \simeq 2Bx = \frac{\kappa}{\gamma}x = \frac{\kappa}{\gamma}X \cos(\kappa t + \alpha)$$

Averaging over the phases α of stars near the Sun, we find

$$\overline{[v_\phi - v_c(R_0)]^2} = \frac{\kappa^2 X^2}{2\gamma^2} = 2B^2 X^2$$

Similarly, we may neglect the dependence of κ on R_g to obtain with equation

$$\overline{v_R^2} = \frac{1}{2} \kappa^2 X^2 = -2B(A-B)X^2.$$

Taking the ratio of the last two equations we have

$$\frac{\overline{[v_\phi - v_c(R_0)]^2}}{\overline{v_R^2}} \simeq \frac{-B}{A-B} = -\frac{B}{\Omega_0} = \frac{\kappa_0^2}{4\Omega_0^2} = \gamma^{-2} \simeq 0,46.$$

In §4,4,3 we shall re-derive this equation from a rather different point of view and compare its predictions with observational data.

Note that the ratio in equation (3.100) is the inverse of the ratio of the mean-square azimuthal and radial velocities relative to the guiding center: by (3,95)

$$\frac{\overline{\dot{y}^2}}{\overline{\dot{x}^2}} = \frac{\frac{1}{2}(\kappa Y)^2}{\frac{1}{2}(\kappa X)^2} = \gamma^2$$

This counter-intuitive result arises because one measure of the RMS tangential velocity (eq. 3.101) is taken with respect to the guiding center of a single star, while the other (eq. 3,100) is taken with respect to the circular speed at the star's instantaneous radius.

This analysis also leads to an alternative expression for the integral of motion H_R defined in equation (3.86). Eliminating x using equation (3.97), we have

$$H_R = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 [v_\phi(R_0) - v_c(R_0)]^2.$$

3.2. Ecuaciones de Hill

Ref. Murray & Dermott 3.13

Para la pequeña partícula que se mueve alrededor de la masa primaria central en el problema restringido circular, las principales perturbaciones orbitales solo ocurrirán cuando se encuentre con la masa secundaria. Ya hemos visto ejemplos de tal comportamiento en las integraciones que se muestran en la Secc. 3,9; la mayor parte del tiempo la partícula se mueve en una órbita kepleriana imperturbable. Por lo tanto, en lugar de tratar con las ecuaciones completas del problema circular restringido de tres cuerpos, tiene más sentido trabajar con un sistema de ecuaciones que describa el movimiento de la partícula en la vecindad de la masa secundaria. Tal sistema fue derivado originalmente por Hill (1878) y lo utilizaremos en la

derivación de un mapa de encuentro en la Secc. 9.5.3 así como en nuestro estudio del pastoreo de anillos angostos en la Secc. 10.5.2.

Es posible derivar tal conjunto de ecuaciones aproximadas haciendo varias suposiciones y transfiriendo el origen del sistema de coordenadas a la segunda masa. Para relaciones de masa pequeñas $\mu_1 \approx 1$ y las ecuaciones planas de movimiento, las ecuaciones

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right], \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y\end{aligned}$$

se convierten en

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = - \frac{x}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - 1}{r_2^3} \quad (32)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = - \frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \quad (33)$$

Ahora transformamos el eje x tal que $x \rightarrow 1 + x$ dejando el eje y sin cambios, y sea $\Delta = r_2$. Dado que ahora estamos considerando el movimiento cerca del satélite (es decir, en la vecindad de los puntos L_1 y L_2), podemos suponer que x, y y Δ son pequeños cantidades de $\mathcal{O}(\mu_2^{1/3})$. Despreciando las potencias superiores de μ_2 tenemos $r_1 \approx (1 + 2x)^{1/2}$ y las ecuaciones (32) y (33) se pueden escribir

$$\boxed{\ddot{x} - 2\dot{y} = \left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^3} \right) x = \frac{\partial U_H}{\partial x}}, \quad (34)$$

$$\boxed{\ddot{y} + 2\dot{x} = - \frac{\mu_2}{\Delta^3} y = \frac{\partial U_H}{\partial y}}, \quad (35)$$

donde

$$U_H = \frac{3}{2}x^2 + \frac{\mu_2}{\Delta} \quad \text{y} \quad \Delta^2 = x^2 + y^2,$$

y la constante de Jacobi modificada, C_H , viene dada por

$$C_H = 3x^2 + 2\frac{\mu_2}{\Delta} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2.$$

Podemos comparar esto con la constante de Jacobi en el problema completo estableciendo $n = 1$ e ignorando el movimiento z en la ecuación. (3.29). Esto da

$$C_J = x^2 + y^2 + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2.$$

Las ecuaciones (74) y (75) se denominan ecuaciones de Hill y se derivaron por primera vez en relación con el trabajo de Hill sobre la teoría lunar.

Inspección de la ecuación (74) revela que la fuerza radial desaparece cuando $3\Delta^3 = \mu_2$, expresando el equilibrio entre la fuerza de marea y la atracción mutua (cf. Secc. 4.6). Esto lleva a la definición de la **esfera de Hill** como la esfera de radio

$$\Delta_H = \left(\frac{\mu_2}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

que rodea la masa secundaria (cf. Ec. (3.75)).

3.3. Mareas

3.4. Los límites de Roche

El límite de Roche es el semieje mayor en el que las fuerzas de tensión que actúan sobre un satélite sin cohesión debido a las mareas son mayores que las fuerzas de compresión de la gravedad propia [Murray y Dermott, 1999]. Se puede calcular resolviendo el semieje mayor en el que una partícula en el ecuador de un satélite que gira sincrónicamente tiene aceleración cero.

Para órbitas fuera del límite de Roche, domina la gravedad propia del satélite y la partícula permanece en la superficie del cuerpo. Por el contrario, para órbitas interiores al límite de Roche, domina la atracción gravitatoria del primario y la partícula se acelera alejándose de la superficie del satélite.

La forma del satélite juega un papel en la definición del límite de Roche. Dos definiciones comunes para el límite de Roche son el "límite rígido de Roche"(RRL) y el "límite fluido de Roche"(FRL). La suposición de que el satélite puede mantener una forma esférica rígida da lugar a la RRL. El semieje mayor de la RRL es [Murray y Dermott, 1999]:

$$a_{RRL} = R_p \left(\frac{3\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} \approx 1,442 R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3}.$$

Aquí R_p y ρ_p son el radio y la densidad aparente del primario, mientras que ρ_s es la densidad aparente del satélite.

La mayoría de los satélites no son esferas rígidas y, por lo tanto, el RRL es un límite inferior para un satélite "sin cohesión". En el extremo opuesto, el satélite se comporta como un fluido que puede fluir en forma de equilibrio hidrostático. La figura de equilibrio elipsoidal resultante para un satélite fluido es un esferoide alargado [Chandrasekhar, 1969]. Debido a que las partículas en el ecuador de un cuerpo alargado están ubicadas a una mayor distancia del centro del cuerpo en comparación con un cuerpo esférico, el componente de gravedad propia de la

aceleración se reduce al calcular el "límite de Roche fluido"(FRL) [Chandrasekhar, 1969]. Por lo tanto, el FRL está más alejado del primario que el RRL. El semieje mayor de la FRL es [Murray y Dermott, 1999]:

$$a_{FRL} \approx ,2,456R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3}$$

Aunque el material de los anillos planetarios es sólido, las interacciones entre las partículas del anillo pueden aproximarse a las de un fluido. Esto significa que el material del anillo que orbita dentro del FRL se ve continuamente interrumpido por las mareas y no puede acumularse en los satélites. Si el material del anillo se transporta más allá del FRL, donde las fuerzas de las mareas son más débiles, puede acumularse en satélites. Por lo tanto, el FRL marca el límite exterior aproximado de un anillo masivo.

Una vez formado, las fuerzas entre partículas dentro del satélite pueden evitar que alcance una forma de equilibrio hidrostático. La fricción interna puede permitir que incluso agregados de partículas sin fuerza mantengan formas no hidrostáticas. Por lo tanto, la ubicación en la que un satélite completamente formado puede romperse en un anillo puede ser hacia adentro de donde se formó. El RRL es aproximadamente el límite más interno donde un satélite tan débil podría mantenerse unido [Hesselbrock y Minton, 2017].

Para un cuerpo primario dado, el cálculo de los límites de Roche nos permite estimar dónde los anillos y los satélites pueden orbitar el cuerpo. El material del anillo está confinado a la órbita dentro del FRL. Si bien los satélites solo pueden acumularse fuera de la FRL, si tienen cohesión interna, pueden existir en cualquier lugar fuera de la RRL. Suponiendo que los satélites no tengan la fuerza, sino solo la cohesión suficiente para mantenerse unidos, ningún satélite debe orbitar dentro de la RRL, ya que se verían interrumpidos por las mareas [Black and Mittal, 2015]

A medida que las partículas dentro de los anillos chocan e intercambian energía y momento angular, cualquier anillo en órbita alrededor de un primario se expandirá con el tiempo debido a un proceso llamado "dispersión viscosa"[Goldreich y Tremaine, 1982, Lynden-Bell y Pringle, 1974]. Este proceso de esparcimiento hace que el material sea transportado tanto hacia el interior, hacia el primario, como hacia el exterior, hacia el FRL. Por lo tanto, a medida que el anillo se extiende, parte del material se transporta más allá de la FRL, donde puede acumularse en satélites [Charnoz et al., 2010, Crida y Charnoz, 2012, Hesselbrock y Minton, 2017, Rosenblatt y Charnoz, 2012, Salmon y Canup , 2017].

3.5. La zona de Roche

MD

Considere un pequeño satélite esférico de masa m_s y radio R_s en rotación síncrona alrededor de un planeta de masa m_p y radio R_p . El semieje mayor de la órbita circular del satélite se toma como a y su movimiento medio es n . Ya hemos visto en la Secc. 3.6 que los puntos de equilibrio lagrangiano inestables L_1 y L_2 se encuentran en la línea que conecta los centros del planeta y del satélite a una distancia d_L del satélite, donde

$$d_L = \left(\frac{m_s}{3m_p} \right)^{1/3} a. \quad (36)$$

La constante de Jacobi asociada con la curva crítica de velocidad cero que pasa por estos puntos se puede encontrar a partir de las ecuaciones de Hill (ver Sección 3.13) y es dada por $C_H = 9(m_s/3m_p)^{2/3}$. El área encerrada por esta curva se llama **lóbulo de Roche** y tiene una interpretación física importante.

Considere la estabilidad de una partícula que se encuentra tanto en el ecuador del satélite como en la línea que conecta los centros del planeta y del satélite. El problema es calcular el semieje mayor a_L en el que la partícula ya no está unida gravitacionalmente al satélite. Para una partícula en el centro del satélite, las fuerzas gravitacional y centrífuga están en equilibrio y $Gm_p/a^2 = n^2a$. Sin embargo, la partícula en el ecuador experimentará (i) un exceso de fuerza gravitacional o centrífuga debido a la cizalladura de la marea, (ii) una fuerza centrífuga debido a la rotación del satélite y (iii) una fuerza debido a la atracción gravitacional del satélite. Si la partícula está justo en equilibrio, estas fuerzas se equilibrarán y

$$-\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{Gm_p}{a^2} \right) R_s + n^2 R_s = \frac{Gm_s}{R_s^2}, \quad (37)$$

lo que implica que

$$\frac{3m_p}{m_s} = \left(\frac{a}{R_s} \right)^3. \quad (38)$$

Por lo tanto, en el caso de un pequeño satélite esférico, el límite de Roche, a_L (esférico), está dado por

$$a_L(\text{esférico}) = \left(\frac{3m_p}{m_s} \right)^{1/3} R_s = \left(\frac{3\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} R_p, \quad (39)$$

donde ρ_p y ρ_s son las densidades medias del planeta y el satélite, respectivamente. Comparación de las ecuaciones (36) y (39) muestran que en el límite de Roche, L_1 y L_2 apenas tocan la superficie del satélite. Si las dos densidades son aproximadamente iguales entonces $a_L(\text{esférico}) \approx 1,44R_p$ y escala con el radio del planeta. Sin embargo, si el satélite está en equilibrio hidrostático (o es una estrella), entonces en el límite de Roche el satélite llena su lóbulo de Roche. En este caso la Ec. (37)

necesita alguna modificación. Las fuerzas de marea y centrífuga son mayores, mientras que la fuerza gravitacional debida al satélite se reduce y el término para esta fuerza en la Ec. (37) se convierte en una mala aproximación. Un análisis más completo muestra que a_L (hidrostático) = $2,46R_p$ (Chandrasekhar 1987).

Todos los sistemas de anillos planetarios se encuentran en la zona de Roche entre a_L (esféricos) y a_L (hidrostáticos) (ver Fig. 10.1). Los satélites en órbitas progresivas dentro de la órbita síncrona con masas superiores a algún límite inferior evolucionarán hacia el planeta debido a la fricción de las mareas en escalas de tiempo inferiores a la edad del sistema solar (ver Secc. 4.9). Si estos satélites ingresan a la zona de Roche y son interrumpidos por las mareas, esto puede ayudar a explicar el origen y la ubicación radial de los anillos planetarios. Las únicas fuerzas atractivas en la Ec. (37) son gravitacionales, pero Aggarwal & Oberbeck (1974) calculan que un satélite con resistencia a la tracción

$$\mathcal{T} \geq (8/57)\pi G \rho_p \rho_s R_s^2$$

podría orbitar en la superficie del planeta. Por lo tanto, un satélite helado tan grande como $R_s \sim 200$ km podría orbitar en la superficie de Saturno, si el satélite tuviera una resistencia a la tracción $\mathcal{T} \geq 10^6 \text{Nm}^{-2}$. Sin embargo, los satélites cercanos a los planetas gigantes sufren un intenso bombardeo cometario, lo que lleva, en el caso de los satélites pequeños fuera de la zona de Roche, a la disrupción total y luego a la posterior reacreción, y en el caso de los satélites pequeños dentro de la zona de Roche, a la disrupción total, dispersión y formación de anillos (Smith et al. 1981).

3.6. Anillos y Satélites

Ref. MD cap 10

Está claro a partir de la figura 10.1 que existe una estrecha asociación entre la ubicación de los sistemas de anillos y las órbitas de los satélites pequeños. Sabemos por nuestro estudio de la evolución de las mareas de los satélites que los objetos en órbitas progresivas dentro de la órbita síncrona evolucionarán hacia adentro debido al efecto de las mareas que provocan en el planeta. También sabemos que la zona de Roche para cada planeta se encuentra en el rango de radios planetarios de 1,44 a 2,24. Por lo tanto, esperaríamos que los satélites traídos bajo los efectos de las mareas se rompan a medida que se acercan al planeta. En tales casos, los satélites actúan como fuentes de material del anillo. Sin embargo, los anillos también están sujetos a las perturbaciones gravitacionales de los restos del satélite. Estos pueden tener el efecto de confinar algunos anillos mientras causan la interrupción de otro material del anillo. Estos procesos para anillos angostos se discuten en la Secc. 10.5 a continuación. En todos estos casos, es importante reconocer el papel de la resonancia en la determinación de la estructura del anillo.

3.7. La esfera de la Hill y el límite de Roche

Ref. Apunte 3body

La esfera de Hill = volumen alrededor de m_2 interior a los LP's L_1 y L_2 . Este es el volumen donde las órbitas de los satélites son estables y está prohibido escapar a una órbita circunestelar.

El radio de la esfera Hill, R_H , es un parámetro dinámico muy importante. Por ejemplo, si está interesado en el movimiento de un satélite que orbita m_2 a distancias de $r_2 \ll R_H$, a menudo puede ignorar la gravedad del Sol. Esto se debe a que el satélite se encuentra en lo profundo del pozo de potencial m_2 , y su movimiento es esencialmente un movimiento de 2 cuerpos.

Sin embargo, si el satélite está en una órbita amplia alrededor de m_2 tal que $r_2 \sim R_H$, entonces no puedes ignorar el Sol y debes tratar esto como un problema de 3 cuerpos.

De manera similar, si la partícula P está en una órbita de baja energía alrededor de la primaria m_1 , y se acerca a m_2 dentro de una distancia $r_2 \sim R_H$, entonces es probable que haya grandes cambios en la órbita de P. Estos encuentros se conocen como dispersión gravitacional.

Pero si las separaciones siguen siendo grandes, es decir, $r_2 \gg R_H$, entonces los efectos de la dispersión gravitatoria son débiles y solo ocurren pequeños cambios de órbita (por lo general)... R_H también es aplicable a sistemas estelares binarios. Por ejemplo, R_H determina el volumen en el que los planetas podrían orbitar m_2 . O si la estrella m_2 se expande más allá de su esfera Hill, ¡entonces m_2 puede perder algo de masa!

Tarea

5. Utilice la ecuación. (2.82) para mostrar que una secundaria de baja masa ($m_2 \ll m_1$) tiene un radio Hill

$$R_H \simeq \left(\frac{m_2}{3m_1} \right)^{1/3} a$$

donde a es el semieje mayor del secundario.

6. El límite de Roche generalmente se considera como el semieje mayor a_R donde la marea gravitacional del primario apenas excede la gravedad propia del secundario, lo que hace que el secundario pierda masa.

El límite de Roche también se puede considerar como el semieje mayor a_R de un cuerpo cuyo radio físico apenas excede su radio de Hill R_H . Suponiendo que la primaria y la secundaria son esferas uniformes, demuestre que esta definición conduce a un límite de Roche de

$$a_R = \left(\frac{3\rho_1}{\rho_2} \right)^{1/3} R_1 = 1,44 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{1/3} R_1$$

donde R_1 es el radio principal.

En realidad, suponer que m_2 es una esfera uniformemente densa es una mala aproximación, ya que la marea de m_1 distorsionará m_2 .

Además, las densidades de m_1 y m_2 (que podrían ser un planeta o una estrella) no son uniformes.

Se obtiene una solución mejorada permitiendo que m_2 se distorsione por las mareas, pero aún en equilibrio hidrostático; eso altera el coeficiente numérico $1,44 \rightarrow 2,45$.

Además, si m_2 es un satélite rocoso o helado, entonces su resistencia a la tracción resiste la interrupción de las mareas, lo que empuja efectivamente a a_R hacia adentro y más cerca del primario.

No obstante, vale la pena señalar que todos los satélites del planeta principal residen en $a \gtrsim a_R$, mientras que todos los anillos planetarios residen en $a \lesssim a_R$.

Sin embargo, se pueden encontrar pequeños ($R \lesssim 10$ km) satélites dentro de los límites de Roche de los planetas gigantes.

Un ejemplo es Pan, que orbita en el anillo A principal de Saturno, que está cerca o en el interior del límite de Roche de Saturno.

3.8. Problemas Auxiliar 2

1. Encuentre un potencial con simetría esférica en el cual la trayectoria $r = ae^{b\psi}$ es posible.
2. Estabilidad de estado doble sincrónico: Considere un sistema planeta-satélite aislado, en el cual el momento angular asociado a la rotación del planeta es paralelo a su momento angular orbital. Suponga que el planeta tiene momento de inercia axial constante I , y aproxime el satélite por una masa puntual. Las 'interacciones de marea' conservan el momento angular total L , pero disminuyen la energía mecánica total E del sistema. Denote el radio de la órbita relativa por a y la masa reducida por $\mu = m_p m_s / (m_p + m_s)$ (con m_p, m_s las masas del planeta y el satélite respectivamente).
 - a) Escriba ecuaciones para L y E términos de m_p, m_s, μ , la tasa de rotación del planeta Ω y la frecuencia orbital ζ
 - b) Muestre que $\dot{L} = 0$ junto con $\dot{E} < 0$ implican que

$$(\zeta - \Omega)\dot{\Omega} > 0, \text{ y que } (\zeta - \Omega)\dot{\zeta} > 0$$

Y así si $\zeta > \Omega$, la órbita se encoje y el planeta sube en rotación, mientras que si $\zeta < \Omega$, la órbita se expande y el planeta baja en rotación.

c) Demuestre que

$$\frac{\dot{\Omega}}{\dot{\zeta}} = \frac{\mu a^2}{3I}$$

d) ¿Qué parámetro determina la estabilidad del estado en el cual $\Omega = \zeta$? Estime el valor de dicho parámetro para el sistema de Plutón-Carón.

3. Considere un disco circumestelar compuesto por partículas de prueba (sin masa) que se mueven en órbitas de baja excentricidad $e \ll 1$. ¿Cuál es el coeficiente entre la dispersión de velocidades de la dirección radial v/s la dirección azimutal.

3.9. Problemas Tarea 2

1. BT Problema 3.3

Muestre que la energía de una órbita circular en el potencial isócrono $\Phi(r) = -\frac{GM}{b+\sqrt{r^2+b^2}}$ es $E = -\frac{GM}{2a}$, donde $a = \sqrt{b^2+r^2}$. Si el momentum angular de esta órbita es $L_c(E)$, muestre que:

$$L_c = \sqrt{GMb} \left(x^{-1/2} - x^{1/2} \right); \quad x \equiv -\frac{2Eb}{GM}$$

2. BT Problema 3.14, Algo hicimos en clases

Muestre que en un [potencial con simetría esférica](#), la frecuencia vertical v y la frecuencias circular Ω , son iguales.

3. Revisar esa página buena de galaxias

a) Resuelva de manera numérica la evolución de las órbitas para los siguientes potenciales:

- $\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{k}{r} \right)$ use $k \in [1/2, 1]$. (aproximación post-Newtoniana)

- $\Phi(r) = -\frac{GM}{r - \frac{2GM}{c^2 r}}$ (potencial de Witta-Paczyński)

Graifique estas soluciones para distintos valores de E, L (en la medida que sea necesario), y fije sus propias condiciones iniciales de ser necesario. Para hacer la integración de las ecuaciones necesarias no tiene que programas los métodos desde 0 .

b) Suponga que se puede modelar el movimiento de una estrella como 3 osciladores armónicos desacoplados de forma que $x = a_x \cos(\omega_x t + \phi_x)$, $y = a_y \cos(\omega_y t + \phi_y)$ y $z = a_z \cos(\omega_z t + \phi_z)$, donde $\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z$ y $\frac{\omega_x}{\omega_y}, \frac{\omega_y}{\omega_z}, \frac{\omega_x}{\omega_z} \notin \mathbb{Q}$.

Argumente que eventualmente una estrella viajará arbitrariamente cerca de cualquier punto en el volumen $(-a_x, a_x) \times (-a_y, a_y) \times (-a_z, a_z)$. Si no puede mostrarlo explícitamente, muestre la plausibilidad de esta declaración graficando a distintos tiempos de integración las órbitas en 2D para dos elecciones de $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.

4. Sol:(9.2)

En este problema examinamos porque los sistemas de anillos en torno a planetas gigantes ocupan distancias que están a menos de ~ 2 radios planetarios.

a) Considere un satélite esférico perfectamente rígido de radio R_s , masa m_s y densidad ρ_s , orbitando un planeta de radio R_p , masa m_p y densidad ρ_p . Suponga que el periodo del satélite es igual a su periodo orbital. Tome el eje semi-mayor orbital del satélite como a_s y su excentricidad $e = 0$.

Imagine una partícula de prueba en la superficie de este satélite en rotación. La rotación del satélite y la gravedad del planeta tratan de eyectar la partícula. La única fuerza que intenta mantener la partícula es la gravedad del satélite, y para un a_s lo suficiente pequeño, esta no se podrá mantener en la superficie. Calcule el semi-eje mayor mínimo a_s^* en función de ρ_s, ρ_p y R_p .

b) Investigue (y describa) la noción de 'radio de Hill', y muestre como se relaciona el radio de Hill del satélite $r_H = (m_s/3m_p)^{1/3} a_s$ con su resultado de la parte a).

c) Considere ahora que el satélite está compuesto por un fluido gaseoso que tendrá una forma distorsionada por la influencia de marea del planeta y por su propia rotación (que sigue estando a la par con el periodo orbital).

Estime (no es necesario hacer aproximaciones excesivamente precisas) el eje semi-mayor a_s^{**} del satélite dentro del cual una partícula de prueba escapará su influencia. Se debe por lo menos decidir si es que a_s^{**} es mayor o menor a a_s^* .

4. Equilibrios de sistemas sin colisión

- Se puede considerar que los sistemas estelares no tienen colisiones.
- Consideraremos sistemas estelares modelo que serían equilibrios perfectos si t_{relax} fuera arbitrariamente grande.
 - Asumimos en todo momento que los sistemas estelares que examinamos consisten en N masas puntuales idénticas, que podrían ser estrellas.

4.1. De discreta a suave

Ref. Yale

Para sistemas con N grandes, es útil tratar de usar descripciones estadísticas del sistema (cf. Termodinámica)

Reemplazar una distribución de densidad **discreta** por una distribución de densidad **continua** nos resulta familiar debido a la **dinámica de fluidos y la física del plasma**.

Sin embargo, hay una diferencia importante:

$$\begin{array}{ll} \text{Plasma & Fluido} & \iff \text{fuerzas de corto alcance} \\ \text{Sistema Gravitacional} & \iff \text{fuerzas de largo alcance} \end{array}$$

Plasma: las fuerzas electrostáticas son fuerzas de largo alcance, pero debido al **Debye shielding** la carga total $\rightarrow 0$ en general r : dominan las fuerzas de corto alcance. El plasma puede ser sin colisiones.

Fluido: sistema de colisión dominado por fuerzas de van der Waals de corto alcance entre dipolos de moléculas. Siempre atractivo, pero para r grandes los dipolos desaparecen. Para r muy pequeños, la fuerza se vuelve fuertemente repulsiva.

Tanto para el **plasma** como para el **fluido**, la **energía** es una **variable extensiva**: la energía total es la suma de las energías de los subsistemas.

Para los **sistemas gravitatorios**, la energía es una variable **no extensiva**: los subsistemas se influyen entre sí mediante una interacción gravitacional de largo alcance.

FLUIDO

- camino libre medio de las moléculas \ll tamaño del sistema
- Las moléculas **chocan** con frecuencia, dando lugar a una **presión de colisión** bien definida. Esta presión equilibra la gravedad en **equilibrio hidrostático**.
- Presión relacionada con la densidad por **ecuación de estado**. es decir, el **EOS** determina el equilibrio (hidrostático).

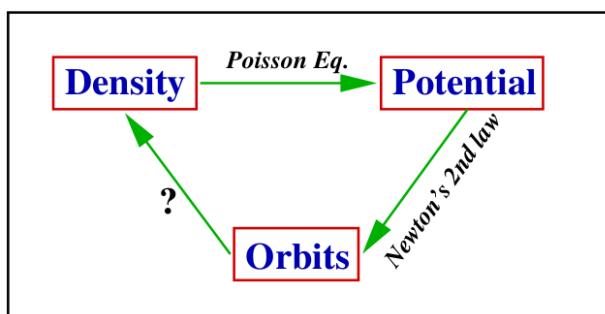
SISTEMA GRAVITACIONAL

- camino libre medio de las partículas \gg tamaño del sistema

- No hay presión de colisión, aunque la energía cinética de las partículas actúa como fuente de ‘presión’, equilibrando la energía potencial en el **equilibrio virial**.
- No hay equivalente de ecuación de estado. La presión se deriva de la energía cinética, pero la energía cinética se deriva de las órbitas reales dentro del potencial gravitacional, que a su vez se deriva de la distribución espacial de las partículas (**problema de autoconsistencia**)

El problema de la autoconsistencia

Dada una distribución de densidad $\rho(\vec{x})$, la **ecuación de Poisson** produce el potencial gravitatorio $\Phi(\vec{x})$. En este potencial puedo integrar órbitas usando las ecuaciones de movimiento de Newton. El **problema de autoconsistencia** es el problema de encontrar esa combinación de órbitas que reproduce $\rho(\vec{x})$.



Piense en el **problema de autoconsistencia** de la siguiente manera: Dado $\Phi(\vec{x})$, integre **todas** las órbitas posibles $\mathcal{O}_i(\vec{x})$, y encuentre los **pesos orbitales** w_i tal que $\rho(\vec{x}) = \sum w_i \mathcal{O}_i(\vec{x})$. Aquí $\mathcal{O}_i(\vec{x})$ es la **densidad** aportada a \vec{x} por la órbita i .

Escalas de tiempo para colisiones

Siguiendo la dinámica de fluidos y la física del plasma, reemplazamos nuestro discreto $\rho_N(\vec{x})$ con un suave y continuo $\rho(\vec{x})$. Luego, las órbitas se integran en el potencial suave correspondiente $\Phi(\vec{x})$.

En realidad, las órbitas verdaderas diferirán de estas órbitas, porque el **potencial verdadero no es suave**.

Además de las **colisiones directas** (partículas que se "tocan"), también tenemos colisiones de **largo alcance**, en las que la fuerza gravitatoria de largo alcance de la granularidad del potencial provoca pequeñas desviaciones.

Con el tiempo, estas desviaciones se acumulan para hacer inadecuada la descripción basada en el potencial suave.

Es importante distinguir entre interacciones de largo alcance, que solo provocan una pequeña desviación por interacción, e interacciones de corto alcance, que provocan una desviación relativamente grande por interacción.

Colisiones Directas

Considere un sistema de tamaño R que consta de N cuerpos idénticos de radio r .

La sección transversal para una colisión directa es $\sigma = 4\pi r^2$

El camino libre medio de una partícula es $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$, siendo $n = \frac{3N}{4\pi R^3}$ la densidad numérica de los cuerpos

$$\frac{\lambda}{R} = \frac{4\pi R^3}{3N4\pi r^2 R} \simeq \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{1}{N}$$

Se necesita un tiempo de cruce $t_{\text{cross}} \sim R/v$ para cruzar el sistema, por lo que la escala de tiempo para las colisiones directas es

$$t_{\text{coll}} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{1}{N} t_{\text{cross}}$$

Ejemplo:

Una galaxia como la Vía Láctea tiene $R = 10\text{kpc} = 3,1 \times 10^{17} \text{ km}$, $v \simeq 200 \text{ km s}^{-1}$, $N \simeq 10^{10}$, y r es aproximadamente el radio del Sol ($r = 6,9 \times 10^5 \text{ km}$). Esto produce $\lambda = 2 \times 10^{13} R$. En otras palabras, ¡una colisión directa ocurre en promedio solo una vez cada 2000 mil millones de cruces! El tiempo de cruce es $t_{\text{cross}} = R/v = 5 \times 10^7 \text{ yr}$, por lo que $t_{\text{coll}} \simeq 10^{21} \text{ yr}$. ¡Esto es aproximadamente 10^{11} veces la edad del Universo!

Tiempo de relajación I

Ahora que hemos visto que las colisiones directas son completamente despreciables, centrémonos en los encuentros.

Considere una vez más un sistema de tamaño R que consta de N partículas idénticas de masa m . Considere una de esas partículas cruzando el sistema con velocidad v . Como veremos más adelante, un valor típico para la velocidad es

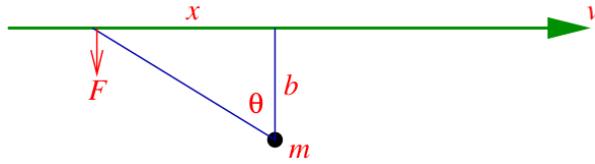
$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{GNm}{R}}$$

Queremos calcular cuánto tiempo pasa antes de que el efecto acumulativo de muchos encuentros le haya dado a nuestra partícula una energía cinética $E_{\text{kin}} \propto v^2$ en la dirección perpendicular a su movimiento original del orden de su energía cinética inicial.

Tenga en cuenta que para un encuentro suficientemente cercano, esto puede ocurrir en un solo encuentro. Trataremos este caso por separado y llamaremos a tal encuentro encuentro cercano.

Tiempo de relajación II

Primero considere un solo encuentro



Aquí b es el parámetro de impacto, $x = vt$, con $t = 0$ en la aproximación más cercana, y $\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}} = \left[1 + \left(\frac{vt}{b}\right)^2\right]^{-1/2}$.

En cualquier momento dado, la fuerza gravitacional en la dirección perpendicular a la dirección de la partícula es

$$F_{\perp} = G \frac{m^2}{x^2+b^2} \cos \theta = \frac{Gm^2}{b^2} \left[1 + \left(\frac{vt}{b}\right)^2\right]^{-3/2}$$

Esta fuerza F_{\perp} provoca una aceleración en la dirección \perp : $F_{\perp} = m \frac{dv_{\perp}}{dt}$

Ahora calculamos el Δv_{\perp} total integrado durante todo el encuentro, donde hacemos la suposición simplificada de que la partícula se mueve en línea recta. Esta suposición es OK siempre que $\Delta v_{\perp} \ll v$

$$\begin{aligned} \Delta v_{\perp} &= 2 \int_0^{\infty} \frac{Gm}{b^2} \left[1 + \left(\frac{vt}{b}\right)^2\right]^{-3/2} dt \\ &= \frac{2Gm}{b^2} \frac{b}{v} \int_0^{\infty} (1+s^2)^{-3/2} ds \\ &= \frac{2Gm}{bv} \end{aligned}$$

Como se discutió anteriormente, esto solo es válido mientras $\Delta v_{\perp} \ll v$.

Definimos el parámetro de impacto mínimo b_{\min} , que limita las interacciones de largo y corto alcance como: $\Delta v_{\perp}(b_{\min}) = v$

$$b_{\min} = \frac{2Gm}{v^2} \simeq R/N$$

Para una galaxia tipo MW, con $R = 10\text{kpc}$ y $N = 10^{10}$ tenemos que $b_{\min} \simeq 3 \times 10^7 \text{ km} \simeq 50R_{\odot}$

En un solo encuentro cercano $\Delta E_{\text{kin}} \sim E_{\text{kin}}$. La escala de tiempo para que ocurra un encuentro tan cercano se puede obtener a partir de la escala de tiempo para colisiones directas, simplemente reemplazando r por b_{\min} .

$$t_{\text{short}} = \left(\frac{R}{b_{\min}} \right)^2 \frac{t_{\text{cross}}}{N} = N t_{\text{cross}}$$

Ahora calculamos el número de encuentros de largo alcance por cruce. Aquí usamos que $(\Delta v_{\perp})^2$ se suma linealmente con el número de encuentros. (Nota: este no es el caso para Δv_{\perp} debido a las direcciones aleatorias).

Cuando la partícula cruza el sistema una vez, tiene $n(< b)$ encuentros con un parámetro de impacto menor que b , donde

$$n(< b) = N \frac{\pi b^2}{\pi R^2} = N \left(\frac{b}{R} \right)^2$$

Diferenciando con respecto a los rendimientos de b

$$n(b)db = \frac{2Nb}{R^2} db$$

Por lo tanto, el total de $(\Delta v_{\perp})^2$ por cruce debido a encuentros con el parámetro de impacto $b, b + db$ es

$$(\Delta v_{\perp})^2(b)db = \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \frac{2Nb}{R^2} db = 8N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \frac{db}{b}$$

Integrando sobre el parámetro de impacto

$$(\Delta v_{\perp})^2 = 8N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \int_{b_{\min}}^R \frac{db}{b} \equiv 8N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \ln \Lambda$$

con $\ln \Lambda = \ln \left(\frac{R}{b_{\min}} \right) = \ln N$ el logaritmo de Coulomb.

Así tenemos que

$$(\Delta v_{\perp})^2 = \left(\frac{GNm}{R} \right)^2 \frac{1}{v^2} \frac{8 \ln N}{N}$$

Sustituyendo el valor característico por v se obtiene que

$$\frac{(\Delta v_{\perp})^2}{v^2} \simeq \frac{10 \ln N}{N}$$

Por lo tanto, se necesitan cruces del orden de $N/(10 \ln N)$ para que $(\Delta v_{\perp})^2$ se vuelva comparable a v^2 . Esto define el tiempo de relajación.

$$t_{\text{relax}} = \frac{N}{10 \ln N} t_{\text{cross}}$$

4.2. La ecuación de Boltzmann sin colisiones

Fuente: B.T

La probabilidad de encontrar una estrella en el volumen del espacio de fase de seis dimensiones $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ alrededor de la posición \mathbf{x} y la velocidad \mathbf{v} . Por lo tanto, definimos la función de distribución (o DF para abreviar) f tal que $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ es la probabilidad de que en el momento t una estrella elegida al azar, digamos la estrella 1, tenga coordenadas de espacio de fase en el rango dado.

$$\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 1 \quad (40)$$

Sean $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ las coordenadas cartesianas. La probabilidad de encontrar 1 estrella en una región del espacio de fase ν

$$P = \int_{\nu} d^6\mathbf{w}f(\mathbf{w})$$

La ecuación análoga para la conservación de la probabilidad en el espacio de fase es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \cdot (f \dot{\mathbf{w}}) = 0 \quad (41)$$

mediante las ecs. de Hamilton obtenemos la ecuación de Boltzmann sin colisiones o de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (42)$$

La Ec. (42) se puede escribir de varias formas, usando ec.s de Hamilton:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \quad (43)$$

Usando el concepto de derivada convectiva o Lagrangiana

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{w}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \quad (44)$$

donde df/dt representa la tasa de cambio de la densidad de probabilidad local vista por un observador que se mueve a través del espacio de fase con una estrella. Comparando (42) con (43) podemos reescribir

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \quad (45)$$

y la Ec. (42) es simplemente

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (46)$$

El flujo a través del espacio de fase del fluido de probabilidad es incompresible; la densidad del espacio de fase f del fluido alrededor de una estrella dada siempre permanece igual.

4.3. Funciones de distribución esférica

Ref. Galaxy Book

Debido a la simplicidad de los sistemas esféricos, en la literatura se ha estudiado una gran variedad de funciones de distribución esféricas $f(E, L)$. Para encontrar funciones de distribución esféricas $f(E, L)$ es conveniente trabajar con definiciones de potencial, energía y función de distribución ligeramente diferentes a las que hemos usado hasta ahora. Definimos el **potencial relativo** como

$$\Psi = -\Phi + \Phi_0, \quad (47)$$

para alguna constante Φ_0 . También definimos la energía relativa \mathcal{E} como

$$\mathcal{E} = -E + \Phi_0 = \Psi - \frac{1}{2}v^2 \quad (48)$$

donde $v = |\mathbf{v}|$. Esta también es una energía específica (es decir, por unidad de masa), pero en lo que sigue simplemente nos referiremos a ella como una “energía”. La constante Φ_0 se elegirá en general de modo que $f > 0$ si $\mathcal{E} > 0$ y $f = 0$ cuando $\mathcal{E} \leq 0$. **Para sistemas aislados con $\Phi(\infty) = 0$ que se extienden a ∞** , podemos establecer $\Phi_0 = 0$ y simplemente tenemos que $\mathcal{E} = -E$, la **energía de enlace (unión)**. De la definición de la velocidad de escape en la Ecuación (G.B 4.15), también tenemos que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(v_{\text{esc}}^2 - v^2)$$

La ecuación de **Poisson** en términos del potencial relativo es

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi G \rho. \quad (49)$$

Además, a veces definiremos la normalización de la función de distribución para que sea tal que $\int d\mathbf{x}d\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = M$, la masa total del sistema en lugar de la unidad. Entonces tenemos que $\rho(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, que puede ser útil para simplificar expresiones .

4.3.1. DF ergódicos y la fórmula de inversión de Eddington

Ref. Galaxy Book Creo que se puede omitir

La solución más simple de la ecuación de Boltzmann sin colisiones para sistemas autoconsistentes es una **función de distribución que solo depende de la energía (relativa)**, $f \equiv f(\mathcal{E})$. Estas funciones de distribución se denominan **funciones de distribución ergódicas**. Demostraremos que existe una función de distribución ergódica única para cualquier distribución de masa esférica $\rho(r)$. Sin embargo, no se garantiza que esta función de distribución sea no negativa en todas

partes y, por lo tanto, no puede ser necesariamente una solución física cuando se considera por sí sola. Por lo tanto, no todas las distribuciones de masa esférica pueden instanciarse como funciones de distribución ergódicas.

Empezamos escribiendo la densidad $\rho(r)$ en términos de la función de distribución y cambiando las variables de v a \mathcal{E} usando la Ecuación (48)

$$\rho(r) = \int d\mathbf{v} f(r, \mathbf{v}) \\ = 4\pi \int dv v^2 f(r, v) \quad (50)$$

$$= 4\pi \int d\mathcal{E} \sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})} f(\mathcal{E}) \\ = 4\pi \int_0^\Psi d\mathcal{E} \sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})} f(\mathcal{E}) \quad (51)$$

donde sigue la segunda línea porque una función de distribución isotrópica solo depende de la magnitud de la velocidad y donde el límite inferior en la línea final es cero porque $f = 0$ para $\mathcal{E} \leq 0$. Para cualquier potencial esférico, Φ , y por lo tanto también Ψ , es una función monótona del radio (p. ej., Ecuación GB 3.30), por lo que podemos escribir ρ como una función $\rho(\Psi)$ de Ψ de una manera bien definida y la Ecuación (??) se puede escribir como

blabla

4.3.2. La esfera isoterma

Un enfoque diferente para resolver la ecuación de Boltzmann sin colisiones usando el teorema de Jeans es postular una forma para $f(\mathcal{E}, L)$ para un sistema esférico y [determinar a qué perfil de densidad corresponde](#). En este caso, no sabes lo que saldrá, ¡pero lo que obtienes puede ser útil! Este procedimiento se puede seguir para funciones de distribución autoconsistentes y no autoconsistentes: en el primer caso, [necesitamos usar la restricción de que la densidad \$\rho\(r\) = \int dv v^2 f\(\mathcal{E}, L\)\$ genera el potencial a través de la ecuación de Poisson](#), en el último caso uno simplemente calcula la energía usando un potencial externo.

Consideremos una función de distribución $f(\mathcal{E})$ de la siguiente forma

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{v^2}{2}}{\sigma^2}\right) \quad (52)$$

con parámetros (ρ_1, σ) . A diferencia de la mayoría de las funciones de distribución que analizamos en este capítulo, esta función de distribución se extiende hasta

$\mathcal{E} = -\infty$ (veremos más adelante que esto se debe a que este sistema tiene una masa infinita y, por lo tanto, todos las órbitas están unidas). Debido a que Ψ solo depende de r , la distribución de velocidades en cualquier r dado es una Gaussiana y la densidad obtenida al integrar sobre todas las velocidades es (ver Ecuación (50))

$$\rho(r) = \rho_1 \exp\left(\frac{\Psi}{\sigma^2}\right) \quad (53)$$

Para un sistema autoconsistente, una segunda relación entre $\rho(r)$ y Ψ proviene de la ecuación de Poisson (en términos de Ψ : Ecuación (49)) para un sistema esférico

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho.$$

Sustituyendo la Ecuación (53) en la ecuación de Poisson se obtiene

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 \rho.$$

Una solución de esta ecuación es

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi Gr^2},$$

que es la esfera isotérmica singular. Esta solución es "singular", porque diverge como $r \rightarrow 0$. Es isotérmica, porque la distribución de velocidad, la distribución de probabilidad condicional $p(v | r)$ de velocidad en un radio dado r , en cualquier radio es una Gaussiana esférica con dispersión σ , que se puede ver directamente de la Ecuación (52):

$$\begin{aligned} p(\mathbf{v} | r) &\propto \frac{f(\mathbf{v}, r)}{f(r)} \\ &= \frac{\rho_1 / \left[(2\pi\sigma^2)^{3/2} \right] \exp\left(\frac{\Psi - v^2}{\sigma^2}\right)}{\rho_1 \exp\left(\frac{\Psi}{\sigma^2}\right)} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

De la Ecuación (53), encontramos el potencial

$$\Phi(r) = 2\sigma^2 \ln r + \text{constante}$$

y la velocidad circular $v_c(r)$ es

$$v_c(r) = \sqrt{2}\sigma$$

La esfera isotérmica singular corresponde por tanto a la función de distribución de una distribución esférica de materia que da lugar a una curva de rotación plana. Por esta razón, la esfera isotérmica es un importante modelo de función de distribución. Esta correspondencia también demuestra el éxito del segundo enfoque para resolver la ecuación de Boltzmann sin colisiones. Simplemente postulando una forma simple para la función de distribución (Ecuación (52)) ¡encontramos un importante modelo aproximado autoconsistente para galaxias con una curva de rotación plana!

4.3.3. Funciones de distribución para cúmulos globulares

Perfiles de King

A pesar de su simplicidad, el modelo de esfera isotérmica anterior tiene problemas importantes si queremos usarlo para modelar sistemas estelares reales. El principal de ellos es el hecho de que tiene una masa infinita y, por lo tanto, para modelar un sistema real, tenemos que cortarlo de alguna manera. Una forma sencilla de lograr esto es modificar la Ecuación (52) a

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \left[\exp\left(\frac{\Psi - \frac{v^2}{2}}{\sigma^2}\right) - 1 \right] \quad (54)$$

para $\mathcal{E} > 0$ y cero en caso contrario. Esta familia de modelos se conoce como modelos King y son un modelo popular para cúmulos globulares (Michie 1963; Michie y Bodenheimer 1963; King 1966). La integración sobre la velocidad da la densidad en función de Ψ

$$\begin{aligned} \rho(\Psi) &= \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{2\Psi}} dv v^2 \left[\exp\left(\frac{\Psi - \frac{v^2}{2}}{\sigma^2}\right) - 1 \right] \\ &= \rho_1 \left[e^{\Psi} \operatorname{erf} \sqrt{\tilde{\Psi}} - \sqrt{\frac{4\tilde{\Psi}}{\pi}} \left(1 + \frac{2\tilde{\Psi}}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (55)$$

donde hemos definido $\tilde{\Psi} = \Psi/\sigma^2$. La ecuación de Poisson entonces se convierte en

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} \right) = -\frac{4\pi G \rho_1}{\sigma^2} r^2 \left[e^{\Psi} \operatorname{erf} \sqrt{\tilde{\Psi}} - \sqrt{\frac{4\tilde{\Psi}}{\pi}} \left(1 + \frac{2\tilde{\Psi}}{3} \right) \right] \quad (56)$$

Esta ecuación debe resolverse numéricamente, lo que podemos hacer comenzando en $r = 0$, asumiendo $d\Psi/dr = 0$ y comenzando desde algún valor elegido de $\Psi(0)$. La ecuación (56) es entonces una ecuación diferencial ordinaria que puede resolverse para dar $\Psi(r)$. Como ya hemos discutido, $\Psi(r)$ disminuye a medida que

r aumenta para cualquier potencial esférico y por lo tanto en algún $r = r_t$ tenemos que $\Psi(r_t) = 0$. De la Ecuación (55) es claro que $\rho = 0$ cuando $\Psi = 0$ y por lo tanto la densidad se vuelve cero en r_t (sigue siendo cero para $r > r_t$, porque tenemos que $f(\mathcal{E}) = 0$ para $\mathcal{E} \leq 0$ y $\mathcal{E} \leq 0$ cuando $\Psi < 0$). El **radio r_t es el radio de marea**. Una vez que hemos encontrado el radio de marea, podemos determinar el potencial central $\Phi(0)$, porque del segundo teorema de Newton discutido en la Sección GB 3.2 sabemos que $\Phi(r_t) = -GM/r_t$, donde $M = 4\pi \int dr r^2 \rho(r)$ es la masa total del sistema: $\Phi(0) = \Phi(r_t) - \Psi(0)$ de la Ecuación (47).

Además del radio de marea, otro radio típico para un modelo King es el **radio King r_0** definido como

$$r_0 \equiv \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}}$$

donde ρ_0 es la densidad central (finita) obtenida de la Ecuación (55). La relación entre la marea y el radio de King da la concentración, definida técnicamente como

$$c = \log_{10}(r_t/r_0).$$

Los modelos de King forman una secuencia tridimensional de masa, radio de marea y concentración. Este último también suele parametrizarse en términos de $W_0 = \Psi(0)/\sigma^2$, porque esto permite que el modelo de King para una masa, radio de marea y $\Psi(0)/\sigma^2$ para calcularse directamente mediante el procedimiento descrito anteriormente. De hecho, si examina cuidadosamente las ecuaciones anteriores, verá que la estructura fundamental del modelo, $\Psi(r)$ y $d\Psi(r)/dr$, puede calcularse trabajando en el parámetro escalado $W = \Psi/\sigma^2$. La solución obtenida ($W[r], dW/dr$) puede usarse con cualquier masa y radio de marea deseado simplemente escalando la masa y el radio de marea a los valores deseados.

Para tener una idea de cómo se ven estos modelos de King, calculemos el perfil de densidad para un rango de valores del potencial central escalado W_0 . Debido a que las escalas de masa (o densidad) y longitud no son importantes para la forma general de la distribución, graficamos el radio como una fracción de r_0 y la densidad como una fracción de la densidad central ρ_0 : 4.3.3

Vemos que para valores pequeños de W_0 , el modelo de King es esencialmente una esfera de densidad homogénea que se corta en el radio de la marea. Con valores grandes de W_0 , hay un núcleo pequeño y fuera del núcleo, la densidad cae como $\rho(r) \approx r^{-2}$ hasta que se alcanza el radio de marea. A partir de la definición de la función de distribución de King en la Ecuación (54), es claro que a **energías de enlace grandes $\mathcal{E} \gg 0$ la función de distribución es aproximadamente la de la esfera isotérmica** y, por lo tanto, la distribución de velocidades es una Gaussiana esférica con dispersión σ . A medida que aumenta r , $\mathcal{E} \rightarrow 0$ y la dispersión de la velocidad se aproxima a cero. Podemos ver este comportamiento si calculamos la

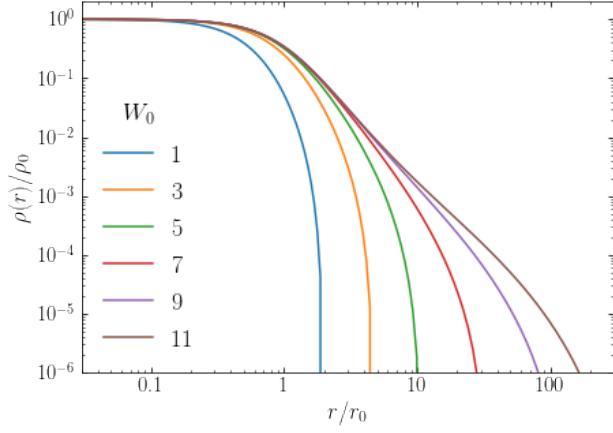


Figura 5: Figura

dispersión de la velocidad en función del radio para los modelos que se muestran arriba [4.3.3](#)

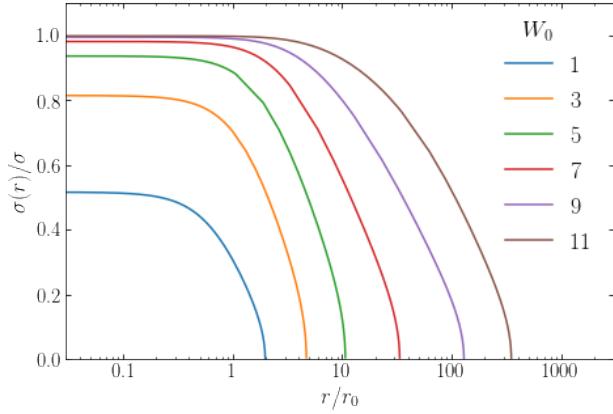


Figura 6: Figura

Hemos normalizado la dispersión de velocidad por el parámetro σ y la figura anterior deja en claro que este parámetro σ no es la dispersión de velocidad real del modelo en ninguna parte (excepto para W_0 grande, donde el núcleo la dispersión es aproximadamente σ , porque la función de distribución es muy cercana a la isotérmica allí).

Como el modelo de King es una función de distribución ergódica, la anisotropía de la velocidad es cero. Los modelos de Michie (Michie & Bodenheimer 1963) dan una generalización de los modelos de King que tienen una anisotropía distinta de cero.

4.3.4. Funciones de distribución anisotrópicas

Hasta ahora solo hemos considerado funciones de distribución ergódicas, que siempre son isotrópicas porque las velocidades ingresan a la energía específica E solo a través de $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2$ y la dispersión de la velocidad en diferentes direcciones, por lo tanto, tienen que ser iguales entre sí. Sin embargo, los sistemas estelares realistas suelen tener cierto grado de anisotropía. Los halos de materia oscura en el paradigma estándar de materia oscura fría son casi isotrópicos solo cerca de sus centros, y se polarizan radialmente en sus afueras ($\beta \approx 0,5$; Diemand et al. 2004; Wojtak et al. 2005). Las estrellas en cúmulos globulares y halos estelares también pueden tener distribuciones de velocidad no isotrópicas que no están bien capturadas por las funciones de distribución ergódica. Para investigar tales sistemas con más detalle, necesitamos, por lo tanto, una forma de crear modelos de función de distribución anisótropa.

Solo consideraremos funciones de distribución anisotrópicas para sistemas esféricos no giratorios. Tales funciones de distribución solo pueden depender de la magnitud $L = |\mathbf{L}|$ del momento angular específico además de la energía específica E , por lo que consideraremos funciones $f(E, L)$. Como antes, las funciones de distribución se expresan más fácilmente en términos de la energía relativa \mathcal{E} definida en la Ecuación (48) y, por lo tanto, consideraremos la función $f(\mathcal{E}, L)$.

En cuanto a las funciones de distribución ergódicas, una tarea importante de construcción de modelos es encontrar una función de distribución anisotrópica $f(\mathcal{E}, L)$ que genere un perfil de densidad dado $\rho(r)$. La ecuación que relaciona la función de distribución y la densidad que es análoga a la Ecuación (51) para el caso ergódico es ahora

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \int d\mathbf{v} f(r, \mathbf{v}) \\ &= 2\pi \int dv_r dv_t v_t f(r, v_r, v_t) \\ &= 4\pi \int_0^\Psi d\mathcal{E} \int_0^{\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E})}} dv_t v_t \frac{f(\mathcal{E}, rv_t)}{\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E}) - v_t^2}} \end{aligned} \quad (57)$$

donde $v_t = \sqrt{v_\theta^2 + v_\phi^2}$ y como en el caso ergódico requerimos conocimiento de $\Psi(r)$. A diferencia de la Ecuación (51), la Ecuación (57) no se puede invertir directamente, matemáticamente, porque una función de una sola variable, $\rho(r)$, no es suficiente para determinar una función de dos variables, $f(\mathcal{E}, L)$. Físicamente, lo que sucede es que, una vez que permitimos cualquier perfil de anisotropía, muchas funciones de distribución son consistentes con la misma densidad espacial.

Para avanzar en la inversión de la Ecuación (57), necesitamos restringir las posibles soluciones. Esto podría hacerse postulando formas específicas para $f(\mathcal{E}, L)$

y resolviendo la inversión, pero esto tiene la desventaja de parecer bastante ad hoc. Debido a que nuestro primer indicio de la ruptura de la suposición ergódica generalmente proviene de las mediciones de la anisotropía orbital $\beta(r)$, nos gustaría un procedimiento que nos guíe hacia soluciones con un perfil de anisotropía dado. Una forma de hacer esto es considerar la densidad definida por el lado derecho de la Ecuación (57) como una función no solo de r , sino como una función bidimensional de (Ψ, r) llamada la **densidad aumentada** (Dejonghe 1986)

$$\tilde{\rho}(\Psi, r) = 4\pi \int_0^{\Psi} d\mathcal{E} \int_0^{\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E})}} dv_t v_t \frac{f(\mathcal{E}, rv_t)}{\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E}) - v_t^2}} \quad (58)$$

La densidad real se obtiene como $\rho(r) = \tilde{\rho}(\Psi[r], r)$. Entonces podemos crear funciones de distribución anisotrópicas únicas para una densidad dada $\rho(r)$, postulando una forma para $\tilde{\rho}(\Psi, r)$ que satisface $\rho(r) = \tilde{\rho}(\Psi[r], r)$; debido a que $\tilde{\rho}(\Psi, r)$ es una función de dos variables, puede determinar de manera única $f(\mathcal{E}, L)$ y, de hecho, se puede demostrar que lo hace (Dejonghe 1986).

Para comprender mejor el significado de la densidad aumentada, podemos calcular las **dispersiones de velocidad radial y tangencial, σ_r y σ_t** . Tenemos que

$$\rho(r)\sigma_r^2(r) = 4\pi \int_0^{\Psi} d\mathcal{E} \int_0^{\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E})}} dv_t v_t f(\mathcal{E}, rv_t) \sqrt{2(\Psi-\mathcal{E}) - v_t^2}$$

y por lo tanto usando la Ecuación (58)

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\Psi, r) &= \sigma_r^2(r) \frac{d}{d\Psi} [\tilde{\rho}(\Psi, r)], \\ \text{o} \quad \sigma_r^2(r) &= \frac{1}{\rho(r)} \int_0^{\Psi} d\Psi' \tilde{\rho}(\Psi', r). \end{aligned} \quad (59)$$

De manera similar, para la dispersión de velocidad tangencial σ_t , tenemos que

$$\rho(r)\sigma_t^2(r) = 4\pi \int_0^{\Psi} d\mathcal{E} \int_0^{\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E})}} dv_t v_t^3 \frac{f(\mathcal{E}, rv_t)}{\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E}) - v_t^2}}$$

Para relacionar esto con la densidad aumentada, primero reescribimos la Ecuación (58) como

$$r^2 \tilde{\rho}(\Psi, r) = 4\pi \int_0^{\Psi} d\mathcal{E} \int_0^{\sqrt{2r^2(\Psi-\mathcal{E})}} dL L \frac{f(\mathcal{E}, L)}{\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E}) - L^2/r^2}}.$$

Entonces podemos ver que

$$\frac{d}{dr^2} [r^2 \tilde{\rho}(\Psi, r)] = \frac{1}{2} \sigma_t^2(r) \frac{d}{d\Psi} [\tilde{\rho}(\Psi, r)]$$

y así

$$\sigma_t^2(r) = \frac{2}{\rho(r)} \int_0^\Psi d\Psi' \frac{d}{dr^2} [r^2 \tilde{\rho}(\Psi', r)] \quad (60)$$

Por lo tanto, podemos calcular fácilmente las dispersiones de velocidad radial y tangencial dada la densidad aumentada usando las Ecuaciones (59) y (60). La anisotropía orbital se sigue directamente de su definición

$$\beta(r) = 1 - \frac{\int_0^\Psi d\Psi' \frac{d}{dr^2} [r^2 \tilde{\rho}(\Psi', r)]}{\int_0^\Psi d\Psi' \tilde{\rho}(\Psi', r)} \quad (61)$$

Por lo tanto, vemos que la densidad aumentada está directamente relacionada con el perfil de anisotropía de un modelo. Como cabría esperar del argumento de la inversión de Eddington, una densidad aumentada que es una función del potencial solo, $\tilde{\rho}(\Psi, r) \equiv \rho(\Psi)$, corresponde a un isótropo función de distribución y la ecuación de inversión (58) se reduce a la inversión de Eddington.

Desafortunadamente, invertir la Ecuación (58) para una densidad aumentada general es difícil (requiere transformaciones de Laplace y Mellin inversas y direc-tas combinadas; Dejonghe 1986). Sin embargo, podemos avanzar considerando densidades aumentadas que son funciones separables de Ψ y r :

$$\tilde{\rho}(\Psi, r) = f_\Psi(\Psi)g(r).$$

Entonces la anisotropía de la Ecuación (61) se reduce a la expresión más simple

$$\beta(r) = 1 - \frac{1}{g(r)} \frac{d}{dr^2} [r^2 g(r)]$$

4.4. Problemas

1. B&T 4-9 (Sol: 9.5)

Si consideramos la función de distribución DF:

$$f(\varepsilon, L) = \begin{cases} F \delta(L^2) (\varepsilon - \varepsilon_0)^{-1/2}, & \forall \varepsilon > \varepsilon_0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Donde F y ε_0 son constantes. Muestre que esta función de distribución genera un modelo con densidad

$$\rho(r) = \begin{cases} Cr^{-2}, & \forall r < r_0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Acá C es una constante y el potencial relativo en r_0 satisface $\psi(r_0) = \varepsilon_0$. Este es el único sistema estelar analítico conocido en el cual todas las estrellas están en órbitas perfectamente radiales. (Fridman & Polyachenko 1984).

2. B&T 8-11 (Sol: 9.6)

Un agujero negro de masa M se sitúa en el centro de un mar de partículas tri-dimensional infinito y homogéneo. Lejos del agujero, las partículas de prueba tienen una distribución de velocidad Maxwelliana

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{v_0}{(2\pi\sigma)^{3/2}} e^{-v^2/2\sigma^2}$$

Muestre que la distribución de densidad para las partículas de prueba no ligadas al agujero es

$$v(r)/v_0 = 2\sqrt{r_H/\pi r} + e^{r_H/r} \left[1 - \text{erf}\left(\sqrt{r_H/r}\right) \right]$$

Donde $r_H \equiv GM/\sigma^2$. Muestre que cerca del agujero ($r \ll r_H$), se tiene que $v(r) \propto r^{-1/2}$

3. Distribución Maxwelliana (Sol: 9.7)

Las velocidades de las estrellas en un sistema estelar están descritas por una distribución Maxwelliana tridimensional que es,

$$f(v) = A v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Aquí, A es una constante de normalización, m es la masa estelar, supuesta constante, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura del sistema. Verifique que la energía cinética estelar media sea $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$

4. B&T 4-25 (Sol:9.8)

Podemos estudiar la estructura vertical de un disco axisimétrico delgado despreciando todas las derivadas radiales y adoptando la forma $f = f(E_z)$ para la DF, donde

$$E_z \equiv \frac{1}{2}v_z^2 + \Phi(z).$$

(a) Usando la aproximación de disco delgado para la ecuación de Poisson dada por

$$\frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial^2 z} = 4\pi G \rho(R, z),$$

mostrar que si

$$f = \rho_0 (2\pi\sigma_z^2)^{-1/2} \exp(-E_z/\sigma_z^2)$$

La formula de Poisson se puede escribir

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 \zeta} = e^{-\phi},$$

donde $\phi \equiv \Phi/\sigma_z^2$, $\zeta \equiv z/z_0$, y $z_0 \equiv \frac{\sigma_z}{\sqrt{8\pi G \rho_0}}$.

(b) Al resolver esta ecuación sujeta a las condiciones de frontera $\phi(0) = d\phi/d\zeta|_0 = 0$, demuestre que la densidad ρ en el disco viene dada por (Spitzer 1942)

$$\rho(z) = \rho_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2}z/z_0 \right).$$

5. Estabilidad de sistemas sin colisión

6. Dinámica de disco y estructura espiral

Las galaxias contienen discos por la misma razón básica por la que los sistemas planetarios, los anillos planetarios, los discos de acreción y muchos otros sistemas astrofísicos son planos: el gas puede irradiar energía pero no momento angular, y para una distribución dada de momento angular a lo largo de un eje, el estado de la energía más baja es un disco plano perpendicular a ese eje.

En términos generales, los sistemas como las galaxias tienden a evolucionar hacia estados de menor energía. El teorema del virial nos dice que un sistema autogravitatorio puede perder energía a una masa constante M al contraerse a un radio más pequeño. La contracción uniforme de un disco giratorio no es permisible porque no conservaría el momento angular.

6.1. Fundamentos de la estructura espiral

La estructura espiral puede verse como una onda de densidad, una compresión periódica y rarefacción de la densidad de la superficie del disco que se propaga a través del disco de la misma manera que las ondas se propagan sobre la superficie del océano.

Estos conceptos llevaron a la hipótesis de Lin-Shu, que la estructura espiral es una onda de densidad estacionaria.

6.1.1. La geometría de los brazos espirales

6.1.2. La fuerza y el número de brazos

Las galaxias de disco están orientadas aleatoriamente a la línea de visión. Sin embargo, debido a que son delgadas, planas y aproximadamente axisimétricas, podemos usar la distribución del brillo de la superficie en el plano del cielo para deducir el brillo de la superficie que se vería de frente.

Considere una galaxia de disco con brillo de superficie frontal $I(R, \phi)$,

6.1.3. Brazos delanteros y traseros

Los brazos espirales se pueden clasificar por su orientación relativa a la dirección de rotación de la galaxia. Un brazo de arrastre (trailing) es aquel cuya punta exterior apunta en la dirección opuesta a la rotación galáctica, mientras que la punta exterior de un brazo delantero (Leading) apunta en la dirección de rotación (ver Figura 6.1.3).

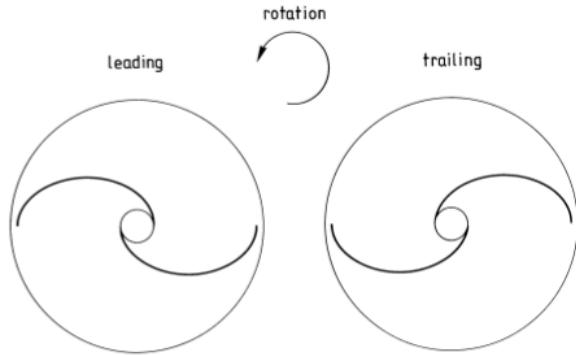


Figura 7: Leading and trailing arms

6.1.4. El pitch angle y el winding problem

El ángulo de paso (pitch angle) α en cualquier radio R es el ángulo entre la tangente al brazo y el círculo $R = \text{constante}$; por definición $0 < \alpha < 90^\circ$ (ver Fig. 6.1.4).

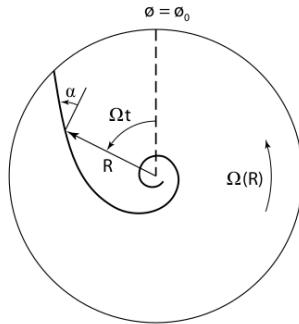


Figura 8: Cómo un brazo material termina en un disco que rota diferencialmente. La ley de rotación es $\Omega(R) \propto R^{-1}$.

Es útil pensar en el centro de cada brazo como una curva matemática en el plano de la galaxia, que escribimos en la forma $\phi + g(R, t) = \text{constante}$ donde t es el tiempo. Supongamos que la galaxia tiene una simetría rotacional de m veces, es decir, el patrón del brazo no cambia si rotamos la galaxia $2\pi/m$ radianes ($m > 0$). Entonces, una expresión más conveniente, que define las ubicaciones de todos los m brazos, es

$$m\phi + f(R, t) = \text{constante} \ (\text{mód } 2\pi), \quad (62)$$

donde $f(R, t) \equiv mg(R, t)$ es la función de forma. También es útil introducir el número de onda radial

$$k(R, t) \equiv \frac{\partial f(R, t)}{\partial R}$$

El signo de k determina si los brazos van delante o detrás. Si, como supondremos siempre, $m > 0$ y la galaxia gira en el sentido de ϕ creciente, entonces

$$\text{leading arms} \Leftrightarrow k < 0 \quad ; \quad \text{trailing arms} \Leftrightarrow k > 0.$$

El ángulo de inclinación (pitch angle) está dado por

$$\cot \alpha = \left| R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right| \quad (63)$$

donde la derivada parcial se evalúa a lo largo de la curva (62). De este modo

$$\cot \alpha = \left| \frac{kR}{m} \right|.$$

En algún momento inicial $t = 0$ pintamos una franja estrecha o un brazo radialmente hacia afuera a través del disco de una galaxia. La ecuación inicial de la franja es $\phi = \phi_0$, donde ϕ es el ángulo azimutal (Figura 6.1.4). El disco gira con una velocidad angular $\Omega(R)$, donde R es la distancia desde el centro del disco. Se dice que el disco está en rotación diferencial si $\Omega(R)$ no es independiente de R . Cuando el disco está en rotación diferencial, el brazo no permanece radial mientras el disco gira. La ubicación del brazo $\phi(R, t)$ se describe mediante la ecuación

$$\phi(R, t) = \phi_0 + \Omega(R)t$$

El ángulo de paso viene dado por la ecuación (63),

$$\cot \alpha = Rt \left| \frac{d\Omega}{dR} \right|$$

Para una galaxia con una curva de velocidad circular plana, $R\Omega(R) = v_c = 200 \text{ kms}^{-1}$, $R = 5 \text{ kpc}$, y $t = 10 \text{ Gyr}$, el ángulo de inclinación ahora sería $\alpha = 0,14^\circ$, ángulos de inclinación mucho más pequeños que los observados. Esta discrepancia se denomina problema del enrollamiento (winding problem): si el material que originalmente formaba un brazo espiral permanece en el brazo, la rotación diferencial de la galaxia enrolla el brazo en un tiempo corto en comparación con la edad de la galaxia.

6.1.5. El teorema anti-espiral

Establece que si una solución estacionaria de un conjunto de ecuaciones reversibles en el tiempo tiene la forma de una espiral descendente (trailing), entonces debe haber una solución idéntica en forma de espiral leading.

El teorema anti-espiral implica que las galaxias espirales no pueden entenderse simplemente como soluciones en estado estacionario de la ecuación de Boltzmann sin colisiones y la ley de la gravedad de Newton: el predominio de las espirales (trailing) que se arrastran exige un ingrediente adicional en la física. Las explicaciones más probables son que

- (i) las espirales no están en un estado estable (por ejemplo, son el resultado de una perturbación reciente), o de alguna manera se regeneran continuamente; o
- (ii) la forma espiral está influenciada por procesos que no son reversibles en el tiempo, como la disipación en el gas interestelar o la absorción en una resonancia de Lindblad.

6.2. Mecánica ondulatoria de discos que rotan diferencialmente

6.2.1. Resonancias

Las órbitas, como los resortes y los tambores, tienen frecuencias resonantes naturales. Si el campo gravitacional generado por la estructura espiral perturba una órbita cerca de una de sus frecuencias resonantes, entonces la respuesta de la órbita es fuerte, incluso cuando el campo perturbador es débil. Para investigar la respuesta de un disco estelar a fuerzas no axisimétricas, un primer paso esencial es localizar las órbitas resonantes.

Un potencial gravitatorio que es estacionario en un marco giratorio se puede escribir en la forma $\Phi_1(R, \phi, t) = \Phi(R, \phi - \Omega_p t)$, donde Ω_p es la velocidad patrón del potencial. Los ejemplos de sistemas que generan potenciales de esta forma incluyen las barras giratorias que se ven en los centros de muchas galaxias de disco, una galaxia satélite en una órbita circular en el plano del disco y cualquier patrón de estructura en espiral estacionario (es decir, cualquier estructura con una estructura bien definida velocidad del patrón). Los potenciales más complicados pueden considerarse como superposiciones de potenciales con diferentes patrones de velocidad.

6.2.2. Estabilidad local de discos que giran diferencialmente

Las relaciones de dispersión

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma |k| + v_s^2 k^2 \quad (64)$$

y

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma |k| + v_s^2 \mathcal{F} \quad (65)$$

para discos fluidos y estelares se pueden usar para determinar si un disco es localmente estable a las perturbaciones axisimétricas. Todo el análisis que hemos

hecho hasta ahora es para perturbaciones no axisimétricas estrechamente enrolladas, es decir, para $|kR/m| \gg 1$. Sin embargo, es fácil ver que las relaciones de dispersión (64) y (65) también se cumplen para perturbaciones axisimétricas ($m = 0$) siempre que $|kR| \gg 1$.

Considere primero el caso de un disco frío. Un disco de fluido frío tiene $v_s = 0$, por lo que para perturbaciones axisimétricas, la ecuación (64) se convierte en

$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma |k| \quad (66)$$

Para un disco estelar frío, $\sigma_R = 0$, y dado que $\mathcal{F}(s, 0) = 1$ la relación de dispersión (65) también se reduce a la ecuación (66)-como se esperaba , ya que un disco fluido frío es equivalente a un disco estelar frío.

A continuación, considere un disco fluido con una velocidad de sonido distinta de cero. Para perturbaciones axisimétricas, la ecuación (64) da

$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma |k| + v_s^2 k^2.$$

Una vez más, el disco es inestable si y solo si $\omega^2 < 0$, y la línea de estabilidad neutral es

$$\kappa^2 - 2\pi G \Sigma |k| + v_s^2 k^2 = 0. \quad (67)$$

El disco de fluido es estable si no hay solución de la ecuación (67) para $|k|$ positivo. Dado que la ecuación es cuadrática en $|k|$, se resuelve fácilmente y encontramos que la estabilidad axisimétrica requiere

$$Q \equiv \frac{v_s \kappa}{\pi G \Sigma} > 1 \quad (\text{para fluidos}).$$

La línea de estabilidad neutral definida por la ecuación (67) se dibuja en la figura 6.2.2 en términos de las relaciones adimensionales Q y $\lambda/\lambda_{\text{crit}}$.

6.2.3. Velocidad de grupo

Las ondas descritas en la Figura 6.2.3 son ondas viajeras y se propagan con una velocidad de grupo (Apéndice F.4).

La velocidad de grupo de un paquete de ondas en un medio dispersivo homogéneo es $v_g = d\omega(k)/dk$. De manera similar, cuando el medio no es homogéneo y la frecuencia de una onda de k dado depende de la posición, $\omega = \omega(k, R)$, la velocidad del grupo en el radio R es

$$v_g(R) = \frac{\partial \omega(k, R)}{\partial k}$$

siempre que la distancia sobre la que varía ω sea mucho mayor que la longitud de onda. Toomre (1969) fue el primero en señalar que esta relación podría aplicarse a

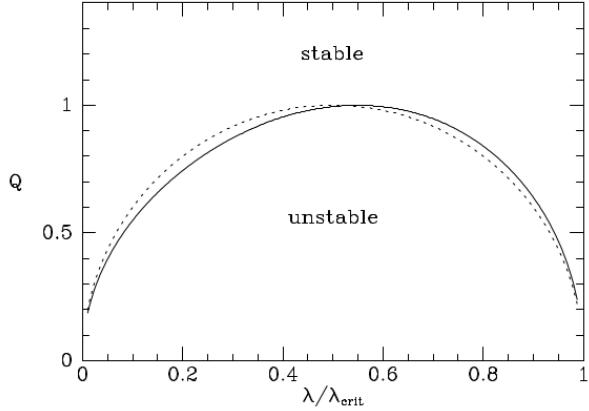


Figura 9: Curvas de estabilidad neutra para perturbaciones axisimétricas fuertemente enrolladas en un disco fluido (línea discontinua, de la ecuación (67)) y un disco estelar (línea continua, de la ecuación (??)).

la figura 6.2.3 para determinar la evolución de un paquete de ondas de densidad muy enrollado. En la siguiente subsección mostramos que la velocidad del grupo también determina la dirección y la velocidad del momento angular y el transporte de energía en el disco. La relación de dispersión para un disco de fluido (64) produce una velocidad de grupo

$$v_g(R) = \text{sgn}(k) \frac{|k| v_s^2 - \pi G \Sigma}{\omega - m \Omega}$$

En esta ecuación v_s , Σ y Ω son funciones de radio determinadas por el disco no perturbado, la frecuencia ω es una propiedad del paquete de ondas y k se determina a partir de estos por la relación de dispersión. Un paquete de ondas localizado alrededor de un radio R se propaga radialmente hacia afuera si $v_g(R) > 0$, y hacia adentro si $v_g(R) < 0$.

6.3. Barras p. 540/528

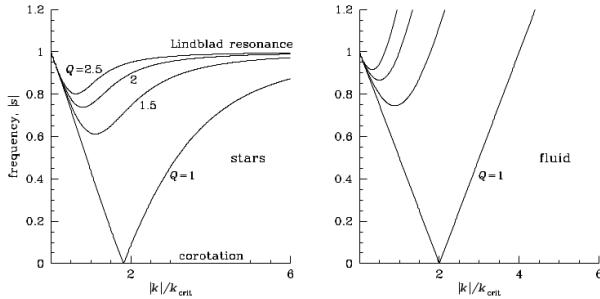


Figura 10: La relación de dispersión para perturbaciones estrechamente enrolladas en discos estelares (panel izquierdo) y fluidos (panel derecho). La coordenada horizontal es el número de onda k en unidades del número de onda crítico k_{crit} (Ec. (??)), y la coordenada vertical es la frecuencia adimensional s (Ec. (??)). Las curvas que se muestran son para $Q = 1, 1.5, 2, 2.5$. Ya que solo $|s|$ y $|k|$ se muestran, no hay distinción entre las ondas delanteras y traseras, o las ondas dentro y fuera de la corotación. Las ramas secundarias de la relación de dispersión (no mostradas) ocupan regiones estrechas cerca de $|s| = 2, 3, \dots$

7. Teoría cinética

El problema del agujero negro en ayudantía

8. Colisiones y Encuentros de Sistemas Estelares

Una consecuencia de esta inelasticidad es que las colisiones de galaxias a menudo conducen a mergers (fusiones), en las que el producto final de la colisión es un solo sistema estelar fusionado.

8.1. Fricción Dinámica

Un rasgo característico de las colisiones de sistemas estelares es la transferencia sistemática de energía de su movimiento orbital relativo a movimientos aleatorios de sus partículas constituyentes. Este proceso es más sencillo de entender en el caso límite de las fusiones menores, en las que un sistema es mucho más pequeño que el otro.

Al igual que el amortiguamiento de Landau, la fricción dinámica ilustra el hecho curioso de que pueden ocurrir procesos irreversibles en un sistema con ecuaciones de movimiento reversibles.

Se puede demostrar que la fricción dinámica surge de las resonancias entre las frecuencias orbitales del cuerpo sujeto y las estrellas.

8.2. Encuentros de alta velocidad

Una de las clases más importantes de interacción entre sistemas estelares son los encuentros de alta velocidad. Por “alta velocidad” queremos decir que la duración del encuentro, el intervalo durante el cual las fuerzas gravitatorias mutuas son significativas, es breve en comparación con el tiempo de cruce dentro de cada sistema.

8.2.1. Vuelta al equilibrio

Una vez que se han sumado los incrementos de las velocidades de todas las estrellas del sistema en cuestión, ya no se satisface el teorema del virial. Por lo tanto, el encuentro inicia un período de reajuste, que dura algunos cruces, durante los cuales el sistema sujeto se asienta en una nueva configuración de equilibrio. Si la perturbación es lo suficientemente débil como para que no escape ninguna estrella, se pueden deducir algunas propiedades de este nuevo equilibrio utilizando el teorema del virial. Sean las energías cinética y total iniciales \tilde{K}_0 y \tilde{E}_0 , respectivamente. Entonces el teorema del virial implica que

$$\tilde{K}_0 = -\tilde{E}_0. \quad (68)$$

Dado que el encuentro impulsivo aumenta la energía cinética en $\Delta\tilde{K}$ y deja la energía potencial sin cambios, la energía final es

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}_0 + \Delta\tilde{K}. \quad (69)$$

Una vez que el sistema en cuestión se ha asentado en un nuevo estado de equilibrio, la energía cinética final viene dada por el teorema del virial,

$$\tilde{K}_1 = -\tilde{E}_1 = -\left(\tilde{E}_0 + \Delta\tilde{K}\right) = \tilde{K}_0 - \Delta\tilde{K}$$

Por lo tanto, si el encuentro impulsivo aumenta la energía cinética en $\Delta\tilde{K}$, la relajación subsiguiente de regreso al equilibrio dinámico disminuye la energía cinética en $2\Delta\tilde{K}$.

8.3. Mergers

9. Problemas resueltos

9.1. P3 Auxiliar 2

Considere un disco circumestelar compuesto por partículas de prueba (sin masa) que se mueven en órbitas de baja excentricidad $e \ll 1$. ¿Cuál es el coeficiente entre

la dispersión de velocidades de la dirección radial v/s la dirección azimutal?

Solución:

Al hablar de la dispersión de velocidades en un disco axisimétrico, nos tenemos que imaginar co-rotando con el disco en una órbita circular. En un instante de tiempo dado, medimos las velocidades aparentes de todas las partículas cruzando nuestra posición. Luego consideramos alguna dirección específica \hat{x} , elevamos al cuadrado la magnitud en esa dirección, y promediamos sobre todas las partículas para obtener $\sigma_{\hat{x}^2}$. La gracia de nuestro problema es que el coeficiente radial-azimutal σ_r^2/σ_ϕ^2 es mágicamente independiente de la distribución de excentricidades (mientras estas sean pequeñas, y el material quede bien aproximado por un gas de partículas no colisionales).

Fijemos un radio R_0 y nuestra velocidad angular Ω_0 . Las partículas que cruzan nuestra posición y no co-rotan con nosotros, provienen de un rango de centros guías (en el lenguaje de la aproximación de epiciclos) que comparten el mismo origen que nuestra órbita circular. Aquellas masas que vienen de centros guías relativamente lejanos, tendrán que venir de órbitas con mayor excentricidad para alcanzarnos. Considere una partícula que cruza nuestra posición desde un centro guía arbitrario R_g que está a una distancia radial x_g de forma que $R_0 = R_g + x_g$. La órbita de esta partícula está descrita por sus excursiones radiales y azimutales respectivamente:

$$\begin{aligned}x &= X \cos(\kappa t + \psi) \\y &= Y \sin(\nu t + \psi)\end{aligned}$$

Pero para órbitas Keplerianas cerradas de baja excentricidad tenemos que $Y = -2X$, $\nu = \kappa$ (ver Binney & Tremaine, ecs (3.94)-(3.95)). Es decir, la frecuencia azimutal es igual a la frecuencia epicíclica (para que las órbitas sean cerradas) y además la amplitud de las excursiones azimutales es el doble que las excursiones radiales.

Calculemos primero la dispersión de velocidades radiales. Si fijamos nuestro análisis a un instante t_0 y usamos la barra para denotar el promedio sobre todas las partículas cruzando nuestra posición en dicho instante, tenemos que el promedio sobre todas las partículas originando de los centros guías padres es:

$$\begin{aligned}\sigma_r^2 &= \overline{\dot{x}^2} \\&= \overline{X^2 \kappa^2 \sin^2(\kappa t_0 + \psi)} \\&= \kappa^2 \overline{X^2 \sin^2(\kappa t_0 + \psi)}\end{aligned}$$

Ahora, suponiendo que las amplitudes y fases de las partículas son independientes entre ellas, podemos decir que

$$\begin{aligned}\sigma_r^2 &= \kappa^2 \overline{X^2 \operatorname{sen}^2(\kappa t_0 + \psi)} = \kappa^2 \overline{X^2} \cdot \underbrace{\overline{\operatorname{sen}^2(\kappa t_0 + \psi)}}_{=1/2} \\ \Rightarrow \sigma_r^2 &= \frac{\kappa^2}{2} \overline{X^2}\end{aligned}$$

Sin tener información explícita acerca de la distribución de excentricidades y ejes semimayores de las partículas, no podemos seguir desarrollando esta última expresión, pero como estamos intentando extraer un coeficiente entre ejes, la relación entre las amplitudes de las excursiones radiales-azimutales al final va a ser suficiente para lo que buscamos.

Procedemos entonces a calcular la dispersión en rotación recordando que la velocidad tangencial aparente de una partícula es realmente la diferencia entre velocidad azimutal en su espacio inercial y nuestra propia velocidad circula en el espacio inercial:

$$\begin{aligned}\sigma_\phi^2 &= \overline{(\dot{\phi}R_0 - R_0\Omega_0)^2} \\ &= R_0^2 \overline{(\dot{\phi} - \Omega_0)^2} = R_0^2 [\overline{(\dot{\phi} - \Omega_g) + (\Omega_g - \Omega_0)}]^2\end{aligned}$$

Pero acá podemos notar que por definición $\dot{y} = R_g(\dot{\phi} - \Omega_g)$, y que para la aproximación de epíciclos las desviaciones de rapidez circular dependen de la posición radial que tiene la partícula en el disco a primer orden, y luego $\Omega_0 - \Omega_g = \frac{d\Omega}{dR}x_g + o(x_g^2)$. Con esto tenemos

$$\sigma_\phi^2 \approx R_0^2 \left(\frac{\dot{y}}{R_g} - \frac{d\Omega}{dR}x_g \right)^2$$

Como $x_g = x(R_g)$, podemos usar nuestras ecuaciones para las excursiones en torno a un centro guía. Además para un disco Kepleriano, sabemos que en la aproximación de epíciclos se tiene que $\frac{d\Omega}{dR}|_{R_g} = -\frac{3\kappa}{2R_g}$, con lo que:

$$\begin{aligned}\sigma_\phi^2 &\approx R_0^2 \left[\frac{-2X\kappa \cos(\kappa t_0 + \psi)}{R_g} - \frac{d\Omega}{dR} X \cos(\kappa t_0 + \psi) \right]^2 \\ &= \left[-2X\kappa \cos(\kappa t_0 + \psi) + \frac{3\kappa}{2} X \cos(\kappa t_0 + \psi) \right]^2 \\ &= \kappa^2 \cdot \overline{\cos^2(\kappa t_0 + \psi)} \cdot \overline{X^2(3/2 - 2)^2}\end{aligned}$$

Donde de nuevo usamos la independencia entre fases y amplitudes de partículas. Con esto llegamos a que finalmente

$$\sigma_\phi^2 = \frac{\kappa^2}{8} \overline{X^2}$$

De forma que podemos dividir las dispersiones y sacar la raíz para encontrar nuestra respuesta final:

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_\phi} = 2$$

Es decir, a primera aproximación el coeficiente es constante e independiente de otros parámetros. Notemos además que el movimiento en el eje vertical, y por ende la dispersión, está desacoplada de los ejes planares del disco (las inclinaciones de órbitas no están relacionadas con las excentricidades, por lo menos mientras estas sean pequeñas). Este análisis es claramente más básico que la realidad, e ignora la evolución del disco, por ejemplo en lo que respecta a la evolución de las órbitas en el tiempo de un sistema no-collisional como el descrito, o por ejemplo como en un sistema no perfectamente no-collisional en donde hay viscosidad, la dispersión cruzada $\sigma_{r\phi}^2 \equiv \langle v_r v_\phi \rangle$ define un transporte de momento angular (y masa) a lo largo del disco.

9.2. T2 P4

a) En este problema examinamos porque los sistemas de anillos en torno a planetas gigantes ocupan distancias que están a menos de ~ 2 radios planetarios.

Considere un satélite esférico perfectamente rígido de radio R_s , masa m_s y densidad ρ_s , orbitando un planeta de radio R_p , masa m_p y densidad ρ_p . Suponga que el periodo del satélite es igual a su periodo orbital. Tome el eje semi-mayor orbital del satélite como a_s y su excentricidad $e = 0$.

Imagine una partícula de prueba en la superficie de este satélite en rotación. La rotación del satélite y la gravedad del planeta tratan de eyectar la partícula. La única fuerza que intenta mantener la partícula es la gravedad del satélite, y para un a_s lo suficiente pequeño, esta no se podrá mantener en la superficie. Calcule el semi-eje mayor mínimo a_s^* en función de ρ_s , ρ_p y R_p .

Solución:

Consideremos la estabilidad de una partícula que se encuentra tanto en el ecuador del satélite como en la línea que conecta los centros del planeta y del satélite. Nos piden encontrar el semieje mayor cuando la partícula ya no está “unida” gravitacionalmente al satélite. Para una partícula en el centro del satélite, las fuerzas gravitacional y centrífuga están en equilibrio. Pero en el ecuador la partícula experimentará:

- (i) un exceso de fuerza gravitacional o centrífuga debido a la marea,
- (ii) una fuerza centrífuga debido a la rotación del satélite y
- (iii) una fuerza debido a la atracción gravitacional del satélite.

La partícula de prueba es más inestable cuando se encuentra justo entre el planeta y el satélite. Entonces, la aceleración de marea del planeta que actúa para sacar la partícula de prueba es

$$\left| \frac{d}{da} \left(\frac{Gm_p}{a^2} \right) R_s \right| = 2 \left(\frac{Gm_p}{a^3} \right) R_s. \quad (70)$$

La aceleración centrífuga del satélite que hace girar la partícula de prueba es

$$\left(\frac{Gm_p}{a^3} \right) R_s. \quad (71)$$

Luego en el semi-eje mayor $a = a_s^*$, estas aceleraciones se deben sumar para equilibrar la atracción gravitacional del satélite, Gm_s/R_s^2 . Entonces sumando (70) y (71) e igualando a la parte gravitacional

$$3 \frac{Gm_p}{a_s^{*3}} R_s = \frac{Gm_s}{R_s^2} \quad (72)$$

y despejando obtenemos

$$a_s^{*3} = \frac{3Gm_p}{Gm_s} R_s^3 \quad \text{multiplicando por} \quad \frac{R_p^3}{R_p^3}$$

y como $\rho_p = \frac{m_p}{R_p^3}$ y $\rho_s = \frac{m_s}{R_s^3}$, nos queda que

$$a_s^{*3} = \frac{3\rho_p}{\rho_s} R_p^3$$

$$a_s^* = \left(\frac{3\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} R_p$$

(73)

b) Investigue (y describa) la noción de “radio de Hill”, y muestre como se relaciona el radio de Hill del satélite $r_H = (m_s/3m_p)^{1/3} a_s$ con su resultado de la parte a).

Solución:

En lugar de trabajar con las ecuaciones en torno al planeta, Hill (1878) pensó que tenía más sentido trabajar con un sistema de ecuaciones que describieran el movimiento de la partícula en la vecindad del satélite. El derivó este conjunto de ecuaciones aproximadas haciendo varias suposiciones y transfiriendo el origen del sistema de coordenadas a la masa del satélite, es decir, en la vecindad de los

puntos de Lagrange L_1 y L_2 , y conservó solo términos a primer orden y encontró las ecuaciones:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^3}\right)x = \frac{\partial U_H}{\partial x}, \quad (74)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\mu_2}{\Delta^3}y = \frac{\partial U_H}{\partial y}, \quad (75)$$

donde

$$U_H = \frac{3}{2}x^2 + \frac{\mu_2}{\Delta} \quad \text{y} \quad \Delta^2 = x^2 + y^2.$$

Luego la **esfera de Hill** se define como la esfera de radio r_H

$$r_H = \left(\frac{m_s}{3m_p}\right)^{1/3} a_s \quad (76)$$

que rodea la masa del satélite.

Cuando $a_s = a_s^*$, reemplazando (73) en (76) nos queda

$$r_H = \left(\frac{\rho_s}{3\rho_p}\right)^{1/3} \left(\frac{R_s}{R_p}\right) \left(\frac{3\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3} R_p$$

se cancelan términos y obtenemos que

$$r_H = R_s$$

es decir, el satélite simplemente llena su esfera de Hill (**lóbulo de Roche**). Cuando $a < a_s^*$, decimos que el satélite sobrelleña su lóbulo de Roche. Cuando $a > a_s^*$, decimos que el satélite no llena su lóbulo de Roche.

c) Considere ahora que el satélite está compuesto por un fluido gaseoso que tendrá una forma distorsionada por la influencia de marea del planeta y por su propia rotación (que sigue estando a la par con el periodo orbital).

Estime (no es necesario hacer aproximaciones excesivamente precisas) el eje semi-mayor a_s^{**} del satélite dentro del cual una partícula de prueba escapará su influencia. Se debe por lo menos decidir si es que a_s^{**} es mayor o menor a a_s^* .

Solución:

La partícula de prueba ahora se encuentra a una distancia adicional del centro del satélite:

$$R' = R_s \left[1 + \left(\frac{m_p}{m_s}\right) \left(\frac{R_s}{a_s^*}\right)^3 + \frac{\omega^2}{G\rho_s} \right],$$

donde el primer factor de mejora es producto de la marea elevada en el satélite acuoso por la acción del planeta, y el segundo factor de mejora proviene de la protuberancia inducida por el hecho de estar girando. Para un satélite síncrono, es decir que sigue estando a la par con el período orbital, tenemos

$$\omega^2 = \frac{Gm_p}{a_s^{*3}}.$$

Entonces

$$R' = R_s \left\{ 1 + \left[\frac{(4\pi+3)}{3} \right] \left(\frac{m_p}{m_s} \right) \left(\frac{R_s}{a_s^*} \right)^3 \right\}. \quad (77)$$

Como la partícula ahora tiene una nueva distancia R' , usando la Ec. (72) tenemos que

$$\begin{aligned} 3 \frac{m_p}{a_s^{*3}} &= \frac{m_s}{R'^3} \\ \Rightarrow 3 \frac{m_p}{m_s} \frac{R'^3}{a_s^{*3}} &= 1 \end{aligned} \quad (78)$$

y reemplazando R' de (77) en (78) nos da

$$3 \left(\frac{m_p}{m_s} \right) \left(\frac{R_s}{a_s^*} \right)^3 \left\{ 1 + \frac{4\pi+3}{3} \left(\frac{m_p}{m_s} \right) \left(\frac{R_s}{a_s^*} \right)^3 \right\}^3 = 1$$

que podemos escribir como

$$3x \left(1 + \frac{4\pi+3}{3}x \right)^3 = 1$$

si llamamos

$$x \equiv \left(\frac{m_p}{m_s} \right) \left(\frac{R_s}{a_s^*} \right)^3$$

Le podemos meter números de algún sistema conocido. Calculando esto nos da $x \approx 0,0995$. Entonces despejando

$$a_s^{**} = x^{-1/3} \left(\frac{m_p}{m_s} \right)^{1/3} R_s$$

donde $x^{-1/3} = 2,1580$, y multiplicando por (R_p/R_p) nos queda

$$a_s^{**} = 2,2 \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} R_p$$

(79)

*) El enunciado dice: En este problema examinamos porque los sistemas de anillos en torno a planetas gigantes ocupan distancias que están a menos de ~ 2 radios planetarios ... ¿entonces porqué ocupan estas distancias los anillos?

Respuesta:

Analizando el resultado obtenido en las ecuaciones (73) y (79), si consideramos el caso en que $\rho_p/\rho_s \approx 1$, deberíamos esperar que los cuerpos que se mantienen unidos principalmente por la fuerza de gravedad sean desgarrados por las fuerzas centrífugas y de marea si se encuentran a distancias inferiores a $[1,4 - 2,2]R_p$. Los cuerpos pequeños que se mantienen unidos principalmente por fuerzas de cohesión intermoleculares en lugar de la gravedad son no se ven afectados por esta interrupción. Por lo tanto, pueden existir muchos cuerpos pequeños: partículas de anillos, pequeños satélites dentro de $\sim 2R_p$, pero los cuerpos grandes se desgarran.

Esta zona de disruptión mareomotriz/centrífuga se denomina "Límite de Roche". El límite de Roche es el semieje mayor en el que las fuerzas de tensión que actúan sobre un satélite (sin cohesión debido a las mareas) son mayores que las fuerzas de compresión de la gravedad propia. Entonces para órbitas fuera del límite de Roche, domina la gravedad propia del satélite y la partícula permanece en la superficie del cuerpo. Por el contrario, para órbitas interiores al límite de Roche, domina la atracción gravitatoria del planeta y la partícula se acelera alejándose de la superficie del satélite.

Entonces los satélites traídos bajo los efectos de las mareas se rompen a medida que se acercan al planeta. En tales casos, los satélites actúan como fuentes de material del anillo. Todos los sistemas de anillos planetarios se encuentran en la zona de Roche entre a_s^* y a_s^{**} . Entonces el ingreso a la zona de Roche permite explicar el origen y la ubicación radial de los anillos planetarios.

La forma del satélite juega un papel en la definición del límite de Roche. Dos definiciones comunes para el límite de Roche son el "límite rígido de Roche" (RRL) y el "límite fluido de Roche" (FRL). La suposición de que el satélite puede mantener una forma esférica rígida da lugar a la RRL. El semieje mayor de la RRL es [Murray y Dermott, 1999]:

$$a_s^* = a_{RRL} = R_p \left(\frac{3\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} \approx 1,442 R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3}.$$

La mayoría de los satélites no son esferas rígidas y, por lo tanto, el RRL es un límite inferior para un satélite "sin cohesión". En el extremo opuesto, el satélite se comporta como un fluido que puede fluir en forma de equilibrio hidrostático. Debido a que las partículas en el ecuador de un cuerpo alargado están ubicadas a una mayor distancia del centro del cuerpo en comparación con un cuerpo esférico,

el componente de gravedad propia de la aceleración se reduce al calcular el "límite de Roche fluido"(FRL). Por lo tanto, el FRL está más alejado del planeta que el RRL. El semieje mayor de la FRL es:

$$a_s^{**} = a_{FRL} \approx ,2,456 R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3}$$

Aunque el material de los anillos planetarios es sólido, las interacciones entre las partículas del anillo pueden aproximarse a las de un fluido. Esto significa que el material del anillo que orbita dentro del FRL se ve continuamente interrumpido por las mareas y no puede acumularse en los satélites. Si el material del anillo se transporta más allá del FRL, donde las fuerzas de las mareas son más débiles, puede acumularse en satélites. Por lo tanto, el FRL marca el límite exterior aproximado de un anillo masivo.

Para el planeta, el cálculo de los límites de Roche nos permite estimar dónde los anillos y los satélites pueden orbitar el cuerpo. El material del anillo está confinado a la órbita dentro del FRL. Si bien los satélites solo pueden acumularse fuera de la FRL, si tienen cohesión interna, pueden existir en cualquier lugar fuera de la RRL.

9.3. T2 P1

a) Muestre que la energía de una órbita circular en el potencial isócrono

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{r^2 + b^2}} \quad (80)$$

es $E = -\frac{GM}{2a}$, donde $a = \sqrt{b^2 + r^2}$.

Solución:

La energía total de una partícula es:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv_c^2 + \Phi(r)$$

usando la rapidez de una partícula de masa despreciable en una órbita circular

$$v_c^2 = r|\mathbf{F}| = r \frac{d\Phi}{dr}$$

$$v_c^2 = \frac{GMr^2}{(b+a)^2 a}$$

y junto con (80) nos queda

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{GMr^2}{(b+a)^2a} \right) + \left(\frac{-GMm}{b+\sqrt{b^2+r^2}} \right)$$

considerando el caso en que $M \gg m$

$$\begin{aligned} E &= GM \left(\frac{r^2}{2(b+a)^2a} - \frac{1}{b+\sqrt{b^2+r^2}} \right) = GM \left(\frac{a^2-b^2}{2(b+a)^2a} - \frac{1}{b+\sqrt{b^2+r^2}} \right) \\ E &= GM \left(\frac{a^2-b^2}{2(b+a)^2a} - \frac{1}{b+a} \right) = GM \left(\frac{a^2-b^2-a(a+b)2}{2a(a+b)^2} \right) \\ E &= \frac{GM(a^2-b^2-2a^2-2ab)}{2a(a+b)^2} = \frac{GM(-a^2-b^2-2ab)}{2a(a+b)^2} \\ E &= -\frac{GM(a+b)^2}{2a(a+b)^2} \\ E &= -\boxed{\frac{GM}{2a}} \end{aligned}$$

b) Si el momentum angular de esta órbita es $L_c(E)$, muestre que:

$$L_c = \sqrt{GMb} \left(x^{-1/2} - x^{1/2} \right); \quad x \equiv -\frac{2Eb}{GM}$$

Solución:

Sabemos que el potencial efectivo es

$$\begin{aligned} \phi_{eff} &= \phi(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \\ \phi_{eff} &= -\frac{GM}{b+\sqrt{b^2+r^2}} - \frac{l^2}{2mr^2} \end{aligned} \tag{81}$$

derivando el potencial efectivo

$$\frac{\partial \phi_{eff}}{\partial r} = \frac{GM}{(b+\sqrt{b^2+r^2})} \frac{r}{\sqrt{b^2+r^2}} + \frac{l^2}{mr^3} = 0$$

reordenando y despejamos para obtener el valor de r .

Poniendo este valor de r en la ecuación (81), obtenemos el valor de ϕ_{eff} en Términos de G, M, b , y l .

En a) encontramos que

$$E = -\frac{GM}{2a} = K + \Phi_{eff}$$

$$E = \frac{1}{2}m\frac{GMr^2}{(b+a)^2a} - \frac{GM}{b+\sqrt{b^2+r^2}} - \frac{l^2}{2mr^2}$$

despejando a

$$a = -\frac{GM}{2E}$$

y obtenemos

$$L_C = \sqrt{GMb} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{-2Eb}{GM}}} - \sqrt{\frac{-2Eb}{GM}} \right)$$

y si llamamos a $x = \frac{-2Eb}{GM}$

$$\Rightarrow L_C = \sqrt{GMb} \left((x)^{-1/2} - (x)^{1/2} \right)$$

9.4. T2P2

Muestre que en un potencial con simetría esférica, la frecuencia vertical v y la frecuencias circular Ω , son iguales.

Solución:

En clases vimos que para órbitas casi circulares tenemos:

$$\ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} \quad (82)$$

con

$$\Phi_{eff} \equiv \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2} \quad (83)$$

Luego definimos

$$x \equiv R - R_g, \quad (84)$$

donde $R_g (L_z)$ es el radio del centro de guía para una órbita de momento angular L_z

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g, 0)} = \frac{L_z^2}{R_g^3} = R_g \dot{\phi}^2$$

Luego expandimos Φ_{eff} en Taylor

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi_{\text{eff}}(R_g, 0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} z^2 + O(xz^2) \quad (85)$$

y despreciamos términos cruzados y de orden mayor que 1, para obtener:

$$\kappa^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} ; \quad v^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} \quad (86)$$

pues entonces las ecuaciones (82) se convierten en

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\kappa^2 x, \\ \ddot{z} &= -v^2 z \end{aligned} \quad (87)$$

similar a osciladores armónicos, donde κ y v se denominan frecuencia radial y frecuencia vertical.

Si sustituimos Φ_{eff} de la ecuación (83) obtenemos

$$\kappa^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} + \frac{3}{R_g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g, 0)} \quad (88)$$

y

$$v^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} \quad (89)$$

Y la frecuencia circular está dada por

$$\Omega^2(R) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R, 0)} = \frac{L_z^2}{R^4} \quad (90)$$

Luego en coordenadas cilíndricas la ecuación de Poisson es

$$4\pi G\rho = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

y por (89)

$$4\pi G\rho = \frac{1}{R} \frac{d v_c^2}{d R^2} + v^2 \quad (91)$$

Si la distribución de masa es esférica tenemos que

$$\Omega^2 \simeq \frac{GM}{R^3} = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}$$

$$\Rightarrow 4\pi G\bar{\rho} = 3\Omega^2 \quad (92)$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad media dentro de la esfera sobre el centro galáctico. Igualando (91) con (92)

$$\Rightarrow 3\Omega^2 = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} v_c^2 + v^2$$

y como

$$\begin{aligned} v_c &= R\Omega \\ \Rightarrow 3\Omega^2 &= \frac{1}{R} \frac{d}{dR} R^2 \Omega^2 + v^2 \\ 3\Omega^2 &= \frac{1}{R} 2R\Omega^2 + v^2 \\ \Rightarrow 3\Omega^2 &= 2\Omega^2 + v^2 \\ \Rightarrow \Omega^2 &= v^2 \\ \therefore \boxed{\Omega = v} \end{aligned}$$

Ahora, en un comienzo me confundí y demostré que $\kappa = \Omega$. Dejaré el desarollo.

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \left. \frac{\partial^2 \phi_{\text{erf}}}{\partial R^2} \right|_{R_{g,0}} = \left. \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left[\phi + \frac{Lz^2}{2R^2} \right] \right|_{R_{g,0}} \\ \kappa^2 &= \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} \right|_{R_{g,0}} + 3 \frac{L_z^2 z}{R^4} \end{aligned}$$

como $L_z = \Omega R^2$

$$\kappa^2 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + 3\Omega^2$$

y como $\phi = \frac{GM}{R}$

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(\frac{GM}{R} \right) + 3\Omega^2 \\ \kappa^2 &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{GM}{R^2} \right) + 3\Omega^2 \\ \kappa^2 &= -2 \frac{GM}{R^3} + 3\Omega^2 \end{aligned}$$

Notemos que la frecuencia circular es

$$\Omega \equiv \frac{v_c}{R} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

$$\kappa^2 = -2\Omega^2 + 3\Omega^2$$

$$\kappa^2 = \Omega^2$$

$$\boxed{\kappa = \Omega}$$

9.5. B&T 4-9

Si consideramos la función de distribución DF:

$$f(\varepsilon, L^2) = \begin{cases} F\delta(L^2)(\varepsilon - \varepsilon_0)^{-1/2}, & \forall \varepsilon > \varepsilon_0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Donde F y ε_0 son constantes. Muestre que esta función de distribución genera un modelo con densidad

$$\rho(r) = \begin{cases} Cr^{-2}, & \forall r < r_0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Acá C es una constante y el potencial relativo en r_0 satisface $\psi(r_0) = \varepsilon_0$. Este es el único sistema estelar analítico conocido en el cual todas las estrellas están en órbitas perfectamente radiales.

Solución:

Sabemos que la densidad en general se relaciona con la DF a través de:

$$\rho(r) = \int f_r dv$$

Luego nuestro problema va a ser principalmente el de poder relacionar $f(\mathbf{v})$ con $f(\varepsilon, L^2)$ para tener la integral en un forma trabajable, y así recuperar la forma que se nos pide de la densidad. Partimos haciendo el cambio del vector (v_x, v_y, v_z) a esféricas, dejando la integral como:

$$\rho(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f_r(v, \theta, \phi) v^2 \sin(\theta) dv d\theta d\phi$$

Ahora podemos separar nuestra velocidad en sus componentes radiales y tangenciales de forma que $v^2 = v_r^2 + v_t^2$ y $v_r = v \cos(\theta), v_t = v \sin(\theta)$. Esta forma de separar las velocidades permite aislar el momentum angular y la energía ε de forma más fácil. Para convertir la integral tenemos que usar el teorema de cambio de variable y entender como se transforma entre nuestras coordenadas $(v, \theta, \phi) \rightarrow (v_r, v_t, \phi)$.

Ahora, de la definición de v_t, v_r , tenemos que la transformación inversa es $v = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$ y $\theta = \arctan\left(\frac{v_r}{v_t}\right)$. Con esto tenemos que el Jacobiano del cambio de variables es

$$J = \begin{bmatrix} \partial_{v_r} v & \partial_{v_t} v & 0 \\ \partial_{v_r} \theta & \partial_{v_t} \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v_r}{v} & -\frac{v_t}{v} & 0 \\ -\frac{v_t}{v^2} & \frac{v_r}{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esto tenemos que el determinante del Jacobiano es

$$|J| = \left| \frac{-v_r}{v} \cdot \frac{v_r}{v^2} - \frac{-v_t}{v} \cdot \frac{-v_t}{v^2} \right| = \frac{v_r^2}{v^3} + \frac{v_t^2}{v^3} = \frac{1}{v}$$

Con esto tenemos que

$$\begin{aligned} v^2 \sin(\theta) dv d\theta d\phi &= v \cdot \underbrace{v \sin(\theta)}_{v_t} |J| dv_r dv_t d\phi = v_t dv_r dv_t d\phi \\ \Rightarrow \rho(r) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_r(v_r, v_t, \phi) v_t dv_r dv_t d\phi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_r(v_r, v_t) v_t dv_r dv_t \end{aligned}$$

De la definición de L y de ϵ , podemos escribir estas cantidades en función de nuestras variables como $L = rv_t$ y $\epsilon = \psi - \frac{v_r^2}{2} - \frac{v_t^2}{2}$ (la independencia de ϕ de estos valores, justifica que la variable haya sido integrada como constante de la densidad). Con esto tenemos dos opciones: trabajar la integral usando la función de distribución como $f(\epsilon(v_r, v_t), L^2(v_t))$ o hacer nuevamente otro cambio de variables y dejar la integral en función de las variables ϵ, L^2 . Exploraremos la primera opción notando que como solo tenemos órbitas radiales podemos separar la integral y en realidad la energía solo dependerá de la velocidad radial (o viceversa la velocidad radial solo depende de la energía):

$$\rho(r) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon, L^2) v_t dv_r dv_t = 2\pi F \int_{-\infty}^{\infty} \delta(L^2) v_t dv_t \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon - \epsilon_0)^{-1/2} dv_r$$

Si decimos que $x = r^2 v_t^2$ ($dx = 2r^2 v_t dv_t$), la última expresión queda

$$\rho(r) = 2\pi F \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \frac{dx}{r^2} \int_0^{v_{\max}} (-v_r^2 + \psi + \epsilon_0)^{-1/2} dv_r = \frac{\pi F}{r^2} \int_0^{v_{\max}} (-v_r^2 + \psi + \epsilon_0)^{-1/2} dv_r$$

Sabemos que para $\epsilon > \epsilon_0$, la velocidad máxima será cuando la energía esté lo más baja posible en $\epsilon = \epsilon_0$ ($r = r_0$), valiendo $v_{\max} = \sqrt{2(\psi - \epsilon_0)}$

$$\rho(r) = \frac{\pi F}{r^2} \int_0^{v_{\max}} (-v_r^2 + \psi + \epsilon_0)^{-1/2} dv_r = \frac{\pi F}{\sqrt{2}r^2} \int_0^{\sqrt{2(\psi - \epsilon_0)}} \frac{1}{\sqrt{(-v_r^2 + \sqrt{2\psi + \epsilon_0^2})}} dv_r$$

Pero la integral tiene la forma conocida $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$, con lo que concluimos que

$$\rho(r) = \frac{\pi^2 F}{r^2 2\sqrt{2}}, \quad \forall r < r_0 (\epsilon > \epsilon_0)$$

Con lo que llegamos a que como $f = 0, \forall \epsilon < \epsilon_0$, si llamamos $C = \frac{\pi^2 F}{2\sqrt{2}}$, tenemos la forma que se pide en el enunciado. Vale notar que este es el único sistema estelar analítica conocido en el cual todas las estrellas están en órbitas perfectamente radiales.

9.6. B&T 8-11

Un agujero negro de masa M se sitúa en el centro de un mar de partículas tridimensional infinito y homogéneo. Lejos del agujero, las partículas de prueba tienen una distribución de velocidad Maxwelliana

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{v_0}{(2\pi\sigma)^{3/2}} e^{-v^2/2\sigma^2}$$

Muestre que la distribución de densidad para las partículas de prueba no ligadas al agujero es

$$v(r)/v_0 = 2\sqrt{r_H/\pi r} + e^{r_H/r} \left[1 - \text{erf} \left(\sqrt{r_H/r} \right) \right]$$

Donde $r_H \equiv GM/\sigma^2$. Muestre que cerca del agujero ($r \ll r_H$), se tiene que $v(r) \propto r^{-1/2}$

Solución:

La función original dada de las partículas lejos del agujero es la gaussiana

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{v_0}{(2\pi\sigma)^{3/2}} e^{-v^2/2\sigma^2}$$

Que tiene la energía de las partículas en la exponencial, pero como el sistema adicionalmente cuenta con la presencia del agujero, tenemos que la distribución maxwelliana original debe ser modificada de forma que

$$E_i = \frac{1}{2}v_i^2 + V; \quad V = -\frac{GM}{r}$$

Dejando entonces una distribución de la forma

$$f(\mathbf{v}) = \frac{v_0}{(2\pi\sigma)^{3/2}} e^{\frac{GM}{r\sigma^2} - \frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

Sabemos también que la distribución de velocidades por definición se puede calcular haciendo

$$v(r) = 4\pi \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} v^2 f(v) dv$$

Para calcular esto necesitamos saber las velocidades límites. Como estamos viendo partículas desligadas, sabemos que la velocidad mínima será la velocidad 'libre' o de 'escape' $v_{\min} = \sqrt{2GM/r}$. La velocidad máxima naturalmente tiene que ser ∞

$$\Rightarrow v(r) = 4\pi \int_{\sqrt{2GM/r}}^{\infty} v^2 f(v) dv$$

Y si remplazamos nuestra distribución maxwelliana, tenemos que

$$\frac{v(r)}{v_0} = 4\pi \int_{\sqrt{2GM/r}}^{\infty} \frac{v^2}{(2\pi\sigma)^{3/2}} e^{\frac{GM}{r\sigma^2} - \frac{v^2}{2\sigma^2}} dv = \frac{4\pi e^{\frac{GM}{r\sigma^2}}}{(2\pi\sigma)^{3/2}} \int_{\sqrt{2GM/r}}^{\infty} v^2 e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv$$

Teniendo una integral del estilo $\int x^2 e^{-x^2} dx$ notamos que $x^2 e^{-x^2} = -\frac{x}{2} \cdot \underbrace{-e^{-x^2}}_{\frac{d}{dx} e^{-x^2}} 2x$.

Con esto podemos integrar por partes haciendo

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{xe^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-x^2} dx = -\frac{xe^{-x^2}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf}(x)$$

Con esto podemos resolver ajustando nuestras constantes y llegamos al resultado (hay que usar mathematica)

$$\frac{v(r)}{v_0} = 2\sqrt{\frac{r_H}{\pi r}} + e^{r_h/r} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{r_H}{r}} \right) \right]$$

b) Para obtener el comportamiento en $r \ll r_H$, usamos la fórmula (BT ecuación del apéndice C, 19) que dice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \operatorname{erf}(x)) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}$$

podemos usar este resultado para aproximar el segundo término del resultado llegando a

$$\frac{v(r)}{v_0} \approx 2 \sqrt{\frac{r_H}{\pi r}} + e^{r_h/r} \frac{e^{-r_h/r}}{\sqrt{\pi} \sqrt{r_h/r}}$$

De acá es directo ver que el segundo término se va a 0 al hacer $r \rightarrow 0$, y así

$$\frac{v(r)}{v_0} = 2 \sqrt{\frac{r_H}{\pi r}}, \text{ O dicho de otra manera: } v(r)^{-1/2}$$

9.7. Distribución Maxwelliana

Las velocidades de las estrellas en un sistema estelar están descritas por una distribución Maxwelliana tridimensional que es,

$$f(v) = A v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Aquí, A es una constante de normalización, m es la masa estelar, supuesta constante, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura del sistema. Verifique que la energía cinética estelar media sea $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$

Solución:

La condición de normalización da

$$\int_0^\infty f(v) dv = \int_0^\infty A v^2 e^{-mv^2/2kT} dv = 1$$

Para llevar a cabo la integración hagamos algún cambio de variables

$$\frac{mv^2}{2kT} = x; \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2kT}{m}x}; \quad dv = \frac{kT}{mv}dx, \quad \text{Como } v \rightarrow \{0, \infty\} \quad x \rightarrow \{0, \infty\}$$

Usando estas transformaciones de variables, nuestra integral de normalización se convierte en

$$A \int_0^\infty v^2 e^{-x} \frac{kT}{mv} dx = A \int_0^\infty \frac{kT}{m} \sqrt{\frac{2kT}{m}} x e^{-x} dx = A \sqrt{2} \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = 1$$

Pero por definición de función gamma obtenemos $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$.
 $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$A\sqrt{2}\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}-1} e^{-x} dx = A\sqrt{2}\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

El valor esperado para el cuadrado de la velocidad se puede calcular como:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = A \int_0^{\infty} v^4 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Realizando las mismas transformaciones que arriba obtenemos

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= A \int_0^{\infty} 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}} x^{\frac{3}{2}} e^{-x} dx \\ &= A 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}} \int_0^{\infty} x^{\frac{5}{2}-1} e^{-x} = A 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = A 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}} \times 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{3kT}{m} \\ m \langle v^2 \rangle &= \frac{3}{2} kT \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT}$$

Entonces, la energía cinética de cada masa es $\frac{3}{2}kT$ si la distribución de velocidad del conjunto de masa sigue la función de distribución de Maxwell.

9.8. B&T 4-25

Podemos estudiar la estructura vertical de un disco axisimétrico delgado despreciando todas las derivadas radiales y adoptando la forma $f = f(E_z)$ para la DF, donde

$$E_z \equiv \frac{1}{2}v_z^2 + \Phi(z). \quad (93)$$

(a) Usando la aproximación de disco delgado para la ecuación de Poisson dada por

$$\frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial^2 z} = 4\pi G \rho(R, z),$$

mostrar que si

$$f = \rho_0 (2\pi\sigma_z^2)^{-1/2} \exp(-E_z/\sigma_z^2) \quad (94)$$

La formula de Poisson se puede escribir

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 \zeta} = e^{-\phi},$$

donde $\phi \equiv \Phi/\sigma_z^2$, $\zeta \equiv z/z_0$, y $z_0 \equiv \frac{\sigma_z}{\sqrt{8\pi G\rho_0}}$.

(b) Al resolver esta ecuación sujeta a las condiciones de frontera $\phi(0) = d\phi/d\zeta|_0 = 0$, demuestre que la densidad ρ en el disco viene dada por (Spitzer 1942)

$$\rho(z) = \rho_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} z/z_0 \right).$$

Solución:

a) La función de distribución da la distribución de densidad en una unidad de volumen sobre velocidades. Si integramos la función de distribución sobre las velocidades, obtenemos la densidad en una determinada posición z .

$$\rho(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f \, dv_z \quad (95)$$

Sustituyendo la función de distribución, obtenemos ((93) en (94) y esto en (95))

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\Phi(z)+v_z^2/2}{\sigma_z^2}} \, dv_z$$

Esto se puede reescribir como

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\Phi(z)}{\sigma_z^2}} e^{-\frac{v_z^2}{2\sigma_z^2}} \, dv_z$$

La primera parte exponencial de la integral es una constante, por lo que se puede poner delante de la integral. La segunda parte es la bien conocida distribución gaussiana con $1/\sqrt{2\pi\sigma_z^2}$, que integró sobre $-\infty$ a ∞ igual a uno. Entonces obtenemos

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{\Phi(z)}{\sigma_z^2}}$$

Para un **disco delgado axisimétrico, la dependencia de R de la ecuación de Poisson se cancela** y obtenemos

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = 4\pi G \rho(z) = 4\pi G \rho_0 e^{-\frac{\Phi(z)}{\sigma_z^2}}$$

Convirtamos esto con las unidades adimensionales dadas en el problema. Sabemos que $z = \zeta z_0$. Eso da

$$z = \zeta \frac{\sigma_z}{\sqrt{8\pi G \rho_0}}$$

Sustituyamos esto y $\phi = \Phi/\sigma_z^2$ en la ecuación de Poisson

$$\frac{d^2(\phi \sigma_z^2)}{d\left(\zeta^2 \frac{\sigma_z^2}{8\pi \rho_0}\right)} = 4\pi G \rho_0 e^{-\phi}$$

Las constantes se pueden sacar de la derivada, y luego obtenemos la forma que estábamos buscando:

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} = e^{-\phi}$$

b) Se puede notar que esta es una ecuación del tipo de oscilador armónico, así que multipliquemos ambos lados con la derivada del valor. Obtenemos

$$2 \frac{d\phi}{d\zeta} \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} = \frac{d\phi}{d\zeta} e^{-\phi}$$

Este es el mismo tipo de integral que la ecuación (6) en el primer problema.
Integraremos la ecuación.

$$\left(\frac{d\phi}{d\zeta} \right)^2 = -e^{-\phi} + c$$

La constante de integración se puede calcular si sabemos que el potencial en el centro del plano galáctico es cero. Eso significa que el gradiente también es cero cuando ζ es cero. Entonces obtenemos $c = 1$. Podemos sacar la raíz cuadrada de la ecuación y reorganizarla.

$$d\phi = \sqrt{1 - e^{-\phi}} d\zeta$$

Tendremos que integrar esta ecuación. Dado que la parte de la raíz cuadrada no es conveniente, cambiemos las variables y organicemos la ecuación para que tengamos las mismas variables en el mismo lado. Sea $x = \sqrt{1 - e^{-\phi}}$. Eso significa que

$$dx = \frac{e^{-\phi}}{2\sqrt{1 - e^{-\phi}}} d\phi$$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1-x^2}{2x} d\phi \\ d\phi &= \frac{2x}{1-x^2} dx \end{aligned}$$

Eso cambia nuestra ecuación para ser

$$d\zeta = \frac{2}{1-x^2} dx$$

Integrando eso, obtenemos

$$\zeta + \text{const} = 2 \tanh^{-1} x$$

Organizando eso, y sustituyendo x obtenemos

$$\tanh^{-1} \left(\sqrt{1-e^{-\phi}} \right) = \frac{\zeta + \text{const}}{2}$$

Tomando la tangente hiperbólica de la ecuación obtenemos

$$\sqrt{1-e^{-\phi}} = \tanh \left(\frac{\zeta + \text{const}}{2} \right)$$

A partir de las condiciones de contorno, podemos ver que la constante de integración es cero nuevamente. Entonces obtenemos

$$e^{-\phi} = 1 - \tanh^2 \left(\frac{\zeta}{2} \right)$$

Usando $\tanh^2 + \operatorname{sech}^2 = 1$, obtenemos

$$e^{-\phi} = \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\zeta}{2} \right)$$

En la parte a) del problema, vimos que $e^{-\phi} = \rho(z)/\rho_0$. Sustituyendo eso y ζ obtenemos la ecuación dada por Spitzer:

$$\boxed{\rho(z) = \rho_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{z}{2z_0} \right)}.$$

9.9. Variante de la ayudantía

A stellar system in which all particles are on radial orbits is described by the distribution function

$$f(\mathcal{E}, L) = \begin{cases} A\delta(L)(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^{-1/2} & \text{if } \mathcal{E} > \mathcal{E}_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $\mathcal{E} = \psi - 1/2v_t^2$ is relative energy and \mathcal{E}_0 and A are constants.

(a) By writing $v^2 = v_r^2 + v_t^2$, where v_r and v_t are the radial and transverse velocities, and $L = rv_t$, prove that the volume element $d^3v = 2\pi v_t dv_t dv_r$ may be written $d^3v = \frac{\pi d\mathcal{E} dX}{r^2 v_r}$ where $X = L^2$. (b) Hence show that the density is

$$\rho(r) = \begin{cases} Br^{-2} & \text{if } (r < r_0) \\ 0 & \text{if } (r \geq r_0) \end{cases}$$

where B is a constant and the relative potential at r_0 satisfies $\psi(r_0) = \mathcal{E}_0$.

Solution:

The number density is the zeroth moment of distribution function with respect to velocity. So

$$\begin{aligned} n(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(L)(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^{-1/2} d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(\sqrt{X})(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^{-1/2} \frac{\pi d\mathcal{E} dX}{r^2 v_r} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\sqrt{X}) dX \right) (\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^{-1/2} \frac{d\mathcal{E}}{r^2 v_r} \end{aligned}$$

If $r_0 < r$ then $\mathcal{E} = \psi(r) > \mathcal{E}_0$

$$\begin{aligned} \rho(r) &= mn(r) = \int_{\mathcal{E}_0}^{\infty} \frac{mA(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^{-1/2}}{r^2 v_r} d\mathcal{E} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{-2m(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^{-3/2}}{3v_r} \right]_{\mathcal{E}_0}^{\infty} = Br^{-2} \end{aligned}$$

But if $r_0 < r$ then $\mathcal{E} = \psi(r) < \mathcal{E}_0$ and $f(\mathcal{E}, L) = 0$ then,

$$\rho(r) = \int 0 d^3v = 0$$

This is a power law density with density decaying as square of the distance for a finite spherical region in space.

Tareas Astrofísica

Profesor: Andres Escala

Ayudante: Juan D'Etigny

Eduardo Flández Guerrero

Otoño, 2022



Contents

1	Teoría de potencial	5
1.1	Tarea 1 Pregunta 1	5
1.2	Tarea 1 Pregunta 2	7
1.3	Tarea 1 Pregunta 3	8
2	Órbitas estelares	11
2.1	Tarea 2 Pregunta 1	11
2.2	Tarea 2 Pregunta 2	13
2.3	Tarea 2 Pregunta 4	15
3	Sistemas no colisionales	21
3.1	Tarea 3 Pregunta 1	21
3.2	Tarea 3 Pregunta 2	23
3.3	Tarea 3 Pregunta 3	25
4	Estabilidad de sistemas sin colisiones & Dinámica de disco y estructura espiral	29
4.1	Tarea 4 Pregunta 1	29
4.2	Tarea 4 Pregunta 2	31



1. Teoría de potencial

1.1 Tarea 1 Pregunta 1

Muestre que el potencial generado por una densidad superficial constante Σ en el plano $z = 0$, corresponde a $\Phi = 2\pi G\Sigma|z| + K$, con K una constante: a) Usando el teorema de Gauss, b) Usando la ecuación de Poisson

a) Por Teorema de Gauss

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{a} = -4\pi GM_{\text{enc}}$$

con M_{enc} : masa total encerrada dentro de la superficie.

$$\Rightarrow g \cdot 2A = -4\pi G M_{\text{enc}}$$

$$\text{y como } \Sigma = \frac{M}{A} \Rightarrow M = A\Sigma$$

$$g2A = -4\pi G \sum A$$

$$g = -2\pi G \sum \Sigma$$

$$\text{Sabemos que } g = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{dz}$$

$$\Rightarrow \phi = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi G \Sigma) dt$$

$$\boxed{\phi = 2\pi G \sum |z| + K}$$

con K la cte de integración.

b) Usando la Ec. de Poisson

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G p$$

Digamos que el plano está en $z = 0$. Luego como el campo gravitacional es conservativo e irrotacional,

$$g = -\nabla \phi$$

Luego

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi G \Sigma \delta(z - 0),$$

integraremos en un intervalo $\{-d, d\}$,

$$\int_{-d}^d \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dz = 4\pi G \sum \int_{-d}^d \delta(z) dz$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=d} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-d} = 4\pi G \Sigma$$

Ahora hagamos muy pequeña la distancia.

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} d \rightarrow 0^+ \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow 0^-} d \rightarrow 0^-$$

De esta manera las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} \phi(z = 0^+) &= \phi(z = 0^-) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0^+) - \frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0^-) &= 4\pi G \Sigma \end{aligned}$$

Resolvemos la Ec. de Laplace para las regiones fuera de la placa,

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0$$

Sea

$$\begin{aligned} a &= \frac{dd}{dz} \Rightarrow \frac{da}{dz} = 0 \\ \Rightarrow \phi &= az + b \quad \text{para } z > 0 \\ \phi &= cz + d \quad \text{para } z < 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

con a, b, c y d constantes. Entonces por la primera condición de contorno, en $z = 0$

$$\Rightarrow b = d$$

Y por la segunda condición nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z}(z \rightarrow 0^+) - \frac{\partial \phi}{\partial z}(z \rightarrow 0^-) &= 4\pi G \Sigma \\ \Rightarrow a - c &= 4\pi G \Sigma \end{aligned} \tag{1.2}$$

Hemos asumido simetría, luego

$$\begin{aligned}\phi(z = d) &= \phi(z = -d) \\ \Rightarrow ad + b &= -cd + b \\ \Rightarrow a &= -c\end{aligned}\tag{1.3}$$

así con (1.3) en (1.2)

$$\begin{aligned}-2c &= 4\pi G \sum \\ \Rightarrow c &= -2\pi G \Sigma\end{aligned}$$

Finalmente con esto en (1.1) nos queda:

$$\boxed{\phi = -2\pi G \Sigma |z| + K.}$$

1.2 Tarea 1 Pregunta 2

Calcule la distribución de densidad que satisface la siguiente fórmula para la velocidad circular

$$v_c^2 = \frac{\rho_0 G r_0^3}{r} \left[\ln \left(1 + \frac{r}{r_0} \right) - \arctan \left(\frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \right] \tag{1.4}$$

Compare con el perfil de densidad de una esfera isoterma.

Como tenemos simetría esférica, la Ec. de Poisson es:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right] = 4\pi G \rho(r)$$

de aquí podemos despejar la densidad,

$$\Rightarrow \rho(r) = \frac{1}{4\pi G r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right]$$

Al tener una fuerza con simetría esférica, tenemos que el campo de fuerza es central y así podemos usar la velocidad circular que vimos en clases

$$v_c^2 = r \frac{d\phi}{dr}$$

luego tenemos que

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi G r^2} \frac{d}{dr} [r v_c^2] \tag{1.5}$$

Reemplazando (1.4) en (1.5) nos queda

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi G r^2} \frac{d}{dr} \left[r \frac{\rho_0 G r_0^3}{r} \left[\ln \left(1 + \frac{r}{r_0} \right) - \arctan \left(\frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \right] \right]$$

con

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} \left[\ln \left(1 + \frac{r}{r_0} \right) \right] &= \frac{1}{r + r_0} \\ \frac{d}{dr} \left[\arctan \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] &= \frac{r_0}{r^2 + r_0^2} \\ \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \right] &= \frac{1}{r + r_0} \\ \rho(r) &= \frac{\rho_0 r_0^3}{4\pi r^2} \left[\frac{1}{r + r_0} - \frac{r_0}{r^2 + r_0^2} + \frac{1}{r + r_0} \right] \\ \boxed{\rho(r) = \frac{\rho_0 r_0^3}{4\pi r^2} \left[\frac{2}{r + r_0} - \frac{r_0}{r^2 + r_0^2} \right]}\end{aligned}$$

Nos piden comparar con el perfil de densidad de una esfera isotermal:

$$\boxed{\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi Gr^2}}$$

donde σ es la dispersión de velocidad. No se me ocurre otra comparación más que pareciera que el resultado que obtuve se asemeja a expandir en Taylor el perfil isotermal. Luego me llama la atención de que cuando $r \rightarrow 0$, la densidad diverge.

1.3 Tarea 1 Pregunta 3

Muestre que la energía potencial de un sistema esférico de masa finita en el cual la densidad satisface $\lim_{r \rightarrow 0} \rho r^{5/2} = 0$, puede escribirse como:

$$W = -\frac{G}{2} \int_0^\infty \left(\frac{M(r)}{r} \right)^2 dr$$

donde $M(r)$ es la masa al interior de un radio r .

Para sistemas esféricicos podemos calcular la energía potencial como

$$\delta W(r) = 4\pi r^2 \delta \rho(r) \Phi(r)$$

donde $\phi(r)$ es el potencial gravitacional en $r' < r$ (ubicada dentro de r)

$$\phi_{r' < r}(r) = -\frac{G}{r} \int_0^r dM(r')$$

con este potencial la energía potencial nos queda

$$W = - \int_0^\infty 4\pi r^2 \rho(r) \frac{GM(r)}{r} dr$$

No podemos considerar ρ como constante pero sí como una función lineal de r . Sea

$$dM(r) = 4\pi\rho(r)r^2dr$$

$$\Rightarrow W = -G \int_0^\infty \frac{M(r)}{r} dM(r)$$

Integramos por partes con $dv = dM(r)$ y $u = \frac{M(r)}{r}$, $du = \frac{dM(r)}{r} - \frac{M(r)}{r^2}dr$ $v = M(r)$

$$\begin{aligned} \int \frac{M(r)}{r} dM(r) &= \frac{M^2(r)}{r} - \int M(r) \left(\frac{dM(r)}{r} - \frac{M(r)}{r^2} dr \right) \\ \int \frac{M}{r}(r)dM(r) &= \frac{M^2(r)}{r} - \int \frac{M(r)}{r} dM(r) + \int \frac{M^2(r)}{r^2} dr \\ \Rightarrow 2 \int_0^\infty \frac{M}{r}(r)dM(r) &= \frac{M^2(r)}{r} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \left(\frac{M(r)}{r} \right)^2 dr \end{aligned}$$

donde al evaluar el primer término de la derecha se anula en el infinito porque la masa debe ser finita. Notemos que $M = \rho V = \rho r^3$, Luego

$$M^2 r^{-1} = \rho^2 r^{6-1} = \rho^2 r^5$$

y usamos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \rho r^{5/2} &= 0 \\ \Rightarrow \int_0^\infty \frac{M}{r}(r)dM(r) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{M(r)}{r} \right)^2 dr \end{aligned}$$

Multiplicando por $-G$

$$\begin{aligned} W &= -G \int_0^\infty \frac{M(r)}{r} dM(r) = -\frac{G}{2} \int_0^\infty \left(\frac{M(r)}{r} \right)^2 dr \\ W &= -\frac{G}{2} \int_0^\infty \left(\frac{M(r)}{r} \right)^2 dr \end{aligned}$$



2. Órbitas estelares

2.1 Tarea 2 Pregunta 1

a) Muestre que la energía de una órbita circular en el potencial isócrono

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{r^2 + b^2}} \quad (2.1)$$

es $E = -\frac{GM}{2a}$, donde $a = \sqrt{b^2 + r^2}$.

La energía total de una partícula es:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv_c^2 + \Phi(r)$$

usando la rapidez de una partícula de masa despreciable en una órbita circular

$$v_c^2 = r|\mathbf{F}| = r \frac{d\Phi}{dr}$$
$$v_c^2 = \frac{GMr^2}{(b+a)^2a}$$

y junto con (2.1) nos queda

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{GMr^2}{(b+a)^2a} \right) + \left(\frac{-GMm}{b + \sqrt{b^2 + r^2}} \right)$$

considerando el caso en que $M \gg m$

$$E = GM \left(\frac{r^2}{2(b+a)^2a} - \frac{1}{b + \sqrt{b^2 + r^2}} \right) = GM \left(\frac{a^2 - b^2}{2(b+a)^2a} - \frac{1}{b + \sqrt{b^2 + r^2}} \right)$$

$$E = GM \left(\frac{a^2 - b^2}{2(b+a)^2 a} - \frac{1}{b+a} \right) = GM \left(\frac{a^2 - b^2 - a(a+b)2}{2a(a+b)^2} \right)$$

$$E = \frac{GM(a^2 - b^2 - 2a^2 - 2ab)}{2a(a+b)^2} = \frac{GM(-a^2 - b^2 - 2ab)}{2a(a+b)^2}$$

$$E = -\frac{GM(a+b)^2}{2a(a+b)^2}$$

$$E = -\frac{GM}{2a}$$

b) Si el momentum angular de esta órbita es $L_c(E)$, muestre que:

$$L_c = \sqrt{GMb} (x^{-1/2} - x^{1/2}); \quad x \equiv -\frac{2Eb}{GM}$$

Sabemos que el potencial efectivo es

$$\begin{aligned} \phi_{eff} &= \phi(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \\ \phi_{eff} &= -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}} - \frac{l^2}{2mr^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

derivando el potencial efectivo respecto a r e igualandolo a cero

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}} - \frac{l^2}{2mr^2} \right) = \frac{GMr}{\sqrt{b^2 + r^2} (\sqrt{b^2 + r^2} + b)^2} + \frac{l^2}{mr^3} = 0$$

Expandiendo en $r = 0$

$$\frac{l^2}{mr^3} + \frac{GMr}{2(b^3 + (b^2)^{3/2})} + O(r^2) = 0$$

reordenando y despejamos para obtener el valor de r . Poniendo este valor de r en la ecuación (2.2), obtenemos el valor de ϕ_{eff} en Términos de G, M, b , y l .

En a) encontramos que

$$E = -\frac{GM}{2a} = K + \Phi_{eff}$$

despejando a

$$a = -\frac{GM}{2E}$$

y obtenemos

$$L_C = \sqrt{GMb} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{-2Eb}{GM}}} - \sqrt{\frac{-2Eb}{GM}} \right)$$

y si llamamos a $x = \frac{-2Eb}{GM}$

$$\Rightarrow L_C = \sqrt{GMb} ((x)^{-1/2} - (x)^{1/2})$$

2.2 Tarea 2 Pregunta 2

Muestre que en un potencial con simetría esférica, la frecuencia vertical ν y la frecuencias circular Ω , son iguales.

En clases vimos que para órbitas casi circulares tenemos:

$$\ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial R}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial z} \quad (2.3)$$

con

$$\Phi_{\text{eff}} \equiv \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2} \quad (2.4)$$

Luego definimos

$$x \equiv R - R_g, \quad (2.5)$$

donde R_g (L_z) es el radio del centro de guía para una órbita de momento angular L_z

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g, 0)} = \frac{L_z^2}{R_g^3} = R_g \dot{\phi}^2$$

Luego expandimos Φ_{eff} en Taylor

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi_{\text{eff}}(R_g, 0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)} x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)} z^2 + O(xz^2) \quad (2.6)$$

y despreciamos términos cruzados y de orden mayor que 1, para obtener:

$$\kappa^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial R^2} \right)_{(R_g, 0)}; \quad \nu^2(R_g) \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi_{\text{eff}}}{\partial z^2} \right)_{(R_g, 0)}$$

(2.7)

pues entonces las ecuaciones (2.3) se convierten en

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\kappa^2 x, \\ \ddot{z} &= -\nu^2 z \end{aligned} \quad (2.8)$$

similar a osciladores armónicos, donde κ y ν se denominan frecuencia radial y frecuencia vertical.

Si sustituimos Φ_{eff} de la ecuación (2.4) obtenemos

$$\kappa^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g,0)} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{(R_g,0)} + \frac{3}{R_g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R_g,0)} \quad (2.9)$$

y

$$\nu^2(R_g) = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{(R_g,0)} \quad (2.10)$$

Y la frecuencia circular está dada por

$$\boxed{\Omega^2(R) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{(R,0)} = \frac{L_z^2}{R^4}} \quad (2.11)$$

Luego en coordenadas cilíndricas la ecuación de Poisson es

$$4\pi G\rho = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

y por (2.10)

$$4\pi G\rho = \frac{1}{R} \frac{dv_c^2}{dR^2} + \nu^2 \quad (2.12)$$

Si la distribución de masa es esférica tenemos que

$$\begin{aligned} \Omega^2 &\simeq \frac{GM}{R^3} = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho} \\ \Rightarrow 4\pi G\bar{\rho} &= 3\Omega^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad media dentro de la esfera sobre el centro galáctico. Igualando (2.12) con (2.13)

$$\Rightarrow 3\Omega^2 = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} v_c^2 + \nu^2$$

y como

$$\begin{aligned} v_c &= R\Omega \\ \Rightarrow 3\Omega^2 &= \frac{1}{R} \frac{d}{dR} R^2 \Omega^2 + \nu^2 \\ 3\Omega^2 &= \frac{1}{R} 2R\Omega^2 + \nu^2 \\ \Rightarrow 3\Omega^2 &= 2\Omega^2 + \nu^2 \\ \Rightarrow \Omega^2 &= \nu^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\Omega = \nu}$$

Ahora, en un comienzo me confundí y demostré que $\kappa = \Omega$. Dejaré el desarollo.

$$\kappa^2 = \frac{\partial^2 \phi_{\text{erf}}}{\partial R^2} \Big|_{R_g,0} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left[\phi + \frac{Lz^2}{2R^2} \right]_{R_g,0}$$

$$\kappa^2 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} \Big|_{R_{g,0}} + 3 \frac{L_z^2 z}{R^4}$$

como $L_z = \Omega R^2$

$$\kappa^2 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} + 3\Omega^2$$

y como $\phi = \frac{GM}{R}$

$$\kappa^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(\frac{GM}{R} \right) + 3\Omega^2$$

$$\kappa^2 = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{GM}{R^2} \right) + 3\Omega^2$$

$$\kappa^2 = -2 \frac{GM}{R^3} + 3\Omega^2$$

Notemos que la frecuencia circular es

$$\Omega \equiv \frac{v_c}{R} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

$$\kappa^2 = -2\Omega^2 + 3\Omega^2$$

$$\kappa^2 = \Omega^2$$

$\kappa = \Omega$

2.3 Tarea 2 Pregunta 4

a) En este problema examinamos porque los sistemas de anillos en torno a planetas gigantes ocupan distancias que están a menos de ~ 2 radios planetarios.

Considere un satélite esférico perfectamente rígido de radio R_s , masa m_s y densidad ρ_s , orbitando un planeta de radio R_p , masa m_p y densidad ρ_p . Suponga que el periodo del satélite es igual a su periodo orbital. Tome el eje semi-mayor orbital del satélite como a_s y su excentricidad $e = 0$.

Imagine una partícula de prueba en la superficie de este satélite en rotación. La rotación del satélite y la gravedad del planeta tratan de eyectar la partícula. La única fuerza que intenta mantener la partícula es la gravedad del satélite, y para un a_s lo suficiente pequeño, esta no se podrá mantener en la superficie. Calcule el semi-eje mayor mínimo a_s^* en función de ρ_s , ρ_p y R_p .

Consideremos la estabilidad de una partícula que se encuentra tanto en el ecuador del satélite como en la línea que conecta los centros del planeta y del satélite. Nos piden encontrar el semieje mayor cuando la partícula ya no está “unida” gravitacionalmente al satélite.

Para una partícula en el centro del satélite, las fuerzas gravitacional y centrífuga están en equilibrio. Pero en el ecuador la partícula experimentará:

- (i) un exceso de fuerza gravitacional o centrífuga debido a la marea,
- (ii) una fuerza centrífuga debido a la rotación del satélite y
- (iii) una fuerza debido a la atracción gravitacional del satélite.

La partícula de prueba es más inestable cuando se encuentra justo entre el planeta y el satélite. Entonces, la aceleración de marea del planeta que actúa para sacar la partícula de prueba es

$$\left| \frac{d}{da} \left(\frac{Gm_p}{a^2} \right) R_s \right| = 2 \left(\frac{Gm_p}{a^3} \right) R_s. \quad (2.14)$$

La aceleración centrífuga del satélite que hace girar la partícula de prueba es

$$\left(\frac{Gm_p}{a^3} \right) R_s. \quad (2.15)$$

Luego en el semi-eje mayor $a = a_s^*$, estas aceleraciones se deben sumar para equilibrar la atracción gravitacional del satélite, Gm_s/R_s^2 . Entonces sumando (2.14) y (2.15) e igualando a la parte gravitacional

$$3 \frac{Gm_p}{a_s^{*3}} R_s = \frac{Gm_s}{R_s^2} \quad (2.16)$$

y despejando obtenemos

$$a_s^{*3} = \frac{3Gm_p}{Gm_s} R_s^3 \quad \text{multiplicando por } \frac{R_p^3}{R_p^3}$$

y como $\rho_p = \frac{m_p}{R_p^3}$ y $\rho_s = \frac{m_s}{R_s^3}$, nos queda que

$$a_s^{*3} = \frac{3\rho_p}{\rho_s} R_p^3$$

$$a_s^* = \left(\frac{3\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} R_p \quad (2.17)$$

b) Investigue (y describa) la noción de “radio de Hill”, y muestre como se relaciona el radio de Hill del satélite $r_H = (m_s/3m_p)^{1/3} a_s$ con su resultado de la parte a).

En lugar de trabajar con las ecuaciones en torno al planeta, Hill (1878) pensó que tenía más sentido trabajar con un sistema de ecuaciones que describieran el movimiento de la partícula en la vecindad del satélite. El derivó este conjunto de ecuaciones aproximadas haciendo varias suposiciones y transfiriendo el origen del sistema de coordenadas a la masa

del satélite, es decir, en la vecindad de los puntos de Lagrange L_1 y L_2 , y conservó solo términos a primer orden y encontró las ecuaciones:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^3}\right)x = \frac{\partial U_H}{\partial x}, \quad (2.18)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\mu_2}{\Delta^3}y = \frac{\partial U_H}{\partial y}, \quad (2.19)$$

donde

$$U_H = \frac{3}{2}x^2 + \frac{\mu_2}{\Delta} \quad \text{y} \quad \Delta^2 = x^2 + y^2.$$

Luego la esfera de Hill se define como la esfera de radio r_H

$$r_H = \left(\frac{m_s}{3m_p}\right)^{1/3} a_s \quad (2.20)$$

que rodea la masa del satélite.

Cuando $a_s = a_s^*$, reemplazando (2.17) en (2.20) nos queda

$$r_H = \left(\frac{\rho_s}{3\rho_p}\right)^{1/3} \left(\frac{R_s}{R_p}\right) \left(\frac{3\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3} R_p$$

se cancelan términos y obtenemos que

$$r_H = R_s$$

es decir, el satélite simplemente llena su esfera de Hill (lóbulo de Roche). Cuando $a < a_s^*$, decimos que el satélite sobrellena su lóbulo de Roche. Cuando $a > a_s^*$, decimos que el satélite no llena su lóbulo de Roche.

- c) Considere ahora que el satélite está compuesto por un fluido gaseoso que tendrá una forma distorsionada por la influencia de marea del planeta y por su propia rotación (que sigue estando a la par con el periodo orbital). Estime (no es necesario hacer aproximaciones excesivamente precisas) el eje semi-mayor a_s^{**} del satélite dentro del cual una partícula de prueba escapará su influencia. Se debe por lo menos decidir si es que a_s^{**} es mayor o menor a a_s^* .

La partícula de prueba ahora se encuentra a una distancia adicional del centro del satélite:

$$R' = R_s \left[1 + \left(\frac{m_p}{m_s}\right) \left(\frac{R_s}{a_s^*}\right)^3 + \frac{\omega^2}{G\rho_s} \right],$$

donde el primer factor de mejora es producto de la marea elevada en el satélite acuoso por la acción del planeta, y el segundo factor de mejora proviene de la protuberancia inducida

por el hecho de estar girando. Para un satélite síncrono, es decir que sigue estando a la par con el período orbital, tenemos

$$\omega^2 = \frac{Gm_p}{a_s^{*3}}.$$

Entonces

$$R' = R_s \left\{ 1 + \left[\frac{(4\pi + 3)}{3} \right] \left(\frac{m_p}{m_s} \right) \left(\frac{R_s}{a_s^*} \right)^3 \right\}. \quad (2.21)$$

Como la partícula ahora tiene una nueva distancia R' , usando la Ec. (2.16) tenemos que

$$\begin{aligned} 3 \frac{m_p}{a_s^{*3}} &= \frac{m_s}{R'^3} \\ \Rightarrow 3 \frac{m_p}{m_s} \frac{R'^3}{a_s^{*3}} &= 1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

y reemplazando R' de (2.21) en (2.22) nos da

$$3 \left(\frac{m_p}{m_s} \right) \left(\frac{R_s}{a_s^*} \right)^3 \left\{ 1 + \frac{4\pi + 3}{3} \left(\frac{m_p}{m_s} \right) \left(\frac{R_s}{a_s^*} \right)^3 \right\}^3 = 1$$

que podemos escribir como

$$3x \left(1 + \frac{4\pi + 3}{3}x \right)^3 = 1$$

si llamamos

$$x \equiv \left(\frac{m_p}{m_s} \right) \left(\frac{R_s}{a_s^*} \right)^3$$

Entonces despejando

$$a_s^{**} = x^{-1/3} \left(\frac{m_p}{m_s} \right)^{1/3} R_s$$

donde $x^{-1/3} = 2,1580$, y multiplicando por (R_p/R_p) nos queda

$$a_s^{**} = 2.2 \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} R_p \quad (2.23)$$

*) El enunciado dice: En este problema examinamos porque los sistemas de anillos en torno a planetas gigantes ocupan distancias que están a menos de ~ 2 radios planetarios . . . ¿entonces porqué ocupan estas distancias los anillos?

Analizando el resultado obtenido en las ecuaciones (2.17) y (2.23), si consideramos el caso en que $\rho_p/\rho_s \approx 1$, deberíamos esperar que los cuerpos que se mantienen unidos

principalmente por la fuerza de gravedad sean desgarrados por las fuerzas centrífugas y de marea si se encuentran a distancias inferiores a $[1.4 - 2.2] R_p$. Los cuerpos pequeños que se mantienen unidos principalmente por fuerzas de cohesión intermoleculares en lugar de la gravedad son no se ven afectados por esta interrupción. Por lo tanto, pueden existir muchos cuerpos pequeños: partículas de anillos, pequeños satélites dentro de $\sim 2R_p$, pero los cuerpos grandes se desgarran.

Esta zona de disruptión mareomotriz/centrífuga se denomina "Límite de Roche". El límite de Roche es el semieje mayor en el que las fuerzas de tensión que actúan sobre un satélite (sin cohesión debido a las mareas) son mayores que las fuerzas de compresión de la gravedad propia. Entonces para órbitas fuera del límite de Roche, domina la gravedad propia del satélite y la partícula permanece en la superficie del cuerpo. Por el contrario, para órbitas interiores al límite de Roche, domina la atracción gravitatoria del planeta y la partícula se acelera alejándose de la superficie del satélite.

Entonces los satélites traídos bajo los efectos de las mareas se rompen a medida que se acercan al planeta. En tales casos, los satélites actúan como fuentes de material del anillo. Todos los sistemas de anillos planetarios se encuentran en la zona de Roche entre a_s^* y a_s^{**} . Entonces el ingreso a la zona de Roche permite explicar el origen y la ubicación radial de los anillos planetarios.

La forma del satélite juega un papel en la definición del límite de Roche. Dos definiciones comunes para el límite de Roche son el "límite rígido de Roche" (RRL) y el "límite fluido de Roche" (FRL). La suposición de que el satélite puede mantener una forma esférica rígida da lugar a la RRL. El semieje mayor de la RRL es [Murray y Dermott, 1999]:

$$a_s^* = a_{RRL} = R_p \left(\frac{3\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} \approx 1.442 R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3}.$$

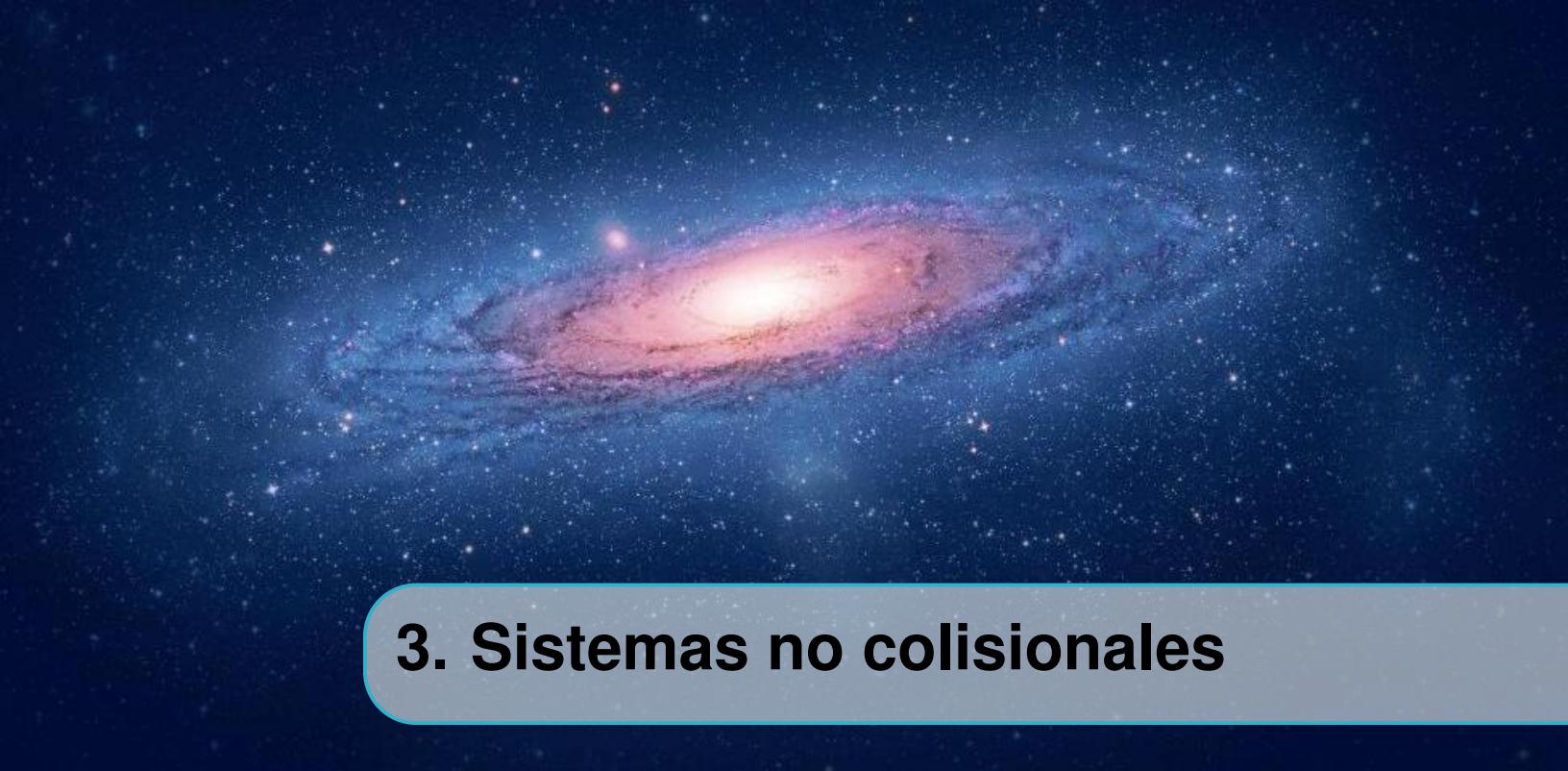
La mayoría de los satélites no son esferas rígidas y, por lo tanto, el RRL es un límite inferior para un satélite "sin cohesión". En el extremo opuesto, el satélite se comporta como un fluido que puede fluir en forma de equilibrio hidrostático. Debido a que las partículas en el ecuador de un cuerpo alargado están ubicadas a una mayor distancia del centro del cuerpo en comparación con un cuerpo esférico, el componente de gravedad propia de la aceleración se reduce al calcular el "límite de Roche fluido" (FRL). Por lo tanto, el FRL está más alejado del planeta que el RRL. El semieje mayor de la FRL es:

$$a_s^{**} = a_{FRL} \approx .2,456 R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3}$$

Aunque el material de los anillos planetarios es sólido, las interacciones entre las partículas del anillo pueden aproximarse a las de un fluido. Esto significa que el material del anillo que orbita dentro del FRL se ve continuamente interrumpido por las mareas y no puede acumularse en los satélites. Si el material del anillo se transporta más allá del FRL, donde las fuerzas de las mareas son más débiles, puede acumularse en satélites. Por lo tanto, el FRL marca el límite exterior aproximado de un anillo masivo.

Para el planeta, el cálculo de los límites de Roche nos permite estimar dónde los anillos y los satélites pueden orbitar el cuerpo. El material del anillo está confinado a la órbita

dentro del FRL. Si bien los satélites solo pueden acumularse fuera de la FRL, si tienen cohesión interna, pueden existir en cualquier lugar fuera de la RRL.



3. Sistemas no colisionales

3.1 Tarea 3 Pregunta 1

Un sistema de partículas de prueba moviéndose en un potencial generado por otras partículas (masivas) tiene la siguiente función de distribución en su espacio de fase:

$$f = \begin{cases} C \left(\frac{A}{r} - \frac{v^2}{2} \right), & \forall v < \sqrt{\frac{2A}{r}} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Aquí C y A son constantes.

a) ¿Cuál es el perfil de densidad numérica $n(r)$ para las partículas de prueba?

La densidad de número es el momento cero de la función de distribución

$$n(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r, v) dv$$

$$n(r) = \int_0^{\sqrt{\frac{2A}{r}}} C \left(\frac{A}{r} - \frac{v^2}{2} \right) dr$$

$$n(r) = \frac{2\sqrt{2}C}{3} \left(\frac{A}{r} \right)^{3/2}$$

b) ¿Es el tensor de velocidad de dispersión de las partículas de prueba isotrópico?
¿Por qué?

El tensor de dispersión de velocidad dado por

$$\sigma_{ij}^2 = \langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned}\langle v_i \rangle (x) &= \frac{1}{\rho} \iiint v_i f(x, v) d^3 v \\ \langle v_i v_j \rangle (x) &= \frac{1}{\rho} \iiint v_i v_j f(x, v) d^3 v\end{aligned}$$

Notemos que σ_{ij}^2 es una cantidad local; $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2(\vec{z})$. En cada punto \vec{z} define el elipsoide de velocidad; un elipsoide cuyos ejes principales están definidos por los vectores propios ortogonales de σ_{ij}^2 con longitudes que son proporcionales a las raíces cuadradas de los respectivos valores propios. Por lo tanto σ_z es la dispersión de velocidad a una altura $z = 0$ del disco. Para que sea isotrópico deberíamos tener $i = j$, pero nada obliga a que esto se cumpla. Por lo tanto el tensor de dispersión no es isotrópico.

c) Si esta distribución está en un estado de estacionario, de manera que es solución de la ecuación de Boltzmann no colisional $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ¿Cuál es el potencial gravitacional del sistema?

$$\rho(r) = mn(r)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = -4\pi G m n(r)$$

reemplazando

$$n(r) = \frac{2\sqrt{2}}{3} C \left(\frac{A}{r} \right)^{3/2}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = -4\pi G m \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} C \left(\frac{A}{r} \right)^{3/2} \right]$$

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = -\frac{8\sqrt{2}}{3} G m C \left(\frac{A}{r} \right)^{3/2}$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = - \left(-\frac{16}{3} \sqrt{2} G m C A^{3/2} \sqrt{\frac{1}{r}} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{32}{3} \sqrt{2r} G m C A^{3/2}}$$

3.2 Tarea 3 Pregunta 2

Considere una galaxia disco hipotética en la cual su masa se puede considerar concentrada en un punto central. La densidad del disco es despreciable, más precisamente, el disco consiste en una población de estrellas de masa cero con dispersión de velocidad en el eje z igual a σ_z que a su vez es $\sigma_z \neq \sigma_z(z)$. A un radio R la densidad numérica de estrellas en función de z es:

$$\nu(z) = \nu(0) e^{-\frac{z^2}{2z_0^2}}$$

Donde z_0 es una constante espacial, tal que $z_0 \ll R$.

a) ¿Cuál es la relación entre z_0 y σ_z ?

Comenzando con la ecuación de Jeans en cilíndricas y para sistema axisimétricos vista en clases

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nu \bar{v}_z) + \frac{\partial}{\partial R} (\gamma \bar{v}_R \bar{v}_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma v_z^2) + \frac{\gamma \bar{v}_R \bar{v}_z}{R} + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

Supongamos que:

- i) Disco en estado estacionario $\frac{\partial}{\partial t} (\gamma \bar{v}_z) \simeq 0$
- ii) El Sol está relativamente lejos en el disco (R grande) lejos en el disco y cerca del plano ($z \sim 0$),
 \Rightarrow variaciones en z dominan a las variaciones en R , (i) y (ii) implican:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial z} (\nu v_z^2) \approx - \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Junto con la Ec. de Poisson: $4\pi G \rho(k, z) = \nabla^2 \phi \simeq \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(R, z)$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial z} (\nu \langle v_z^2 \rangle) \right) = 4\pi \rho G$$

Si consideramos que hay igual número de partículas que se mueven a la derecha $v_z > 0$ que de partículas que se mueven a la izquierda $v_z < 0$, entonces la suma de las velocidades será igual a cero, y entonces el promedio $\langle v_z \rangle = 0$. Luego entonces de

$$\sigma_z^2 = \langle v_z^2 \rangle - \langle v_z \rangle$$

$$\Rightarrow \sigma_z^2 = \langle v_z^2 \rangle$$

y la ecuación nos queda

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial z} (\nu \sigma_z^2) \right) = 4\pi \rho G$$

Luego nos dicen que $\sigma_z^2 \neq \sigma_z^2(z)$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial z} (\nu \sigma_z^2) = \sigma_z^2 \frac{\partial \nu}{\partial z}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_z^2}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) = 4\pi G \rho$$

Luego como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \ln(\nu) &= \frac{1}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial z} \\ \implies -\sigma_z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \ln(\nu) \right) &= 4\pi G \rho \end{aligned} \quad (3.2)$$

Derivando el término entre paréntesis y como

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \nu(0) e^{-\frac{z^2}{2z_0^2}} \\ \frac{\partial}{\partial z} \ln(\nu(z)) &= \frac{\partial}{\partial z} \ln(\nu(0)) + \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(e^{-\frac{z^2}{2z_0^2}} \right) \\ &= 0 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-z^2}{2z_0^2} \right) \\ &= -\frac{z}{z^2} \end{aligned}$$

Así (3.2) nos queda

$$\sigma_z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{z_0^2} \right) = 4\pi G \rho$$

Como estamos considerando una galaxia disco hipotética en la cual su masa se puede considerar concentrada en un punto central; consideremos la densidad del disco despreciable como

$$\rho = \sigma_0(R) \delta(z)$$

integrando entre el factor de escala

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 \int_{-z_0}^{z_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{z_0^2} \right) dz &= 4\pi G \sigma_0(R) \int_{-z_0}^{z_0} \delta(z) dz \\ \frac{\sigma_z^2}{z_0^2} (2z_0) &= 4\pi (\sigma_0(R)) \\ \Rightarrow \sigma_z^2 &= 2\pi G \sigma_0(R) z_0 \end{aligned}$$

$$\text{con } \sigma_0(R) = \rho_0(R) Z_0$$

$$\Rightarrow \sigma_z^2 = 2\pi G \rho_0(R) z_0^2$$

$\sigma_z = [2\pi G \rho_0(k) z_0^2]^{1/2}$

que corresponde a la relación entre la dispersión de velocidad y z_0 para el modelo de disco de van der Kruit y Searle.

b) ¿Qué predice la ecuación $4\pi\rho G = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial(\nu v_z^2)}{\partial z} \right)$ sobre la densidad de masa local si las estrellas son usadas como trazadores?

Nos dice que para cualquier población estelar, midiendo la densidad $\nu(z)$ y la velocidad aleatoria cuadrática media $\bar{v}_z^2(z)$, podríamos obtener la distribución de masas $\rho(z)$ a partir de dicha ecuación.

c) ¿Por qué es incorrecta la respuesta obtenida a la pregunta anterior?

Pero la pregunta anterior es incorrecta porque la densidad de masa $\rho(z)$ no es necesariamente proporcional a la densidad estelar ν , (que es la de cualquier población de estrellas que se encuentra en estado estacionario). Pensémoslo así, dentro de un volumen V podemos tener 500 estrellas, de masa 1, así que la densidad de numero y la densidad de masa coinciden. Pero también podríamos tener 10 estrellas de masa 50 cada una. En dicho caso las densidades son distintas y no son proporcionales. Por otro lado, la incertidumbre estadística en ν y \bar{v}_z^2 dificulta la estimación confiable de ρ a partir de dicha ecuación.

3.3 Tarea 3 Pregunta 3

a) Considere la parametrización de la función de distribución $f(\epsilon)$, tal que $f(\epsilon) \geq 0$ para $\epsilon \geq 0$ y $f(\epsilon) = 0$ para $\epsilon < 0$, donde $\epsilon = \Phi_0 - E$ y $\Psi = \Phi_0 - \Phi(r)$. Suponga que $\rho(r) = Cr^{-1,1}$, y basado en esto calcule $\Phi(r)$ y $\Psi(r)$. Suponga que $\Psi(r_0) = 0$ en algún radio r_0 .

Resolvemos Poisson para encontrar el potencial

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) &= -4\pi G r^2 \rho(r) \\ 2r \frac{d\psi}{dr} + r^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} &= -4\pi G r^2 \rho(r) \\ r \frac{d^2\psi}{dr^2} + 2 \frac{d\psi}{dr} &= -4\pi G r \rho(r) \end{aligned} \tag{3.3}$$

sea $\frac{d\psi(r)}{dr} = u(r)$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = \frac{du(r)}{dr}$$

reescribimos (3.3)

$$r \frac{du}{dr}(r) + 2u(r) = -4\pi G r \rho(r)$$

$$\frac{du}{dr}(r) + \frac{2}{r}u(r) = -4\pi G\rho(r) \quad (3.4)$$

En el segundo término de (3.4) al integrarlo nos queda

$$\int \frac{2}{r}dr = 2\ln(|r|) + C$$

si exponentiamos lo anterior nos queda

$$e^{\int \frac{2}{r}dr} = e^{2\ln(|r|)} = r^2$$

Multiplicando ambos lados de (3.4) por r^2

$$r^2 \frac{du(r)}{dr} + 2ru(r) = -4\pi Gr^2\rho(r).$$

Luego como $2r = \frac{d}{dr}r^2$

$$\begin{aligned} r^2 \frac{du(r)}{dr} + \frac{dr^2}{dr}u(r) &= -4\pi Gr^2\rho(r) \\ \frac{d}{dr}(r^2u(r)) &= -4\pi Gr^2\rho(r) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\int \frac{d}{dr}(r^2u(r)) dr = -4\pi G \int r^2\rho(r)dr$$

$$r^2u(r) = -4\pi G \int r^2\rho(r)dr + c_1$$

$$u(r) = \frac{-4\pi G \int r^2\rho(r)dr + c_1}{r^2}$$

Luego como teníamos que

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{d\psi(r)}{dr} \\ \frac{d\psi(r)}{dr} &= \frac{-4\pi G \int r^2\rho(r)dr + c_1}{r^2} \\ \Rightarrow \psi(r) &= \int \frac{-4G\pi \int r^2\rho(r)dr + c_1}{r^2} dr + c_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si ahora reemplazamos en (3.6) $\rho(r) = Cr^{-1.1} = \frac{c}{r^{1.1}}$

$$\begin{aligned} \int r^2cr^{-1.1}dr &= c \int r^{0.9}dr = c \frac{r^{1.9}}{1.9} + c_1 \\ &= 0.5263cr^{1.9} + c_1 \end{aligned}$$

Con lo cual nos queda

$$\psi(r) = \int \frac{-4G\pi(0.53)Cr^{1.9} + c_1}{r^2} dr + c_2$$

$$\begin{aligned}\psi(r) &= -4\pi G(0.53)C \int \frac{r^{1.9}}{r^2} dr + c_1 \int \frac{1}{r^2} dr \\ &= -4\pi G(0.53)C1.1r^{0.9} - \frac{c_1}{r} + c_e\end{aligned}$$

$$\boxed{\psi(r) = -2.36Cr^{0.9} - \frac{c_1}{r} + cte.}$$

Identifiquemos la constante con $\psi(r_0) = 0$, y luego a $\Phi(r) = -\frac{c_1}{r}$, el potencial clásico.

b) Tome la función de distribución como $f(\epsilon) = N\delta(\epsilon)$ y use $\Psi(r)$ como fue calculado en la parte (a). Basado en esta distribución, calcule $\rho(r)$. ¿Coincide con la densidad encontrada en la parte anterior?

c) Suponga ahora que su función de distribución es de la forma $f(\epsilon) = \sum_{i=1}^5 N_i\delta(\epsilon - \epsilon_i)$. Grafique la densidad encontrada en la parte (a) y en la misma figura grafique la densidad que se encuentra usando cada factor $N_i\delta(\epsilon - \epsilon_i)$, de manera que pueda ilustrar como seleccionando los valores apropiados para N_i, ϵ_i se puede aproximar la densidad original. Comente sus resultados.



4. Estabilidad de sistemas sin colisiones

4.1 Tarea 4 Pregunta 1

En condiciones típicas de la Tierra a nivel del mar ($p = 1.01106 \text{ dyn/cm}^2$ y $T = 15^\circ\text{C}$), la densidad del aire es $1.23 \times 10^3 \text{ g/cm}^3$ y la velocidad del sonido es $3.40 \times 10^4 \text{ cm/s}$.

- a) Encuentre en qué fracción cambia la [frecuencia de una onda](#) debido a la acción de la [autogravedad](#) del aire. Haga sus cálculos para $\lambda = 1 \text{ m}$.

Trabajaremos en unidades del Sistema internacional. La densidad de aire del enunciado es incorrecta, o por lo menos no es del orden de magnitud esperado para la Tierra a nivel del mar.

Para sistemas autogravitantes (estáticos $v=0$), tenemos

$$\omega^2 = v_s^2 (k^2 - k_J^2) \quad (4.1)$$

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (4.2)$$

donde v_s es la velocidad del sonido, G la constante de gravitación universal, ρ_0 es la densidad del fluido, y k es dado por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

y según el enunciado debemos considerar $\lambda = 1 \text{ m}$. De esta manera nos queda

$$\omega^2 = \left(340 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \left(2\pi \frac{1}{\text{m}}\right)^2 - 4\pi \left(6.674 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right) \left(1.22 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$$

$$\omega^2 = 4563705 \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \omega = 2136 \frac{1}{s}.$$

Cuando la densidad ρ_0 es pequeña, o dicho de otra manera si ignoramos la densidad del aire, la relación de dispersión se reduce a la de una onda de sonido

$$\omega_*^2 = v_s^2 k^2 \quad (4.3)$$

$$\omega_*^2 = \left(340 \frac{m}{s}\right)^2 \left(2\pi \frac{1}{m}\right)^2 = 4563705$$

Y entonces vemos que la frecuencia de onda debido a la autogravedad del aire es despreciable, ya que $\omega \approx \omega_*$.

b) Encuentre la **longitud de Jeans** del aire (para estas condiciones).

La longitud de Jeans es dada por:

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} \quad (4.4)$$

donde el número de onda de Jeans k_J es definido por

$$k_J^2 \equiv \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \quad (4.5)$$

y entonces nos queda

$$\lambda_J^2 = \frac{\pi v_s^2}{G \rho_0} \quad (4.6)$$

donde v_s es la velocidad del sonido, y G la constante de gravitación universal. Luego con las condiciones dadas en el enunciado la longitud de Jeans es

$$\lambda_J^2 = \frac{\pi \left(3.40 \times 10^2 \frac{m}{s}\right)^2}{\left(6.674 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right) \left(1.23 \frac{kg}{m^3}\right)} = 4.43 \times 10^{15} m^2$$

Así que la longitud de Jeans del aire es

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_J = 66513254 m = 66000 km}$$

Lo que es demasiado alejado de la superficie terrestre y traspasa por lejos el límite superior de la atmósfera (troposfera $\sim 10^4$ km).

4.2 Tarea 4 Pregunta 2

Muestre que la **velocidad de grupo** de una **onda de densidad** en un disco de gas con $Q = 1$ es igual (con diferencia de un signo) a la **velocidad del sonido** en el disco.

Tenemos el parámetro de Toomre

$$Q \equiv \frac{v_s \kappa}{\pi G \Sigma},$$

y si $Q = 1$ como pide el enunciado, entonces

$$v_s \kappa = \pi G \Sigma \quad (4.7)$$

Para ponerlo en contexto, en clases estudiamos perturbaciones estables con forma espiral:

$$\Sigma_1(R, \phi, t) = H(R, t) e^{i(m\phi - f(R, t))}$$

que son soluciones de las ecuaciones que satisfacen las perturbaciones, si satisfacen la ecuación (relación de dispersión).

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma |k| + v_s^2 k^2 \quad (4.8)$$

donde

$$k = \frac{\partial f}{\partial R} \quad \text{es el numero de onda radial}$$

$$\omega = m\Omega_p \quad (\Omega_p : \text{patern speed})$$

$$\text{y la frecuencia epicílica} \quad \kappa = \left(R \frac{d\Omega^2}{dR^2} + 4\Omega^2 \right)^{1/2}$$

Consideremos un disco fluido con una velocidad de sonido distinta de cero. Para perturbaciones axisimétricas, la ecuación (4.8) da

$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma |k| + v_s^2 k^2 \quad (4.9)$$

con (4.7) en (4.9)

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \kappa^2 - 2v_s \kappa |k| + v_s^2 k^2 \\ &\implies \omega = (\kappa - v_s |k|)^2 \\ &\implies \omega = \pm \kappa \mp v_s |k| \end{aligned} \quad (4.10)$$

La velocidad de grupo de un paquete de ondas en un medio dispersivo homogéneo es

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk},$$

derivando (4.10)

$$v_g = \mp v_s$$

En un medio dispersivo, la velocidad del sonido es función de la frecuencia del sonido, a través de la relación de dispersión. Cada componente de frecuencia se propaga a su propia velocidad, llamada velocidad de fase, mientras que la energía de la perturbación se propaga a la velocidad del grupo.

4.3 Tarea 4 Pregunta 3

Considere una distribución de gas uniforme con densidad ρ_0 , presión P_0 y temperatura T_0 , que está inicialmente en reposo y obedece las siguientes ecuaciones de fluidos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \vec{v}) = -P \nabla \cdot \vec{v} - \rho \mathcal{L} \quad (4.13)$$

Donde \mathcal{L} es la **tasa de enfriamiento** por unidad de volumen de gas, y ϵ es la **densidad de energía interna** $\epsilon = \frac{p}{\gamma-1}$. Usamos adicionalmente que el gas está inicialmente en equilibrio térmico (y así $\mathcal{L}(\rho_0, T_0) = 0$) y es ideal, cumpliendo la ley $P = \frac{R}{\mu} \rho T$. Supongamos que a este medio lo perturbamos con funciones del tipo

$$a(\vec{x}, t) = a_1 \exp(\omega t + i \vec{k} \cdot \vec{x})$$

Muestre que a primer orden, las ecuaciones que dominan el sistema perturbado son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} &= -\nabla P_1 \\ \frac{1}{1-\gamma} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\gamma}{1-\gamma} P_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 &= -\rho_0 \rho_1 \mathcal{L}_p - \rho_0 T_1 \mathcal{L}_T \\ \frac{P_1}{P_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{T_1}{T_0} &= 0 \end{aligned}$$

Donde $\mathcal{L}_p \equiv (\partial \mathcal{L} / \partial \rho)_T$ y $\mathcal{L}_T \equiv (\partial \mathcal{L} / \partial T)_\rho$

Comenzando con la Ec. de continuidad (4.11)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

la perturbamos con $\rho = \rho_0 + e\rho_1$ y $\vec{v} = e\vec{v}_1$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + e\rho_1) + \nabla \cdot [(\rho_0 + e\rho_1) (\vec{v}_0 + e\vec{V}_1)] &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial e\rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_0 e\vec{v}_1 + e^2 \rho_1 \vec{V}_1] &= 0 \\ \Rightarrow e \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 e \nabla \cdot \vec{v}_1 + e^2 \rho_1 \nabla \cdot \vec{V}_1 &= 0 \end{aligned}$$

despreciando términos a segundo orden, nos queda

$$\boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0.}$$

Similarmente perturbamos la ecuación de Euler (4.12) con $P = P_0 + eP_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (e\vec{v}_1) + e\vec{v}_1 \cdot \nabla e\vec{v}_1 &= -\frac{\nabla (P_0 + eP_1)}{\rho_0 + e\rho_1} \\ \Rightarrow \left[e\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + e^2 \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{v}_1 \right] (P_0 + e\rho_1) &= -e\nabla P_1 \\ \Rightarrow e\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + e^2 \rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + e^2 \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{v}_1 \rho_0 + e^3 P_1 \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{v}_1 &= -e\nabla P_1 \\ \boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla P_1.} \end{aligned}$$

Luego vamos a reescribir la ecuación (4.13) antes de perturbar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \vec{v}) + P \nabla \cdot \vec{v} &= -\rho \mathcal{L} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \vec{v} + P \vec{v}) &= -\rho \mathcal{L} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{P}{\gamma - 1} \vec{v} + P \vec{v} \right) &= -\rho \mathcal{L} \end{aligned}$$

reemplazando la densidad de energía interna $\varepsilon = \frac{p}{\gamma - 1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left[P \vec{v} \left(\frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) \right] &= -p \mathcal{L} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left[P \vec{v} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \right] &= -\rho \mathcal{L} \end{aligned}$$

y para perturbar consideremos $P = P_0 + eP_1$, $\rho = \rho_0 + e\rho_1$ y para la tasa de enfriamiento $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\rho_0, T_0) + \partial_{\mathcal{L}} \mathcal{L}(P - \rho_0) + \partial_T \mathcal{L}(T - T_0)$, que corresponde a expandir en Taylor a primer orden

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial t} (P_0 + eP_1) + \nabla \cdot \left((P_0 + eP_1) e\vec{v}_1 \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) &= -(\rho_0 + e\rho_1) [\mathcal{L}_p (\rho - \rho_0) + \mathcal{L}_T (T - T_0)] \\ \frac{e}{\gamma - 1} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} eP_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 &= -(\rho_0 + e\rho_1) [\mathcal{L}_p e\rho_1 + \mathcal{L}_T eT_1] \end{aligned}$$

$$\frac{e}{\gamma - 1} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} e P_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = -\rho_0 \mathcal{L}_\rho e \rho_1 - \rho_0 \mathcal{L}_T e T_1 - \mathcal{L}_\rho e \rho_1^2 - \mathcal{L}_T e \rho_1 T_1$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = -\rho_0 \rho_1 \mathcal{L}_\rho - \rho_0 T_1 \mathcal{L}_T.$$

Finalmente, usando gas ideal

$$\frac{P_0}{\rho_0 T_0} = \frac{R}{\mu} \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \frac{P_0 + eP_1}{(P_0 + eT_1)(T_0 + eT_1)} = \frac{R}{\mu}, \quad (4.15)$$

igualando (4.14) con (4.15)

$$\frac{P_0}{\rho_0 T_0} = \frac{P_0 + eP_1}{(\rho_0 + e\rho_1)(T_0 + eT_1)},$$

$$\frac{P_0}{\rho_0 T_0} = \frac{P_0}{(\rho_0 + e\rho_1)(T_0 + eT_1)} + \frac{eP_1}{(\rho_0 + e\rho_1)(T_0 + eT_1)},$$

$$P_0 \left[\frac{1}{\rho_0 T_0} - \frac{1}{(\rho_0 + e\rho_1)(T_0 + eT_1)} \right] = \frac{eP_1}{(\rho_0 + e\rho_1)(T_0 + eT_1)}$$

$$P_0 \left[\frac{1}{\rho_0 T_0} - \frac{1}{\rho_0 T_0 + e(\rho_0 T_1 + P_1 T_0)} \right] = \frac{eP_1}{\rho_0 T_0 + e(\rho_0 T_1 + P_1 T_0)},$$

$$P_0 \left[\frac{e(P_0 T_1 + P_1 T_0)}{\rho_0 T_0 (\rho_0 T_0 + e(P_0 T_1 + P_1 T_0))} \right] = \frac{eP_1}{P_0 T_0 + e(P_0 T_1 + \rho_1 T_0)},$$

$$\frac{P_0}{P_0 T_0} (P_0 T_1 + P_1 T_0) = P_1$$

$$\frac{T_1}{T_0} + \frac{P_1}{P_0} = \frac{P_1}{P_0},$$

obtenemos finalmente la última ecuación pedida en el enunciado,

$$\frac{P_1}{P_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{T_1}{T_0} = 0.$$