

Problemas Resueltos de Electrodinámica.

Profesor: Alejandro Valdivia.
Eduardo Flández, Alejandro Zamorano

& Nicolás Dünkler

DFC, Universidad de Chile 2022

PROBLEMAS DEL CURSO DE ELECTRODINÁMICA, DICTADO POR EL DR. ALEJANDRO VALDIVIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE CHILE, SANTIAGO.
Versión 2022



Contents

1	Electroestática	7
1.1	Método de la carga imágen	7
1.1.1	Ejemplos	7
1.1.2	Problemas resueltos	8
1.2	Ecuación de Laplace en cartesianas.	9
1.2.1	Problemas resueltos	9
1.3	Ecuación de Laplace en polares	9
1.3.1	Problemas resueltos	9
1.4	Ecuación de Laplace en esféricas	9
1.4.1	Problemas resueltos	9
1.5	El método de la función de Green	10
1.5.1	Ejemplos	10
1.5.2	Problemas resueltos	16
2	Expansión multipolar y medios	19
2.1	Expansión multipolar y dieléctricos	19
2.1.1	Ejemplos	19
2.1.2	Problemas resueltos	24
2.2	Magnetostática	26
2.2.1	Ejemplos	26
2.2.2	Problemas resueltos	32

3	Ecuaciones de Maxwell	33
3.1	Problemas resueltos	33
4	Principio de la relatividad	37
4.1	Ejemplos	37
4.2	Problemas resueltos	40
5	Radiación y antenas	43
5.1	Problemas resueltos	43
6	Ondas, óptica y plasmas	45
6.1	Plasmas	45
6.1.1	Problemas resueltos	45
7	Guías de ondas, cavidades resonantes y conductores	47
7.1	Guías de onda	47
7.1.1	Problemas resueltos	47
8	Problemas resueltos	49
8.1	Disco dentro de una esfera	49
8.2	Dos placas de metal conectadas a tierra	54
8.3	Cuartos de un cilindro	57
8.4	Esferas concéntricas	59
8.5	Potencial de una carga dentro de una esfera hueca	63
8.6	Potencial de una pizza con un objeto dentro	65
8.7	Línea cargada entre planos conductores que se intersectan	67
8.8	Función de Green entre dos planos	70
8.9	Esferas concéntricas con dieléctrico	73
8.10	Momentos multipolares de cuadrupolo	77
8.11	Esfera cargada que gira	78
8.12	Semiesfera dipolar en un plano	82
8.13	Cilindro magnetizado	83
8.14	Esfera de material magnetizado	84
8.15	Sábana infinita	88
8.16	Campos electromagnéticos de un cascarón esférico	90

8.17	Condensador de placas circulares	91
8.18	Potencia irradiada por un cascarón esférico	93
8.19	Anillo que cae en un campo magnético	100
8.20	Círculo de corriente circular	103
8.21	Fem producida por un circuito	108
8.22	Fem producida por cascarón esférico	109
8.23	Línea de transmisión	110
8.24	Suma de velocidades paralelas	113
8.25	Escalares de Lorentz	115
8.26	Espejo relativista	118
8.27	Conservación de la carga	122
8.28	Lámina infinita relativista	125
8.29	Partícula en un campo magnético	129
8.30	Dipolo magnético oscilatorio	133
8.31	Hamiltoniano de una partícula	136
8.32	La paradoja de los gemelos	139
8.33	Cascarrón esférico con línea cargada	146
8.34	Capacitor de placas paralelas con anillo	152
8.35	Funciones de Green	156
8.36	Plano con semiesfera dieléctrica	161
8.37	Plasma	164
8.38	Semiesfera dipolar	168
8.39	Campos radiados por mitades de una esfera	171
8.40	Dinámica del plasma	173
8.41	Propagación oblicua	179
8.42	Rayo hacia la ionósfera	182
8.43	Plasma no magnetizado	183
8.44	Guía dieléctrica	191

1. Electroestática

1.1 Método de la carga imágen

1.1.1 Ejemplos

1. El problema clásico de la carga imagen

Supongamos que una carga puntual q se mantiene a una distancia d sobre un plano conductor infinito conectado a tierra (figura 1.1).

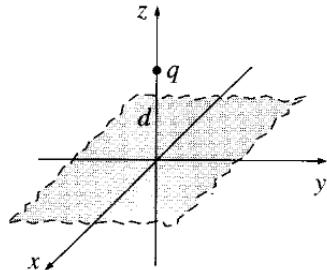


Figure 1.1: Superficie plana.

¿Cuál es el potencial en la región por encima del plano?

Solución:

Lo que va a pasar es que q inducirá una cierta cantidad de carga negativa en la superficie cercana del conductor; el potencial total se debe en parte a q directamente y en parte a esta carga inducida. Pero, ¿cómo podemos calcular el potencial si no sabemos cuánta carga se induce o cómo se distribuye?

Desde un punto de vista matemático, nuestro problema es [resolver la ecuación de Poisson en la región \$z > 0\$](#) , con una carga puntual q en $(0, 0, d)$, sujeto a las condiciones de contorno:

(a) $\Phi = 0$ cuando $z = 0$ ([dado que el plano conductor está conectado a tierra](#)), y

(b) $\Phi = 0$ lejos de la carga (es decir, para $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$).

Luego debemos [hallar una función que cumpla con estos requisitos](#).

Truco: Olvidemos el problema real; vamos a estudiar otro problema diferente. Este [nuevo problema consta de dos cargas puntuales](#), $+q$ en $(0, 0, d)$ y $-q$ en $(0, 0, -d)$, y ningún plano conductor como se muestra en la Figura 1.2.

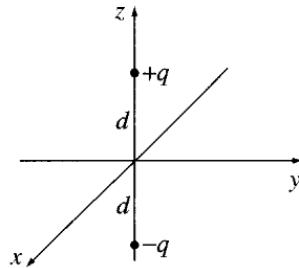


Figure 1.2: Un nuevo problema

Para esta configuración, considerando las distancias desde (x, y, z) a las cargas $+q$ y $-q$, respectivamente, encontramos el potencial:

$$\Phi = q \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$

(a) $\Phi = 0$ cuando $z = 0$ y

(b) $\Phi \rightarrow 0$ $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$

y la única carga en la región $z > 0$ es la carga puntual $+q$ en $(0, 0, d)$.

[¡Pero estas son precisamente las condiciones del problema original!](#)

Evidentemente, la segunda configuración produce exactamente el mismo potencial que la primera configuración, en la región “superior” $z > 0$. (La región “inferior”, $z < 0$, es completamente diferente, pero no nos interesa, la parte superior es todo lo que necesitamos.)

Conclusión: El potencial de una carga puntual por encima de un conductor infinito puesto a tierra está dado por la ecuación encontrada anteriormente, para $z > 0$.

El método que se acaba de describir no se limita a una sola carga puntual; [cualquier distribución de carga estacionaria cerca de un plano conductor conectado a tierra se puede tratar de la misma manera](#), introduciendo su imagen especular, de ahí el nombre de método de imágenes. (Recuerde que las cargas de la imagen tienen el signo opuesto; esto es lo que garantiza que el plano xy estará en el potencial cero).

1.1.2 Problemas resueltos

1. Potencial de una carga dentro de una esfera hueca (Solución: 8.5)

Encuentre el potencial de una carga puntual que está en cualquier lugar, dentro de una esfera de radio a conductora, hueca y conectada a tierra. Además encuentre la densidad de carga inducida en la superficie y en qué dirección.

1.2 Ecuación de Laplace en cartesianas.

1.2.1 Problemas resueltos

1. Dos placas de metal a tierra (Solución: 8.2)

Dos placas infinitas de metal conectadas a tierra se encuentran paralelas al plano xz , una en $y = 0$ y la otra en $y = a$. El extremo izquierdo, en $x = 0$, se cierra con una tira infinita aislada de las dos placas y mantenida a un potencial específico $V_0(y)$. Encuentre el potencial dentro de esta ranura.

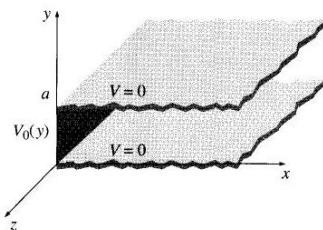


Figure 1.3: La ranura.

1.3 Ecuación de Laplace en polares

1.3.1 Problemas resueltos

1. Cuartos de un cilindro (Solución: 8.3)

Una variante del problema bidimensional anterior es un cilindro conductor largo y hueco de radio b que se divide en cuartos iguales, los segmentos alternos se mantienen en potencial $+V$ y $-V$.

(a) Resuelva mediante la solución en serie y demuestre que el potencial dentro del cilindro es

$$\phi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b} \right)^{4n+2} \frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}$$

(b) Sume la serie y demuestre que

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho^2 b^2 \sin 2\phi}{b^4 - \rho^4} \right)$$

(c) Grafique las líneas de campo y las equipotenciales

1.4 Ecuación de Laplace en esféricas

1.4.1 Problemas resueltos

1. Esferas concéntricas (Solución: 8.4)

Dos esferas concéntricas tienen radios a, b ($b > a$) y cada una está dividida en dos hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interior y el hemisferio inferior de la esfera exterior se mantienen en potencial V . Los otros hemisferios están a potencial cero. Determine el potencial en la región $a \leq r \leq b$ como una serie en polinomios de Legendre. Incluya términos por lo menos hasta $l = 4$. Verifique su solución con los resultados conocidos en el caso límite $b \rightarrow \infty$ y $a \rightarrow 0$.

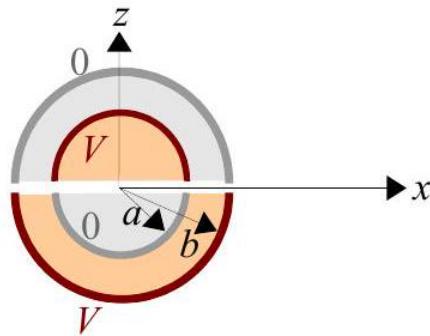


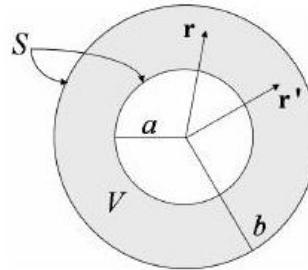
Figure 1.4: Dos esferas concéntricas.

1.5 El método de la función de Green

1.5.1 Ejemplos

1. Expansión de la función de Green en armónicos esféricos.

Consideremos un volumen V limitado por dos esferas concéntricas que constituyen la superficie S . Sean a el radio de la esfera interior y b el radio de la esfera exterior. Entonces, la magnitud de \mathbf{r} en la región de interés para la solución es tal que $a \leq r \leq b$.



Llegue a la siguiente expansión de la función de Green:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{\left(r'_< - \frac{a^{2l+1}}{r'_<} \right) \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>}{b^{2l+1}} \right)}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).$$

donde $r_>$ es el mayor entre r y r' , y $r_<$ es el menor entre r y r' .

Solución:

- Queremos expandir la función de Green en armónicos esféricos, ya que esta satisface la Ec. de Poisson
- La función $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ satisface Poisson:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

donde el subíndice del Laplaciano indica derivadas con respecto a las coordenadas de \mathbf{r} , con condición de frontera $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_S = 0$, para $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ en $r = a$ y en $r = b$.

- Expandimos la delta de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ se puede expresar en coordenadas esféricas como

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$$

y usamos la [relación de completitud de los armónicos esféricos](#)

$$\boxed{\delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}$$

y así nos queda

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Y así se llega a escribir la Ec. de Poisson en términos de armónicos esféricos:

$$\boxed{\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).} \quad (1.1)$$

- Supongamos una solución $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, como función de $\mathbf{r}(r, \theta, \phi)$, en forma de expansión en armónicos esféricos:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(r, r', \theta, \theta', \phi, \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm}(r, r', \theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.2)$$

Para determinar los coeficientes A_{lm} , debemos sustituir esta expansión en la Ec.(1.1) y comparar ambos lados de la relación resultante.

Aplicando el Laplaciano en coordenadas esféricas al izquierdo de la Ec. (1.1) se obtiene:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rG) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}$$

reemplazando (1.2)

$$\begin{aligned} \nabla_r^2 G &= \sum_l \sum_m \left\{ \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA_{lm}(r, r', \theta', \phi')) + \frac{(r, r', \theta', \phi')}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y_{lm}(\theta, \phi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Como los $Y_{lm}(\theta, \phi)$ satisfacen la ecuación angular

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \right) + l(l+1)Y_{lm} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y_{lm}(\theta, \phi) = 0.$$

y si reemplazamos esta Ec. angular en (1.3) da:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \left[\frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA_{lm}(r, r', \theta', \phi')) - \frac{A_{lm}(r, r', \theta', \phi')}{r^2} l(l+1)Y_{lm}(\theta, \phi) \right]$$

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_{lm}(r, r', \theta', \phi')) - \frac{l(l+1) A_{lm}(r, r', \theta', \phi')}{r^2} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.4)$$

Si comparamos (1.4) con (1.1), encontramos la siguiente relación entre los coeficientes de $Y_{lm}(\theta, \phi)$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_{lm}(r, r', \theta', \phi')) - \frac{l(l+1) A_{lm}(r, r', \theta', \phi')}{r^2} = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') Y_{lm}^*(\theta', \phi'). \quad (1.5)$$

La Ec. (1.5) es una ecuación en derivadas parciales para $A_{lm}(r, r', \theta', \phi')$. Su forma sugiere buscar una solución por separación de variables, tal como

$$A_{lm}(r, r', \theta', \phi') = g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi').$$

Sustituyendo en la Ec. (1.5) da la siguiente ecuación para $g_l(r, r')$:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_l(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r'). \quad (1.6)$$

Consideremos primero la Ec. (1.6) para el caso $r \neq r'$,

$$(rg)'' - \frac{l(l+1)}{r} g = 0.$$

Digamos que $U = rg$, se obtiene la ecuación

$$U'' - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0,$$

que tiene solución de la forma:

$$U = Ar^{l+1} + Br^{-l};$$

por lo tanto,

$$g(r, r') = Ar^l + Br^{-(l+1)}. \quad (1.7)$$

La función $g(r, r')$ corresponde a la parte radial de la función de Green en la Ec. (1.2), y por lo tanto debe satisfacer las condiciones de frontera

$$G|_S = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(a, r') = 0, & r = a \\ g(b, r') = 0, & r = b. \end{cases}$$

Evaluando la función $g(r, r')$ de la Ec. (1.7) en $r = a$, obtenemos

$$Aa^l + Ba^{-(l+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -Aa^{2l+1},$$

luego,

$$g(r, r') = A \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right), \quad \text{válida para } r < r'.$$

Similarmente, en $r = b$ obtenemos

$$A = -Bb^{-(2l+1)}$$

luego,

$$g(r, r') = B \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right), \quad \text{válida para } r > r'.$$

Puesto que la función de Green debe tener simetría ante el intercambio $r \leftrightarrow r'$, la función $g(r, r')$ se puede expresar en general como

$$g(r, r') = C \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right), \quad (1.8)$$

donde $r_{>}$ es el mayor entre r y r' , y $r_{<}$ es el menor entre r y r' .

- **Para determinar la constante C ,** consideramos la Ec. (1.6) para $g(r, r')$, en el caso $r \rightarrow r'$ tal que $\delta(r - r') \neq 0$,

$$\frac{d^2}{dr^2} rg(r, r') - \frac{l(l+1)}{r} g(r, r') = -\frac{4\pi}{r} \delta(r - r').$$

Integraremos todos los términos de esta ecuación desde $r = r' - \varepsilon$ hasta $r = r' + \varepsilon$,

$$\int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{d^2}{dr^2} (rg(r, r')) dr - l(l+1) \int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{g(r, r')}{r} dr = -4\pi \int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{\delta(r - r')}{r} dr$$

y tomamos el límite $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{d}{dr} [rg(r, r')] \Big|_{r=r'+\varepsilon} - \frac{d}{dr} [rg(r, r')] \Big|_{r=r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'}. \quad (1.9)$$

Existe una discontinuidad en la derivada de $rg(r, r')$ en $r = r'$.

Debemos evaluar las derivadas $(rg)'|_{r=r'+\varepsilon}$ y $(rg)'|_{r=r'-\varepsilon}$, y tomar el límite $\varepsilon \rightarrow 0$:

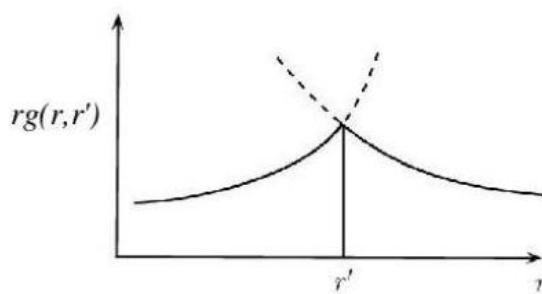


Figure 1.5: Discontinuidad en la derivada de la parte radial de la función de Green en $r = r'$.

i) Para $r = r' + \varepsilon$, tenemos $r > r'$, y por lo tanto, $r_{<} = r', r_{>} = r$. Luego, utilizando la Ec. (1.8),

$$rg(r, r') = C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}} \right).$$

Evaluamos la derivada en $r = r' + \varepsilon$, y hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'+\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} &= -C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[\frac{l}{r'^{l+1}} + \frac{(l+1)r'^l}{b^{2l+1}} \right] \Big|_{r=r'} \\ &= -C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[\frac{l}{r'^{l+1}} + \frac{(l+1)r'^l}{b^{2l+1}} \right] \\ &= -Cr'^l \left(1 - \frac{a^{2l+1}}{r'^{2l+1}} \right) \frac{1}{r'^{l+1}} \left[l + (l+1) \frac{r'^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'+\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} = -\frac{C}{r'} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \quad (1.10)$$

ii) Para $r = r' - \varepsilon$, tenemos $r < r'$, y por lo tanto $r_< = r, r_> = r'$. Luego, utilizando la Ec. (1.8),

$$rg(r, r') = C \left(r^{l+1} - \frac{a^{2l+1}}{r^l} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right).$$

Evaluamos la derivada en $r = r' - \varepsilon$, y hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'-\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} &= C \left[(l+1)r^l + \frac{la^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) \Big|_{r=r'} \\ &= C \frac{r'^l}{r'^{l+1}} \left[(l+1) + \frac{la^{2l+1}}{r'^{2l+1}} \right] \left(1 - \frac{r'^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'-\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} = \frac{C}{r'} \left[(l+1) + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \quad (1.11)$$

Sustituyendo (1.10) y (1.11) en la Ec. (1.9), tenemos:

$$-\frac{C}{r'} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] - \frac{C}{r'} \left[(l+1) + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] = -\frac{4\pi}{r'}$$

de donde podemos obtener C ,

$$\begin{aligned}
 & C \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} - l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} - (l+1) \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right. \\
 & \quad \left. + (l+1) - (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} - l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] = \frac{4\pi}{r'}, \\
 & C \left[l - (l+1) \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} + (l+1) - l \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right] = \frac{4\pi}{r'}, \\
 & C(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right] = \frac{4\pi}{r'} \\
 \Rightarrow & \boxed{C = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]}}
 \end{aligned}$$

Luego, la función $g(r, r')$ en la Ec. (1.8) es:

$$g(r, r') = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left(r'_< - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>}{b^{2l+1}} \right)$$

Entonces, la función de Green en la Ec. (1.2)

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(r, r', \theta, \theta', \phi, \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi),
 \end{aligned}$$

se puede expresar, sustituyendo $g(r, r')$, como

$$\boxed{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\left(r'_< - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>}{b^{2l+1}} \right)}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).} \quad (1.12)$$

La Ec. (1.12) constituye la expansión de la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en coordenadas esféricas, donde $r_>$ es el mayor entre r y r' , y $r_<$ es el menor entre r y r' .

Algunos casos particulares de interés son:

- (a) **Potencial de una carga puntual en el espacio libre**, que corresponde al caso $a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty$,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \frac{r'_<}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- (b) **Problema interior de la esfera**, que corresponde a $a \rightarrow 0, b$ finito, igual al radio de la esfera.

- (c) **Problema exterior de la esfera**, que corresponde a a finito, igual al radio de la esfera, y $b \rightarrow \infty$.

1.5.2 Problemas resueltos

1. Funciones de Green (Solución: 8.35)

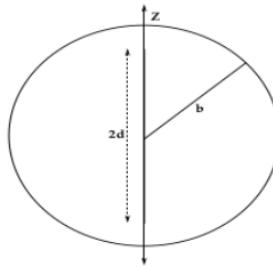
Encuentre la función de Green en los siguientes casos.

- Esfera en el vacío (condición de borde en infinito).
- Cascarón esférico conductor de radio b .
- Esferas conductoras concéntricas de radios $a < b$.
- Utilice el resultado del cascarón esférico de radio b para encontrar el potencial al interior de la esfera cuando se posiciona un anillo de radio a y carga Q concéntrica a la esfera.

2. Cascarón esférico con línea cargada (Solución: 8.33)

Una línea cargada de largo $2d$ con carga total Q tiene una densidad lineal de carga que varía como $(d^2 - z^2)$, donde z es la distancia medida desde el punto medio. Un cascarón esférico conductor (a tierra) de radio $b > d$ está centrado en el punto medio de la línea cargada.

- Encuentre el potencial en el espacio como una expansión de polinomios de Legendre.
- Calcule la densidad superficial de carga inducida sobre el cascarón.
- Calcule el límite $d \ll b$ y compare con el caso correspondiente.



3. Disco dentro de una esfera (Solución: 8.1)

Considere una esfera conductora de radio R , conectada a tierra. En su interior, se encuentra un disco $b < R$. Su carga Q se encuentra distribuida uniformemente en la superficie. El centro del disco y la esfera son coincidentes. Encuentre la función de Green dentro de la esfera. A continuación, describa la densidad de carga y encuentre el potencial dentro de esta.

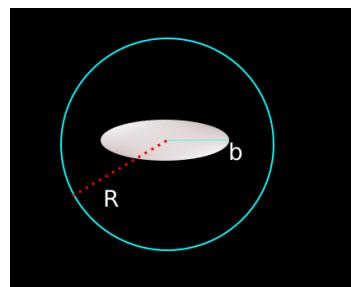


Figure 1.6: Disco dentro de una esfera

4. Green Dirichlet planos (Solución: 8.8)

La función de Green de Dirichlet para el espacio entre dos planos $z = 0$ y $z = L$ permite la discusión de una carga puntual o distribución de carga entre los dos planos conductores a

potencial cero

- (a) Usando coordenadas cilíndricas demuestre que una forma de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi\rho_-}{L}\right) K_m\left(\frac{n\pi\rho_+}{L}\right),$$

- (b) Muestre que una forma alternativa de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') \frac{\sinh(kz_-) \sinh(k(L-z_+))}{\sinh(kL)},$$

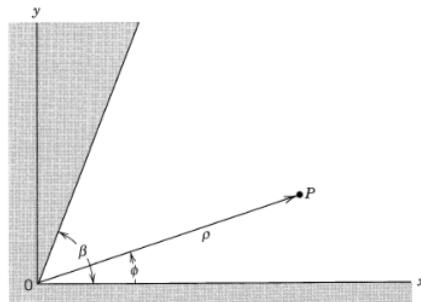
5. Capacitor de placas paralelas con anillo (Solución: 8.34)

Considere un capacitor formado por dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia L y mantenidas a una diferencia de potencial V_0 . Además, dentro de este capacitor tenemos un anillo de radio a , con una densidad de carga lineal λ constante, puesto en un plano paralelo a las placas, y a la mitad de distancia entre ellas. Construya una función de Green para este problema y resuelva el potencial entre las placas, ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie de los conductores?

6. Línea cargada entre planos conductores que se intersectan (Solución: 8.7)

Dos planos conductores con potencial cero se encuentran a lo largo del eje z , formando un ángulo β entre ellos, como en la figura 8.8. Una línea de carga unitaria paralela al eje z está ubicada entre los planos en la posición (ρ', ϕ') .

Encuentre el potencial, y a partir de este la función de Green.



7. Potencial de una pizza con un objeto dentro (Solución: 8.6)

Considere que en el DFC se ha realizado una comida para algún evento tipo puerta de honor. En el cual, un trozo de pizza ha sido conectado a un potencial $\phi(r=a, \phi) = V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha)$ para corroborar experimentalmente un problema que se estudió en métodos de la física matemática II, la pizza utilizada posee ciertas propiedades, definida por los bordes $\phi = 0$ y $\phi = \alpha$, y también el borde $r = a$. Además, una persona ha puesto por error un plano cargado sobre la pizza en $r = b$, y $0 \leq \phi \leq \beta$, de densidad uniforme λ . Calcule el potencial $\phi(r, \phi)$, y salve la pizza.

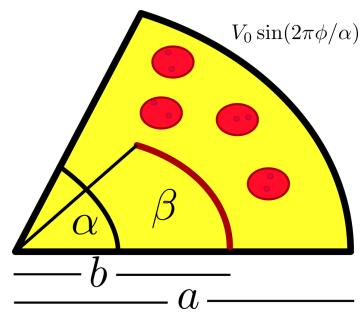


Figure 1.7: Pizza del problema, los puntos rojos sólo son decorativos para el problema.

2. Expansión multipolar y medios

2.1 Expansión multipolar y dieléctricos

2.1.1 Ejemplos

1. Dos dieléctricos semi-infinitos

Para ilustrar el método de imágenes para dieléctricos, consideramos una carga puntual q incrustada en un dieléctrico semi-infinito ϵ_1 a una distancia d de una interfaz plana que separa el primer medio de otro dieléctrico semi-infinito ϵ_2 . La superficie puede tomarse como el plano $z = 0$, como se muestra en la Fig. 2.1. Debemos encontrar la solución adecuada a las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad z > 0 \\ \epsilon_2 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad z < 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \text{En todas partes} \end{array} \right\}$$

sujetas a las condiciones de borde en $z = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{Bmatrix} \epsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Dado que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ en todas partes, \mathbf{E} es derivable de la forma habitual a partir de un potencial Φ . Al intentar usar el método de la imagen, es natural ubicar una carga de imagen q' en la posición simétrica A' que se muestra en la Fig. 2.2. Entonces para $z > 0$ el potencial en un punto P descrito en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) será

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right), \quad z > 0$$

donde $R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}$, $R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}$. Hasta ahora, el procedimiento es completamente análogo al problema con un material conductor en lugar del dieléctrico ϵ_2 para $z < 0$. Pero ahora debemos especificar el potencial para $z < 0$. Como no hay cargas en la región $z < 0$,

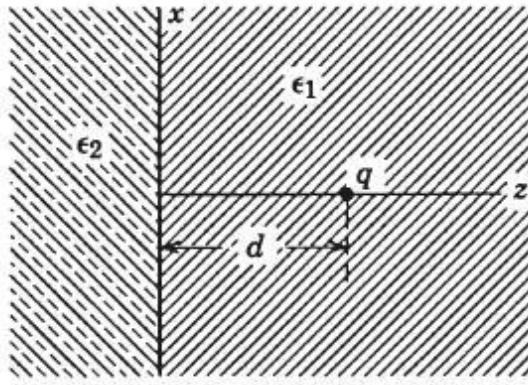


Figure 2.1: Dos dieléctricos semi-infinitos

debe ser una solución de la ecuación de Laplace sin singularidades en esa región. Claramente, la suposición más simple es que para $z < 0$ el potencial es equivalente al de una carga q'' en la posición A de la carga actual q :

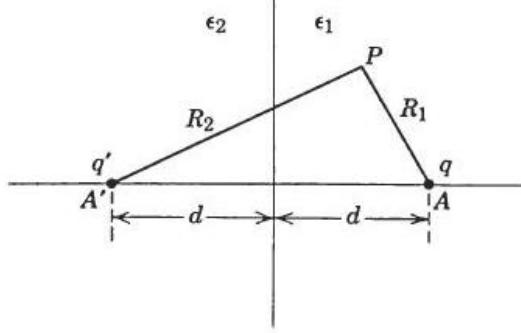


Figure 2.2: Esquema de carga imagen

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{q''}{R_1}, \quad z < 0$$

Ya que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

mientras

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

las condiciones de contorno (2.1) conducen a:

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2} q'' \end{aligned}$$

Estos se pueden resolver para obtener las cargas de imagen q' y q'' :

$$\left. \begin{array}{l} q' = -\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) q \\ q'' = \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) q \end{array} \right\}$$

Para los dos casos $\epsilon_2 > \epsilon_1$ y $\epsilon_2 < \epsilon_1$ las líneas de fuerza (en realidad líneas de \mathbf{D}) se muestran en la Fig 2.3

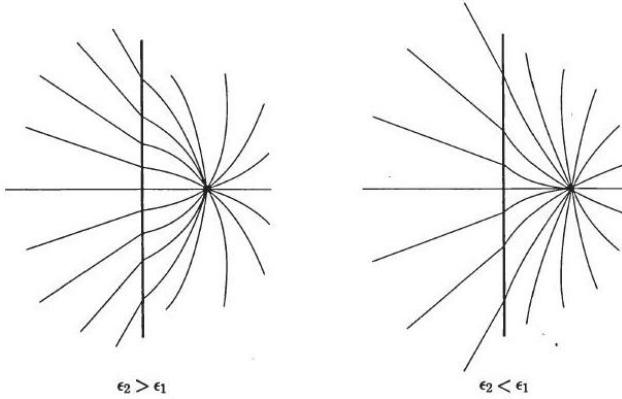


Figure 2.3: Líneas de desplazamiento eléctrico para una carga puntual incrustada en un ϵ_1 dieléctrico cerca de una losa semi-infinita de ϵ_2 dieléctrico.

La densidad de carga de polarización está dada por $-\nabla \cdot \mathbf{P}$. Dentro de cada dieléctrico, $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$, de modo que $-\nabla \cdot \mathbf{P} = -\chi_e \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, excepto en el punto de carga q . En la superficie, sin embargo, χ_e da un salto discontinuo, $\Delta\chi_e = (1/4\pi)(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ cuando z pasa por $z = 0$. Esto implica que hay una densidad de carga superficial de polarización en el plano $z = 0$:

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_{21}$$

donde \mathbf{n}_{21} es la unidad normal del dieléctrico 1 al dieléctrico 2 y \mathbf{P}_i es la polarización en el dieléctrico i en $z = 0$. Ya que

$$\mathbf{P}_i = \left(\frac{\epsilon_i - 1}{4\pi}\right) \mathbf{E} = -\left(\frac{\epsilon_i - 1}{4\pi}\right) \nabla \Phi$$

es una cuestión simple demostrar que la densidad de carga de polarización es

$$\sigma_{\text{pol}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \quad (2.2)$$

En el límite $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$ el dieléctrico ϵ_2 se comporta como un conductor en el sentido de que el campo eléctrico en su interior se vuelve muy pequeño y la densidad de carga superficial (2.2) se acerca al valor apropiado para una superficie conductora.

2. Esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme

Una esfera dieléctrica de radio a con constante dieléctrica ϵ colocada en un campo eléctrico inicialmente uniforme que a grandes distancias de la esfera está dirigido a lo largo del eje z y tiene magnitud E_0 , como se indica en la Fig 2.4

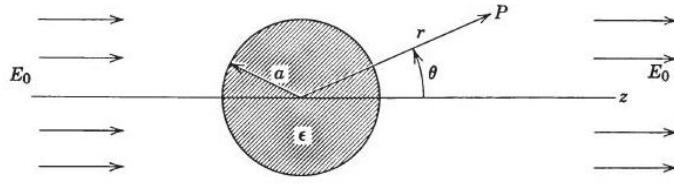


Figure 2.4: Esfera dieléctrica

Tanto dentro como fuera de la esfera no hay cargas libres. En consecuencia, el problema consiste en resolver la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno apropiadas en $r = a$. De la simetría axial de la geometría podemos tomar la solución de la forma:

$$\text{Dentro: } \Phi_{\text{in}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (2.3)$$

$$\text{Fuera: } \Phi_{\text{out}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[B_l r^l + C_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \theta) \quad (2.4)$$

A partir de la condición de contorno en el infinito ($\Phi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$) encontramos que el único B_1 que no desaparece es $B_1 = -E_0$. Los otros coeficientes se determinan a partir de las condiciones de contorno en $r = a$:

$$\begin{aligned} \text{Tangencial } E : & \quad -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \\ \text{Normal } D : & \quad -\epsilon \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cuando se sustituyen las series (2.3) y (2.4), resultan dos series de polinomios de Legendre iguales a cero. Dado que estos deben desaparecer para todo θ , el coeficiente de cada polinomio de Legendre debe desaparecer por separado. Para la primera condición de frontera esto conduce a las relaciones:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \\ A_l &= \frac{C_l}{a^{2l+1}}, \quad \text{para } l \neq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

mientras que el segundo da:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon A_1 &= -E_0 - 2 \frac{C_1}{a^3} \\ \epsilon l A_1 &= -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}}, \quad \text{para } l \neq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Las segundas ecuaciones en (2.6) y (2.7) pueden satisfacerse simultáneamente solo con $A_l = C_l = 0$ para todo $l \neq 1$. Los coeficientes restantes se dan en términos del campo eléctrico aplicado E_0 :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\left(\frac{3}{2+\epsilon}\right) E_0 \\ C_1 &= \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) a^3 E_0 \end{aligned} \right\}$$

El potencial es por lo tanto

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &= -\left(\frac{3}{\epsilon+2}\right)E_0r\cos\theta \\ \Phi_{\text{out}} &= -E_0r\cos\theta + \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta \end{aligned} \right\}$$

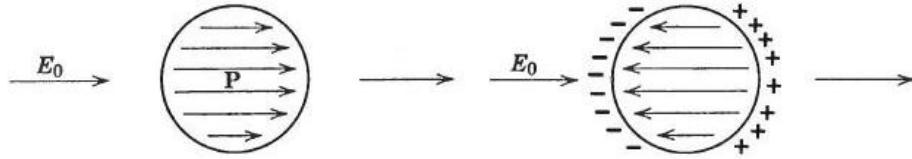


Figure 2.5: Esfera dieléctrica en un campo uniforme E_0 , que muestra la polarización a la izquierda y la carga de polarización con su campo eléctrico opuesto asociado a la derecha.

El potencial dentro de la esfera describe un campo eléctrico constante paralelo al campo aplicado con magnitud

$$E_{\text{en}} = \frac{3}{\epsilon+2}E_0 < E_0 \quad \text{si} \quad \epsilon > 1 \quad (2.8)$$

Fuera de la esfera el potencial es equivalente al campo aplicado E_0 más el campo de un dipolo eléctrico en el origen con momento dipolar:

$$p = \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)a^3E_0 \quad (2.9)$$

orientado en la dirección del campo aplicado. El momento dipolar se puede interpretar como la integral de volumen de la polarización \mathbf{P} . La polarización es

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\epsilon-1}{4\pi}\right)\mathbf{E} = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)\mathbf{E}_0$$

Es constante en todo el volumen de la esfera y tiene una integral de volumen dada por (2.9). La densidad de carga superficial de polarización es, $\sigma_{\text{pol}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r$:

$$\sigma_{\text{pol}} = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)E_0\cos\theta$$

Se puede pensar que esto produce un campo interno dirigido en dirección opuesta al campo aplicado, reduciendo así el campo dentro de la esfera a su valor (2.8), como se muestra en la figura 2.5.

3. Cavidad esférica en un medio dieléctrico

El problema de una cavidad esférica de radio a en un medio dieléctrico con constante dieléctrica ϵ y con un campo eléctrico aplicado E_0 paralelo al eje z , como se muestra en la Fig. 2.6, puede manipularse exactamente de la misma manera que la esfera dieléctrica. De hecho, la inspección de las condiciones de contorno (2.5) muestra que los resultados para la cavidad se pueden obtener a partir de los de la esfera reemplazando $\epsilon \rightarrow (1/\epsilon)$. Así, por ejemplo, el campo dentro de la cavidad es uniforme, paralelo a \mathbf{E}_0 , y de magnitud:

$$E_{\text{in}} = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1}E_0 > E_0 \quad \text{si} \quad \epsilon > 1$$

De manera similar, el campo exterior es el campo aplicado más el de un dipolo en el origen orientado en sentido opuesto al campo aplicado y con momento dipolar:

$$p = \left(\frac{\epsilon - 1}{2\epsilon + 1} \right) a^3 E_0$$

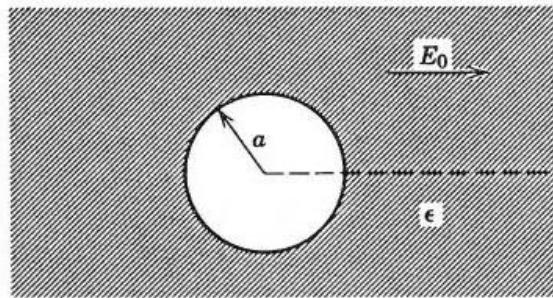


Figure 2.6: Cavidad esférica en un dieléctrico con un campo uniforme aplicado.

2.1.2 Problemas resueltos

1. Momentos multipolares de cuadrupolo (Solución: 8.10)

Considere un sistema como un cuadrupolo, es decir, cuatro partículas puntuales cargadas ubicadas en los vértices de un cuadrado de arista d . Las partículas tienen alternadamente, carga Q y $-Q$. Encuentre los momentos multipolares no nulos.

2. Esferas concéntricas con dieléctrico (Solución: 8.9)

Dos esferas concéntricas de radio a y b , respectivamente tienen carga $\pm Q$. El espacio vacío entre las esferas está a la mitad llenado con dieléctrico, por la parte del hemisfera con constante dieléctrica ϵ , como se ve en la figura 2.7

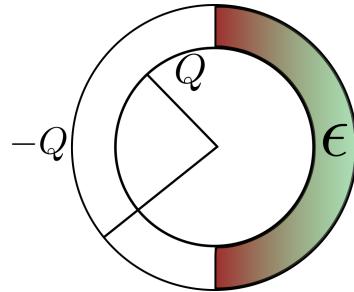


Figure 2.7: Figura del problema.

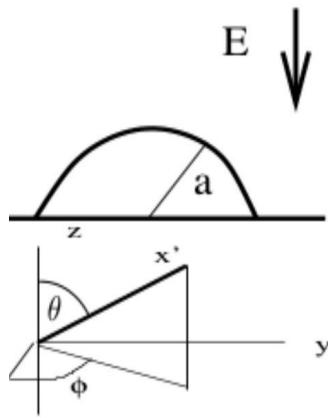
Encuentre el campo eléctrico entre las dos esferas utilizando dos formas distintas, note que una es más sencilla que la otra.

3. Plano con semiesfera dieléctrica (Solución: 8.36)

Suponga un plano infinito conductor a tierra ($\psi = 0$) con una semiesfera dieléctrica de radio $r < a$ en el origen del plano conductor.

a) Asuma un campo eléctrico asintótico uniforme E_0 en la dirección $-\hat{z}$ para $r \rightarrow \infty$. Encuentre el potencial en todo el espacio.

b) Encuentre la función de Green para $r > a$.



4. Semiesfera dipolar en un plano (Solución: 8.12 y 8.38)

Sea una semiesfera de radio $r = a$ hecha de material dipolar eléctrico permanente y puesto sobre un conductor plano infinito. La dirección de \vec{P} es perpendicular a la superficie del conductor. Calcule el campo eléctrico \vec{E} producido por esta configuración.



Figure 2.8: (a) Semiesfera con \vec{P} constante

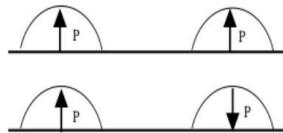


Figure 2.9: (b) Posibles configuraciones

5. Plasma (Solución: 8.37)

Un medio dieléctrico consistente en cargas libres positivas y negativas (un plasma) responde a los campos eléctricos suavemente variables en el espacio, manteniendo el equilibrio térmico, de manera que

$$n_i(z) \approx n_{i0} \exp \left[-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right]$$

donde $\Phi(z)$ es el potencial electrostático, T es la temperatura, q_i es la carga de la partícula i y n_{i0} es la densidad de la partícula i cuando $\Phi(z) = 0$, expresada en cantidad de partículas por unidad de volumen.

a) Demuestre que si el potencial es pequeño, la densidad de carga neta está dada por

$$\rho(z) = -\frac{\Phi(z)}{4\pi\lambda^2} \quad \frac{1}{\lambda^2} = 4\pi \sum_i \frac{n_{i0} q_i^2}{k_B T}$$

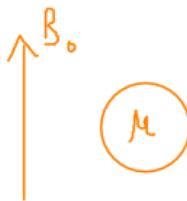
- b) Suponga que un electrodo con forma de plano infinito con densidad de carga σ se inserta en el plasma en $z = 0$. Calcule el potencial $\Phi(z)$ en ambos lados del electrodo.
- c) ¿Qué condición debe cumplir σ tal que la solución sea válida?
- d) Encuentre la densidad de polarización \vec{P} para este plasma.

2.2 Magnetostática

2.2.1 Ejemplos

1. Esfera en presencia de un campo magnético

Una esfera de radio a y $\mu = \text{constante}$, en un campo \mathbf{B} asintótico $B = B_o \hat{z}$. Encuentre el campo magnético adentro y fuera de la esfera.



No hay corrientes $J = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{H} = -\nabla \phi \\ &\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ &\Rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \end{aligned}$$

Adentro y afuera se satisface Laplace. Uno podría hacer esto:

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu H) = 0 \quad \rightarrow \quad \mu \nabla^2 \Phi + \nabla \mu \cdot \nabla \Phi = 0$$

pero es complicado. Esto garantiza que Φ es continuo cruzando la interfase. Además, en las dos regiones (no en el borde) tenemos $\mu = \text{const}$, por lo tanto la ecuación de Maxwell satisface

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Dado que $\mathbf{H}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{B}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{B}_0$ tenemos $\Phi(r \rightarrow \infty) = -B_o z = -B_o r \cos \theta$, y la expansión

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \\ \Phi_{\text{out}} &= -B_o r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \end{aligned}$$

Notemos que μ no aparece todavía. Solo aparece en las condiciones de borde, para B_r y H_{θ} . Tenemos que aplicar las condiciones de borde de Maxwell.

$$(H_2 - H_1) \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} K$$

$$(B_2 - B_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \\ -\mu \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} \end{aligned} \right\} \mu = 1 \quad \text{afuera}$$

En vez de la continuidad del componente tangencial de \mathbf{H} , dado por las ecuaciones de Maxwell, es mas fácil usar la continuidad del potencial, lo cual usamos para resolver este set de ecuaciones.

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \theta) \left[A_{\ell} a^{\ell} - \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+1}} + B_o a \delta_{\ell,1} \right] = 0$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \theta) \left[-\mu \ell A_{\ell} a^{\ell-1} + (\ell+1) \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+2}} + B_o \delta_{\ell,1} \right] = 0$$

Solo si $A_{\ell} = B_{\ell} = 0 \quad \ell \neq 1$. Luego se evaluando A_{ℓ} y B_{ℓ} , se resuelve y se encuentra

$$\Phi_{\text{in}} = -\left[\frac{3}{\mu+2}\right] B_o r \cos \theta$$

$$\Phi_{\text{out}} = -\left[1 + \frac{1-\mu}{\mu+2} \frac{a^3}{r^3}\right] B_o r \cos \theta$$

Si evaluamos en $\mu = 1$, es decir, la esfera polarizada ya no está, se recupera

$$\Phi_{\text{in}} = -B_0 r \cos \theta$$

Con esto se pueden calcular las líneas de campo. En términos de los campos tenemos

$$\mathbf{H}_{\text{in}} = \left[\frac{3}{\mu+2}\right] \mathbf{B}_o$$

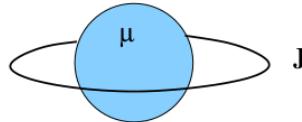
$$\mathbf{H}_{\text{out}} = B_o + \frac{1-\mu}{\mu+2} \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{B}_o - 3(\mathbf{B}_o \cdot \hat{x}) \hat{x}]$$

El campo dentro de la esfera es un campo magnético constante proporcional a \mathbf{B}_o , mientras que el campo de afuera tiene también una contribución de un campo de dipolo magnético con momento

$$\mathbf{m} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 \mathbf{B}_o \rightarrow \quad \mathbf{M} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu-1}{\mu+2} \mathbf{B}_o$$

2. Esfera polarizable rodeada de un anillo con corriente

Considere una esfera de radio a de material polarizable con constante μ . En el plano ecuatorial alrededor de esta esfera tenemos un anillo de radio $b > a$ en la cual fluye una corriente constante $\mathbf{J} = J_o \hat{\phi}$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.



Solución:

Primero escribamos el potencial vector $\mathbf{A} = A_o \hat{\phi}$ para el anillo en todo el espacio, con

$$A_{\phi} = \frac{4\pi I a}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} |C_{\ell}^1|^2 P_{\ell}^1(0) P_{\ell}^1(\cos \theta)$$

donde ahora $r_> = \text{Max}[r, b]$ y $r_< = \text{Min}[r, b]$. Dado que

$$P_\ell^1(0) = \begin{cases} (-1)^{(\ell-1)/2} \frac{(\ell+1)!}{2\ell(\frac{\ell-1}{2})!(\frac{\ell+1}{2})!} & \ell \text{ impar} \\ 0 & \ell \text{ par} \end{cases}$$

Por lo tanto supongamos $\mathbf{A} = A_\phi(r, \theta)\hat{\phi}$ y para $r \neq b$ tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\phi = 0$$

Con lo cual podemos plantear la solución

$$A_\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} |C_{\ell,1}|^2 P_\ell^1(0) P_\ell^1(\cos \theta) \begin{cases} C_\ell r^\ell & r < a \\ \frac{r_\ell^{\ell}}{r_\ell^{\ell+1}} + \frac{a^\ell D_\ell}{r^{\ell+1}} & r > a \end{cases}$$

Ahora hay que garantizar las condiciones de Maxwell en la superficie de la esfera

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 \cdot \hat{n} = 0$$

Utilizando las condiciones de borde de continuidad, la primera condición nos da

$$C_\ell a^\ell = \frac{a^\ell}{b^{\ell+1}} + \frac{a^\ell D_\ell}{a^{\ell+1}} \quad (2.10)$$

Es mas fácil usar la continuidad del potencial que la condición de Maxwell para el componente radial del campo magnético.

Usando

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[r \frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} \hat{r} - r \sin \theta \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{\theta} \right],$$

necesitamos asegurar que el campo magnético tangencial \mathbf{H} sea continuo y también el campo magnético normal, con $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ y dado que no hay corriente superficiales, tenemos (adentro = afuera)

$$\mu \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \Big|_{r=a^-} = \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \Big|_{r=a^+}$$

que es equivalente a (derivando (2.10))

$$\mu C_\ell (\ell+1) a^\ell = (\ell+1) \frac{a^\ell}{b^{\ell+1}} - \ell \frac{a^\ell D_\ell}{a^{\ell+1}}$$

De estas relaciones podemos resolver C_ℓ y D_ℓ , y también calcular el campo magnético

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

3. Esfera con magnetización

Una esfera de radio a con magnetización $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$ constante. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.

Notemos que en general μ depende de la posición. En particular en la interfase tenemos

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

Esto garantiza que Φ es continuo cruzando la interfase. Además, en las dos regiones (no en el borde) tenemos $\mu = \text{const}$, por lo tanto la ecuación de Maxwell satisface

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Con

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{in}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \\ \Phi_{\text{out}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)\end{aligned}$$

Notemos que M no aparece todavía. Solo aparece en las condiciones de borde, para B_r y H_θ

$$\begin{aligned}-\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= 0 \\ -\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \left[-\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} + 4\pi \mathbf{M} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} \right] &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Phi_{\text{in}} = \frac{4\pi}{3} M_o r \cos \theta \quad \Phi_{\text{out}} = \frac{4\pi}{3} M_o \frac{a^3}{r^3} r \cos \theta$$

Es mejor usar continuidad del potencial que la condición de Maxwell para \mathbf{H} tangencial. Notemos el signo positivo en la expresión del componente radial de \mathbf{B} ya que la normal en $r < a$ apunta hacia adentro de la caja. En vez de la continuidad de los campos tangenciales hemos utilizado la continuidad de Φ . En términos de los campos tenemos

$$\mathbf{H}_{\text{in}} = 4\pi \mathbf{M} \quad \mathbf{H}_{\text{out}} = 4\pi \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{M} - 3(\mathbf{M} \cdot \hat{x}) \hat{x}],$$

y el campo magnético es

$$\mathbf{B}_{\text{in}} = 8\pi \mathbf{M} \quad \mathbf{B}_{\text{out}} = 4\pi \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{M} - 3(\mathbf{M} \cdot \hat{x}) \hat{x}]$$

Es interesante notar que hay otras formas de resolver este mismo problema. Por ejemplo dado que tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot [\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}] = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

podemos escribir el potencial como

$$\Phi = - \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 y$$

donde la integral es en todo el espacio. Notemos que para la esfera tenemos

$$\mathbf{M} = M_o \hat{z} \theta(a - r)$$

con

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = M_o \frac{\partial}{\partial z} \theta(a - r) = -M_o \delta(a - r) \frac{z}{r} = \mathbf{M} \cdot \hat{n} \delta(a - r)$$

Esto implica que obtenemos el mismo resultado anterior

$$\Phi = M_o \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \int_0^{\infty} r_y^2 dr_y \delta(r_y - a) \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{2\pi} d\phi_y \cos \theta_y Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y) = \frac{4\pi}{3} M_o a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta$$

ya que

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi)$$

Si \mathbf{M} es suave y localizado, podemos usar

$$\nabla_x \cdot \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

y

$$0 = \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = - \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \nabla_y \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

para escribir

$$\Phi = -\nabla_x \cdot \int_{\bar{\Omega}} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

donde $\bar{\Omega}$ corresponde a la región donde $\mathbf{M} \neq 0$.

Si la magnetización puede ser considerada como discontinua en la superficie podemos escribir también

$$\Phi = - \int_{\bar{\Omega}} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \oint_{\bar{\Omega}\Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y}) \cdot \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y$$

ya que la expresión anterior para el caso de una esfera se puede re-escribir como

$$\nabla_y \cdot \mathbf{M} = -M \cdot \hat{n} \delta(a - \xi)$$

con ξ como la variable que parametriza el borde de magneto. Para el caso de la esfera tenemos el mismo resultado anterior

$$\Phi = M_o \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) a^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{2\pi} d\phi_y (\hat{z}_y \cdot \hat{r}_y) Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y) = \frac{4\pi}{3} M_o a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta.$$

Este problema también se puede resolver en términos del vector potencial \mathbf{A} ya que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times [\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}] = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \nabla \times \mathbf{M}$$

lo que tiene como solución

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \times \mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 y$$

en el Gauge de Coulomb. Donde la integral es sobre todo el espacio Ω . Si \mathbf{M} es suave y localizado, entonces podemos escribir

$$\mathbf{A} = \nabla_x \times \int_{\bar{\Omega}} \frac{\mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 y$$

Si hay una discontinuidad podemos escribir

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \times \mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 y + \oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{M}(y) \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS$$

por la misma razón anterior.

4. Magneto permanente

Calcular el campo magnético producido por un magneto permanente dentro de una cavidad conductora.

Las condiciones de borde en el conductor son

$$(\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \cdot \hat{n} = 0 \quad (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

Si en el conductor perfecto podemos asumir que las cargas se moverán libremente para forzar que no hayan campos dentro de este, podemos entonces decir que

$$\mathbf{B} \cdot \hat{n} = 0 \quad \mathbf{B} \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

Por lo tanto el campo magnético normal $\mathbf{B}_{\perp} = 0$ en el borde. Ahora la segunda condición no es muy satisfactoria, ya que sabemos que si la conductividad es alta, pero finita, entonces la corriente superficial eventualmente se debería disipar tal que $\mathbf{K} \rightarrow 0$. Por lo tanto, la condición

$$\mathbf{B} \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

se da por lo general en una situación tiempo dependiente, donde tenemos un forzamiento que mantiene $\mathbf{K} \neq 0$.

Osea, esta condición de borde depende de la historia del proceso que crea la configuración final. De la misma manera, si la conductividad es grande, pero finita, entonces

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

y por lo tanto tenemos que resolver el problema como un problema tiempo dependiente, ya que vamos a necesitar otra ecuación que relacione \mathbf{E} con \mathbf{B} (la ecuación de Faraday).

Notemos que el campo magnético terrestre tiene un campo magnético estático, aproximadamente dipolar, sobre su superficie, y por lo tanto el campo magnético no es cero dentro de la tierra, a pesar de que la conductividad es bastante alta. En este caso las condiciones de borde son, dado que no tenemos corriente en la superficie,

$$(\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \cdot \hat{n} = 0 \quad (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \times \hat{n} = \mathbf{0}$$

2.2.2 Problemas resueltos

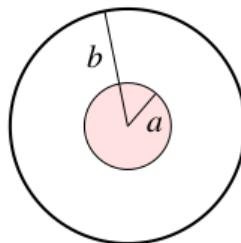
1. Esfera cargada que gira (Solución: 8.11)

Una esfera de radio a tiene una densidad de carga ρ . La esfera es rotada sobre su diámetro a una frecuencia ω . Encuentre el campo magnético dentro y fuera de la esfera.

2. Esfera de material magnetizado (Solución: 8.14)

Tomemos una esfera de radio a hecha de un material magnético con magnetización permanente M constante. Esta esfera es puesta en forma concéntrica dentro de una esfera conductora de radio $b > a$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio y la corriente superficial en el conductor. Demuestre que la integral de la corriente es cero.

Ayuda: Asuma que los campos dentro del conductor son cero.



Esfera con \mathbf{M} constante dentro de un conductor

3. Cilindro magnetizado (Solución: 8.13)

Considere un cilindro de largo L y radio a con un material de magnetización permanente, y uniforme M_0 , a lo largo del eje del cilindro. Construya una ecuación para H .

3. Ecuaciones de Maxwell

3.1 Problemas resueltos

1. Sábana infinita (Solución: 8.15)

Supongamos que tenemos una sábana infinita que está en el espacio, la cual tiene densidad de carga σ y está en el plano $z = 0$.

- ¿Cuál es el campo eléctrico para el caso electrostático?
- Suponga que la sábana se mueve como $x = \Delta e^{i\omega t}$, ¿Qué campos se espera que se generen? En qué dirección?
- Demuestre que el campo eléctrico cumple

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \alpha E = b\delta(z) ,$$

encuentre a y b .

- ¿Cuáles son las soluciones para $z > 0$ y $z < 0$? ¿Cuál es la solución final para los campos?
- Calcule el vector de Poynting ¿Qué causa el input de energía? Demuestre que la energía radiada es la misma que el input de energía.

2. Campos electromagnéticos de un cascarón esférico (Sol: 8.16)

Considere un cascarón esférico conductor sobre el cual hay una carga Q que tiene un radio que cambia como $R = R_0 + \Delta R \cos(\omega t)$. Encuentre los campos electromagnéticos.

3. Condensador de placas circulares (Sol: 8.17)

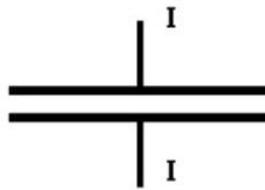
Un condensador ideal consiste de dos placas circulares de radio a (ver figura) y separadas por una distancia $d \ll a$, el cual esta conectado a una fuente de corriente dada por $I(t) = I_0 \cos \omega t$.

- Calcule los campos magnéticos entre las placas a segundo orden en la frecuencia (no considere efectos de borde)

- Calcule los volúmenes de integrales $w_e y^m$, que entran en la definición de X , usando $I_i = -i\omega Q_i$

- Encuentre además que el circuito equivalente en serie tiene satisfactorio $C \simeq a^2/4d, L \simeq d/2c^2$.

- Resuelva los campos en forma exacta. Encuentre C y L nuevamente.

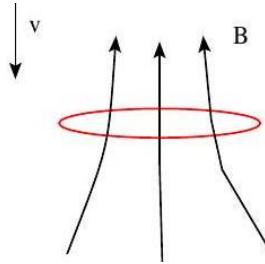


4. Potencia irradiada por un cascarón esférico (Sol: 8.18)

Considere un cascarón esférico de radio R y densidad de carga superficial σ que rota sobre su eje de simetría con frecuencia angular $\Omega = \Omega_0 e^{-i\omega t}$. Encuentre el potencial vector y muestre que la potencia irradiada cae como $\frac{1}{r^2}$ para $r \gg R$.

5. Anillo que cae en un campo magnético (Sol: 8.19)

Considere un alambre de radio a y resistencia R que cae en forma horizontal en un campo magnético vertical que varía con la altura $\mathbf{B} = B(z)\hat{z}$. Encuentre la ecuación de movimiento del anillo y su velocidad terminal. Si imponemos una corriente continua en el anillo a través de una batería, puede este flotar?



6. Circuito de corriente circular (Sol: 8.20)

Un circuito de corriente circular de radio a acarrea una corriente I . Este es colocado en el plano $x - y$ con su centro en el origen.

- a) Muestre que la única componente del potencial vector distinta de cero es la componente ϕ . Demuestre que A_ϕ se puede escribir de la siguiente forma

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk$$

donde $\rho_< = \min(\rho, a)$ y $\rho_> = \max(\rho, a)$.

- b) Muestre que una forma alternativa de escribir A_ϕ es

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk$$

- c) Encuentre expresiones integrales para las componentes de la inducción magnética, utilizando los resultados obtenidos en a) y b). Calcule explícitamente las componentes de B en el eje \hat{z} , desarrollando las integrales necesarias. Hint: use que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{I_1(k\rho)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J_1(k\rho)}{\rho} = \frac{k}{2} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(kz) K_0(k\rho) dk = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

7. Fem producida por un circuito (Sol: 8.21)

Un elemento de alambre de largo orientado $d\vec{\ell}$ se mueve con velocidad \vec{u} en un campo magnético \vec{B} . Muestre que la fem producida por el movimiento del alambre está dada por

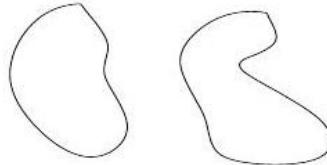
$$d\varepsilon = \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

8. Fem producida por un cascarón esférico (Sol: 8.22)

Un cascarón esférico conductor de radio a rota con velocidad angular $\omega = \omega_0 \hat{z}$, en un campo magnético uniforme descrito por $\hat{B} = B_0 \hat{z}$. Calcule la fem producida entre un polo y un punto en el círculo ecuatorial.

9. Línea de transmisión (Sol: 8.23)

Tenemos una linea de trasmisión, al cual consiste en dos conductores perfectos de forma arbitraria, pero de sección constante (la misma forma en z), ver figura. Demuestre que la inductancia por unidad de largo L y la capacitancia por unidad de largo esta dada por $LC = \mu\varepsilon/c^2$. (Es importante acordarse de la discusión sobre campos magnéticos cerca de conductores perfectos).



4. Principio de la relatividad

4.1 Ejemplos

- Calcular los campos producidos por una partícula en movimiento con velocidad uniforme \mathbf{v}_o en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$. En el sistema en reposo de la partícula con espacio-tiempo $(ct, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tenemos

$$\bar{E} = -\frac{q}{r^3} \{ \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \} \quad \bar{B} = 0$$

Mientras que en el sistema del laboratorio con espacio tiempo (ct, x, y, z) la partícula se mueve con velocidad $v = v_o \hat{\mathbf{x}}$, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} ct \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = L(v_o \hat{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\beta_o \gamma_0 & 0 & 0 \\ -\beta_o \gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ct \gamma_0 - \beta_o \gamma_0 x \\ -ct \beta_o \gamma_0 + \gamma_0 x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = \gamma_o^2 (x - v_o t)^2 + y^2 + z^2$$

con los campos transformados como

$$\mathbf{E} = \gamma_o \bar{\mathbf{E}} - \frac{\gamma_o^2}{\gamma_o + 1} \hat{\mathbf{x}} \beta_o^2 \bar{E}_x = \{ \bar{E}_x, \gamma_o \bar{E}_y, \gamma_o \bar{E}_z \}$$

$$\mathbf{B} = \gamma_o \beta_o \hat{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{E}} = \gamma_o \beta_o \{ 0, -\bar{E}_z, \bar{E}_x \}$$

por lo tanto, los campos en término de las variables del laboratorio están dados por

$$\mathbf{E} = \{ \bar{E}_x, \gamma_o \bar{E}_y, \gamma_o \bar{E}_z \} = \frac{q \gamma_o}{(\gamma_o^2 (x - v_o t)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \{ x - v_o t, y, z \}$$

$$\mathbf{B} = \gamma_o \beta_o \{ 0, -\bar{E}_z, \bar{E}_x \} = \frac{q \gamma_o \beta_o}{(\gamma_o^2 (x - v_o t)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \{ 0, -z, y \}$$

Los campos se puede escribir en forma mas estandard como

$$\mathbf{E} = \frac{q(1 - \beta_o^2)}{R^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{\mathbf{R}}$$

$$\mathbf{B} = \beta \times \mathbf{E}$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$, y $\cos \theta = \hat{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}$. Vemos que el campo eléctrico es en la dirección radial instantánea, como si no hubiera retardo.

2. Supongamos que tenemos un campo eléctrico \mathbf{E} que es perpendicular a un campo magnético \mathbf{B} , ambos constantes en el tiempo y espacio. Que condiciones deben satisfacer estos campos para producir una ganancia ilimitada de energía en las partículas cargadas?
- Primero encontraremos un sistema de referencia donde los campos son paralelos. Existe una multitud de sistemas en los cuales $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{B}}$ son paralelos. Utilizaremos el sistema que simplifica la transformación de los campos. Buscaremos una solución

$$\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}} = 0$$

con

$$\bar{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta (\beta \cdot \mathbf{E})$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta (\beta \cdot \mathbf{B})$$

Dado que tenemos la restricción, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, y también

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{B}}$$

podemos ver que $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ o $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$ Esta claro que podemos simplificar si asumimos que

$$\beta = \alpha \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rightarrow \beta \cdot \mathbf{E} = \beta \cdot \mathbf{B} = 0$$

con lo cual

$$\bar{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) = \gamma(\mathbf{E}(1 - \alpha B^2) + \alpha(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B})$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) = \gamma(\mathbf{B}(1 - \alpha E^2) + \alpha(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{E})$$

Para el caso particular de $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, tenemos que

$$\bar{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) = \gamma \mathbf{E}(1 - \alpha B^2)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) = \gamma \mathbf{B}(1 - \alpha E^2)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{0} = (\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) [1 - \alpha B^2] [1 - \alpha E^2]$$

con lo cual tenemos dos soluciones

$$\alpha_1 = \frac{1}{E^2} \quad \alpha_2 = \frac{1}{B^2}$$

Por lo tanto si $B > E$, dado que $\beta \leq 1$, tenemos que $= \frac{1}{B^2} \rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{E}{B} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \\ \gamma = \frac{|B|}{\sqrt{B^2 - E^2}} \end{cases}$

con

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= 0 \\ \bar{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{B}}\sqrt{B^2 - E^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto no hay ganancia de energía.

Mientras que si $E > B$ tenemos

$$\alpha = \frac{1}{E^2} \rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{B}{E}\hat{\mathbf{e}}_{\perp} \\ \gamma = \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - B^2}} \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= \hat{\mathbf{E}}\sqrt{E^2 - B^2} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos ganancia de energía.

Otra posibilidad, es mirar las ecuaciones de movimiento. Si normalizamos el tiempo propio con la girofrecuencia $\Omega = eB/mc$ y los campos con $\alpha = E/B$, podemos escribir

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos buscar soluciones del tipo $\mathbf{U}_o \exp[\lambda t]$, con lo cual tenemos que calcular los valores propios de la matriz A de arriba. La ecuación a resolver es

$$\lambda [\lambda^2 - (\alpha^2 - 1)] = 0$$

con lo cual vemos que

$$\lambda_0 = 0 \quad \lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

Si $\alpha > 1$, lo que implica que $E > B$, tenemos soluciones reales, y por lo tanto la energía puede aumentar ilimitadamente. En el caso contrario, no es así. Los vectores propios son

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_{\pm} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mp\sqrt{\alpha^2 - 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solución completa

$$\mathbf{U}(\tau) = \sum_n^3 a_n \mathbf{V}_n e^{\lambda_n \tau} = \mathbf{V} e^{\Lambda \tau} \mathbf{a}$$

se puede construir con estos vectores y valores propios, donde construimos la matriz $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_+, \mathbf{V}_-]$, la lista de coeficientes $\mathbf{a} = [a_0, a_+, a_-]$, y la matriz Λ diagonal con los valores propios. Usando las condiciones iniciales

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{V}\mathbf{a}$$

vemos que

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{U}(0)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{V} e^{\Lambda \tau} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{U}(0)$$

Esto es lo mismo que obtendríamos exponenciando la matriz \mathbf{A} ,

$$\mathbf{U}(\tau) = e^{(\mathbf{A}\tau)} \mathbf{U}(0)$$

4.2 Problemas resueltos

1. Suma de velocidades paralelas (Solución: 8.24)

Muestre explícitamente que dos transformaciones de Lorentz sucesivas en la misma dirección son equivalentes a una sola transformación de Lorentz con una velocidad

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)}$$

Esta es una forma alternativa de derivar la ley de suma de velocidades paralelas.

2. Escalares de Lorentz (Solución: 8.25)

(a) Exprese los escalares de Lorentz $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ en términos de **E** y **B**.

¿Existen otros invariantes cuadráticos en las intensidades de campo **E** y **B**?

(b) ¿Es posible tener un campo electromagnético que aparezca como un campo puramente eléctrico en un sistema inercial y como un campo puramente magnético en algún otro sistema inercial? ¿Cuáles son los criterios impuestos a **E** y **B** de modo que haya un sistema inercial en el que no haya campo eléctrico?

(c) Para medios macroscópicos, **E**, **B** forman el tensor de campo $F^{\alpha\beta}$ y **D**, **H** el tensor $G^{\alpha\beta}$. ¿Qué otras invariantes se pueden formar? ¿Cuáles son sus expresiones explícitas en términos de los campos de 3-vectores?

3. Espejo relativista (Solución: 8.26)

Considere un espejo de masa M y superficie S , que se mueve a una velocidad cercana a la velocidad de la luz. Como método de propulsión iluminaremos este espejo con un potente láser en forma normal a la superficie, tal que el haz de luz reflejado se propague en la dirección opuesta a la del haz incidente.

a) Muestre que el campo que rebota del espejo es pequeño a velocidades relativistas en el sistema del laboratorio.

b) En el sistema inercial, que esta instantáneamente en reposo con el espejo, encuentre la fuerza que siente el espejo. Transforme esta fuerza al sistema del laboratorio y demuestre que para velocidades relativistas $\beta \approx 1$ obtenemos $\gamma \sim t^{1/3}$.

4. La paradoja de los gemelos (Solución: 8.32)

La estrella más cercana está a 4 años luz. Suponga que se desea enviar a un gemelo en un cohete que acelere con aceleración g la mitad del camino hacia esta estrella y desacelere con aceleración $-g$ la otra mitad (para evitar problemas de salud por ingrávida). Supongamos que, para ello, contamos con una turbina del Enterprise, que convierte perfectamente materia y antimateria en energía (por lo tanto, la velocidad de expulsión de la masa es con velocidad c respecto al cohete). Sin hacer consideraciones relativistas, encuentre la masa inicial M del cohete necesaria para llegar a esta estrella (asuma que la masa del módulo más la de la tripulación es de $m_c = 100$ kg). Resuelva el problema relativista y calcule la diferencia de edad cuando los gemelos se encuentran nuevamente en la tierra, ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el cohete? Considerando efectos relativistas y una masa $m = 100$ kg, encuentre la masa inicial del cohete necesaria para llegar a la estrella.

5. Conservación de la carga (Solución: 8.27)

Demuestre que $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ si se cumple con la conservación de carga. ¿Qué condición debe cumplir k_α para que la onda plana $F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$ sea solución de esta ecuación? Demuestre ahora que la transformación de la frecuencia entre dos sistemas inerciales es

$$\omega' = \gamma \omega [1 - \beta \cos(\theta)]$$

donde θ es el ángulo entre la velocidad \vec{v} de la onda y k . Demuestre por último que

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[\cos(\theta) - \beta]}$$

donde θ' es el ángulo entre \vec{v} y k' . ¿Cómo pueden usarse estas expresiones para medir la velocidad (incluyendo dirección) de un objeto?

6. Lámina infinita relativista (Solución: 8.28)

Una lámina de carga que se extiende infinitamente tanto en los ejes x como y , tiene a una densidad de carga uniforme $\sigma > 0$, que está en reposo relativo al observador 1. La lámina está situada en $z = 0$ y se mueve en la dirección x con una rapidez v (relativista) en relación al observador 2.

- a) Transformando los campos desde el sistema de referencia del observador 1 al del 2 , encuentre los campos \vec{E} y \vec{B} en la región $z > 0$ del sistema de referencia del observador 2 .
- b) Demuestre que los campos son los mismos que aquellos calculados, a partir de la transformación de la densidad de corriente desde el sistema del observador 1 al del 2, y luego utilizando las leyes de Gauss y Ampère para encontrar los campos en el sistema de referencia del observador 2.
- c) Una carga $q > 0$ está inicialmente en reposo en el punto $(x,y,z) = (0,0,d)$ en el sistema de referencia del observador 1 . Describa cualitativamente el movimiento posterior de la partícula desde el punto de vista de ambos observadores.

7. Hamiltoniano de una partícula (Solución: 8.31)

Muestre que el hamiltoniano de una partícula moviéndose en un campo electromagnético es

$$\mathcal{H} = \sqrt{|cP - eA|^2 + m^2c^4} + e\Phi,$$

donde $P_j = \partial_{u_j}\mathcal{L}$.



5. Radiación y antenas

5.1 Problemas resueltos

1. Partícula en un campo magnético (Solución: 8.29)

Sea una partícula de carga q y masa m que se mueve en un campo magnético uniforme B_0 . Encuentre la trayectoria de esta partícula en términos de la velocidad inicial perpendicular v_\perp al campo, la velocidad inicial paralela v_\parallel al campo, la fase inicial ϕ y la frecuencia ciclotrónica $\Omega_c = eB_0/mc$. Asumiendo que $\beta \ll 1$, encuentre los potenciales y los campos radiados en la aproximación de campo lejano para esta partícula. Si se tienen N partículas, con la misma masa y carga, encuentre $dP/d\Omega$. Asuma una distribución térmica definida por una temperatura T_\perp y T_\parallel con respecto al campo magnético tal que

$$T_\perp = \frac{1}{2} \sum_n m v_\perp^2 \quad T_\parallel = \frac{1}{2} \sum_n m v_\parallel^2$$

Hint:

$$\int [1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi})] d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

2. Dipolo magnético oscilatorio (Solución: 8.30)

Considere el siguiente modelo de un dipolo magnético oscilatorio: Suponga que se tiene un anillo sin cargas, de radio b , por el cual circula una corriente alterna $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Encuentre la potencia total radiada $\langle P \rangle$ (promediado sobre un periodo), asumiendo la aproximación de campo lejano $r \gg c/\omega$, y la aproximación para un dipolo perfecto $b \ll r$ y $b \ll c/\omega$.

3. Campos radiados por mitades de una esfera (Solución: 8.39)

Dos mitades de una esfera de radio R tienen un voltaje opuesto $V(t) = \pm V_0 \cos(\omega t)$. En el límite de grandes longitudes de onda, encuentre los campos radiados, la distribución angular de poder radiado y todo el poder radiado por la esfera.

4. Potencia radiada por una partícula relativista

Usando la fórmula de Larmor para la potencia radiada para una partícula no relativista (la cual es aplicable en el sistema K' que está instantáneamente en reposo con la partícula),

encuentre la fórmula de potencia radiada en términos de los campos locales E y B que produce la radiación.

5. **Átomo de Rutherford** Considere un núcleo de masa M , carga q , en torno el cual orbita un electrón con masa m_e . Estime cuánto tardaría el electrón en caer al núcleo por pérdidas radiativas.



6. Ondas, óptica y plasmas

6.1 Plasmas

6.1.1 Problemas resueltos

1. Rayo hacia la ionósfera (**Solución: 8.42**)

Resuelva el problema de un rayo que parte de la tierra hacia la ionosfera en forma oblicua, asumiendo una densidad de electrones $n_e(z) = n_0 z e^{-(z-10)^2/4}$. ¿Qué frecuencias escapan?

2. Dinámica del plasma (**Solución: 8.40**)

Considere un plasma estacionario de electrones y protones de densidad n_0 en un campo magnético B_0 en dirección x entre dos conductores perfectos. Así, dado un campo eléctrico y magnético, se tiene la ecuación de movimiento para electrones y protones

$$mn \frac{d\vec{v}}{dt} = qn \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

a) Demuestre que la evolución para la velocidad del centro de masas \vec{U} está dada por

$$\nu \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$$

con ν la densidad de masa, ρ la densidad de carga y \vec{J} la densidad de corriente. Use que en un plasma $n_e = n_p = n_0 \sim \text{cte}$, luego $\rho = \text{cte}$.

b) Dado que para velocidades no relativistas la corriente de desplazamiento no contribuye a la ecuación de Ampère, es decir,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

se encuentra la expresión para la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \right)$$

con σ la conductividad eléctrica del plasma, ¿Bajo qué condiciones tiene esto sentido? Recordando que en el sistema de referencia de las partículas $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, Cuál es la ecuación para \vec{E} , dado que la conductividad es extremadamente alta en un plasma?

- c) Utilice la ecuación de Faraday para encontrar las ecuaciones acopladas de \vec{U} y \vec{B} .
- d) Asuma una pequeña perturbación de la forma $\vec{B} = B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y}$ y $\vec{U} = \vec{U}_1 = (U_{1x}, U_{1y}, U_{1z})$. Tome \vec{U}_1 y \vec{B}_1 muy pequeños. Linealice las ecuaciones (términos cuadráticos son irrelevantes) y encuentre la ecuación de onda que satisface \vec{B}_1 . Relacione \vec{U}_1 con \vec{B}_1 . Exprese su resultado en términos de la velocidad de Alfvén

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi mn}$$

- e) Tomemos una distancia L en x , ¿Qué modos son posibles en x , considerando las condiciones de borde? Encuentre la relación de dispersión y las soluciones para ω .

3. Propagación oblicua (Solución: 8.41)

Considere un plasma neutral compuesto de partículas cargadas, donde solo las partículas de carga negativa se mueven en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Para el caso de propagación oblicua $\vec{k} = k[\sin(\theta), 0, \cos(\theta)]$, encuentre la matriz A que satisface $A\vec{E} = 0$.

4. Plasma no magnetizado (Solución: 8.43)

Agregaremos el efecto de la temperatura en la relación de dispersión de ondas propagándose en un plasma no magnetizado. Por simplicidad supondremos que los iones del plasma no se mueven, y que toda la dinámica está concentrada en los electrones. Además supondremos que la presión de los electrones, P_e , está relacionada con su densidad, n_e , a través de la siguiente ecuación de estado:

$$P_e = P_{e,0} \left(\frac{n_e}{n_{e,0}} \right)^\gamma$$

donde el subíndice 0 indica "valor inicial" y γ es el índice politrópico de los electrones.

- a) Muestre que las transformadas de Fourier del campo eléctrico y de la velocidad promedio de los electrones $\tilde{\vec{E}}$ y $\tilde{\vec{U}}_e$ así como de las perturbaciones a la densidad y presión de los electrones (\tilde{n}_e y \tilde{P}_e) satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \omega \tilde{n}_e &= n_{e,0} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e, \\ i m_e n_{e,0} \omega \tilde{\vec{U}}_e &= n_{e,0} |e| \tilde{\vec{E}} + i \vec{k} \tilde{P}_e, \\ \tilde{P}_e &= m_e c_e^2 \gamma \tilde{n}_e, \end{aligned}$$

donde $\omega \vec{k}$ son la frecuencia y vector de onda de los modos de Fourier, $m_e |e|$ son la masa y módulo de la carga de los electrones, y c_e^2 es el cuadrado de la "velocidad del sonido" de los electrones, definida por $c_e^2 = k_B T_{e,0} / m_e$ (k_B es la constante de Boltzmann y $T_{e,0}$ es la temperatura inicial de los electrones).

- b) Demuestre que la relación de dispersión de las ondas transversales que se propagan en el plasma no se modifica debido a la temperatura de los electrones. ¿Por qué esto tiene sentido?
- c) Demuestre que la relación de dispersión de las ondas longitudinales sí se modifica. Bosqueje $\omega(k)$ para estas ondas y describa la diferencia con el caso en que los electrones están "fríos" ($T_{e,0} = 0$).

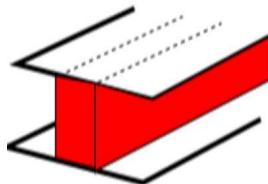
7. Guías de ondas, cavidades resonantes y c

7.1 Guías de onda

7.1.1 Problemas resueltos

1. Guía dieléctrica (Solución: 8.44)

Una guía dieléctrica rectangular $|x| \leq \Delta$ está entre dos planos infinitos conductores $y = \pm L$, ¿Cuál es la frecuencia mínima de esta guía?



8. Problemas resueltos

8.1 Disco dentro de una esfera

Considere una esfera conductora de radio R , conectada a tierra. En su interior, se encuentra un disco $b < R$. Su carga Q se encuentra distribuida uniformemente en la superficie. El centro del disco y la esfera son coincidentes. Encuentre la función de Green dentro de la esfera. A continuación, describa la densidad de carga y encuentre el potencial dentro de esta.

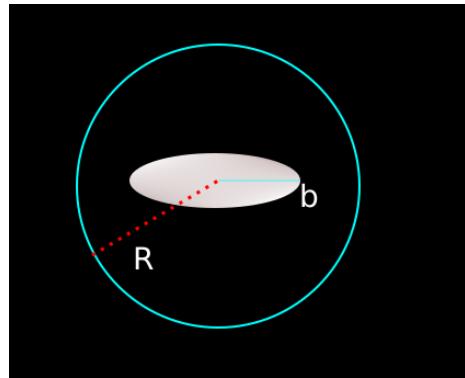


Figure 8.1: Disco dentro de una esfera

Respuesta: Para buscar la función de Green, resolveremos un problema de Poisson

$$\nabla^2 \Psi(r, \theta, \phi) = -4\pi\rho(r),$$

pasándose al espacio de Schwarz, nos quedaría

$$\nabla^2 G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = -4\pi\delta^{(3)}(r - r'),$$

donde, hay que tener en cuenta que

$$\delta^{(3)}(r - r') = \frac{F(r_1)F(r_2)F(r_3)}{h_1 h_2 h_3},$$

con h_i los factores de escala correspondiente a la función F_i de la geometría del sistema. Entonces, para este caso, que son coordenadas esféricas, se tiene

$$\delta^{(3)}(r - r') = \frac{\delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi')}{r'^2 \sin(\theta)},$$

ahora bien, notemos que las deltas, se pueden expresar en términos de funciones ortonormales, en particular tomaremos dos clásicas

$$\frac{\delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi')}{\sin(\theta)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'),$$

de este modo definiendo $\delta(r - r') / (r'^2 \sin(\theta)) = R_{lm}$, la función de Green es

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'),$$

recordemos la identidad de los armónicos esféricos

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{-l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \phi),$$

Reescribimos la ecuación de Poisson en función de la función de Green y nos queda

$$\nabla^2 G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r^2} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'),$$

ahora, considerando $r \neq r'$, y aplicando ortonormalidad, nos queda

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - l(l+1) R_{lm} = 0, \quad (8.1)$$

dado el tipo de ecuación, podemos sugerir una solución del tipo

$$R_{lm} = r^s,$$

entonces evaluamos en la ecuación (8.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (s r^{s+1}) - l(l+1) r^s &= 0, \\ s(s+1) r^s - l(l+1) r^s &= 0, \\ s(s+1) - l(l+1) &= 0, \\ s^2 + s - l^2 - l &= 0, \end{aligned}$$

evaluamos para $s = l$,

$$l^2 + l - l^2 - l = 0,$$

luego, evaluamos para $s = -l - 1$, tal que

$$(l-1)^2 - l - 1 - l^2 - l = 0,$$

$$(l-1)^2 - 2l - 1 - l^2 = 0,$$

$$(l-1)^2 - (l-1)^2 = 0,$$

por tanto $s = -l - 1$ también satisface la ecuación. De este modo, nos quedaría que la solución es

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)} & \text{Si } r < r', \\ C_{lm}r^l + D_{lm}r^{-(l+1)} & \text{Si } r > r', \end{cases}$$

ahora, debemos notar cosas, por ejemplo, si $r = 0$, el término de B_{lm} diverge, de este modo haremos que $B_{lm} = 0$. Por otro lado $\Psi(r = b) = 0$ por ser una esfera conductora, de este modo

$$C_{lm}r^l = -D_{lm}r^{-(l+1)} \implies D_{lm} = -C_{lm}b^{2l+1},$$

entonces, la función radial, nos quedará

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm}r^l & \text{Si } r < r', \\ C_{lm}(r^l - b^{2l+1}r^{-(l+1)}) & \text{Si } r > r', \end{cases}$$

ahora, trabajamos en el punto donde $r = r'$, de este modo, podemos unir ambas soluciones tal que

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm}r'_< \left(r'_> - b^{2l+1}r'^{-(l+1)} \right).$$

Con $E_{lm} = A_{lm}C_{lm}$, y $r'_< = \min(r, r')$ y $r'_> = \max(r, r')$. Ahora, queremos encontrar E_{lm} estudiando en la discontinuidad la ecuación de Green

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_{lm}}{dr} \right) - l(l+1)R_{lm} = -4\pi\delta(r - r'),$$

entonces integramos para $r'_> = r' + \varepsilon$ y $r'_< = r' - \varepsilon$, tal que

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_{lm}}{dr} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} l(l+1)R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r - r') dr,$$

donde la segunda integral es cero por continuidad, mientras que la delta es 1, entonces, nos quedaría

$$r^2 \frac{dR_{lm}}{dr} \Big|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} = -4\pi,$$

devolvemos los valores de $r' \pm \varepsilon$ a los valores de $r'_<$ y $r'_>$, de este modo nos queda

$$E_{lm}r'^2 r'_< \left(lr'^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{r'^{(l+2)}} \right) - lE_{lm}r'^{l+1} \left(r'_> - b^{2l+1}r'^{-(l+1)} \right) = -4\pi,$$

escribimos todo en función de r' cuando $r = r'$ y despejamos E_{lm}

$$E_{lm} = -\frac{4\pi}{(2l+1)b^{2l+1}},$$

de este modo, la función radial es

$$R_{lm}(r, r') = -\frac{4\pi r_{<}^l}{(2l+1)b^{2l+1}} \left(r_{>}^l - \frac{b^{2l+1}}{r_{>}^{l+1}} \right) = \frac{4\pi r_{<}^l}{2l+1} \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right),$$

de este modo, la función de Green es

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{r_{<}^l}{2l+1} \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right),$$

Ahora, buscamos la densidad. La cual es necesaria para poder convolucionar con la función de Green, entonces, definimos la densidad en el espacio de Schwarz como

$$\rho(r', \theta', \phi') = \frac{\rho_0 H(r' - b) \delta(\theta' - \frac{\pi}{2})}{r' \sin(\theta')},$$

donde H es la función de Heaviside, ya que estamos con un disco, tal que nos permita describir el salto en el campo eléctrico en el origen.

Por otro lado, tenemos

$$Q = \int \rho dV,$$

de este modo, nos queda

$$Q = \rho_0 \int_0^\pi \frac{\delta(\theta' - \pi/2) \sin(\theta')}{\sin(\theta)} d\theta' \int_0^b \frac{H(r' - b) r'^2}{r'} dr,$$

lo cual nos da

$$\rho_0 = \frac{Q}{2\pi b^2},$$

entonces, con esta valor de ρ_0 , podemos evaluar en ρ y nos queda

$$\rho(r', \theta', \phi') = \frac{Q}{2\pi b^2} \frac{H(r' - b) \delta(\theta' - \frac{\pi}{2})}{r' \sin(\theta')},$$

Ahora, el potencial es

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \int \rho(r', \theta', \phi') G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') d^3 r - \frac{1}{4\pi} \oint_s \Psi(r', \theta', \phi') \frac{\partial G}{\partial n'} da',$$

dada que la esfera es conductora, la condición de borde de Neumann es cero. De este modo, nos quedaría

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \int \rho(r', \theta', \phi') G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') d^3 r,$$

que escribiendo nos queda

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \int \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Q}{2\pi b^2} \frac{H(r' - b)}{r' \sin(\theta)} Y_{lm} Y_{lm}^* \frac{r'_<^l}{2l+1} \left(\frac{1}{r'_>^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dV ,$$

recordamos de métodos de la física matemática II la forma de los armónicos esféricos

$$Y_{lm}^*(\theta', \phi') = N_l^m e^{-im\phi'} P_l^m(\cos(\theta')) ,$$

ya con esto entonces, nos quedaría

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{Q}{2\pi b^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm} \frac{r'_<^l}{2l+1} \left(\frac{1}{r'_>^{l+1}} - \frac{r'_<^l}{b^{2l+1}} \right) \int_b^R H(r' - b) r' dr' \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-im\phi} \\ & \int_0^\pi d\theta' \delta(\theta - \pi/2) P_l^m(\cos(\theta')) N_l^m , \end{aligned}$$

resolvemos las integrales

$$\int_0^{2\pi} d\phi' e^{-im\phi'} = 0 \quad \forall m \neq 0 \implies m = 0 .$$

, entonces

$$\begin{aligned} P_l^0(\cos(\pi/2)) &= P_l^0(0) , \\ N_l^0 &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} . \end{aligned}$$

de este modo, el potencial nos queda

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{Q(R-b)^2}{b^2} \sum_{l=0}^{\infty} Y_{l0} \frac{r'_<^l}{2l+1} \left(\frac{1}{r'_>^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(0) .$$

8.2 Dos placas de metal conectadas a tierra

Dos placas infinitas de metal conectadas a tierra se encuentran paralelas al plano xz , una en $y = 0$ y la otra en $y = a$. El extremo izquierdo, en $x = 0$, se cierra con una tira infinita aislada de las dos placas y mantenida a un potencial específico $V_0(y)$. Encuentre el potencial dentro de esta ranura.

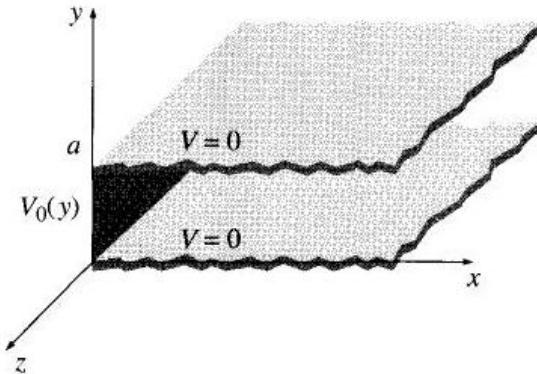


Figure 8.2: La ranura.

Solución:

Primero como no hay cargas externas, debemos resolver la Ec. de Laplace.

La configuración es independiente de z , por lo que este es realmente un problema de dos dimensiones.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (8.2)$$

¿Qué condiciones de frontera hay?

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \Phi = 0 \text{ cuando } y = 0, \\ \text{(ii)} & \Phi = 0 \text{ cuando } y = a, \\ \text{(iii)} & \Phi = V_0(y) \text{ cuando } x = 0, \\ \text{(iv)} & \Phi \rightarrow 0 \text{ como } x \rightarrow \infty. \end{array} \right\} \quad (8.3)$$

El primer paso es buscar soluciones en forma de productos:

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (8.4)$$

Poniendo la Ec. (8.4) en la ecuación (8.2), obtenemos

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0.$$

Ahora vamos a “separar las variables” (es decir, reunir todas las dependencias x en un término y todas las dependencias y en otro). Por lo general, esto se logra dividiendo entre Φ :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = 0. \quad (8.5)$$

Aquí el primer término depende solo de x y el segundo solo de y ; en otras palabras, tenemos una ecuación de la forma

$$f(x) + g(y) = 0 \quad (8.6)$$

Ahora, solo hay una forma en que esto podría ser cierto: f y g deben ser constantes. Se sigue de la ecuación (8.6), entonces, que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = C_1 \text{ y } \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = C_2, \quad \text{con} \quad C_1 + C_2 = 0. \quad (8.7)$$

Una de estas constantes es positiva, la otra negativa, en nuestro problema particular necesitamos C_1 positivo y C_2 negativo, por razones que aparecerán en un momento. Por lo tanto

$$\frac{d^2X}{dx^2} = k^2 X, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 Y. \quad (8.8)$$

Tenemos:

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad Y(y) = C \sin ky + D \cos ky,$$

así que

$$\Phi(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky) \quad (8.9)$$

Ahora vamos a imponer la condición (iv) requiere que A sea igual a cero. Absorbiendo B en C y D , nos queda

$$\Phi(x, y) = e^{-kx}(C \sin ky + D \cos ky).$$

Por la condición (i) entonces D debe ser igual a cero, por lo que

$$\Phi(x, y) = Ce^{-kx} \sin ky. \quad (8.10)$$

Y de la condición (ii) $\sin ka = 0$, es decir:

$$k = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Por eso elegimos C_1 positivo y C_2 negativo: si X fuera sinusoidal, nunca podríamos hacer que llegara a cero en el infinito, y si Y fueran exponenciales, no podríamos hacer que se desvaneciera tanto en 0 como en a .

Podemos juntar las soluciones separables (8.10) para construir una solución mucho más general:

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a).} \quad (8.11)$$

Esto todavía satisface las primeras tres condiciones de contorno; la pregunta es, ¿podemos (mediante una elección astuta de los coeficientes C_n) ajustarnos a la última condición de contorno?

$$\Phi(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi y/a) = V_0(y). \quad (8.12)$$

¿Reconocen esta suma? ¿Qué es?

Es una serie de seno de Fourier. Y el [teorema de Dirichlet](#) garantiza que cualquier función $V_0(y)$ (incluso si tiene un número finito de discontinuidades) puede expandirse en tal serie.

Pero, ¿cómo determinamos realmente los coeficientes C_n , metidos como están en esa suma infinita?

Para lograr esto usamos [el truco de Fourier](#) (o también llamado proyector): Multiplicamos la Ec. (8.12) por $\sin(n'\pi y/a)$ (donde n' es un entero positivo), e integramos de 0 hasta a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \int_0^a V_0(y) \sin(n'\pi y/a) dy. \quad (8.13)$$

La integral nos da

$$\int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \begin{cases} 0, & \text{si } n' \neq n, \\ \frac{a}{2}, & \text{si } n' = n. \end{cases}$$

Por lo tanto, todos los términos de la serie desaparecen, excepto el que tiene $n' = n$, y el lado izquierdo de la ecuación (8.13), se reduce a $(a/2)C_n$. Despejando tenemos:

$$\boxed{C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin(n\pi y/a) dy.} \quad (8.14)$$

La Ec. (8.11) es la solución, con coeficientes dados por la (8.14). Hasta aquí se terminó el ejercicio.

Ahora les propongo un ejemplo...

Suponga que la tira en $x = 0$ es una placa de metal con potencial constante V_0 (recuerde, está aislada de las placas conectadas a tierra en $y = 0$ y $y = a$). Luego

$$C_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin(n\pi y/a) dy = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Y así obtenemos:

$$\boxed{\Phi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{impar}} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a)} \quad (8.15)$$

o dicho de otra manera $n = 2k + 1$ con $k = 0, 1, 2, \dots$

8.3 Cuartos de un cilindro

Una variante del problema bidimensional anterior es un cilindro conductor largo y hueco de radio b que se divide en cuartos iguales, los segmentos alternos se mantienen en potencial $+V$ y $-V$.

(a) Resuelva mediante la solución en serie y demuestre que el potencial dentro del cilindro es

$$\phi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b} \right)^{4n+2} \frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}$$

(b) Sume la serie y demuestre que

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho^2 b^2 \sin 2\phi}{b^4 - \rho^4} \right)$$

(c) Grafique las líneas de campo y las equipotenciales

Solución:

(a) Primero bosquejemos el problema (Fig. 8.3) y definamos nuestro sistema de coordenadas:

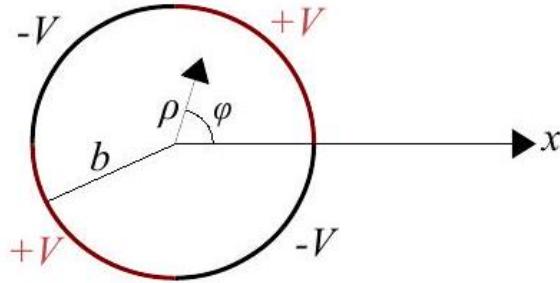


Figure 8.3: Tubo. Note que en el dibujo aparece ϕ pero en el desarrollo usaré ϕ en minúscula.

La ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0}$$

Solución de la forma $\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$ conduce a:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = v^2 R(\rho) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \Psi(\phi)}{\partial \phi^2} = -v^2 \Psi(\phi)$$

que cuando se resuelve conduce a la solución general en serie:

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho)(A_0 + B_0 \phi) + \sum_{v,v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi})}$$

La ecuación de Laplace contiene dos derivadas para cada una de las dos coordenadas, por lo que necesitaremos cuatro condiciones de contorno para determinar de manera única las cuatro constantes de integración. Las cuatro condiciones de contorno son:

$$\Phi(\phi = 0) = \Phi(\phi = 2\pi)$$

$\Phi(\rho = 0) =$ finito

$$\Phi(\rho = b) = \begin{cases} V \text{ si } 0 < \phi < \pi/2 \text{ o } \pi < \phi < 3\pi/2 \\ -V \text{ si } \pi/2 < \phi < \pi \text{ o } 3\pi/2 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

La aplicación de la primera condición de contorno obliga a que v sea un número entero que volvemos a etiquetar como m y $B_0 = 0$.

La aplicación de la segunda condición de contorno conduce a $b_v = 0$ y $b_0 = 0$. Los términos anteriores ahora pueden combinarse en una sola constante y unirse en la suma como el caso $m = 0$. Nuestra solución será:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi})$$

Podemos combinar los términos positivos y negativos de m

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \rho^{|m|} e^{im\phi}$$

Ahora aplicamos la última condición de contorno, que por ahora expresamos como $V(\phi)$, no se preocupen de los límites de ϕ por ahora, eso se va a resolver cuando evaluemos la integral más adelante,

$$V(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m b^{|m|} e^{im\phi}$$

Aplicamos el proyector: multiplicamos ambos lados por una exponencial compleja e integramos de 0 a 2π

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im'\phi} d\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m b^{|m|} \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi$$

y entonces podemos aplicar la ortogonalidad para exponentiales complejas:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mm'}$$

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im'\phi} d\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m b^{|m|} 2\pi \delta_{mm'}$$

dejemos A_m :

$$A_m = \frac{1}{2\pi b^{|m|}} \int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi$$

Ahora si que para integrar vamos a considerar los límites de ϕ

$$A_m = \frac{1}{2\pi b^{|m|}} \left[V \int_0^{\pi/2} e^{-im\phi} d\phi - V \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-im\phi} d\phi + V \int_{\pi}^{3\pi/2} e^{-im\phi} d\phi - V \int_{3\pi/2}^{2\pi} e^{-im\phi} d\phi \right]$$

Al resolver la integral, tendremos dos casos: si m es impar, A_m siempre es cero, y si m es par tenemos:

$$A_m = \frac{2V}{(-im)\pi b^{|m|}} \left[(-1)^{m/2} - 1 \right]$$

De modo que la solución final es:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty, \text{ par}}^{\infty} \frac{2V}{im\pi} \left[1 - (-1)^{m/2} \right] \left(\frac{\rho}{b} \right)^{|m|} e^{im\phi}$$

Separaremos los m positivos y negativos (mire las exponentiales)

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \phi) &= \sum_{m=0, \text{ par}}^{\infty} \frac{2V}{im\pi} \left(\frac{\rho}{b} \right)^m \left[1 - (-1)^{m/2} \right] [e^{im\phi} - e^{-im\phi}] \\ \Phi(\rho, \phi) &= \sum_{m=0, \text{ par}}^{\infty} \frac{4V}{m\pi} \left(\frac{\rho}{b} \right)^m \left[1 - (-1)^{m/2} \right] \sin(m\phi) \end{aligned}$$

Para $m = 0, 4, 8, \dots$ se hacen cero, por lo que solo quedan los términos para $m = 2, 6, 10, 14, \dots$ así la solución nos queda:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=2,6,10,\dots}^{\infty} \frac{8V}{m\pi} \left(\frac{\rho}{b} \right)^m \sin(m\phi)$$

Ahora hacemos un cambio para las variables $m = 4n + 2$ donde $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b} \right)^{4n+2} \frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}}$$

8.4 Esferas concéntricas

Dos esferas concéntricas tienen radios a, b ($b > a$) y cada una está dividida en dos hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interior y el hemisferio inferior de la esfera exterior se mantienen en potencial V . Los otros hemisferios están a potencial cero. Determine el potencial en la región $a \leq r \leq b$ como una serie en polinomios de Legendre. Incluya términos por lo menos hasta $l = 4$. Verifique su solución con los resultados conocidos en el caso límite $b \rightarrow \infty$ y $a \rightarrow 0$.

Solución:

El esquema de este problema es:

Debido a la geometría esférica del problema y la ausencia de carga, debemos resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0}$$

Utilizando el método de separación de variables se llega a la solución general:

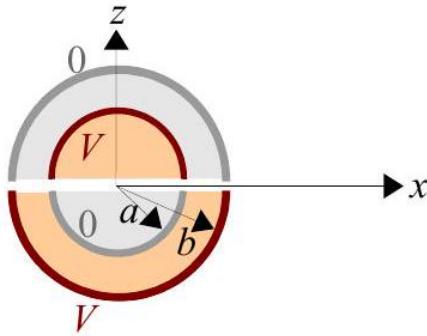


Figure 8.4: Dos esferas concéntricas.

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, \phi) = & \sum_l \left(A_l r^l + B_l r^{-l-1} \right) (A_{m=0} + B_{m=0} \phi) P_l^{m=0}(\cos \theta) \\ & + \sum_{m \neq 0, l} \left(A_l r^l + B_l r^{-l-1} \right) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}) P_l^m(\cos \theta)\end{aligned}$$

Vemos que hay **simetría azimutal**, por lo que la solución para el potencial no será una función de ϕ . La única forma de hacer que la solución general sea independiente de ϕ es para el caso $m = 0$ y $B_{m=0} = 0$:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_l \left(A_l r^l + B_l r^{-l-1} \right) P_l^{m=0}(\cos \theta)$$

En otros problemas donde debemos tener una solución válida en el origen, B_l debe ser cero para evitar que la solución explote en el origen. **Pero en este problema no buscamos una solución válida en el origen**, por lo que no podemos usar esta restricción.

Si Aplicamos la condición de borde: $\Phi(r = a) = V_1$ donde $V_1 = V$ si $\theta < \pi/2$ y $V_1 = 0$ si $\theta > \pi/2$

$$V_1 = \sum_l \left(A_l a^l + B_l a^{-l-1} \right) P_l(\cos \theta)$$

(no se compliquen con los límites de θ todavía, eso va a salir cuando fijemos los límites de integración).

Ahora multiplicamos ambos lados por $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$ e integramos (es decir aplicamos proyector)

$$\int_0^\pi V_1 P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_l \left(A_l a^l + B_l a^{-l-1} \right) \int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Usando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}$$

$$\int_0^\pi V_1 P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_l \left(A_l a^l + B_l a^{-l-1} \right) \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}$$

$$\int_0^\pi V_1 P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \left(A_l a^l + B_l a^{-l-1} \right) \frac{2}{2l+1}$$

Despejamos y reemplazamos la forma explícita de V_1

$$A_l a^l + B_l a^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Hacemos un cambio de variable: $x = \cos \theta, dx = -\sin \theta d\theta$

$$A_l a^l + B_l a^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_0^1 P_l(x) dx \quad (8.16)$$

Ahora aplicamos la otra condición de contorno: $\Phi(r=b) = V_2$ donde $V_2 = 0$ si $\theta < \pi/2$ y $V_2 = V$ si $\theta > \pi/2$

$$V_2 = \sum_l \left(A_l b^l + B_l b^{-l-1} \right) P_l(\cos \theta)$$

Multiplicando ambos lados por $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$ e integrando

$$\begin{aligned} \int_0^\pi V_2 P'_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \sum_l \left(A_l b^l + B_l b^{-l-1} \right) \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &\implies A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi V_2 P'_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Introduzcamos la forma explícita de V_2

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_{\pi/2}^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Haciendo el cambio de variable: $x = \cos \theta, dx = -\sin \theta d\theta$

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_{-1}^0 P_l(x) dx$$

Hacemos otro cambio de variable $x \rightarrow -x$ y usando la identidad:

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V (-1)^l \int_0^1 P_l(x) dx \quad (8.17)$$

Las Ec. (8.16) y (8.17) forman un sistema de ecuaciones, que al resolver nos dan A_l y B_l respectivamente:

$$A_l = \frac{(-a^{l+1} + (-1)^l b^{l+1})}{(-a^{2l+1} + b^{2l+1})} \left(\frac{2l+1}{2} \right) V \int_0^1 P_l(x) dx$$

$$B_l = \frac{a^{l+1}b^{2l+1} - (-1)^l a^{2l+1}b^{l+1}}{-a^{2l+1} + b^{2l+1}} \left(\frac{2l+1}{2} \right) V \int_0^1 P_l(x) dx$$

La solución final es entonces:

$$\Phi = \frac{V}{2} \sum_l (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx \frac{[(a^{l+1} - (-1)^l b^{l+1}) r^l - ab(a^l b^{2l} - (-1)^l a^{2l} b^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Podemos hacer la integral, pero debemos tener cuidado de hacer los casos $l = 0$ y $l > 0$ por separado:

$$l = 0 : \quad \int_0^1 P_0(x) dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$l > 0 : \quad \int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} \int_0^1 \frac{d}{dx} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)] dx$$

$$\int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]_0^1$$

$$\int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(1) - P_{l-1}(1) - P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)]$$

$$\int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)]$$

La solución final se convierte en:

$$\Phi = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[(a^{l+1} - (-1)^l b^{l+1}) r^l - ab(a^l b^{2l} - (-1)^l a^{2l} b^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Cabe señalar que $[P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] = 0$ cuando l es par, por lo que todos los términos pares desaparecen. Como l solo es impar, entonces $(-1)^l = -1$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[(a^{l+1} + b^{l+1}) r^l - a^{l+1} b^{l+1} (b^l + a^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Expresándolo como una suma expandida hasta el término $l = 4$:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi) = & \frac{V}{2} \left[1 + \left(\frac{3}{2} \right) \frac{[(a^2 + b^2) r - a^2 b^2 (b + a) r^{-2}]}{a^3 - b^3} \cos \theta \right. \\ & \left. + \left(\frac{-7}{16} \right) \frac{[(a^4 + b^4) r^3 - a^4 b^4 (b^3 + a^3) r^{-4}]}{a^7 - b^7} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right] \end{aligned}$$

Para ver el comportamiento de la solución cuando $b \rightarrow \infty$, dejamos b siempre es el denominador de una fracción:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[((a/b)^{l+1} + 1)(r/b)^l - (1 + (a/b)^l)(a/r)^{l+1}]}{(a/b)^{2l+1} - 1} P_l(\cos \theta)$$

Entonces cuando $b \rightarrow \infty$, $(a/b) \rightarrow 0$, y $(r/b) \rightarrow 0$ de modo que:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta)$$

Esto se puede expresar explícitamente como una suma expandida (se muestra hasta el término $l = 4$):

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} \left[1 + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos \theta + \left(\frac{-7}{16}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^4 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]$$

El comportamiento de la solución cuando $a \rightarrow 0$ es:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[(a^{l+1} + b^{l+1}) r^l - a^{l+1} b^{l+1} (b^l + a^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} - \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \left(\frac{r}{b}\right)^l P_l(\cos \theta)$$

Esto se puede expresar explícitamente como una suma expandida hasta el término $l = 4$:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right) \frac{r}{b} \cos \theta - \left(\frac{-7}{16}\right) \left(\frac{r}{b}\right)^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]$$

8.5 Potencial de una carga dentro de una esfera hueca

Encuentre el potencial de una carga puntual que está en cualquier lugar, dentro de una esfera de radio a conductora, hueca y conectada a tierra. Además encuentre la densidad de carga inducida en la superficie y en qué dirección.

Respuesta:

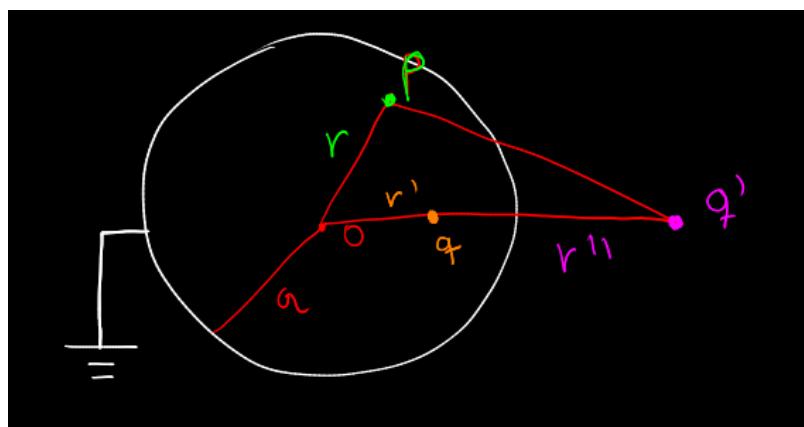


Figure 8.5: Sistema a utilizar.

Respuesta: Nos interesa saber cuánto es el potencial, de electromagnetismo sabemos que este

potencial debe ser

$$\phi(r) = \frac{kq}{|r-r'|} + \frac{kq'}{|r-r''|},$$

de este modo, buscamos determinar r'' y q' tal que se satisfaga el problema de Poisson, es decir que se cumplan los bordes del problema, de este modo, evaluamos en $r = a$ y nos queda

$$\phi(r=a) = \frac{kq}{|a-r'|} + \frac{kq'}{|a-r''|} = 0,$$

ahora, reescribimos la ecuación, para no tener que suponer $r' = r''$ pues esto no tendría sentido, Entonces, nos quedaría

$$\phi(r=a) = \frac{kq}{a\left|1-\frac{r'}{a}\right|} + \frac{kq'}{r''\left|1-\frac{a}{r''}\right|} = 0,$$

entonces, suponemos que

$$\frac{r'}{a} = \frac{a}{r''} \implies \boxed{r'' = \frac{a^2}{r'}},$$

con esto, entonces resolvemos para q' y nos queda

$$\boxed{q' = -\frac{aq}{r'}},$$

ahora bien, evaluamos y el potencial nos queda

Potencial del problema

$$\phi(r) = kq \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta)}} - \frac{a/r'}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{a^2}{r'}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{r'}\cos(\theta)}} \right],$$

ahora, para encontrar la carga superficial, usamos la definición

$$-4\pi\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{r=n},$$

de este modo, al derivar nos queda

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = kq \left[\frac{r'-a}{\left((a-r')^2\right)^{3/2}} - \frac{a}{r'} \frac{a-a^2/r'}{\left[(a-a^2/r^2)^2\right]^{3/2}} \right] = -4\pi\sigma,$$

esto implica

$$\sigma = \frac{kq}{4\pi} \left[\frac{a-r'}{\left((a-r')^2\right)^{3/2}} + \frac{a}{r'} \frac{a-a^2/r'}{\left[(a-a^2/r^2)^2\right]^{3/2}} \right],$$

entonces está apuntando hacia afuera.

8.6 Potencial de una pizza con un objeto dentro

Considere que en el DFC se ha realizado una comida para algún evento tipo puerta de honor. En el cual, un trozo de pizza ha sido conectado a un potencial $\phi(r = a, \phi) = V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha)$ para corroborar experimentalmente un problema que se estudió en métodos de la física matemática II, la pizza utilizada posee ciertas propiedades, definida por los bordes $\phi = 0$ y $\phi = \alpha$, y también el borde $r = a$. Además, una persona ha puesto por error un plano cargado sobre la pizza en $r = b$, y $0 \leq \phi \leq \beta$, de densidad uniforme λ . Calcule el potencial $\phi(r, \phi)$, y salve la pizza.

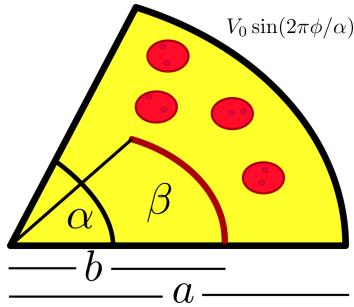


Figure 8.6: Pizza del problema, los puntos rojos sólo son decorativos para el problema.

Respuesta: Descomponemos el problema vía superposición

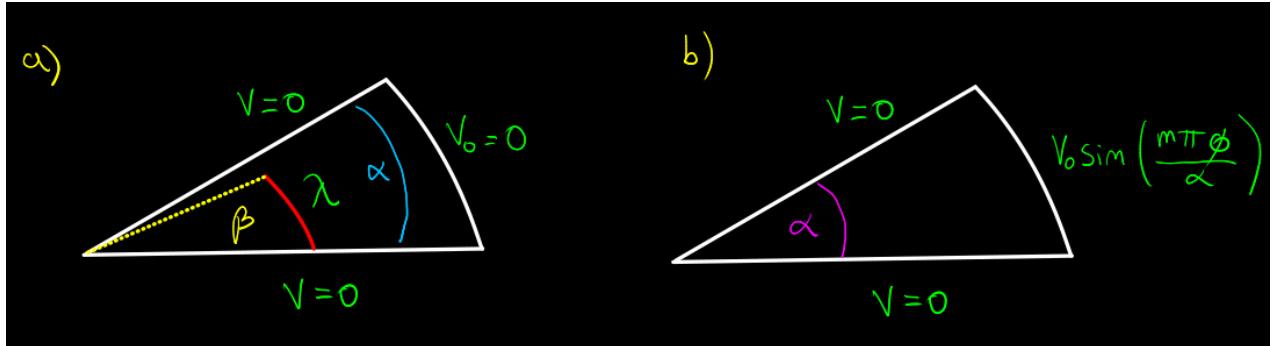


Figure 8.7: Caso a) la pizza sin potencial en el borde, pero con densidad de carga del plano cargado (en rojo), Caso b) la pizza sin el plano cargado, pero con potencial en el borde.

Para este caso, expresamos la delta en función de las coordenadas y sus respectivos factores de escala

$$\delta^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}) = \frac{\delta(r' - r)\delta(\theta' - \theta)}{1 * r},$$

ahora, expresamos delta en función de funciones ortonormales, dada las condiciones de borde, usaremos

$$\delta(\theta' - \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\alpha}\right),$$

con k_m una constante de normalización (esta se puede omitir, ya que el sistema sigue siendo ortogonal, pero si se quisiera trabajar con formas integrales, entonces es necesaria para normalizar).

De este modo, la función de Green es

Función de Green

$$G(r, \phi, r', \phi') = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(r, r') \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\alpha}\right),$$

con $R_m(r, r')$ a determinar.

Evaluando en la ecuación de Poisson, y evaluando para $r \neq r'$, nos queda

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} R \right) - \frac{1}{r^2} n^2 R_m = 0,$$

con $n = \frac{m\pi}{\alpha}$. Resolviendo la ecuación diferencial, tenemos la solución ya conocida

$$R_n = \begin{cases} A_n^{(1)} r^n + B_n^{(1)} r^{-n} & \text{Si } r < r' , \\ A_n^{(2)} r^n + B_n^{(2)} r^{-n} & \text{Si } r > r' . \end{cases}$$

usamos que $B_m^{(1)} = 0$ para que no diverja en el origen. Y utilizando las condiciones $r = a \implies R = 0$, ya que debe cumplir las mismas condiciones de borde que la función de Green y por ende que el potencial, entonces, despejamos y obtenemos que $A_n^{(2)}$ es

$$A_n^{(2)} = -\frac{B_n^{(2)}}{a^{2n}},$$

evaluamos en R_n y acoplamos las ecuaciones para $r_> = \max(r, r')$ y $r_< = \min(r, r')$, de este modo

$$R_n = C_n r_< \left(r_>^{-n} - \frac{r_>^n}{a^{2n}} \right),$$

con C_n otra constante a determinar. Integraremos la ecuación para R , teniendo

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} dr \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} R \right) - \frac{1}{r} n R \right] = \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} 4\pi k_m \delta(r - r') ,$$

resolvemos y nos queda

$$C_m = \frac{4\pi k_m}{n \left[\left(\frac{r_<}{r_>} \right)^n + \left(\frac{r_>}{r_<} \right)^n \right]},$$

de este modo, la función de Green para este problema será

Función de Green final v1.102 no borrar este si que si

$$G(r, \phi, r', \phi') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi k_m \left[r_<^{-n} - \frac{r_>^n}{a^{2n}} \right]}{n \left[\left(\frac{r_<}{r_>} \right)^n + \left(\frac{r_>}{r_<} \right)^n \right]} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\alpha}\right).$$

Ya con la función de Green, notamos que la densidad de carga producto del plano en el sistema primado, es

$$\rho(r', \phi') = \frac{\lambda \delta(r' - b) \delta(\phi' - \beta_0)}{r'} ,$$

con $\beta_0 \in [0, \beta]$. Para fines prácticos se puede utilizar β .

Entonces, calculamos el potencial para el caso a) y es

potencial caso a)

$$\psi_1(r, \phi) = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi k_m \left[r_-^{-n} - \frac{r_+^m}{a^{2n}} \right]}{n \left[\left(\frac{r_-}{r_+} \right)^n + \left(\frac{r_+}{r_-} \right)^n \right]} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{m\pi\beta_0}{\alpha}\right) ,$$

con las respectivas integrales siendo

$$\int_0^a \frac{1}{r} r \delta(r' - b) dr' = 1 , \quad \int_0^\alpha \delta(\phi - \beta) \sin(\theta n) d\phi' = \sin(\beta n) .$$

Por otro lado, para el caso b), mediante separación de variables, y eliminando algunos términos, nos queda el potencial general

$$\psi_2(r, \phi) = (A_m r^m) [C_m \cos(m\phi) + D_m \sin(m\phi)] ,$$

evaluamos para cualquier $\phi = 0$ y $r = a, b$, de este modo, podemos obtener que $C_m = 0$, ya con esto, evaluamos para algún a y ϕ y despejamos la única constante que queda, obteniendo

$$A_m = \sum \frac{V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha)}{\sin(m\phi)} \frac{r^m}{a^m} ,$$

de este modo, el nuevo potencial es

$$\psi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha) \frac{r^m}{a^m} ,$$

y de este modo, el potencial final es

Potencial de la pizza

$$\psi_{\text{total}}(r, \phi) = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi k_m \left[r_-^{-n} - \frac{r_+^m}{a^{2n}} \right]}{n \left[\left(\frac{r_-}{r_+} \right)^n + \left(\frac{r_+}{r_-} \right)^n \right]} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{m\pi\beta_0}{\alpha}\right) + V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha) \frac{r^m}{a^m} ,$$

8.7 Línea cargada entre planos conductores que se intersectan

Dos planos conductores con potencial cero se encuentran a lo largo del eje z , formando un ángulo β entre ellos, como en la figura 8.8. Una línea de carga unitaria paralela al eje z está ubicada entre los planos en la posición (ρ', ϕ') .

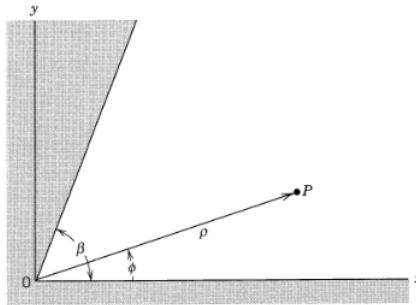


Figure 8.8: Intersección de dos planos conductores que definen una esquina en dos dimensiones con ángulo de apertura β .

Encuentre el potencial, y a partir de este la función de Green.

Solución:

(a) Dividamos el espacio entre los planos en dos regiones, la región I donde $\rho < \rho'$ y la región II donde $\rho > \rho'$.

1- Cada región está libre de carga, por lo que podemos resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones en coordenadas polares. La carga lineal entrará en juego cuando apliquemos las condiciones de contorno que unen las dos regiones.

- La solución general es:

$$\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho)(A_0 + B_0 \phi) + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi})$$

2 - Primero aplicamos la condición de contorno en en el plano inferior:

$$\begin{aligned}\Phi(\rho, \phi = 0) &= 0 \\ 0 &= (a_0 + b_0 \ln \rho)(A_0) + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(A_v + B_v)\end{aligned}$$

$$A_0 = 0 \text{ y } B_v = -A_v$$

La solución se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho)\phi + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v}) \sin(v\phi)$$

3- Ahora aplicamos la condición de contorno en el otro plano

$$\begin{aligned}\Phi(\rho, \phi = \beta) &= 0 \\ 0 &= (a_0 + b_0 \ln \rho)\beta + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v}) \sin(v\beta)\end{aligned}$$

para que esto se cumpla entonces $a_0 = 0$ y $b_0 = 0$ y $0 = \sin(v\beta)$ lo cual lleva a $v = \frac{m\pi}{\beta}$ donde $m = 1, 2, \dots$

La solución se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_m \left(a_m \rho^{m\pi/\beta} + b_m \rho^{-m\pi/\beta} \right) \sin(m\pi\phi/\beta) \text{ donde } m = 1, 2, \dots$$

4- La solución en ambas regiones debe tener esta forma. Ahora debemos mirar cada región por separado. En la región (I) cercana al origen, debemos tener una solución válida en el origen, de manera que $b_m = 0$, dando lugar a:

$$\boxed{\Phi_I(\rho, \phi) = \sum_m a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta)}$$

En la región (II) alejada del origen, debemos tener una solución válida en el infinito, de modo que $a_m = 0$, dando lugar a:

$$\boxed{\Phi_{II}(\rho, \phi) = \sum_m b_m \rho^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta)}$$

5- Ahora aplicamos condiciones de contorno para unir las dos regiones, recordando que hay una línea de carga presente en el límite:

$$\boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma C} \quad (8.18)$$

donde $C = 4\pi$ ó $C = \frac{1}{\epsilon_0}$ (en c.g.s. o S.I respectivamente)

$$\left[-\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial \rho} + \frac{\partial \Phi_I}{\partial \rho} \right]_{\text{en } \rho=\rho'} = \frac{\lambda \delta(\phi - \phi')}{\rho'} C$$

$$\sum_m m \sin(m\pi\phi/\beta) \left[b_m \rho'^{-m\pi/\beta} + a_m \rho'^{m\pi/\beta} \right] = \frac{\beta}{\pi} \lambda \delta(\phi - \phi') C$$

6- Multiplicamos a ambos lados por un seno e integrando con respecto al ángulo polar:

$$\sum_m m \int_0^\beta \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(n\pi\phi/\beta) d\phi \left[b_m \rho'^{-m\pi/\beta} + a_m \rho'^{m\pi/\beta} \right] = \frac{\beta}{\pi} \lambda \sin(n\pi\phi'/\beta) C$$

$$\left[b_m \rho'^{-m\pi/\beta} + a_m \rho'^{m\pi/\beta} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{m} \sin(n\pi\phi'/\beta) C \quad (8.19)$$

7- La otra condición de contorno es:

$$\boxed{\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_I}{\partial \phi} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial \phi} \right]_{\text{en } \rho=\rho'}$$

$$\boxed{a_m \rho'^{m\pi/\beta} = b_m \rho'^{-m\pi/\beta}} \quad (8.20)$$

8- Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones con las dos variables independientes de las ecuaciones (8.19) y (8.20), y llegamos a:

$$b_m = \rho'^{m\pi/\beta} \frac{1}{\pi m} \lambda \sin(m\pi\phi'/\beta) C \quad y \quad a_m = \rho'^{-m\pi/\beta} \frac{1}{\pi m} \lambda \sin(m\pi\phi/\beta) C$$

La solución final se convierte en:

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = C \frac{\lambda}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \rho_<^{m\pi/\beta} \rho_>^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(m\pi\phi'/\beta)}$$

Luego nos piden encontrar la función de Green en para esta configuración. Consideremos S.I, para hallar la Gren, sólo debemos decir que $\lambda = 4\pi\varepsilon_0$ este potencial se convierte en la función de Green:

$$\boxed{G(\rho, \phi, \rho', \phi') = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \rho_<^{m\pi/\beta} \rho_>^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(m\pi\phi'/\beta)}$$

¿y en c.g.s cuánto debería valer $\lambda \dots ?$

8.8 Función de Green entre dos planos

La función de Green de Dirichlet para el espacio ilimitado entre los planos en $z = 0$ y $z = L$ permite discutir una carga puntual o una distribución de carga entre planos conductores paralelos mantenidos a potencial cero.

a) Utilizando coordenadas cilíndricas, demuestre que una forma de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi}{L} \rho_<\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L} \rho_>\right)$$

b) Demuestre que una forma alternativa de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') \frac{\sinh(kz_<) \sinh[k(L-z_>)]}{\sinh(kL)}$$

Solución:

¿Qué coordenadas utilizamos?

- Bueno, como tenemos planos y necesitamos abarcarlos a ambos nos conviene utilizar coordenadas cilíndricas (la idea es similar al uso del cilindro para el Teorema de Gauss) Luego en coordenadas cilíndricas, ϕ es periódica con período 2π . Por lo tanto podemos expandir la función de Green como una serie de Fourier en forma exponencial, $e^{im\phi}$.

- Ahora, si miramos las condiciones de contorno en entre los planos $z = 0$ y $z = L$, entonces debemos usar la serie de senos de Fourier $\sin(n\pi z/L)$ en la coordenada z .

Luego la ecuación de Poisson

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

en coordenadas cilíndricas es:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \quad (8.21)$$

donde el ρ en el denominador no lleva prima.

Usando las relaciones de completitud

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} = 2\pi \delta(\phi - \phi') \quad (8.22)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) = \frac{L}{2} \delta(z - z') \quad (8.23)$$

el lado derecho (8.21) nos queda

$$-\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') = -\frac{4\pi}{\rho} \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L} \delta(\rho - \rho') \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right)$$

y la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(\rho, \rho') e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \quad (8.24)$$

De esta manera la Ec. (8.21) nos queda:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right] g(\rho, \rho') = -\frac{4}{L\rho} \delta(\rho - \rho')$$

Haciendo el cambio de variable

$$x = \frac{n\pi \rho}{L}$$

convierte la parte homogénea de esto en una [ecuación de Bessel modificada](#)

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2} \right) \right] g(x, x') &= -\frac{4}{Lx} \delta(x - x') \\ g(x, x') &= \begin{cases} A_{mn} I_m(x) + B_{mn} K_m(x) & x < x' \\ C_{mn} I_m(x) + D_{mn} K_m(x) & x > x' \end{cases} \end{aligned}$$

Para hallar la solución notemos que la función de Bessel modificada $I_m(x)$ diverge cuando $x \rightarrow \infty$ y la función $K_m(x)$ diverge cuando $x \rightarrow 0$, así:

$$g(x, x') = \begin{cases} A_{mn} I_m(x) & x < x' \\ D_{mn} K_m(x) & x > x' \end{cases}$$

donde los coeficientes A_{mn} y D_{mn} están determinados por las condiciones de contorno en $x = x'$

$$g_< = g_>, \quad \frac{d}{dx} g_< - \frac{d}{dx} g_> = \frac{4}{Lx'}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$A_{mn}I_m(x') = D_{mn}K_m(x') \quad (i)$$

$$A_{mn}I'_m(x') - D_{mn}K'_m(x') = \frac{4}{Lx'} \quad (ii)$$

de (i):

$$\implies A_{mn} = \frac{D_{mn}K_m(x')}{I_m(x')}$$

y sustituyendo A_{mn} en (i),

$$D_{mn} \frac{K_m(x')}{I_m(x')} I'_m(x') - D_{mn} K'_m(x') = \frac{4}{Lx'}$$

$$\implies D_{mn} = \frac{4}{Lx'} \frac{I_m(x')}{I'_m(x') K_m(x') - I_m(x') K'_m(x')}$$

y similarmente obtenemos:

$$A_{mn} = \frac{4}{Lx'} \frac{K_m(x')}{I'_m(x') K_m(x') - I_m(x') K'_m(x')}$$

Aquí viene lo interesante, resulta que las [funciones de Bessel modificadas satisfacen la fórmula de Wronskiano](#)

$$I_m(x)K'_m(x) - I'_m(x)K_m(x) = -\frac{1}{x}$$

finalmente nos da

$$g(x, x') = \frac{4}{L} \begin{cases} I_m(x)K_m(x') & x < x' \\ I_m(x')K_m(x) & x > x' \end{cases}$$

$$g(x, x') = \frac{4}{L} I_m(x_<)K_m(x_>) \quad (8.25)$$

donde

$$x_< = \min(x, x'), \quad x_> = \max(x, x')$$

Entonces sustituimos (8.25) en (8.24), y como $x = \frac{n\pi\rho}{L}$ la función de Green nos queda:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi\rho_<}{L}\right) K_m\left(\frac{n\pi\rho_>}{L}\right)$$

La parte (b) queda como ejercicio propuesto.

8.9 Esferas concéntricas con dieléctrico

Dos esferas concéntricas de radio a y b , respectivamente tienen carga $\pm Q$. El espacio vacío entre las esferas está a la mitad llenado con dieléctrico, por la parte del hemisferio con constante dieléctrica ϵ , como se ve en la figura 8.9

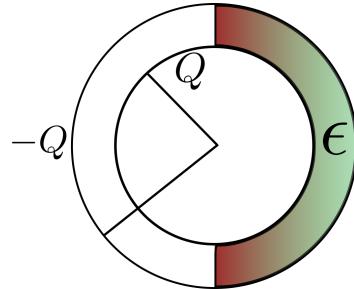


Figure 8.9: Figura del problema.

1. Encuentre el campo eléctrico entre las dos esferas utilizando dos formas distintas, note que una es más sencilla que la otra.

Respuesta: **Forma 1:** No recuerdo si resolvimos la ecuación de Laplace para una esfera, pero no importa. La calcularé ahora.

Consideremos el problema de Laplace

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) = 0,$$

Entonces, separaremos el problema en dos partes, la izquierda y la derecha (las partes separadas de la esfera), entonces, podemos por superposición resolver para la izquierda y la derecha por separado.

Así que, como no hay cargas entre a y b , resolvemos la ecuación de Laplace, mediante separación de variables se tiene

$$\psi(r, \theta, \phi) \sim R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi),$$

entonces, aplicamos el Laplaciano en coordenadas esféricas y nos queda

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) \Phi \Theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) R \Phi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \Theta R,$$

ahora, separando en tres ecuaciones por las dependencias y multiplicando por $r^2 \sin^2(\theta) / (R \Theta \Phi)$, nos quedan las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d \phi^2} = -m^2, \quad (8.26)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d \theta} \left(\sin(\theta) \frac{d \Theta}{d \theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (8.27)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0. \quad (8.28)$$

Donde para las ecuaciones sus soluciones son conocidas, siendo, para 8.26

$$\Phi(\phi) = e^{\pm im\phi} ,$$

para 8.27

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l ,$$

y finalmente para 8.28

$$R(r) = Ar^l + Br^{-l-1} ,$$

ahora, haremos trampa y giraremos la esfera, así que el lado derecho ahora lo llamaremos "parte de arriba" y el lado izquierdo "parte de abajo". De este modo, tenemos simetría azimutal, y nos queda que el potencial es

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos(\theta)) ,$$

de este modo, definimos ψ_{Ar} como el potencial de arriba y ψ_{Ab} como el potencial de abajo, entonces, como la parte de arriba no tiene ni dieléctrico ni cargas, nos quedamos con una solución tipo Laplace, del mismo modo para la parte de abajo no tiene cargas libres, cargas polarizadas en la zona donde se está examinando, entonces también podemos usar la ecuación de Laplace, de este modo, nos quedan los potenciales

$$\begin{aligned} \psi_{Ar} &= \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos(\theta)) , \\ \psi_{Ab} &= \sum_{l=0}^{\infty} [C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos(\theta)) . \end{aligned}$$

ya con esto, ahora tendríamos que aplicar las condiciones de borde para encontrar las constantes, para ello, notemos que para el potencial de arriba, en el borde superior, se tiene

$$\psi_{Ar}^{(1)} = k_1 ,$$

mientras que en el mismo potencial de arriba, en el borde inferior, también se tiene que es esfera conductora, entonces el potencial será

$$\psi_{Ar}^{(2)} = k_2 .$$

entonces, por un lado nos quedará

$$k_1 = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}) P_l \cos(\theta) ,$$

pero, aplicamos la regla de ortonormalidad de los polinomios de Legendre y el resultado utilizado en el problema de la pizza, podemos expresar

$$k_2 = A_0 + B_0/a , \quad B_l = -A_l a^{2l+1} ,$$

con esto, nos permite expresar el término para $l > 0$ y $l = 0$

$$\psi_{Ar} = A_0 + \frac{B_0}{r} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left[\left(\frac{r}{a} \right)^l - \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] P_l(\cos(\theta))$$

ahora evaluamos en el borde interior para la parte de arriba y nos queda

$$k_2 = \psi_{Ar} = A_0 + \frac{B_0}{b} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left[\left(\frac{b}{a} \right)^l - \left(\frac{a}{b} \right)^{l+1} \right] P_l(\cos(\theta)),$$

nuevamente, necesitamos que sea constante, entonces como los términos de los polinomios de Legendre contribuyen a la parte angular y el potencial k_2 es independiente del ángulo, nos queda que $A_l = 0$, de este modo, el potencial es

$$\psi_{Ar} = A_0 + \frac{B_0}{r},$$

haciendo el mismo análisis con la parte con dieléctrico (la parte de abajo), nos queda

$$\psi_{Ab} = C_0 + \frac{D_0}{r},$$

ahora, es fácil encontrar que el campo eléctrico es $E = -\nabla \cdot \psi$, de este modo

$$\vec{E}_{Ar} = \frac{B_0}{r^2} \hat{r},$$

y

$$\vec{E}_{Ab} = \frac{D_0}{r^2} \hat{r}.$$

ahora, si aplicamos condiciones de borde en el punto donde está el vacío con el dieléctrico, se debe cumplir por continuidad

$$\vec{E}_{Ar} \times \hat{\theta} = \vec{E}_{Ab} \times \hat{\theta}, \quad \vec{E}_{Ar} \cdot \hat{r} \Big|_{\theta=\pi/2} = \vec{E}_{Ab} \cdot \hat{r} \Big|_{\theta=\pi/2}$$

entonces, pasa que

$$B_0 = D_0.$$

de este modo, el campo es

$$\vec{E} = \frac{B_0}{r^2} \hat{r},$$

como conocemos el campo, podemos aplicar la Ley de Gauss sobre el dieléctrico (igual que en la forma 2, pero acá es distinto),

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\vec{D}_{Ar} \cdot \hat{r}) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\vec{D}_{Ab} \cdot \hat{r}) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi Q_{\text{encerrada}} = 4Q,$$

resolviendo nos queda

$$B_0 = \frac{2Q}{(1+\epsilon)},$$

entonces el campo es

$$\vec{E} = \frac{2Q}{(1+\epsilon)r^2}\hat{r}$$

en la zona con dieléctrico tendremos

$$\vec{D} = \frac{2\epsilon Q}{(1+\epsilon)r^2}\hat{r}.$$

Respuesta: Forma 2: De la Ley de Gauss, como hay una carga libre, podemos expresar

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = 4\pi Q,$$

como hay simetría radial por ser esfera y todo eso, nos aparecerá el ángulo de sólido a la mitad, porque tomamos la mitad de la esfera, y se cancelará con el 4π de la carga, entonces, nos quedaría la suma

$$E_r r^2 + \epsilon E_r r^2 = 2Q,$$

esto implica que el campo eléctrico es

$$\vec{E}_r = \frac{2Q}{(1+\epsilon)r^2}\hat{r},$$

en la zona con dieléctrico tendremos

$$\vec{D} = \frac{2\epsilon Q}{(1+\epsilon)r^2}\hat{r}.$$

- Calcule la densidad de carga superficial de la esfera interior.

Respuesta: Para calcular la densidad de carga superficial, usamos

$$(D_2 - D_1)|_{r=a} = 4\pi\sigma,$$

como dentro del conductor no hay campos $D_1 = 0$, mientras que fuera está el clásico, así que nos queda

$$\sigma_{Ar} = \frac{Q}{(1+\epsilon)2\pi a^2}\hat{r},$$

mientras que para la parte de abajo hay que añadir el dieléctrico

$$\sigma_{Ab} = \frac{\epsilon Q}{(1+\epsilon)2\pi a^2}\hat{r},$$

- Calcule la carga de polarización de densidad inducida por el dieléctrico en $r = a$. Si pensamos esto como un cajita de Gauss, podemos expresar la condición de borde

$$(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = -4\pi\sigma_{\text{polarizado}}|_{r=a},$$

nuevamente como no hay campo dentro $P_2 = 0$, y que la normal apunta en $-r$, nos quedaría

$$(\vec{P}_1) \cdot \vec{n} = -4\pi\sigma_{\text{polarizado}}|_{r=a},$$

ahora, si el polarizado es lineal, se tiene

$$\vec{P} = (\epsilon - 1) \vec{E},$$

de este modo

$$\sigma_{\text{polarizado}} = \frac{(1 - \epsilon)Q}{2\pi(1 + \epsilon)a^2}.$$

8.10 Momentos multipolares de cuadrupolo

Considere un sistema como un cuadrupolo, es decir, cuatro partículas puntuales cargadas ubicadas en los vértices de un cuadrado de arista a . Las partículas tienen alternadamente, carga Q y $-Q$. Encuentre los momentos multipolares no nulos.

Respuesta: Definimos el eje en el centro del cuadrado

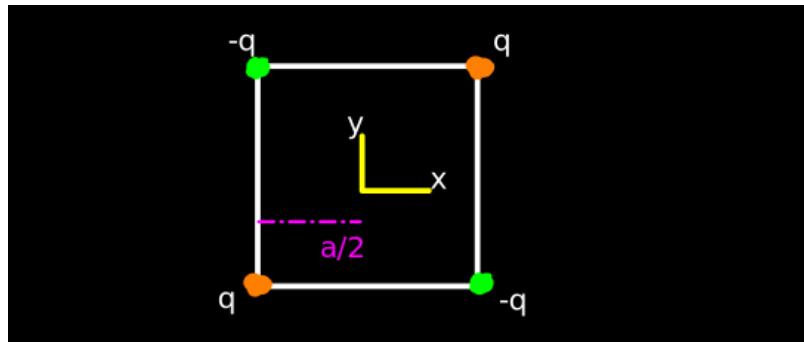


Figure 8.10: Eje de coordenadas a utilizar en el problema.

Entonces, escribimos la densidad de carga total del sistema, siendo

$$\rho(r, \theta, \phi) = \frac{4q}{a^2} \delta\left(r - \frac{a}{2}\right) \delta(\cos(\theta)) \left(\delta\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) - \delta\left(\phi - \frac{3\pi}{4}\right) + \delta\left(\phi - \frac{5\pi}{4}\right) - \delta\left(\phi - \frac{7\pi}{4}\right) \right),$$

utilizaremos esta densidad de carga para obtener momento multipolar está dado por

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta, \phi) r^l \rho(\mathbf{r}) d^3x.$$

Entonces, calculamos esta integral, donde los armónicos esféricos son

$$Y_{lm}^*(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{-im\phi}$$

entonces, separando la integral en la parte radial, angulares nos queda

$$I_1 = \int \delta\left(r - \frac{a}{2}\right) r^{l+2} d\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^{l+2},$$

$$I_2 = \int P_l^m(\cos(\theta)) \delta(\cos(\theta)) d\theta = P_l^m(0),$$

$$I_3 = \int e^{-im\phi} \left(\delta\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) - \delta\left(\phi - \frac{3\pi}{4}\right) + \delta\left(\phi - \frac{5\pi}{4}\right) - \delta\left(\phi - \frac{7\pi}{4}\right) \right).$$

donde para I_3 , se tiene

$$I_3 = e^{\frac{-im\pi}{4}} - e^{\frac{-3im\pi}{4}} + e^{\frac{-5im\pi}{4}} - e^{\frac{-7im\pi}{4}},$$

Y reescritos como fracción

$$I_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^m - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^m + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^m - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^m,$$

Definimos I_3^m como el término de la integral anterior, tal que

$$I_3^m = \begin{cases} 4i & \text{Si } m = 4n - 2 \text{ con } n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{Si } m \neq 4n - 2 \text{ con } n \in \mathbb{Z}. \\ i & \text{Si } m = 0.5, 3.5, 4.5, 7.5, 8.5, \dots. \end{cases}$$

Sabiendo esto, podemos despreciar los términos que son 0, y definir sólo $I_3 = 4i \quad \forall 4n - 2$, entonces

$$q_{l,4n-2} = 4i \left(\frac{a}{2} \right)^{l+2} P_l^{4n-2}(0) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-4n+2)!}{(l+4n-2)!}},$$

o bien

$$q_{l,m} = i \left(\frac{a}{2} \right)^{l+2} P_l^m(0) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}, \quad \text{Para los valores de } I_3 \neq 0 \neq 4i.$$

En otras palabras, también podemos decir que sobreviven los términos pares además porque el polinomio de Legendre evaluado en 0, es distinto de cero si $l = \text{par}$.

8.11 Esfera cargada que gira

Una esfera de radio a tiene una densidad de carga ρ (y tiene una densidad de carga superficial σ). La esfera es rotada sobre su diámetro a una frecuencia ω . Encuentre el campo magnético dentro y fuera de la esfera.

Solución:

Para encontrar el campo magnético \mathbf{B} dentro y fuera de la esfera, calcularemos primero el potencial vector \mathbf{A} , ya que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

y

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

Luego lo primero que hay que hacer es encontrar la densidad de corriente que se define como

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

Dado que la esfera gira con velocidad angular constante ω , la velocidad en cualquier punto de la esfera está dada por

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = \omega r \sin \theta \hat{\phi}.$$

La densidad de carga para una esfera uniformemente cargada de radio a es

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma \delta(\mathbf{r} - a)$$

de esta manera la densidad de corriente y el potencial vector son

$$\mathbf{J} = \sigma \omega a \sin \theta \delta(r' - a) \hat{\phi} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\sigma \omega a \sin \theta' \delta(r' - a) \hat{\phi}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

Podemos expandir el denominador del potencial vector en armónicos esféricos, de acuerdo con

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \sigma \omega \delta(r' - a) \hat{\phi}' 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) r'^2 \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

Debemos tener cuidado y darnos cuenta de que $\hat{\phi}' \neq \hat{\phi}$ porque las variables primadas se están integrando. La mejor manera de manejar esto es usar la expansión: $\hat{\phi}' = -\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}$. Luego dentro de la esfera (para $r < r'$, es decir el mayor es r'),

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \omega a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \delta(r' - a) (-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r'^{l+1}} \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

y para fuera de la esfera (para $r > r'$, es decir el mayor ahora es r),

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \omega a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \delta(r' - a) (-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^{l+2}}{r'^{l+1}} \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

Ahora evaluamos las deltas y reorganizamos:

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \sigma \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{a^{l-2}} Y_{lm}(\theta, \phi) I_{l,m} \text{ (dentro)} \quad (8.29)$$

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \sigma \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{a^{l+3}}{r'^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) I_{l,m} \quad (\text{fuera}) \quad (8.30)$$

$$\text{donde } I_{l,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \sin^2 \theta' d\theta' d\phi'$$

Escribamos explícitamente la expresión para los armónicos esféricos

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

$$I_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \int_0^{2\pi} (-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}) e^{-im\phi'} d\phi' \int_0^\pi P_l^m(\cos \theta') \sin^2 \theta' d\theta'$$

Resolvemos la primera integral en ϕ' , la exponencial la escribimos en términos de senos y cosenos, y aplicamos la condición de ortogonalidad de Fourier. Debido a la ortogonalidad en la primera integral, todos los términos desaparecen excepto $m = 1$ y $m = -1$. Recordar que $\sin(-x) = -\sin(x)$, y que si el intervalo es a entonces la condición de ortogonalidad es $a/2$, en este caso será igual a π . La primera integral nos da entonces:

$$I_{l,\pm 1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l \mp 1)!}{(l \pm 1)!}} \pi(\pm \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \int_0^\pi P_l^{\pm 1}(\cos \theta') \sin^2 \theta' d\theta'$$

Ahora seguimos buscando usar la ortogonalidad, pero para los Polinomios asociados de Legendre.

Haciendo la sustitución $x = \cos \theta, dx = -\sin \theta d\theta$:

$$\sin \theta = \sqrt{1-x^2} = P_1^1(x) = -2P_1^{-1}(x)$$

Luego, consideremos los casos $+1$ y -1 por separado

$$I_{l,1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-1)!}{(l+1)!}} \pi(i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \int_{-1}^1 P_l^1(x) P_1^1(x) dx \quad (8.31)$$

$$I_{l,-1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!}} \pi(-i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})(-2) \int_{-1}^1 P_l^{-1}(x) P_1^{-1}(x) dx \quad (8.32)$$

Calculemos explícitamente (8.31). Debido a la condición de ortogonalidad, solo el término $l=1$ será distinto de cero. Luego utilizando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l}$$

la Ec. (8.31) nos queda:

$$I_{1,1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-1)!}{(l+1)!}} \pi(i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \int_{-1}^1 P_1^1(x) P_1^1(x) dx$$

$$I_{1,1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{1}{2}} \pi(i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \frac{2}{3} 2$$

$$I_{1,1} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$$

y haciendo lo mismo con Ec. (8.32) (donde $m = -1$), podemos escribir,

$$I_{1,\pm 1} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}(i\hat{\mathbf{i}} \pm \hat{\mathbf{j}}) \quad (8.33)$$

La solución ahora es solo la suma del término $l = 1, m = -1$ y el término $l = 1, m = 1$. Con esto (8.29) y (8.30) no quedan:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi \sigma \omega}{c} \frac{a}{3} ar [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,-1}(\theta, \phi) I_{1,-1}] \text{ (dentro)} \\ \mathbf{A} &= \frac{4\pi \sigma \omega a^4}{c} \frac{1}{r^2} [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,-1}(\theta, \phi) I_{1,-1}] \text{ (fuera)} \end{aligned}$$

Según propiedad $Y_{1,-1} = -Y_{1,1}^*$ y $I_{1,-1} = -I_{1,1}^*$ así que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi \sigma \omega}{c} \frac{a}{3} ar [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,1}^*(\theta, \phi) I_{1,1}^*] \text{ (dentro)} \\ \mathbf{A} &= \frac{4\pi \sigma \omega a^4}{c} \frac{1}{r^2} [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,1}^*(\theta, \phi) I_{1,1}^*] \text{ (fuera)} \end{aligned}$$

Recordemos que para números complejos en general $z + z^* = 2\Re(z)$, usando en las expresiones anteriores nos queda

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi \sigma \omega}{c} \frac{a}{3} ar \sin \theta \hat{\phi} \quad \text{dentro}$$

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi \sigma \omega a^4}{c} \frac{1}{r^2} \sin \theta \hat{\phi} \quad \text{fuera}$$

El campo magnético se obtiene de:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Calculamos el rotor en coordenadas esféricas, conservando solo los términos distintos de cero para este caso:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{q}_1 & h_2 \hat{q}_2 & h_3 \hat{q}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r \hat{\theta} & \hat{\phi} r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r A_\phi \sin \theta \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Pero como $\mathbf{A} = A \hat{\phi}$, las componentes A_r y A_θ son cero y entonces

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)$$

Dentro:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) = \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma \omega a r}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) = \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma \omega a r}{3r \sin \theta} 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = \frac{1}{r} \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma \omega a}{3} \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{4\pi}{c} \frac{2}{3} a \sigma \omega \sin \theta$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{2}{3} a \sigma \omega [\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta}]}$$

$$\implies \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{2}{3} a \sigma \omega \hat{\mathbf{z}}$$

Fuera:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma \omega a^4}{3} \frac{1}{r^3} [2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\theta}]}$$

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma \omega a^4}{3} \frac{1}{r^3} [3 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}]$$

Como discutimos en ayudantía, hay otra manera de resolver el problema, les sugiero mirar el Ejemplo 5.11 del libro *Introduction to Electrodynamics* de Griffiths (1999).

8.12 Semiesfera dipolar en un plano

Sea una semiesfera de radio $r = a$ hecha de material dipolar eléctrico permanente y puesto sobre un conductor plano infinito. La dirección de \vec{P} es perpendicular a la superficie del conductor plano infinito. Calcule el campo eléctrico producido por esta configuración.

Respuesta: Para una semiesfera tenemos los armónicos

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_l \sum_{m=-l}^{\infty} \Omega_l^m \left[A_{l,m} r^l + B_{l,m} r^{-l-1} \right],$$

podemos separar el potencial en $r < a$ y $r > a$, a su vez, consideramos $r = 0 \implies B = 0$, con B la constante en $r < a$ y $r \rightarrow \infty \implies \bar{A} = 0$, con \bar{A} la constante que acompaña cuando $r > a$, de este modo el potencial queda

$$\psi = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_{l,m} (A_{lm} r^l) & r < a, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_{l,m} (\bar{B}_{lm} r^{-(l+1)}) & r > a. \end{cases}$$

con continuidad en $r = a$ se tiene

$$\bar{B}_{lm} = A_{lm} a^{2l+1},$$

hay que tener ojo que en realidad la polarización va fija en ese eje. En la ayudantía me traspapelé, por tanto los ángulos de esta también son fijas. Podemos tomar entonces la polarización como

$$\vec{P} = P \sin(\phi_0) \sin(\theta_0) \hat{y},$$

En los bordes podemos tener

$$(D_{out} - D_{in})_{r=a} \cdot \hat{r} = 4\pi \vec{p} \cdot \hat{r},$$

Y nos quedaría algo del tipo

$$\sum_l \sum_m \Omega_l^m(\theta, \phi) [A_{lm} l a^{l-1} + (l+1) A_{lm} a^{l-1}] = 4\pi P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \sin(\phi) \cos(\theta).$$

Usamos linealidad tal que

$$Y_l^m(\theta, \phi) = k \cos(\theta)$$

esto ocurre en particular para $l = 1, m = 0$, entonces nos queda

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta).$$

despejamos para $A_{1,0}$ y nos queda

$$A_{1,0} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0).$$

Con esto podemos evaluar en el potencial y tener el potencial en todo el espacio. Para los campos, calculamos $\nabla \psi$ y nos queda

$$\begin{aligned} \vec{E}_> &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) [2 \sin(\phi) \cos(\theta) \hat{r} + \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{\theta} - \cot(\theta) \cos(\phi) \hat{\phi}], \\ \vec{E}_< &= -\frac{4\pi}{3} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) [\sin(\phi) \cos(\theta) \hat{r} + \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{\theta} - \cot(\theta) \cos(\phi) \hat{\phi}]. \end{aligned}$$

8.13 Cilindro magnetizado

Considere un cilindro de largo L y radio a con un material de magnetización permanente, y uniforme M_0 , a lo largo del eje del cilindro. Construya una ecuación para H .

Respuesta: Se resuelve el potencial escalar magnético

$$\psi_M = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{M}}{|r - r'|} d^3 r - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\hat{n} \cdot \vec{M}}{|r - r'|} dr'$$

El primer término es cero por la magnetización uniforme, entonces, integramos

$$\psi(z) = \frac{M_0}{4\pi} \int \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - L/2)^2}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + L/2)^2}} \right) r dr d\phi,$$

usando el truco de Feynman, definimos $r dr = dr^2/2$, de este modo, nos queda

$$\psi = \frac{M_0}{8} \int \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - L/2)^2}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + L/2)^2}} \right) dr^2,$$

integrando, nos quedaría

$$\psi(z) = \frac{M_0}{4} \left(\sqrt{a^2 + (z - L/2)^2} - \sqrt{a^2 + (z + L/2)^2} - |z - L/2| + |z + L/2| \right),$$

ahora, para obtener H , usamos la definición

$$H = \frac{\partial}{\partial z} \psi_M,$$

lo cual nos da

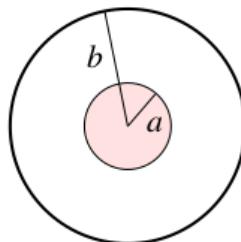
$$H = -\frac{M_0}{4} \left[\frac{z - L/2}{(a^2 - (z - L/2)^2)^{1/2}} - \frac{z + L/2}{(a^2 - (z + L/2)^2)^{1/2}} \right],$$

y 'a mano' insertamos la dirección que va en \hat{z} , esto es por la dirección del M_0 .

8.14 Esfera de material magnetizado

Tomemos una esfera de radio a hecha de un material magnético con magnetización permanente M constante. Esta esfera es puesta en forma concéntrica dentro de una esfera conductora de radio $b > a$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio y la corriente superficial en el conductor. Demuestre que la integral de la corriente es cero.

Ayuda: Asuma que los campos dentro del conductor son cero.



Esférica con \mathbf{M} constante dentro de un conductor

Solución:

Sea un sistema rectangular tal que $\vec{M} = M\hat{z}$, luego

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$$

y al aplicar la divergencia se obtiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{H} + 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

pero de la ley de monopolos magnéticos se tiene que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, por lo que

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

Puesto que no hay campo eléctrico ni cargas en movimiento (no hay densidad de corriente), de la ley de Ampère en medios materiales se escribe

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

lo que implica que \vec{H} puede escribirse como el gradiente de un potencial, ya que se sabe por identidades vectoriales que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = 0$, así $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m$ y se tiene

$$\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \Phi_m) = 0$$

de la misma manera que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ implica $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, puesto que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$. Ahora, recordando que $-\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$, se escribe

$$-\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi_m) = \nabla^2 \Phi_m = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 4\pi \vec{\nabla} \cdot (M \hat{z}) = 0,$$

es decir, el potencial magnético cumple con la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi_m = 0$. Considerando la simetría azimutal, la solución del potencial en el espacio será

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n[\cos(\theta)] & \text{si } r < a \\ \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n[\cos(\theta)] & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y como la solución no puede diverger en $r = 0$, se deduce que $B_n = 0$, luego

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n[\cos(\theta)] & \text{si } r < a \\ \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n[\cos(\theta)] & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

Para la esfera interna se tienen las condiciones de borde

$$(\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}}) \cdot \hat{n}_{21} = 0 \quad \hat{n}_{21} \times (\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}}) = 0$$

donde $\hat{n}_{21} = \hat{r}$, por lo que se reescribe

$$\vec{B}_{\text{out}} \cdot \hat{r} = \vec{B}_{\text{in}} \cdot \hat{r} \quad \vec{H}_{\text{out}} \times \hat{r} = \vec{H}_{\text{in}} \times \hat{r}$$

Recordando que $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$, la primera condición queda de la forma

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{out}} \cdot \hat{r} &= (\vec{H}_{\text{in}} + 4\pi \vec{M}) \cdot \hat{r} \\ - \frac{\partial \Phi_m^>}{\partial r} \Big|_{r=a} &= - \frac{\partial \Phi_m^<}{\partial r} \Big|_{r=a} + 4\pi M \hat{z} \cdot \hat{r} \\ - \frac{\partial \Phi_m^>}{\partial r} \Big|_{r=a} &= - \frac{\partial \Phi_m^<}{\partial r} \Big|_{r=a} + 4\pi M \cos(\theta) \end{aligned}$$

puesto que $\hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$, mientras que para la segunda condición se escribe

$$- \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_m^>}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_m^<}{\partial \theta} \Big|_{r=a}$$

y reemplazando la solución del potencial se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} -\left[nC_n a^{n-1} - (n+1)D_n a^{-(n+2)}\right] P_n[\cos(\theta)] &= -nA_n a^{n-1} P_n[\cos(\theta)] + 4\pi M \cos(\theta) \\ \left[C_n a^n + D_n a^{-(n+1)}\right] \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] &= A_n a^n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] \end{aligned}$$

Notando que $P_1[\cos(\theta)] = \cos(\theta)$, se reescribe

$$\begin{aligned} \left[nC_n a^{n-1} - (n+1)D_n a^{-(n+2)}\right] P_n[\cos(\theta)] &= nA_n a^{n-1} P_n[\cos(\theta)] - 4\pi M P_1[\cos(\theta)] \\ \left[C_n a^n + D_n a^{-(n+1)}\right] \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] &= A_n a^n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] \end{aligned}$$

luego se deduce que $n = 1$ y las condiciones de borde quedan

$$\begin{aligned} C_1 - 2D_1 a^{-3} &= A_1 - 4\pi M \\ C_1 a + D_1 a^{-2} &= A_1 a \end{aligned}$$

sistema del cual se obtiene

$$D_1 = \frac{4\pi}{3} a^3 M \quad C_1 = A_1 - \frac{4\pi}{3} M$$

La solución del potencial queda

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} A_1 r \cos(\theta) & \text{si } r < a \\ \left[A_1 r - \frac{4\pi}{3} r M + \frac{4\pi}{3} \frac{a^3}{r^2} M\right] \cos(\theta) & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y usando que sobre la esfera conductora

$$(\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}}) \cdot \hat{r} = 0$$

ya que sigue cumpliéndose que $\hat{n}_{12} = \hat{r}$, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi_m^>}{\partial r} \Big|_{r=b} &= -\frac{\partial \Phi_m^<}{\partial r} \Big|_{r=b} \\ 0 &= \left[A_1 - \frac{4\pi}{3} M - \frac{8\pi}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^3 M\right] \cos(\theta), \end{aligned}$$

siendo inmediato que

$$A_1 = \frac{4\pi}{3} M \left[1 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3\right]$$

luego el potencial en el espacio es

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} M \left[1 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3\right] r \cos(\theta) & \text{si } r < a \\ \frac{4\pi}{3} M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3\right] r \cos(\theta) & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y como $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_m$, se obtiene el campo magnético

$$\vec{H} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3}M \left[1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] [\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}] & \text{si } r < a \\ \frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \cos(\theta)\hat{r} + \frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sin(\theta)\hat{\theta} & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y ya que solo hay magnetización en $r < a$, luego usando que $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$, se obtiene

$$\vec{B} = \begin{cases} 4\pi M [\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}] - \frac{4\pi}{3}M \left[1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] [\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}] & \text{si } r < a \\ \frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \cos(\theta)\hat{r} + \frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sin(\theta)\hat{\theta} & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

Por último, usando la condición sobre la superficie de la esfera conductora

$$\hat{r} \times (\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}}) = \frac{4\pi}{c} \vec{K}$$

y, puesto que $\vec{H}_{\text{out}} = 0$ para $r > b$, se escribe

$$-\hat{r} \times \left(\frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \cos(\theta)\hat{r} + \frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sin(\theta)\hat{\theta} \right) \Big|_{r=b} = \frac{4\pi}{c} \vec{K}$$

y desarrollando se obtiene

Para evaluar la corriente total producida se tiene en x que

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{\Omega} [K(x) \cdot \hat{x}] d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^b Mc \sin(\theta) \left(\frac{a}{b}\right)^3 \sin(\phi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{3} M c a^3 \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi \\ &= \frac{\pi}{6} M c a^3 \int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

y, de manera análoga,

$$I_y = \int_{\Omega} [K(y) \cdot \hat{y}] d\Omega = -\frac{\pi}{6} M c a^3 \int_0^{2\pi} \cos(\phi) d\phi = 0$$

luego $I_x = I_y = 0$, como se quería demostrar.

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sin(\theta)\hat{\phi} &= \frac{4\pi}{c} \vec{K} \\ -Mc \sin(\theta) \left(\frac{a}{b}\right)^3 \hat{\phi} &= \vec{K}. \end{aligned}$$

8.15 Sábana infinita

Supongamos que tenemos una sábana infinita que está en el espacio, la cual tiene densidad de carga σ y está en el plano $z = 0$.

1. ¿Cuál es el campo eléctrico para el caso electroestático?
2. Suponga que la sábana se mueve como $x = \Delta e^{i\omega t}$, ¿Qué campos se espera que se generen? En qué dirección?
3. Demuestre que el campo eléctrico cumple

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \alpha E = b\delta(z) ,$$

encuentre a y b .

4. ¿Cuáles son las soluciones para $z > 0$ y $z < 0$? ¿Cuál es la solución final para los campos?
5. Calcule el vector de Poynting ¿Qué causa el input de energía? Demuestre que la energía radiada es la misma que el input de energía.

Respuesta:

- (a) Usamos ley de Gauss como en electromagnetismo

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int \rho dV ,$$

resolviendo nos queda

$$\vec{E}(z) = 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z)\hat{z} ,$$

esto porque solo contribuyen las tapas.

- (b) La oscilación es $x = \Delta e^{i\omega t}$, generando los campos

$$\vec{E}(z, t) = E(z)e^{i\omega t}\hat{x} , \quad \vec{B}(z, t) = B(z)e^{i\omega t}\hat{y} ,$$

usando la ley de Faraday se llega

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} e^{i\omega t} \hat{y} .$$

Esto implica que

$$\vec{E}(z, t) = E(z)e^{i\omega t}\hat{x} , \quad \vec{B}(z, t) = \frac{i}{k} \frac{\partial E}{\partial z} e^{i\omega t}\hat{y} ,$$

Con $k = \omega/c$.

- (c) Escribimos

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) .$$

Mezclamos con la ley de Ampère

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] ,$$

se usa la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} .$$

la densidad de corriente es

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \sigma \delta(x) i \omega \Delta e^{i \omega t} \hat{x}.$$

desarrollando llegamos a

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k^2 \vec{E} = -4\pi k^2 \sigma \Delta \delta(z).$$

con $k^2 = a, b = -4\pi k^2 \sigma \Delta$.

(d) Hay que resolver la ecuación de Helmholtz homogénea, con solución

$$E(z, t) = \begin{cases} Ae^{-ikz} + Be^{ikz}, & z < 0 \\ Ce^{-ikz} + De^{ikz}. & z > 0 \end{cases}$$

la sábana debe propagarse hacia afuera, por tanto $D = A = 0$ y por continuidad $B = C$. Entonces

$$E(z, t) = Be^{-ik|z|}.$$

integraremos en la discontinuidad para $-\varepsilon/2, \varepsilon/2$. Entonces nos quedará

$$\left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=0} = -4\pi k^2 \sigma \Delta.$$

evaluamos y obtenemos el valor de la constante

$$B = -2\pi i \sigma \Delta k.$$

De este modo, los campos son

$$\vec{E} = -2\pi i k \sigma \Delta e^{i(\omega t - k|z|)} \hat{x}, \quad \vec{B} = -2\pi \sigma \Delta \frac{\partial}{\partial z} e^{-ik|z|} e^{i\omega t} \hat{y}.$$

(e) Teorema de Poynting sin polarización

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V (U_e - U_m) dV = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A} + \int \vec{J}^* \cdot \vec{E} dV,$$

donde las energías eléctricas y magnéticas U_e, U_m , tenemos

$$U_e = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}|^2, \quad U_m = \frac{1}{8\pi} |\vec{B}|^2,$$

y el vector de Poynting es

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}^*.$$

Los campos al cuadrado los obtenemos de d)

$$|E|^2 = 4\pi^2 k^2 \sigma^2 \Delta^2 = |B|^2.$$

de acá

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int (U_e - U_m) dV = 0,$$

mientras que para el vector de Poynting, se tiene

$$\vec{S} = \pi c k^2 \sigma^2 \Delta^2 \operatorname{sgn}(z) \hat{z}.$$

Y por otro lado

$$\int_v \vec{J}^* \cdot \vec{E} dV = -2\pi c k^2 \sigma^2 \Delta^2,$$

luego sumamos y nos queda

$$\oint \vec{S} \cdot d\vec{A} + \int_v \vec{J}^* \cdot \vec{E} = 0.$$

La energía irradiada es igual al imput.

8.16 Campos electromagnéticos de un cascarón esférico

Considere un cascarón esférico conductor sobre el cual hay una carga Q que tiene un radio que cambia como $R = R_0 + \Delta R \cos(\omega t)$. Encuentre los campos electromagnéticos.

Respuesta: Para este sistema, definimos la densidad de carga del cascarón

$$\rho = \frac{Q}{4\pi [R_0 + \Delta R \cos(\omega t)]^2} \delta(R(t)).$$

La densidad de corriente será

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \frac{Q}{4\pi [R_0 + \Delta R \cos(\omega t)]} \delta(R(t)) \dot{R}(t) \hat{r}.$$

entonces, calculamos el potencial vector

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}}{|r - r'|} d^3 r' = \frac{\omega \sin(\omega t)}{c} \hat{r} \int \frac{\rho}{|r - r'|} d^3 r',$$

notamos que este es el potencial clásico, entonces

$$\vec{A} = \frac{\omega \sin(\omega t)}{c} \phi(r) \hat{r}.$$

Como es una esfera, sabemos que el potencial fuera tendrá que ser

$$\phi(r) = \frac{Q}{r},$$

entonces

$$\vec{A} = \frac{Q \omega \sin(\omega t)}{rc} \hat{r}.$$

Así, podemos calcular el campo eléctrico como

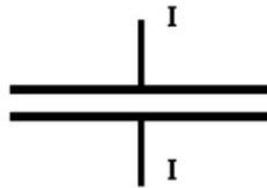
$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \left[\frac{Q}{r^2} - \frac{Q \omega^2}{rc^2} \cos(\omega t) \right] \hat{r}.$$

Por otro lado $\vec{B} = \vec{0}$.

8.17 Condensador de placas circulares

Un condensador ideal consiste de dos placas circulares de radio a (ver figura) y separadas por una distancia $d \ll a$, el cual esta conectado a una fuente de corriente dada por $I(t) = I_0 \cos \omega t$.

- Calcule los campos magnéticos entre las placas a segundo orden en la frecuencia (no considere efectos de borde)
- Calcule los volúmenes de integrales $w_e y^m$, que entran en la definición de X , usando $I_i = -i\omega Q_i$
- Encuentre además que el circuito equivalente en serie tiene satisface $C \simeq a^2/4d, L \simeq d/2c^2$.
- Resuelva los campos en forma exacta. Encuentre C y L nuevamente.



Solución:

La solución completa, escrita a mano, está en el documento “ayudantía9.pdf”.

- Utilizando las ecuaciones de Maxwell, con $\rho = 0$ y $J = 0$, desacoplamos las EDOs acopladas para el campo magnético y eléctrico, y llegamos a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{4I_0 i}{a^2 \omega} \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{4c^2} \right) e^{-i\omega r} \hat{z} \quad (8.34)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2I_0 r}{a^2 c} \left(1 - \frac{r^2}{8c^2} \omega^2 \right) e^{-i\omega r} \hat{\phi} \quad (8.35)$$

- Utilizando lo obtenido en a) junto con las densidades de energía eléctrica y magnética

$$w_e = \frac{1}{16\pi} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (8.36)$$

$$w_m = \frac{1}{16\pi} \vec{B} \cdot \vec{B}^* \quad (8.37)$$

lo reemplazamos respectivamente en

$$W_e = \int w_e dV \quad (8.38)$$

$$W_m = \int w_m dV \quad (8.39)$$

y obtenemos

$$W_e = -\frac{Qd}{a^2} + \frac{Q^2\omega^2 d}{4c^2} - \frac{Q^2\omega^4 da^2}{48c^4} \quad (8.40)$$

$$W_m = -\frac{Q^2\omega^2 d}{8c^2} + \frac{Q^2\omega^4 a^2 d}{48c^4} - \frac{Q^2 a^4 \omega^6 d}{1024c^6} \quad (8.41)$$

c) La relación entre reactancia e inductancia es dada por

$$X = \omega L = \frac{4\omega}{I_0^2} W_m \quad (8.42)$$

así se obtiene a primer orden

$$L \approx \frac{d}{2c^2} \quad (8.43)$$

Lugo la reactancia y la capacitancia están dadas por

$$X = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{4\omega}{I_0^2} W_e \quad (8.44)$$

y obtenemos

$$C \approx \frac{a^2}{4d} \quad (8.45)$$

d) Partimos de las ecuaciones obtenidas durante el desarrollo del item a):

$$\frac{\partial E(r)}{\partial r} = -\frac{i\omega}{c} B(r) \quad (8.46)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = -\frac{i\omega}{c} E(r) \quad (8.47)$$

derivamos una ecuación, reemplazamos en la otra, agrupamos términos y armamos la ecuación:

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} B(r) + r \frac{d}{dr} B(r) + (k^2 r^2 - 1) B(r) = 0 \quad (8.48)$$

que corresponde a la Ec. de Bessel, cuya solución es del tipo

$$\vec{B}(r) = aJ_1(kr)\hat{\phi} \quad (8.49)$$

usamos que

$$J_1(kr) = -J'_0(kr)$$

junto con aproximación para bajas frecuencias. Recordamos que

$$J_0(z) = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(\nu!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{1!} \frac{z^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2} \frac{z^4}{2^4} \dots \quad (8.50)$$

y los campos serán:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{4I_0 i}{a^2 \omega} J_0(kr) e^{-i\omega t} \hat{z} \quad (8.51)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4I_0}{a^2 \omega} J_1(kr) e^{-i\omega t} \hat{\phi} \quad (8.52)$$

Calculamos la capacitancia

$$C = \frac{a^2}{d} \quad (8.53)$$

y la inductancia

$$L \approx \frac{k^2 d}{2\omega^2} \quad (8.54)$$

8.18 Potencia irradiada por un cascarón esférico

Considere un cascarón esférico de radio R y densidad de carga superficial σ que rota sobre su eje de simetría con frecuencia angular $\Omega = \Omega_0 e^{-i\omega t}$. Encuentre el potencial vector y muestre que la potencia irradiada cae como $\frac{1}{r^2}$ para $r \gg R$.

Solución:

El potencial vector cumple con la ecuación

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

donde la densidad de corriente viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \rho \vec{v} \\ &= [\sigma \delta(r-R)] R \sin(\theta) \vec{\Omega} \\ &= \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \hat{\phi} \end{aligned}$$

Suponiendo $\vec{A} = A(r, \theta) e^{-i\omega t} \hat{\phi}$, se escribe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} A(r, \theta) \hat{\phi} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [-i\omega A(r, \theta) e^{-i\omega t} \hat{\phi}] \\ &= -\omega^2 A(r, \theta) e^{-i\omega t} \hat{\phi} \\ &= -\omega^2 \vec{A}(r, \theta) \end{aligned}$$

obteniéndose la ecuación de Helmholtz inhomogénea

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \hat{\phi}$$

donde $k = \omega/c$. Desarrollando el Laplaciano en coordenadas esféricas se tiene que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] + \left[k^2 - \frac{\omega^2}{r^2 \sin^2(\theta)} \right] A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

o, factorizando,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] - \frac{\omega^2}{\sin^2(\theta)} A \right) + k^2 A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

Ahora, la ecuación diferencial de Legendre modificada es

$$(1-x^2) \frac{d^2 A}{dx^2} - 2x \frac{dA}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] A = 0$$

donde el cambio de variable $x = \cos(\theta)$ permite escribir

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} &= \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^{-1} \frac{dA}{d\theta} = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \\ \frac{d^2 A}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dA}{dx} \right) = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{dx} \left(\frac{dA}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dA}{dx} \right) = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] \end{aligned}$$

luego se obtiene la ecuación

$$\frac{[1-\cos^2(\theta)]}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] + \frac{2\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} + l(l+1)A - \frac{m^2}{1-\cos^2(\theta)} A = 0$$

o, lo que es equivalente,

$$\sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] + \frac{2\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A = -l(l+1)A$$

Desarrollando esta expresión se escribe

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\sin^2(\theta) \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] + 2\cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A &= -l(l+1)A \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \left[-\cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} + \sin(\theta) \frac{d^2 A}{d\theta^2} + 2\cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A &= -l(l+1)A \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \left[\sin(\theta) \frac{d^2 A}{d\theta^2} + \cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A &= -l(l+1)A \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A &= -l(l+1)A \end{aligned}$$

ecuación que es igual al término entre paréntesis en la ecuación de Helmholtz inhomogénea (con $m^2 = \omega^2$), así

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} A + k^2 A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

pero escribiendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[A + r \frac{\partial A}{\partial r} \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) \\ &= \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[2r \frac{\partial A}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

la ecuación queda

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) - \frac{l(l+1)}{r^2} A + k^2 A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

Puesto que \vec{A} cumple con la ecuación de Legendre asociada, se propone

$$\vec{A}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f(r) P_l^m[\cos(\theta)] \hat{\phi}$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{P_l^m[\cos(\theta)]}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] f(r) P_l^m[\cos(\theta)] = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

deduciéndose que $l = m = 1$, luego $P_1^1[\cos(\theta)] = -\sin(\theta)$ y se escribe

$$-\frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{2f}{r^2} \sin(\theta) - k^2 f \sin(\theta) = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) - \frac{2f}{r^2} + k^2 f = \frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0$$

En $r \neq R$, la ecuación queda

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) - \frac{2f}{r^2} + k^2 f = 0$$

y haciendo el cambio de variable $f(r) = F(r)/\sqrt{r}$ se obtiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sqrt{r} F) + \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) \frac{F}{\sqrt{r}} = 0$$

Desarrollando, se escribe

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} F) \right] + \sqrt{r} \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) F \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{F}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right] + \sqrt{r} \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) F \\ &= -\frac{F}{4r^{3/2}} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \sqrt{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \sqrt{r} k^2 F - \frac{2F}{r^{3/2}} \\ &= \sqrt{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(\sqrt{r} k^2 - \frac{9}{4r^{3/2}} \right) F \\ &= r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + r \frac{\partial F}{\partial r} + \left[r^2 k^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] F \end{aligned}$$

la cual corresponde a una función de Hankel esférica con solución

$$F(r) = \begin{cases} A_0 \left[h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr) \right] & \text{si } r < R \\ B_0 h_{3/2}^{(1)}(kr) & \text{si } r > R \end{cases}$$

escribiéndose el potencial vector

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = -\frac{F(r)}{\sqrt{r}} \sin(\theta) \hat{\phi}$$

Las funciones de Hankel esféricas tienen la forma

$$h_{3/2}^{(1)}(kr) = j_{3/2}^{(1)}(kr) + iy_{3/2}^{(1)}(kr) \quad h_{3/2}^{(2)}(kr) = j_{3/2}^{(2)}(kr) - iy_{3/2}^{(2)}(kr)$$

luego es importante destacar que la solución en el interior $r < R$ es una suma de funciones de Hankel esféricas de manera que se cumpla

$$\left[iy_{3/2}^{(1)}(kr) - iy_{3/2}^{(2)}(kr) \right] \sim 0,$$

puesto que las funciones de Neumann esféricas o $y_{3/2}^{(2)}(kr)$, divergen en el origen $r = 0$ (no puede hacerse directamente cero la función de Neumann esférica, puesto que implica anular $A_0 = 0$ y no existiría solución en $r < R$, lo cual no es cierto). La elección de $h_{3/2}^{(1)}(kr)$ en el exterior $r > R$ no es arbitraria, puesto que implica una radiación hacia el infinito, aunque el cálculo sí es el mismo para cualquiera de las dos funciones de Hankel esféricas, en caso de haberse escogido $h_{3/2}^{(2)}(kr)$ para $r > R$ (lo cual no es problema en la matemática, pero sí en la interpretación física). De la condición de continuidad en el campo \vec{B} se tiene que

$$\left(\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}} \right) \cdot \hat{n} = 0,$$

pero $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, luego se escribe (usando que \vec{A} solo tiene dirección en $\hat{\phi}$)

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
&= \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} [A_\phi \sin(\theta)] - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} [r A_\phi] \right) \hat{\theta} \\
&= \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\phi \sin(\theta)] \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_\phi] \hat{\theta}
\end{aligned}$$

y, puesto que solo sobrevive la componente paralela, se obtiene por lo que la constante B_0 será

$$B_0 = A_0 \left[\frac{h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \right]$$

y la solución queda

$$F(r) = \begin{cases} A_0 \left[h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr) \right] & \text{si } r < R \\ A_0 \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] \frac{h_{3/2}^{(1)}(kr)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} & \text{si } r > R \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$F(r) = A_0 \left[h_{3/2}^{(1)}(kr_<) + h_{3/2}^{(2)}(kr_<) \right] \frac{h_{3/2}^{(1)}(kr_>)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)}$$

donde $r_< = \min(r, R)$ y $r_> = \max(r, R)$. De la discontinuidad del campo en $r = R$ (notar que desaparece la delta de Dirac en la densidad de corriente),

$$(\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}}) \times \hat{n} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

y usando que

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\phi \sin(\theta)] \Big|_{r=R} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_\phi] \Big|_{r=R} \hat{\theta}$$

se obtiene el campo externo

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{\text{out}} &= -\frac{F_{\text{out}}}{r^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2(\theta)] \Big|_{r=R} \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} F_{\text{out}}) \Big|_{r=R} \hat{\theta} \\
&= -\frac{2A_0}{R^{3/2}} \cos(\theta) \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0}{R} \sin(\theta) \left[\frac{\bar{H}_{3/2}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} h_{3/2}^{(1)}(kr) \right] \Big|_{r=R} \hat{\theta},
\end{aligned}$$

donde, por simplicidad, se usa

$$\bar{H}_{3/2}(kR) = \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial [r^{-1/2} F_{\text{in}} \sin^2(\theta)]}{\partial \theta} \Big|_{r=R} - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial [r^{-1/2} F_{\text{out}} \sin^2(\theta)]}{\partial \theta} \Big|_{r=R} &= 0 \\ \frac{F_{\text{in}}}{R^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial [\sin^2(\theta)]}{\partial \theta} - \frac{F_{\text{out}}}{R^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial [\sin^2(\theta)]}{\partial \theta} &= 0 \\ F_{\text{in}} - F_{\text{out}} &= 0 \\ A_0 \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] - B_0 h_{3/2}^{(1)}(kR) &= 0 \end{aligned}$$

Desarrollando la derivada se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{out}} &= -\frac{2A_0 \cos(\theta)}{R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0 \sin(\theta)}{2R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R}} \frac{\bar{H}_{3/2}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) \right]' \hat{\theta} \\ &= \frac{A_0}{R^{3/2}} \left(-2 \cos(\theta) \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{2} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + kR \sin(\theta) \frac{\bar{H}_{3/2}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) \right]' \hat{\theta} \right) \end{aligned}$$

Análogamente, para el campo interno se tiene

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{in}} &= -\frac{F_{\text{in}}}{r^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2(\theta)] \Big|_{r=R} \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} F_{\text{in}}) \Big|_{r=R} \hat{\theta} \\ &= -\frac{2A_0 \cos(\theta)}{R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0 \sin(\theta)}{R} \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{r} \bar{H}_{3/2}(kR)] \Big|_{r=R} \hat{\theta} \\ &= -\frac{2A_0 \cos(\theta)}{R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0 \sin(\theta)}{2R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R}} \bar{H}_{3/2}'(kR) \hat{\theta} \\ &= \frac{A_0}{R^{3/2}} \left[-2 \cos(\theta) \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{2} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + kR \sin(\theta) \bar{H}_{3/2}'(kR) \hat{\theta} \right] \end{aligned}$$

y reemplazando ambos campos en la condición de discontinuidad se obtiene

$$\begin{aligned} (\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}}) \times \hat{n} &= \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R}} \left[\left(\left[h_{3/2}^{(1)}(kR) \right]' + \left[h_{3/2}^{(2)}(kR) \right]' \right) - \frac{\left[h_{3/2}^{(1)}(kR) \right]'}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \right. \\ &\quad \left. = \frac{\left(h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right)'}{\sqrt{R} h_{3/2}^{(1)}(kR)} \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) h_{3/2}^{(2)}(kR)' - h_{3/2}^{(1)}(kR)' h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] \right] \\ &= \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R} h_{3/2}^{(1)}(kR)} W \left[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] \end{aligned}$$

con W el Wronskiano de las funciones de Hankel esféricas. Se tiene entonces que

$$\frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R} h_{3/2}^{(1)}(kR)} W \left[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] = -\frac{4\pi}{c} R \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta)$$

por lo que la constante será

$$A_0 = -\frac{4\pi R^{3/2} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} h_{3/2}^{(1)}(kR)}{\omega W [h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]}$$

luego la función queda

$$F_<(r) = -\frac{4\pi R^{3/2} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} h_{3/2}^{(1)}(kR)}{\omega W [h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]} [h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr)],$$

$$F_>(r) = -\frac{4\pi R^{3/2} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} h_{3/2}^{(1)}(kr)}{\omega W [h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]} [h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR)]$$

y el potencial vector será

$$\vec{A}_<(r) = -\frac{4\pi}{\omega} \sqrt{\frac{R^3}{r}} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \left(\frac{h_{3/2}^{(1)}(kR) [h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr)]}{W [h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]} \right),$$

$$\vec{A}_>(r) = -\frac{4\pi}{\omega} \sqrt{\frac{R^3}{r}} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \left(\frac{h_{3/2}^{(1)}(kr) [h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR)]}{W [h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]} \right)$$

Puesto que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, si $r \gg R$, el término que domina el campo es

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial [\sin(\theta) A]}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A)}{\partial r} \hat{\theta} \sim r^{-3/2}$$

y usando el gauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ tal que $\Psi = 0$, el campo eléctrico queda

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Psi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \sim r^{-1/2}$$

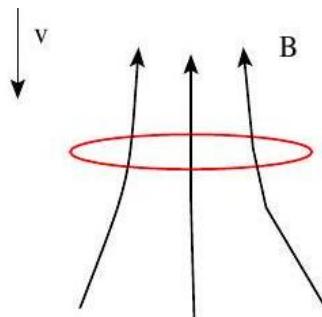
Ahora, la potencia radiada viene dada por la expresión

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$$

y centrándose en la magnitud,

$$S \simeq \frac{1}{r^{1/2}} \frac{1}{r^{3/2}} = \frac{1}{r^2}$$

luego la potencia cae como r^{-2} para $r \gg R$.



8.19 Anillo que cae en un campo magnético

Considere un anillo de radio a y resistencia R que cae en forma horizontal en un campo magnético vertical que varía con la altura $\mathbf{B} = B(z)\hat{z}$. Encuentre la ecuación de movimiento del anillo y su velocidad terminal. Si imponemos una corriente continua en el anillo a través de una batería, ¿puede este flotar?

Solución:

El flujo magnético a través del alambre viene dado por

$$\Phi(z) = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B(z)dA$$

luego su variación en el tiempo es

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d}{dt} \int B(z)dA \\ &= \frac{d}{dt} B(z) \int dA \\ &= \pi a^2 \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

y la fuerza electromotriz sobre el alambre al dejarlo caer en el campo será

$$\begin{aligned}\epsilon &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

Analizando la energía cinética y potencial gravitatorio, se obtiene el Lagrangiano

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{z})^2 - mgz$$

y aplicando la ecuación de Euler-Lagrange sobre la variable z se obtiene

$$L_z - \frac{d}{dt} L_{\dot{z}} = -mg - m\ddot{z} = 0$$

es decir, $\ddot{z} + g = 0$. Pero el sistema posee una resistencia que disipa energía debido al flujo que atraviesa el centro del alambre en forma de anillo, esto implica que el oscilador armónico contiene un término más (relacionado a la disipación), luego

$$\ddot{z} - \gamma \dot{z} + g = 0, \quad (8.55)$$

para algún coeficiente de fricción γ . Por otro lado, la variación temporal de la energía es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m(\dot{z})^2 + mgz \right] = m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z}$$

de manera que, si se reestructura la Ec. (8.55), se llega a que

$$\begin{aligned} 0 &= m\dot{z}\ddot{z} - \gamma m(\dot{z})^2 + mg\dot{z} \\ &= [m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z}] - \gamma m(\dot{z})^2 \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m(\dot{z})^2 + mgz \right] - \gamma m(\dot{z})^2 \end{aligned}$$

$$0 = P - \gamma m(\dot{z})^2 \quad (8.56)$$

donde P es la potencia radiada por el sistema. Por otro lado, es también cierto que

$$P = IV = \left(\frac{\epsilon}{R} \right) \epsilon = \frac{\epsilon^2}{R}$$

y, puesto que

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dz} \dot{z} \end{aligned}$$

la potencia disipada será

$$P = \frac{\epsilon^2}{R} = \frac{\pi^2 a^4}{R c^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2$$

Reemplazando en la Ec. (8.56) se obtiene

$$\frac{\pi^2 a^4}{R c^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2 - \gamma m(\dot{z})^2 = 0$$

luego el coeficiente de fricción es

$$\gamma = \frac{\pi^2 a^4}{R m c^2} \left(\frac{dB}{dz} \right)^2$$

De esta manera, reemplazando en la Ec. (8.55), se obtiene la ecuación de movimiento del anillo

$$\ddot{z} + \frac{\pi^2 a^4}{R m c^2} \left(\frac{dB}{dz} \right)^2 \dot{z} + g = 0.$$

Para la velocidad terminal, se tiene que $\ddot{z} = 0$, luego

$$\frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left(\frac{dB}{dz} \right)^2 \dot{z} + g = 0$$

y despejando \dot{z} se concluye

$$\dot{z} = -\frac{Rmgc^2}{\pi^2 a^4} \left(\frac{dB}{dz} \right)^{-2}.$$

Al añadir una corriente debido a una batería, la nueva potencia radiada por el alambre será

$$\begin{aligned} P &= I\varepsilon \\ &= \frac{(\varepsilon + \varepsilon_0)}{R} \varepsilon, \end{aligned}$$

con ε_0 el voltaje añadido por la batería al circuito. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P &= \frac{\varepsilon^2}{R} + \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{R} \\ &= \frac{\pi^2 a^4}{Rc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2 - \frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{Rc} \frac{dB}{dz} \dot{z} \end{aligned}$$

luego la Ec. (8.56) queda

$$\frac{\pi^2 a^4}{Rc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2 - \frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{Rc} \frac{dB}{dz} \dot{z} - \gamma m(\dot{z})^2 = 0$$

obteniéndose el coeficiente de fricción

$$\gamma = \frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{Rmc \dot{z}} \frac{dB}{dz} - \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2$$

y reemplazando en la Ec. (8.55) se llega a la ecuación de movimiento del alambre

$$\ddot{z} - \left[\frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{Rmc \dot{z}} \frac{dB}{dz} - \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \right] \dot{z} + g = 0$$

o, lo que es equivalente,

$$\ddot{z} - \frac{\pi a^2}{Rmc} \frac{dB}{dz} \varepsilon_0 + \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \dot{z} + g = 0$$

Para que el anillo levite debe cumplirse que $\ddot{z} = \dot{z} = 0$, así

$$-\frac{\pi a^2}{Rmc} \frac{dB}{dz} \varepsilon_0 + g = 0$$

por lo que la condición sobre el voltaje entregado por la batería al circuito, tal que el anillo levite, vendrá dada por

$$\varepsilon_0 = \frac{Rmgc}{\pi a^2} \left(\frac{dB}{dz} \right)^{-1}$$

8.20 Circuito de corriente circular

Un circuito de corriente circular de radio a acarrea una corriente I . Este es colocado en el plano $x - y$ con su centro en el origen.

- a) Muestre que la única componente del potencial vector distinta de cero es la componente ϕ . Demuestre que A_ϕ se puede escribir de la siguiente forma

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk$$

donde $\rho_< = \min(\rho, a)$ y $\rho_> = \max(\rho, a)$.

- b) Muestre que una forma alternativa de escribir A_ϕ es

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk$$

- c) Encuentre expresiones integrales para las componentes de la inducción magnética, utilizando los resultados obtenidos en a) y b). Calcule explícitamente las componentes de B en el eje \hat{z} , desarrollando las integrales necesarias. Hint: use que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{I_1(k\rho)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J_1(k\rho)}{\rho} = \frac{k}{2} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(kz) K_0(k\rho) dk = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Solución:

- a) De las series de Fourier se escribe la expansión en coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \cos[k(z - z')] \left[\frac{I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) \right] dk$$

y usando que la densidad de corriente es

$$\begin{aligned} \vec{J} &= I\delta(z')\delta(\rho' - a)\phi' \\ &= I\delta(z')\delta(\rho' - a)[- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \end{aligned}$$

se obtiene el potencial vector

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}}{|r - r'|} d^3 \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{I\delta(z')\delta(\rho' - a)}{|r - r'|} [- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \rho' dz' d\phi' d\rho' \\ &= \frac{4I}{\pi c} \int_0^\infty \rho' \delta(\rho' - a) d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty \cos[k(z - z')] \left\{ \frac{I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>)}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) dk \right\} [- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \delta(z') dz' \right. \\ &= \frac{4I}{\pi c} \int_0^\infty \rho' \delta(\rho' - a) d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty \cos[k(z - z')] \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) \right. \\ &\quad \left. K_m(k\rho_>) dk \right] [- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \delta(z') dz', \end{aligned}$$

donde pasó a omitirse la suma de índice m y se usó que

$$\int_0^{2\pi} \cos[k(z-z')] I_0(k\rho_{<}) K_0(k\rho_{>}) \sin(\phi') d\phi' = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos[k(z-z')] I_0(k\rho_{<}) K_0(k\rho_{>}) \cos(\phi') d\phi' = 0$$

es decir, la integral sobre el ángulo ϕ' del término $m=0$ en la expansión por series de Fourier es siempre cero. Se tiene entonces para la componente \hat{x} que

$$A_x = -\frac{4Ia\hat{x}}{\pi c} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] \cos[m(\phi-\phi')] I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) dk \sin(\phi') \delta(z') dz'$$

$$= -\frac{4Ia\hat{x}}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) \sin(\phi) \delta_{m,1} I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) dk$$

donde se usa que

$$\int_0^{2\pi} \cos[m(\phi-\phi')] \sin(\phi') d\phi' = \pi \sin(\phi) \delta_{m,1}$$

luego $A_x \neq 0$ solo para $m=1$, por lo que se escribe

$$A_x(\rho, \phi, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>}) dk [-\sin(\phi) \hat{x}]$$

De forma análoga se deduce que

$$A_y(\rho, \phi, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>}) dk [\cos(\phi) \hat{y}],$$

pudiendo derivarse así la expresión para el potencial vector

$$\vec{A}(\rho, \phi, z) = A_x(\rho, \phi, z) + A_y(\rho, \phi, z)$$

$$= \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>}) dk [-\sin(\phi) \hat{x} + \cos(\phi) \hat{y}]$$

$$= \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>}) dk \hat{\phi}$$

es decir, la única componente que sobrevive es en la dirección $\hat{\phi}$, dada por

$$A_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>}) dk$$

b) Otra forma válida de expandir la función de Green en coordenadas cilíndricas (ver Problema 3.14 Jackson) es

$$\frac{1}{|r-r'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k(z_{>} - z_{<)}}$$

y usando que la densidad de corriente es

$$\vec{J} = I \delta(z') \delta(\rho' - a) \phi'$$

$$= I \delta(z') \delta(\rho' - a) [-\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}]$$

se obtiene el potencial vector

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}}{|r - r'|} d^3 \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{I \delta(z') \delta(\rho' - a)}{|r - r'|} [-\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}] \rho' dz' d\phi' d\rho' \\ &= \frac{I}{c} \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty e^{im(\phi - \phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k(z>-z<)} \right] \delta(z') \delta(\rho' - a) \\ &\quad [-\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}] dz'\end{aligned}$$

donde pasó a omitirse la suma de índice m . Se tiene entonces para la componente \hat{x} que

$$\begin{aligned}A_x &= -\frac{Ia\hat{x}}{c} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{im(\phi - \phi')} J_m(k\rho) J_m(ka) e^{-k(z>-z<)} dk \sin(\phi') \delta(z') dz' \\ &= -\frac{Ia\hat{x}}{c} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\infty \left[J_0(k\rho) J_0(ka) + 2 \sum_{m=1}^\infty \cos[m(\phi - \phi')] J_m(ka) J_m(k\rho) \right] \sin(\phi') e^{-k|z|} dk \\ &= -\frac{2\pi Ia\hat{x}}{c} \int_0^\infty \sin(\phi) \delta_{m,1} J_m(ka) J_m(k, \rho) e^{-k|z|} dk \\ &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(ka) dk [-\sin(\phi) \hat{x}]\end{aligned}$$

en la cual se usó que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-k|z|} J_0(k\rho) J_0(ka) \sin(\phi') d\phi' &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos[m(\phi - \phi')] \sin(\phi') d\phi' &= \pi \sin(\phi) \delta_{m,1}\end{aligned}$$

y los resultados para $z > 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{-k(z>-z<)} \delta(z') dz' &= \int_{-\infty}^z e^{-k(z-z')} \delta(z') dz' + \int_z^\infty e^{-k(z'-z)} \delta(z') dz' \\ &= e^{-k(z-0)} + 0 \\ &= e^{-kz}\end{aligned}$$

y para $z < 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{-k(z>-z<)} \delta(z') dz' &= \int_{-\infty}^z e^{-k(z-z')} \delta(z') dz' + \int_z^\infty e^{-k(z'-z)} \delta(z') dz' \\ &= 0 + e^{-k(0-z)} \\ &= e^{kz}\end{aligned}$$

De forma análoga y mediante el resultado

$$\int_0^{2\pi} e^{-k|z|} J_0(k\rho) J_0(ka) \cos(\phi') d\phi' = 0$$

se llega, para la componente \hat{y} del potencial vector, a que

$$A_y(\rho, \phi, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk [\cos(\phi) \hat{y}]$$

pudiendo derivarse así la expresión para el potencial vector

$$\begin{aligned} \vec{A}(\rho, \phi, z) &= A_x(\rho, \phi, z) + A_y(\rho, \phi, z) \\ &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk [-\sin(\phi) \hat{x} + \cos(\phi) \hat{y}] \\ &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk \hat{\phi} \end{aligned}$$

es decir, la única componente que sobrevive es en la dirección $\hat{\phi}$, dada por

$$A_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk$$

c) Tomando el rotor para la expresión derivada en a) con $\rho < a$ se obtiene
y, puesto que solo es de interés el campo magnético en la dirección \hat{z} , haciendo tender $\rho \rightarrow 0$ y
usando el hint del enunciado, se obtiene

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{2Ia}{c} \int_0^\infty k^2 \sin(kz) K_1(ka) dk, \\ B_\phi &= 0, \\ B_z &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty k \cos(kz) K_1(ka) dk. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{4Ia}{\rho c} \int_0^\infty k \sin(kz) I_1(k\rho) K_1(ka) dk, \\ B_\phi &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ &= 0, \\ B_z &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left(A_\phi + \rho \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho) K_1(ka) dk + \rho \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I'_1(k\rho) K_1(ka) dk \right] \\ &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) \frac{I_1(k\rho)}{\rho} K_1(ka) dk + \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \left(\frac{k}{2} \right) \cos(kz) [I_0(k\rho) + I_2(k\rho)] K_1(ka) dk \end{aligned}$$

Para encontrar B_z , integrando por partes y usando el hint del enunciado se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty k \cos(kz) K_1(ka) dk &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \sin(kz) K_1(ka) dk \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \sin(kz) \left[-\frac{1}{a} \frac{dK_0(ka)}{dk} \right] dk \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{a} \sin(kz) K_0(ka) \Big|_0^\infty + \frac{z}{a} \int_0^\infty \cos(kz) K_0(ka) dk \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z}{a} \left(\frac{2}{\pi \sqrt{a^2 + z^2}} \right) \right] \\
&= \frac{a\pi}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

luego el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty k \cos(kz) K_1(ka) dk \\
&= \frac{2\pi Ia^2}{c(a^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

De forma análoga, tomando el rotor de la expresión derivada en b) se obtiene y, puesto que solo es de interés el campo magnético en la dirección \hat{z} , haciendo tender $\rho \rightarrow 0$ y usando el hint del enunciado, se obtiene

$$\begin{aligned}
B_\rho &= \frac{\pi Ia}{c} \int_0^\infty k^2 e^{-k|z|} J_1(ka) \operatorname{sgn}(z) dk \\
B_\phi &= 0 \\
B_z &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty k e^{-k|z|} J_1(ka) dk \\
B_\rho &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \\
&= \frac{2\pi Ia}{\rho c} \int_0^\infty k \operatorname{sgn}(kz) e^{-k|z|} J_1(k\rho) J_1(ka) dk \\
B_\phi &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\
&= 0, \\
B_z &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \\
&= \frac{1}{\rho} \left(A_\phi + \rho \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \left[\frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(k\rho) J_1(ka) dk + \rho \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty k e^{-k|z|} J'_1(k\rho) J_1(ka) dk \right] \\
&= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} \frac{J_1(k\rho)}{\rho} J_1(ka) dk + \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty \left(\frac{k}{2} \right) e^{-k|z|} [J_0(k\rho) - J_2(k\rho)] J_1(ka) dk
\end{aligned}$$

Para encontrar B_z , integrando por partes y usando el hint del enunciado se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty ke^{-k|z|}J_1(ka)dk &= -\operatorname{sgn}(z)\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty e^{-ik|z|}J_1(ka)dk \\
&= -\operatorname{sgn}(z)\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty e^{-k|z|}\left[-\frac{1}{a}\frac{dJ_0(ka)}{dk}\right]dk \\
&= -\operatorname{sgn}(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{1}{a}e^{-k|z|}J_0(ka)\Big|_0^\infty - \frac{|z|}{a}\int_0^\infty e^{-k|z|}J_0(ka)dk\right] \\
&= -\operatorname{sgn}(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{a} - \frac{|z|}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right] \\
&= \operatorname{sgn}(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{|z|}{a}\right]\sqrt{a^2+z^2} \\
&= \frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}},
\end{aligned}$$

luego el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{2\pi Ia}{c}\int_0^\infty ke^{-k|z|}J_1(ka)dk \\
&= \frac{2\pi Ia^2}{c(a^2+z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

lo cual confirma que ambas expresiones para el potencial vector son equivalentes.

8.21 Fem producida por un circuito

Calcular la fem producida por un circuito.

Un elemento de alambre de largo orientado $d\vec{l}$ se mueve con velocidad \vec{u} en un campo magnético \vec{B} . Muestre que la fem producida por el movimiento está dada por

$$d\varepsilon = \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

Solución:

Si se tiene un conductor moviéndose en un campo magnético uniforme, las cargas libres dentro del conductor sienten una atracción proporcional a $\vec{u} \times \vec{B}$, en particular, sienten un campo eléctrico efectivo

$$\vec{E}_{eff} = \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}$$

La fem sobre un circuito está dada por

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ &= -\frac{1}{c} \int_S \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

y reemplazando la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_{eff} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

se obtiene la expresión

$$\varepsilon = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}_{eff}) \cdot d\vec{A}$$

Ahora, del teorema de Stokes se escribe

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \oint_{\partial S} \vec{E}_{eff} \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{\partial S} \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

y puesto que no hay campo eléctrico externo, se concluye que

$$\varepsilon = \oint_{\partial S} \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

Finalmente, tomando una diferencia infinitesimal, se llega a la expresión deseada

$$d\varepsilon = \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

8.22 Fem producida por cascarón esférico

Un cascarón esférico conductor de radio a rota con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$ en un campo magnético uniforme descrito por $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Calcule la fem producida entre un polo y un punto en el círculo ecuatorial.

Solución:

En la superficie de la esfera, la velocidad de un elemento con carga dq está dada por

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \omega_0 \hat{z} \times a [\sin(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{y} + \cos(\theta) \hat{z}] \\ &= a \omega_0 [\sin(\theta) \cos(\phi) \hat{y} - \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{x}]\end{aligned}$$

y usando la expresión para la fem

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

con la curva parametrizada sobre la superficie

$$l(\theta) = a\hat{r} = a[\sin(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z}]$$

se obtiene

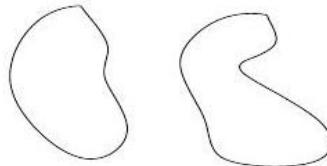
$$\begin{aligned} \varepsilon &= \oint_0^{\pi/2} \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d[l(\theta)] \\ &= \oint_0^{\pi/2} \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot l'(\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} (\vec{e}_{\vec{u}} \times \hat{z}) \cdot [\cos(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \cos(\theta)\sin(\phi)\hat{y} - \sin(\theta)\hat{z}] d\theta \\ &= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} [\sin(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{y}] \cdot [\cos(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \cos(\theta)\sin(\phi)\hat{y}] d\theta \\ &= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} [\sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\phi) + \sin(\theta)\cos(\theta)\sin^2(\phi)] d\theta \\ &= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} \sin(\theta)\cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{2c}, \end{aligned}$$

es decir, la fem producida por el cascarón esférico en rotación es

$$\boxed{\varepsilon = \frac{a^2 \omega_0 B_0}{2c}}$$

8.23 Línea de transmisión

Tenemos una linea de trasmisión, al cual consiste en dos conductores perfectos de forma arbitraria, pero de sección constante (la misma forma en z), ver figura. Demuestre que la inductancia por unidad de largo L y la capacitancia por unidad de largo esta dada por $LC = \mu\varepsilon/c^2$. (Es importante acordarse de la discusión sobre campos magnéticos cerca de conductores perfectos).



Solución:

Puesto que las inductancias están asociadas a campos magnéticos, la energía almacenada debido a una inductancia en un campo magnético viene dada por

$$W_B = \frac{1}{2}LI^2$$

de igual manera, los capacitadores están asociados a campos eléctricos, luego la energía almacenada debido a un capacitor será

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Por otro lado, considerando las densidades de corriente

$$\vec{J}_1 = \sigma_1(x') \vec{v}_1 \quad \vec{J}_2 = \sigma_2(x') \vec{v}_2$$

se obtiene el potencial vector

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{J(x')}{|x-x'|} d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int_{S_1} \frac{J(x')}{|x-x'|} d^3x' + \frac{1}{c} \int_{S_2} \frac{J(x')}{|x-x'|} d^3x' \end{aligned}$$

Ahora, el hecho de que ambos conductores sean perfectos, permite afirmar que $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$, pero al ser paralelos, se deduce que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v} = v\hat{z}$, llegándose a la expresión

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\hat{z}}{c} \int_{S_1} \frac{\sigma_1(x') v}{|x-x'|} d^3x' + \frac{\hat{z}}{c} \int_{S_2} \frac{\sigma_2(x') v}{|x-x'|} d^3x' \\ &= \frac{v\hat{z}}{c} \int_{S_1} \frac{\sigma_1(x')}{|x-x'|} d^3x' + \frac{v\hat{z}}{c} \int_{S_2} \frac{\sigma_2(x')}{|x-x'|} d^3x' \\ &= \frac{v}{c} (\Phi_1 + \Phi_2) \hat{z} \\ &= \frac{v}{c} \Phi \hat{z} \end{aligned}$$

con Φ el potencial eléctrico. Así se obtiene el campo magnético

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \frac{v}{c} (\partial_y \Phi \hat{x} - \partial_x \Phi \hat{y}) \end{aligned}$$

y, puesto que hay simetría en el eje z para el potencial, se obtiene el campo eléctrico

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi \\ &= -(\partial_x \Phi \hat{x} + \partial_y \Phi \hat{y}) \end{aligned}$$

Con esto, es inmediato que para el campo magnético

$$\begin{aligned}
|\vec{B}|^2 &= \vec{B} \cdot \vec{B} \\
&= \frac{v}{c} (\partial_y \Phi \hat{x} - \partial_x \Phi \hat{y}) \cdot \frac{v}{c} (\partial_y \Phi \hat{x} - \partial_x \Phi \hat{y}) \\
&= \frac{v^2}{c^2} \left[(\partial_y \Phi)^2 \hat{x} \cdot \hat{x} - 2(\partial_x \Phi)(\partial_y \Phi) \hat{x} \cdot \hat{y} + (\partial_x \Phi)^2 \hat{y} \cdot \hat{y} \right] \\
&= \frac{v^2}{c^2} \left[(\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2 \right]
\end{aligned}$$

y para el campo eléctrico

$$\begin{aligned}
|\vec{E}|^2 &= \vec{E} \cdot \vec{E} \\
&= (\partial_x \Phi \hat{x} + \partial_y \Phi \hat{y}) \cdot (\partial_x \Phi \hat{x} + \partial_y \Phi \hat{y}) \\
&= (\partial_x \Phi)^2 \hat{x} \cdot \hat{x} + 2(\partial_x \Phi)(\partial_y \Phi) \hat{x} \cdot \hat{y} + (\partial_y \Phi)^2 \hat{y} \cdot \hat{y} \\
&= (\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2
\end{aligned}$$

concluyéndose que

$$|\vec{B}|^2 = \frac{v^2}{c^2} |\vec{E}|^2$$

Ahora, la energía almacenada en el campo magnético es concluyéndose la relación

$$\frac{W_B}{W_E} = \frac{1}{\mu \epsilon} \frac{v^2}{c^2}.$$

$$\begin{aligned}
W_B &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{H}^* d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \int \vec{B} \cdot (\mu \vec{H}^*) d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \int \vec{B} \cdot \vec{B}^* d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \int |\vec{B}|^2 d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{v^2}{c^2} \int |\vec{E}|^2 d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{v^2}{c^2} \int \vec{E} \cdot \vec{E}^* d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2} \int \vec{E} \cdot (\epsilon \vec{E}^*) d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2} \int \vec{E} \cdot \vec{D}^* d^3x \\
&= \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2} W_E,
\end{aligned}$$

Reemplazando los valores de W_B y W_E se obtiene

$$\frac{2LI^2C}{2Q^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon} \frac{v^2}{c^2}$$

e identificándose $I/Q = v$, se sigue

$$LC = \frac{1}{\mu\varepsilon} \frac{1}{c^2},$$

pero esta velocidad c fue siempre la velocidad de la luz en el material, es decir,

$$\bar{c} = \frac{c}{\mu\varepsilon},$$

concluyéndose que

$$LC = \frac{1}{\mu\varepsilon} \left(\frac{\mu\varepsilon}{c} \right)^2$$

$$LC = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}$$

que es lo que se deseaba demostrar.

8.24 Suma de velocidades paralelas

Muestre explícitamente que dos transformaciones de Lorentz sucesivas en la misma dirección son equivalentes a una sola transformación de Lorentz con una velocidad

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)}$$

Esta es una forma alternativa de derivar la ley de suma de velocidades paralelas.

Solución:

Las transformaciones de Lorentz son:

$$x'_0 = \gamma_1 (x_0 - \beta_1 x_1) \quad (8.57)$$

$$x'_1 = \gamma_1 (x_1 - \beta_1 x_0) \quad (8.58)$$

donde

$$\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - v_1^2/c^2}, \quad \beta_1 = v_1/c \quad \text{y } x_0 = ct$$

El otro sistema será K'' y lo definimos viajando a una velocidad v_2 respecto al sistema K , entonces la transformación de Lorentz entre estos dos sistemas es:

$$x''_0 = \gamma_2 (x'_0 - \beta_2 x'_1) \quad (8.59)$$

$$x_1'' = \gamma_2 (x_1' - \beta_2 x_0') \quad (8.60)$$

donde $\gamma_2 = 1/\sqrt{1-v_2^2/c^2}$, y $\beta_2 = v_2/c$

Ahora reemplazando (8.57) en (8.59)

$$x_0'' = \gamma_2 (\gamma_1 (x_0 - \beta_1 x_1) - \beta_2 \gamma_1 (x_1 - \beta_1 x_0))$$

Ordenando los términos

$$x_1'' = \gamma_2 \gamma_1 ((1 + \beta_2 \beta_1) x_1 - (\beta_1 + \beta_2) x_0)$$

Similarmente (8.58) en (8.60)

$$x_1'' = \gamma_2 (\gamma_1 (x_1 - \beta_1 x_0) - \beta_2 \gamma_1 (x_0 - \beta_1 x_1))$$

$$x_0'' \gamma_2 \gamma_1 ((1 + \beta_2 \beta_1) x_0 - (\beta_1 + \beta_2) x_1)$$

Ahora si identificamos que el sistema K'' viaja a una velocidad v en relación con el sistema K' , entonces la transformación de Lorentz que relaciona a los dos sería:

$$x_0'' = \gamma (x_0 - \beta x_1)$$

$$x_1'' = \gamma (x_1 - \beta x_0)$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ y $\beta = v/c$

Comparando esto con la doble transformación, vemos que para que sean equivalentes, los coeficientes deben coincidir.

$$\gamma_2 \gamma_1 (1 + \beta_2 \beta_1) = \gamma \quad \gamma_2 \gamma_1 (\beta_1 + \beta_2) = \beta \gamma \quad \gamma_2 \gamma_1 (1 + \beta_2 \beta_1) = \gamma \quad \gamma_2 \gamma_1 (\beta_1 + \beta_2) = \beta \gamma$$

Tomemos el primero, expandamos y resolvamos para v .

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)$$

$$\frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{1}{1-v_2^2/c^2} \frac{1}{1-v_1^2/c^2} \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)^2$$

$$1-v^2/c^2 = \frac{(1-v_2^2/c^2)(1-v_1^2/c^2)}{\left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)^2}$$

$$v = \sqrt{c^2 - \frac{(1-v_2^2/c^2)(1-v_1^2/c^2)c^2}{\left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)^2}}$$

$$v = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - v_1^2 - v_2^2 + v_1^2 v_2^2/c^2)}{1 + v_1^2 v_2^2/c^4 + 2v_1 v_2/c^2}}$$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2/c^2)}$$

8.25 Escalares de Lorentz

- (a) Exprese los escalares de Lorentz $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ en términos de \mathbf{E} y \mathbf{B} . ¿Existen otros invariantes cuadráticos en las intensidades de campo \mathbf{E} y \mathbf{B} ?
- (b) ¿Es posible tener un campo electromagnético que aparezca como un campo puramente eléctrico en un sistema inercial y como un campo puramente magnético en algún otro sistema inercial? ¿Cuáles son los criterios impuestos a \mathbf{E} y \mathbf{B} de modo que haya un sistema inercial en el que no haya campo eléctrico?
- (c) Para medios macroscópicos, \mathbf{E}, \mathbf{B} forman el tensor de campo $F^{\alpha\beta}$ y \mathbf{D}, \mathbf{H} el tensor $G^{\alpha\beta}$. ¿Qué otras invariantes se pueden formar? ¿Cuáles son sus expresiones explícitas en términos de los campos de 3-vectores?

Solución:

(a) El producto interno de dos 4-tensores debería darnos un escalar de Lorentz, es decir, un escalar que es el mismo en todos los sistemas. Sabemos que:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (8.61)$$

y

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix} \quad (8.62)$$

Los diversos productos internos son:

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}F^{\mu\nu}$$

Como $g_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}F^{\alpha\beta}$$

Separando las componentes espaciales de las temporales y usando

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 :$$

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F^{00}g_{00}g_{00}F^{00} + \sum_{\beta=1}^3 F^{0\beta}g_{00}g_{\beta\beta}F^{0\beta} + \sum_{\alpha=1}^3 F^{\alpha 0}g_{\alpha\alpha}g_{00}F^{\alpha 0} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 F^{\alpha\beta}g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F^{00}F^{00} - \sum_{\beta=1}^3 F^{0\beta}F^{0\beta} - \sum_{\alpha=1}^3 F^{\alpha 0}F^{\alpha 0} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 F^{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

reemplazando cada componente según (8.61) y agrupando los términos se obtiene:

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2)$$

De manera similar utilizando (8.62) encontramos:

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

y

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} = -2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2)$$

No hay otros invariantes cuadráticos en las intensidades de campo \mathbf{E} y \mathbf{B} porque no hay otra manera de obtener el producto interno de los tensores de intensidad de campo.

(b) El hecho de que el campo electromagnético obedezca a transformaciones de Lorentz significa que el campo eléctrico y el magnético no pueden existir por separado. Lo que parece un campo eléctrico puro en un sistema se verá como un campo eléctrico y magnético en otro sistema. Entonces, las preguntas son: si tenemos un campo puramente eléctrico en un sistema inercial, ¿podemos encontrar un sistema inercial donde aparezca un campo puramente magnético? Veamos la transformación: $F'^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta F^{\gamma\delta}$ donde el cuadro preparado se mueve a una velocidad \mathbf{v} relativa al sistema no primado. Luego los campos transformados según Jackson Ec. (11.149)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{B})\end{aligned}$$

En el sistema no primado, tenemos un campo puramente eléctrico, $\mathbf{E} \neq 0$ y $\mathbf{B} = 0$. Las ecuaciones se convierten en:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma\mathbf{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= -\gamma\beta \times \mathbf{E}\end{aligned}$$

El sistema especial donde el campo puramente eléctrico se ha convertido en un campo puramente magnético (si existe) requeriría $\mathbf{E}' = 0$, lo que nos lleva a:

$$\gamma\mathbf{E} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E})$$

$$\hat{\mathbf{E}}\mathbf{E} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \beta\hat{\beta}((\beta\hat{\beta}) \cdot (\hat{\mathbf{E}}\mathbf{E}))$$

con

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{v}} \quad y \quad 1 = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{v^2}{c^2}$$

$$\implies v = c$$

Esto nos dice que el único sistema con un campo magnético puro es el sistema que viaja a la velocidad de la luz en relación con el sistema inicial. Pero nada puede ir a la velocidad de la luz que inicialmente se encuentra a una velocidad diferente. Por lo tanto, nunca se puede alcanzar este sistema y nunca se puede obtener un campo puramente magnético a partir de uno puramente eléctrico cambiando sistemas.

Veamos otra forma de abordar el problema. Acabamos de demostrar que $|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2 = C$ es igual en todos los sistemas. En el sistema no primado, $\mathbf{B} = 0$, de modo que $C = -|\mathbf{E}|^2$. En el sistema especial (primado) esperamos encontrar $\mathbf{E}' = 0$ de modo que $C = |\mathbf{B}'|^2$. Cualquier C constante distinta de cero no puede ser puramente positiva y puramente negativa al mismo tiempo (si C es cero, no tenemos campos en ningún sistema).

Para que no haya campo eléctrico en un sistema ($\mathbf{E}' = 0$), el campo \mathbf{E} y \mathbf{B} El campo en todos los demás sistemas debe ser:

$$0 = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E})$$

$$\beta \times \mathbf{B} = -\mathbf{E} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E})$$

(c) Para campos en medios, tenemos:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$$

Los posibles productos internos que producen escalares invariantes de Lorentz son:

$$G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = 2(|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{D}|^2)$$

$$G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = -2(|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{D}|^2)$$

$$G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = -4\mathbf{D} \cdot \mathbf{H}$$

$$F^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = 2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = -2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{H})$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = -2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

$$F^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = -2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{H})$$

Esto agota todas las combinaciones posibles de F, G y sus tensores duales. Debería ser obvio que muchas de las invariantes de Lorentz resultantes son redundantes. Los invariantes de Lorentz en la parte (c) y la parte (a) se pueden condensar (omitiendo las constantes generales triviales):

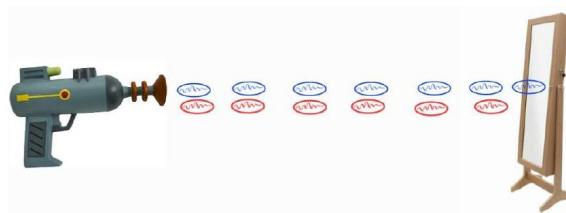
$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{H}, \quad |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2, \quad |\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{D}|^2, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$$

8.26 Espejo relativista

Considere un espejo de masa M y superficie S , que se mueve a una velocidad cercana a la velocidad de la luz. Como método de propulsión iluminaremos este espejo con un potente láser en forma normal a la superficie, tal que el haz de luz reflejado se propague en la dirección opuesta a la del haz incidente.

- Muestre que el campo que rebota del espejo es pequeño a velocidades relativistas en el sistema del laboratorio.
- En el sistema inercial, que está instantáneamente en reposo con el espejo, encuentre la fuerza que siente el espejo. Transforme esta fuerza al sistema del laboratorio y demuestre que para velocidades relativistas $\beta \approx 1$ obtenemos $\gamma \sim t^{1/3}$.

Solución:



- El sistema K' ubicado en el espejo, se mueve con velocidad $v\hat{x}$ respecto al sistema K . Los campos en el sistema K son:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, t) &= E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{y} \\ \mathbf{B}(x, t) &= B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z}\end{aligned}\tag{8.63}$$

y si asumimos que viajan por el vacío, para satisfacer las ecuaciones de Maxwell necesitamos que $k = \omega/c$ y $B_0 = E_0$. La transformación para los campos en K' es:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{B})\end{aligned}$$

Como el láser va en $\hat{x} \implies \beta = \beta\hat{x}$

$$\implies \beta \cdot \mathbf{E} = \beta \cdot \mathbf{B} = 0$$

Los campos en K' quedan:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E})\end{aligned}$$

y usando la Ec. (8.63) nos queda:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \gamma[(E_0 \cos(kx - \omega t) - \beta E_0 \cos(kx - \omega t))] \hat{y} \\
\mathbf{E}' &= \gamma(1 - \beta)[E_0 \cos(kx - \omega t)] \hat{y} \\
\mathbf{E}' &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{E} \\
\mathbf{B}' &= \gamma(B_0 \cos(kx - \omega t) - \beta E_0 \cos(kx - \omega t)) \hat{z} \\
\mathbf{B}' &= \gamma(1 - \beta)[E_0 \cos(kx - \omega t)] \hat{z} \\
\mathbf{B}' &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{B}
\end{aligned}$$

Luego, el láser rebota y por lo tanto el sentido cambia, y eso significa que cambia el signo de la velocidad $v\hat{x} \rightarrow -v\hat{x}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \gamma(1 + \beta)\mathbf{E} \\
\mathbf{B}' &= \gamma(1 + \beta)\mathbf{B}
\end{aligned}$$

Y finalmente debemos transformar los campos al sistema del laboratorio K , que se obtiene al realizar la transformación inversa con $\beta \rightarrow -\beta$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{E}' \\
\mathbf{B} &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{B}'
\end{aligned}$$

Si el espejo se mueve a velocidad cercana a la velocidad de la luz entonces $\gamma \gg 1$ y $\beta \sim 1$. Y por tanto los campos que rebotan del espejo en el sistema de laboratorio a velocidades relativistas son pequeños:

$$\boxed{\mathbf{E} \ll 1 \quad \mathbf{B} \ll 1.}$$

b) La fuerza en el sistema K' es:

$$F' = \frac{dp}{dt}$$

donde el cambio de momento en el espejo está dado por el cambio de momento de los fotones. Luego la energía de los fotones es:

$$\begin{aligned}
E &= \omega' = pc \\
\implies p &= \frac{\omega'}{c}
\end{aligned}$$

si consideramos N fotones

$$p = \frac{N\omega'}{c}$$

La fuerza queda:

$$F' = \frac{d}{dt} \left(\frac{N\omega'}{c} \right)$$

Sea I la intensidad de partículas:

$$I = \frac{N}{t}$$

$$\Rightarrow F' = \frac{d}{dt} \left(\frac{It\omega'}{c} \right)$$

y como ω' es la frecuencia Doppler, la fuerza que siente el espejo en el sistema inercial es:

$$F' = \frac{I}{c} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \omega$$

Transformando la fuerza al sistema K del laboratorio

$$F = \gamma (F' - \beta^2 F')$$

$$F = \gamma F' (1 - \beta^2)$$

$$F = \frac{\gamma I \omega}{c} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} (1 - \beta^2).$$

Sabemos que el láser encontrará al espejo cuando se cumpla

$$ct = \lambda + vt$$

$$\Rightarrow (c-v)t = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_f} = \frac{\lambda}{(c-v)f_i}$$

$$\Rightarrow f_f = \frac{c-v}{c} f_i = \frac{c-\beta c}{c} f_i$$

$$f_f = (1-\beta) f_i$$

Por otro lado si consideramos la variación del momento de un fotón:

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{p_f - p_i}{t} = \frac{-hf_f/c - (hf_i/c)}{\frac{\lambda}{c-v}} = \frac{-hf_f/c - (hf_i/c)}{\frac{c}{c-\beta c} \frac{1}{f_i}}$$

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{-hf_f/c - (hf_i/c)}{\frac{1}{1-\beta c} \frac{1}{f_i}} = \frac{-\frac{h}{c}(1-\beta)f_i - \frac{hf_i}{c}}{\frac{1}{(\beta-1)} \frac{1}{f_i}}$$

$$\frac{dp}{dt} \approx \left[-\frac{h}{c}(1-\beta)f_i - \frac{hf_i}{c} \right] (1-\beta)f_i$$

$$\frac{dp}{dt} \approx \left[-\frac{h}{c}(1-\beta)^2 f_i^2 - \frac{h}{c}(1-\beta)f_i^2 \right] \quad (8.64)$$

Luego como $\beta \rightarrow 1$ entonces

$$(1-\beta)^2 \ll (1-\beta)$$

Nos quedamos entonces con los términos a primer orden en (8.64)

$$\frac{dp}{dt} \approx -\frac{h}{c}(1-\beta)f_i^2. \quad (8.65)$$

Por otro lado la variación del momento del espejo de masa M es:

$$\begin{aligned}\frac{dp_M}{dt} &= \frac{d}{dt}(\gamma mv) \\ \frac{dp_M}{dt} &= m\left(\gamma \frac{dv}{dt} + v \frac{d\gamma}{dt}\right)\end{aligned}$$

Vamos a considerar despreciable el término $\frac{dv}{dt} = 0$, porque como el espejo va casi a la velocidad de la luz, y esta es constante entonces

$$\frac{dp_M}{dt} = mv \frac{d\gamma}{dt}. \quad (8.66)$$

Por conservación del momento igualamos (8.66) con (8.65)

$$\frac{h}{c}(1-\beta)f_i^2 = mv \frac{d\gamma}{dt}.$$

Para hacer aparecer un γ^3 vamos a multiplicar por 1 el siguiente término

$$\begin{aligned}(1-\beta) &= \frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1+\beta)} = \frac{1+\beta^2}{1+\beta} = \frac{1/\gamma^2}{1+\beta} \\ (1-\beta) &= \frac{\gamma^{-2}}{1+\beta}\end{aligned}$$

Con esto no queda

$$\begin{aligned}\frac{h}{c} \frac{\gamma^{-2}}{(1+\beta)} f_i^2 &= mv \frac{d\gamma}{dt} \\ \implies \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{hf_i^2}{cmv(1+\beta)} \gamma^{-2}\end{aligned}$$

Considerando velocidades relativistas: $v \rightarrow c$ y $\beta \rightarrow 1$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{hf_i^2}{2mc^2} \gamma^{-2}$$

donde hemos encontrado una ecuación diferencial, que resolvemos

$$\begin{aligned}\gamma^2 d\gamma &= \left(\frac{hf_i}{2mc^2}\right) dt \\ \frac{\gamma^3}{3} &= \left(\frac{hf_i}{2mc^2}\right) t \\ \gamma^3 &= \left(\frac{3hf_i}{2mc^2}\right) t \\ \gamma &= \left(\frac{3hf_i}{2mc^2}\right)^{1/3} t^{1/3}\end{aligned}$$

Y hemos demostrado que para velocidades relativistas $\beta \approx 1$ se tiene $\gamma \sim t^{1/3}$

8.27 Conservación de la carga

Demuestre que $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ si se cumple con la conservación de carga. ¿Qué condición debe cumplir k_α para que la onda plana $F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$ sea solución de esta ecuación? Demuestre ahora que la transformación de la frecuencia entre dos sistemas inerciales es

$$\omega' = \gamma\omega[1 - \beta \cos(\theta)]$$

donde θ es el ángulo entre la velocidad \vec{v} de la onda y k . Demuestre por último que

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[\cos(\theta) - \beta]}$$

donde θ' es el ángulo entre \vec{v} y k' . ¿Cómo pueden usarse estas expresiones para medir la velocidad (incluyendo dirección) de un objeto?

Solución:

Sea la métrica de Minkowski definida por

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tal que el producto punto entre dos cuadrivectores sea

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3.$$

El tensor electromagnético $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ permite resumir las ecuaciones de Maxwell en la expresión

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

donde, por definición,

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t & -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad J^\nu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

Derivando la expresión original se escribe

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu J^\nu,$$

donde es inmediato que

$$\partial_\nu J^\nu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} c\rho - (-\partial_1 J^1) - (-\partial_2 J^2) - (-\partial_3 J^3) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

y reemplazando en la ecuación se tiene

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right)$$

Debido a que la carga se conserva, se tiene la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

luego se concluye que

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

De la definición para ∂_ν , es directo que

$$\partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t - \partial_1 \partial^1 - \partial_2 \partial^2 - \partial_3 \partial^3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

por lo que en realidad se tiene una ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial t^2} - \nabla^2 F^{\mu\nu} = 0$$

esto implica que k_α debe ser tal que $k_\alpha x^\alpha$ sea la fase de la onda. Esto es inmediato considerando que ambos son cuadrvectores de la forma

$$k_\alpha = \left(\frac{\omega}{c} \quad -k_1 \quad -k_2 \quad -k_3 \right) \quad x^\alpha = (ct \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3)$$

luego se escribe

$$\begin{aligned} k_\alpha x^\alpha &= \omega t - (-k_1 x^1) - (-k_2 x^2) - (-k_3 x^3) \\ &= \vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t \end{aligned}$$

Para demostrar las relaciones del efecto Doppler relativista, sea el sistema de referencia S solidario a la onda electromagnética, donde $\vec{B} = 0$, luego se tiene

$$\vec{E} = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \hat{x}$$

donde el signo de la fase no tiene relevancia, puesto que solo indica la dirección de propagación de la onda. De igual manera (ver Figura 1), se tiene el número de onda

$$\vec{k} = (k_1, k_2, k_3) = \left[\frac{\omega}{c} \cos(\theta), \frac{\omega}{c} \sin(\theta), 0 \right]$$

por lo que la fase será

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \frac{\omega}{c} [x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] - \omega t$$

y usando las transformaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right), \\ x &= \gamma (x' + c\beta t'), \\ y &= y' \end{aligned}$$

se deduce que

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{\omega}{c} [x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] - \omega t \\
&= \frac{\omega}{c} [\gamma(x' + c\beta t') \cos(\theta) + y' \sin(\theta)] - \gamma\omega \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right) \\
&= \gamma \frac{\omega}{c} x' \cos(\theta) + \gamma\beta \omega t' \cos(\theta) + \frac{\omega}{c} y' \sin(\theta) - \gamma\omega t' - \gamma\beta \frac{\omega}{c} x' \\
&= \gamma\omega[\beta \cos(\theta) - 1]t' + \gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta]x' + \frac{\omega}{c} \sin(\theta)y'
\end{aligned}$$

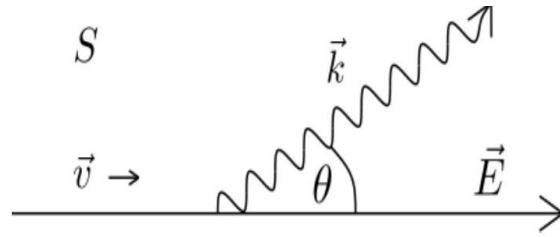


Figure 8.11: Esquema de la onda electromagnética en el sistema de referencia S .

Sea ahora un sistema de referencia S' , donde la fase adquiere la forma

$$\phi' = \frac{\omega'}{c} [x' \cos(\theta') + y' \sin(\theta')] - \omega' t'$$

puesto que para ser solución debe cumplirse que las fases en ambos sistemas de referencia sean la misma, es decir, $\phi = \phi'$, se obtiene

$\gamma\omega[\beta \cos(\theta) - 1]t' + \gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta]x' + \frac{\omega}{c} \sin(\theta)y' = \frac{\omega'}{c} [x' \cos(\theta') + y' \sin(\theta')] - \omega' t'$ Igualando por componentes se llega a las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\gamma\omega[\beta \cos(\theta) - 1] &= -\omega' \\
\gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta] &= \frac{\omega'}{c} \cos(\theta') \\
\frac{\omega}{c} \sin(\theta) &= \frac{\omega'}{c} \sin(\theta')
\end{aligned}$$

donde de la primera ecuación es directo que

$$\omega' = \gamma\omega[1 - \beta \cos(\theta)]$$

Reemplazando ω' en la segunda expresión se obtiene

$$\gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta] = \gamma \frac{\omega}{c} [1 - \beta \cos(\theta)] \cos(\theta')$$

luego se deduce que

$$\cos(\theta') = \frac{\cos(\theta) - \beta}{1 - \beta \cos(\theta)}.$$

De igual manera, reemplazar ω' en la tercera ecuación lleva a la relación

$$\frac{\omega}{c} \sin(\theta) = \gamma \frac{\omega}{c} [1 - \beta \cos(\theta)] \sin(\theta')$$

de lo que se deduce

$$\sin(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[1 - \beta \cos(\theta)]}$$

Usando las expresiones para $\cos(\theta')$ y $\sin(\theta')$, se concluye que

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')} = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[\cos(\theta) - \beta]}$$

Por último, de la ecuación para la frecuencia, al enviar una onda conocida y medir la onda reflejada, se obtienen los valores ω y ω' que permiten deducir la velocidad a partir del factor γ . Esta velocidad permite, reemplazando en la ecuación para los ángulos (que corresponde a la aberración del efecto Doppler relativista), obtener la dirección de la velocidad.

8.28 Lámina infinita relativista

Una lámina de carga que se extiende infinitamente tanto en los ejes x como y , tiene a una densidad de carga uniforme $\sigma > 0$, que está en reposo relativo al observador 1. La lámina está situada en $z = 0$ y se mueve en la dirección x con una rapidez v (relativista) en relación al observador 2 .

a) Transformando los campos desde el sistema de referencia del observador 1 al del 2 , encuentre los campos \vec{E} y \vec{B} en la región $z > 0$ del sistema de referencia del observador 2 .

b) Demuestre que los campos son los mismos que aquellos calculados, a partir de la transformación de la densidad de corriente desde el sistema del observador 1 al del 2 , y luego utilizando las leyes de Gauss y Ampère para encontrar los campos en el sistema de referencia del observador 2 .

c) Una carga $q > 0$ está inicialmente en reposo en el punto $(x,y,z) = (0,0,d)$ en el sistema de referencia del observador 1 . Describa cualitativamente el movimiento posterior de la partícula desde el punto de vista de ambos observadores.

Solución:

a) Para el observador 1 , por simetría respecto al plano $x - y$ (ver Figura 2), el campo eléctrico debiese solo tener componente en la dirección \hat{z} , luego de la ley de Gauss se escribe

$$\int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = 4\pi \int_{\partial S} \rho dV,$$

donde se escoge un cilindro virtual de área basal A para el cálculo del flujo a través del plano y donde la integral del lado derecho corresponde a la carga encerrada en el volumen.

Puesto que el manto del cilindro no contribuye al campo eléctrico debido a que el vector normal a la superficie es perpendicular a la dirección del flujo, se escribe

$$2 \int_{\text{tapas}} \vec{E}_1 \cdot \vec{a} = 4\pi Q$$

y considerando que $\vec{E}_1 = E_1(z)\hat{z}$, $\sigma = Q/A$ y que $z > 0$, se obtiene

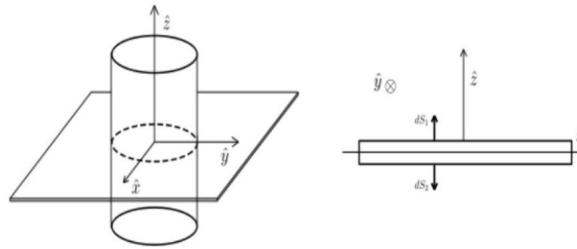


Figure 8.12: Cilindro virtual para calcular el flujo (izquierda) y el plano infinito visto a la misma altura del plano $x - y$ (derecha).

$$\begin{aligned} 2 \int E_1(z) da &= 4\pi\sigma A \\ 2AE_1(z) &= 4\pi\sigma A \\ E_1(z) &= 2\pi\sigma \end{aligned}$$

concluyéndose que en el sistema de referencia del observador 1

$$\vec{E}_1 = 2\pi\sigma \hat{z} \quad \vec{B}_1 = 0$$

La transformación de un tensor entre sistemas de referencia moviéndose con velocidad relativa v viene dada por

$$(A^{\mu\nu})' = L^{-1}(v)A^{\mu\nu}[L^{-1}(v)]^T = L(-v)A^{\mu\nu}[L(-v)]^T,$$

donde $L(v)$ es el boost relativista

$$L(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que cumple con la relación

$$L^{-1}(v) = \eta L^T \eta = L(-v).$$

Usando que el tensor $F^{\mu\nu}$ puede escribirse de la forma

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = 2\pi\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} (F^{\mu\nu})' &= L(-v)F^{\mu\nu}L^T(-v) \\ &= 2\pi\sigma \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde se usó que $\beta = v/c$ tal que

$$L(-v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo se obtiene

$$\begin{aligned} (F^{\mu\nu})' &= 2\pi\sigma \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\pi\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\pi\gamma\sigma \\ 0 & 0 & 0 & -2\pi\gamma\beta\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\pi\gamma\sigma & 2\pi\gamma\beta\sigma & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y, puesto que

$$(F^{\mu\nu})' = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix},$$

se identifican los campos en el sistema de referencia del observador 2

$$\vec{E}_2 = 2\pi\gamma\sigma\hat{z} \quad \vec{B}_2 = -2\pi\gamma\beta\sigma\hat{y}$$

- b) La transformación de un cuadrivector para dos sistemas de referencia con velocidad relativa v está dada por la relación

$$(A^\mu)' = L(v)A^\mu$$

luego el cuadrivector de densidad de corriente

$$J^\alpha = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

transforma al sistema primado como

$$\begin{aligned}
 (J^\alpha)' &= L(v)J^\alpha \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma c\rho - \gamma\beta J^1 \\ \gamma J^1 - \gamma\beta c\rho \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

esto significa que

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} J^1 \right) \quad (J^1)' = \gamma (J^1 - v\rho) \quad (J^2)' = J^2 \quad (J^3)' = J^3$$

Recordando que $\vec{J}_1 = 0$, puesto que el sistema está en reposo respecto al observador 1, se tienen las transformaciones

$$\rho' = \gamma\rho \quad (J^1)' = -\gamma v\rho \quad (J^2)' = 0 \quad (J^3)' = 0$$

luego de la ley de Gauss se escribe

$$\begin{aligned}
 2 \int_{\text{tapas}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} &= 4\pi \int_{\partial S} \rho' dV \\
 2E_2 \int da &= 4\pi\gamma \int \rho dV \\
 2AE_2 &= 4\pi\gamma\sigma A \\
 E_2 &= 2\pi\gamma\sigma
 \end{aligned}$$

y de la ley de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

donde se toma un camino rectangular tal que solo las aristas paralelas a la lámina contribuyan al campo (las laterales son perpendiculares a la lámina, luego no contribuyen al campo) y donde la integral del lado derecho representa la corriente encerrada por la curva, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} &= \frac{4\pi}{c} \int \vec{J} \cdot d\vec{a} \\
 B_2 \oint dl &= -4\pi\gamma \left(\frac{v}{c} \right) \int \rho da \\
 2LB_2 &= -4\pi\gamma \left(\frac{v}{c} \right) \sigma L \\
 B_2 &= -2\pi\gamma\beta\sigma
 \end{aligned}$$

concluyéndose que los campos para el observador 2 son

$$\vec{E}_2 = 2\pi\gamma\sigma\hat{z} \quad \vec{B}_2 = -2\pi\gamma\beta\sigma\hat{y}$$

c) Para una carga positiva cuya posición es solo en el eje z , en el sistema de referencia para el observador 1 (solidario a la lámina) se tiene que ésta acelerará en el eje z sin mayor complejidad a causa del campo eléctrico (no hay campo magnético en este sistema de referencia). Para el observador 2 , se tiene que el campo magnético posee una componente en el eje y , la cual desviará a la partícula en dirección x (debido a la fuerza de Lorentz), al mismo tiempo que sigue acelerando en el eje z , ya que el campo eléctrico seguirá presente.

8.29 Partícula en un campo magnético

Sea una partícula de carga q y masa m que se mueve en un campo magnético uniforme B_0 . Encuentre la trayectoria de esta partícula en términos de la velocidad inicial perpendicular v_{\perp} al campo, la velocidad inicial paralela v_{\parallel} al campo, la fase inicial ϕ y la frecuencia ciclotrónica $\Omega_c = eB_0/mc$. Asumiendo que $\beta \ll 1$, encuentre los potenciales y los campos radiados en la aproximación de campo lejano para esta partícula. Si se tienen N partículas, con la misma masa y carga, encuentre $dP/d\Omega$. Asuma una distribución térmica definida por una temperatura T_{\perp} y T_{\parallel} con respecto al campo magnético tal que

$$T_{\perp} = \frac{1}{2} \sum_n m v_{\perp}^2 \quad T_{\parallel} = \frac{1}{2} \sum_n m v_{\parallel}^2$$

Hint:

$$\int [1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi})] d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

Solución:

El cuadrvector de momento lineal viene dado por

$$P^{\mu} = mv^{\mu}$$

donde v^{μ} es el cuadrvector $(\gamma c, \vec{\gamma v})$. De esta manera, considerando el tiempo propio τ , se escribe la fuerza

$$F^{\mu} = \frac{dP^{\mu}}{d\tau} = \frac{d}{dt} (mv^{\mu})$$

mientras que, en función del tensor electromagnético, esta fuerza adquiere la forma

$$F^{\mu} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} P_{\nu}$$

y mezclando ambas expresiones se obtiene

$$\frac{dv^{\mu}}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} v_{\nu}$$

y usando la métrica de Minkowski

$$\frac{dv^{\mu}}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} g_{\mu\nu} v^{\nu}$$

Suponiendo el campo magnético $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, se escribe

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dv^0/d\tau \\ dv^1/d\tau \\ dv^2/d\tau \\ dv^3/d\tau \end{pmatrix} &= \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v^0 \\ -v^1 \\ -v^2 \\ -v^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 v^2 \\ -B_0 v^1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dv^0}{d\tau} = 0 \quad \frac{dv^1}{d\tau} = \Omega_c v^2 \quad \frac{dv^2}{d\tau} = -\Omega_c v^1 \quad \frac{dv^3}{d\tau} = 0$$

Derivando la segunda ecuación se obtiene

$$\frac{dv^2}{d\tau} = \frac{1}{\Omega_c} \frac{d^2 v^1}{d\tau^2}$$

y reemplazando en la tercera ecuación

$$\frac{d^2 v^1}{d\tau^2} + \Omega_c^2 v^1 = 0$$

oscilador armónico cuya solución se puede escribir de la forma

$$v^1(\tau) = A \sin(\Omega_c \tau + \phi)$$

Reemplazando v^1 en la tercera ecuación se tiene

$$\frac{dv^2}{d\tau} = -A\Omega_c \sin(\Omega_c \tau + \phi)$$

e integrando se llega a que

$$v^2(\tau) = A \cos(\Omega_c \tau + \phi).$$

Puesto que es directo que $v^3(\tau) = B$, de las condiciones iniciales se deduce que

$$\begin{aligned} x(\tau) &= -r_L \cos(\Omega_c \tau + \phi) \\ y(\tau) &= r_L \sin(\Omega_c \tau + \phi) \\ z(\tau) &= v_{\parallel} \tau \end{aligned}$$

donde se definió el radio de Larmor $r_L \equiv v_{\perp}/\Omega_c$. Ahora, puesto que

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}$$

se escriben las ecuaciones

$$x(t) = -r_L \cos\left(\frac{\Omega_c}{\gamma}t + \phi\right)$$

$$y(t) = r_L \sin\left(\frac{\Omega_c}{\gamma}t + \phi\right)$$

$$z(t) = \frac{v_{||}}{\gamma}t$$

por lo que la trayectoria de la partícula relativista será

$$\vec{r}(t) = -r_L \cos\left(\frac{\Omega_c}{\gamma}t + \phi\right)\hat{i} + r_L \sin\left(\frac{\Omega_c}{\gamma}t + \phi\right)\hat{j} + \frac{v_{||}}{\gamma}t\hat{k}$$

Considerando $\beta \ll 1$ tal que $\gamma \sim 1$, se concluye que

$$\vec{r}(t) = -r_L \cos(\Omega_c t + \phi)\hat{i} + r_L \sin(\Omega_c t + \phi)\hat{j} + v_{||}t\hat{k}$$

y derivando dos veces se obtiene

$$\vec{v}(t) = v_\perp \sin(\Omega_c t + \phi)\hat{i} + v_\perp \cos(\Omega_c t + \phi)\hat{j} + v_{||}\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \Omega_c v_\perp \cos(\Omega_c t + \phi)\hat{i} - \Omega_c v_\perp \sin(\Omega_c t + \phi)\hat{j} = -\Omega_c^2 \vec{r}(t)$$

siendo las ecuaciones de movimiento para una partícula no relativista bajo la acción de un campo magnético. La aproximación de campo lejano permite escribir

$$\rho(x, t') = \sum_n q_n \delta^{(3)}[x - r(t')] \quad \vec{J}(x, t') = \sum_n q_n v_n(t') \delta^{(3)}[x - r(t')]$$

además de los potenciales electromagnéticos

$$\phi = \frac{1}{r} \sum_n q_n \quad A(t') = \frac{1}{rc} \sum_n q_n v_n(t')$$

donde t' es el tiempo retardado

$$t' = t - \frac{r}{c}.$$

Asumiendo carga simétrica tal que $\sum q_n = 0$, se escribe el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{rc^2} \sum_n q_n a_n(t')$$

y el campo magnético

$$\vec{B} = \hat{r} \times \vec{E} = -\frac{1}{rc^2} \sum_n q_n \hat{r} \times a_n(t')$$

El vector de Poynting será entonces

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \\ &= \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times (\hat{r} \times \vec{E})] \\ &= \frac{c}{4\pi} [\hat{r}(\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E} \cdot \hat{r})]\end{aligned}$$

y, puesto que

$$\begin{aligned}\hat{r}(\vec{E} \cdot \vec{E}) &= -\hat{r} \cdot \frac{1}{rc^2} \sum_n q_n a_n \left[-\frac{1}{rc^2} \sum_m q_m a_m \right] \\ &= \frac{q^2}{r^2 c^4} \sum_{m,n} \hat{r}(a_n \cdot a_m) \\ \vec{E}(\vec{E} \cdot \hat{r}) &= -\frac{1}{rc^2} \sum_n q_n a_n \left[-\frac{1}{rc^2} \sum_m q_m a_m \cdot \hat{r} \right] \\ &= \frac{q^2}{r^2 c^4} \sum_{m,n} a_n (a_m \cdot \hat{r})\end{aligned}$$

se obtiene

$$\vec{S} = \frac{q^2}{4\pi r^2 c^3} \sum_{m,n} [\hat{r}(a_n \cdot a_m) - a_m (a_n \cdot \hat{r})]$$

La potencia disipada por ángulo sólido viene dada por

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [r^2 \hat{r} \cdot \vec{E} \times \vec{B}^*] \\ &= r^2 \vec{S} \cdot \hat{r} \\ &= \frac{q^2}{4\pi c^3} \sum_{m,n} [(a_n \cdot a_m) - (\hat{r} \cdot a_m)(a_n \cdot \hat{r})]\end{aligned}$$

y escribiendo

$$\hat{r} = \sin(\theta) \cos(\phi') \hat{i} + \sin(\theta) \sin(\phi') \hat{j} + \cos(\theta) \hat{k}$$

se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}a^2 - (\vec{a} \cdot \hat{r})^2 &= \Omega_c^2 v_\perp^2 - \Omega_c^2 v_\perp^2 \sin^2(\theta) [\cos(\phi') \cos(\Omega_c t + \phi) - \sin(\phi') \sin(\Omega_c t + \phi)]^2 \\ &= \Omega_c^2 v_\perp^2 - \Omega_c^2 v_\perp^2 \sin^2(\theta) [\cos(\Omega_c t + \tilde{\phi})]^2 \\ &= \Omega_c^2 v_\perp^2 [1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi})]\end{aligned}$$

donde $\tilde{\phi} = \phi + \phi'$. La potencia disipada por ángulo sólido será entonces

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \Omega_c^2 v_\perp^2}{4\pi c^3} [1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi})]$$

y usando el hynt

$$\int [1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi})] d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

se obtiene la potencia radiada

$$P = \frac{q^2 \Omega_c^2 v_{\perp}^2}{4\pi c^3} \left(\frac{8\pi}{3} \right) = \frac{2}{3} \frac{q^2 \Omega_c^2 v_{\perp}^2}{c^3}$$

y reconociendo la aceleración $a_{\perp} = \Omega_c v_{\perp}$, se llega a la expresión

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 a_{\perp}^2}{c^3}$$

la cual corresponde a la fórmula de Larmor, expresión para la potencia disipada por una carga puntual no relativista acelerando en un campo magnético. Volviendo a la expresión

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 \Omega_c^2 v_{\perp}^2}{c^3}$$

usando que

$$T_{\perp} = \frac{1}{2} \sum_n m v_{\perp}^2$$

se obtiene la expresión

$$P = \frac{4}{3} \frac{q^2 \Omega_c^2 T_{\perp}}{mc^3}$$

8.30 Dipolo magnético oscilatorio

Considere el siguiente modelo de un dipolo magnético oscilatorio: Suponga que se tiene un anillo sin cargas, de radio b , por el cual circula una corriente alterna $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Encuentre la potencia total radiada $\langle P \rangle$ (promediado sobre un periodo), asumiendo la aproximación de campo lejano $r \gg c/\omega$, y la aproximación para un dipolo perfecto $b \ll r$ y $b \ll c/\omega$.

Solución:

Escogiendo un sistema de coordenadas esféricas con simetría azimutal, es posible escribir la expansión

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} \\ &= \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \\ &= \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' [\sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\phi - \phi') + \cos(\theta) \cos(\theta')]} \end{aligned}$$

gracias a que

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' [\sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\phi - \phi') + \cos(\theta) \cos(\theta')],$$

esto debido al teorema de adición de los armónicos esféricos. Usando que $r' = b$ y $\theta' = \pi/2$, la expansión se reescribe de la forma

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \\ &= r \sqrt{1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{2b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \end{aligned}$$

y recordando que $r \gg b$, de la aproximación por series de Taylor se obtiene

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \sim r \left[1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]$$

Por otro lado, la densidad de corriente viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{I} \frac{\delta(r' - b)}{b} \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= I_0 e^{-i\omega t'} \frac{\delta(r' - b)}{b} \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) \hat{\phi}' \end{aligned}$$

donde se pasó la función coseno a una función exponencial por comodidad. El potencial vector asociado será entonces

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{I_0}{bc} \int \frac{\delta(r' - b) \delta(\theta' - \pi/2)}{r \left[1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]} e^{-i\omega t' \hat{\phi}' dV'} \\ &= \frac{I_0}{bc} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\delta(r' - b) \delta(\theta' - \pi/2)}{r \left[1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]} e^{-i\omega t' (r')^2 \sin^2(\theta') \hat{\phi}' dr' d\theta' d\phi'}, \end{aligned}$$

donde t' corresponde al tiempo retardado

$$\begin{aligned} t' &= t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \\ &\simeq t - \frac{r}{c} \left[1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right] \\ &= t - \frac{r}{c} + \frac{b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \end{aligned}$$

Desarrollando las deltas de Dirac presentes en la integral y reemplazando el tiempo retardado en la misma, se llega a la expresión

$$\vec{A} = \frac{I_0 b}{rc} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \int_0^{2\pi} \frac{\exp \left[-i \frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]}{1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \hat{\phi}' d\phi'$$

y, puesto que $b \ll c/\omega$, se puede expandir

$$\exp \left[-i \frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right] \approx 1 - i \frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')$$

con lo cual el potencial vector queda

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{I_0 b}{rc} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \int_0^{2\pi} \frac{1 - i\frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')}{1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \hat{\phi}' d\phi' \\ &= A_0(t) \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')\right] \left[1 - i\frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')\right] \hat{\phi}' d\phi' \\ &= A_0(t) \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right)\right] \hat{\phi}' d\phi'\end{aligned}$$

donde se volvió a aproximar el denominador utilizando que $r \gg b$ y se escribió

$$\vec{A}_0(t) = \frac{I_0 b}{rc} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

Puesto que

$$\hat{\phi}' = -\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}$$

la expresión para el potencial vector se reescribe como

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{I_0 b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \left[\int_0^{2\pi} \cos(\phi') \cos(\phi - \phi') \hat{y} d\phi'\right. \\ &\quad \left.- \int_0^{2\pi} \sin(\phi') \cos(\phi - \phi') \hat{x} d\phi'\right]\end{aligned}$$

y recordando que

$$\cos(\phi - \phi') = \cos(\phi) \cos(\phi') + \sin(\phi) \sin(\phi')$$

se llega finalmente al potencial vector

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{I_0 b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \left[\cos(\phi) \hat{y} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi') d\phi'\right. \\ &\quad \left.- \sin(\phi) \hat{x} \int_0^{2\pi} \sin^2(\phi') d\phi'\right] \\ &= \frac{I_0 \pi b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] [-\sin(\phi) \hat{x} + \cos(\phi) \hat{y}] \\ &= \frac{I_0 \pi b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\phi}\end{aligned}$$

En la aproximación de campo lejano se tiene que $\Phi \sim 0$, luego el campo eléctrico será

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \frac{I_0 \pi \omega b^2}{r^2 c^2} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\phi}$$

mientras que el campo magnético vendrá dado por

$$\vec{B} = \hat{r} \times \vec{E} = -i \frac{I_0 \pi \omega b^2}{r^2 c^2} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\theta}$$

lo que permite escribir el vector de Poynting

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \\
&= -\frac{I_0^2 \pi^2 c \omega^2 b^4}{4\pi r^4 c^4} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \left(1 + i\frac{\omega r}{c}\right) \sin^2(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\phi} \times \hat{\theta} \\
&= -\frac{I_0^2 \pi \omega^2 b^4}{4r^4 c^3} \left(1 + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \sin^2(\theta) (-\hat{r}) \\
&= \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4r^2 c^5} \sin^2(\theta) \hat{r}
\end{aligned}$$

donde se usó que $r \gg c/\omega$, luego $\omega r/c \gg 1$. La potencia radiada por ángulo sólido será

$$\frac{\partial P}{\partial \Omega} = r^2 \vec{S} \cdot \hat{r} = \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4c^5} \sin^2(\theta)$$

por lo que la potencia vendrá dada por la integral en el ángulo sólido de esta expresión, es decir, sobre la parte angular, concluyéndose así que la potencia radiada por el anillo es

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4c^5} \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \\
&= \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4c^5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta d\phi \\
&= \frac{I_0^2 \pi^2 \omega^4 b^4}{2c^5} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \\
&\boxed{P = \frac{2}{3} \frac{I_0^2 \pi^2 \omega^4 b^4}{c^5}}.
\end{aligned}$$

8.31 Hamiltoniano de una partícula

Muestre que el hamiltoniano de una partícula moviéndose en un campo electromagnético es

$$\mathcal{H} = \sqrt{|cP - eA|^2 + m^2 c^4} + e\Phi,$$

donde $P_j = \partial_{u_j} \mathcal{L}$.

Solución:

La acción que se debe minimizar es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L} d(\gamma\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \mathcal{L} d\tau$$

identificándose el Lagrangiano $\mathcal{L} = \gamma \mathcal{L}$. En general, se sabe que $\mathcal{L} = T - U$, luego para una partícula libre, de las ecuaciones de Euler-Lagrange se deduce que se debe cumplir

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{x}) = 0$$

Esto indica que \mathcal{L}_T (Lagrangiano de la partícula libre) debe ser proporcional a la masa. Por otro lado, ya que el Lagrangiano debe ser invariante, la cantidad $\gamma\mathcal{L}_T$ debe ser invariante, lo cual se cumple si se elige $\gamma\mathcal{L}_T = -mc^2$. Se tiene entonces que

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{\gamma}mc^2$$

y al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \dot{x}} = 0$$

se confirma que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-\frac{1}{\gamma}mc^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left[-mc^2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2}mc^2 \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right)^{-1/2} \left(-\frac{2\dot{x}}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} (\gamma m \dot{x}) \end{aligned}$$

Luego la elección de \mathcal{L}_T cumple con todas las condiciones. Esto también se observa al recuperar la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = 0$ para velocidades no relativistas. El potencial electromagnético en el caso no relativista viene dado por

$$U = e\Phi$$

donde Φ es tal que

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi$$

con \vec{A} el potencial vector y \vec{E} el campo eléctrico. De esta manera, el potencial relativista debe ser tal que $\gamma\mathcal{L}_U$ sea invariante y se cumpla que $U = e\Phi$ en el límite no relativista. Sea entonces el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_U = -\frac{e}{\gamma c} U_\alpha A^\alpha$$

donde $U_\alpha = (\gamma c, \vec{\nabla}\Phi)$ y $A^\alpha = (\Phi, \vec{A})$, es evidente que

$$\gamma\mathcal{L}_U = -\frac{e}{c} U_\alpha A^\alpha$$

es invariante, puesto que la contracción $U_\alpha A^\alpha$ genera un escalar, el cual es invariante. Por otro lado, en el límite $\dot{x} \ll c$, se recupera $\mathcal{L}_U = e\Phi$, lo cual sugiere que la elección del Lagrangiano cumple también con las condiciones necesarias. Se escribe entonces el Lagrangiano total

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_U = -\frac{1}{\gamma}mc^2 - \frac{e}{\gamma c} U_\alpha A^\alpha$$

a partir de lo que se deduce

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(-\frac{1}{\gamma} mc^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(-\frac{e}{\gamma c} U_\alpha A^\alpha \right) \\ &= \gamma m \dot{x}_i - \frac{e}{c} A_i \end{aligned}$$

y, puesto que el Hamiltoniano viene dado por

$$\mathcal{H}(x^i, P_j, t) = P_i \dot{x}^i - \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j, t),$$

se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= P_i \dot{x}_i - \mathcal{L} \\ &= \gamma m \dot{x}_i^2 - \frac{e}{c} \dot{x}_i A_i + \frac{1}{\gamma} mc^2 + e\Phi + \frac{e}{c} \dot{x}_i A_i \\ &= \gamma m \dot{x}_i^2 + \frac{1}{\gamma} mc^2 + e\Phi \end{aligned}$$

Recordando que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}}$$

se puede reescribir

$$\begin{aligned} \gamma m \dot{x}_i^2 + \frac{1}{\gamma} mc^2 &= \frac{m \dot{x}_i^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2} \\ &= \frac{m \dot{x}_i^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} + \frac{mc^2 \left(1 - \frac{\dot{x}_i^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

luego el Hamiltoniano queda

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} + e\Phi$$

Por último, despejando \dot{x}_i de la expresión para P_i se obtiene

$$\dot{x} = \frac{c(cP - eA)}{\sqrt{|cP - eA|^2 + m^2 c^4}}$$

por lo que

$$\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{|cP - eA|^2 + m^2c^4}}$$

y reemplazando en el Hamiltoniano se concluye que

$$\mathcal{H} = \sqrt{|cP - eA|^2 + m^2c^4} + e\Phi$$

8.32 La paradoja de los gemelos

La estrella más cercana está a 4 años luz. Suponga que se desea enviar a un gemelo en un cohete que acelere con aceleración g la mitad del camino hacia esta estrella y desacelere con aceleración $-g$ la otra mitad (para evitar problemas de salud por ingrávitez). Supongamos que, para ello, contamos con una turbina del Enterprise, que convierte perfectamente materia y antimateria en energía (por lo tanto, la velocidad de expulsión de la masa es con velocidad c respecto al cohete). Sin hacer consideraciones relativistas, encuentre la masa inicial M del cohete necesaria para llegar a esta estrella (asuma que la masa del módulo más la de la tripulación es de $m_c = 100$ kg). Resuelva el problema relativista y calcule la diferencia de edad cuando los gemelos se encuentran nuevamente en la tierra, ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el cohete? Considerando efectos relativistas y una masa $m = 100$ kg, encuentre la masa inicial del cohete necesaria para llegar a la estrella.

Solución:

Si el cohete está lo suficientemente lejos como para no ser desviado por el campo gravitatorio de la Tierra y su trayectoria es una línea recta en el espacio plano (no hay curvaturas relativistas) en dirección a la estrella, la velocidad de la masa eyectada por el cohete (con dirección a la Tierra) vista desde la Tierra es $\vec{v} - \vec{u}$, donde \vec{v} es la velocidad del cohete y $\vec{u} = c\hat{x}$ es la velocidad de expulsión de masa en la misma dirección que la velocidad \vec{v} (\hat{x} sin perder generalidad). La variación en el momento lineal del cohete será entonces

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) \\ &= [(m - dm')(\vec{v} + d\vec{v}) - (\vec{v} - \vec{u})dm'] - m\vec{v} \end{aligned}$$

donde dm' corresponde a la pérdida de masa expulsada y $d\vec{v}$ es el cambio de velocidad asociado. Puesto que $dm'd\vec{v} \ll 1$, la expresión queda de la forma

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= (m\vec{v} + md\vec{v} - \vec{v}dm' + \vec{v}dm' - \vec{u}dm') - m\vec{v} \\ &= md\vec{v} - \vec{u}dm' \end{aligned}$$

y, puesto que la masa total del sistema se mantiene constante, es decir, $m + m' = cte$, se deduce que $dm + dm' = 0$, luego el cambio en la masa del cohete es $dm = -dm'$. Por otro lado, al no tenerse fuerzas externas al sistema, se tiene que $d\vec{p} = 0$, por lo que

$$d\vec{p} = 0 = md\vec{v} - \vec{u}dm'$$

a partir de lo que se deduce

$$\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{\vec{u}}{m} \frac{dm'}{dt} = \vec{a} + \frac{\vec{u}}{m} \frac{dm}{dt} = 0$$

y usando que $\vec{u} = c\hat{x}$ se reescribe

$$\vec{a} + \frac{c}{m} \frac{dm}{dt} \hat{x} = 0$$

En la primera parte de la trayectoria (hasta mitad de camino a la estrella), la aceleración es $\vec{a} = g\hat{x}$ (de manera que sea posible dejar el campo gravitatorio), luego

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{g}{c} m(t)$$

ecuación diferencial con solución

$$m(t) = (m_c + M) e^{-\frac{g}{c}t}$$

donde se usó que la masa inicial del sistema es $m_c + M$. Esta solución es válida para $t \in [0, t_0]$, con t_0 el tiempo que el cohete demora en llegar a la mitad de la distancia entre la Tierra y la estrella. Para la siguiente mitad del camino, se tiene que la estrella comienza a atraer al cohete hacia sí, por lo que la dirección de la masa expulsada debe cambiar en 180° (de manera que el cohete no acelere más de lo que su composición se lo permita). El cambio de momento lineal pasa a ser entonces

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= [(m - dm')(\vec{v} - d\vec{v}) + (\vec{v} + \vec{u})dm'] - m\vec{v} \\ &= (m\vec{v} - md\vec{v} - \vec{v}dm + \vec{v}dm' + \vec{u}dm') - m\vec{v} \\ &= \vec{u}dm' - md\vec{v} \end{aligned}$$

y como se sigue cumpliendo que $\vec{p} = 0$, se llega a la igualdad

$$d\vec{p} = 0 = md\vec{v} - \vec{u}dm'$$

ecuación ya antes obtenida y que permite concluir que, en la segunda mitad del tramo, la variación de la masa viene dada por

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{g}{c}t}$$

con m_0 una constante. Esta solución es válida para $t \in [t_0, t_{\max}]$, donde t_{\max} corresponde al tiempo que el cohete demora en llegar a la estrella. Suponiendo que la solución para $m(t)$ es continua (es decir, el propulsor se gira 180° de forma instantánea), se deduce que en $t = t_0$

$$(m_c + M) e^{-\frac{g}{c}t_0} = m_0 e^{-\frac{g}{c}t_0}$$

luego $m_0 = m_c + M$, concluyéndose que la masa para todo tiempo viene dada por

$$m(t) = (m_c + M) e^{-\frac{g}{c}t}$$

En el primer tramo, la aceleración es g constante, por lo que la ecuación de movimiento será

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

y como $x(t_0) = D/2$, con D la distancia entre la Tierra y la estrella, se deduce que

$$t_0 = \sqrt{\frac{D}{g}}$$

Notando que 4 años luz corresponden a

$$D = 4[\text{años luz}] = 4c \cdot (3.15 \times 10^7) = 3.78 \times 10^{16}[\text{m}]$$

se deduce que

$$t_0 \approx 6.2 \times 10^7[\text{s}]$$

De esta manera, puesto que el tiempo que demora el cohete en llegar a la estrella es $t_{\max} = 2t_0$, se deduce que

$$m(t_{\max}) = (m_c + M) e^{-\frac{2g}{c}t_0} = m_c$$

que corresponde al momento en que el cohete pierde todo el combustible y queda solo el casquete (masa mínima para llegar a la estrella). Despejando la masa M de la expresión para la variación de la masa, se tiene

$$M = m(t_{\max}) e^{\frac{2g}{c}t_0} - m_c$$

y reemplazando los valores numéricos

$$\begin{aligned} M &= m_c \left[e^{\frac{2g}{c}t_0} - 1 \right] \\ &= 100 \cdot \left[\exp \left(\frac{2 \cdot 9.78}{2.998 \times 10^8} \cdot 6.2 \times 10^7 \right) - 1 \right] [\text{kg}] \\ &= 100 \cdot (e^{4.05} - 1) [\text{kg}] \\ &= 5740 [\text{kg}] \end{aligned}$$

por lo que la masa inicial necesaria para llegar a la estrella será cercana a 5.7 [Tn]. Para resolver el problema de forma relativista, se sabe que la relación entre los cuadrivectores de velocidad del sistema K (en la Tierra) y K' (solidario al cohete) es

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = L_v^\mu(-v) \frac{dU^\nu}{d\tau}$$

por lo que en el primer tramo (desde la Tierra hasta la mitad de la distancia) se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dU^0}{d\tau} & \frac{dU^1}{d\tau} & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta\gamma g \\ \gamma g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

siendo inmediato que

$$\frac{dU^0}{d\tau} = \gamma\beta g \quad \frac{dU^1}{d\tau} = \gamma g$$

Notando que

$$\begin{aligned}\gamma\beta &= \frac{\gamma}{c}v = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{\gamma}{c}U^1\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{U^1}{c} \\ \gamma &= \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{U^0}{c}\end{aligned}$$

las ecuaciones diferenciales se reescriben de la forma

$$\frac{dU^0}{d\tau} = \frac{g}{c}U^1 \quad \frac{dU^1}{d\tau} = \frac{g}{c}U^0$$

Derivando la segunda para reemplazar la primera se obtiene

$$\frac{d^2U^1}{d\tau^2} = \frac{g^2}{c^2}U^1$$

cuya solución es

$$\dot{x}(\tau) = A \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + B \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

y suponiendo que el cohete parte del reposo tal que $\dot{x}(\tau = 0) = 0$, se obtiene $A = 0$. Ahora, como $\ddot{x}(\tau = 0) = g$, se deduce también que

$$\ddot{x}(0) = g = \frac{g}{c}B \cosh(0),$$

obteniéndose $B = c$, luego la solución queda

$$\dot{x}(\tau) = c \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

Por otro lado, puesto que $c^2t^2 - x^2$ es un invariante relativista, es directo que

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2$$

luego se puede escribir

$$dt = d\tau \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2} = d\tau \sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

lo que permite encontrar el tiempo que transcurre para el gemelo en la Tierra

$$\begin{aligned}t(\tau) &= \int_0^\tau \sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{c^2}} d\tau' \\ &= \int_0^\tau \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{g}{c}\tau'\right)} d\tau' \\ &= \int_0^\tau \cosh\left(\frac{g}{c}\tau'\right) d\tau' \\ &= \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)\end{aligned}$$

o, invirtiendo, el tiempo que pasa para el gemelo en el cohete

$$\tau = \frac{c}{g} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{g}{c} t \right)$$

De esta manera, el gemelo en la Tierra ve a su hermano moverse con velocidad

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(\tau) \frac{d\tau}{dt}$$

y recordando que

$$c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 + dx^2$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \sinh \left(\frac{g}{c} \tau \right) \\ &= \frac{g}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \left[\frac{c}{g} \sinh \left(\frac{g}{c} \tau \right) \right] \\ &= \frac{gt}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \\ &= \left[\frac{1}{g^2 t^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2}\end{aligned}$$

luego es posible escribir

y despejando el tiempo se obtiene

$$t_0 = \sqrt{\left(\frac{D}{2c} + \frac{c}{g} \right)^2 - \frac{c^2}{g^2}} = \sqrt{\frac{D}{g} + \frac{D^2}{4c^2}}$$

y, puesto que demora $2t_0$ en ir y $2t_0$ en volver, se concluye que para el gemelo en la Tierra

$$\begin{aligned}t &= 4 \sqrt{\frac{D}{g} + \frac{D^2}{4c^2}} \\ &= 4 \cdot \sqrt{\frac{3.78 \times 10^{16}}{9.78} + \frac{14.3 \times 10^{32}}{4 \cdot 8.99 \times 10^{16}}} [\text{s}] \\ &= 3.55 \times 10^8 [\text{s}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{2} &= x(t_0) \\
&= \int_0^{t_0} \dot{x}(t) dt \\
&= \int_0^{t_0} \left[\frac{1}{g^2 t^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2} dt \\
&= c \int_0^{t_0} \frac{t}{\sqrt{\frac{c^2}{g^2} + t^2}} dt \\
&= \frac{c}{2} \int_{c^2/g^2}^{c^2/g^2+t^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\
&= c \left(\sqrt{\frac{c^2}{g^2} + t^2} \right) \Big|_0^{t_0} \\
&= c \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + t_0^2} - \frac{c^2}{g}
\end{aligned}$$

mientras que para el gemelo en el cohete han pasado

$$\tau = \frac{2.998 \times 10^8}{9.78} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{9.78}{2.998 \times 10^8} \cdot 3.55 \times 10^8 \right) [\text{s}] = 9.7 \times 10^7 [\text{s}]$$

por lo que la diferencia de edad al reencontrarse será de

$$\Delta T = t - \tau = (3.55 \times 10^8 - 9.7 \times 10^7) [\text{s}] = (11.26 - 3.08) [\text{y}] = 8.18 [\text{y}]$$

La velocidad máxima del cohete corresponde al tiempo $t = t_0$, puesto que la velocidad va en aumento durante la primera parte del trayecto, hasta que alcanza $D/2$ y comienza a reducir para controlar la aceleración. Esto implica que

$$\begin{aligned}
v_{\max}(t = t_0) &= \left[\frac{1}{g^2 t^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2} \\
&= \left[\frac{1}{Dg + \frac{D^2 g^2}{4c^2}} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2}
\end{aligned}$$

y reemplazando los valores numéricos se obtiene

$$\begin{aligned}
v_{\max} &= \left[\frac{1}{3.78 \times 10^{16} \cdot 9.78 + \frac{14.3 \times 10^{32} \cdot 95.7}{4.899 \times 10^{16}}} + \frac{1}{8.99 \times 10^{16}} \right]^{-1/2} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \\
&\approx 2.8 \times 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right],
\end{aligned}$$

Luego la velocidad máxima apreciada desde la Tierra es, aproximadamente, $v_{\max} = 0.934c$. Finalmente, considerando que el cuadrivector de momento se escribe $(E/c, \vec{p})$, se tendrá que el cambio de momento lineal relativista vendrá dado por

$$\begin{aligned}
d(p_0, \vec{p}) &= (p_0, \vec{p})(t+dt) - (p_0, \vec{p})(t) \\
&= [(\gamma_{dv_0} mc, \gamma_{d\vec{v}} m d\vec{v}) + (E/c, \vec{p}_{dm'})] - (mc + cdm', 0) \\
&\approx \left[\left(\left[1 + \frac{1}{2} \frac{(dv)^2}{c^2} \right] mc, \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(dv)^2}{c^2} \right] m d\vec{v} \right) + (p_f, -\vec{p}_f) \right] - (mc + cdm', 0) \\
&= (mc + p_f, md\vec{v} - \vec{p}_f) - (mc + cdm', 0) \\
&= (p_f - cdm', md\vec{v} - \vec{p}_f)
\end{aligned}$$

donde se desprecian los diferenciales de segundo orden y dm' se convierte en un fotón de energía $E = p_f/c$. Puesto que se sigue cumpliendo $d(p_0, \vec{p}) = (0, \vec{0})$ y $dm' = -dm$, es directo obtener las relaciones

$$cdm + p_f = 0 \quad mdv - p_f = 0$$

a partir de las que se deduce

$$mdv + cdm = 0$$

o, equivalentemente,

$$\frac{dv}{d\tau} + c \frac{m'(\tau)}{m(\tau)} = 0$$

donde $dv/dt = g$ en la primera parte del trayecto. Usando la regla de la cadena se escribe para la primera mitad del trayecto que

$$g + c \frac{m'(t)}{m(t)} \frac{dt}{d\tau} = 0$$

y recordando que

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c} \right)^2}$$

se llega a la relación

$$\frac{dm}{m} = - \frac{g/c}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c} \right)^2}} dt$$

la cual al integrar permite obtener

$$m(t) = (m_c + M) \left[\frac{gt}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c} \right)^2} \right]^{1/2}$$

Evaluando en $t = t_{\max}$, la masa m_c que queda en el cohete al llegar a la estrella será

$$M(t_0) = m_c \left[\frac{2gt_0 - c}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{2gt_0}{c} \right)^2} \right]$$

y reemplazando los valores numéricos se obtiene

$$\begin{aligned} M(t_0) &= 100 \cdot \left(\frac{2 \cdot 9.78 \cdot 6.2 \times 10^7 - 2.998 \times 10^8}{2.998 \times 10^8} + \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 95.6 \cdot 38.4 \times 10^{14}}{8.99 \times 10^{16}}} \right) [\text{kg}] \\ &= 705 [\text{kg}] \end{aligned}$$

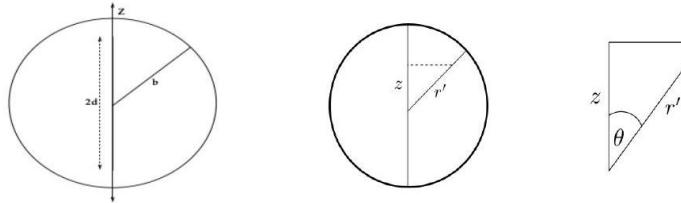
luego la masa inicial del cohete necesaria para llegar a la estrella es 0.7[Tn].

8.33 Cascarón esférico con línea cargada

Una línea cargada de largo $2d$ con carga total Q tiene una densidad lineal de carga que varía como $(d^2 - z^2)$, donde z es la distancia medida desde el punto medio. Un cascarón esférico conductor (a tierra) de radio $b > d$ está centrado en el punto medio de la línea cargada.

- a) Encuentre el potencial en el espacio como una expansión de polinomios de Legendre.
- b) Calcule la densidad superficial de carga inducida sobre el cascarón.
- c) Calcule el límite $d \ll b$ y compare con el caso correspondiente.

Solución:



a) Se debe resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) = -4\pi\rho(r, \theta, \phi)$$

para lo cual se calculará primero la función de Green del sistema, la cual cumple con

$$\nabla^2 G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (8.67)$$

En coordenadas esféricicas, la delta de Dirac puede expandirse de la forma

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r - r')}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi')$$

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r - r')}{(r')^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (8.68)$$

por lo que se propone la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r, r') Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

Usando la identidad para los esféricos armónicos

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

se deduce que

$$\nabla^2 G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (8.69)$$

Reemplazando la Ec. (8.68) y la Ec. (8.69) en la Ec. (8.67) se llega a la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} = -4\pi \frac{\delta(r-r')}{(r')^2}, \quad (8.70)$$

la cual para $r \neq r'$ corresponde a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - l(l+1) R_{lm} = 0$$

con solución

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r < r' \\ C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > r' \end{cases}$$

Como la solución no puede diverger en $r = 0$, se deduce que $B_{lm} = 0$, mientras que de la condición de borde

$$\psi(r=b) = 0$$

se obtiene

$$D_{lm} = -C_{lm} b^{2l+1}$$

y la solución queda

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < r' \\ C_{lm} [r^l - b^{2l+1} r^{-(l+1)}] & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} r_<^l \left[r_>^l - b^{2l+1} r_>^{-(l+1)} \right]$$

donde $r_< = \min(r, r')$ y $r_> = \max(r, r')$. Para encontrar la constante E_{lm} se debe integrar la discontinuidad $r = r'$ en la Ec. (8.70), esto se hace pensando en una lámina de grosor $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r' + \varepsilon$ y $r_< = r' - \varepsilon$, luego

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} l(l+1) R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r-r') dr$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \Big|_{r' - \epsilon}^{r' + \epsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para $R_{lm}(r, r')$ se obtiene

$$E_{lm} r_>^2 r_<^l \left[l r_>^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+2}} \right] - l E_{lm} r_<^{l+1} \left[r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = -4\pi.$$

Considerando $\epsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r_< = r'$ se reescribe

$$E_{lm} (r')^{l+2} \left[l (r')^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+2}} \right] - l E_{lm} (r')^{l+1} \left[(r')^l - \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+1}} \right] = -4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = -\frac{4\pi}{(2l+1)b^{2l+1}}$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = -\frac{4\pi r_<^l}{(2l+1)b^{2l+1}} \left[r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = \frac{4\pi r_<^l}{(2l+1)} \left[\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right]$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{r_<^l}{(2l+1)} \left[\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right].$$

La densidad de carga es proporcional a $d^2 - z^2$, pero

$$z = r' \cos(\theta'),$$

luego se tiene que

$$d^2 - z^2 = d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta')$$

y la densidad de carga del sistema será

$$\rho(r', \theta', \phi') = \rho_0 \frac{\left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)],$$

donde la delta angular considera ambos lados del alambre. Como la carga encerrada en la esfera es Q , se escribe

$$\begin{aligned}
Q &= \int \rho dV \\
&= \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^d \frac{\left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] (r')^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi' \\
&= 2\pi\rho_0 \int_0^{\pi} \int_0^d \left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] dr' d\theta' \\
&= 4\pi\rho_0 \int_0^d \left[d^2 - (r')^2 \right] dr' \\
&= 4\pi\rho_0 \left[d^2 (r') - \frac{(r')^3}{3} \right] \Big|_0^d \\
&= \frac{8\pi\rho_0 d^3}{3},
\end{aligned}$$

luego la constante es

$$\rho_0 = \frac{3Q}{8\pi d^3}$$

y la densidad de carga es

$$\rho(r', \theta', \phi') = \frac{3Q}{8\pi d^3} \frac{\left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)]$$

El potencial eléctrico viene dado por la expresión

$$\psi(r, \theta, \phi) = \int \rho(r', \theta', \phi') G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') dV - \frac{1}{4\pi} \oint \psi(r, \theta, \phi) \frac{\partial G}{\partial n_y} dy,$$

donde la primera integral considera la contribución al potencial por densidades de carga y la segunda integral considera las condiciones de borde sobre el problema. Como la esfera está conectada a tierra, la segunda integral es nula, luego el potencial eléctrico será

$$\begin{aligned}
\psi(r, \theta, \phi) &= \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{\left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] \\
&\quad r'_< \left[\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right] (r')^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi'
\end{aligned}$$

y usando que

$$Y_{lm}^*(\theta', \phi') = N_l^m e^{-im\phi'} P_l^m [\cos(\theta')]$$

el potencial se reescribe como

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, \phi) &= \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{N_l^m Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} \int e^{-im\phi'} P_l^m [\cos(\theta')] \left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] \\ &\quad [\delta(\theta') + \delta(\theta' - \pi)] r'_< \left[\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right] dr' d\theta' d\phi'\end{aligned}$$

Notar ahora que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-im\phi'} d\phi' &= \frac{i}{m} \int_0^{-2im\pi} e^u du \\ &= \frac{i}{m} [e^{-2im\pi} - 1] \\ &= \frac{i}{m} [\cos(2m\pi) - i\sin(2m\pi) - 1] \\ &= 0 \quad \forall m \neq 0\end{aligned}$$

luego $m = 0$ tal que $\psi(r, \theta, \phi) \neq 0$ y se tiene

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, \phi) &= \frac{3Q\pi}{d^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{N_l^0 Y_l^0(\theta, \phi)}{(2l+1)} \int P_l^0 [\cos(\theta')] \left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] [\delta(\theta') + \delta(\theta' - \pi)] \\ &\quad r'_< \left[\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right] dr' d\theta'\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$Y_l^0(\theta, \phi) = N_l^0 P_l^0[\cos(\theta)] \quad N_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

y el potencial queda

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, \phi) &= \frac{3Q}{4d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] \int P_l^0 [\cos(\theta')] \left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] [\delta(\theta') + \delta(\theta' - \pi)] \\ &\quad r'_< \left[\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right] dr' d\theta' \\ &= \frac{3Q}{4d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] [P_l^0(1) + P_l^0(-1)] \int \left[d^2 - (r')^2 \right] r'_< \left[\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right] dr'\end{aligned}$$

Como $P_l^0(1) = 1$ y $P_l^0(-1) = (-1)^l P_l^0(1) = (-1)^l$, se tienen las opciones

$$P_l^0(1) + P_l^0(-1) = \begin{cases} 2 & \text{si } l \text{ es par} \\ 0 & \text{si } l \text{ es impar} \end{cases}$$

luego se concluye que

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] \int r'_< \left[d^2 - (r')^2 \right] \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr'$$

La integral dependerá del tramo, luego para $r < r' < d$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^r r'_< \left[d^2 - (r')^2 \right] \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr' &= \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^r (r')^l \left[d^2 - (r')^2 \right] dr' \\ &= \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[d^2 \int_0^r (r')^l dr' - \int_0^r (r')^{l+2} dr' \right] \\ &= \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[\frac{d^2}{(l+1)} (r')^{l+1} \Big|_0^r - \frac{(r')^{l+3}}{(l+3)} \Big|_0^r \right] \\ &= \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[d^2 \frac{r'^{l+1}}{(l+1)} - \frac{r'^{l+3}}{(l+3)} \right] \end{aligned}$$

y el potencial queda

$$\psi_1(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[d^2 \frac{r'^{l+1}}{(l+1)} - \frac{r'^{l+3}}{(l+3)} \right]$$

Para el caso $r' < r < d$ se tendrá

$$\begin{aligned} \int_r^d r'_< \left[d^2 - (r')^2 \right] \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr' &= r'_< \int_r^d \left[d^2 - (r')^2 \right] \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr' \\ &= r'_< \left[d^2 \int_r^d \frac{dr'}{(r')^{l+1}} - \frac{d^2}{b^{2l+1}} \int_r^d (r')^l dr' + \frac{1}{b^{2l+1}} \int_r^d (r')^{l+2} dr' - \int_r^d \frac{dr'}{(r')^{l-1}} \right] \\ &= r'_< \left[\frac{(r')^{l+3}}{(l+3)b^{2l+1}} \Big|_r^d - \frac{d^2 (r')^{l+1}}{(l+1)b^{2l+1}} \Big|_r^d - \frac{d^2}{l(r')^l} \Big|_r^d + \frac{1}{(l-2)(r')^{l-2}} \Big|_r^d \right] \\ &= r'_< \left[\frac{(l+3)d^2 r'^{l+1} - (l+1)r'^{l+3} - 2d^{l+3}}{(l+1)(l+3)b^{2l+1}} + \frac{(l-2)r^{-l}d^2 - r^{2-l} + 2d^{2-l}}{l(l-2)} \right] \end{aligned}$$

y el potencial queda

$$\psi_2(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] r'_< \left[\frac{(l+3)d^2 r'^{l+1} - (l+1)r'^{l+3} - 2d^{l+3}}{(l+1)(l+3)b^{2l+1}} + \frac{(l-2)r^{-l}d^2 - r^{2-l} + 2d^{2-l}}{l(l-2)} \right]$$

Por último, para el caso $r' < d < r$ se escribe

$$\begin{aligned} \int_0^d r'_< \left[d^2 - (r')^2 \right] \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr' &= \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^d (r')^l \left[d^2 - (r')^2 \right] dr' \\ &= \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[d^2 \int_0^d (r')^l dr' - \int_0^d (r')^{l+2} dr' \right] \\ &= \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[\frac{d^2}{(l+1)} (r')^{l+1} \Big|_0^d - \frac{(r')^{l+3}}{(l+3)} \Big|_0^d \right] \\ &= \frac{2d^{l+3}}{(l+1)(l+3)} \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \end{aligned}$$

y el potencial queda

$$\psi_3(r, \theta, \phi) = 3Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)} \left(\frac{1}{r_>} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

b) La discontinuidad en el campo eléctrico se relaciona con la densidad de carga superficial a través de la relación

$$\left. \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right|_{r=b} = -4\pi\sigma$$

deduciéndose entonces que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right|_{r=b} &= -3Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)} \left[\frac{l+1}{r_>} + \frac{lr_>^{l-1}}{b^{2l+1}} \right]_{r=b} \\ &= -3Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l (2l+1) P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)b^{l+2}} \end{aligned}$$

por lo que la densidad de carga superficial es

$$\sigma = \frac{3Q}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l (2l+1) P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)b^{l+2}}$$

c) En el límite $d \ll b$ se puede aproximar la expresión con $l = 0$, luego el potencial queda

$$\psi_3(r, \theta, \phi) \approx Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

y la densidad de carga queda

$$\sigma \approx \frac{Q}{4\pi b^2}$$

8.34 Capacitor de placas paralelas con anillo

Considere un capacitor formado por dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia L y mantenidas a una diferencia de potencial V_0 . Además, dentro de este capacitor tenemos un anillo de radio a , con una densidad de carga lineal λ constante, puesto en un plano paralelo a las placas, y a la mitad de distancia entre ellas. Construya una función de Green para este problema y resuelva el potencial entre las placas, ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie de los conductores?

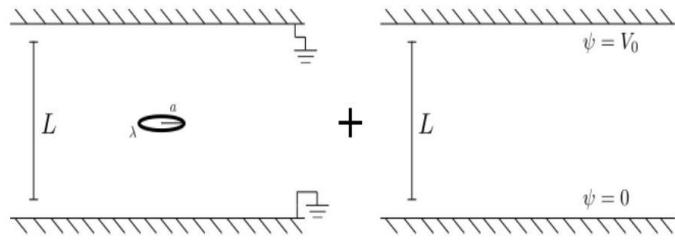
Solución:

Se debe resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi(r, \phi, z) = -4\pi\rho(r, \phi, z)$$

para lo cual se calculará la función de Green del sistema, la que cumple con la igualdad

$$\nabla^2 G(r, \phi, z; r', \phi', z') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$



y, puesto que en coordenadas cilíndricas la delta de Dirac se expande de la forma

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) &= \frac{\delta(r - r')}{r'} \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \\ &= \frac{\delta(r - r')}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right)\end{aligned}$$

se propone la función de Green

$$G(r, \phi, z; r', \phi', z') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mn}(r, r') e^{im(\phi - \phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right)$$

Desarrollando el Laplaciano en coordenadas cilíndricas se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla^2 G &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} A_{mn} + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 A_{mn} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) A_{mn} \right]\end{aligned}$$

e igualando a la delta se llega a la expresión

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) A_{mn} = -4\pi \frac{\delta(r - r')}{r'},$$

donde al tomar $r \neq r'$ se obtiene la ecuación de Bessel modificada con solución

$$A_{mn}(r, r') = \begin{cases} B_{mn} I_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) + C_{mn} K_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) & \text{si } r < r' \\ D_{mn} I_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) + E_{mn} K_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) & \text{si } r > r' \end{cases}$$

La función $K_m(r)$ diverge en $r = 0$, mientras que $I_m(r)$ diverge en $r \rightarrow \infty$, luego se deduce que $C_{mn} = D_{mn} = 0$ y se escribe

$$A_{mn}(r, r') = \begin{cases} B_{mn} I_m(kr) & \text{si } r < r' \\ E_{mn} K_m(kr) & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando las soluciones,

$$A_{mn}(r, r') = F_{mn} I_m(kr_<) K_m(kr_>),$$

donde $r_< = \min(r, r')$ y $r_> = \max(r, r')$. Integrando la discontinuidad en $r = r'$, se escribe

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} A_{mn} \left[\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right] r dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r - r') dr$$

donde la segunda integral es cero por continuidad de la función A_{mn} y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega entonces a la igualdad

$$\left. \left(r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) \right|_{r'=\varepsilon}^{r'+\varepsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para A_{mn} y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r <= r'$, se obtiene

$$\begin{aligned} -4\pi &= F_{mn} r_> I_m(kr_<) K'_m(kr_>) - F_{mn} r_< I'_m(kr_<) K_m(kr_>) \\ &= F_{mn} [r' I_m(kr') K'_m(kr') - r' I'_m(kr') K_m(kr')] \\ &= F_{mn} r' \left[I_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) K'_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) - I'_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) \right] \end{aligned}$$

por lo que la constante será

$$F_{mn} = -\frac{4\pi}{r' \left[I_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) K'_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) - I'_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) \right]}$$

y la función de Green queda

$$G(r, \phi, z; r', \phi', z') = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im(\phi-\phi')} \sin(kz) \sin(kz') I_m(kr_<) K_m(kr_>)}{r' \left[I_m(kr') K'_m(kr') - I'_m(kr') K_m(kr') \right]}.$$

El anillo tiene densidad lineal λ , radio a y se ubica a una distancia $L/2$ de las placas, por lo que la densidad de carga vendrá dada por

$$\rho(r', \phi', z') = \lambda \delta(r' - a) \delta\left(z' - \frac{L}{2}\right)$$

Para resolver el problema (notar que la segunda integral en la expresión general para el potencial no es cero debido a que las superficies están sometidas a una diferencia de potencial distinta de cero), se utiliza el principio de superposición para dividir el sistema en un caso donde se tiene la densidad de carga (anillo) ubicada entre las dos placas a potencial cero (a tierra) y otro donde no se tiene densidad de carga y las superficies están sometidas al potencial distinto de cero. En el primer caso se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \phi, z) &= \int \rho(r', \phi', z') G(r, \phi, z; r', \phi', z') dV - \frac{1}{4\pi} \oint \psi(r, \phi, z) \frac{\partial G}{\partial n_y} dy \\ &= -4\pi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{e^{im(\phi-\phi')} \sin(kz) \sin(kz') I_m(kr_<) K_m(kr_>)}{r' \left[I_m(kr') K'_m(kr') - I'_m(kr') K_m(kr') \right]} \delta(r' - a) \\ &\quad \delta\left(z' - \frac{L}{2}\right) r' dr' d\phi' dz' \\ &= -4\pi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(kz) I_m(kr_<) K_m(kr_>) e^{im\phi}}{\left[I_m(ka) K'_m(ka) - I'_m(ka) K_m(ka) \right]} \int_0^{2\pi} e^{-im\phi'} d\phi', \end{aligned}$$

pero la integral solo es distinta de cero para $m = 0$, por lo que

$$\psi_1(r, \phi, z) = -8\pi^2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(kz) I_0(kr_<) K_0(kr_>)}{[I_0(ka)K'_0(ka) - I'_0(ka)K_0(ka)]}.$$

Ahora, usando que

$$I_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right)K'_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) - I'_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right)K_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) = \frac{L}{n\pi a},$$

se obtiene el potencial eléctrico

$$\psi_1(r, \phi, z) = -\frac{8\pi^3\lambda a}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right).$$

El segundo caso debe cumplir con la ecuación de Laplace (puesto que ya no hay una densidad de carga entre las placas) y las condiciones de borde

$$\psi_2(z = L) = V_0 \quad \psi_2(z = 0) = 0$$

y notando que

$$\psi_2(r, \phi, z) = \frac{V_0}{L}z$$

cumple con las condiciones de borde y con que

$$\nabla^2 \psi_2 = \nabla \cdot \nabla \psi_2 = \nabla \cdot \left(0, 0, \frac{V_0}{L}\right) = 0$$

se concluye que $\psi_2(r, \phi, z)$ es el potencial eléctrico para el segundo caso. De esta manera, el potencial eléctrico total es

$$\psi(r, \phi, z) = \frac{V_0}{L}z - \frac{8\pi^3\lambda a}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right)$$

y el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\nabla \psi = \left[\frac{8\pi^4\lambda a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right) - \frac{V_0}{L} \right] \hat{z} = E_z \hat{z}$$

Ahora, se tiene que el campo eléctrico externo no es influenciado por el anillo, luego los potenciales son constantes, con $\psi_{inf} = 0$ y $\psi_{sup} = V_0$, deduciéndose que el campo externo es nulo, por lo que tomando $\hat{n} = \pm \hat{z}$ se obtiene

$$E_z \hat{z} \cdot \hat{z} = 4\pi\sigma_{sup} \quad E_z \hat{z} \cdot (-\hat{z}) = 4\pi\sigma_{inf}$$

y las densidades de carga (evaluando $z = 0$ y $z = L$) son

$$\sigma_{sup} = \frac{2\pi^3\lambda a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right) - \frac{V_0}{4\pi L}$$

$$\sigma_{inf} = \frac{V_0}{4\pi L} - \frac{2\pi^3\lambda a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right)$$

8.35 Funciones de Green

Encuentre la función de Green en los siguientes casos.

- Esfera en el vacío (condición de borde en infinito).
- Cascarón esférico conductor de radio b .
- Esferas conductoras concéntricas de radios $a < b$.
- Utilice el resultado del cascarón esférico de radio b para encontrar el potencial interior de la esfera cuando se posiciona un anillo de radio a y carga Q concéntrica a la esfera.

Solución:

Se debe resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) = -4\pi\rho(r, \theta, \phi)$$

para lo cual se calculará primero la función de Green del sistema, la cual cumple con

$$\nabla^2 G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (8.71)$$

En coordenadas esféricas, la delta de Dirac puede expandirse de la forma

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{\delta(r - r')}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \\ \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{\delta(r - r')}{(r')^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \end{aligned} \quad (8.72)$$

por lo que se propone la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r, r') Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

Usando la identidad para los esféricos armónicos

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

se deduce que

$$\nabla^2 G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (8.73)$$

Reemplazando la Ec. (8.72) y la Ec. (8.73) en la Ec. (8.71) se llega a la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} = -4\pi \frac{\delta(r - r')}{(r')^2}, \quad (8.74)$$

la cual para $r \neq r'$ corresponde a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - l(l+1)R_{lm} = 0$$

con solución

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r < r' \\ C_{lm}r^l + D_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r > r' \end{cases}$$

a) Como la solución no puede diverger en $r = 0$, se deduce que $B_{lm} = 0$. De igual manera, $C_{lm} = 0$ debido a que la solución no puede diverger para $r \rightarrow \infty$, ya que se debe cumplir que $\psi(r \rightarrow \infty) = 0$. Se escribe entonces

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm}r^l & \text{si } r < r' \\ D_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}},$$

donde $r_< = \min(r, r')$ y $r_> = \max(r, r')$. Para encontrar la constante E_{lm} se debe integrar la discontinuidad $r = r'$ en la Ec. (8.74), esto se hace pensando en una lámina de grosor $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r' + \varepsilon$ y $r_< = r' - \varepsilon$, luego

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} l(l+1)R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r - r') dr$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left. \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para $R_{lm}(r, r')$ se obtiene

$$E_{lm} \left[(l+1) \frac{r_<^l}{r_>} + l \frac{r_<^{l+1}}{r_>} \right] = 4\pi$$

Considerando $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r_< = r'$ se reescribe

$$E_{lm}[(l+1) + l] = 4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = \frac{4\pi}{(2l+1)}$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = \frac{4\pi}{(2l+1)} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

b) Como la solución no puede diverger en $r = 0$, se deduce que $B_{lm} = 0$, mientras que de la condición de borde

$$\psi(r = b) = 0$$

se obtiene

$$D_{lm} = -C_{lm} b^{2l+1}$$

y la solución queda

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < r' \\ C_{lm} [r^l - b^{2l+1} r^{-(l+1)}] & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} r_<^l \left[r_>^l - b^{2l+1} r_>^{-(l+1)} \right],$$

donde $r_< = \min(r, r')$ y $r_> = \max(r, r')$. Para encontrar la constante E_{lm} se debe integrar la discontinuidad $r = r'$ en la Ec. (8.74), esto se hace pensando en una lámina de grosor $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r' + \varepsilon$ y $r_< = r' - \varepsilon$, luego

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} l(l+1) R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r - r') dr$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left. \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para $R_{lm}(r, r')$ se obtiene

$$E_{lm} r_>^2 r_<^l \left[l r_>^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+2}} \right] - l E_{lm} r_<^{l+1} \left[r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = -4\pi$$

Considerando $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r_< = r'$ se reescribe

$$E_{lm}(r')^{l+2} \left[l (r')^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+2}} \right] - l E_{lm}(r')^{l+1} \left[(r')^l - \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+1}} \right] = -4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = -\frac{4\pi}{(2l+1)b^{2l+1}}$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = -\frac{4\pi r_<^l}{(2l+1)b^{2l+1}} \left[r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = \frac{4\pi}{(2l+1)} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{1}{b} \left(\frac{r_<r_>}{b^2} \right)^l \right]$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{r_<^l r_>^l}{b^{2l+1}} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

la cual para $b \rightarrow \infty$, coincide con la expresión de la esfera posicionada en el vacío con condiciones de borde solo en infinito.

c) Puesto que ambas superficies son conductoras, para la esfera interior de radio a se tiene que $\psi(r=a)=0$, luego

$$A_{lm}a^l + B_{lm}a^{-(l+1)} = 0,$$

mientras que para la esfera de radio b se cumple

$$C_{lm}b^l + D_{lm}b^{-(l+1)} = 0.$$

En la primera condición se despeja B_{lm} en función de A_{lm} (puesto que no se quiere divergencia en $r=0$) y para la segunda se despeja C_{lm} en función de D_{lm} (puesto que no se quiere divergencia en $r \rightarrow \infty$), así

$$B_{lm} = -A_{lm}a^{2l+1} \quad C_{lm} = -D_{lm}b^{-(2l+1)}$$

y la solución queda

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) & \text{si } r < r' \\ D_{lm} \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas expresiones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

donde $r_< = \min(r, r')$ y $r_> = \max(r, r')$. Para encontrar la constante E_{lm} se debe integrar la discontinuidad $r=r'$ en la Ec. (8.74)), esto se hace pensando en una lámina de grosor $\epsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r' + \epsilon$ y $r_< = r' - \epsilon$, luego

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} l(l+1) R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \delta(r - r') dr$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left. \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para $R_{lm}(r, r')$ se obtiene

$$-E_{lm}r_>^2 \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{l+1}{r_>^{l+2}} + \frac{lr_>^{l-1}}{b^{2l+1}} \right) - E_{lm}r_<^2 \left(lr_<^{l-1} + \frac{(l+1)a^{2l+1}}{r_<^{l+2}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} + \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) = -4\pi$$

Considerando $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r_< = r'$ se reescribe

$$E_{lm} \left[(2l+1) - (2l+1) \frac{a^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right] = 4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]},$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right),$$

la cual para $a = 0$ y $b \rightarrow \infty$, coincide con la expresión de la esfera posicionada en el vacío con condiciones de borde solo en infinito. d) La densidad de carga del anillo viene dada por la expresión

$$\rho(r', \theta', \phi') = \rho_0 \frac{\delta(r' - a)}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta' - \pi/2)$$

donde se debe resolver

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho(r', \theta', \phi') dV \\ &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^b \frac{\delta(r' - a)}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta' - \pi/2) (r')^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi' \\ &= 2\pi \rho_0 \int_0^\pi \int_0^b \delta(r' - a) \delta(\theta' - \pi/2) dr' d\theta' \\ &= 2\pi \rho_0 \end{aligned}$$

luego la densidad de carga se escribe

$$\rho(r', \theta', \phi') = \frac{Q}{2\pi} \frac{\delta(r' - a)}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta' - \pi/2)$$

De esta manera, el potencial eléctrico será (la segunda integral es cero debido a que la esfera es conductora)

y usando que

$$Y_{lm}^*(\theta', \phi') = N_l^m e^{im\phi'} P_l^m [\cos(\theta')]$$

se deduce que $\psi(r, \theta, \phi) \neq 0$ solo para $m = 0$, luego

$$\psi(r, \theta, \phi) = 4\pi Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(N_l^0)^2 P_l^0[\cos(\theta)]}{(2l+1)} \left[\frac{r'_<}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{r'_<r'_>}{a^2} \right)^l \right] \int_0^\pi P_l^0[\cos(\theta')] \delta(\theta' - \pi/2) d\theta'$$

Para armónicos esféricos se tiene que

$$N_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

concluyéndose el potencial eléctrico

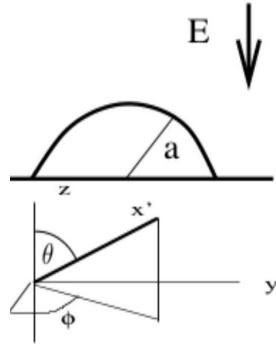
$$\psi(r, \theta, \phi) = Q \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[0] r'_< \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{a^{2l+1}} \right) P_l^0[\cos(\theta)]$$

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) &= \int \rho(r', \theta', \phi') G(r, \theta, \phi) dV - \frac{1}{4\pi} \oint \psi(r, \theta, \phi) \frac{\partial G}{\partial n_y} dy \\ &= 2Q \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} \left[\frac{r'_<^l}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{r'_<r'_>}{a^2} \right)^l \right] \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^b \delta(r' - a) \delta(\theta' - \pi/2) \\ &\quad Y_{lm}^*(\theta', \phi') dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

8.36 Plano con semiesfera dieléctrica

Suponga un plano infinito conductor a tierra ($\psi = 0$) con una semiesfera dieléctrica de radio $r < a$ en el origen del plano conductor.

- Asuma un campo eléctrico asintótico uniforme E_0 en la dirección $-\hat{z}$ para $r \rightarrow \infty$. Encuentre el potencial en todo el espacio.
- Encuentre la función de Green para $r > a$.



Solución:

- Puesto que $m = 0$ por simetría azimutal, el potencial eléctrico tiene la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] Y_l^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ \sum_{l=0}^{\infty} [C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}] Y_l^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

deduciéndose que $B_l = 0$ tal que el potencial no diverge en $r = 0$. Por otro lado, se tiene un campo eléctrico constante asintótico E_0 en la dirección z (ver Figura), por lo que al usar la relación $\vec{E} = -\vec{\nabla}\psi$, se obtiene

$$\psi_{r \rightarrow \infty}(r, \theta, \phi) = - \int_z^0 E_0(-\hat{z}) \cdot dz' \hat{z} = -E_0 z = -E_0 r \cos(\theta)$$

Ahora, evaluando $r \rightarrow \infty$ en el potencial propuesto,

$$\psi_{r \rightarrow \infty}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l Y_l^0(\theta, \phi)$$

e igualando ambas expresiones

$$-E_0 r \cos(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l Y_l^0(\theta, \phi)$$

deduciéndose que $l = 1$ (de manera que calcen los exponentes de r), luego se escribe

$$r C_1 Y_1^0(\theta, \phi) = -r E_0 \cos(\theta)$$

Usando que

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta),$$

se concluye el valor de la constante

$$C_1 = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0$$

Reescribiendo el potencial para $l = 1$ se obtiene

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} r A_1 Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ [r C_1 + r^{-2} D_1] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

y por continuidad en $r = a$,

$$A_1 = C_1 + a^{-3} D_1$$

con lo que se vuelve a reescribir

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} [r C_1 + a^{-3} r D_1] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ [r C_1 + r^{-2} D_1] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

Puesto que en dieléctricos la componente paralela de la corriente de desplazamiento \vec{D} es continua, es decir

$$\left(\vec{D}_{out} \Big|_{r=a} - \vec{D}_{in} \Big|_{r=a} \right) \cdot \hat{r} = 0$$

y usando que $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = -\epsilon \vec{\nabla} \psi$, con ϵ la constante dieléctrica, se tiene que solo sobreviven las componentes del gradiente paralelas a \hat{r} (las derivadas respecto a r), así

$$\begin{aligned} 0 &= (C_1 - 2D_1 a^{-3}) Y_1^0(\theta, \phi) - \epsilon (C_1 + D_1 a^{-3}) Y_1^0(\theta, \phi) \\ &= C_1 - \epsilon C_1 - 2D_1 a^{-3} - \epsilon D_1 a^{-3} \\ &= -C_1(\epsilon - 1) - D_1 a^{-3}(\epsilon + 2) \end{aligned}$$

y despejando la constante D_1 se concluye

$$D_1 = -C_1 a^3 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)$$

y el potencial eléctrico queda

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} rC_1 \left[1 - \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ rC_1 \left[1 - \frac{a^3}{r^3} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

o, pegando las soluciones,

$$\psi(r, \theta, \phi) = rC_1 \left[1 - \frac{a^3}{r^3} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right] Y_1^0(\theta, \phi)$$

Usando los valores de C_1 e $Y_1^0(\theta, \phi)$ se obtiene

$$\psi(r, \theta, \phi) = -rE_0 \cos(\theta) \left[1 - \frac{a^3}{r^3} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right]$$

b) La función de Green para una esfera en el vacío es

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \left(\frac{r'_<}{r'_>} \right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi)$$

pero al tenerse dos espacios separados por el dieléctrico, se escribe

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi) \Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1)} \begin{cases} \frac{A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}}{r'_>} & \text{si } r < a \\ \frac{r'_< + C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-(l+1)}}{r'_>} & \text{si } r > a \end{cases}$$

donde el término $r'_< r'^{-(l+1)}$ aparece solo fuera del dieléctrico puesto que dentro se tienen cargas libres que cumplen con la ecuación de Laplace (la densidad de carga se considera por fuera de la superficie). También es importante mencionar que, al ser una semiesfera, los armónicos esféricos deben cumplir con las condiciones angulares $\psi(\theta = 0) = \psi(\theta = \pi) = 0$, lo que obliga a redefinir los armónicos esféricos modificados

$$\Omega_{lm}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi) \sin(\theta) \quad \Omega_{lm}^*(\theta', \phi') = Y_{lm}^*(\theta', \phi') \sin(\theta')$$

que cumplen las condiciones de borde angulares. Nuevamente, es inmediato que $B_{lm} = 0$ tal que no diverge en $r = 0$ y $C_{lm} = 0$ tal que no diverge en $r \rightarrow \infty$, así

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi)\Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1)} \begin{cases} A_{lm}r^l & \text{si } r < a \\ \frac{r'_<}{r'^{l+1}} + D_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r > a \end{cases}$$

Por continuidad en $r = a$ se escribe

$$A_{lm} = \frac{1}{r'^{l+1}} + \frac{D_l}{a^{2l+1}}, \quad (8.75)$$

mientras que de la continuidad en la componente paralela de la corriente de desplazamiento \vec{D} se deduce la relación

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\left(-\frac{\partial G_{\text{out}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} - \left(-\frac{\partial G_{\text{in}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \right] \cdot \hat{r} \\ &= \left(\frac{\partial G_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \frac{\partial G_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} \right) \cdot \hat{r} \\ &= l\varepsilon A_{lm}a^{l-1} - \left[\frac{la^{l-1}}{r'^{l+1}} - (l+1)\frac{D_{lm}}{a^{l+2}} \right] \end{aligned}$$

o, reescribiéndolo,

$$\varepsilon A_{lm} = \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{(l+1)D_{lm}}{la^{2l+1}}. \quad (8.76)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones compuesto por la Ec. (8.75) y la Ec. (8.76) se obtiene

$$\begin{aligned} A_{lm} &= \frac{2l+1}{r'^{l+1}[l(\varepsilon+1)+1]}, \\ D_{lm} &= -\frac{la^{2l+1}(\varepsilon-1)}{r'^{l+1}[l(\varepsilon+1)+1]}, \end{aligned}$$

luego la función de Green para $r < a$ será

$$G_{r<a}(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi)\Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{[l(\varepsilon+1)+1]} \left(\frac{r'^l}{r'^{l+1}} \right)$$

y para $r > a$ será

$$G_{r>a}(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi)\Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1)} \left[\frac{r'_<}{r'^{l+1}} - \left(\frac{1}{r'^{l+1}} \right) \frac{la^{2l+1}(\varepsilon-1)}{r'^{l+1}[l(\varepsilon+1)+1]} \right]$$

8.37 Plasma

Un medio dieléctrico consistente en cargas libres positivas y negativas (un plasma) responde a los campos eléctricos suavemente variables en el espacio, manteniendo el equilibrio térmico, de manera que

$$n_i(z) \approx n_{i0} \exp \left[-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right]$$

donde $\Phi(z)$ es el potencial electrostático, T es la temperatura, q_i es la carga de la partícula i y n_{i0} es la densidad de la partícula i cuando $\Phi(z) = 0$, expresada en cantidad de partículas por unidad de volumen.

a) Demuestre que si el potencial es pequeño, la densidad de carga neta está dada por

$$\rho(z) = -\frac{\Phi(z)}{4\pi\lambda^2} \quad \frac{1}{\lambda^2} = 4\pi \sum_i \frac{n_{i0} q_i^2}{k_B T}$$

b) Suponga que un electrodo con forma de plano infinito con densidad de carga σ se inserta en el plasma en $z = 0$. Calcule el potencial $\Phi(z)$ en ambos lados del electrodo.

c) ¿Qué condición debe cumplir σ tal que la solución sea válida?

d) Encuentre la densidad de polarización \vec{P} para este plasma.

Solución:

a) La densidad de carga de un material viene dada, en general, por la expresión

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

con Q la carga encerrada en un volumen V . Esto implica que se puede escribir

$$\rho(z) = \sum_i q_i n_i(z)$$

donde n_i se define como la cantidad de partículas por unidad de volumen. De la aproximación en el enunciado se deduce que

$$\rho(z) \approx \sum_i q_i n_{i0} \exp \left[-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right]$$

y expandiendo en series de Taylor en torno a $z = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(z) &\approx \sum_i q_i n_{i0} \left[1 - \frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right] \\ &= \sum_i q_i n_{i0} - \sum_i \frac{q_i^2 n_{i0} \Phi(z)}{k_B T} \end{aligned}$$

Ahora, el primer término corresponde a la densidad de carga del plasma cuando $\Phi(z) = 0$, ya que n_{i0} es la densidad de la partícula i cuando $\Phi(z) = 0$, pero al ser cargas libres (no interactúan entre sí, por lo que no hay un potencial interno), la densidad de carga se anula y el primer término es cero. Otra forma de convencerse de que n_{i0} es la densidad de partículas cuando $\Phi(z) = 0$ es que el primer término corresponde a $\rho(z)$ cuando el argumento de la exponencial es cero (tal que su valor sea uno), luego

$$\exp \left[-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right] = 1$$

y aplicando el logaritmo natural,

$$-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} = 0$$

pero $q_i \neq 0$ (puesto que solo hay cargas positivas y negativas), $T \neq 0$ (puesto que no se puede alcanzar el cero absoluto) y $k_B \neq 0$ (puesto que es la constante de Boltzmann con valor aproximado $\sim 1.38 \times 10^{-23} [\text{J K}^{-1}]$), luego cuando la cantidad de partículas por unidad de volumen del plasma es n_{i0} , se cumple que $\Phi(z) = 0$ y como son cargas libres (no interactúan entre sí, por lo que no hay un potencial interno), se concluye nuevamente que

$$\sum_i q_i n_{i0} = 0$$

escribiéndose la densidad de carga

$$\begin{aligned} \rho(z) &= -\sum_i \frac{q_i^2 n_{i0} \Phi(z)}{k_B T} \\ &= -\frac{\Phi(z)}{4\pi\lambda^2} \end{aligned}$$

b) La introducción del electrodo (conductor eléctrico utilizado para hacer contacto con la parte no metálica de un circuito, por ejemplo, los electrodos en las baterías), divide el potencial en dos regiones, luego de la ecuación de Poisson en coordenadas rectangulares

$$\nabla^2 \Phi(z) = -4\pi\rho(z)$$

se deduce que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\Phi(z)}{\lambda^2}$$

ecuación diferencial con soluciones exponenciales de la forma

$$\Phi(z) = \begin{cases} Ae^{z/\lambda} + Be^{-z/\lambda} & \text{si } z < 0 \\ Ce^{z/\lambda} + De^{-z/\lambda} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

Puesto que el potencial (en ambas direcciones) debe cumplir que en $z \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow -\infty$) sea cero, se tiene que $B = 0$ (tal que la expresión no diverge en infinito) y $C = 0$ (mismo argumento), luego se escribe

$$\Phi(z) = \begin{cases} Ae^{z/\lambda} & \text{si } z < 0 \\ De^{-z/\lambda} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

De la continuidad en $z = 0$ se deduce que $A = D$, escribiéndose

$$\Phi(z) = \begin{cases} Ae^{z/\lambda} & \text{si } z < 0 \\ Ae^{-z/\lambda} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

De la discontinuidad en el campo se tiene que

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial \Phi_>}{\partial z} \right|_{z=0} = 4\pi\sigma$$

y reemplazando la solución del potencial se obtiene

$$\frac{2A}{\lambda} = 4\pi\sigma,$$

luego el potencial queda

$$\Phi(z) = \begin{cases} 2\pi\lambda\sigma e^{z/\lambda} & \text{si } z < 0 \\ 2\pi\lambda\sigma e^{-z/\lambda} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

c) La solución fue obtenida bajo la premisa de que la expansión

$$e^x \approx 1 + x + \dots$$

es válida, lo cual solo ocurre para $x \ll 1$, luego

$$-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \ll 1$$

y reemplazando el potencial (considerando $z = 0$, donde se hizo la expansión)

$$2\pi\lambda\sigma \gg \frac{k_B T}{q_i},$$

por lo que la condición tal que la solución sea válida es

$$\sigma \gg \frac{k_B T}{2\pi\lambda q_i}$$

d) El plasma siente la contribución del campo eléctrico producto del electrodo, que debido al comportamiento dieléctrico del plasma (con $\epsilon \sim 1$ debido a que, esencialmente, se tiene solo vacío y con la gran suposición de que la constante dieléctrica del plasma no depende del tiempo ni la temperatura), viene dado por la expresión

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ &= 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) \hat{z} \end{aligned}$$

mientras que el campo eléctrico debido al potencial aplicado sobre el plasma es

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) e^{z/\lambda} & \text{si } z < 0 \\ 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) e^{-z/\lambda} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

por lo que la polarización del plasma será

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi} [\vec{D} - \vec{E}]$$

y separando por regiones, para $z > 0$ se tiene

$$\vec{P}_> = \frac{\operatorname{sgn}(z)}{4\pi} [2\pi\sigma - 2\pi\sigma e^{-z/\lambda}] \hat{z} = \frac{\sigma}{2} (1 - e^{-z/\lambda}) \hat{z}$$

y para $z < 0$ se tiene

$$\vec{P}_< = \frac{\text{sgn}(z)}{4\pi} \left[2\pi\sigma - 2\pi\sigma e^{z/\lambda} \right] \hat{z} = -\frac{\sigma}{2} \left(1 - e^{z/\lambda} \right) \hat{z}$$

es decir,

$$\vec{P} = \text{sgn}(z) \frac{\sigma}{2} \left[1 - e^{-\text{sgn}(z)z/\lambda} \right] \hat{z}$$

8.38 Semiesfera dipolar

Sea una semiesfera de radio $r = a$ hecha de material dipolar eléctrico permanente y puesto sobre un conductor plano infinito. La dirección de \vec{P} es perpendicular a la superficie del conductor. Calcule el campo eléctrico \vec{E} producido por esta configuración.



Figure 8.13: (a) Semiesfera con \vec{P} constante

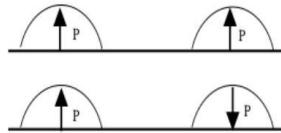


Figure 8.14: (b) Posibles configuraciones

Solución:

El potencial general para una configuración esférica tiene la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \left[A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right]$$

donde $\Omega_l^m(\theta, \phi)$ es el armónico esférico modificado dado por

$$\Omega_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) \sin(\phi)$$

tal que se cumplan las condiciones angulares $\psi(\phi = 0) = \psi(\phi = \pi) = 0$ (que es donde la semiesfera hace contacto con el plano conductor). Notar que se piensa la semiesfera como si estuviese posicionada en el plano $x - z$, luego tanto θ como ϕ quedan en el intervalo $[0, \pi]$. Dividiendo el potencial en ambas regiones (dentro y fuera de la semiesfera)

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r < a \\ C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > a \end{cases}$$

donde $B_{lm} = 0$ tal que el potencial no diverge en $r = 0$ y $C_{lm} = 0$ tal que el potencial no diverge en $r \rightarrow \infty$, escribiéndose entonces

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < a \\ D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > a \end{cases}$$

De la continuidad del potencial en $r = a$ se deduce que

$$D_{lm} = A_{lm} a^{2l+1}$$

y reemplazando en la solución se tiene

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < a \\ A_{lm} \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} & \text{si } r > a \end{cases}$$

La condición de material dipolar establece que existe una discontinuidad en la componente paralela de la corriente de desplazamiento \vec{D} igual a 4π veces el vector de densidad de polarización \vec{P} , luego

$$\left(\vec{D}_{out} \Big|_{r=a} - \vec{D}_{in} \Big|_{r=a} \right) \cdot \hat{r} = 4\pi \vec{P} \cdot \hat{r}$$

Puesto que en este caso $\vec{D} = -\vec{\nabla} \psi$, se escribe

$$\frac{\partial \psi_{in}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \frac{\partial \psi_{out}}{\partial r} \Big|_{r=a} = 4\pi \vec{P} \cdot \hat{r}$$

luego, como el vector unitario \hat{r} de la configuración esférica es

$$\hat{r} = \sin(\phi) \cos(\theta) \hat{x} + \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{y} + \cos(\phi) \hat{z}$$

y el vector de densidad de polarización es perpendicular a la superficie tal que

$$\vec{P} = P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \hat{y}$$

donde P es la magnitud de la polarización y las cantidades ϕ_0 y θ_0 son los ángulos de la polarización del material (notar que las tres cantidades son constantes, puesto que la polarización del material dipolar es permanente), la condición dipolar queda

$$\Omega_l^m(\theta, \phi) \left[A_{lm} l a^{l-1} + (l+1) A_{lm} a^{l-1} \right] = 4\pi P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \sin(\phi) \cos(\theta)$$

Usando que

$$\Omega_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) \sin(\phi)$$

se deduce que $l = 1$ y $m = 0$ tal que se pueda escribir

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$$

obteniéndose la igualdad

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} [A_1^0 + 2A_1^0] = 4\pi P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0)$$

luego la constante es

$$A_1^0 = \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0)$$

y el potencial eléctrico queda

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta) \sin(\phi) \begin{cases} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) r & \text{si } r < a \\ \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \frac{a^3}{r^2} & \text{si } r > a \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{4\pi}{3} P \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \left(\frac{r_-^3}{r^2} \right)$$

con $r_- = \min(r, a)$. Finalmente, puesto que en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{\phi} = 0$$

para el campo eléctrico exterior se obtiene

$$\vec{E}_> = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) [2 \sin(\phi) \cos(\theta) \hat{r} + \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{\theta} - \cot(\theta) \cos(\phi) \hat{\phi}],$$

mientras que para el campo interior se escribe

$$\vec{E}_< = -\frac{4\pi}{3} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) [\sin(\phi) \cos(\theta) \hat{r} - \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{\theta} + \cot(\theta) \cos(\phi) \hat{\phi}].$$

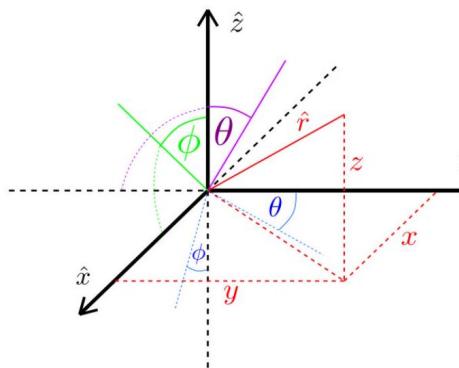


Figure 8.15: Nueva configuración esférica tras “posicionar” la semiesfera en el plano $x - z$ (azul para los ejes originales tras pasar al plano $x - z$, verde para el nuevo eje ϕ) y morado para el eje θ .

8.39 Campos radiados por mitades de una esfera

Dos mitades de una esfera de radio R tienen un voltaje opuesto $V(t) = \pm V_0 \cos(\omega t)$. En el límite de grandes longitudes de onda, encuentre los campos radiados, la distribución angular de poder radiado y todo el poder radiado por la esfera.

Solución:

Puesto que se tiene simetría azimutal, el potencial eléctrico puede escribirse de la forma

$$\Phi(r, \theta) = e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l[\cos(\theta)] H_l^{(1)}(kr)$$

donde A_l es una constante, P_l son los polinomios de Legendre y H_l las funciones de Hankel de primer tipo. Notar que se escribe la dependencia temporal como una exponencial por simplicidad, la dependencia angular (que debiese corresponder a armónicos esféricos) se reduce al polinomio de Legendre por una constante debido a que $m = 0$ por simetría azimutal y la dependencia radial corresponde a la función de Hankel, que denota el hecho de que la esfera está radiando hacia el infinito en dirección radial. Debido a este análisis, las condiciones de borde pasan a ser

$$\begin{aligned}\Phi(r = R, \theta < \pi/2) &= V_0 e^{-i\omega t} \\ \Phi(r = R, \theta > \pi/2) &= -V_0 e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

Puesto que $\cos(\theta) > 0$ si $\theta < \pi/2$ y $\cos(\theta) < 0$ si $\theta > \pi/2$, es irrelevante dónde se evalúan estas condiciones, puesto que los signos se anularán de todas formas (recordar que por la paridad de los polinomios de Legendre, se puede sacar el signo). De esta manera, usando la condición de ortogonalidad de los polinomios asociados de Legendre

$$\int_0^\pi P_l[\cos(\theta)] P_{l'}[\cos(\theta)] \sin(\theta) d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

se llega a que

$$\begin{aligned}V_0 e^{-i\omega t} \int_0^\pi P_l[\cos(\theta)] \sin(\theta) d\theta &= e^{-i\omega t} A_l H_l^{(1)}(kR) \int_0^\pi P_l[\cos(\theta)] P_l[\cos(\theta)] \sin(\theta) d\theta \\ V_0 e^{-i\omega t} \int_0^1 P_l(x) dx &= e^{-i\omega t} \left(\frac{2}{2l+1} \right) A_l H_l^{(1)}(kR) \\ V_0 \left[\frac{P_{l-1}(x)}{l+1} \right] &= \left(\frac{2}{2l+1} \right) A_l H_l^{(1)}(kR)\end{aligned}$$

concluyéndose que

$$A_l = \frac{V_0}{H_l^{(1)}(kR)} \left[\frac{(2l+1)P_{l-1}(x)}{2(l+1)} \right].$$

Con esto, el potencial queda de la forma

$$\Phi(r, \theta) = V_0 e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} P_l[\cos(\theta)] \frac{H_l^{(1)}(kr)}{H_l^{(1)}(kR)} \left[\frac{(2l+1)P_{l-1}(x)}{2(l+1)} \right]$$

y como en la aproximación para grandes longitudes de onda, se tiene que $r \ll \lambda$, luego $kr \ll 1$, se puede escribir

$$H_l^{(1)}(kr \ll 1) \sim \frac{1}{(kr)^{l+1}}$$

con lo cual el potencial se reescribe como

$$\Phi(r, \theta) = V_0 e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} P_l[\cos(\theta)] \frac{R^{l+1}}{r^{l+1}} \left[\frac{(2l+1)P_{l-1}(x)}{2(l+1)} \right]$$

Para simplificar el problema, se busca la potencia radiada a distancias cercanas dada por $l = 1$, luego se llega a que

$$\Phi(r, \theta) = V_0 \frac{3R^2}{4r^2} e^{-i\omega t} \cos(\theta)$$

y por analogía con el potencial para un dipolo eléctrico (escogiendo \vec{r} en la dirección \hat{z} , sin perder generalidad), dado por la expresión

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{p}{r^2} \cos(\theta)$$

se deduce que el momento dipolar del sistema es

$$\vec{p} = V_0 \frac{3R^2}{4} e^{-i\omega t} \hat{z}.$$

Ahora, considerando que en coordenadas esféricas

$$\hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta},$$

el campo magnético vendrá dado por

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{k^2}{r} e^{ikr} (\hat{r} \times \vec{p}) \\ &= V_0 k^2 \frac{3R^2}{4r} e^{i(kr - \omega t)} (\hat{r} \times [\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}]) \\ &= -V_0 k^2 \frac{3R^2}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \sin(\theta) \hat{\phi} \end{aligned}$$

mientras que el campo eléctrico será

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{B} \times \hat{r} \\ &= -V_0 k^2 \frac{3R^2}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \sin(\theta) \hat{\phi} \times \hat{r} \\ &= -V_0 k^2 \frac{3R^2}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \sin(\theta) \hat{\theta}. \end{aligned}$$

Conociendo el campo electromagnético, el vector de Poynting queda de la forma

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi r^2} \sin^2(\theta) e^{i(kx - \omega t)} \cdot e^{-i(kr - \omega t)} \hat{\theta} \times \hat{\phi} \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi r^2} \sin^2(\theta) \hat{r}
\end{aligned}$$

por lo que la distribución angular de poder radiado será

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial \Omega} &= r^2 \vec{S} \cdot \hat{r} \\
&= r^2 \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi r^2} \sin^2(\theta) \hat{r} \cdot \hat{r} \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi} \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

Finalmente, integrando respecto al ángulo sólido se obtiene el poder radiado por la esfera

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi} \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta d\phi \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{32} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{32} \left(\frac{4}{3} \right) \\
&= \frac{3V_0^2 k^4 R^4 c}{8} \\
&= \frac{3V_0^2 \omega^4 R^4}{8c^3}
\end{aligned}$$

8.40 Dinámica del plasma

Considere un plasma estacionario de electrones y protones de densidad n_0 en un campo magnético B_0 en dirección x entre dos conductores perfectos. Así, dado un campo eléctrico y magnético, se tiene la ecuación de movimiento para electrones y protones

$$mn \frac{d\vec{v}}{dt} = qn \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

a) Demuestre que la evolución para la velocidad del centro de masas \vec{U} está dada por

$$v \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$$

con v la densidad de masa, ρ la densidad de carga y \vec{J} la densidad de corriente. Use que en un plasma $n_e = n_p = n_0 \sim \text{cte}$, luego $\rho = \text{cte}$.

b) Dado que para velocidades no relativistas la corriente de desplazamiento no contribuye a la ecuación de Ampère, es decir,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

se encuentra la expresión para la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \right)$$

con σ la conductividad eléctrica del plasma, ¿Bajo qué condiciones tiene esto sentido? Recorriendo que en el sistema de referencia de las partículas $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, Cuál es la ecuación para \vec{E} , dado que la conductividad es extremadamente alta en un plasma?

c) Utilice la ecuación de Faraday para encontrar las ecuaciones acopladas de \vec{U} y \vec{B} . d) Asuma una pequeña perturbación de la forma $\vec{B} = B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y}$ y $\vec{U} = \vec{U}_1 = (U_{1x}, U_{1y}, U_{1z})$. Tome \vec{U}_1 y \vec{B}_1 muy pequeños. Linealice las ecuaciones (términos cuadráticos son irrelevantes) y encuentre la ecuación de onda que satisface \vec{B}_1 . Relacione \vec{U}_1 con \vec{B}_1 . Exprese su resultado en términos de la velocidad de Alfvén

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi mn}$$

e) Tomemos una distancia L en x , ¿Qué modos son posibles en x , considerando las condiciones de borde? Encuentre la relación de dispersión y las soluciones para ω .

Solución:

a) Por definición, el centro de masas viene dado por la expresión

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i (m_{e_i} \vec{r}_{e_i} + m_{p_i} \vec{r}_{p_i})}{\sum_i (m_{e_i} + m_{p_i})}$$

de manera que la velocidad del centro de masas es

$$\vec{U} = \frac{\sum_i (m_{e_i} \vec{v}_{e_i} + m_{p_i} \vec{v}_{p_i})}{\sum_i (m_{e_i} + m_{p_i})}.$$

Por otro lado, puesto que para este plasma $n_i = n_e = n_0 \sim \text{cte}$, la densidad de masa será

$$v = n_0 \sum_i (m_{e_i} + m_{p_i}),$$

mientras que la densidad de carga será

$$\rho = n_0 \sum_i (q_{e_i} + q_{p_i})$$

y la densidad de corriente queda

$$\vec{J} = n_0 \sum_i (q_{e_i} \vec{v}_{e_i} + q_{p_i} \vec{v}_{p_i})$$

La ecuación de movimiento para los electrones es

$$m_{e_i} n_0 \frac{d\vec{v}_{e_i}}{dt} = q_{e_i} n_0 \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_{e_i}}{c} \times \vec{B} \right)$$

mientras que para los iones se tiene

$$m_{p_i} n_0 \frac{d\vec{v}_{p_i}}{dt} = q_{p_i} n_0 \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_{p_i}}{c} \times \vec{B} \right)$$

luego la ecuación de movimiento del plasma será

$$n_0 \sum_i \left(m_{e_i} \frac{d\vec{v}_{e_i}}{dt} + m_{p_i} \frac{d\vec{v}_{p_i}}{dt} \right) = n_0 \sum_i (q_{e_i} + q_{p_i}) \vec{E} + \frac{n_0}{c} \sum_i (q_{e_i} \vec{v}_{e_i} + q_{p_i} \vec{v}_{p_i}) \times \vec{B}$$

Multiplicando el uno conveniente $\sum_i (m_{e_i} + m_{p_i})$ en el primer término y reemplazando las correspondientes densidades, se llega a la expresión

$$\nu \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$$

b) En el sistema solidario al plasma $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ debido a que $\vec{U} = 0$, pero al pasar al laboratorio, la densidad de corriente sufre una corrección relativista de manera que

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Si la conductividad del plasma es extremadamente alta, tal que $\sigma \rightarrow \infty$, entonces $\vec{J} \rightarrow \infty$, pero esto no puede suceder, puesto que la condición implica que las cargas en el plasma viajan a velocidades infinitas, lo cual obviamente no es cierto. De esta manera, la expresión que multiplica a la conductividad debe compensar volviéndose cercana a cero, es decir,

$$\vec{E} + \frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \approx 0$$

obteniéndose la relación para el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B}$$

c) De la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

y usando que

$$\vec{E} = -\frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \quad (8.77)$$

tal que (aplicando el rotor)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B})$$

se obtiene la relación

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B}), \quad (8.78)$$

que corresponde a la primera ecuación acoplada. Por otro lado, de la ley de Ampère

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

al reemplazar, junto a la Ec. (8.77), en la ecuación de movimiento se llega a que

$$\nu \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{\rho}{c} \vec{U} \times \vec{B} \quad (8.79)$$

la cual corresponde a la segunda ecuación acoplada.

d) Se tienen las perturbaciones

$$\vec{B} = B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y} \quad \vec{U}_1 = U_{1x} \hat{x} + U_{1y} \hat{y} + U_{1z} \hat{z}$$

y reemplazando en la Ec. (8.78) se obtiene

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} \hat{y} = \vec{\nabla} \times (\vec{U}_1 \times \vec{B}_0 \hat{x}), \quad (8.80)$$

puesto que

$$\frac{\partial B_0}{\partial t} \hat{x} = 0 \quad \vec{\nabla} \times (\vec{U}_1 \times B_1 \hat{y}) \sim 0$$

De igual manera, para la segunda relación se tiene

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\nu} [\vec{\nabla} \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y})] \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y}) - \frac{\rho}{\nu c} \vec{U}_1 \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y})$$

y, debido a que $B_1 \ll 1$, se approxima

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\nu} [\vec{\nabla} \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y})] \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y}) &\approx \frac{1}{4\pi\nu} (\vec{\nabla} \times B_1 \hat{y}) \times B_0 \hat{x} \\ \frac{\rho}{\nu c} \vec{U}_1 \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y}) &\approx \frac{\rho}{\nu c} \vec{U}_1 \times B_0 \hat{x} \end{aligned}$$

con lo que la ecuación queda

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\nu} (\vec{\nabla} \times B_1 \hat{y}) \times B_0 \hat{x} - \frac{\rho}{\nu c} \vec{U}_1 \times B_0 \hat{x}$$

Considerando un plasma neutro, se tiene que $\rho \sim 0$, luego

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\nu} (\vec{\nabla} \times B_1 \hat{y}) \times B_0 \hat{x}$$

y notando que

$$\vec{\nabla} \times B_1 \hat{y} = \frac{\partial B_1}{\partial x} \hat{z} - \frac{\partial B_1}{\partial z} \hat{x}$$

la ecuación adquiere la forma

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi v} \frac{\partial B_1}{\partial x} \hat{y}. \quad (8.81)$$

Derivando respecto al tiempo la Ec. (8.80), se llega a que

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2} \hat{y} = B_0 \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} \times \hat{x} \right)$$

y reemplazando la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2} \hat{y} &= -\frac{B_0^2}{4\pi v} \vec{\nabla} \times \frac{\partial B_1}{\partial x} \hat{z} \\ &= -v_A^2 \vec{\nabla} \times \frac{\partial B_1}{\partial x} \hat{z} \end{aligned}$$

pero es inmediato que

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial B_1}{\partial x} \hat{z} = \frac{\partial^2 B_1}{\partial y \partial x} \hat{x} - \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} \hat{y}$$

luego la expresión queda

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2} \hat{y} = v_A^2 \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} \hat{y} - \frac{\partial^2 B_1}{\partial y \partial x} \hat{x} \right)$$

identificándose la ecuación de onda para la componente transversal

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} = 0.$$

Puesto que B_1 cumple con la ecuación de onda, se tiene que

$$\vec{\nabla} \rightarrow ik \quad \partial_t \rightarrow -i\omega$$

luego la ecuación de onda queda

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2) B_1 e^{i(kx - \omega t)} = 0$$

deduciéndose la relación de dispersión

$$\omega^2(k) = k^2 v_A^2$$

Para resolver la ecuación de onda, se supone

$$B_1(x, t) = X(x) T(t)$$

tal que al reemplazar se tiene

$$X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - v_A^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0$$

lo cual puede reordenarse para obtener

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = v_A^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

de manera que es evidente

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0 \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0$$

Ambas expresiones son osciladores armónicos simples con solución

$$T(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$$

$$X(x) = \gamma \cos(kx) + \delta \sin(kx)$$

de manera que la solución a la ecuación de onda es

$$B_1(x, t) = [\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)][\gamma \cos(kx) + \delta \sin(kx)]$$

Reemplazando esto en la Ec. (8.81) se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} &= \frac{B_0}{4\pi\nu} \frac{\partial}{\partial x} ([\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)][\gamma \cos(kx) + \delta \sin(kx)]) \hat{y} \\ &= \frac{kB_0}{4\pi\nu} ([\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)][\delta \cos(kx) - \gamma \sin(kx)]) \hat{y} \end{aligned}$$

e integrando respecto al tiempo se obtiene

$$\vec{U}_1 = \left(\frac{k}{\omega} \right) \frac{B_0}{4\pi\nu} ([\alpha \sin(\omega t) - \beta \cos(\omega t)][\delta \cos(kx) - \gamma \sin(kx)]) \hat{y}$$

lo que permite deducir la relación

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \frac{B_0}{4\pi\nu} \hat{y} \int \frac{\partial B_1}{\partial x} dt \\ &= \frac{v_A^2}{B_0} \hat{y} \int \frac{\partial B_1}{\partial x} dt \end{aligned}$$

e) Volviendo a la solución

$$B_1(x, t) = [\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)][\gamma \cos(kx) + \delta \sin(kx)]$$

si se desea estudiar los modos de oscilación, se tiene que la onda debe satisfacer las condiciones de borde para una onda estacionaria en una cavidad, es decir,

$$B_1(x = 0, t) = 0 \quad B_1(x = L, t) = 0$$

De la condición $x = 0$ se llega a la expresión

$$B_1(x = 0, t) = \gamma[\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)] = 0$$

siendo inmediato que $\gamma = 0$. De igual manera, para $x = L$ se obtiene

$$B_1(x = L, t) = \delta \sin(kL)[\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)] = 0,$$

siendo directo que $k = n\pi/L$ con $n = 0, 1, 2, \dots$. La solución será entonces

$$B_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)]$$

obteniéndose los modos de oscilación del plasma

$$\omega_n(k) = kv_A = \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{B_0}{\sqrt{4\pi v}} = \frac{nB_0}{2L} \sqrt{\frac{\pi}{v}}$$

8.41 Propagación oblicua

Considere un plasma neutral compuesto de partículas cargadas, donde solo las partículas de carga negativa se mueven en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$. Para el caso de propagación oblicua $\vec{k} = k[\sin(\theta), 0, \cos(\theta)]$, encuentre la matriz A que satisface $A\vec{E} = 0$.

Solución:

Sean perturbaciones de la forma

$$\begin{aligned}\vec{B} &= B_0\hat{z} + \vec{B}_1 e^{i(kr - \omega t)} \\ \vec{E} &= \vec{E}_1 e^{i(kr - \omega t)} \\ \vec{v} &= \vec{v}_1 e^{i(kr - \omega t)}\end{aligned}$$

al reemplazar en la ecuación de movimiento del plasma se obtiene

$$m \frac{d}{dt} \left[\vec{v}_1 e^{i(kr - \omega t)} \right] = q \vec{E}_1 e^{i(kr - \omega t)} + \frac{q}{c} \left[\vec{v}_1 e^{i(kr - \omega t)} \right] \times \left[B_0\hat{z} + \vec{B}_1 e^{i(kr - \omega t)} \right]$$

y linealizando la ecuación

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + \frac{qB_0}{c} \vec{v} \times \hat{z}$$

Puesto que

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} \quad \vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$$

al separar por componentes se escribe

$$\begin{aligned}-i\omega v_x &= \frac{q}{m} E_x + \Omega_e v_y \\ -i\omega v_y &= \frac{q}{m} E_y - \Omega_e v_x \\ -i\omega v_z &= \frac{q}{m} E_z\end{aligned}$$

o, escrito en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\frac{m}{q} \begin{pmatrix} i\omega & \Omega_e & 0 \\ -\Omega_e & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Ya que $\vec{J} = \rho \vec{v}$, se debe despejar la velocidad, luego se tiene la matriz inversa

$$\begin{pmatrix} i\omega & \Omega_e & 0 \\ -\Omega_e & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & -\frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/i\omega \end{pmatrix}$$

con lo que se escribe

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\frac{q}{m} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & -\frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

luego la densidad de corriente queda

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = -\frac{nq^2}{m} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & -\frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Recordando que $\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}$, se deduce

$$\overleftrightarrow{\sigma} = -\frac{nq^2}{m} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & -\frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/i\omega \end{pmatrix}$$

y usando que $q = -e$ y $\omega_p^2 = 4\pi n e^2 / m$, se obtiene

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \begin{pmatrix} -\frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ -\frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & -\frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/i\omega \end{pmatrix}$$

Para perturbaciones armónicas se tiene que

$$\vec{\nabla} \rightarrow ik \quad \partial_t \rightarrow -i\omega$$

luego de la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

se llega a la expresión

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B}$$

y aplicando el producto cruz

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{\omega}{c} \vec{k} \times \vec{B}$$

Por otro lado, de la ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

se escribe

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{4\pi i}{c} \vec{J} - \frac{\omega}{c} \vec{E},$$

por lo que al reemplazar en la ecuación anterior se llega a

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \vec{J} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

y usando la identidad vectorial y que $\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}$,

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \vec{\sigma} \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

Como $\vec{k} = k[\sin(\theta), 0, \cos(\theta)]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) &= k^2 [E_x \sin^2(\theta) + E_z \cos(\theta) \sin(\theta), 0, E_x \cos(\theta) \sin(\theta) + E_z \cos^2(\theta)] \\ k^2 \vec{E} &= k^2 (E_x, E_y, E_z) \end{aligned}$$

deduciéndose así

$$\begin{aligned} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) &= \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} \\ &= k^2 [E_x \sin^2(\theta) + E_z \cos(\theta) \sin(\theta) - E_x, 0, E_x \cos(\theta) \sin(\theta) + E_z \cos^2(\theta) - E_z] \\ &\quad + k^2 [E_x \cos(\theta) \sin(\theta) + E_z \cos^2(\theta) - E_z] \hat{z} \end{aligned}$$

o, de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} k_x \times (\vec{k} \times \vec{E})_x \\ k_y \times (\vec{k} \times \vec{E})_y \\ k_z \times (\vec{k} \times \vec{E})_z \end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) - 1 & 0 & \cos(\theta) \sin(\theta) \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos(\theta) \sin(\theta) & 0 & \cos^2(\theta) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix},$$

concluyéndose que

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = k^2 M \vec{E}$$

con M la matriz de senos y cosenos. Recordando que la expresión para el campo eléctrico es

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

se escribe la igualdad

$$(k^2 c^2 M + 4\pi i \omega \overleftrightarrow{\sigma} + \omega^2) \vec{E} = 0$$

obteniéndose finalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2 \omega_p^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} + \omega^2 - k^2 c^2 \cos^2(\theta) & i \frac{\Omega_e \omega \omega_p^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} & k^2 c^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ -i \frac{\Omega_e \omega \omega_p^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{\omega^2 \omega_p^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} + \omega^2 - k^2 c^2 & 0 \\ k^2 c^2 \cos(\theta) \sin(\theta) & 0 & \omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

tal que se satisface $A\vec{E} = 0$.

8.42 Rayo hacia la ionósfera

Resuelva el problema de un rayo que parte de la tierra hacia la ionósfera en forma oblicua, asumiendo una densidad de electrones $n_e(z) = n_0 z e^{-\frac{(z-10)^2}{4}}$. ¿Qué frecuencias se escapan?

Solución:

Sea

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)] \quad (8.82)$$

que va ejercer una fuerza sobre las cargas de la ionósfera según:

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -e \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -e \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)]$$

integrando respecto a t ,

$$m_e \frac{d \mathbf{x}}{dt} = -\frac{e}{\omega} i \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)],$$

$$\implies \mathbf{v} = -\frac{ie}{m_e \omega} \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)]$$

Conociendo la velocidad de las cargas, podemos encontrar la corriente que genera este campo,

$$\mathbf{J} = -n_e(z) e \mathbf{v}$$

$$\mathbf{J} = \frac{ie^2 n_e(z)}{m_e \omega} \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)] \quad (8.83)$$

Tenemos la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (8.84)$$

Por lo tanto, reemplazando (8.82) y (8.83) en Ec. (8.84)

$$(ik)^2 \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)] - \frac{(i\omega)^2}{c^2} \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)] = \frac{4\pi}{c^2} (-i\omega) \frac{ie^2 n_e(z)}{m_e \omega} \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)].$$

haciendo el producto punto con $\mathbf{E}_0 \exp[-i(kz - \omega t)]$, nos queda

$$\begin{aligned} -k^2 E_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} E_0^2 &= \frac{4\pi}{c^2} \frac{e^2 n_e(z)}{m_e} E_0^2, \\ \implies k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$\omega_p^2 \equiv \frac{4\pi e^2}{m_e} n_e(z)$$

como la frecuencia del plasma.

Luego $k = n\omega/c$, donde n es el índice de refracción, vemos que el índice de refracción de un plasma está dado por

$$\begin{aligned} n^2 \frac{\omega^2}{c^2} &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \\ n^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Notamos que, si n es imaginario, la exponencial que compone el campo eléctrico quedaría real decreciente, lo que identifica que el campo no se propagaría. Las frecuencias que se propagan entonces, son las que dejan a n como número real, esto es

$$\boxed{\omega > \omega_p.}$$

8.43 Plasma no magnetizado

Agregaremos el efecto de la temperatura en la relación de dispersión de ondas propagándose en un plasma no magnetizado. Por simplicidad supondremos que los iones del plasma no se mueven, y que toda la dinámica está concentrada en los electrones. Además supondremos que la presión de los electrones, P_e , está relacionada con su densidad, n_e , a través de la siguiente ecuación de estado:

$$P_e = P_{e,0} \left(\frac{n_e}{n_{e,0}} \right)^\gamma$$

donde el subíndice 0 indica "valor inicial" y γ es el índice politrópico de los electrones.

- a) Muestre que las transformadas de Fourier del campo eléctrico y de la velocidad promedio de los electrones $\tilde{\vec{E}}$ y $\tilde{\vec{U}_e}$ así como de las perturbaciones a la densidad y presión de los electrones (\tilde{n}_e y \tilde{p}_e) satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\omega \tilde{n}_e &= n_{e,0} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e, \\ im_e n_{e,0} \omega \tilde{\vec{U}}_e &= n_{e,0} |e| \tilde{\vec{E}} + i \vec{k} \tilde{P}_e, \\ \tilde{P}_e &= m_e c_e^2 \gamma \tilde{n}_e,\end{aligned}$$

donde ω y \vec{k} son la frecuencia y vector de onda de los modos de Fourier, m_e y $|e|$ son la masa y módulo de la carga de los electrones, y c_e^2 es el cuadrado de la “velocidad del sonido” de los electrones, definida por $c_e^2 = k_B T_{e,0} / m_e$ (k_B es la constante de Boltzmann y $T_{e,0}$ es la temperatura inicial de los electrones).

Solución:

De la mecánica estadística es bien sabido que γ está determinado por el número de grados de libertad, f , y viene dado por

$$\gamma = \frac{f+2}{f}$$

En la literatura de dinámica de fluidos y astrofísica, el parámetro γ a veces se denomina índice politrópico.

Para una onda de amplitud pequeña, asumimos que estas cantidades consisten en un término de orden cero espacialmente uniforme más una pequeña perturbación de primer orden. Las ecuaciones relevantes son entonces

$$P_e = P_{e,0} + P_{e,1}$$

$$n_e = n_{e,0} + n_{e,1}$$

$$\vec{U}_e = \vec{U}_{e,1}$$

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{e,1}$$

donde se asume que la velocidad y el campo eléctrico de orden cero, son cero. Las ecuaciones que se deben resolver son:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{U}_e) = 0 \quad (8.85)$$

Ecuación de momento:

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \vec{U}_e}{\partial t} + (\vec{U}_e \cdot \nabla) U_e \right] = n_e e \vec{E} - \nabla P_e \quad (8.86)$$

Ecuación de estado adiabática:

$$P_e = P_{e,0} \left(\frac{n_e}{n_{e,0}} \right)^\gamma \quad (8.87)$$

Para las transformadas de Fourier utilizamos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \rightarrow -i\omega \tilde{f}$$

$$\nabla f \rightarrow i\vec{k}\tilde{f}$$

Luego linealizando y haciendo transformada de Fourier:

Para la ecuación (8.85):

$$-i\omega \tilde{n}_e + i\vec{k}((n_{e,0} + n_{e,1})\tilde{\vec{U}}_{e,1}) = 0$$

aquí $n_{e,1}\tilde{\vec{U}}_{e,1}$ es cero, porque es un término de segundo orden al ser producto de dos de primer orden. Finalmente nos queda:

$$\boxed{\omega \tilde{n}_e = n_{e,0}\vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e} \quad (8.88)$$

Para la ecuación (8.86):

$$m_e(n_{e,0} + n_{e,1}) \left[\frac{\partial \vec{U}_{e,1}}{\partial t} + (\vec{U}_{e,1} \cdot \nabla) U_{e,1} \right] = (n_{e,0} + n_{e,1}) e \vec{E}_1 - \nabla P_e$$

nuevamente, los términos de segundo orden serán despreciados. Así nos queda

$$m_e n_{e,0} (-i\omega) \tilde{\vec{U}}_e = n_{e,0} e |\vec{E}| \tilde{\vec{U}}_e - (-i\vec{k} \tilde{P}_e)$$

$$\boxed{i m_e n_{e,0} \omega \tilde{\vec{U}}_e = n_{e,0} |e| \vec{E} + i \vec{k} \tilde{P}_e} \quad (8.89)$$

Para la ecuación (8.87):

$$\tilde{P}_e = P_{e,0} \gamma \frac{\tilde{n}_e}{n_{e,0}}$$

multiplicando y dividiendo por la masa del electrón m_e

$$\tilde{P}_e = P_{e,0} \gamma \frac{\tilde{n}_e}{n_{e,0}} \frac{m_e}{m_e} \quad (8.90)$$

Luego como

$$C_e^2 = \frac{P_{e,0}}{m_e n_{e,0}} \quad (8.91)$$

Sustituyendo ec. (8.91) en (8.90)

$$\tilde{P}_e = m_e C_e^2 \gamma \tilde{n}_e \quad (8.92)$$

b) Demuestre que la relación de dispersión de las ondas transversales que se propagan en el plasma no se modifica debido a la temperatura de los electrones. ¿Por qué esto tiene sentido?

Solución:

Reescribimos la ecuación (8.89) como:

$$(-i\omega)m_e n_{e,0} \tilde{\vec{U}}_e = n_{e,0} e \tilde{\vec{E}} - i\vec{k} \tilde{P}_e \quad (8.93)$$

sustituyendo ec. (8.92) en (8.93)

$$(-i\omega)m_e n_{e,0} \tilde{\vec{U}}_e = n_{e,0} e \tilde{\vec{E}} - i\vec{k} m_e C_e^2 \gamma \tilde{n}_e \quad (8.94)$$

Luego despejamos \tilde{n}_e de la ecuación (8.88)

$$\tilde{n}_e = \frac{n_{e,0} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e}{\omega} \quad (8.95)$$

y reemplazamos ec. (8.95) en (8.94)

$$(-i\omega)m_e n_{e,0} \tilde{\vec{U}}_e = n_{e,0} e \tilde{\vec{E}} - i\vec{k} m_e C_e^2 \gamma \frac{n_{e,0} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e}{\omega} \quad (8.96)$$

cancelamos $n_{e,0}$ y reescribimos,

$$(-i\omega)m_e \tilde{\vec{U}}_e + i\vec{k} m_e C_e^2 \gamma \frac{\vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e}{\omega} = e \tilde{\vec{E}}$$

Factorizamos por $\tilde{\vec{U}}_e$, dividimos por $(-i\omega)m_e$ y reescribimos en forma matricial,

$$\left(\mathbf{1} - \gamma C_e^2 \frac{\vec{k} \vec{k}}{\omega^2} \right) \cdot \tilde{\vec{U}}_e = \frac{e}{(-i\omega)m_e} \tilde{\vec{E}} \quad (8.97)$$

Como el plasma es isotrópico, podemos suponer \vec{k}/\hat{z} . La ecuación anterior se puede escribir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ex} \\ \tilde{U}_{ey} \\ \tilde{U}_{ez} \end{bmatrix} = \frac{e}{(-i\omega)m_e} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} \quad (8.98)$$

Debemos despejar \tilde{U}_e para hallar la densidad de corriente. Esto se puede hacer invirtiendo la matriz del lado izquierdo, donde la matriz inversa \mathbf{A}^{-1} es dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{Adj}(\mathbf{A}^t) \quad (8.99)$$

Es sencillo ver que el determinante de la matriz \mathbf{A} es:

$$|\mathbf{A}| = 1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega^2}$$

También se obtiene fácilmente la traspuesta \mathbf{A}^t

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_{ex} \\ \tilde{U}_{ey} \\ \tilde{U}_{ez} \end{bmatrix} = \frac{e}{(-i\omega)m_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} \quad (8.100)$$

Para simplificar la notación, voy a llamar a

$$1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega^2} = \beta$$

Luego la adjunta de la traspuesta es

$$\text{Adj}(\mathbf{A}^t) = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la matriz inversa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega}} \end{bmatrix}$$

así nos queda

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_{ex} \\ \tilde{U}_{ey} \\ \tilde{U}_{ez} \end{bmatrix} = \frac{e}{-i\omega m_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} \quad (8.101)$$

Sabemos que la densidad de corriente es dada por:

$$\tilde{\vec{J}} = \sum_e n_{e,0} e \tilde{U}_e \quad (8.102)$$

usando (8.101) en (8.102)

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \\ \tilde{J}_z \end{bmatrix} = \sum_e \frac{n_{e,0} e^2}{-i\omega m_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\gamma C_s^2 \frac{k^2}{\omega}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\vec{J}} = \sigma \cdot \tilde{\vec{E}} \quad (8.103)$$

identificamos que el tensor de conductividad σ es

$$\sigma = \sum_e \frac{n_{e,0} e^2}{-i\omega m_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\gamma C_s^2 \frac{k^2}{\omega}} \end{bmatrix}$$

luego el tensor dieléctrico \mathbf{K} es dado por

$$\mathbf{K} = \mathbf{1} - \frac{\sigma}{i\omega \epsilon_0} \quad (8.104)$$

$$K_{\perp} = 1 - \frac{1}{i\omega \epsilon_0} \sum_e \frac{n_{s,0} e^2}{(-i\omega) m_e}$$

y con

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_{e,0} e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (8.105)$$

$$K_{\perp} = 1 - \frac{1}{\omega^2} \sum_e \omega_{pe}^2$$

con

$$\sum_e \omega_{pe}^2 = \omega_p^2$$

$$K_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

hay que sustituir \mathbf{K} en la ecuación homogénea para el campo eléctrico

$$c^2 \vec{k} \times \vec{k} \times \tilde{\vec{E}} + \omega^2 \mathbf{K} \cdot \tilde{\vec{E}} = 0 \quad (8.106)$$

Como el plasma es isotrópico, podemos escoger $\vec{k} = k\hat{z}$, para E perpendicular a \hat{z}

$$c^2 \vec{k} \times \vec{k} \times \tilde{\vec{E}} = -c^2 k^2 \tilde{E}_{\perp}$$

$$-c^2 k^2 \tilde{E}_{\perp} + (\omega^2 - \omega_p^2) \tilde{E}_{\perp} = 0$$

luego para \mathbf{E} paralelo a \hat{z}

$$K_{\parallel} = 1 - \frac{1}{-(i\omega)^2} \sum_e \omega_{pe}^2 \frac{1}{1 - \frac{\gamma C_e^2 k^2}{\omega}}$$

$$K_{\parallel} = 1 - \frac{1}{\omega^2} \sum_e \omega_{pe}^2 \frac{1}{1 - \frac{\gamma C_e^2 k^2}{\omega}}$$

sustituyendo en la ecuación homogénea

$$K_{\parallel} = \omega^2 - \sum_e \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \frac{\gamma C_e^2 k^2}{\omega}} \tilde{E}_{\parallel} = 0$$

juntando todo en una matriz

$$\begin{bmatrix} -c^2 k^2 + \omega^2 - \omega_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & -c^2 k^2 + \omega^2 - \omega_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \sum_e \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \frac{\gamma C_e^2 k^2}{\omega^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0 \quad (8.107)$$

Luego para hallar la relación de dispersión, debemos calcular el determinante de la matriz (8.107), el cual queda

$$(-c^2 k^2 + \omega^2 - \omega_p^2)^2 \left(\omega^2 - \sum_e \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \frac{\gamma C_e^2 k^2}{\omega^2}} \right) = 0 \quad (8.108)$$

Se obtienen así dos raíces distintas. La de la izquierda corresponde a ondas electromagnéticas transversales. Note que no cambia respecto a plasmas fríos. Esto tiene sentido porque el campo eléctrico, $\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, 0)$, y la velocidad de las partículas, $\tilde{\mathbf{U}}_s = (\tilde{U}_x, \tilde{U}_y, 0)$, para el modo electromagnético transversal son perpendiculares a k , luego no hay perturbación en la densidad de número y por lo tanto no se ve afectado por la presión.

La ecuación de dispersión tiene una raíz asociada con cada especie en el plasma. **La raíz asociada con los electrones es una modificación de la oscilación del plasma de electrones que se encuentra en la teoría del plasma frío y con frecuencia se denomina modo de Langmuir**, después de que Tonks y Langmuir, quienes primero estudiaron este modo de propagación. La relación de dispersión de los electrones se conoce como “dispersión de Bohm y Grass”

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \gamma C_e^2 k^2 \quad (8.109)$$

Las ondas de Langmuir están muy fuertemente amortiguadas cuando $k\lambda_{De} \geq 1$, debido a un proceso de amortiguación sin colisión llamado **amortiguación de Landau**. Este es uno de los inconvenientes de las ecuaciones de momento, estas dan una buena descripción para $k\lambda_{De} \leq 1$, pero fallan cuando $k\lambda_{De} \geq 1$.

De esta manera si los electrónes están fríos, ($T_{e,0} = 0$), tal que $C_e = 0$, la frecuencia de oscilación se reduce al resultado del plasma frío,

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2.$$

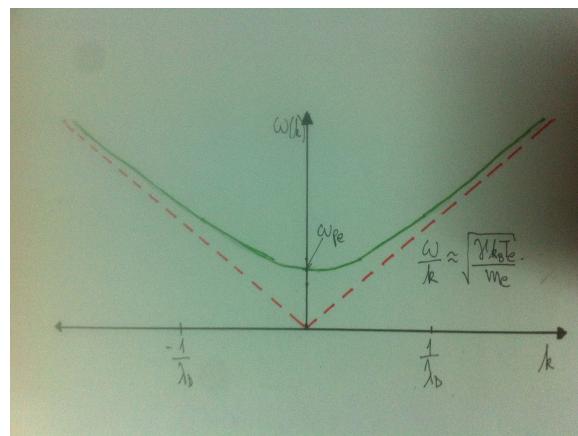


Figure 8.16: Relación de dispersión para las oscilaciones de plasma de electrones, incluidos los efectos de la presión de electrones.

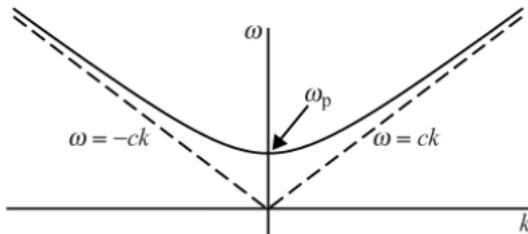


Figure 8.17: Relación de dispersión para el modo electromagnético transversal, en ondas de plasma frío no magnetizado.

Podemos ver esto si comparamos las Figuras 8.16 y 8.17.

- c) Demuestre que la relación de dispersión de las ondas longitudinales sí se modifica. Bosqueje $\omega(k)$ para estas ondas y describa la diferencia con el caso en que los electrones están “frios” ($T_{e,0} = 0$).

Solución:

La raíz de la derecha de (8.108), corresponde a ondas electrostáticas longitudinales, cuya relación de dispersión, si se factoriza por ω^2 es

$$D_l(k, \omega) = 1 - \sum_e \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma C_e^2 k^2} \quad (8.110)$$

La velocidad de fase involucra la temperatura del electrón y la masa de iones. Esta combinación de parámetros se interpreta como una indicación de que los electrones proporcionan la presión, mientras que los iones proporcionan la inercia. A medida que aumenta el número de onda, la frecuencia comienza a disminuir en relación con la relación lineal dada por la ecuación y asintóticamente se

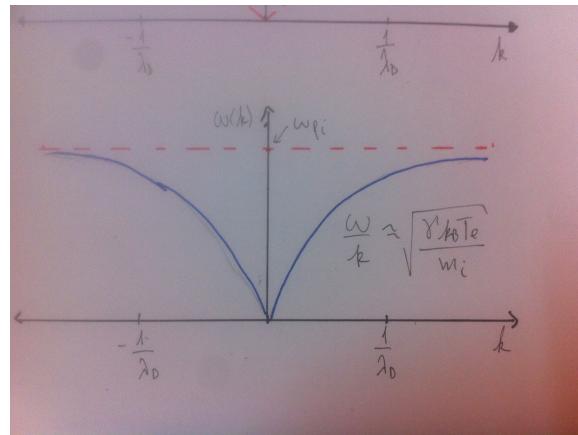


Figure 8.18: Relación de dispersión de las ondas longitudinales.

aproxima a la frecuencia de plasma iónico, ω_{pi} , para $k\lambda_d \gg 1$. Se puede verificar fácilmente que la velocidad de fase del modo acústico de iones es siempre mucho menor que la velocidad térmica del electrón si la temperatura del ión es cero.

8.44 Guía dieléctrica

Una guía dieléctrica rectangular $|x| \leq \Delta$ está entre dos planos infinitos conductores $y = \pm L$. ¿Cuál es la frecuencia mínima de esta guía?

Solución:

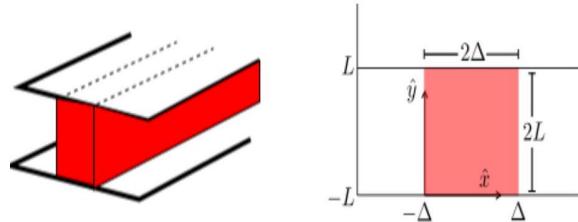


Figure 8.19: Esquema del problema.

Para encontrar los modos transversales, se debe resolver la ecuación

$$\nabla_t^2 F_v - k^2 F_v + n^2 k_0^2 F_v = 0$$

donde F_v es la componente v del campo \vec{F} y ∇_t^2 es el Laplaciano aplicado solo a las componentes transversales a la componente v . Definiendo

$$\gamma^2 \equiv n^2 k_0^2 - k^2$$

la ecuación adquiere la forma

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) F_v = 0$$

donde en este problema particular, los modos se propagan en el eje \hat{z} .

Modo transversal magnético (TM)

En este caso se tiene que $B_z = 0$, luego se debe resolver

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) E_z = 0$$

con la condición de borde $E_z|_{\partial\Omega} = 0$. Dentro del dieléctrico esta ecuación queda

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_{zin} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_{zin} + \gamma^2 E_{zin} = 0$$

donde la condición de borde (ver Figura 8.19) pasa a ser

$$E_{zin}|_{x=0,2\Delta} = E_{zin}|_{y=0,2L} = 0.$$

Se propone entonces la solución

$$E_{zin} = A \sin(mx) \sin(ny)$$

con A alguna constante y m y n por determinar, notar que el valor de A es irrelevante para el cálculo de las frecuencias. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_{zin} &= -Am^2 \sin(mx) \sin(ny), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_{zin} &= -An^2 \sin(mx) \sin(ny) \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene

$$-Am^2 \sin(mx) \sin(ny) - An^2 \sin(mx) \sin(ny) + A\gamma^2 \sin(mx) \sin(ny) = 0$$

deduciéndose que $\gamma^2 = m^2 + n^2$. Para determinar el valor de m y n , se debe notar que la solución ya cumple con

$$E_{zin}|_{x=0} = E_{zin}|_{y=0} = 0$$

por lo que, de la condición $x = 2\Delta$ reemplazada en la solución propuesta, se obtiene

$$A \sin(ny) \sin(2\Delta m) = 0$$

y ya que A y $\sin(ny)$ son, en principio, distintos de cero (podría existir un valor de la función seno que fuese cero, pero no será cero para todos los valores), se llega a que

$$\sin(2\Delta m) = 0$$

luego se deduce que

$$m = \frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}$$

con $\bar{m} = 0, 1, 2, 3, \dots$. De forma análoga, al usar la condición $y = 2L$, se tiene

$$A \sin(mx) \sin(2Ln) = 0$$

y ya que A y $\sin(mx)$ son distintos de cero, se llega a que

$$\sin(2Ln) = 0$$

luego se deduce que

$$n = \frac{\bar{n}\pi}{2L}$$

con $\bar{n} = 0, 1, 2, 3, \dots$. Así, la solución general toma la forma

$$E_{z_{in}} = A \sin\left(\frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}x\right) \sin\left(\frac{\bar{n}\pi}{2L}y\right)$$

donde los modos de propagación TM serán

$$k^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}\right)^2 - \left(\frac{\bar{n}\pi}{2L}\right)^2$$

Modo transversal eléctrico (TE)

En este caso se tiene que $E_z = 0$, luego se debe resolver

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) B_z = 0$$

con la condición de borde $\partial_n B_z|_{\partial\Omega} = 0$. Dentro del dieléctrico esta ecuación queda

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_{z_{in}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} B_{z_{in}} + \gamma^2 B_{z_{in}} = 0$$

donde la condición de borde (ver Figura 8.19) pasa a ser

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} B_{z_{in}} \right|_{x=0,2\Delta} = \left. \frac{\partial}{\partial y} B_{z_{in}} \right|_{y=0,2L} = 0$$

La solución será ahora

$$B_{z_{in}} = A \cos(mx) \cos(ny),$$

con A alguna constante y m y n por determinar. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_{z_{in}} &= -Am^2 \cos(mx) \cos(ny) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} B_{z_{in}} &= -An^2 \cos(mx) \cos(ny) \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene

$$-Am^2 \cos(mx) \cos(ny) - An^2 \cos(mx) \cos(ny) + A\gamma^2 \cos(mx) \cos(ny) = 0$$

deduciéndose nuevamente que $\gamma^2 = m^2 + n^2$. Para determinar el valor de m y n , se debe notar que la ecuación ya cumple con

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{zin} \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial y} B_{zin} \Big|_{y=0} = 0$$

por lo que, de la condición $x = 2\Delta$, al reemplazar en la solución derivada se obtiene

$$-Am \cos(ny) \sin(2\Delta m) = 0$$

y ya que A y $\cos(ny)$ son distintos de cero y no se quiere una solución trivial, se llega a que

$$\sin(2\Delta m) = 0$$

luego se deduce que

$$m = \frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}$$

con $\bar{m} = 0, 1, 2, 3, \dots$ De forma análoga, al usar la condición $y = 2L$, la solución queda

$$-An \cos(mx) \sin(2Ln) = 0$$

y ya que A y $\cos(mx)$ son distintos de cero y no se quiere una solución trivial, se llega a que

$$\sin(2Ln) = 0$$

luego se deduce que

$$n = \frac{\bar{n}\pi}{2L}$$

con $\bar{n} = 0, 1, 2, 3, \dots$ Así, la solución general toma la forma

$$B_{zin} = A \cos\left(\frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}x\right) \cos\left(\frac{\bar{n}\pi}{2L}y\right)$$

donde los modos de propagación TE serán

$$k^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}\right)^2 - \left(\frac{\bar{n}\pi}{2L}\right)^2$$

Se tiene entonces que los modos de propagación magnéticos y eléctricos vienen dados por

$$k^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}\right)^2 - \left(\frac{\bar{n}\pi}{2L}\right)^2$$

donde $\bar{m}, \bar{n} = 0, 1, 2, 3, \dots$ Es importante recordar ahora que los modos TEM cumplen con

$$\vec{\nabla}_t \times E_t = 0 \quad \vec{\nabla}_t \cdot E_t = 0$$

lo cual lleva a la relación de dispersión $k^2 = n^2 k_0^2$ o, equivalentemente,

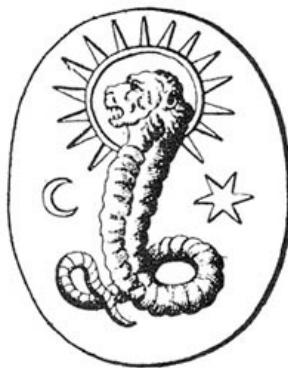
$$\omega(k) = \frac{kc}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

la cual corresponde a la relación de dispersión para campos electroestáticos, luego se deduce que no existe solución para los modos TEM dentro de conductores (como, por ejemplo, las placas de este problema). Puesto que $\bar{m} = \bar{n} = 0$ lleva, en ambos casos, a tal relación de dispersión, es evidente que la frecuencia mínima de los modos TM y TE no se da para estos valores. Ahora, si $\bar{m} = 0$ o $\bar{n} = 0$, se tiene que $E_z = 0$ en los modos TM, lo cual no es cierto y llevaría nuevamente al caso de modos TEM, por lo que $\bar{m} \neq 0$ y $\bar{n} \neq 0$ para los modos TM. Uniendo todas estas deducciones, se tendrá que la frecuencia mínima para los modos TM será en $\bar{m} = \bar{n} = 1$ tal que

$$k_{11}^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\pi}{2\Delta}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$$

mientras que para los modos TE la frecuencia mínima se dará cuando $\bar{m} = 0$ y $\bar{n} = 1$ o $\bar{m} = 1$ y $\bar{n} = 0$ tal que, respectivamente,

$$k_{01}^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \quad k_{10}^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\pi}{2\Delta}\right)^2$$



Problemas resueltos de Electrodinámica

Lalo Flández, *DF²C*

Contents

1 Introducción a la electrostática	6
1.1 Ecuaciones de Poisson y Laplace	6
1.2 Resumen	7
1.3 Problemas	10
2 Problemas de frontera I	14
2.1 Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas	14
2.2 Ecuación de Laplace en coordenadas polares	15
2.3 Ecuación de Laplace en planos que se cortan	17
2.4 Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas	20
2.4.1 Polinomios de Legendre ($m = 0$)	23
2.4.2 Ecuación de Laplace con simetría azimutal	26
2.4.3 Expansión del potencial de carga puntual en Legendre	29
2.4.4 Polinomios asociados de Legendre	33
2.4.5 Armónicos esféricos	36
2.4.6 Problemas de frontera en coordenadas esféricas	38
2.4.7 El teorema de la adición para armónicos esféricos	39
2.5 Ecuación de Laplace en Coordenadas Cilíndricas	40
2.5.1 Problemas de Frontera en Coordenadas Cilíndricas	45
2.6 Resumen	49
2.7 Problemas	54
3 Problemas de frontera II	63
3.1 Método de Imágenes	63
3.1.1 Carga puntual con una esfera conectada a tierra	65
3.1.2 Carga puntual en presencia de una esfera conductora	69
3.2 Función de Green	70
3.3 Función de Green para la esfera	72
3.4 Esfera conductora con hemisferios a diferentes potenciales	74
3.5 Expansión de la función de Green en esféricas	76
3.6 Potencial para esfera hueca con anillo	78
3.7 Pasos del Método de la función de Green, Dirichlet	80
3.8 Resumen	84
3.9 Problemas	87
3.9.1 Método de las imágenes	87
3.9.2 Método de la función de Green	88
3.10 Problemas Valdivia	93

4 Multipolos y medios dieléctricos	94
4.1 Expansión multipolar del potencial	94
4.2 Expansión multipolar del campo eléctrico	98
4.3 Conceptos Básicos sobre Electrostática con Medios	101
4.4 Ecuaciones electrostáticas con materiales ponderables	103
4.5 Ecuaciones electrostáticas en materiales dieléctricos isotrópicos lineales	107
4.6 Problemas de valores en la frontera con dieléctricos	109
4.7 Energía electrostática en medios dieléctricos	112
4.8 Resumen	113
4.9 Ejemplos	118
4.10 Ejemplos Jackson	119
4.11 Problemas Jackson	126
4.12 Problemas Valdivia	132
4.13 Problemas Exámen	135
5 Magnetostática	136
5.1 Revisión de magnetostática en materiales magnéticos	136
5.2 Casos Especiales en Magnetostática	136
5.3 Problema de muestra	137
5.4 Resumen	141
5.5 Ejemplos	145
5.6 Problemas Jackson	146
5.7 Problemas Valdivia	164
5.8 Exámen	165
6 Variaciones temporales y las ecuaciones de Maxwell	167
6.1 Problemas Valdivia	167
6.2 Resumen	178
7 Ondas electromagnéticas	179
7.1 Resumen	179
7.2 Exámen	180
8 *Guías de ondas	182
9 Radiación	182
9.1 Problemas Jackson	182
10 Relatividad	183
10.1 Problemas	183

11 Plasmas	188
12 Problemas resueltos	190
13 Soluciones	190
13.1 Campo eléctrico de un plano infinito	190
13.2 Demostraciones del Teorema de Gauss	191
13.3 Tres esferas	197
13.4 Distribuciones de carga	201
13.5 Cálculo de capacitancias	204
13.6 Capacitancia de dos cilindros	208
13.7 Densidad de energía para capacidores	210
13.8 Fuerza de atracción entre conductores	212
13.9 Dos placas de metal conectadas a tierra	217
13.10 Potencial en la tapa de una caja	221
13.11 Ranura infinita	225
13.12 Tubería rectangular	227
13.13 Cubo hueco	230
13.14 Tubería rectangular 2	235
13.15 Tubo infinito con mitad de potencial	237
13.16 Ec. de Laplace con límites uniformes en capa cilíndrica	240
13.17 Tubo separado en dos mitades	242
13.18 Potencial cilindro en forma integral de Poisson	244
13.19 Mitades de un cilindro	247
13.20 Cuartos de un cilindro	251
13.21 Carga puntual en armónicos esféricos	257
13.22 Potencial dentro de esfera hueca	258
13.23 Potencial afuera de una esfera hueca	259
13.24 Esfera en presencia de un campo eléctrico	260
13.25 Potencial de esfera en presencia de campo eléctrico	262
13.26 Capa esférica con densidad de carga superficial	264
13.27 Método de imágenes conductor plano	266
13.28 Método imágenes carga dentro de esfera hueca	270
13.29 Línea cargada y cascarón esférico conductor	271
13.30 Línea cargada y cascarón esférico conductor	280
13.31 Plano infinito y semiesfera	283
13.32 Anillo entre un condensador	287
13.33 Anillo entre un condensador	292
13.34 Esferas concéntricas	294
13.35 Esfera con potencial en superficie	301
13.36 Potencial dentro de dos hemisferios	302

13.37	Expansión de carga puntual en Pol. Legendre	304
13.38	Green para carga frente a esfera conectada a tierra	305
13.39	Potencial producido por aro	307
13.40	Green para varios casos	309
13.41	Equivalencia para el potencial dentro de una esfera	316
13.42	Línea cargada entre planos conductores que se intersectan . .	319
13.43	324
13.44	Expansión de la función de Green en armónicos esféricos.	330
13.45	Potencial dentro de una esfera sin carga	336
13.46	Potencial para esfera hueca con anillo	338
13.47	Jackson 3.13	341
13.48	Función de Green entre dos planos	344
13.49	Capa cilíndrica dieléctrica muy larga	348
13.50	Jackson 4.8 v2	353
13.51	Jackson 4.9	356
13.52	Esfera polarizada	359
13.53	Jackson 4.1	360
13.54	Esfera en campo externo	366
13.55	Cosenso Ej. 3.4.1	367
13.56	Cosenso Ej 4.2.1	371
13.57	Cosenso Ejemplo 4.2.2	373
13.58	Cosenso Ej 4.3.3	373
13.59	Consensa Ej 4.3.1	374
13.60	Cosenso Ej 4.5.1	375
13.61	Consensa Ej 4.5.2	376
13.62	Griffiths Ejemplo 4.4	377
13.63	Griffiths Ejemplo 4.5	378
13.64	Griffiths Ej 4.6	379
13.65	Jackson 4.2	380
13.66	Jackson 4.10	382
13.67	Dipolo eléctrico y dieléctrico semi-infinito	387
13.68	Onda polarizada plana incidente en conductor	389
13.69	Jackson 5.13	391
13.70	Griffiths Example 5.11	395
13.71	Griffiths Example 5.12	398
13.72	Ejemplo Valdivia Magnetismo 1	399
13.73	Ejemplo Valdivia Magnetismo 2	400
13.74	Ejemplo Valdivia Magnetismo 2	402
13.75	Ejemplo Valdivia Magnetismo 3	405
13.76	Semiesfera dipolar eléctrica	406
13.77	Esfera de material magnetizado	409

13.78	Esfera de material magnético constante	415
13.79	Problema 8	417
13.80	Esfera polarizable dentro de anillo	420
13.81	Jackson 9.3	423
13.82	Tarea 2 P1 2022	425
13.83	Tarea 2 P2 2022	425
13.84	T3 P3	426
13.85	T2 P4	433
13.86	T2 P5	438
13.87	T2 P6	439
13.88	Anillo que cae en un campo magnético	443
13.89	T3P2 2022	446
13.90	T3P3 2022	446
13.91	T3P4 2022	447
13.92	T3P5 2022	454
13.93	T3P6 2022	459
13.94	Central hidroeléctrica 2	465
13.95	Central 3	468
13.96	Vela radiación	474
13.97	Condensador de placas circulares	479
13.98	Cilindro infinito con campos armónicos	486
13.99	Potencia irradiada por un cascarón esférico	489
13.100	Sábana infinita	497
13.101	Círculo de corriente circular	503
13.102	Fem producida por un circuito	510
13.103	Fem producida por cascarón esférico	511
13.104	Conservación de la carga	512
13.105	Lámina infinita relativista	516
13.106	Partícula en un campo magnético	521
13.107	Dipolo magnético oscilatorio	526
13.108	Hamiltoniano de una partícula	530
13.109	La paradoja de los gemelos	533
13.110	Suma de velocidades paralelas	541
13.111	Escalares de Lorentz	543
13.112	Espejo relativista	547
13.113	Dipolo infinito uniforme	551

1 Introducción a la electrostática

1.1 Ecuaciones de Poisson y Laplace

- Tomemos la ley de Gauss en forma diferencial y usemos la definición de potencial escalar:

$$\nabla \cdot (-\nabla \Phi) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x})$$

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x})} \quad \text{Ecuación de Poisson}$$

- Un caso especial de la ecuación de Poisson resulta cuando una región no tiene cargas:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0} \quad \text{La ecuación de Laplace}$$

- El potencial en la Ecuación de Laplace se define únicamente por las condiciones de contorno.

Ejercicio

Pruebe la identidad:

$$\boxed{\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}}$$

Solución:

Tenemos que

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}$$

y el operador ∇ actúa sobre las coordenadas de \mathbf{x} , no de \mathbf{x}' . Tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \right) &= -\frac{1}{2} 2(x - x') \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{(x - x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \right) &= -\frac{(y - y')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \right) &= -\frac{(z - z')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) &= - \left[\frac{(x - x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \frac{(y - y')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \frac{(z - z')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] \\ &= - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\end{aligned}$$

1.2 Resumen

Ley de Coulomb,

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} \hat{r}$$

$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E} \text{ donde } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}$$

$$\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad \text{Ley de Coulomb, para muchas cargas}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad \text{Ley de Coulomb, con densidad de carga}$$

- Para una carga puntual, utilizando

$$\rho(\mathbf{x}') = q \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1)$$

Ley de Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 4\pi q_{\text{enc}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x})} \quad \text{Ley de Gauss en forma diferencial}$$

- Definición delta de Dirac:

$$\delta(x - x_0) = 0$$

para $x \neq x_0$ y

$$\int \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

- Carga puntual: $\rho(\mathbf{x}) = q_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ donde \mathbf{x}_i es la posición de la carga.

- Línea cargada: $\rho(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\delta^{(2)}$
- Superficie cargada: $\rho(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\delta^{(1)}$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(r - r_0) \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{r} \frac{\delta(\phi - \phi_0)}{r \sin \theta}$$

carga lineal en forma de anillo circular con radio R centrado en el origen y que se encuentra en el plano $x - y$ tendría la ecuación:

$$\rho(r, \theta, \phi) = \lambda \delta(r - R) \frac{\delta(\theta - \pi/2)}{r}$$

- Como otro ejemplo, si la carga se distribuye sobre una capa esférica delgada, solo necesitamos un delta de Dirac:

$$\rho(r, \theta, \phi) = \sigma \delta(r - R)$$

La función de paso de Heaviside $H(x)$

Definición:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$H(-x) = 1 - H(x)$$

$$H'(x - a) = \delta(x - a)$$

$$H(x - a) = \int_{-\infty}^x \delta(t - a) dt$$

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ Los campos electrostáticos son irrotacionales.

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

q_1 :

$$\Delta \Phi = W/q_1.$$

$$\Delta \Phi = U/q_1$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' + C$$

Ley de Coulomb en términos del potencial escalar

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x})} \quad \text{Ecuación de Poisson}$$

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0} \quad \text{La ecuación de Laplace}$$

$$\boxed{\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}}$$

La superficie de cada conductor es un valor constante (una equipotencial) V_i :

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n \text{ objetos}} \int \frac{\rho_j(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n \text{ objetos}} C_{ij} V_j$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad \text{Capacitancia del sistema de dos conductores}$$

trabajo total realizado (también la energía potencial total) es: $W = q_1 \Phi$

$$W = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{x}$$

- El integrando se puede identificar como la densidad de energía:

$$\boxed{w = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2}.$$

$$\boxed{\left[(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \right]_{n=n_0}} \quad \text{Densidad de carga superficial en una superficie arbitraria}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{n}} \quad \text{Segunda condición de contorno.}$$

1.3 Problemas

1. Campo eléctrico de un plano infinito

Calcule el campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga superficial uniforme σ .

Sol: 13.1

2. Demostraciones del Teorema de Gauss

Use el teorema de Gauss $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{n} = \frac{q}{\epsilon_0}$ y $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ para probar lo siguiente:

- Cualquier exceso de carga colocado sobre un conductor debe recaer completamente sobre su superficie. (Un conductor, por definición, contiene cargas capaces de moverse libremente bajo la acción de campos eléctricos aplicados).
- Un conductor hueco y cerrado protege su interior de los campos debidos a las cargas externas, pero no protege su exterior de los campos debidos a las cargas colocadas en su interior.
- El campo eléctrico en la superficie del conductor es normal a la superficie y tiene una magnitud σ/ϵ_0 , donde σ es la densidad de carga por unidad de área en la superficie.

Solución: 13.2

3. Tres esferas

Considere tres esferas cargadas de radio a , una conductora, otra con una densidad de carga uniforme dentro de su volumen y otra con una densidad de carga esféricamente simétrica que varía radialmente como r^n ($n > -3$), tiene una carga total Q . Utilice el teorema de Gauss para obtener los campos eléctricos tanto dentro como fuera de cada esfera. Dibuje el comportamiento de los campos en función del radio para las dos primeras esferas y para la tercera con $n = -2$, $n = +2$.

Solución: 13.3

4. La delta de Dirac en un sistema ortogonal

La función delta de Dirac en tres dimensiones se puede tomar como el límite impropio como $\alpha \rightarrow 0$ de la función gaussiana

$$D(\alpha; x, y, z) = (2\pi)^{-3/2} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} (x^2 + y^2 + z^2) \right]$$

Considere un sistema general de coordenadas ortogonales especificado por las superficies $u = \text{constante}$, $v = \text{constante}$, $w = \text{constante}$, con elementos de longitud $du/U, dv/V, dw/W$ en las tres direcciones perpendiculares. Muestra que

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') \cdot UVW$$

considerando el límite de la Gaussiana anterior. Tenga en cuenta que como $\alpha \rightarrow 0$ solo se necesita usar el elemento de longitud infinitesimal para la distancia entre los puntos en el exponente.

5. Representación de la delta de Dirac

- (a) Encuentre la representación de la delta de Dirac en coordenadas esféricas.
- (b) Reescriba la expresión obtenida en (a) como:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(r - r') \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\phi - \phi') \frac{1}{r^2}$$

- (c) Encuentre la representación de la delta de Dirac en coordenadas cilíndricas.

6. Distribuciones de carga

Usando funciones delta de Dirac en las coordenadas apropiadas, exprese las siguientes distribuciones de carga como densidades de carga tridimensionales $\rho(\mathbf{x})$.

- (a) En coordenadas esféricas, una carga Q uniformemente distribuida sobre una capa esférica de radio R .
- (b) En coordenadas cilíndricas, una carga λ por unidad de longitud uniformemente distribuida sobre una superficie cilíndrica de radio b .
- (c) En coordenadas cilíndricas, una carga Q se distribuye uniformemente sobre un disco circular plano de espesor despreciable y radio R .
- (d) Lo mismo que (c), pero usando coordenadas esféricas.

Sol: [13.4](#)

7. Potencial átomo de hidrógeno

El potencial promediado en el tiempo de un átomo de hidrógeno neutro está dado por

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

donde q es la magnitud de la carga electrónica, y $\alpha^{-1} = a_0/2$, siendo a_0 el radio de Bohr. Encuentre la distribución de carga (tanto continua como discreta) que le dará este potencial e interprete su resultado físicamente.

8. Fuerza de atracción entre conductores

Calcule la fuerza de atracción entre los conductores del capacitor de placas paralelas y el capacitor de cilindros paralelos para

- (a) cargas fijas en cada conductor
- (b) diferencia de potencial fijo entre conductores.

Solución: [13.8](#)

9. Cálculo de capacitancias

Un capacitor simple es un dispositivo formado por dos conductores aislados uno al lado del otro. Si se colocan cargas iguales y opuestas sobre los conductores, habrá cierta diferencia de potencial entre ellos. La relación entre la magnitud de la carga en un conductor y la magnitud de la diferencia de potencial se denomina capacitancia (en unidades del SI se mide en faradios). Usando la ley de Gauss, calcule la capacitancia de

- (a) dos láminas conductoras grandes, planas, de área A , separadas por una pequeña distancia d ;
- (b) dos esferas concéntricas con radios a, b ($b > a$)
- (c) dos cilindros conductores concéntricos de longitud L , grandes en comparación con sus radios a, b ($b > a$).
- (d) ¿Cuál es el diámetro interior del conductor exterior en un cable coaxial lleno de aire cuyo conductor central es un alambre cilíndrico de diámetro 1 mm y cuya capacitancia es $3 \times 10^{-11} F/m$? $3 \times 10^{-12} F/m$?

Solución: [13.5](#)

10. Capacitancia de dos cilindros

Dos conductores cilíndricos largos de radios a_1 y a_2 son paralelos y están separados por una distancia d , que es grande en comparación con

cualquiera de los dos radios. Demuestre que la capacitancia por unidad de longitud está dada aproximadamente por

$$C \approx \pi \epsilon_0 \left(\ln \frac{d}{a} \right)^{-1}$$

donde a es la media geométrica de los dos radios. Aproximadamente qué calibre de cable (diámetro del diámetro en milímetros) sería necesario para hacer una línea de transmisión de dos cables con una capacitancia de 1.2×10^{-11} F/m si la separación de los cables fuera 0.5 cm?1.5 cm?5.0 cm ?

Solución: 13.6

11. Densidad de energía para capacidores

- Para las tres geometrías del problema de los tres capacitores, calcule la energía electrostática total y exprésela alternativamente en términos de las cargas iguales y opuestas Q y $-Q$ colocadas en los conductores y la diferencia de potencial entre ellos.
- Dibuje la densidad de energía del campo electrostático en cada caso como una función de la coordenada lineal apropiada.

Solución: 13.7

2 Problemas de frontera I

2.1 Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

¿Cuando se usa la ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$?

Se usa cuando una región sin carga está limitada por un límite donde se conoce el potencial.

En coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

- Pruebe una solución de la forma: $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$Y(y)Z(z)\frac{\partial^2X(x)}{\partial x^2} + X(x)Z(z)\frac{\partial^2Y(y)}{\partial y^2} + X(x)Y(y)\frac{\partial^2Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

- Divida cada lado por $X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = 0$$

- Las derivadas totales han sustituido a las derivadas parciales porque las funciones son de una sola variable.

- Esta ecuación debe cumplirse para todos los valores posibles de las coordenadas independientes, por lo tanto los términos deben ser independientes. Cada uno se puede igualar a una constante arbitraria:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\alpha^2, \quad \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -\beta^2, \quad \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = \gamma^2$$

donde $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, escogemos las constantes α y β reales, tales que $\alpha^2 > 0$ y $\beta^2 > 0$.

- Reescribimos:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\alpha^2X(x), \quad \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -\beta^2Y(y), \quad \frac{d^2Z(z)}{dz^2} = \gamma^2Z(z)$$

Las soluciones para $X(x)$ e $Y(y)$ son análogas a la del oscilador armónico.

$$X(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, \quad Y(y) = Ce^{i\beta y} + De^{-i\beta y}, \quad Z(z) = Fe^{\gamma z} + Ge^{-\gamma z}$$

$$X(x) = A' \cos(\alpha x) + B' \sin(\alpha x), \quad Y(y) = C' \cos(\beta y) + D' \sin(\beta y),$$

La solución $\Phi = X(x)Y(y)Z(z)$ es una solución particular de la ecuación de Laplace. Los coeficientes y la forma específica de la solución particular para un problema dado se determinan mediante las condiciones de frontera del sistema. La solución general se encuentra por superposición de todas las soluciones particulares que satisfacen las condiciones de frontera.

2.2 Ecuación de Laplace en coordenadas polares

- Si las condiciones de contorno de una región sin carga muestran uniformidad en una dimensión y una **forma circular en las otras dos dimensiones**, es mucho más natural matemáticamente usar coordenadas polares en lugar de coordenadas rectangulares.

- Si las condiciones de contorno son uniformes en la dimensión z , el problema de coordenadas cilíndricas tridimensionales se reduce a un problema de coordenadas polares bidimensional.

- Al igual que se hizo para las coordenadas rectangulares, se puede utilizar la separación de variables y series de Fourier para resolver la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

- La ecuación de Laplace bidimensional en coordenadas polares viene dada por:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

- Usamos separación de variables probando una solución de la forma:

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$$

- Sustituyéndolo:

$$\Psi(\phi) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + R(\rho) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi(\phi)}{\partial \phi^2} = 0$$

- Multiplicando por $\frac{\rho^2}{R(\rho)\Psi(\phi)}$:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = - \frac{1}{\Psi(\phi)} \frac{\partial^2 \Psi(\phi)}{\partial \phi^2}$$

- Los dos términos son funciones por separado de dos variables independientes y deben cumplirse para todos los valores de las dos variables independientes, por lo que deben estar relacionados por una constante, que llamaremos ν^2 .

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = \nu^2 \quad \text{y} \quad \nu^2 = -\frac{1}{\Psi(\phi)} \frac{\partial^2 \Psi(\phi)}{\partial \phi^2}$$

- reescribimos la expresión anterior como:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = \nu^2 R(\rho) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \Psi(\phi)}{\partial \phi^2} = -\nu^2 \Psi(\phi)$$

- La solución general para $\nu \neq 0$ ahora es evidente:

$$R(\rho) = a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu} \quad \text{y} \quad \Psi(\phi) = A_\nu e^{i\nu\phi} + B_\nu e^{-i\nu\phi}$$

- De modo que la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas polares para $\nu \neq 0$ es:

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$$

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{\nu} (a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu}) (A_\nu e^{i\nu\phi} + B_\nu e^{-i\nu\phi})$$

- Si $\nu = 0$, las ecuaciones diferenciales quedan:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \Psi(\phi)}{\partial \phi^2} = 0$$

con las soluciones generales para $\nu = 0$:

$$R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho \quad \text{y} \quad A_0 + B_0 \phi$$

- De modo que, finalmente, la solución más general se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho) (A_0 + B_0 \phi) + \sum_{\nu \neq 0} (a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu}) (A_\nu e^{i\nu\phi} + B_\nu e^{-i\nu\phi})$$

- Los coeficientes ahora se determinan aplicando condiciones de contorno y reconociendo el resultado como una expansión de la serie de Fourier.

- Debido a que la dimensión z es uniforme y, por lo tanto, se ignora, hemos resuelto un diferencial de segundo orden en dos dimensiones, por lo que debe haber cuatro constantes de integración totales y cuatro condiciones de contorno. Si tomamos la solución particular más común y combinamos constantes, encontramos que este es el caso:

$$\Phi_P(\rho, \phi) = a_\nu (\rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu}) (e^{i\nu\phi} + B_\nu e^{-i\nu\phi})$$

- Tenga en cuenta que ν es solo un número entero si la región de interés donde estamos tratando de resolver el potencial incluye todos los ángulos azimutales posibles, o en otras palabras, **si no hay una condición de límite físico en algún ángulo azimutal fijo**. De lo contrario, ν no es un número entero. Esto significa que el requisito de que el potencial sea de un solo valor, $\Phi(\rho, \phi) = \Phi(\rho, \phi + 2\pi)$, solo es válido si el barrido completo de los posibles ángulos acimutales está incluido en la región de interés.

2.3 Ecuación de Laplace en planos que se cortan

- A continuación, considere dos planos que se intersecan, uno en el eje x , el otro plano en un ángulo β desde el primer plano, y ambos uniformes en la dimensión z , con condiciones de contorno:

$$\Phi(\rho, \phi = 0) = V \quad , \quad \Phi(\rho, \phi = \beta) = V \quad , \quad \Phi(\rho = \rho_0, \phi) = V_1(\phi)$$

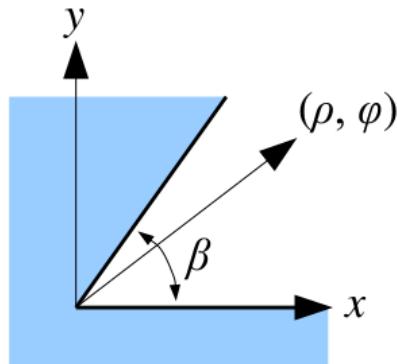


Figure 1: Planos que se cortan.

- Esto también es aplicable al borde de un problema más complejo, donde las cargas y otras superficies están lo suficientemente lejos como para entrar en juego porque crean la condición de contorno en ρ_0 , por lo tanto, la ecuación de Laplace todavía se aplica.

- Como antes, la inclusión del origen en la región de interés conduce a $b_v = 0$, incluyendo $b_0 = 0$:

$$\Phi(\rho, \phi) = A_0 + B_0\phi + \sum_{\nu, \nu \neq 0} \rho^\nu (A_\nu e^{iv\phi} + B_\nu e^{-iv\phi})$$

- Aplicando la condición de frontera $\Phi(\rho, \phi = 0) = V$

$$V = A_0 + \sum_{v,v \neq 0} \rho^v (A_v + B_v)$$

- Lo cual solo es posible si $A_0 = V, A_v = -B_v$ por lo que la solución ahora se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = V + B_0\phi + \sum_{\nu, \nu \neq 0} B_\nu \rho^\nu \sin(\nu\phi)$$

- Aplicando la condición de borde $\Phi(\rho, \phi = \beta) = V$:

$$\begin{aligned} V &= V + B_0\beta + \sum_{\nu, \nu \neq 0} B_\nu \rho^\nu \sin(\nu\beta) \\ \implies 0 &= B_0\beta + \sum_{\nu, \nu \neq 0} B_\nu \rho^\nu \sin(\nu\beta) \end{aligned}$$

- Esto debe ser válido para todos los ρ , entonces para que sea cierto decimos $B_0 = 0$ y $\nu = m\pi/\beta$ donde $m = 0, 1, 2, \dots$, dando:

$$\Phi(\rho, \phi) = V + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \rho^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta)$$

- Tenga en cuenta que ν no es igual a un número entero en este caso, pero es igual a $\nu = m\pi/\beta$ porque tenemos límites físicos en ciertos ángulos azimutales.

- Aplicaremos la condición de contorno final, que normalmente depende de la carga más lejana:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho = \rho_0, \phi) &= V_1(\phi) \\ V_1(\phi) &= V + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \rho_0^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta) \\ V_1(\phi) - V &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m \rho_0^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta) \end{aligned}$$

- Multiplicando ambos lados por $\sin(n\pi\phi/\beta)$ e integrando ambos lados desde 0 a β :

$$\int_0^\beta d\phi (V_1(\phi) - V) \sin(n\pi\phi/\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \rho_0^{m\pi/\beta} \int_0^\beta d\phi \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(n\pi\phi/\beta)$$

- Por ortogonalidad, la integral de la derecha siempre es cero, excepto cuando $m = n$:

$$\int_0^\beta d\phi (V_1(\phi) - V) \sin(n\pi\phi/\beta) = B_n \rho_0^{n\pi/\beta} \int_0^\beta d\phi \sin^2(n\pi\phi/\beta)$$

- La integral de la derecha da $\beta/2$:

$$\implies B_n = \frac{2}{\beta} \rho_0^{-n\pi/\beta} \int_0^\beta d\phi (V_1(\phi) - V) \sin(n\pi\phi/\beta)$$

- La solución final entonces toma la forma:

$$\Phi(\rho, \phi) = V + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \rho^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta), \quad B_m = \frac{2}{\beta} \rho_0^{-m\pi/\beta} \int_0^\beta d\phi (V_1(\phi) - V) \sin(m\pi\phi/\beta)$$

- Entendamos el comportamiento general del potencial cerca del borde. En la expansión de la serie, mantenemos solo el primer término distinto de cero, $m = 1$:

$$\Phi(\rho, \phi) = V + B_1 \rho^{\pi/\beta} \sin(\pi\phi/\beta) \quad \text{cerca de } \rho = 0$$

- El campo eléctrico, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, lo calculamos en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= - \left[\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] [V + B_1 \rho^{\pi/\beta} \sin(\pi\phi/\beta)] \\ \mathbf{E} &= \frac{-\pi B_1}{\beta} \rho^{\pi/\beta-1} (\hat{\rho} \sin(\pi\phi/\beta) + \hat{\phi} \cos(\pi\phi/\beta)) \end{aligned}$$

- Las densidades de carga superficial en $\phi = 0$ y $\phi = \beta$ son:

$$\sigma(\rho) = [\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}]_{\text{superficie}} \rightarrow \sigma(\rho) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\rho, \phi = 0) \cdot \hat{\phi}$$

$$\sigma(\rho) = -\frac{\epsilon_0 \pi B_1}{\beta} \rho^{\pi/\beta-1}$$

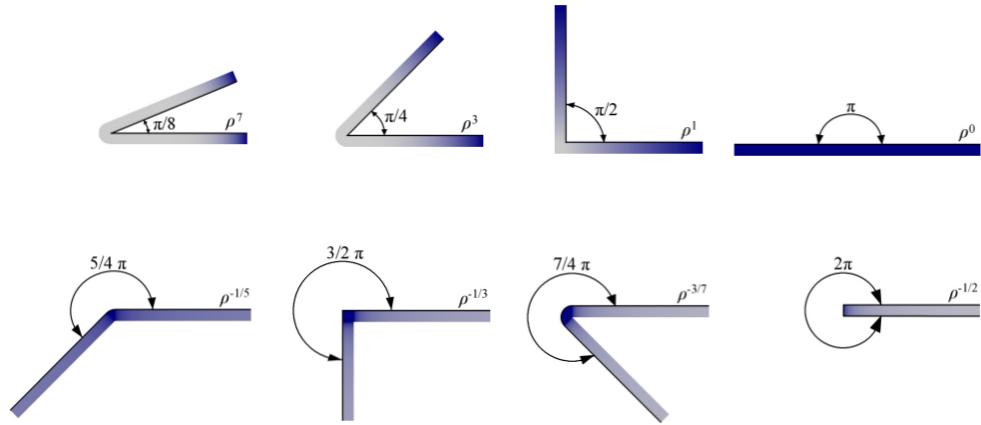


Figure 2: Gráficas numéricas de densidades de carga superficial para varios ángulos, densidades más altas en azul más oscuro.

2.4 Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

- En este sistema de coordenadas, r es la distancia radial desde el origen hasta el punto de observación, θ es el ángulo polar que forma el punto con el eje z , y ϕ es el ángulo azimutal en el plano xy relativo al eje x .
- Las coordenadas esféricas son útiles cuando las condiciones de contorno tienen forma esférica o simetría.
- La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

- Utilizar el método de separación de variables intentando una solución de la forma:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{R(r)}{r} P(\theta) Q(\phi)$$

Aquí se incluye un factor adicional ($1/r$) para anticipar que las matemáticas se simplificarán si cada factor tiene la misma dimensionalidad.

- Sustituir esto en la ecuación de Laplace:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \left[\frac{R(r)}{r} P(\theta) Q(\phi) \right] \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{R(r)}{r} P(\theta) Q(\phi) \right] \right) \\ & \quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left[\frac{R(r)}{r} P(\theta) Q(\phi) \right] = 0 \\ P(\theta)Q(\phi) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{R(r)}{r} Q(\phi) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{R(r)}{r} P(\theta) \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \phi^2} &= 0 \end{aligned}$$

- Esta ecuación es lo suficientemente compleja como para que no podamos hacer que cada término sea independiente a la vez. Primero, obtenga Q en una forma para mostrar que es independiente al multiplicar por $r^3 \sin^2 \theta / R(r)P(\theta)Q(\phi)$:

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{\sin \theta}{P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{1}{Q(\phi)} \frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2} = 0$$

- Aquí las derivadas parciales se han convertido en derivadas totales porque las funciones sobre las que operan ahora son funciones de una sola variable.

- El último término ahora es independiente de ρ y θ , y debe ser válido para todo ρ y θ , por lo que debe ser igual a una constante:

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{\sin \theta}{P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) - m^2 = 0 \text{ y } -m^2 = \frac{1}{Q(\phi)} \frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2}$$

- Podemos resolver la segunda ecuación. Primero ponlo en una forma más intuitiva:

$$\frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2} = -m^2 Q(\phi)$$

- Ahora la solución general es claramente:

$$Q(\phi) = A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi} \text{ si } m \neq 0 \text{ y } Q(\phi) = A_{m=0} + B_{m=0}\phi \text{ si } m = 0.$$

- La constante m en general no es necesariamente un número entero. Si la región de interés incluye el barrido azimutal completo de valores, entonces m debe ser un número entero para mantener la solución con un solo valor y el caso de $m = 0$ se reduce a $Q(\phi) = A_{m=0}$. A partir de ahora, nos ocuparemos de este caso especial, que sigue siendo bastante general.

- Pasamos ahora al resto de la ecuación:

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{\sin \theta}{P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) - m^2 = 0$$

- Divide cada lado por $\sin^2 \theta$:

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{\sin \theta P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0$$

- El primer término y los últimos términos son independientes y se pueden establecer en una constante:

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} - l(l+1) = 0 \text{ donde } -l(l+1) = \frac{1}{\sin \theta P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}$$

- Ponga ambas ecuaciones en formas más intuitivas:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} = l(l+1) \frac{R(r)}{r^2} \text{ y } \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \sin \theta P(\theta) = 0$$

- Pon la segunda ecuación en una forma más simple usando: $x = \cos \theta$ y $\frac{d}{d\theta} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}$:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} = l(l+1) \frac{R(r)}{r^2} \text{ y } \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0$$

- La primera ecuación se puede resolver intentando $R(r) = r^\alpha$

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} &= l(l+1)r^{\alpha-2} \\ \alpha^2 - \alpha - l(l+1) &= 0 \\ \alpha = l+1, \quad \alpha = -l \end{aligned}$$

- Entonces esa solución general es:

$$R(r) = A_l r^{l+1} + B_l r^{-l-1} \text{ que vale para los dos } l(l+1) \neq 0 \text{ y } l(l+1) = 0$$

- Antes de seguir resolviendo, ya podemos ver que la solución general (si se incluye todo el barido azimutal) tendrá la forma:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_m \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}) P_l^m(\cos \theta)$$

donde P_l^m en este punto aún no se ha resuelto, pero será la solución a la ecuación diferencial anterior que involucra a theta.

- Hay dos constantes de separación m y l y, por lo tanto, hay cuatro casos que pueden necesitar ser manejados por separado. Una revisión rápida de lo anterior muestra que maneja adecuadamente tres casos. El caso ($m \neq 0, l(l+1) = 0$) no converge en $x = 1$ como requerimos y la mayoría se omite.

- La resolución de la ecuación separada para la última coordenada esférica está involucrada y requiere más detalles, como se muestra en la siguiente sección. Lo tomaremos en dos pasos. Primero lo resolveremos para el caso especial de $m = 0$ para tener una idea de cuál será la solución, luego continuaremos y lo resolveremos para todos los m .

2.4.1 Polinomios de Legendre ($m = 0$)

- Resolver la parte $P(\theta)$ del potencial es lo suficientemente complejo como para tomar el caso especial $m = 0$ primero y luego tratar el caso $m \neq 0$ en una lección posterior.

- Para resolver la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right] + l(l+1)P(x) = 0,$$

intenta una solución en serie de potencias de la forma

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha} :$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (j+\alpha)(j+\alpha-1)a_j x^{j+\alpha-2} - (j+\alpha)(j+\alpha+1)a_j x^{j+\alpha} + l(l+1)a_j x^{j+\alpha} &= 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} (j+\alpha)(j+\alpha-1)a_j x^{j+\alpha-2} - \sum_{j=0}^{\infty} [(j+\alpha)(j+\alpha+1) - l(l+1)]a_j x^{j+\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

- Elimina las dos primeras potencias de x y luego combina las mismas potencias en una sola suma:

$$\begin{aligned} (\alpha)(\alpha-1)a_0 x^{\alpha-2} + (1+\alpha)(\alpha)a_1 x^{\alpha-1} + \sum_{j=0}^{\infty} [(j+2+\alpha)(j+\alpha+1)a_{j+2} \\ - [(j+\alpha)(j+\alpha+1) - l(l+1)]a_j]x^{j+\alpha} = 0 \end{aligned}$$

- Esto debe ser válido para todos los valores de x , por lo que cada potencia en la suma debe ser cero:

$$(\alpha)(\alpha - 1)a_0 = 0, \quad (1 + \alpha)(\alpha)a_1 = 0, \text{ y} \\ (j + \alpha + 2)(j + \alpha + 1)a_{j+2} - [(j + \alpha)(j + \alpha + 1) - l(l + 1)]a_j = 0$$

- La tercera ecuación se resuelve para obtener la relación de recurrencia, que nos da todos los términos restantes de la primera:

$$a_{j+2} = \frac{(j + \alpha)(j + \alpha + 1) - l(l + 1)}{(j + \alpha + 2)(j + \alpha + 1)}a_j$$

- Las dos primeras ecuaciones son redundantes, por lo que podemos elegir permanentemente $a_1 = 0$. De acuerdo con la relación de recurrencia anterior, esto significa que todos $a_{\text{impar}} = 0$. Podemos escribir la serie ahora como:

$$P_l(x) = \sum_{j=0, \text{ par}}^{\infty} a_j x^{j+\alpha}$$

- Para satisfacer las relaciones de recurrencia, nos quedan dos casos, $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

- Dependiendo de l , es evidente que $P_l(x)$ es una serie impar o una serie par.

- La solución solo converge para $x = 1$ si la serie es finita. La serie solo tendrá un número finito de términos si el coeficiente en la relación de recurrencia en algún punto es igual a cero:

$$\frac{(j_{\max} + \alpha)(j_{\max} + \alpha + 1) - l(l + 1)}{(j_{\max} + \alpha + 2)(j_{\max} + \alpha + 1)} = 0$$

- Aplicamos nuestros dos casos:

- Si $\alpha = 0$: $(j_{\max})(j_{\max} + 1) - l(l + 1) = 0$ con la solución $j_{\max} = l$, e insertando:

$$P_l(x) = \sum_{j=0, \text{ par}}^l a_j x^j$$

- Podemos reescribir la suma de los enteros pares como una suma de todos los enteros si duplicamos los índices:

$$P_l(x) = \sum_{j=0}^{l/2} a_{2j} x^{2j} \text{ donde } a_{j+2} = \frac{j(j + 1) - l(l + 1)}{(j + 2)(j + 1)} a_j \text{ si } l \text{ es par}$$

- Si $\alpha = 1$: $(j_{\max} + 1)(j_{\max} + 2) - l(l+1) = 0$ con la solución $j_{\max} = l - 1$, y conectando:

$$P_l(x) = \sum_{j=0, \text{ par}}^{l-1} a_j x^{j+1}$$

- Reescribe las sumas sobre enteros pares como una suma sobre todos los enteros duplicando los índices:

$$P_l(x) = \sum_{j=0}^{(l-1)/2} a_{2j} x^{2j+1}$$

donde $a_{j+2} = \frac{(j+1)(j+2)-l(l+1)}{(j+3)(j+2)} a_j$ si l es impar

- Podemos mostrar explícitamente la solución para valores bajos de l donde las ecuaciones son simples:

$$P_0(x) = a_0$$

$$P_1(x) = a_0 x$$

$$P_2(x) = a_0 + a_2 x^2 \text{ donde } a_2 = -3a_0 \text{ dando } P_2(x) = a_0 (1 - 3x^2)$$

$$P_3(x) = a_0 x + a_2 x^3 \text{ donde } a_2 = -\frac{5}{3}a_0 \text{ dando } P_3(x) = a_0 \left(x - \frac{5}{3}x^3\right)$$

- El factor de escala general a_0 es arbitrario para cada caso y se establece convencionalmente de modo que $P_l(1) = 1$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (-1 + 3x^2)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (-3x + 5x^3)$$

- Debemos recordar que x es solo un marcador de posición para $\cos \theta$ en nuestro análisis, por lo que realmente tenemos:

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (-1 + 3 \cos^2 \theta)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2} (-3 \cos \theta + 5 \cos^3 \theta)$$

- Los Polinomios de Legendre tienen las siguientes propiedades matemáticas (las derivaciones se dejan como ejercicios para el alumno curioso).

- Simetría impar o par respecto al origen: $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$

- Fórmula de Rodrigues:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

- Relaciones de recurrencia:

$$P_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{l+1} P_l(x) - \frac{l}{(l+1)} P_{l-1}(x)$$

y

$$P_l(x) = \frac{1}{2l+1} \frac{d}{dx} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]$$

- Tenga en cuenta que los polinomios de Legendre no están definidos para l negativo, por lo que las ecuaciones anteriores no se pueden usar para expandir $P_0(x)$. Al resolver problemas, esto generalmente significa que tenemos que resolver el término $l = 0$ por separado de los términos $l > 0$.

- La condición de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}$$

y en términos del ángulo polar:

$$\int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}$$

- Tenga en cuenta que la declaración de ortogonalidad anterior solo es válida si los límites de la integral son cero y π . Si te encuentras con una integral con diferentes límites, no puedes usar la declaración de ortogonalidad para resolver la integral.

- Los Polinomios de Legendre forman un conjunto completo de funciones ortogonales en el intervalo $(-1, 1)$, por lo que cualquier función $f(x)$ y se expandirá en términos de Polinomios de Legendre:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \text{ donde } A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx$$

- Se ha resuelto la solución general de la Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas para el caso especial de ($m = 0$) (cuando ambos polos requieren una solución finita):

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

donde $P_l(x)$ son los Polinomios de Legendre.

2.4.2 Ecuación de Laplace con simetría azimutal

- Si se cumple la condición $m = 0$ y si la región de solución válida incluye todo el barrido de 2π radianes de ϕ , entonces se dice que el problema tiene simetría azimutal. La solución anterior se aplica a cualquier problema en el

que las condiciones de contorno y no dependan del ángulo acimutal, sino que sean uniformes en esta dirección.

- Como ejemplo, considere una **esfera de radio a con el potencial $V(\theta)$** en su superficie y deseamos encontrar el potencial en todas partes dentro de la esfera.

- Debido a que la región de solución válida incluye el origen, las constantes $B_l = 0$ para evitar que la solución explote, lo que lleva a:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

- Aplicar la condición de frontera: $\Phi(r = a, \theta) = V(\theta)$

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta)$$

- Multiplica ambos lados por $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$ e integra sobre theta de 0 a π :

$$\int_0^\pi V(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

- Ahora usa la condición de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l},$$

donde $x = \cos \theta$

$$\int_0^\pi V(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_{-1}^1 V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

- Así la solución final es, de una forma más intuitiva:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta) \quad \text{donde } A_l = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

- Considere dos capas hemisféricas de radio a donde la mitad inferior se mantiene en cero y la mitad superior se mantiene en un potencial fijo V .

$$A_l = \frac{2l+1}{2} V \int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

- Hacer la sustitución $x = \cos \theta$:

$$A_l = \frac{2l+1}{2} V \int_0^1 P_l(x) dx$$

- Hay que tener cuidado de hacer el caso $l = 0$ aparte, como es típico en este tipo de problemas.

- Para $l = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} V \int_0^1 P_0(x) dx \\ A_0 &= \frac{1}{2} V \int_0^1 dx \\ A_0 &= \frac{1}{2} V \end{aligned}$$

- Para $l > 0$, usamos la relación

$$P_l(x) = \frac{1}{2l+1} \frac{d}{dx} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]$$

para encontrar:

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{2l+1}{2} V \int_0^1 P_l(x) dx \\ A_l &= \frac{1}{2} V [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]_0^1 \\ A_l &= \frac{1}{2} V [-P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)] \end{aligned}$$

- Así la solución final es:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} V \sum_{l=1}^{\infty} [-P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)] \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta)$$

- Si r es mucho menor que a , podemos mantener los primeros términos que no desaparecen:

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta) \approx & \frac{1}{2}V \\ & + \frac{3}{4}V\left(\frac{r}{a}\right)\cos\theta \\ & - \frac{7}{32}V\left(\frac{r}{a}\right)^3(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ & + \frac{11}{16^2}V\left(\frac{r}{a}\right)^5(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)\end{aligned}$$

- Con el uso de software de gráficos, es fácil trazar estos primeros cuatro términos, como se muestra en Fig. 3
- El gráfico demuestra que incluso manteniendo los primeros cuatro términos se obtiene un potencial que cumple aproximadamente las condiciones de contorno, aunque es obvio que la precisión se pierde en ciertos puntos cerca de la superficie, cuando r está cerca de a .
- Muchos problemas similares con simetría azimutal se pueden resolver de la misma manera.

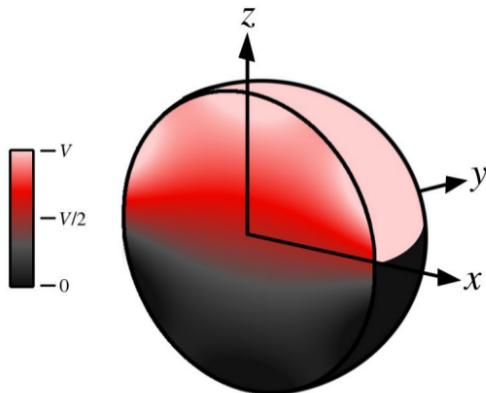


Figure 3: Gráfico de los primeros cuatro términos del potencial.

2.4.3 Expansión del potencial de carga puntual en Legendre

- Considere una carga unitaria colocada en el eje z . El potencial sentido en \mathbf{r} de la unidad de carga en \mathbf{r}_0 en el eje z (usando la definición) es:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\theta}}$$

- El potencial es obviamente **azimutalmente simétrico** y, por lo tanto, puede

expresarse en términos de [polinomios de Legendre](#):

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

- Para encontrar los coeficientes A_l y B_l , observamos que esta ecuación debe cumplirse para todos los θ , por lo que podemos simplificar el problema eligiendo un determinado θ . Elegir $\theta = 0$ produce:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0}} &= \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) \\ \frac{1}{|r - r_0|} &= \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) \end{aligned}$$

- Para $r < r_0$ (el punto de observación está más cerca del origen que de la carga):

$$\frac{1}{r_0 - r} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1})$$

- Multiplicar por r_0 :

$$\frac{1}{1 - \frac{r}{r_0}} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r_0 r^l + B_l r_0 r^{-l-1})$$

- Expande el lado izquierdo usando la [serie geométrica](#):

$$\frac{1}{1 - s} = \sum_{l=0}^{\infty} s^l.$$

Esta expansión solo converge si $s < 1$. Es por eso que formamos la ecuación anterior en términos de r/r_0 .

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r_0 r^l + B_l r_0 r^{-l-1})$$

- Ahora es obvio que $B_l = 0$ y todos los términos deben coincidir, quedando:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{r_0} \right)^l &= A_l r_0 r^l \\ A_l &= r_0^{-(l+1)} \end{aligned}$$

- Conectar esto nos da la expansión final:

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos \theta) \text{ si } r < r_0}$$

- Para $r > r_0$ (el punto de observación está más alejado del origen que la carga):

$$\frac{1}{r - r_0} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1})$$

- Multiplicar por r :

$$\frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^{l+1} + B_l r^{-l})$$

- Nuevamente expanda la izquierda en una serie geométrica:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^{l+1} + B_l r^{-l})$$

- Ahora $A_l = 0$ y cada término debe coincidir:

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^l = B_l r^{-l}$$

$$B_l = r_0^l$$

- Conectar esto nos da la expansión final:

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \text{ si } r > r_0}$$

- Estrictamente hablando, la expansión de carga puntual que se muestra arriba en los recuadros **solo es válida para una carga puntual en el eje positivo z .** Pero podemos obtener una expresión que sea válida **para una carga puntual en el eje negativo z ,** si sustituimos θ con $(\pi - \theta)$ debido a la simetría:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos(\theta - \pi)) \quad \text{si } r < r_0 \text{ y la carga puntual está en el eje negativo } z$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} P_l(-\cos \theta) \quad \text{si } r < r_0 \text{ y la carga puntual está en el eje negativo } z$$

- Usando de la propiedad. $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$, finalmente tenemos

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} (-1)^l P_l(\cos \theta)} \quad \text{si } r < r_0 \text{ y la carga puntual está en el eje z negativo}$$

- Del mismo modo, podemos mostrar:

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} (-1)^l P_l(\cos \theta)} \quad \text{si } r > r_0 \text{ y la carga puntual está en el eje z negativo}$$

- Como ejemplo de la utilidad de esta expansión, considere un dipolo donde una carga q está ubicada en $z = a$ y $-q$ está ubicada en $z = -a$.

- El potencial creado por este dipolo es:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - a(\hat{\mathbf{z}})|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - a(-\hat{\mathbf{z}})|}$$

- Para puntos alejados del origen y de las cargas:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} (-1)^l P_l(\cos \theta) \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - (-1)^l) \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1}}{r^{2l+2}} P_{2l+1}(\cos \theta)$$

- Para r muy grandes (o a muy pequeños, recordando que un dipolo perfecto es cuando a tiende a cero) el potencial se puede aproximar como el primer término de esta serie:

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{r^2} \cos \theta$$

- Si definimos el momento dipolar como la carga por la separación: $p = q(2a)$ entonces el potencial de un dipolo toma la forma familiar:

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

donde el signo aproximadamente igual se convierte en un signo exactamente igual para dipolos perfectos.

2.4.4 Polinomios asociados de Legendre

- Ahora volvemos a resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas cuando no hay simetría azimutal resolviendo la ecuación de Legendre completa para $m = 0$ y $m \neq 0$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_l^m(x)}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0 \text{ donde } x = \cos \theta$$

- Una vez resuelta esta ecuación, la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas tendrá la forma:

- Once this equation is solved, the general solution for the Laplace equation in spherical coordinates will have the form:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi) &= \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) (A_{m0} + B_{m0} \phi) P_l^{m=0}(\cos \theta) \\ &+ \sum_{m \neq 0, l} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}) P_l^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

- Encouraged by the Rodrigues' form of the solution to the $m = 0$ Legendre equation, we try a solution of the form

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} g(x)$$

and substitute in:

$$\begin{aligned} 0 &= -mx (1 - x^2)^{m/2} \left[\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} g(x) \right] + m^2 \frac{d^m}{dx^m} g(x) x^2 (1 - x^2)^{m/2-1} - m \frac{d^m}{dx^m} g(x) (1 - x^2)^{m/2} \\ &+ (1 - x^2)^{m/2+1} \left[\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} g(x) \right] - (m+2)x (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} g(x) \\ &+ [l(l+1)] (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} g(x) - m^2 (1 - x^2)^{m/2-1} \frac{d^m}{dx^m} g(x) \end{aligned}$$

- Collect all similar terms:

$$0 = (1 - x^2) \left[\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right] - 2[m+1]x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} g(x) + [l(l+1) - m(m+1)] \frac{d^m}{dx^m} g(x)$$

- We want to move as much as possible inside the derivatives. We can do this by using the product rule.

- The product rule used m times states:

$$\frac{d^m}{dx^m}(uv) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \left[\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} u \right] \left[\frac{d^k}{dx^k} v \right]$$

- Let us try to apply this to rearrange the first term in the differential equation.

- If $u = 1 - x^2$ then $\frac{d}{dx}u = -2x$, $\frac{d^2}{dx^2} = -2$ and all higher derivatives in the expansion are zero so that:

$$\frac{d^m}{dx^m} ((1 - x^2) v) = (1 - x^2) \left[\frac{d^m}{dx^m} v \right] - 2mx \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} v \right] - m(m-1) \left[\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} v \right]$$

- Moving terms around:

$$(1 - x^2) \left[\frac{d^m}{dx^m} v \right] = \frac{d^m}{dx^m} ((1 - x^2) v) + 2mx \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} v \right] + m(m-1) \left[\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} v \right]$$

- Now if we set $v = \frac{d^2}{dx^2} g(x)$ this product rule expansion becomes:

$$(1 - x^2) \left[\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right] = \frac{d^m}{dx^m} \left((1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right) + 2mx \left[\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} g(x) \right] + m(m-1) \left[\frac{d^m}{dx^m} g(x) \right]$$

- We can use this product rule to rearrange the first term of the Legendre equation so it becomes:

$$0 = \frac{d^m}{dx^m} \left[(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right] - 2x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} g(x) + l(l+1) \frac{d^m}{dx^m} g(x) - 2m \left[\frac{d^m}{dx^m} g(x) \right]$$

- Now we want to use the product rule expansion on the second term of the Legendre equation. With $u = x$, $\frac{du}{dx} = 1$, all higher derivatives are zero and $v = \frac{d}{dx}g(x)$, the general product rule becomes:

$$\frac{d^m}{dx^m} \left[x \frac{d}{dx} g(x) \right] = x \left[\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} g(x) \right] + m \left[\frac{d^m}{dx^m} g(x) \right]$$

- After rearranging:

$$x \left[\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} g(x) \right] = \frac{d^m}{dx^m} \left[x \frac{d}{dx} g(x) \right] - m \left[\frac{d^m}{dx^m} g(x) \right]$$

- Substitute in:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} g(x) - 2 \left[x \frac{d}{dx} g(x) \right] + l(l+1)g(x) \right] \\ 0 &= \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} g(x) \right) + l(l+1)g(x) \right] \end{aligned}$$

- It is worth noting that if this is true for $m = 0$, then it will automatically be true for all m . So we can set $m = 0$:

$$0 = \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} g(x) \right) + l(l+1)g(x)$$

- Now this is just the $m = 0$ Legendre equation, which we have already solved. We found the solutions to be the ordinary Legendre polynomials, $P_l(x)$, so that $g(x) = P_l(x)$.

- We now have the solution to the full Legendre equation:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

- There is an arbitrary phase factor that we have assumed to be one for simplicity, but is conventionally set to $(-1)^m$, so that the associated Legendre functions become:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

- Or written explicitly using Rodrigues' equation:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2 - 1)^l$$

- It is worth noting upon examination of the equation

$$0 = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} g(x) \right) + l(l+1)g(x) \right]$$

that the highest power of x inside the brackets is l , so that m cannot be greater than l , otherwise the equation would be trivially satisfied and thus there would be no unique solution. In summary, both l and m are integers and the possible m are $-l, -(l-1), \dots, 0, \dots, (l-1), l$. - Several useful mathematical relations involving the associated Legendre functions can be found (the derivations are left to the interested student).

$$\begin{aligned} P_l^{-m}(x) &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \\ (l-m+1)P_{l+1}^m(x) &= (2l+1)xP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) \\ \sqrt{1-x^2}P_l^{m+1}(x) &= (l-m)xP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) \\ (x^2-1) \frac{d}{dx}P_l^m(x) &= lxP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) \end{aligned}$$

- For fixed m , the Legendre functions form an orthogonal set:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}^m(x)P_l^m(x)dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l}$$

2.4.5 Armónicos esféricos

- Con la ecuación de Legendre completa ahora resuelta, se ha encontrado la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) (A_{m0} + B_{m0}\phi) P_l^{m=0}(\cos\theta) \\ &\quad + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}) P_l^m(\cos\theta) \end{aligned}$$

donde P_l^m son las funciones de Legendre asociadas.

- Por lo general, la mayoría de los problemas requieren una solución válida en el rango completo de ϕ . El requisito de un solo valor en este caso obliga a $B_{m0} = 0$, y el término $m = 0$ ahora se puede incluir en la suma con el resto de los términos:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}) P_l^m(\cos\theta)$$

- Una forma alternativa de presentar esto es dejar que m sume de $-l$ a l y así combinar los términos A_m y B_m con las otras constantes:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{l,m} r^l + B_{l,m} r^{-l-1}) e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

- Los términos de normalización están incluidos en las constantes indeterminadas A_{lm} y B_{lm} . Cuando se aplica una condición de contorno, estas constantes se especifican y los términos de normalización resultan de forma natural. Sin embargo, para que las matemáticas sean más claras, podemos extraer explícitamente los términos de normalización de las constantes por adelantado.

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{l,m} r^l + B_{l,m} r^{-l-1}) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

- Ahora es evidente que $P_l^m(\cos \theta)$ multiplicado por su término de normalización forma un conjunto completo de funciones ortonormales en la variable θ , indexadas por l para un m fijo, y $e^{im\phi}$ multiplicado por su término de normalización forma un conjunto completo de funciones ortonormales en la variable ϕ , indexadas por m . El producto de ambos crea funciones ortonormales que abarcan todos los ángulos del círculo unitario. Estos se conocen como “armónicos esféricos” Y_{lm} :

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

de modo que

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{l,m} r^l + B_{l,m} r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

- La ortonormalidad de los armónicos esféricos significa explícitamente que:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{l'm'}^*(x, \phi) Y_{lm}(x, \phi) dx d\phi = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \text{ donde } x = \cos \theta \\ & \circ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \end{aligned}$$

- La validez de esta ecuación se puede comprobar de manera trivial expresando los armónicos esféricos en términos de su definición y aplicando la ortonormalidad de las funciones de Legendre asociadas y los exponentiales complejos.

- Usando las definiciones de los armónicos esféricos, el estudiante paciente puede calcular la forma analítica explícita para cualquier l y m dados. Los armónicos esféricos de orden más bajo son especialmente simples y normalmente se tabulan en los libros de texto.

- Debido a que los armónicos esféricos forman un conjunto ortonormal de ecuaciones, una función arbitraria $f(\theta, \phi)$ puede expandirse en términos de armónicos esféricos:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \text{ donde } A_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

- Hay varios casos especiales útiles para armónicos esféricos que debemos tener en cuenta.

- Si $m = 0$, el armónico esférico no depende del ángulo acimutal y la función de Legendre asociada se reduce a un polinomio de Legendre:

$$Y_{l,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

- Si $m = l$, la dependencia del armónico esférico del ángulo polar se vuelve especialmente simple, solo la función seno a la potencia $m^{\text{ésima}}$, por lo que solo hay un máximo en esta dirección:

$$Y_{m,m}(\theta, \phi) = \frac{(-1)^m}{2^m m!} \sqrt{\frac{(2m+1)(2m)!}{4\pi}} e^{im\phi} \sin^m \theta$$

- Los armónicos esféricos con potencias negativas de m están trivialmente relacionados con los de potencias positivas:

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \phi)$$

- Las regiones de interés incluyen el eje z positivo y negativo, donde los armónicos esféricos se simplifican:

$$Y_{lm}(0, \phi) = \text{ilegible}$$

$$\text{y } Y_{lm}(\pi, \phi) = \left\{ \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} (-1)^l \text{ si } m \neq 0 \right\}$$

2.4.6 Problemas de frontera en coordenadas esféricas

- Considere el problema donde existe una región del espacio sin cargas, limitada por una esfera de radio r_0 centrada en el origen en la que existe un

potencial $\Phi(r = r_0, \theta, \phi) = V(\theta, \phi)$. Queremos saber el potencial dentro de la esfera. Usamos la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\boxed{\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta, \phi)}$$

- La región de interés incluye el origen, por lo tanto $B_{lm} = 0$ para evitar que la solución explote allí:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

- Ahora aplica la condición de contorno:

$$V(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}r_0^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

- Esta es una expansión en armónicos esféricos, y las constantes son así:

$$A_{lm}r_0^l = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi V(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

- La solución es entonces:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}r^l Y_{lm}(\theta, \phi) \text{ donde } A_{lm} = r_0^{-l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi V(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

- O escrito de una manera más intuitiva redefiniendo la constante:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{r_0} \right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \text{ donde } A_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi V(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

2.4.7 El teorema de la adición para armónicos esféricos

- Considere dos vectores de coordenadas (r, θ, φ) y (r', θ', φ') que tienen el ángulo γ entre ellos.

- El polinomio de Legendre en función del ángulo entre ellos, $P_l(\cos \gamma)$ se puede expandir en armónicos esféricos de los vectores de coordenadas:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

- Esto se conoce como el [teorema de la suma](#).

- Previamente, derivamos el potencial en \mathbf{r} en coordenadas esféricas que resulta de una unidad de carga en algún punto \mathbf{r}_0 en el eje z como:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos \theta) \text{ si } r < r_0 \text{ y } \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \text{ si } r > r_0$$

- Las ecuaciones siguen siendo válidas cuando el punto \mathbf{r}_0 está fuera del eje z si los polinomios de Legendre se convierten en funciones del ángulo γ entre el punto de observación \mathbf{r} y el punto de origen \mathbf{r}_0 .

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \text{ si } r < r_0 \text{ y } \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \text{ si } r > r_0$$

- Esta ecuación no es muy útil porque el ángulo γ depende de las coordenadas esféricas.

- Podemos usar el teorema de la suma para expandir el polinomio de Legendre de modo que la expresión sea una función de coordenadas esféricas en lugar de una función del ángulo entre vectores de coordenadas:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \text{ si } r < r_0$$

y

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r_0^l}{r^{l+1}} \frac{1}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \text{ si } r > r_0$$

- Esto será útil si queremos conocer el potencial producido por múltiples cargas puntuales en coordenadas explícitas.

2.5 Ecuación de Laplace en Coordenadas Cilíndricas

- Anteriormente, resolvimos la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para el caso especial de que las condiciones de contorno sean uniformes en la dimensión z y el problema se reduzca a coordenadas polares.

- Ahora revisamos el problema cuando las condiciones de contorno no son uniformes en la dimensión z .

- La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

- Utilizando el método de separación de variables intentando una solución de la forma:

$$\Phi(r, \phi, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$$

y sustituyéndolo en:

$$Q(\phi)Z(z) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + R(\rho)Z(z) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \phi^2} + R(\rho)Q(\phi) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

- Dividir por $R(\rho)Q(\phi)Z(z)$:

$$\frac{1}{R(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{Q(\phi)} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

- El último término depende solo de z y los demás términos no para que sean válidos para todos los z , deben estar relacionados por una constante:

$$\frac{1}{R(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{Q(\phi)} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \phi^2} + k^2 = 0 \text{ donde } k^2 = \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

- Multiplica la ecuación de la izquierda por ρ^2 :

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{Q(\phi)} \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial \phi^2} + k^2 \rho^2 = 0 \text{ donde } k^2 = \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

- El segundo término ahora depende solo de ϕ y el resto de los términos no, por lo que lo establecemos en una constante. Todas las derivadas parciales se convierten en derivadas regulares ya que las funciones son de una sola variable ahora:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) - v^2 + k^2 \rho^2 = 0 \text{ donde } -v^2 = \frac{1}{Q(\phi)} \frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2}, \quad k^2 = \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

- Ponemos cada ecuación de una forma más intuitiva:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left(k^2 - \frac{v^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0 \quad \text{donde} \quad \frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2} = -v^2 Q(\phi), \quad \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = k^2 Z(z)$$

- Para obtener la solución más general, debemos cubrir los cuatro casos:

- Caso 1: Si $v = 0$ y $k = 0$ entonces las soluciones son:

$$R(\rho) = A_{0,0} + B_{0,0} \ln \rho, \quad Q(\phi) = C_{0,0} + D_{0,0} \phi \quad \text{y} \quad Z(z) = F_{0,0} + G_{0,0} z$$

- La solución particular completa es el producto de estas partes.

- Caso 2: Si $v \neq 0$ y $k = 0$ entonces las soluciones son:

$$R(\rho) = A_{v,0} \rho^v + B_{v,0} \rho^{-v}, \quad Q(\phi) = C_{v,0} e^{iv\phi} + D_{v,0} e^{-iv\phi} \quad \text{y} \quad Z(z) = F_{v,0} + G_{v,0} z$$

- La solución particular completa es el producto de estas partes.

- Caso 3: Si $v = 0$ y $k \neq 0$, las soluciones a las dos últimas ecuaciones son:

$$Q(\phi) = C_{0,k} + D_{0,k} \phi, \quad Z(z) = F_{0,k} e^{kz} + G_{0,k} e^{-kz}$$

La ecuación diferencial que involucra a R tiene la misma solución que el siguiente caso y se manejará con ella.

- Caso 4: Si $v \neq 0$ y $k \neq 0$, las soluciones de las dos últimas ecuaciones son:

$$Q(\phi) = C_{v,k} e^{iv\phi} + D_{v,k} e^{-iv\phi} \quad Z(z) = F_{v,k} e^{kz} + G_{v,k} e^{-kz}$$

Ecuación radial

- La ecuación diferencial que involucra a R debe resolverse intentando una solución en serie. Una vez encontrada, la solución general para este caso tendrá la forma:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{v \neq 0} \sum_{k \neq 0} R_{v,k}(\rho) (C_{v,k} e^{iv\phi} + D_{v,k} e^{-iv\phi}) (F_{v,k} e^{kz} + G_{v,k} e^{-kz})$$

- Primero simplifica la ecuación haciendo la sustitución: $x = k\rho$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dR(x)}{dx} \right) + \left(1 - \frac{v^2}{x^2} \right) R(x) = 0$$

- Pruebe una solución de la forma $R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha}$ y sustitúyala en:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha-2} ((j+\alpha)^2 - v^2) + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha} = 0$$

- Elimina los dos primeros términos de la suma de la izquierda y combina las sumas restantes:

$$a_0 x^{\alpha-2} (\alpha^2 - v^2) + a_1 x^{\alpha-1} ((1+\alpha)^2 - v^2) + \sum_{j=0}^{\infty} x^{j+\alpha} (a_{j+2} ((j+2+\alpha)^2 - v^2) + a_j) = 0$$

- Cada potencia de x es independiente, por lo que el coeficiente de cada potencia debe desaparecer:

$$a_0 (\alpha^2 - v^2) = 0 , \quad a_1 ((1+\alpha)^2 - v^2) = 0 , \quad a_{j+2} = -\frac{1}{((j+2+\alpha)^2 - v^2)} a_j$$

- De estos se encuentra que $\alpha = \pm\nu$, $a_{\text{impar}} = 0$ y $a_{j+2} = -\frac{1}{(j+2)(j+2\pm 2\nu)} a_j$

- Debido a que todas las potencias impares son cero, podemos iterar sobre todos los enteros y reescribir los índices:

$$a_{2j} = -\frac{1}{4j(j \pm v)} a_{2(j-1)} \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots$$

- En resumen, una solución a la ecuación R es la función Bessel J :

$$R_{v,k}(\rho) = J_v(k\rho)$$

donde

$$J_v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{2(j-1)} x^{2(j-1)+v}, \quad a_{2j} = -\frac{1}{4j(j+v)} a_{2(j-1)}$$

y por convención,

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$$

en términos de la función Gamma.

- Uno podría pensar que la otra solución a la ecuación R es J_{-v} , pero resulta que esto no depende linealmente de J_v cuando v es un número entero y debemos encontrar otra solución.

- Tradicionalmente se toma como otra solución linealmente independiente la función de Neumann, o función de Bessel de segunda clase. Se define por:

$$N_v(x) = \frac{J_v(x) \cos(v\pi) - J_{-v}(x)}{\sin(vx)}$$

- Las propiedades útiles, incluidas las relaciones de recurrencia, se pueden derivar fácilmente o encontrar en los libros de texto.

- La solución general para R , en términos de las funciones de Bessel, se convierte en:

$$R_{v,k}(\rho) = A_{v,k}J_v(k\rho) + B_{v,k}N_v(k\rho)$$

- La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para el caso 4 se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{v \neq 0} \sum_{k \neq 0} (A_{v,k}J_v(k\rho) + B_{v,k}N_v(k\rho)) (C_{v,k}e^{iv\phi} + D_{v,k}e^{-iv\phi}) (F_{v,k}e^{kz} + G_{v,k}e^{-kz})$$

- La solución más general de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es la suma de todas las soluciones de todos los casos posibles:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \phi, z) &= (A_{0,0} + B_{0,0} \ln \rho) (C_{0,0} + D_{0,0}\phi) (F_{0,0} + G_{0,0}z) \\ &\quad + \sum_{v \neq 0} (A_{v,0}\rho^v + B_{v,0}\rho^{-v}) (C_{v,0}e^{iv\phi} + D_{v,0}e^{-iv\phi}) (F_{v,0} + G_{v,0}z) \\ &\quad + \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k \neq 0}} (A_{0,k}J_0(k\rho) + B_{0,k}N_0(k\rho)) (C_{0,k} + D_{0,k}\phi) (F_{0,k}e^{kz} + G_{0,k}e^{-kz}) \\ &\quad + \sum_{v \neq 0} \sum_{k \neq 0} (A_{v,k}J_v(k\rho) + B_{v,k}N_v(k\rho)) (C_{v,k}e^{iv\phi} + D_{v,k}e^{-iv\phi}) (F_{v,k}e^{kz} + G_{v,k}e^{-kz}) \end{aligned}$$

- Para que sea útil, debemos encontrar conjuntos ortogonales de funciones que involucren las funciones de Bessel para que podamos usar la condición de ortogonalidad para invertir ecuaciones que involucren las condiciones de contorno. Las funciones:

$$\sqrt{\rho}J_v\left(x_{vn}\frac{\rho}{a}\right)$$

se puede demostrar que es ortogonal en el intervalo $(0, a)$ para v fijos y $n = 1, 2, 3, \dots$ donde x_{vn} son las raíces que satisfacen $J_v(x_{vn}) = 0$.

- Se puede demostrar que la [condición de ortogonalidad](#) para estas funciones es:

$$\boxed{\int_0^a \rho J_v\left(x_{vn'}\frac{\rho}{a}\right) J_v\left(x_{vn}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \delta_{n'n}}$$

- Esto se puede usar para expandir una función arbitraria en una serie de Bessel:

$$\boxed{f(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{vn} J_v\left(x_{vn}\frac{\rho}{a}\right) \text{ donde } A_{vn} = \frac{2}{a^2 J_{v+1}^2(x_{vn})} \int_0^a \rho f(\rho) J_v\left(x_{vn}\frac{\rho}{a}\right) d\rho.}$$

2.5.1 Problemas de Frontera en Coordenadas Cilíndricas

- Considere un cilindro con radio a y altura L con su parte inferior centrada en el origen. El potencial es cero en todas partes en la superficie del cilindro, excepto en la parte superior donde es un potencial $V(\rho, \phi)$. Esto conduce a las condiciones de frontera: $\Phi(\rho = a, \phi, z) = 0$, $\Phi(\rho, \phi, z = 0) = 0$, y $\Phi(\rho, \phi, z = L) = V(\rho, \phi)$

- La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es:

$$\begin{aligned}\Phi(\rho, \phi, z) &= (A_{0,0} + B_{0,0} \ln \rho) (C_{0,0} + D_{0,0} \phi) (F_{0,0} + G_{0,0} z) \\ &\quad + \sum_{v \neq 0} (A_{v,0} \rho^v + B_{v,0} \rho^{-v}) (C_{v,0} e^{iv\phi} + D_{v,0} e^{-iv\phi}) (F_{v,0} + G_{v,0} z) \\ &\quad + \sum_{k \neq 0} (A_{0,k} J_0(k\rho) + B_{0,k} N_0(k\rho)) (C_{0,k} + D_{0,k} \phi) (F_{0,k} e^{kz} + G_{0,k} e^{-kz}) \\ &\quad + \sum_{v \neq 0} \sum_{k \neq 0} (A_{v,k} J_v(k\rho) + B_{v,k} N_v(k\rho)) (C_{v,k} e^{iv\phi} + D_{v,k} e^{-iv\phi}) (F_{v,k} e^{kz} + G_{v,k} e^{-kz})\end{aligned}$$

- La región donde necesitamos una solución válida incluye el origen, por lo que varios de los coeficientes deben ser cero para evitar que la solución explote. Esto lleva a:

$$\begin{aligned}\Phi(\rho, \phi, z) &= (C_{0,0} + D_{0,0} \phi) (F_{0,0} + G_{0,0} z) \\ &\quad + \sum_{v \neq 0} \rho^v (C_{v,0} e^{iv\phi} + D_{v,0} e^{-iv\phi}) (F_{v,0} + G_{v,0} z) \\ &\quad + \sum_{k \neq 0} J_0(k\rho) (C_{0,k} + D_{0,k} \phi) (F_{0,k} e^{kz} + G_{0,k} e^{-kz}) \\ &\quad + \sum_{v \neq 0} \sum_{k \neq 0} J_v(k\rho) (C_{v,k} e^{iv\phi} + D_{v,k} e^{-iv\phi}) (F_{v,k} e^{kz} + G_{v,k} e^{-kz})\end{aligned}$$

- La región donde necesitamos una solución válida abarca el círculo completo de ángulos para ϕ , por lo que requerimos que la función tenga un solo valor:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \Phi(\rho, \phi + 2\pi, z)$$

- Esta igualdad debe cumplirse para todos los valores de todas las variables independientes, por lo que cada término debe coincidir. Este requisito conduce a: $D_{0,0} = 0$, $D_{0,k} = 0$ y $v = m$ donde $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho, \phi, z) = & (F_{0,0} + G_{0,0}z) \\
& + \sum_{m \neq 0} \rho^m (C_{m,0}e^{im\phi} + D_{m,0}e^{-im\phi}) (F_{m,0} + G_{m,0}z) \\
& + \sum_{k \neq 0} J_0(k\rho) (F_{0,k}e^{kz} + G_{0,k}e^{-kz}) \\
& + \sum_{m \neq 0} \sum_{k \neq 0} J_m(k\rho) (C_{m,k}e^{im\phi} + D_{m,k}e^{-im\phi}) (F_{m,k}e^{kz} + G_{m,k}e^{-kz})
\end{aligned}$$

- Aplicar la condición de contorno: $\Phi(\rho, \phi, z = 0) = 0$

$$\begin{aligned}
0 = & F_{0,0} \\
& + \sum_{m \neq 0}^m \rho^m (C_{m,0}e^{im\phi} + D_{m,0}e^{-im\phi}) F_{m,0} \\
& + \sum_{k \neq 0}^{k \neq 0} J_0(k\rho) (F_{0,k} + G_{0,k}) \\
& + \sum_{m \neq 0} \sum_{k \neq 0} J_m(k\rho) (C_{m,k}e^{im\phi} + D_{m,k}e^{-im\phi}) (F_{m,k} + G_{m,k})
\end{aligned}$$

- Esto lleva a los requisitos de que $F_{0,0} = 0$, $F_{m,0} = 0$, $G_{0,k} = -F_{0,k}$ y $G_{m,k} = -F_{m,k}$

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho, \phi, z) = & G_{0,0}z \\
& + \sum_{m \neq 0}^m \rho^m (C_{m,0}e^{im\phi} + D_{m,0}e^{-im\phi}) z \\
& + \sum_{k \neq 0}^{k \neq 0} J_0(k\rho) F_{0,k} \sinh(kz) \\
& + \sum_{m \neq 0} \sum_{k \neq 0} J_m(k\rho) (C_{m,k}e^{im\phi} + D_{m,k}e^{-im\phi}) \sinh(kz)
\end{aligned}$$

- Todos los términos $m = 0$ ahora tienen una forma por la cual se pueden combinar con los términos $m \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho, \phi, z) = & \sum_m \rho^m (C_{m,0}e^{im\phi} + D_{m,0}e^{-im\phi}) z \\
& + \sum_m \sum_{k \neq 0} J_m(k\rho) (C_{m,k}e^{im\phi} + D_{m,k}e^{-im\phi}) \sinh(kz)
\end{aligned}$$

- El primer término de la derecha es solo un caso especial del último término cuando $k = 0$ (cerca de cero, J_m tiene una forma asintótica que es proporcional a ρ^m). Se pueden combinar:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_m \sum_k J_m(k\rho) (C_{m,k} e^{im\phi} + D_{m,k} e^{-im\phi}) \sinh(kz)$$

- Aplicando las condiciones de borde $\Phi(\rho = a, \phi, z) = 0$:

$$0 = \sum_m \sum_k J_m(ka) (C_{m,k} e^{im\phi} + D_{m,k} e^{-im\phi}) \sinh(kz)$$

- Esto solo puede ser cierto para todos los valores de la variable independiente ϕ y z si los coeficientes son cero: $0 = J_m(ka)$ para todos los m y k

- Solo hay un conjunto discreto de soluciones para estas ecuaciones: sus raíces. Las raíces no se pueden encontrar analíticamente. Cuando se hace numéricamente, las raíces se designan como x_{mn} para $n = 1, 2, 3 \dots$ de modo que

$$k = \frac{x_{mn}}{a}$$

- La solución ahora se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) (C_{m,n} e^{im\phi} + D_{m,n} e^{-im\phi}) \sinh \left(x_{mn} \frac{z}{a} \right)$$

- La condición límite final es $\Phi(\rho, \phi, z = L) = V(\rho, \phi)$ ahora aplicada:

$$V(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) (C_{m,n} e^{im\phi} + D_{m,n} e^{-im\phi}) \sinh \left(x_{mn} \frac{L}{a} \right)$$

- Esta es una serie de Fourier en ϕ y una serie de Fourier-Bessel en ρ . Hallamos los coeficientes de la forma habitual.

Multiplica ambos lados por una exponencial e integra:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} V(\rho, \phi) e^{-im'\phi} d\phi &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) \int_0^{2\pi} \left(C_{m,n} e^{i(m-m')\phi} + D_{m,n} e^{i(-m-m')\phi} \right) d\phi \times \\ &\quad \times \sinh \left(x_{mn} \frac{L}{a} \right) \end{aligned}$$

- Usa la condición de ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(mm')x} dx = 2\pi \delta_{m,m \ prime}$$

y vuelva a etiquetar:

$$\int_0^{2\pi} V(\rho, \phi) e^{-im\phi} d\phi = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) C_{m,n} \sinh \left(x_{mn} \frac{L}{a} \right)$$

- Multiplica ambos lados por $\rho J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right)$ e integra:

$$\int_0^a \rho J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) V(\rho, \phi) e^{-im\phi} d\phi d\rho = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \rho J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) d\rho C_{m,n} \sinh \left(x_{mn} \frac{L}{a} \right)$$

- Use la condición de ortogonalidad:

$$\boxed{\int_0^a \rho J_v \left(x_{vn} \frac{\rho}{a} \right) J_v \left(x_{vn} \frac{\rho}{a} \right) d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{v+1}(x_{vn})]^2 \delta_{n'n}}$$

$$\int_0^a \rho J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) V(\rho, \phi) e^{-im\phi} d\phi d\rho = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(x_{mn})]^2 \delta_{n'n} C_{m,n} \sinh \left(x_{mn} \frac{L}{a} \right)$$

$$\int_0^a \rho J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) \int_0^{2\pi} V(\rho, \phi) e^{-im\phi} d\phi d\rho = \pi a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2 C_{m,n} \sinh \left(x_{mn} \frac{L}{a} \right)$$

- Resolver para el coeficiente:

$$C_{m,n} = \frac{\operatorname{csch} \left(x_{mn} \frac{L}{a} \right)}{\pi a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi}$$

- En exactamente el mismo proceso, se encuentra que el otro conjunto de coeficientes es:

$$D_{m,n} = \frac{\operatorname{csch} \left(x_{mn} \frac{L}{a} \right)}{\pi a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) e^{im\phi}$$

- Ahora es evidente que $D_{m,n} = C_{m,n}^*$

- En resumen, la solución final es:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) (C_{m,n} e^{im\phi} + C_{m,n}^* e^{-im\phi}) \sinh \left(x_{mn} \frac{z}{a} \right)$$

donde

$$C_{m,n} = \frac{\operatorname{csch} \left(x_{mn} \frac{L}{a} \right)}{\pi a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m \left(x_{mn} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi}$$

2.6 Resumen

- Densidad de carga superficial inducida en la esfera

$$\left[(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \right]_{n=n_0}$$

- Escribiendo el campo eléctrico en términos de potencial y despejando la densidad de carga:

$$\sigma = \left[-\epsilon_0 \frac{d\Phi}{dr} \right]_{r=a}$$

- La ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ se usa cuando una región sin carga está limitada por un límite donde se conoce el potencial. En coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\alpha^2 X(x), \quad \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -\beta^2 Y(y), \quad \frac{d^2Z(z)}{dz^2} &= \gamma^2 Z(z) \end{aligned}$$

Las soluciones para $X(x)$ e $Y(y)$ son análogas a la del oscilador armónico.

$$X(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, \quad Y(y) = Ce^{i\beta y} + De^{-i\beta y}, \quad Z(z) = Fe^{\gamma z} + Ge^{-\gamma z}$$

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad Y(y) = C \sin ky + D \cos ky,$$

$$\Phi(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky).$$

$$e^{kx} + e^{-kx} = 2 \cosh kx,$$

$$\int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \begin{cases} 0, & \text{si } n' \neq n, \\ \frac{a}{2}, & \text{si } n' = n. \end{cases}$$

densidad de carga inducida

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

Ec. Laplace en polares

Debido a la simetría del problema, es evidente que la solución se expresará mejor en coordenadas cilíndricas. Además, debido a que la solución será

independiente de la coordenada z , el problema se reduce a las dos dimensiones de las coordenadas polares (ρ, ϕ) . Debido a que el problema no contiene carga, el problema se simplifica para resolver la ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ en coordenadas polares y aplicar la condición límite $\Phi(\rho = b, \phi) = V(\phi)$ donde:

La ecuación de Laplace en coordenadas polares es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

La separación de variables conduce a la solución general:

$$\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho) (A_0 + B_0 \phi) + \sum_{v, v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v}) (A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi})$$

Deseamos una solución válida en el origen, que solo es posible si $b_0 = 0$ y $b_v = 0$ para que la solución sea:

$$\Phi(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \phi + \sum_{v, v \neq 0} \rho^v (A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi})$$

Deseamos una única solución válida en todo el rango angular, por lo que el requisito de valor único significa $\Phi(\rho, \phi) = \Phi(\rho, \phi + 2\pi)$. Cuando aplicamos esto, obtenemos:

$$A_0 + B_0 \phi + \sum_{v, v \neq 0} \rho^v (A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi}) = A_0 + B_0 (\phi + 2\pi) + \sum_{v, v \neq 0} \rho^v (A_v e^{iv(\phi+2\pi)} + B_v e^{-iv(\phi+2\pi)})$$

Lo que lleva a $B_0 = 0$ y $v = n$ donde $n = 1, 2, \dots$

Busquemos ahora los coeficientes A_n . Multiplique (36) a ambos lados por $e^{-in'\phi}$ e integre sobre todos los ángulos ϕ :

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-in'\phi} d\phi = A_0 \int_0^{2\pi} e^{-in'\phi} d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} b^n \left(A_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi + B_n \int_0^{2\pi} e^{-i(n+n')\phi} d\phi \right)$$

Usar la condición de ortonormalidad

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi \delta_{k,k'}$$

la densidad de carga superficial en un conductor está relacionada con el potencial de acuerdo con:

$$\boxed{\sigma = \left[-\epsilon_0 \frac{d\Phi}{dn} \right]_{n=a}}$$

Laplace en esféricas

Debido a la geometría esférica del problema y la ausencia de carga, optamos por resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Utilizando el método de separación de variables se llega a la solución general:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi) &= \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) (A_{m=0} + B_{m=0} \phi) P_l^{m=0}(\cos \theta) \\ &+ \sum_{m \neq 0, l} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}) P_l^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

Laplace en esféricas con simetría azimutal

Los límites en este problema son todos azimutalmente simétricos, por lo que la solución para el potencial eléctrico no será una función de ϕ . La única forma de hacer que la solución general sea independiente de ϕ es establecer $m = 0$ y $B_{m=0} = 0$.

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l^{m=0}(\cos \theta)$$

Los coeficientes A_l y B_l se determinan mediante las condiciones de frontera del problema.

Ortogonalidad de los Polinomios de Legendre

El truco de Fourier, los polinomios de Legendre (como los senos) son funciones ortogonales:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx &= \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } l' \neq l, \\ \frac{2}{2l+1}, & \text{si } l' = l. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}}$$

Los polinomios $P_l(x)$ son un conjunto de funciones de cuadrado integrable y ortogonales en el intervalo $x \in [-1, 1]$; esto es

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(x) P_l(x) dx = \frac{2}{(2l+1)} \delta_{ll'}$$

Note que los polinomios P_l son ortogonales, pero no ortonormales. Los polinomios de Legendre constituyen una base ortogonal para funciones $f(x)$ de cuadrado integrable definidas en el intervalo $x \in [-1, 1]$,

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$$

$$A_l = \frac{(2l+1)}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx$$

En términos de la variable angular $\theta \in [0, \pi]$, tal que $x = \cos \theta$, tenemos

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta)$$

$$A_l = \frac{(2l+1)}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Propiedades de los Polinomios de Legendre

Identidad:

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

Algunas propiedades de los polinomios de Legendre son

i) $P_l(x)$ es par, si l es par. $P_l(x)$ es impar, si l es impar.

ii) $P_l(1) = 1, \forall l. P_l(-1) = (-1)^l.$

iii) $P_l(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } l \text{ es impar.} \\ (-1)^{l/2} \frac{(l-1)!!}{l!!}, & \text{si } l \text{ es par.} \end{cases}$ donde

$$(l-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \cdots \times (l-1)$$

$$l!! = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times l$$

iv) $\int_0^1 P_l(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } l \text{ es par.} \\ (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(l-2)!!}{(l+1)!!}, & \text{si } l \text{ es impar} \end{cases}$

Expansión del potencial de carga puntual en Legendre

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}}$$

$$\frac{1}{|r - r_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1})$$

la serie geométrica:

$$\frac{1}{1-s} = \sum_{l=0}^{\infty} s^l.$$

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos \theta) \text{ si } r < r_0}$$

Armónicos esféricos

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{l,m} r^l + B_{l,m} r^{-l-1}) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

de modo que

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{l,m} r^l + B_{l,m} r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

- La ortonormalidad de los armónicos esféricos significa explícitamente que:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{l'm'}^*(x, \phi) Y_{lm}(x, \phi) dx d\phi = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \text{ donde } x = \cos \theta$$

$$\text{o } \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

- Esto se conoce como el [teorema de la suma](#).

$$\boxed{P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}$$

- La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

2.7 Problemas

1. Dos placas de metal conectadas a tierra (Sol: 13.9)

Dos placas infinitas de metal conectadas a tierra se encuentran paralelas al plano xz , una en $y = 0$ y la otra en $y = a$. El extremo izquierdo, en $x = 0$, se cierra con una tira infinita aislada de las dos placas y mantenida a un potencial específico $\Phi_0(y)$. Encuentre el potencial dentro de esta ranura.

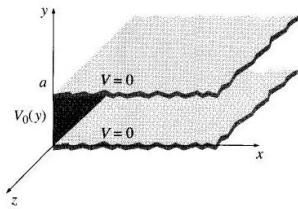


Figure 4: La ranura.

2. Potencial en la tapa de una caja

Considere por simplicidad una caja con una esquina en el origen y la esquina opuesta en el punto (a, b, c) en las dimensiones (x, y, z) , donde el potencial es cero en todas partes en la superficie de la caja excepto en la superficie $z = c$ donde hay un potencial:

$$\Phi(x, y, z = c) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

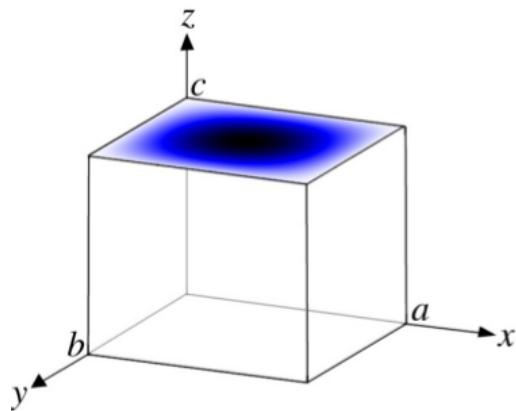


Figure 5: Caja.

Sol: 13.10

3. Ranura infinita

Dos placas de metal conectadas a tierra infinitamente largas, nuevamente en $y = 0$ y $y = a$, están conectadas en $x = \pm b$ mediante tiras de metal que se mantienen a un potencial constante V_0 , como se muestra en la figura 6 (una fina capa de aislamiento en cada esquina evita que se produzca un cortocircuito). Encuentre el potencial dentro de la tubería rectangular resultante.

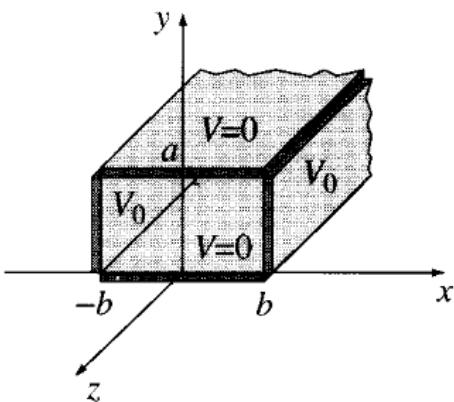


Figure 6: Dos placas de metal conectadas a tierra infinitamente largas.

Solución: 13.9

4. Tubería rectangular

Una tubería de metal rectangular infinitamente larga (lados a y b) está conectado a tierra, pero un extremo, en $x = 0$, se mantiene a un potencial especificado $V_0(y, z)$, como se indica en la figura 52. Encuentre el potencial dentro de la tubería.

Solución: 13.12

5. Tubería rectangular 2

Una tubería rectangular, paralela al eje z (desde $-\infty$ hasta $+\infty$), tiene tres lados metálicos conectados a tierra, en $y = 0$, $y = a$ y $x = 0$. El cuarto lado, en $x = b$, se mantiene en un potencial especificado $V_0(y)$.

(a) Desarrolle una fórmula general para el potencial dentro de la tubería.

(b) Encuentre el potencial explícitamente, para el caso $V_0(y) = V_0$ (una constante).

Solución: 13.14

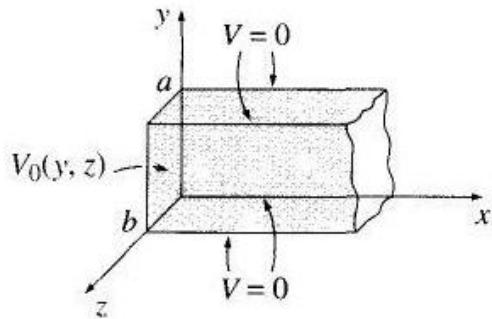


Figure 7: Tubería rectangular.

6. Encuentre el potencial en la ranura infinita si la frontera en $x = 0$ consta de dos tiras de metal: una, desde $y = 0$ hasta $y = a/2$, se mantiene a un potencial constante V_0 , y la otra, de $y = a/2$ a $y = a$, está en el potencial $-V_0$.
7. Para la ranura infinita determine la densidad de carga $\sigma(y)$ en la tira en $x = 0$, asumiendo que es un conductor a potencial constante V_0 .
8. Una caja cúbica (lados de longitud a) consta de cinco placas de metal, que están soldadas y conectadas a tierra. La parte superior está hecha de una hoja de metal separada, aislada de las demás y mantenida a un potencial constante V_0 . Encuentra el potencial dentro de la caja.

9. Cubo hueco

Un cubo hueco tiene paredes conductoras definidas por seis planos $x = 0, y = 0, z = 0$ y $x = a, y = a, z = a$. Las paredes $z = 0$ y $z = a$ se mantienen a potencial constante V . Los otros cuatro lados tienen potencial cero.

- (a) Encuentre el potencial $\Phi(x, y, z)$ en cualquier punto dentro del cubo.
- (b) Evalúe numéricamente el potencial en el centro del cubo, con una precisión de tres cifras significativas. ¿Cuántos términos en la serie es necesario mantener para lograr esta precisión? Compare su resultado numérico con el valor promedio del potencial en las paredes. (Vea el Problema 2.28. de Jackson)
- (c) Encuentre la densidad de carga superficial en la superficie $z = a$.

Solución: 13.13

10. Potencial para capa cilíndrica (Sol: 13.16)

Considere una capa cilíndrica de radio ρ_0 con un potencial V en la capa. Encuentre el potencial dentro del caparazón.

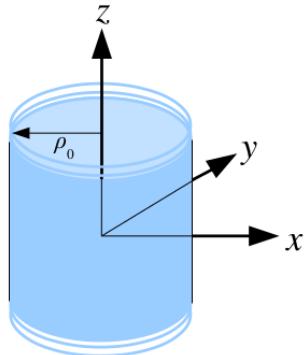


Figure 8: Capa cilíndrica.

11. Tubo separado en dos mitades

Encontrar el potencial dentro de un tubo infinitamente largo, de radio a , separado en dos mitades longitudinales mantenidas a potenciales constantes V y $-V$, respectivamente, y separadas por una brecha muy estrecha.

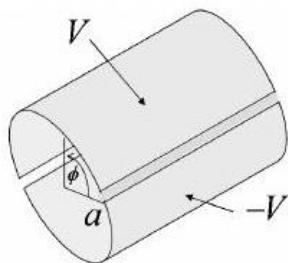


Figure 9: Tubo separado en dos mitades.

Sol: [13.17](#)

12. Mitades de un cilindro

(a) Dos mitades de un cilindro conductor largo y hueco de radio interior b están separadas por pequeños espacios longitudinales en cada lado y se mantienen a diferentes potenciales V_1 y V_2 . Demuestre que el potencial interior está dado por

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2b\rho}{b^2 - \rho^2} \cos \phi \right)$$

donde ϕ se mide desde un plano perpendicular al plano a través del espacio.

(b) Calcule la densidad de carga superficial en cada mitad del cilindro.

Sol. 13.19

13. Cuartos de un cilindro

Una variante del problema bidimensional anterior es un cilindro conductor largo y hueco de radio b que se divide en cuartos iguales, los segmentos alternos se mantienen en potencial $+V$ y $-V$.

(a) Resuelva mediante la solución en serie

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\phi - \alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\phi + \beta_n)$$

y demuestre que el potencial dentro del cilindro es

$$\phi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{4n+2} \frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}$$

(b) Sume la serie y demuestre que

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho^2 b^2 \sin 2\phi}{b^4 - \rho^4} \right)$$

(c) Grafique las líneas de campo y las equipotenciales

Sol: 13.20

14. Potencial cilindro en forma integral de Poisson

Comenzando con la solución en serie

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\phi - \alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\phi + \beta_n)$$

para el problema de potencial bidimensional con el potencial especificado en la superficie de un cilindro de radio b , evalúe los coeficientes formalmente, sustitúyalos en la serie y súmelos para obtener el potencial dentro el cilindro en forma de [integral de Poisson](#):

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(b, \phi') \frac{b^2 - \rho^2}{b^2 + \rho^2 - 2b\rho \cos(\phi' - \phi)} d\phi'$$

¿Qué modificación es necesaria si el potencial se desea en la región del espacio limitada por el cilindro y el infinito?

Solución: 13.18

15. Planos que se cortan: función de Green

Dos planos conductores con potencial cero se encuentran a lo largo del eje z , formando un ángulo β entre ellos, como en la figura.

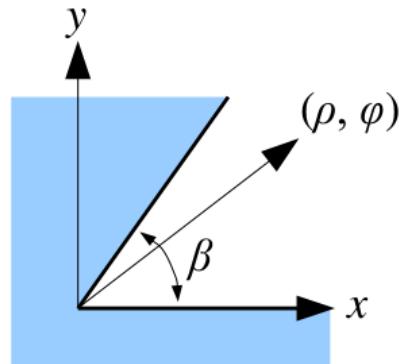


Figure 10: Planos que se cortan.

Una línea de carga unitaria paralela al eje z está ubicada entre los planos en la posición (ρ', φ') .

(a) Demuestre que $(4\pi\epsilon_0)$ veces el potencial en el espacio entre los planos, es decir, la función de Green de Dirichlet $G(\rho, \varphi; \rho', \varphi')$, está dada por la serie infinita

16. Potencial dentro de esfera hueca

El potencial $V_0(\theta)$ se especifica en la superficie de una esfera hueca, de radio a .

- (a) Encuentre el potencial dentro de la esfera.
- (b) Supongamos que el potencial en la esfera es

$$V_0(\theta) = k \sin^2(\theta/2),$$

Demuestre que el potencial es:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{k}{2} \left[r^0 P_0(\cos \theta) - \frac{r^1}{a} P_1(\cos \theta) \right] = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r}{a} \cos \theta \right)$$

Sol: 13.22

17. Potencial afuera de una esfera hueca

El potencial $V_0(\theta)$ se especifica nuevamente en la superficie de una esfera de radio a . Encuentre el potencial afuera, asumiendo que no hay carga allí.

Sol: 13.23

18. Esfera con potencial en superficie (Sol: 13.35)

Encontrar la expresión del potencial producido dentro y fuera de una esfera no conductora de radio a , que posee un potencial $V(\theta)$ sobre su superficie.

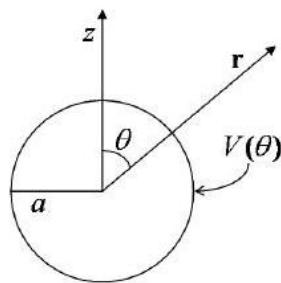


Figure 11: Esfera con potencial en superficie

19. Potencial dentro de dos hemisferios

Encontrar el potencial dentro de una esfera de radio a , la cual está dividida en dos hemisferios sujetos a potenciales constantes $V_y - V$, respectivamente.

Sol: 13.36

20. Esfera en presencia de un campo eléctrico (Sol: 13.24)

Una esfera de metal sin carga de radio a se coloca en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{z}}$. [El campo empujará la carga positiva hacia la superficie “norte” de la esfera, dejando una carga negativa en la superficie “sur” (Fig. 61). Esta carga inducida, a su vez, distorsiona el campo en la vecindad de la esfera.] Encuentre el potencial en la región fuera de la esfera.

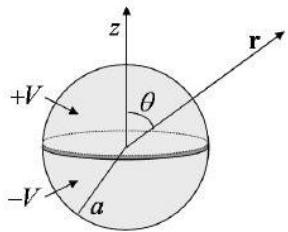


Figure 12: Esfera dividida en hemisferios sujetos a potenciales V y $-V$.

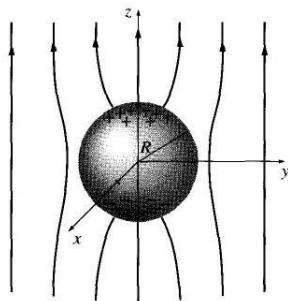


Figure 13: Esfera en campo eléctrico uniforme.

21. Esfera en presencia de campo eléctrico II

Calcular el potencial fuera de una esfera conductora aislada de radio a , sin carga, en presencia de un campo eléctrico externo uniforme.

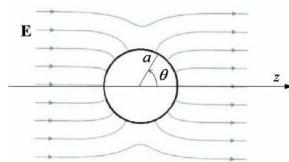


Figure 14: Esfera conductora en un campo eléctrico externo uniforme.

Sol: [13.25](#)

22. Capa esférica con densidad de carga superficial

La superficie de una capa esférica de radio a tiene una densidad de carga $\sigma_0(\theta)$. Encuentre el potencial resultante dentro y fuera de la esfera.

Sol: [13.26](#)

23. Esferas concéntricas

Dos esferas concéntricas tienen radios a, b ($b > a$) y cada una está dividida en dos hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interior y el hemisferio inferior de la esfera exterior se mantienen en potencial V . Los otros hemisferios están a potencial cero. Determine el potencial en la región $a \leq r \leq b$ como una serie en polinomios de Legendre. Incluya términos por lo menos hasta $l = 4$. Verifique su solución con los resultados conocidos en el caso límite $b \rightarrow \infty$ y $a \rightarrow 0$.

Sol: [13.34](#)

24. Potencial para un cilindro de radio a

Considere un cilindro con radio a y altura L con su parte inferior centrada en el origen. El potencial es cero en todas partes en la superficie del cilindro, excepto en la parte superior donde es un potencial $V(\rho, \phi)$. Esto conduce a las condiciones de frontera: $\Phi(\rho = a, \phi, z) = 0$, $\Phi(\rho, \phi, z = 0) = 0$, y $\Phi(\rho, \phi, z = L) = V(\rho, \phi)$

Encuentre el potencial y determine los coeficientes.

Sol: [2.5.1](#)

3 Problemas de frontera II

3.1 Método de Imágenes

- Utilice el método de las imágenes cuando una o más cargas puntuales estén en presencia de superficies límite con potenciales constantes a través de ellas.

- El [método de las imágenes](#) es muy importante porque se puede usar para [encontrar la función de Green](#) y luego se puede aplicar la solución de la función de Green cuando el potencial no es constante a través del límite.

- Reemplace las [superficies límite](#) con [cargas de imagen externas a la región de interés](#) en ubicaciones recomendadas por [simetrías](#).

- Cree [parámetros ajustables](#) a partir de las incógnitas, como la magnitud y la ubicación de la carga de la imagen.

- Varíe los [parámetros ajustables](#) hasta que se cumpla la [condición de contorno en la superficie](#).

- La solución al problema original es la solución a las cargas reales y cargas de imagen.

El problema clásico de la carga imagen

Supongamos que una carga puntual q se mantiene a una distancia d sobre un plano conductor infinito conectado a tierra (figura 15).

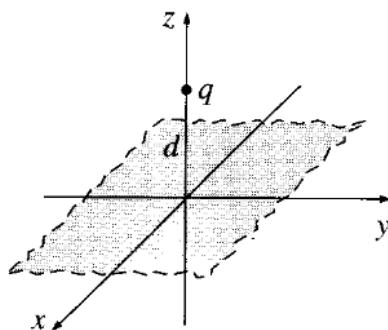


Figure 15: Superficie plana.

¿Cuál es el potencial en la región por encima del plano?

No es solo $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$, porque q inducirá una cierta cantidad de carga negativa en la superficie cercana del conductor; el potencial total se debe en parte a q directamente y en parte a esta carga inducida. Pero, ¿cómo podemos calcular el potencial si no sabemos cuánta carga se induce o cómo se distribuye?

Desde un punto de vista matemático, nuestro problema es [resolver la ecuación de Poisson en la región \$z > 0\$](#) , con una carga puntual q en $(0, 0, d)$, sujeto a las condiciones de contorno:

1. $\Phi = 0$ cuando $z = 0$ (dado que el plano conductor está conectado a tierra), y
2. $\Phi = 0$ lejos de la carga (es decir, para $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$).

Luego debemos hallar una función que cumpla con estos requisitos.

Truco: Olvidemos el problema real; vamos a estudiar una situación completamente diferente. Este nuevo problema consta de dos cargas puntuales, $+q$ en $(0, 0, d)$ y $-q$ en $(0, 0, -d)$, y ningún plano conductor (figura 16).

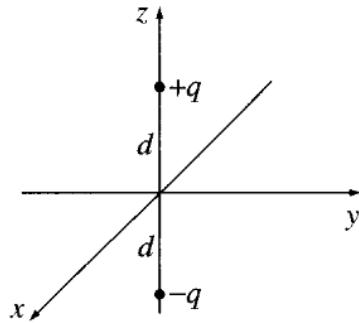


Figure 16: Dos cargas.

Para esta configuración, encontramos fácilmente el potencial:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$

(Los denominadores representan las distancias desde (x, y, z) a las cargas $+q$ y $-q$, respectivamente). De ello se deduce que

1. $\Phi = 0$ cuando $z = 0$ y
2. $\Phi \rightarrow 0$ $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$

y la única carga en la región $z > 0$ es la carga puntual $+q$ en $(0, 0, d)$.

¡Pero estas son precisamente las condiciones del problema original!

Evidentemente, la segunda configuración produce exactamente el mismo potencial que la primera configuración, en la región “superior” $z > 0$. (La región “inferior”, $z < 0$, es completamente diferente, pero no nos interesa, la parte superior es todo lo que necesitamos.)

Conclusión: El potencial de una carga puntual por encima de un conductor infinito puesto a tierra está dado por la ecuación encontrada anteriormente, para $z > 0$. Note el papel crucial que juega el teorema de unicidad

en este argumento: sin él, nadie creería en esta solución, ya que se obtuvo para una distribución de carga completamente diferente. Pero el teorema de unicidad lo certifica: si satisface la ecuación de Poisson en la región de interés y asume el valor correcto en los límites, entonces debe ser correcto.

El método que se acaba de describir no se limita a una sola carga puntual; cualquier distribución de carga estacionaria cerca de un plano conductor conectado a tierra se puede tratar de la misma manera, introduciendo su imagen espectral, de ahí el nombre de método de imágenes. (Recuerde que las cargas de la imagen tienen el signo opuesto; esto es lo que garantiza que el plano xy estará en el potencial cero).

3.1.1 Carga puntual con una esfera conectada a tierra

- Ubicamos la esfera de radio a en el origen, la carga real q en \mathbf{y} y el punto de observación en \mathbf{x} .

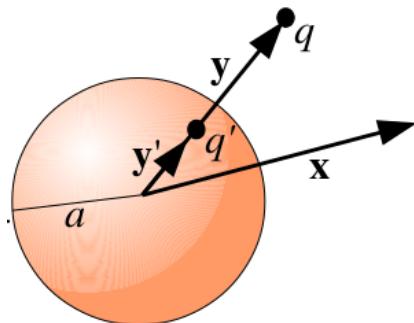


Figure 17: Esfera a tierra.

- La esfera conductora puesta a tierra tiene potencial cero en la superficie: $\Phi(\mathbf{x} = \mathbf{a}) = 0$

- Si dibujamos las líneas de campo de la esfera y la carga, vemos que se parecen a los campos creados por dos cargas y sin superficie. Esto nos da la motivación de que el método de las imágenes funcionará.

- Ubicamos la carga imagen q' dentro de la esfera en el punto \mathbf{y}' .

- El potencial debido a las dos cargas usando la ley de Coulomb es:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}$$

- Descomponemos los vectores en términos de magnitud y dirección. La simetría dicta que \mathbf{y} e \mathbf{y}' apuntan en la misma dirección, de modo que $\mathbf{y}' = y'\hat{\mathbf{y}}$:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|x\hat{\mathbf{x}} - y'\hat{\mathbf{y}}|}$$

- Aplicando la condición de contorno:

$$\Phi(x = a) = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|a\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|a\hat{\mathbf{x}} - y'\hat{\mathbf{y}}|}$$

para todos los ángulos del vector \mathbf{x}

$$\Rightarrow -\frac{q}{|a\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}|} = \frac{q'}{|a\hat{\mathbf{x}} - y'\hat{\mathbf{y}}|}$$

- Esto debe ser cierto para todas las direcciones del vector \mathbf{x} , por lo que podemos elegir dos direcciones diferentes para derivar dos ecuaciones independientes que luego podemos resolver para nuestras dos incógnitas.

- Elijamos primero el vector \mathbf{x} para que apunte en la misma dirección que el vector \mathbf{y} : $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$

$$-\frac{q}{|a\hat{\mathbf{y}} - y\hat{\mathbf{y}}|} = \frac{q'}{|a\hat{\mathbf{y}} - y'\hat{\mathbf{y}}|}$$

$$-\frac{q}{y - a} = \frac{q'}{a - y'}$$

- Ahora tomemos el vector \mathbf{x} para que apunte perpendicular al vector \mathbf{y} y expandamos las magnitudes de acuerdo a $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}$:

$$\begin{aligned} & -\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2ay\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}}} = \frac{q'}{\sqrt{a^2 + y'^2 - 2ay'\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}}} \\ & -\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{q'}{\sqrt{a^2 + y'^2}} \\ & \boxed{\frac{q^2}{a^2 + y^2} = \frac{q'^2}{a^2 + y'^2}}. \end{aligned}$$

- Ahora tenemos dos ecuaciones independientes (las de los recuadros de arriba) con dos incógnitas q' y y' y podemos resolver las incógnitas:

- Resolviendo el primero para q' , $q' = \frac{q(y' - a)}{y - a}$ y sustituyendo en el segundo:

$$\frac{q^2}{a^2 + y^2} = \frac{\left(\frac{q(y' - a)}{y - a}\right)^2}{a^2 + y'^2}$$

- Después de mucha álgebra, obtenemos esto en forma cuadrática y aplicamos la ecuación cuadrática:

$$y'^2 + \left(\frac{a^2 + y^2}{-y} \right) y' + a^2 = 0$$

$$y' = \frac{a^2}{y}$$

- Sustituyendo de nuevo en el primero:

$$q' = \frac{q \left(\left(\frac{a^2}{y} \right) - a \right)}{y - a}$$

$$q' = -\frac{a}{y} q$$

Sustituyendo q' en el potencial

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}} - \frac{a}{y} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y'^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}'}} \right]$$

y reemplazando y'

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}} - \frac{1}{\left(\frac{y}{a}\right)} \frac{q}{\sqrt{x^2 + \frac{a^4}{y^2} - 2x \frac{a^2}{y} \cos \gamma}} \right]$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma}} - \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{yx}{a}\right)^2 + a^2 - 2xy \cos \gamma}} \right]$$

- Si el vector \mathbf{y} lo ubicamos en el eje z y los vectores los expresamos en coordenadas esféricas:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + y^2 - 2ry \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{a^2} r^2 + a^2 - 2ry \cos \gamma}} \right]}$$

- Podemos usar esto para encontrar la [densidad de carga superficial inducida en la esfera](#).

- Comenzando con la forma general encontrada anteriormente:

$$\left[(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \right]_{n=n_0}$$

- Para un conductor, el campo eléctrico interior es cero en todas partes, $\mathbf{E}_1 = 0$:

$$\left[\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \right]_{n=n_0}$$

- El campo eléctrico en la superficie de un conductor siempre es paralelo al vector normal, y la superficie aquí es solo el conjunto de puntos donde la coordenada esférica radial r es igual al radio a .

$$\left[E_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \right]_{r=a}$$

- Escribiendo el campo eléctrico en términos de potencial y despejando la densidad de carga:

$$\boxed{\sigma = \left[-\epsilon_0 \frac{d\Phi}{dr} \right]_{r=a}}$$

- Ahora insertamos la solución para el potencial que obtuvimos anteriormente, evaluamos

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{q}{4\pi} \left[-\frac{1}{2} (r^2 + y^2 - 2ry \cos \gamma)^{-3/2} (2r - 2y \cos \gamma) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{a^2} r^2 + a^2 - 2ry \cos \gamma \right)^{-3/2} \left(2r \frac{y^2}{a^2} - 2y \cos \gamma \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{q}{4\pi} \left[-\frac{(a - y \cos \gamma)}{(a^2 + y^2 - 2ay \cos \gamma)^{3/2}} + \frac{(y^2/a - y \cos \gamma)}{(y^2 + a^2 - 2ay \cos \gamma)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi} (a^2 + y^2 - 2ay \cos \gamma)^{-3/2} (a - y \cos \gamma - y^2/a + y \cos \gamma) \\ \sigma &= \frac{q}{4\pi a} \frac{(a^2 - y^2)}{(a^2 + y^2 - 2ay \cos \gamma)^{3/2}}. \end{aligned}$$

factorizando y^2

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{y}\right) \frac{1 - \frac{a^2}{y^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos \gamma\right)^{3/2}}.$$

y graficamos la densidad de carga en unidades de $-q/4\pi a^2$:

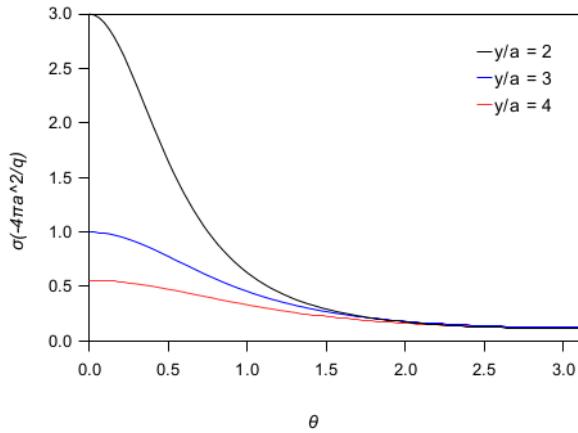


Figure 18: Densidad de carga.

3.1.2 Carga puntual en presencia de una esfera conductora

También está aislada y cargada

- Considere una esfera con carga total Q en presencia de una carga puntual q .
 - La situación es exactamente la misma que la esfera puesta a tierra, excepto que **además de la carga inducida, existe el resto de la carga total, $Q - q'$** , que se distribuye uniformemente sobre la esfera.
 - Hay pues tres cargas puntuales, la carga real q en \mathbf{y} , su carga imagen correspondiente q' en \mathbf{y}' con las mismas soluciones que antes, y una imagen de carga de magnitud $Q - q' = Q + qa/y$ en el origen.
 - El potencial se puede escribir inmediatamente como la superposición de los potenciales de las tres cargas:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{q}{\left| \frac{y}{a}\mathbf{x} - \frac{a}{y}\mathbf{y} \right|} + \frac{Q + \frac{a}{y}q}{|\mathbf{x}|} \right]$$

- En coordenadas esféricas con el vector \mathbf{y} en el eje z :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + y^2 - 2ry \cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{a^2}r^2 + a^2 - 2ry \cos\theta}} + \frac{\frac{Q}{q} + \frac{a}{y}}{r} \right]$$

- Usando $\sigma = [-\epsilon_0 \frac{d\Phi}{dr}]_{r=a}$ para encontrar la densidad de carga superficial:

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{y} \right) \frac{1 - \frac{a^2}{y^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos\theta \right)^{3/2}} + \frac{1}{4\pi a^2} \left[Q + \frac{a}{y} q \right]$$

- El primer término es solo la carga superficial inducida encontrada previamente y el segundo término es solo la carga restante distribuida uniformemente sobre el área de la esfera.

$$\sigma = \sigma_{\text{inducida}} + \frac{[Q - q']}{A_{\text{esfera}}}$$

- De manera similar, la fuerza que actúa sobre la carga q se puede escribir inmediatamente como la superposición de las fuerzas entre ellos usando la ley de Coulomb:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \\ \mathbf{F} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[q' \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{y}')}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|^3} + (Q - q') \frac{(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}|^3} \right] \\ \mathbf{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \left[Q - \frac{qa^3(2y^2 - a^2)}{y(y^2 - a^2)^2} \right] \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

- Si en lugar de una esfera conductora aislada y cargada, tenemos una esfera de potencial fijo V , la carga imagen en el centro se reemplaza por la carga (V_a).

3.2 Función de Green

- La Ley de Coulomb se puede transformar para incluir condiciones de contorno en lugar de una integral sobre todo el universo mediante el uso de herramientas matemáticas llamadas **funciones de Green**, que son aplicaciones del **teorema de la divergencia**:

$$\oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da' = \int \nabla' \cdot \mathbf{A} d^3 \mathbf{x}'$$

- Definimos el campo vectorial \mathbf{A} en términos de algunos escalares arbitrarios $\mathbf{A} = \phi \nabla' \psi$ donde la prima denota que el gradiente se toma con respecto a \mathbf{x}' . Introduzcamos esto en el teorema de la divergencia:

$$\oint [\phi \nabla' \psi] \cdot \mathbf{n}' da' = \int \nabla' \cdot [\phi \nabla' \Psi] d^3 \mathbf{x}'$$

$$\oint \phi \frac{d\psi}{dn'} da' = \int [\nabla' \phi \cdot \nabla' \psi + \phi \nabla'^2 \psi] d^3 \mathbf{x}'$$

- Escribamos esto de nuevo con los escalares intercambiados y restemos las dos ecuaciones:

$$\int (\phi \nabla'^2 \psi - \psi \nabla'^2 \phi) d^3 \mathbf{x}' = \oint \left(\phi \frac{d\psi}{dn'} - \psi \frac{d\phi}{dn'} \right) da'$$

- Ahora asignemos $\phi = \Phi$ y $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ donde G se llama **función de Green**.

- Si queremos F para satisfacer $\nabla'^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ y usamos la identidad

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

se hace evidente que

$$\nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

así que:

$$\int (\Phi(-4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) - G \nabla'^2 \Phi) d^3 \mathbf{x}' = \oint \left(\Phi \frac{dG}{dn'} - G \frac{d\Phi}{dn'} \right) da'$$

- Utilizamos la Ecuación de Poisson y evaluamos la integral:

$$-4\pi \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G d^3 \mathbf{x}' = \oint \left(\Phi \frac{dG}{dn'} - G \frac{d\Phi}{dn'} \right) da'$$

- Resolvemos para el potencial escalar:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G d^3 \mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \oint \left(G \frac{d\Phi}{dn'} - \Phi \frac{dG}{dn'} \right) da' \quad (1)$$

- Esta es la solución de la función de Green a las ecuaciones electrostáticas.
- En cierto sentido, hemos convertido la ley de Coulomb, que contiene una integral de volumen sobre todo el espacio, en una integral corregida sobre un

volumen limitado más otro término de corrección. El término de corrección termina siendo una integral de las condiciones de contorno sobre la superficie que encierra el volumen. La función de Green G se puede considerar como un parámetro de ponderación que hace que este enfoque funcione.

- Para aplicar la solución de la función de Green en la práctica, primero debemos encontrar la función de Green adecuada, que depende del problema.

- Debemos encontrar la función correcta F que haga desaparecer uno de los dos últimos términos.

- Para las condiciones de contorno de Dirichlet ($\Phi(\mathbf{x}')$ se conoce en la superficie de integración) exigimos que $G = G_D = 0$ en la superficie mediante el uso de la F adecuada de modo que el primer término de la integral de superficie en (5) desaparezca.

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_D d^3\mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi} \oint \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) da'} \quad (2)$$

- Para condiciones de contorno de Neumann ($\frac{d\Phi(\mathbf{x}')}{dn'}$ se conoce en la superficie de la integración) exigimos que $\frac{dG_N}{dn'} = \frac{-4\pi}{S}$ en la superficie donde S es el área total de la superficie.

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_N d^3\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \oint \left(G_N \frac{d\Phi}{dn'} \right) da' + \langle \Phi \rangle_S} \quad (3)$$

donde el último término es el potencial promedio sobre toda la superficie y se puede hacer que desaparezca con una superficie en el infinito.

- Es sorprendente ver que, siempre que podamos encontrar la función de Green G correcta para un problema en particular, podemos escribir inmediatamente la solución al problema mediante una aplicación directa de las ecuaciones integrales anteriores.

3.3 Función de Green para la esfera

- El potencial debido a una fuente unitaria y su imagen que satisface condiciones de contorno homogéneas es la función de Green para las condiciones de contorno de Dirichlet.

- Ya hemos resuelto el potencial externo a una esfera conectada a tierra y podemos escribir la función de Green de la esfera inmediatamente:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{\left| \frac{x'}{a}\mathbf{x} - \frac{a}{x'}\mathbf{x}' \right|}$$

- En coordenadas esféricas, donde ambos vectores ahora son arbitrarios, no en el eje z , la Función de Green de una esfera es:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^2} x^2 + a^2 - 2xx' \cos \gamma}}$$

- Aquí, γ es el ángulo entre los dos vectores, por lo que en coordenadas esféricas:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi')$$

- Por simetría, esta es la función de Green para ambos casos, [exterior a la esfera e interior a la esfera](#).

- Tenga en cuenta que en esta expresión de función de Green, **x es la magnitud del vector de ubicación del punto de observación \mathbf{x} , y no la coordenada cartesiana.** Del mismo modo, x' es la magnitud del vector de ubicación del punto de origen \mathbf{x}' , de modo que en coordenadas esféricas, $r = x$ y $r' = x'$. La variable a es el radio de la esfera que define el límite. Si un problema específico usa el símbolo R, b , etc. para el radio de la esfera, debe usarse en lugar de a .

- Para que la función de Green sea útil, debemos conocerla y su derivada normal a la superficie, lejos del volumen de interés (el volumen que nos interesa es externo, por lo tanto $n' = -x'$):

$$\left[\frac{dG}{dn'} \right]_{x'=a} = - \frac{(x^2 - a^2)}{a (x^2 + a^2 - 2xa \cos \gamma)^{3/2}}$$

- Esto es proporcional a la densidad de carga superficial inducida por una unidad de carga.

- Para un problema que es interno a la esfera, se obtiene la misma expresión para la derivada normal, excepto que el signo general se invierte porque la normal apunta en la dirección opuesta.

- Como ejemplo, el potencial fuera de una esfera con el potencial especificado en su superficie pero sin carga involucrada ($\rho(\mathbf{x}) = 0$) se puede encontrar usando el método de la función de Green:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \oint \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) da'$$

- Esta es esencialmente la suma de todos los parches de carga de superficie infinitesimales inducidos por una unidad de carga ponderada por el potencial real presente en cada parche de superficie. Introduce la función de Green y escríbela explícitamente en coordenadas esféricas:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \oint \left(\Phi \frac{(x^2 - a^2)}{a(x^2 + a^2 - 2xa \cos \gamma)^{3/2}} \right) da'$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\Phi(a, \theta', \phi') a \frac{(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2xa \cos \gamma)^{3/2}} \right) \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

3.4 Esfera conductora con hemisferios a diferentes potenciales

- Aquí hay un ejemplo donde la solución de función de Green esférica que se encuentra arriba es útil.

- Considere una esfera de radio a centrada en el origen dividida geométricamente por el plano $z = 0$ de modo que la mitad superior se mantenga en el potencial $+V$ y la mitad inferior se mantenga en el potencial $-V$.

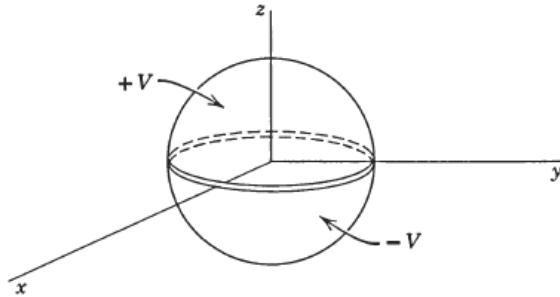


Figure 19: Hemisferios.

- Podemos usar inmediatamente el resultado de arriba:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(V a \frac{(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2xa \cos \gamma)^{3/2}} \right) \sin \theta' d\theta' d\phi' +$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^\pi \left((-V) a \frac{(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2xa \cos \gamma)^{3/2}} \right) \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

donde $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$

- Realizando un cambio de variables sobre la segunda integral $\theta' \rightarrow \pi - \theta'$ y $\phi' \rightarrow \phi' + \pi$ tal que $\cos \gamma \rightarrow -\cos \gamma$ y las integrales se pueden combinar:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Va(x^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{(x^2 + a^2 - 2xa \cos \gamma)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + a^2 + 2xa \cos \gamma)^{3/2}} \right) \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

- Esto no se puede integrar en forma cerrada en este caso.
- Sin embargo, podemos investigar un caso especial del potencial en cualquier parte del eje z ($\theta = 0$) :

$$\Phi(z) = \frac{Va(z^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{(z^2 + a^2 - 2za \cos \theta')^{3/2}} - \frac{1}{(z^2 + a^2 + 2za \cos \theta')^{3/2}} \right) \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

Sustituyendo $u = \cos \theta'$, $du = -\sin \theta' d\theta'$:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{Va(z^2 - a^2)}{4\pi} 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{(z^2 + a^2 - 2zau)^{3/2}} - \frac{1}{(z^2 + a^2 + 2zau)^{3/2}} \right) du \\ \Phi(z) &= V \left(1 - \frac{(z^2 - a^2)}{z\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \\ \Phi(z) &= V \left(1 + \frac{1 - \frac{z^2}{a^2}}{\sqrt{\frac{z^4}{a^4} + \frac{z^2}{a^2}}} \right) \end{aligned}$$

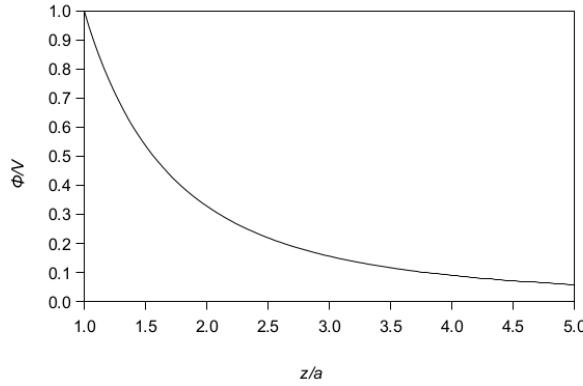


Figure 20: Gráfico.

3.5 Expansión de la función de Green en esféricas

- Considere el problema de un límite esférico con radio a , se conoce el potencial en el límite, hay carga presente y deseamos encontrar el potencial en cualquier lugar externo a la esfera.

- Ya hemos resuelto este problema usando las funciones de Green:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_D d^3\mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi} \oint \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) da'$$

- Externa e interna a un contorno esférico ya hemos encontrado la función de Green, siendo ésta el potencial creado por una unidad de carga y su imagen.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{\left| \frac{x'}{a}\mathbf{x} - \frac{a}{x'}\mathbf{x}' \right|}$$

- Por simetría, esto es válido tanto para el problema interno como para el problema externo. Llamemos al primer término G_1 y al segundo término G_2 y escríbalos en términos de vectores unitarios.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_1 + G_2 \text{ donde } G_1 = \frac{1}{|x\hat{\mathbf{x}} - x'\hat{\mathbf{x}}'|} \text{ y } G_2 = -\frac{1}{\left| \left(\frac{x'}{a} \right) \hat{\mathbf{x}} - (a)\hat{\mathbf{x}}' \right|}$$

- Al resolver problemas con cargas y superficies límite, [las matemáticas se simplifican si la función de Green se expande en armónicos esféricos](#).

- El [teorema de la adición 2.4.7](#) se utilizó para encontrar la expansión de los armónicos esféricos de un potencial de carga unitario y es el siguiente:

Expansion A:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{sir} < r_0$$

y

Expansion B:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{sir} > r_0$$

- Ambos términos en la función de Green se pueden expandir en una serie de armónicos esféricos usando estas expansiones, pero debemos tener cuidado con los diferentes casos.

- **Externo a la esfera**, el punto fuente x' siempre es mayor que el radio de la esfera a , y el punto de observación x siempre es mayor que a . Esto significa que $x'/a > a$ siempre, por lo que al expandir G_2 , siempre usamos la expansión B. Pero x a veces es mayor que x' ya veces no, por lo que al expandir G_1 , debemos manejar los casos por separado y usar ambas expansiones.

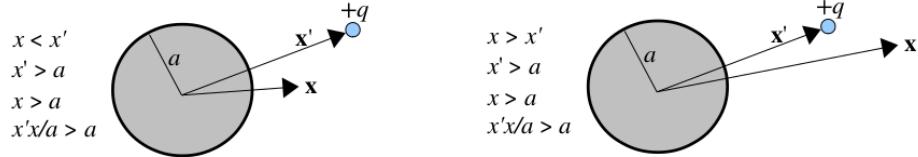


Figure 21: Ambos casos.

- Tenga en cuenta que \mathbf{x}' es la ubicación de la carga real en el problema original, no la carga de la imagen. Ya no hay cargo de imagen. La carga de la imagen fue solo un truco matemático intermedio para obtener la función de Green. Usando las expansiones correctas para G_1 y G_2 , terminamos con:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r^l}{r^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{si } r < r' \text{ y}$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r'}{r^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{si } r > r'$$

- **Interno a la esfera**, ahora x y x' son siempre menores que a . Esto equivale a usar la expansión B para G_2 en ambos casos. Al expandir G_1 , todavía tenemos que tomar los casos por separado y usar ambas expansiones.

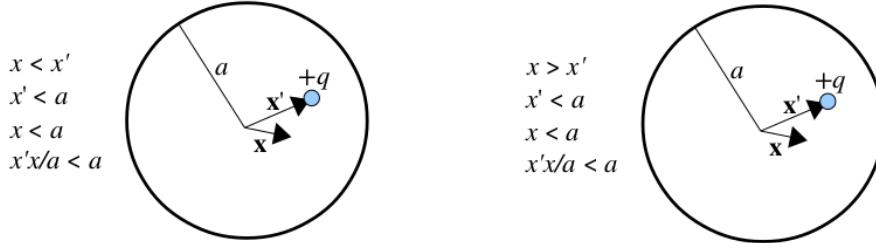


Figure 22: Ambos casos.

- Usando las expansiones correctas para G_1 y G_2 , terminamos con las funciones internas de Green:

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{rr'}{a^2} \right)^l \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{si } r < r' \text{ y} \\
G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r'}{r^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{rr'}{a^2} \right)^l \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{si } r > r'
\end{aligned} \tag{4}$$

3.6 Potencial para esfera hueca con anillo

- Considere una esfera hueca puesta a tierra de radio b que contiene un anillo concéntrico de carga en el plano x y con radio a y uniformemente cargada con una carga total Q . Deseamos encontrar el potencial en todas partes dentro de la esfera.

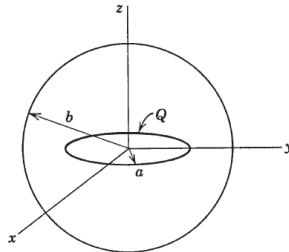


Figure 23: Anillo cargado de radio a y carga total Q dentro de una esfera conductora puesta a tierra de radio b

Solución

1. Este problema implica tanto una **densidad de carga**:

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta' - \cos \pi/2)$$

2. y una **condición de frontera** $\Phi(r = b, \theta, \phi) = 0$. Usamos la solución de la función de Green para dar cuenta de ambos.

3. La **solución de la función de Green para las condiciones de contorno de Dirichlet** es:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_D d^3 \mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi} \oint \left(\Phi \frac{\partial G_D}{\partial n'} \right) da'$$

- En este problema, la condición de frontera $\Phi(r = b, \theta, \phi) = 0$ **elimina el segundo término**. La solución es ahora:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_D d^3\mathbf{x}'$$

4 - Usamos la expansión de la función de Green una esfera

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{rr'}{a^2} \right)^l \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{si } r < r' \text{ y}$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r'}{r^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{rr'}{a^2} \right)^l \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{si } r > r'$$

agrupamos las dos expresiones en una solamente:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{(r_<r_>)^l}{b^{2l+1}} \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) d^3\mathbf{x}'$$

donde ahora $r_<$ y $r_>$ son el menor y el mayor de r y a .

5. Introducimos la densidad de carga:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2} 4\pi \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \delta(r' - a) \delta(\cos\theta' - \cos\pi/2) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{(rr')^l}{b^{2l+1}} \right] \times Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) r'^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' dr'$$

Evaluamos las deltas:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2} 4\pi \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{(r_<r_>)^l}{b^{2l+1}} \right] Y_{lm}^*(\pi/2, \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) a^2 d\phi'$$

- Como tenemos simetría azimutal solo el término $m = 0$ contribuirá

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2} 4\pi \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{(r_<r_>)^l}{b^{2l+1}} \right] Y_{l0}^*(\pi/2, \phi') Y_{l0}(\theta, \phi) a^2 d\phi'.$$

y usando explícitamente la definición de los armónicos esféricos:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2} 4\pi \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{(r_<r_>)^l}{b^{2l+1}} \right] \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(0) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) a^2 d\phi'$$

y de integrar sobre ϕ aparece un 2π y además al multiplicar sale un $\frac{2l+1}{4\pi}$ junto con el a^2 :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} r_<^l \left[\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right] P_l(0) P_l(\cos \theta)$$

- Usando el hecho de que $P_{2n+1}(0) = 0$ y $P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}$:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!} r_<^{2n} \left[\frac{1}{r_>^{2n+1}} - \frac{r_>^{2n}}{b^{4n+1}} \right] P_l(\cos \theta).}$$

3.7 Pasos del Método de la función de Green, Dirichlet

Hay muchos lugares en este método donde es fácil cometer errores si no tienes mucho cuidado con la notación.

Por esta razón, se recomienda que utilice la notación y los pasos definidos aquí.

El problema de muestra que se muestra a continuación es para una **carga puntual real Q centrada sobre una placa rectangular en V en un plano conectado a tierra**.

1. Escriba matemáticamente la distribución de carga del problema real en términos de coordenadas primadas:

$$\rho(\mathbf{x}') = Q\delta(x')\delta(y')\delta(z' - z_0)$$

2. Escriba matemáticamente la forma y la ubicación de la superficie límite en la que existe la condición límite:

La superficie S es el plano en $z = 0$

3. Escriba matemáticamente la condición de contorno del problema real en términos de coordenadas primas:

$$\Phi(\mathbf{x}') = \begin{cases} V & \text{si } |x'| < a \text{ y } |y'| < b \\ 0 & \text{si } |x'| > a \text{ o } |y'| > b \end{cases} \text{ sobre } S$$

4. Cree la distribución de carga del problema más simple colocando una carga puntual en una ubicación arbitraria definida en términos de coordenadas primadas:

q está en (x', y', z')

5. Cree la superficie límite de problemas más simples exactamente igual que los problemas reales:

La superficie S es el plano en $z = 0$

6. Cree la condición límite de problemas más simples como un conductor puesto a tierra:

$$\Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sobre } S$$

7. Resuelva el problema más simple colocando una(s) carga(s) puntual(es) de imagen en una(s) ubicación(es) lógica(s) en el otro lado de la superficie límite desde la carga puntual original y eliminando la superficie límite.

q' está en $(x', y', -z')$

8. Escriba la solución del problema simple como el potencial debido a la carga puntual y su(s) carga(s) imagen

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

9. Aplique la condición límite del problema más simple de un conductor conectado a tierra para determinar la magnitud y ubicación de la(s) carga(s) de la imagen

$$q' = -q$$

10. Escriba la solución final al problema más simple, donde las coordenadas sin imprimación dan la ubicación del espacio donde se mide el potencial, y las coordenadas con prima dan la ubicación de la carga puntual colocada arbitrariamente.

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]$$

11. Convierta la solución del problema más simple a la función de Green del problema real: Φ se convierte en G , q se convierte en $4\pi\epsilon_0$. Asegúrate de que la función de Green sea simétrica entre \mathbf{x} y \mathbf{x}' . Si no, ha cometido un error que debe corregirse.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}}$$

12. Para su uso posterior, encuentre la derivada parcial de la función de Green, en la superficie, en la dirección normal a la superficie y alejándose del volumen del problema real donde queremos conocer el potencial.

$$\left[\frac{\partial G}{\partial n'} \right]_{\text{sobre } S} = \left[-\frac{\partial G}{\partial z'} \right]_{z'=0}$$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial n'} \right]_{\text{sobre } S} = \frac{-2z}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}}$$

13. Escriba la forma general de la solución de la función de Green para el problema real, asegurándose de que la integración sea sobre variables con prima, y que la distribución de carga real y la condición de contorno real se den en términos de variables con prima:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G d^3 \mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi} \oint \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} da'$$

14. Expanda las integrales en la solución en el sistema de coordenadas que está utilizando:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \rho(\mathbf{x}') G dx' dy' dz' - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} dx' dy'$$

15. Introduce lo siguiente en las integrales de la solución:
- La distribución de carga real ρ como se define en el paso 1
 - La función de Green G como se encuentra en el paso 11
 - La condición límite real Φ como se define en el paso 3
 - La derivada parcial de la función de Green tal como se encuentra en el paso 12

16. Evaluar los deltas e integrales de Dirac tanto como sea posible

$$\begin{aligned}\Phi = & \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} \right] \\ & + \frac{Vz}{2\pi} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{1}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}} dx' dy'\end{aligned}$$

3.8 Resumen

Carga imagen

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right]$$

$$y' = \frac{a^2}{y}$$

$$q' = -\frac{a}{y}q$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + y^2 - 2ry \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{a^2} r^2 + a^2 - 2ry \cos \gamma}} \right]}$$

densidad de carga:

$$\boxed{\sigma = \left[-\epsilon_0 \frac{d\Phi}{dr} \right]_{r=a}}$$

Función de Green

- Esta es la solución de la función de Green a las ecuaciones electrostáticas.

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G d^3\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \oint \left(G \frac{d\Phi}{dn'} - \Phi \frac{dG}{dn'} \right) da'} \quad (5)$$

- Para las condiciones de contorno de Dirichlet ($\Phi(\mathbf{x}')$ se conoce en la superficie de integración) exigimos que $G = G_D = 0$ en la superficie mediante el uso de la F adecuada de modo que el primer término de la integral de superficie en (5) desaparezca.

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_D d^3\mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi} \oint \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) da'} \quad (6)$$

- Para condiciones de contorno de Neumann ($\frac{d\Phi(\mathbf{x}')}{dn'}$ se conoce en la superficie de la integración) exigimos que $\frac{dG_N}{dn'} = -\frac{4\pi}{S}$ en la superficie donde S es el área total de la superficie.

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_N d^3\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \oint \left(G_N \frac{d\Phi}{dn'} \right) da' + \langle \Phi \rangle_S} \quad (7)$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^2}x^2 + a^2 - 2xx' \cos \gamma}}$$

- Aquí, γ es el ángulo entre los dos vectores, por lo que en coordenadas esféricas:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi')$$

Green fuera de la esfera

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{si } r < r' \text{ y}$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r'}{r^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{si } r > r'$$

Green dentro de la esfera

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{rr'}{a^2} \right)^l \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{si } r < r' \text{ y}$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r'}{r^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{rr'}{a^2} \right)^l \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{si } r > r'$$
(8)

Densidad de carga anillo:

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta' - \cos \pi/2)$$

- Usando el hecho de que $P_{2n+1}(0) = 0$ y $P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!}$:
Usando las relaciones de completitud

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} = 2\pi \delta(\phi - \phi') \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) = \frac{L}{2} \delta(z - z')$$

green entre dos planos

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi\rho_-}{L}\right) K_m\left(\frac{n\pi\rho_+}{L}\right)$$

densidad anillo

$$\rho(r', \phi', z') = \lambda \delta(r' - a) \delta\left(z' - \frac{L}{2}\right).$$

El campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi =$$

3.9 Problemas

3.9.1 Método de las imágenes

1. Método de imágenes conductor plano

Una carga puntual q se lleva a una posición a una distancia d de un conductor plano infinito mantenido a potencial cero. Usando el método de las imágenes, encuentre:

- (a) la densidad de carga superficial inducida en el plano y graficarla;
- (b) la fuerza entre el plano y la carga usando la ley de Coulomb para la fuerza entre la carga y su imagen;
- (c) la fuerza total que actúa sobre el plano integrando $\sigma^2/2\epsilon_0$ sobre todo el plano;
- (d) el trabajo necesario para remover la carga q desde su posición hasta el infinito
- (e) la energía potencial entre la carga q y su imagen [compare la respuesta con la parte d y discuta].
- (f) Encuentre la respuesta a la parte d en electronvoltios para un electrón originalmente a un angstrom de la superficie.

Solución: [13.27](#)

2. Método imágenes carga dentro de esfera hueca

Usando el método de las imágenes, analice el problema de una carga puntual q dentro de una esfera conductora hueca, conectada a tierra, de radio interior a . Encontrar

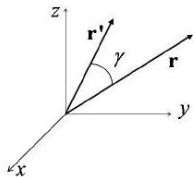
- (a) el potencial dentro de la esfera;
- (b) la densidad de carga superficial inducida;
- (c) la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre q .
- (d) ¿Hay algún cambio en la solución si la esfera se mantiene a un potencial fijo V ? Si la esfera tiene una carga total Q en sus superficies interior y exterior?

Solución: [13.28](#)

3.9.2 Método de la función de Green

3. Potencial de carga puntual en polinomios de Legendre

Expanda el potencial de una carga puntual en polinomios de Legendre.



Solución: [2.4.3] y [13.37]

4. Potencial de carga puntual en armónicos esféricos

Expanda el potencial de una carga puntual en armónicos esféricos.

Solución: [2.4.7] y [13.21]

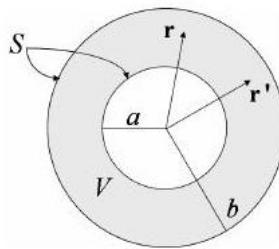
5. Expansión de la Función de Green en polinomios de Legendre

Expanda la función de Green en polinomios de Legendre para el problema de una carga frente a una esfera conductora conectada a tierra.

Sol: [13.38]

6. Expansión de la función de Green en armónicos esféricos.

Consideremos un volumen V limitado por dos esferas concéntricas que constituyen la superficie S . Sean a el radio de la esfera interior y b el radio de la esfera exterior. Entonces, la magnitud de \mathbf{r} en la región de interés para la solución es tal que $a \leq r \leq b$.



Llegue a la siguiente expansión de la función de Green:

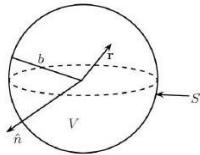
$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<}^l\right) \left(\frac{1}{r_>}^l - \frac{b^{2l+1}}{b^{2l+1}}^l\right)}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).$$

donde $r_>$ es el mayor entre r y r' , y $r_<$ es el menor entre r y r' .

Solución: 13.44

7. Potencial dentro de una esfera sin carga

Calcule el potencial dentro de una esfera radio b , sin carga en su interior, sujeta a un potencial $V(\theta, \phi)$ en su superficie.



Solución: 13.45

8. Potencial dentro de una esfera sin carga, variante

Una esfera hueca de radio interior a tiene el potencial especificado en su superficie $\Phi = V(\theta, \phi)$. Demostrar la equivalencia de las dos formas de solución para el potencial dentro de la esfera:

(a)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \phi')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega'$$

donde $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi')$.

(b)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

donde $A_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \phi') V(\theta', \phi')$

Solución: 13.41

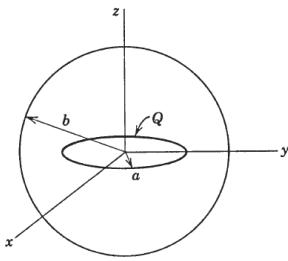
9. Potencial para esfera hueca con anillo

Considere una esfera hueca puesta a tierra de radio b que contiene un anillo concéntrico de carga en el plano x y con radio a y uniformemente cargada con una carga total Q . Encontrar el potencial en todas partes dentro de la esfera.

Solución: 3.6 y 13.46

10. Línea cargada y cascarón esférico conductor

Una línea cargada de largo $2d$ con carga total Q tiene una densidad lineal de carga que varía como $(d^2 - z^2)$, donde z es la distancia medida



desde el punto medio. Un cascarón esférico conductor (a tierra) de radio $b > d$ está centrado en el punto medio de la línea cargada (Fig. 24).

- Encuentre el potencial en el espacio como una expansión de polinomios de Legendre.
- Calcule la densidad superficial de carga inducida sobre el cascarón.
- Calcule el límite $d \ll b$ y compare con el caso correspondiente.

Solución: 13.30 y 13.29

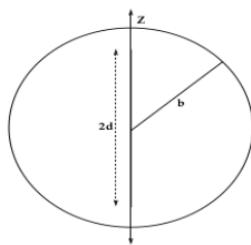


Figure 24: Línea cargada y cascarón esférico conductor

11. Jackson 3.13

Resuelva el potencial en el Problema 23, usando la función de Green apropiada obtenida.

Solución: 13.47

12. Línea cargada entre planos conductores que se intersectan

Dos planos conductores con potencial cero se encuentran a lo largo del eje z , formando un ángulo β entre ellos, como en la figura 75. Una línea de carga unitaria paralela al eje z está ubicada entre los planos en la posición (ρ', φ') .

- Demuestre que $(4\pi\epsilon_0)$ veces el potencial en el espacio entre los planos, es decir, la función de Green de Dirichlet $G(\rho, \varphi; \rho', \varphi')$, está dada por la serie infinita

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \rho_{<}^{m\pi/\beta} \rho_{>}^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(m\pi\phi'/\beta)$$

(b) Por medio de técnicas de variables complejas u otros medios, demuestre que la serie se puede sumar para dar una forma cerrada,

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = \ln \left[\frac{(\rho)^{2\pi/\beta} + (\rho')^{2\pi/\beta} - 2(\rho\rho')^{\pi/\beta} \cos[\pi(\phi + \phi')/\beta]}{(\rho)^{2\pi/\beta} + (\rho')^{2\pi/\beta} - 2(\rho\rho')^{\pi/\beta} \cos[\pi(\phi - \phi')/\beta]} \right]$$

(c) Verifique que obtiene los resultados familiares cuando $\beta = \pi$ y $\beta = \pi/2$.

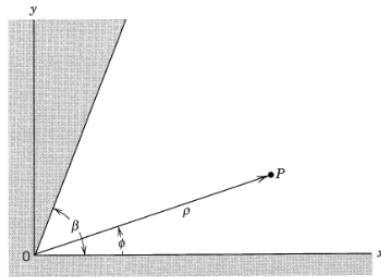


Figure 25: Intersección de dos planos conductores que definen una esquina en dos dimensiones con ángulo de apertura β .

Solución: [13.42](#)

13. Función de Green para espacio entre dos planos

La función de Green de Dirichlet para el espacio ilimitado entre los planos en $z = 0$ y $z = L$ permite discutir una carga puntual o una distribución de carga entre planos conductores paralelos mantenidos a potencial cero.

a) Utilizando coordenadas cilíndricas, demuestre que una forma de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi}{L} \rho_{<}\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L} \rho_{>}\right)$$

b) Demuestre que una forma alternativa de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') \frac{\sinh(kz_-) \sinh[k(L-z_+)]}{\sinh(kL)}$$

Solución: [13.48](#)

14. Encuentre el potencial producido por un anillo de carga de radio a con densidad lineal λ puesto en forma horizontal justo a media distancia entre 2 planos conductores infinitos paralelos separados por una distancia L .

Solución: [13.33](#)

15. Potencial producido por anillo

Calcular el potencial producido en todo el espacio por una carga q uniformemente distribuida sobre un anillo de radio a .

Sol: [13.39](#)

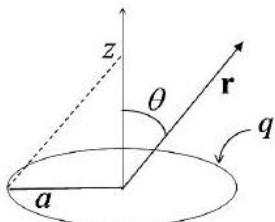


Figure 26: Potencial producido por un aro cargado.

16. Supongamos que tenemos el espacio angular $0 < \theta < \alpha$ entre dos planos infinitos conductores a tierra
- Encuentre el potencial producido por una carga q entre estos planos, para $\alpha = \pi/n$ con n entero positivo usando el método de imágenes.
 - Encuentre la solución para α general
 - Encuentre el campo eléctrico cerca del origen
 - que valor de n es mas conveniente como pararrayo?
17. Queremos calcular numéricamente el potencial producido por un electrodo plano y circular de radio a puesto horizontalmente en el plano x-y que es mantenido a un potencial V . Primero normalice las variables y los parámetros. Usando la discretización numérica del Laplaciano,

haga un argumento para determinar si este método de relajación converge. Tome que el potencial se va a cero a una distancia $\rho, z >> R$. Construya una solución y grafique el potencial, el campo eléctrico y la densidad de carga sobre la franja.

3.10 Problemas Valdivia

- (a) Encuentre el potencial de una carga puntual q a una altura $0 < z < L$ entre dos planos conductores infinitos separados por una distancia L y mantenidos a una diferencia potencial ΔV . ¿Cuál es la densidad de carga en las superficies de los conductores?

- (b) **Anillo entre un condensador** (Sol: 13.33 | 13.32)

Considere un condensador formado por dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia L y mantenidas a una diferencia de potencial V_0 . Además, dentro de este condensador tenemos un anillo de radio a , con una densidad de carga lineal λ constante, puesto en un plano paralelo a las placas, y a la mitad de distancia entre ellas. Construya una función de Green para este problema y resuelva el potencial entre las placas, ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie de los conductores?

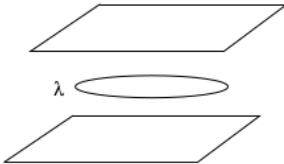
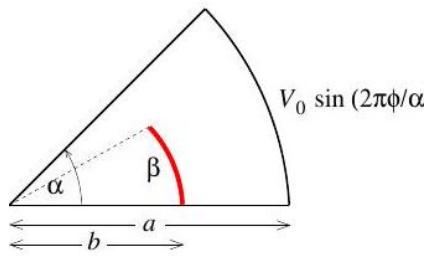
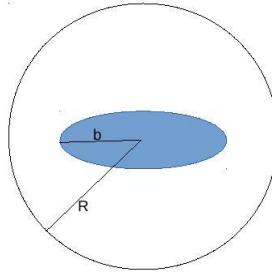


Figure 27: Anillo entremedio de un condensador

- (c) Las paredes de una geometría conductora bidimensional, definida por las paredes $\phi = 0, \phi = \alpha$ y $r = a$ (mostrada en la figura se encuentran todas a potencial cero, excepto por la cara $r = a$, que está a potencial $\Phi(r = a, \phi) = V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha)$). Calcule el potencial $\Phi(r, \phi)$ producido por un plano cargado, que en esta geometría corresponde a un arco de circunferencia en $r = b$ y $0 \leq \phi \leq \beta$, de densidad de carga uniforme λ . Nota: Este problema es uniforme en el eje perpendicular al plano, tal que $\partial/\partial z = 0$.
- (d) Considere una esfera conductora de radio R , conectada a tierra. En su interior, se encuentra un disco de radio $b < R$. Su carga Q



se encuentra distribuída uniformemente en la superficie. El centro del disco y la esfera son coincidentes. Encuentre la función de Green dentro de la esfera. A continuación, describa la densidad de carga y encuentre el potencial eléctrico dentro de ésta.



- (e) Queremos simular numéricamente un lente electrostático de tamaño $L \times 2L$, tal que $\Psi(x < L) = V_O$ y $\Psi(x > L) = -V_O$, usando el método de relajación. En este lente se usan electrones con energía inicial ϵ_0 para estudiar muestras. Escale las ecuaciones. Calcule la distancia focal y la magnificación del lente en función de los parámetros adimensionales. Con dos de estos lentes se construye un microscopio de electrones. Cual debería ser la distancia entre ellos?

4 Multipolos y medios dieléctricos

4.1 Expansión multipolar del potencial

- Considere una densidad de carga localizada completamente contenida dentro de alguna región R .

- Muy lejos de la región R , la densidad de carga se comporta cada vez más como una esfera o una carga puntual.

- Lejos de la región R entonces podemos hacer una expansión del potencial en armónicos esféricos y mantener solo los primeros términos y seguirá siendo una aproximación válida a la solución.

- Esto es útil cuando la densidad de carga está localizada pero es demasiado compleja para abordarla de manera exacta.

- Debido a que queremos que el potencial esté lejos de la densidad de carga, donde no hay carga, podemos usar la solución de coordenadas esféricas para la ecuación de Laplace cuando se requiere una solución válida en el rango azimutal completo:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

donde $Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$ son los armónicos esféricos.

- The region we are interested in includes infinity, but not the origin. To ensure the solution approaches zero at infinity, we require $A_l = 0$. The solution now becomes:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}$$

- For later convenience, we redefine the arbitrary constant, $B_{lm} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm}$ so that:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}$$

- This equation is called a multipole expansion. The $l = 0$ term is called the monopole term, $l = 1$ are the dipole terms, etc.

- We must now determine the coefficients q_{lm} to fully solve the problem.

- The solution in integral form was already obtained as Coulomb's law for the potential:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

- We expand the $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ factor into spherical harmonics, remembering that we are interested in the solution far away from the charge so that we want the $x > x'$ case.

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r'^l}{r^{l+1}} \frac{1}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

so that:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left[\int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}$$

- Comparing this solution to the one above, it becomes apparent that:

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

- These coefficients are called the spherical multipole moments. Their physical significance can be seen by representing the first few terms explicitly in Cartesian coordinates.

- The $l = 0$ term is just proportional to the total charge q , which is known as the monopole moment, and has no angular dependence:

$$q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} q$$

- The $l = 1$ terms are proportional to the components of the electric dipole moment \mathbf{p} .

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \cos(\theta') r' \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int z' \rho(\mathbf{x}') d'\mathbf{x}'$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$$

$$q_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \sin(\theta') e^{\mp i\phi'} r' \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$q_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \sin(\theta') (\cos(\phi') \mp i \sin(\phi')) r' \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$q_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int (x' \mp iy') \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$q_1$$

$$q_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x \mp ip_y)$$

- The total Cartesian dipole moment is defined as $\mathbf{p} = \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$

- The $l = 2$ terms are proportional to the Cartesian quadrupole moments Q_{ij} :
- In general, the Cartesian quadrupole moments are defined as:

$$\begin{aligned}
q_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int (3 \cos^2(\theta') - 1) r'^2 \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
q_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int (3z'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
q_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{33} \\
q_{2,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int \sin(\theta') \cos(\theta') e^{\mp i\phi'} r'^2 \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
q_{2,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int \sin(\theta') \cos(\theta') (\cos(\phi') \mp i \sin(\phi')) r'^2 \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
q_{2,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int z' (x' \mp iy') \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
q_{2,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int z' (x' \mp iy') \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
q_{2,\pm 1} &= \mp \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} \mp iQ_{23}) \\
q_{2,\pm 2} &= \pm \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int \sin^2(\theta') e^{\mp i2\phi'} r'^2 \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
q_{2,\pm 2} &= \pm \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int \sin^2(\theta') (\cos(\phi') \mp i \sin(\phi'))^2 r'^2 \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
q_{2,\pm 2} &= \pm \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int (x' \mp iy')^2 \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
q_{2,\pm 2} &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (Q_{11} \mp 2iQ_{12} - Q_{22}) \\
Q_{ij} &= \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'
\end{aligned}$$

- With the first few coefficients found, we can write out the potential explicitly:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}$$

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{\epsilon_0 r} q_{0,0} Y_{0,0} \\ &\quad + \frac{1}{3\epsilon_0 r^2} [q_{1,0} Y_{1,0} + q_{1,1} Y_{1,1} + q_{1,-1} Y_{1,-1}] \\ &\quad + \frac{1}{5\epsilon_0 r^3} [q_{2,0} Y_{2,0} + q_{2,1} Y_{2,1} + q_{2,-1} Y_{2,-1} + q_{2,2} Y_{2,2} + q_{2,-2} Y_{2,-2} + \dots]\end{aligned}$$

- The spherical harmonics for these first few terms are simple enough to be written out explicitly:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0 r} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} q_{0,0} \\ &\quad + \frac{1}{3\epsilon_0 r^2} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left[\sqrt{2} q_{1,0} \cos(\theta) - (q_{1,1} e^{i\phi} - q_{1,-1} e^{-i\phi}) \sin(\theta) \right] \\ &\quad + \frac{1}{5\epsilon_0 r^3} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left[q_{2,0} (3 \cos^2 \theta - 1) - \sqrt{6} (q_{2,1} e^{i\phi} - q_{2,-1} e^{-i\phi}) \sin \theta \cos \theta + \sqrt{3/2} (q_{2,2} e^{i2\phi} + q_{2,-2} e^{-i2\phi}) \sin^2 \theta \right]\end{aligned}$$

- Now switch from spherical multipole moments to Cartesian multipole moments:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^2} [2p_z \cos(\theta) + ((p_x - ip_y) e^{i\phi} + (p_x + ip_y) e^{-i\phi}) \sin(\theta) \\ &\quad + \frac{1}{16\pi\epsilon_0 r^3} [Q_{33} (3 \cos^2 \theta - 1) + 2 ((Q_{13} - iQ_{23}) e^{i\phi} + (Q_{13} + iQ_{23}) e^{-i\phi}) \sin \theta \cos \theta] \\ &\quad + \frac{1}{16\pi\epsilon_0 r^3} [1/2 ((Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}) e^{i2\phi} + (Q_{11} + 2iQ_{12} - Q_{22}) e^{-i2\phi}) \sin^2(\theta)] + \\ \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right]\end{aligned}$$

- The last step was obtained using the traceless nature of the quadrupoles, i.e. $Q_{33} = -Q_{11} - Q_{22}$

4.2 Expansión multipolar del campo eléctrico

- The electric field is most easily expressed in spherical coordinates.

- The potential in spherical coordinates was found to be:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}$$

- The electric field is just the negative gradient:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

- In spherical coordinates:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= - \left[\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right] \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{2l+1} \left[-\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} - \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \right] \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{2l+1} \frac{1}{r^{l+2}} \left[\hat{\mathbf{r}}(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) - \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) - \hat{\phi} \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \right] \end{aligned}$$

- The monopole contribution to the electric field ($l = 0$) is then:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{l=0} &= \frac{1}{\epsilon_0} q_{00} \frac{1}{r^2} [Y_{00}(\theta, \phi)] \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{E}_{l=0} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

- This is, of course, the electric field due to a point charge q . This means that far enough away from a finite localized charge distribution with total charge q , the electric field is approximately equal to the field produced from a point charge q at its center.

- The dipole contributions to the electric field ($l = 1$) evaluate to:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{l=1} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_{1,-1}}{3} \frac{1}{r^3} \left[\hat{\mathbf{r}} 2Y_{1,-1}(\theta, \phi) - \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{1,-1}(\theta, \phi) + \hat{\phi} \frac{i}{\sin \theta} Y_{1,-1}(\theta, \phi) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_{1,0}}{3} \frac{1}{r^3} \left[\hat{\mathbf{r}} 2Y_{1,0}(\theta, \phi) - \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{1,0}(\theta, \phi) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_{1,1}}{3} \frac{1}{r^3} \left[\hat{\mathbf{r}} 2Y_{1,1}(\theta, \phi) - \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{1,1}(\theta, \phi) - \hat{\phi} \frac{i}{\sin \theta} Y_{1,1}(\theta, \phi) \right] \right] \\
\mathbf{E}_{l=1} &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \hat{\mathbf{r}} [2p_z \cos \theta + 2p_x \sin \theta \cos \phi + 2p_y \sin \theta \sin \phi] \\
&\quad + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \hat{\theta} [p_z \sin \theta - p_x \cos \phi \cos \theta - p_y \sin \phi \cos \theta] \\
&\quad + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \hat{\phi} [p_x \sin \phi - p_y \cos \phi]
\end{aligned}$$

- After transforming every part of this equation into Cartesian coordinates and collecting terms, the dipole contribution of a localized charge distribution simplifies to a coordinate-independent form:

$$\mathbf{E}_{l=1} = \frac{3\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}|^3} \text{ where } \mathbf{p} = \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (\text{dipole at the origin})$$

- The development thus far has assumed the multipoles are centered on the origin. If we desire to add together the effects of multiple charge distributions or multiple dipoles that are not at the same location, they can not both be at the origin. To generalize, the dipole at location \mathbf{x}_0 creates the field:

$$\mathbf{E}_{l=1} = \frac{3(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)) - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \text{ (dipole at } \mathbf{x}_0)$$

where the hat over the terms in parentheses means that the vector that results after taking the difference is normalized to be a unit vector.

- In general, multipole moments depend on the choice of origin. A point charge at the origin has only a monopole moment, but move it off the axis and it has higher-order multiple moments.

This is because we are measuring the potential as an expansion in spherical coordinates, which are defined from the origin.

- More specifically, the lowest nonvanishing multipole moment is always independent of the choice of origin, but the higher mutipoles do depend on the origin.

Order	Name	Sample Point Form	Potential	Electric field	Spherical Moments	Cartesian Moments
$l = 0$	monopole		$\Phi \propto \frac{1}{r}$	$E \propto \frac{1}{r^2}$	q_{00}	q
$l = 1$	dipole		$\Phi \propto \frac{1}{r^2}$	$E \propto \frac{1}{r^3}$	q_{1-1}, q_{10}, q_{11}	p_x, p_y, p_z
$l = 2$	quadrupole		$\Phi \propto \frac{1}{r^3}$	$E \propto \frac{1}{r^4}$	$q_{2-2}, q_{2-1}, q_{20}, q_{21}, q_{22}$	$Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{xz}, Q_{yx}, Q_{yy}, Q_{yz}, Q_{zx}, Q_{zy}, Q_{zz}$
$l = 3$	octupole		$\Phi \propto \frac{1}{r^4}$	$E \propto \frac{1}{r^5}$	$q_{3-3}, q_{3-2}, q_{3-1}, q_{30}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$	$i, j, \text{ and } k = x, y, \text{ or } z$
...						
l	l -pole	-	$\Phi \propto \frac{1}{r^{l+1}}$	$E \propto \frac{1}{r^{l+2}}$	$q_{l-l}, q_{l-l+1}, \dots, q_{l,l-1}, q_{l,l}$	$Q_{ijk...l}$ $i, j, k \dots l = x, y, \text{ or } z$

4.3 Conceptos Básicos sobre Electrostática con Medios

- Hasta este punto, se ha supuesto que todas las cargas y campos están en el vacío o en conductores perfectos.

- La mayoría de los materiales no son conductores perfectos, sino que son medios ponderables que tienen alguna respuesta eléctrica a las cargas y campos. Estos efectos deben tenerse en cuenta.

- Hablando macroscópicamente, un material no conductor contiene un conjunto de regiones fijas de carga positiva y negativa que normalmente se cancelan entre sí en promedio, de modo que el material es eléctricamente neutro.

- Si se agregan cargas adicionales al material, obtiene un cargo neto, pero la mayoría de los cargas subyacentes aún se cancelan.

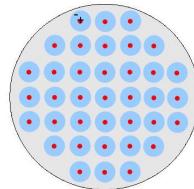
- Cuando se aplica un campo eléctrico eterno al material, cada región de carga experimenta una fuerza del campo.

- Debido a que las regiones de carga son fijas y no pueden moverse en respuesta al campo, en su lugar se deforman y ganan momentos multipolares distintos de cero. El más dominante es el dipolo.

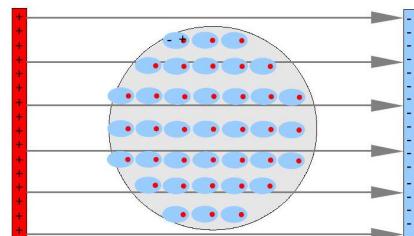
- Un campo eléctrico induce así momentos dipolares en todas las regiones de carga, siendo el efecto total que el campo eléctrico induce una polarización eléctrica $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ en el material.

- Considerar el problema conceptual de una esfera de material uniforme en un campo eléctrico uniforme.

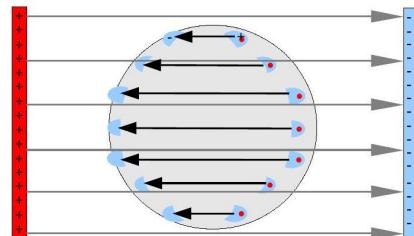
- Antes de que se aplique el campo eléctrico, las regiones de carga y, por lo tanto, el material es neutral en promedio:



- Después de aplicar el campo eléctrico, las porciones negativas de cada región de carga son atraídas por la fuente del campo eléctrico y se deforman. Cada región de carga se ha polarizado (ganado un momento dipolar distinto de cero, más o menos alineado con el campo eléctrico).



- En el interior de la esfera, las regiones de carga aún se cancelan entre sí en promedio y el material tiene una carga neta cero. Sin embargo, en los bordes de la esfera no hay cargas disponibles para cancelar las partes deformadas.



- Entonces hay una carga positiva neta en un lado de la esfera y una carga negativa neta en el otro lado de la esfera. (Tenga en cuenta que esta es una imagen conceptual simplificada. En realidad, las líneas de campo externas originalmente uniformes serán atraídas por la carga superficial y se doblarán hacia la esfera).

- Estas cargas de polarización dan lugar a un campo eléctrico proporcional a la polarización que se opone al campo original aplicado.

- El campo total (el campo real sentido por alguna carga de prueba colocada en el material) será una combinación del campo aplicado y el campo inducido.

- En esencia, el material dieléctrico debilita el efecto del campo aplicado.

- Para mayor claridad, definamos lo siguiente:

\mathbf{D}/ϵ_0 : El campo eléctrico aplicado en ausencia del material dieléctrico (donde \mathbf{D} se denomina desplazamiento) más interacciones que no son directamente atribuibles a la polarización

- \mathbf{P}/ϵ_0 : El campo eléctrico inducido causado por la polarización del material (donde \mathbf{P} es la polarización)

\mathbf{E} : El campo eléctrico total, incluido el campo aplicado y la respuesta del material.

- La polarización \mathbf{P} se define como la densidad de momento dipolar promediada macroscópicamente. El campo inducido es el negativo de la polarización. (Esta pequeña curiosidad surge del hecho de que las líneas de campo eléctrico están definidas para apuntar de cargas positivas a negativas, mientras que los vectores dipolares apuntan de cargas negativas a positivas).

- En lugar de tratar el campo aplicado como el resultado de cargas externas al problema, podemos incluirlas explícitamente. Definamos entonces lo siguiente:

ρ : La distribución de carga libre o en exceso, que da lugar al campo eléctrico aplicado (\mathbf{D}/ϵ_0)

ρ_{pol} La carga de polarización (carga ligada inducida), que da lugar a la polarización \mathbf{P}

ρ_{total} : La carga total, que es la suma de la carga libre y de polarización, que da lugar al campo total \mathbf{E} .

4.4 Ecuaciones electrostáticas con materiales ponderables

- We desire to find the electric fields of any system which includes materials.

- We can consider a material to be a collection of small regions with a charge distribution.

- Let us find the potential due to one of these charge distributions, then integrate over all charge distributions to get the total potential.

- We know that we can expand the potential due to a localized charge distribution into its multipole moment contributions and only keep the first few terms if we are far away. Because we will shrink the charge regions to a very small size when forming the integral, any point in space can be considered far away from the charge region.

- Consider a small volume dV containing a charge density producing a potential $d\Phi$ expanded into multipole contributions:

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \dots$$

- Because the charge region is infinitesimal and we want a macroscopic expression, we are far enough away that terms become negligible except the monopole and dipole terms.

- We switch to absolute coordinates to allow us to add up effects at different locations.

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

- Multiply and divide by the volume dV :

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(\frac{dq}{dV} \right) dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \left(\frac{\mathbf{p}}{dV} \right) dV$$

- By definition, the charge per unit volume is the charge density, $\frac{dq}{dV} = \rho(\mathbf{x}')$, and the average dipole moment per unit volume is the polarization, $\frac{\mathbf{p}}{dV} = \mathbf{P}$.

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV$$

- To get the total electric potential, we add up the effects of all the small charge regions. Mathematically, this means integrating both sides of the equation:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}'$$

- This is now the potential due to all charge regions in the material. Because we started very generally, it includes all materials (except materials where quadrupole moments, etc. are significant). The first term is just Coulomb's law with no materials telling us the potential due to the free/excess charges. The second term is the potential due to the material itself. Typically, an applied field induces the polarization \mathbf{P} in the material, which then creates its own field.

- We want to combine the two terms.

- Use the mathematical identity: $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathbf{P} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

- Apply integration by parts to the second integral:

$$\int \mathbf{P} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' = \left[\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right]_S - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

- We are integrating over all space, so the bounding surface is at infinity where there is no material. This makes the first term vanish, so that:

$$\int \mathbf{P} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' = - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

- Use this identity in the potential equation:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

- Collect terms:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\rho(\mathbf{x}') - \nabla' \cdot \mathbf{P})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

- This is just Coulomb's law for the total potential if we recognize the term in parentheses as the total charge density:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{total}}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \text{ where } \rho_{\text{total}}(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x}') + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{x}') \text{ and } \rho_{\text{pol}}(\mathbf{x}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}$$

- If we divide the rightmost equation directly above by ϵ_0 it looks like Gauss's law in differential form:

$$\nabla' \cdot (-\mathbf{P}/\epsilon_0) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{pol}}(\mathbf{x}')$$

so that we can identify $(-\mathbf{P}/\epsilon_0)$ as the electric field caused by the polarization charge density. - The quantity ρ_{pol} is the "polarization charge density", or the "bound charge density", or the "induced charge density". It is the material's response to the fields.

- The quantity ρ is the "free charge density", or more accurately the "excess charge density", or the "inducing charge density". It is the charge that is placed when the problem is created (e.g. charging up a balloon by rubbing it in your hair). This is the charge we have already dealt with.

- The quantity ρ_{total} is the total charge density, which is the sum of the bound and free charges.

- It should be noted that, because of the way it has been defined, the polarization (the average dipole moment density) \mathbf{P} points in the opposite direction from the field due to the polarization:

Material response electric field = $(-\mathbf{P}/\epsilon_0)$

- This is because the dipole moment of a charge region always points from its negative side to its positive side, whereas electric fields start on positive charges and end on negative charges.

- While possibly confusing, this definition is useful because dipoles are seen to line up with the applied field.

- All of our results from electrostatics without materials carry over now if we realize that we must use the total charge distribution ρ_{total} when we seek the total field \mathbf{E} .

- Gauss's law in differential form becomes:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{total}}(\mathbf{x}) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho(\mathbf{x}) + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{x})) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{P})\end{aligned}$$

- The field \mathbf{E} is the total field, and the quantity $(-\mathbf{P}/\epsilon_0)$ is the induced field, so that the last piece in the equation above is a field-like entity and can be loosely thought of as the original externally applied field plus interactions.

- Define this applied field as (\mathbf{D}/ϵ_0) where \mathbf{D} is called the displacement. Because (\mathbf{D}/ϵ_0) is an electric-field-like entity it must obey its version of Gauss's Law:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} \right) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho(\mathbf{x})\end{aligned}$$

- Plugging this into the equation above:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{P})$$

- Integrate both sides:

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_0 - \mathbf{P}/\epsilon_0$$

- This simple equation states that the total electric field \mathbf{E} is the sum of the applied field plus interactions (\mathbf{D}/ϵ_0) and the resulting induced field $(-\mathbf{P}/\epsilon_0)$. While this statement is true, we must be careful about what we mean. The free charges and bound charges interact with each other so that they can end up in different locations than where originally placed. For this

reason, D is more than just what the field would be in the absence of the material.

- All of the equations thus far apply to any ponderable material where the dipole moments are the dominant terms in the response of the material to the applied field.

- These equations are not particularly useful until an explicit model is developed allowing us to find the polarization \mathbf{P} based on the material's static properties.

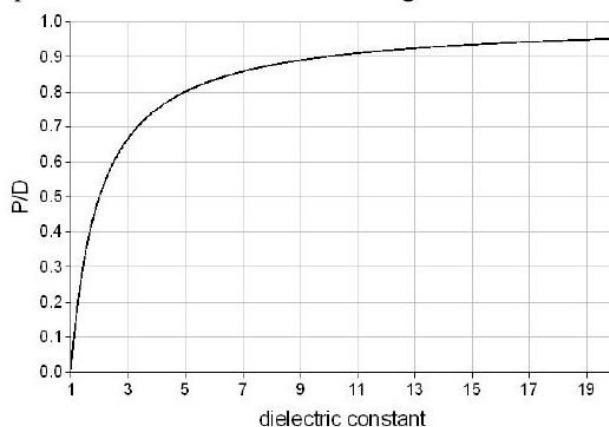
4.5 Ecuaciones electrostáticas en materiales dieléctricos isotrópicos lineales

- The simplest and most common type of dielectric material is that of linear, isotropic dielectrics.

- The isotropic property means that the applied field will always give rise to the same induced field, no matter how the material is oriented.

- The linear property means that the induced field is linearly proportional to the applied field inducing it. In other words, the polarization P points in the same direction as the displacement D and the magnitude of the polarization equals some constant times the magnitude of the displacement:

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D}$$



- The constant linking the two is chosen to have this form to simplify the final equations, as is shown below.

- The variable ϵ_r is known as the relative electric permittivity of a material, or its dielectric constant. It is defined relative to the permittivity of free space: $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$.

- Most materials have dielectric constants between 1 and 100 .
- Vacuum has a dielectric constant of 1 by definition, so that there is no polarization in response the applied electric field.
- Silicon Dioxide (sand or quartz) has a dielectric constant of 3.7, so that the polarization has about 73% the strength of the displacement.
- Water at room temperature has a static dielectric constant of 80 , so that the polarization is 99% the magnitude of the displacement. In other words, most of the applied electric field is canceled out by the responding polarization field. That is why radio wave cannot penetrate water.

(Higher frequencies of light do penetrate water, but that is because light is really an electrodynamic and not an electrostatic phenomenon, which becomes more apparent at higher frequencies.)

- Now combine the linear material response equation with the electrostatic field equations. $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_0 - \mathbf{P}/\epsilon_0$ and $\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D}$ for linear materials becomes:

$$\mathbf{E} = \left(1/\epsilon_0 - 1/\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right) \mathbf{D}$$

$$\mathbf{E} = (1/\epsilon) \mathbf{D}$$

- Knowing this relationship for linear materials, we can simplify Gauss' Law for the displacement:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(\mathbf{x})$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho(\mathbf{x})$$

Gauss's Law in differential form inside a linear dielectric

- This equation applies everywhere, even if the material is nonuniform or we have many materials put together, as long as all of the materials are linear.
- If the material varies spatially, the permittivity may also vary spatially and can not be moved outside the divergence operator. The equation must be solved in this form.
- A special case is if the permittivity is uniform in a region and thus does not depend on position.
- Then the permittivity can be moved outside the divergence operator:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho(\mathbf{x})$$

Gauss's Law in differential form inside a linear uniform dielectric

- This equation states essentially that the divergence of the electric field \mathbf{E} is equal to the constant effects of the material ($1/\epsilon$) times the effect of the free charge density.

- Therefore, the greater the permittivity of the material (the more able the material is to be polarized), the less a charge density is able to create a total electric field.

- If the region containing the uniform dielectric material is taken to include all space, this equation applies everywhere. All the problems in such a medium reduce to the same problems done in previous chapters except the permittivity of free space ϵ_0 is replaced by the permittivity of the material ϵ .

- If the problem involves a few different regions with different materials, but each material is linear and uniform, then this equation applies separately in each region. In such a case the different regions will need to be solved independently and connected by boundary conditions.

4.6 Problemas de valores en la frontera con dieléctricos

- La última ecuación anterior solo se aplica a regiones de dieléctrico uniforme.

- Sin embargo, esta ecuación aún se puede usar para problemas con regiones con diferentes materiales si cada región de dieléctrico uniforme se resuelve de forma independiente y luego las soluciones se ven obligadas a coincidir en los límites.

- La primera condición de contorno se encuentra dibujando un pastillero alrededor de la superficie de la manera habitual, pero solo incluyendo la carga libre y, por lo tanto, aplicando la integral solo al campo aplicado:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma$$

- Aquí \mathbf{n}_{12} es la superficie límite normal que apunta desde la región 1 a la región 2.

- La segunda condición de contorno se encuentra dibujando un bucle a mitad de camino en la superficie:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n}_{12} = 0$$

Ejemplo: Dieléctrico semi- infinito

- Considere dos regiones semi-infinitas de material dieléctrico uniforme lineal que se encuentran en el plano $x - y$.

- El material del lado negativo z , en la región 2, tiene una permitividad ϵ_2 y el material del lado positivo z , en la región 1, tiene una permitividad ϵ_1 .

- Una carga puntual q está incrustada en el eje z a una distancia d del origen en la región 1.

- Las ecuaciones a resolver son:

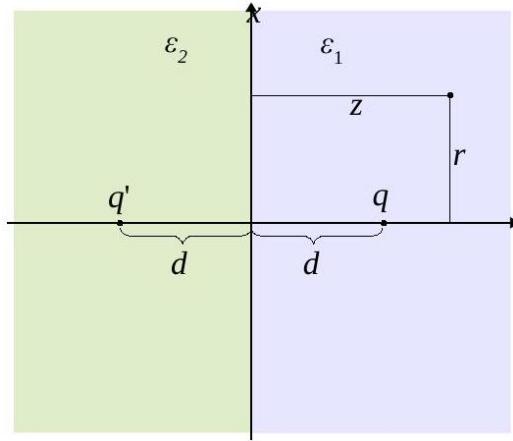
$$\begin{aligned}\epsilon_1 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 &= \rho \quad \text{for } z > 0 \\ \epsilon_2 \nabla \cdot \mathbf{E}_2 &= 0 \quad \text{for } z < 0\end{aligned}$$

- Las condiciones de contorno en $z = 0$ son:

$$\epsilon_1 E_{1,z} = \epsilon_2 E_{2,z}, \text{ y } E_{1,r} = E_{2,r}$$

para todo θ en forma cilíndrica coordenadas

- Usemos el método de la imagen para resolver el campo en la región 1.
- Colocamos un cargo de imagen q' en $z = -d$ como se muestra en la imagen a continuación:



- El potencial en la región 1 es justo el que siente una carga puntual y su imagen. En coordenadas cilíndricas:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} \right)$$

- Para resolver el campo en la región 2, lo tratamos como un problema separado y colocamos una carga de imagen q'' en $z = d$. No hay otros cargos involucrados (el cargo real q no entra directamente en juego en la región 2 debido a la forma en que hemos planteado el problema), por lo que la solución es:

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{q''}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} \right)$$

- Ahora aplique la condición de frontera $\epsilon_1 E_{1,z} = \epsilon_2 E_{2,z}$ en $z = 0$:

$$\boxed{\epsilon_1 \frac{\partial}{\partial z} \Phi_1 = \epsilon_2 \frac{\partial}{\partial z} \Phi_2}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} \right) \right) &= \epsilon_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{q''}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q''}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} \right) \\ (-1/2) \frac{q(-2d)}{(r^2 + d^2)^{3/2}} + (-1/2) \frac{q'(2d)}{(r^2 + d^2)^{3/2}} &= (-1/2) \frac{q''(-2d)}{(r^2 + d^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\boxed{q - q' = q''}$$

- Aplicar la condición de frontera: $E_{1,r} = E_{2,r}$ en $z = 0$:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r} \Phi_1 = \frac{\partial}{\partial r} \Phi_2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{q''}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} \right) \right) \\ \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left((-1/2) \frac{2rq}{(r^2 + d^2)^{3/2}} + (-1/2) \frac{2rq'}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right) \right) &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left((-1/2) \frac{2rq''}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right) \right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\epsilon_2} q''}$$

Las dos ecuaciones encuadradas se pueden resolver en términos de la carga conocida q .

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

$$q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

- De modo que la solución final para el potencial es:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_1 \sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \right) \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} \right) \text{ si } z > 0$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} \text{ si } z < 0$$

- Dibujar un fortín de la forma habitual, pero encerrando únicamente la carga de polarización, conduce a la condición de contorno:

$$\boxed{\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} \text{ en } z = 0}$$

- Para materiales lineales:

$$\boxed{\sigma_{\text{pol}} = -\left(\frac{\epsilon_{r,2} - 1}{\epsilon_{r,2}} \mathbf{D}_2 - \frac{\epsilon_{r,1} - 1}{\epsilon_{r,1}} \mathbf{D}_1 \right) \cdot \mathbf{n}_{12}}$$

$$\sigma_{\text{pol}} = -\left(\frac{\epsilon_{r,2} - 1}{\epsilon_{r,2}} \epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \frac{\epsilon_{r,1} - 1}{\epsilon_{r,1}} \epsilon_1 \mathbf{E}_1 \right) \cdot \mathbf{n}_{12}$$

$$\sigma_{\text{pol}} = -((\epsilon_2 - \epsilon_0) \mathbf{E}_2 - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12}$$

$$\sigma_{\text{pol}} = -((\epsilon_2 - \epsilon_0) (-\nabla \Phi_2) - (\epsilon_1 - \epsilon_0) (-\nabla \Phi_1)) \cdot \mathbf{n}_{12}$$

$$\sigma_{\text{pol}} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \left(-\frac{\partial}{\partial z} \Phi_2 \right) - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \left(-\frac{\partial}{\partial z} \Phi_1 \right)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pol}} &= (-\epsilon_2 + \epsilon_0) \frac{\partial}{\partial z} \frac{q}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} \\ &\quad + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{\partial}{\partial z} \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_1 \sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \right) \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pol}} &= (-\epsilon_2 + \epsilon_0) \frac{q}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) (-1/2) \frac{(-2d)}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \\ &\quad + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{q}{4\pi} \left((-1/2) \frac{(-2d)}{\epsilon_1 (r^2 + d^2)^{3/2}} + \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \right) (-1/2) \frac{(2d)}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_{\text{pol}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{\epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1 (\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}}$$

4.7 Energía electrostática en medios dieléctricos

- As derived in a previous lecture, the electrostatic potential energy stored in a charge configuration in vacuum is given by:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- This equation can still be used in the presence of linear dielectrics if we think of assembling the free charge density ρ , where each piece interacts with the total potential Φ generated by the charge density, which includes the dielectric effects.

- The free charge density ρ gives rise just to the applied electric field (proportional to the displacement D) according to:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(\mathbf{x})$$

so that we have:

$$W = \frac{1}{2} \int \nabla \cdot \mathbf{D} \Phi d\mathbf{x}$$

Integration by parts leads to:

$$W = -\frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi d\mathbf{x}$$

The total potential is related to the total electric field according to $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$. The energy is:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\mathbf{x}$$

For linear materials, $\mathbf{E} = (1/\epsilon)\mathbf{D}$ so that we can cast the energy in the form:

$$W = \frac{\epsilon}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{x}$$

4.8 Resumen

1. Potencial de un dipolo,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

-Potencial eléctrico de un dipolo en el espacio libre

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

2. Momento dipolar en un campo externo, (con γ la polarizabilidad)

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \gamma \mathbf{E}_{\text{ext}}$$

3. Polarización (momento dipolar por unidad de volumen),

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}_{\text{ext}}$$

donde χ_e se llama susceptibilidad eléctrica del medio, con n : número de moléculas por unidad de volumen, y $\chi_e = n\gamma$.

Multipolar

Densidad de carga se escribe en coordenadas esféricas como:

$$\rho = \frac{q}{a^2} \delta(r - a) \delta(\cos \theta) [\delta(\phi) - \delta(\phi - 3\pi/2) - \delta(\phi - \pi) + \delta(\phi - \pi/2)]$$

- definición de momentos multipolares

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

La densidad de carga se escribe en coordenadas esféricas como:

$$\rho = \frac{q}{2\pi a^2} \delta(r - a) [\delta(\cos \theta - 1) + \delta(\cos \theta + 1)] - \frac{2q}{4\pi r^2} \delta(r)$$

Carga imagen de dipolo

$$q' = -q \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \right), \quad q'' = q \frac{2\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0}$$

Dieléctricos

Material dieléctrico en el cual existe una densidad de carga libre $\rho_{\text{libre}}(r')$ y una polarización $P(r')$.

- Capacitancia,

$$C = \epsilon_r C_{\text{vac}}$$

4. Desplazamiento eléctrico,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{fenc}}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$$

en medio isotrópico $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ y dentro de dieléctrico $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$,

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E},$$

Permitividad eléctrica o constante dieléctrica del medio

$$\epsilon \equiv 1 + 4\pi\chi_e$$

vacío: $\epsilon = 1$, material: $\epsilon > 1$, conductor perfecto $\epsilon \rightarrow \infty$.

5. Ecuaciones de la Electrostática en un medio dieléctrico,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{libre}}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\varphi \\ \nabla^2\varphi &= -4\pi\frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon}\end{aligned}$$

6. Densidad de carga asociada a la polarización,

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

7. Condiciones de frontera en la interfase entre dos dieléctricos,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} &= \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}} \\ \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 4\pi\sigma_{\text{libre}}\end{aligned}$$

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma, \quad (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n}_{12} = 0, \quad [E_{T,2} = E_{T,1} \text{ at } \rho = b]$$

$$\epsilon_1 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \rho$$

e igual a 0 si no hay carga

- Las condiciones de contorno en $z = 0$ son:

$$\epsilon_1 E_{1,z} = \epsilon_2 E_{2,z}, \quad E_{1,r} = E_{2,r}$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial}{\partial z} \Phi_1 = \epsilon_2 \frac{\partial}{\partial z} \Phi_2$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi_1 = \frac{\partial}{\partial r} \Phi_2$$

la carga de polarización, conduce a la condición de contorno:

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} \text{ en } z = 0$$

- Para materiales lineales:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{pol}} &= - \left(\frac{\epsilon_{r,2} - 1}{\epsilon_{r,2}} \mathbf{D}_2 - \frac{\epsilon_{r,1} - 1}{\epsilon_{r,1}} \mathbf{D}_1 \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \\ \sigma_{\text{pol}} &= - ((\epsilon_2 - \epsilon_0) \mathbf{E}_2 - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12}\end{aligned}$$

Potencial

$$V = - \int_{\infty}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

8. Energía electrostática en un medio dieléctrico,o

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3r$$

(*)

Densidad de carga superficial

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \cos \theta,$$

Expansión multipolar y medios

- This equation is called a multipole expansion.

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

- These coefficients are called the spherical multipole moments.

Expansión multipolar del campo eléctrico

- The electric field is just the negative gradient:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

- In spherical coordinates:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= - \left[\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right] \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{2l+1} \left[-\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} - \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \right] \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{2l+1} \frac{1}{r^{l+2}} \left[\hat{\mathbf{r}} (l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) - \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) - \hat{\phi} \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \right]\end{aligned}$$

- The monopole contribution to the electric field ($l = 0$) is then:

$$\mathbf{E}_{l=0} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{00} \frac{1}{r^2} [Y_{00}(\theta, \phi)] \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}_{l=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

- This is, of course, the electric field due to a point charge q .

ecuación de Laplace en coordenadas polares cuando se involucra el barido angular completo es:

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi})$$

condiciones de contorno:

$$(\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma$$

si No hay carga libre y la dirección normal es en la dirección radial:

$$\epsilon_2 \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\rho} = \epsilon_1 \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\rho}$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} = \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}$$

Polarización densidad de carga sup

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \cos \theta,$$

El potencial dentro de la esfera no debe poseer singularidades en $r = 0$, luego para $r < a$, tenemos

$$\phi_1(r, \theta) = \sum_{l=0} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

Para $r > a$

$$\phi_2(r, \theta) = \sum_{l=0} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta)$$

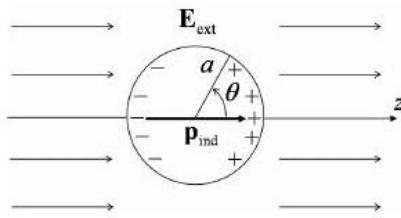
La densidad superficial de carga inducida por la polarización en la superficie de la esfera puede calcularse a partir de la relación

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

4.9 Ejemplos

1. Esfera en campo externo (Sol: 13.54)

Consideremos el problema de una esfera conductora aislada de radio a , sin carga neta, sujeta a un campo externo uniforme $\mathbf{E}_{\text{ext}} = E\hat{\mathbf{z}}$. Encuentre el potencial del dipolo inducido y la polarizabilidad γ de la esfera.

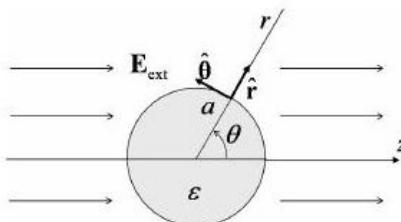


2. Esfera polarizada (Sol: 13.52)

Encuentre el campo eléctrico producido por una esfera uniformemente polarizada de radio R .

3. Cosenso Ej. 3.4.1 (Sol: 13.55)

Calcular el potencial dentro y fuera de una esfera de radio a y constante dieléctrica ϵ , sin cargas libres, sujeta a un campo eléctrico externo $\mathbf{E}_{\text{ext}} = E\hat{\mathbf{z}}$.

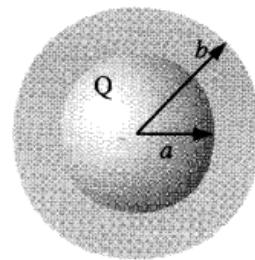
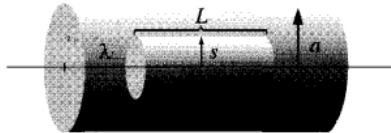


4. Griffiths Ejemplo 4.4 (Sol: 13.62)

Un alambre largo y recto, que lleva una carga lineal uniforme λ , está rodeado por un aislante de goma hasta un radio a . Encuentre el desplazamiento eléctrico.

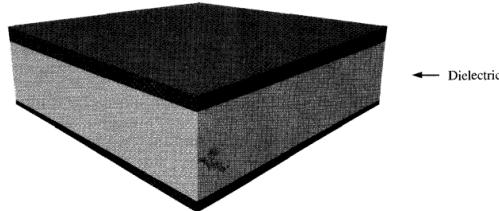
5. Griffiths Ejemplo 4.5 (Sol: 13.63)

Una esfera de metal de radio a tiene una carga Q . Está rodeado, hasta el radio b , por material dieléctrico lineal de permitividad ϵ . Encuentre el potencial en el centro (relativo al infinito).



6. Griffiths Ej 4.6 (Sol: 13.64)

Un capacitor de placas paralelas está lleno de material aislante de constante dieléctrica ϵ_r . ¿Qué efecto tiene esto en su capacitancia?



7. Dieléctrico semi-infinito (Sol: 4.6)

Para ilustrar el método de imágenes para dieléctricos, consideramos una carga puntual q incrustada en un dieléctrico semi-infinito ϵ_1 a distanciada d de una interfaz plana que separa el primer medio de otro dieléctrico semi-infinito ϵ_2 . La superficie puede tomarse como el plano $z = 0$, como se muestra en la figura. Encuentre el potencial y la carga de polarización.

4.10 Ejemplos Jackson

1. Dos dieléctricos semi-infinitos

Para ilustrar el método de imágenes para dieléctricos, consideramos una carga puntual q incrustada en un dieléctrico semi-infinito ϵ_1 a una distancia d de una interfaz plana que separa el primer medio de otro dieléctrico semi-infinito ϵ_2 . La superficie puede tomarse como el plano

$z = 0$, como se muestra en la Fig. 28. Debemos encontrar la solución adecuada a las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad z > 0 \\ \epsilon_2 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad z < 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \text{En todas partes} \end{array} \right\}$$

sujetas a las condiciones de borde en $z = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{Bmatrix} \epsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} \quad (10)$$

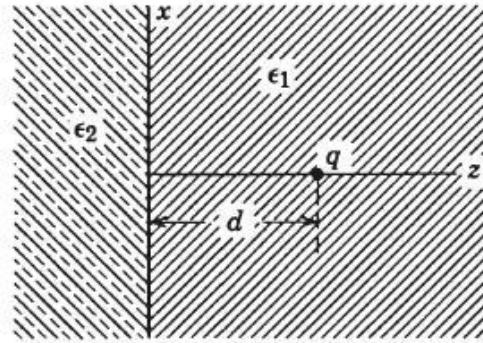


Figure 28: Dos dieléctricos semi-infinitos

Dado que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ en todas partes, \mathbf{E} es derivable de la forma habitual a partir de un potencial Φ . Al intentar usar el método de la imagen, es natural ubicar una carga de imagen q' en la posición simétrica A' que se muestra en la Fig. 29. Entonces para $z > 0$ el potencial en un punto P descrito en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) será

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right), \quad z > 0$$

donde $R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}$, $R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}$. Hasta ahora, el procedimiento es completamente análogo al problema con un material conductor en lugar del dieléctrico ϵ_2 para $z < 0$. Pero ahora debemos especificar el potencial para $z < 0$. Como no hay cargas en la región $z < 0$, debe ser una solución de la ecuación de Laplace sin singularidades en esa región. Claramente, la suposición más simple es que para $z < 0$ el potencial es equivalente al de una carga q'' en la posición A de la carga actual q :

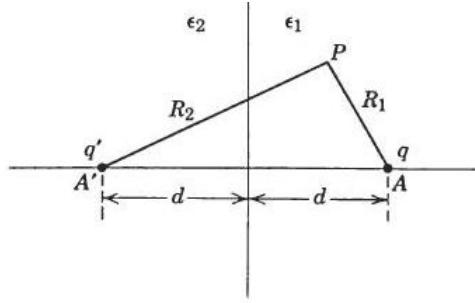


Figure 29: Esquema de carga imagen

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{q''}{R_1}, \quad z < 0$$

Ya que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

mientras

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

las condiciones de contorno (10) conducen a:

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2} q'' \end{aligned}$$

Estos se pueden resolver para obtener las cargas de imagen q' y q'' :

$$\left. \begin{aligned} q' &= - \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \\ q'' &= \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \end{aligned} \right\}$$

Para los dos casos $\epsilon_2 > \epsilon_1$ y $\epsilon_2 < \epsilon_1$ las líneas de fuerza (en realidad líneas de \mathbf{D}) se muestran en la Fig 30

La densidad de carga de polarización está dada por $-\nabla \cdot \mathbf{P}$. Dentro de cada dieléctrico, $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$, de modo que $-\nabla \cdot \mathbf{P} = -\chi_e \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, excepto en el punto de carga q . En la superficie, sin embargo, χ_e da un salto discontinuo, $\Delta \chi_e = (1/4\pi)(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ cuando z pasa por $z = 0$.

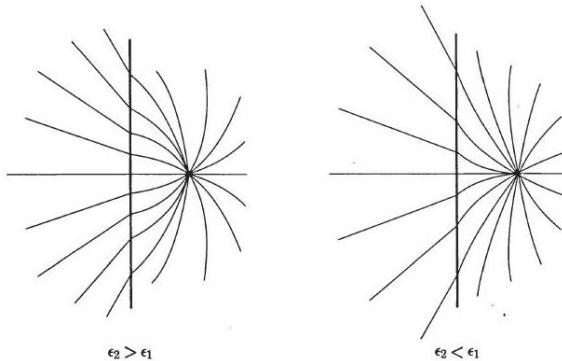


Figure 30: Líneas de desplazamiento eléctrico para una carga puntual incrustada en un ϵ_1 dieléctrico cerca de una losa semi-infinita de ϵ_2 dieléctrico.

Esto implica que hay una densidad de carga superficial de polarización en el plano $z = 0$:

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_{21}$$

donde \mathbf{n}_{21} es la unidad normal del dieléctrico 1 al dieléctrico 2 y \mathbf{P}_i es la polarización en el dieléctrico i en $z = 0$. Ya que

$$\mathbf{P}_i = \left(\frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} \right) \mathbf{E} = - \left(\frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} \right) \nabla \Phi$$

es una cuestión simple demostrar que la densidad de carga de polarización es

$$\sigma_{\text{pol}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1 (\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \quad (11)$$

En el límite $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$ el dieléctrico ϵ_2 se comporta como un conductor en el sentido de que el campo eléctrico en su interior se vuelve muy pequeño y la densidad de carga superficial (11) se acerca al valor apropiado para una superficie conductora.

2. Esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme

Una esfera dieléctrica de radio a con constante dieléctrica ϵ colocada en un campo eléctrico inicialmente uniforme que a grandes distancias de la esfera está dirigido a lo largo del eje z y tiene magnitud E_0 , como se indica en la Fig 31

Tanto dentro como fuera de la esfera no hay cargas libres. En consecuencia, el problema consiste en resolver la ecuación de Laplace con las

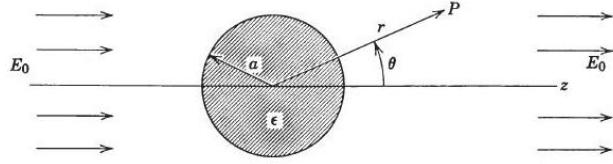


Figure 31: Esfera dieléctrica

condiciones de contorno apropiadas en $r = a$. De la simetría axial de la geometría podemos tomar la solución de la forma:

$$\text{Dentro: } \Phi_{\text{in}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (12)$$

$$\text{Fuera: } \Phi_{\text{out}} = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) \quad (13)$$

A partir de la condición de contorno en el infinito ($\Phi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$) encontramos que el único B_1 que no desaparece es $B_1 = -E_0$. Los otros coeficientes se determinan a partir de las condiciones de contorno en $r = a$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tangencial } E : -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \\ \text{Normal } D : -\epsilon \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} \end{array} \right\} \quad (14)$$

Cuando se sustituyen las series (12) y (13), resultan dos series de polinomios de Legendre iguales a cero. Dado que estos deben desaparecer para todo θ , el coeficiente de cada polinomio de Legendre debe desaparecer por separado. Para la primera condición de frontera esto conduce a las relaciones:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \\ A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}}, \quad \text{para } l \neq 1 \end{array} \right\} \quad (15)$$

mientras que el segundo da:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon A_1 = -E_0 - 2 \frac{C_1}{a^3} \\ \epsilon l A_1 = -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}}, \quad \text{para } l \neq 1 \end{array} \right\} \quad (16)$$

Las segundas ecuaciones en (15) y (16) pueden satisfacerse simultáneamente solo con $A_l = C_l = 0$ para todo $l \neq 1$. Los coeficientes restantes se dan en términos del campo eléctrico aplicado E_0 :

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = -\left(\frac{3}{2+\epsilon}\right) E_0 \\ C_1 = \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) a^3 E_0 \end{array} \right\}$$

El potencial es por lo tanto

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{\text{in}} = -\left(\frac{3}{\epsilon+2}\right) E_0 r \cos \theta \\ \Phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \end{array} \right\}$$

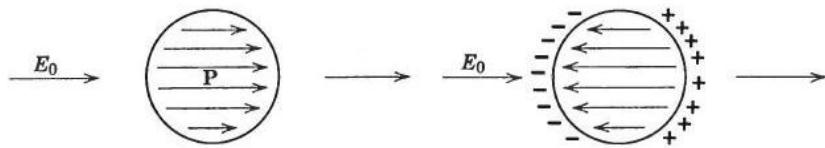


Figure 32: Esfera dieléctrica en un campo uniforme E_0 , que muestra la polarización a la izquierda y la carga de polarización con su campo eléctrico opuesto asociado a la derecha.

El potencial dentro de la esfera describe un campo eléctrico constante paralelo al campo aplicado con magnitud

$$E_{\text{en}} = \frac{3}{\epsilon+2} E_0 < E_0 \quad \text{si } \epsilon > 1 \quad (17)$$

Fuera de la esfera el potencial es equivalente al campo aplicado E_0 más el campo de un dipolo eléctrico en el origen con momento dipolar:

$$p = \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) a^3 E_0 \quad (18)$$

orientado en la dirección del campo aplicado. El momento dipolar se puede interpretar como la integral de volumen de la polarización \mathbf{P} . La polarización es

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\epsilon-1}{4\pi}\right) \mathbf{E} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) \mathbf{E}_0$$

Es constante en todo el volumen de la esfera y tiene una integral de volumen dada por (18). La densidad de carga superficial de polarización es, $\sigma_{\text{pol}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r$:

$$\sigma_{\text{pol}} = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) E_0 \cos \theta$$

Se puede pensar que esto produce un campo interno dirigido en dirección opuesta al campo aplicado, reduciendo así el campo dentro de la esfera a su valor (17), como se muestra en la figura 32

3. Cavidad esférica en un medio dieléctrico

El problema de una cavidad esférica de radio a en un medio dieléctrico con constante dieléctrica ϵ y con un campo eléctrico aplicado E_0 paralelo al eje z , como se muestra en la Fig. 33, puede manipularse exactamente de la misma manera que la esfera dieléctrica. De hecho, la inspección de las condiciones de contorno (14) muestra que los resultados para la cavidad se pueden obtener a partir de los de la esfera reemplazando $\epsilon \rightarrow (1/\epsilon)$. Así, por ejemplo, el campo dentro de la cavidad es uniforme, paralelo a \mathbf{E}_0 , y de magnitud:

$$E_{\text{in}} = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + 1} E_0 > E_0 \text{ si } \epsilon > 1$$

De manera similar, el campo exterior es el campo aplicado más el de un dipolo en el origen orientado en sentido opuesto al campo aplicado y con momento dipolar:

$$p = \left(\frac{\epsilon - 1}{2\epsilon + 1} \right) a^3 E_0$$

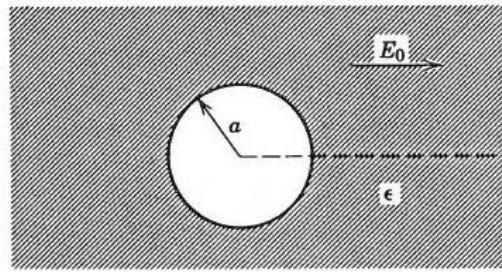
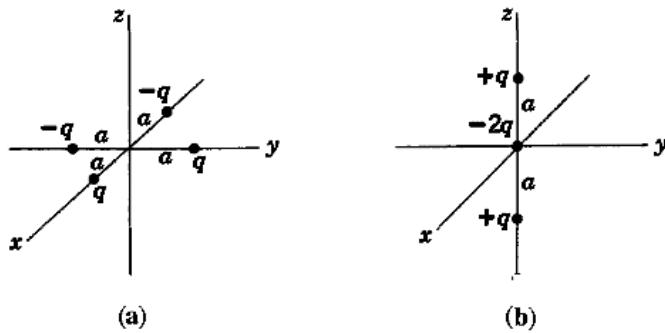


Figure 33: Cavidad esférica en un dieléctrico con un campo uniforme aplicado.

4.11 Problemas Jackson

1. Jackson 4.1 (Sol: 13.53)

Calcule los momentos multipolares q_{lm} de las distribuciones de carga que se muestran en las partes a y b. Trate de obtener resultados para los momentos no nulos válidos para todos los l , pero en cada caso encuentre los dos primeros conjuntos de momentos no nulos como mínimo.



(c) Para la distribución de carga del segundo conjunto b) escriba la expansión multipolar para el potencial. Manteniendo solo el término de orden más bajo en la expansión, grafique el potencial en el plano $x - y$ en función de la distancia desde el origen para distancias mayores que a .

(d) Calcular directamente a partir de la ley de Coulomb el potencial exacto para b) en el plano $x - y$. Graficarlo como una función de la distancia y compararlo con el resultado encontrado en la parte c).

2. Jackson 4.2 (Sol: 13.65)

Un punto dipolo con momento dipolar \mathbf{p} está ubicado en el punto \mathbf{x}_0 . A partir de las propiedades de la derivada de una función delta de Dirac, demuestre que para el cálculo del potencial Φ o la energía de un dipolo en un campo externo, el dipolo puede describirse mediante una densidad de carga efectiva

$$\rho_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

3. El l ésmo término en la expansión multipolar (4.1) del potencial está especificado por los $(2l + 1)$ momentos multipolares q_{lm} . Por otro lado, los momentos multipolares cartesianos,

$$Q_{\alpha\beta\gamma}^{(l)} = \int \rho(\mathbf{x}) x^\alpha y^\beta z^\gamma d^3 x$$

con α, β, γ enteros no negativos sujetos a la restricción $\alpha + \beta + \gamma = l$, son $(l+1)(l+2)/2$ en número. Así, para $l > 1$ hay más momentos multipolares cartesianos de los que parecen necesarios para describir el término en el potencial cuya dependencia radial es r^{-l-1} .

Muestre que mientras los q_{lm} se transforman bajo rotaciones como tensores esféricos irreducibles de rango l , los momentos multipolares cartesianos corresponden a tensores esféricos reducibles de rangos $l, l-2, l-4, \dots, l_{\min}$, donde $l_{\min} = 0$ o 1 para l par o impar, respectivamente. Compruebe que el número de diferentes componentes tensoriales suma el número total de tensores cartesianos. ¿Por qué solo se necesitan q_{lm} en la expansión (4.1)?

4. (a) Demuestre el siguiente teorema: Para una distribución de carga arbitraria $\rho(\mathbf{x})$ los valores de los $(2l+1)$ momentos del primer multipolo no nulo son independientes del origen de los ejes de coordenadas, pero los valores de todos los momentos multipolares superiores en general dependen de la elección del origen. (Los diferentes momentos q_{lm} para l fijos dependen, por supuesto, de la orientación de los ejes).
 (b) Una distribución de carga tiene momentos multipolares $q, \mathbf{p}, Q_{ij}, \dots$ con respecto a un conjunto de ejes de coordenadas y momentos $q', \mathbf{p}', Q'_{ij}, \dots$ con respecto a otro conjunto cuyos ejes son paralelos al primero, pero cuyo origen se encuentra en el punto $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ relativo al primero. Determine explícitamente las conexiones entre los momentos monopolares, dipolares y cuadripolares en los dos marcos de coordenadas.
 (c) Si $q \neq 0$, ¿se puede encontrar \mathbf{R} de modo que $\mathbf{p}' = 0$? Si $q \neq 0, \mathbf{p} \neq 0$, o al menos $\mathbf{p} \neq 0$, ¿se puede encontrar \mathbf{R} de modo que $Q'_{ij} = 0$?
5. Una densidad de carga localizada $\rho(x, y, z)$ se coloca en un campo electrostático externo descrito por un potencial $\Phi^{(0)}(x, y, z)$. El potencial externo varía lentamente en el espacio sobre la región donde la densidad de carga es diferente de cero.
 (a) A partir de los primeros principios, calcule la fuerza total que actúa sobre la distribución de carga como una expansión de los momentos multipolares por las derivadas del campo eléctrico, hasta e incluyendo los momentos cuadripolares. Demuestre que la fuerza es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}^{(0)}(0) + \{\nabla [\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{x})]\}_0 + \left\{ \nabla \left[\frac{1}{6} \sum_{j,k} Q_{jk} \frac{\partial E_j^{(0)}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \right] \right\}_0 + \dots$$

Compare esto con la expansión (4.24) de la energía W . Tenga en cuenta que (4.24) es un número, ¡no es una función de \mathbf{x} que pueda diferenciarse! ¿Cuál es su conexión con \mathbf{F} ?

(b) Repita el cálculo de la parte a para el par total. Para simplificar, evalúe solo un componente cartesiano del par, digamos N_1 . Demuestre que este componente es

$$N_1 = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}^{(0)}(0)]_1 + \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sum_j Q_{2j} E_j^{(0)} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_j Q_{3j} E_j^{(0)} \right) \right]_0 + \dots$$

6. Un núcleo con momento cuadripolar Q se encuentra en un campo eléctrico cilíndricamente simétrico con un gradiente $(\partial E_z / \partial z)_0$ a lo largo del eje z en la posición del núcleo.
- (a) Demuestre que la energía de interacción cuadripolar es

$$W = -\frac{e}{4} Q \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_0$$

(b) Si se sabe que $Q = 2 \times 10^{-28} \text{ m}^2$ y que W/h es 10MHz, donde h es la constante de Planck, calcula $(\partial E_z / \partial z)_0$ en unidades de $e/4\pi\epsilon_0 a_0^3$, donde $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ es el radio de Bohr en hidrógeno.

(c) Las distribuciones de carga nuclear se pueden aproximar mediante una densidad de carga constante a lo largo de un volumen esferoidal de semieje mayor a y semieje menor b . Calcule el momento cuadripolar de dicho núcleo, suponiendo que la carga total es Ze . Dado que Eu¹⁵³ ($Z = 63$) tiene un momento cuadripolar $Q = 2.5 \times 10^{-28} \text{ m}^2$ y un radio medio

$$R = (a + b)/2 = 7 \times 10^{-15} \text{ m}$$

determine la diferencia fraccionaria en el radio $(a - b)/R$.

7. Una distribución localizada de carga tiene una densidad de carga

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2 \theta$$

(a) Haga una expansión multipolar del potencial debido a esta densidad de carga y determine todos los momentos multipolares no nulos. Escriba el potencial a grandes distancias como una expansión finita en

polinomios de Legendre. (b) Determine el potencial explícitamente en cualquier punto del espacio y demuestre que cerca del origen, correcto a r^2 inclusive,

$$\Phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos\theta) \right]$$

(c) Si existe en el origen un núcleo con un momento cuadripolar $Q = 10^{-28} \text{ m}^2$, determine la magnitud de la energía de interacción, suponiendo que la unidad de carga en $\rho(\mathbf{r})$ arriba está la carga electrónica y la unidad de longitud es el hidrógeno radio de Bohr $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$. Exprese su respuesta como una frecuencia dividiendo por la constante h de Planck.

La densidad de carga en este problema es la de los estados $m = \pm 1$ del nivel $2p$ en el hidrógeno, mientras que la interacción cuadripolar es del mismo orden que se encuentra en las moléculas.

8. Jackson 4.8: Capa cilíndrica dieléctrica muy larga (Sol: 13.49 y Sol2: 13.50)

Una capa cilíndrica circular recta muy larga de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 y radios interior y exterior a y b , respectivamente, se coloca en un campo eléctrico previamente uniforme E_0 con su eje perpendicular al campo. El medio dentro y fuera del cilindro tiene una constante dieléctrica de la unidad.

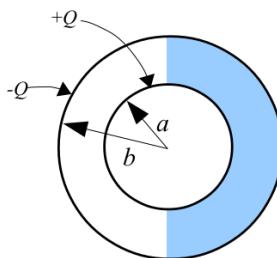
- (a) Determine el campo potencial y eléctrico en las tres regiones, despreciando los efectos finales.
- (b) Dibuje las líneas de fuerza para un caso típico $b \approx 2a$.
- (c) Discuta las formas límite de su solución apropiadas para un cilindro dieléctrico sólido en un campo uniforme y una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

9. Jackson 4.9 (Sol: 13.51)

Una carga puntual q se encuentra en el espacio libre a una distancia d del centro de una esfera dieléctrica de radio a ($a < d$) y constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 .

- (a) Encuentre el potencial en todos los puntos del espacio como una expansión en armónicos esféricos.
- (b) Calcule las componentes rectangulares del campo eléctrico cerca del centro de la esfera.

- (c) Verifique que, en el límite $\epsilon/\epsilon_0 \rightarrow \infty$, su resultado es el mismo que para la esfera conductora.
10. **Jackson 4.10 (Sol: 13.66)**
- Dos esferas conductoras concéntricas de radios interior y exterior a y b , respectivamente, llevan cargas $\pm Q$. El espacio vacío entre las esferas está medio lleno por una capa hemisférica de dieléctrico (de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0), como se muestra en la figura.
- Encuentre el campo eléctrico en todas partes entre las esferas.
 - Calcule la distribución de carga superficial en la esfera interior.
 - Calcule la densidad de carga de polarización inducida en la superficie del dieléctrico en $r = a$.



11. Los siguientes datos sobre la variación de la constante dieléctrica con la presión se tomaron de Smithsonian Physical Tables, 9^a ed., pág. 424:

Air at 292 K		
Pressure (atm)	ϵ/ϵ_0	
20	1.0108	Relative density of air as a function of pressure is given in AIP Handbook,
40	1.0218	[3rd ed., McGraw-Hill, New York
60	1.0333	(1972), p. 4-165].
80	1.0439	
100	1.0548	

Pentane (C_2H_{12}) at 303 K		
Pressure (atm)	Density (g/cm ³)	ϵ/ϵ_0
1	0.613	1.82
10^3	0.701	1.96
4×10^3	0.796	2.12
8×10^3	0.883	2.24
12×10^3	0.907	2.33

- Pruebe la relación de Clausius-Mossotti entre las constantes dieléctricas y la densidad del aire y el pentano en los rangos tabulados. ¿Aproximadamente? Si es aproximadamente, discuta las variaciones fraccionarias en densidad y $(\epsilon/\epsilon_0 - 1)$. Para el pentano, compare la relación de Clausius-Mossotti con la relación más cruda, $(\epsilon/\epsilon_0 - 1) \propto$ densidad.
12. El vapor de agua es un gas polar cuya constante dieléctrica presenta una dependencia apreciable de la temperatura. La siguiente tabla proporciona datos experimentales sobre este efecto. Suponiendo que el

vapor de agua obedece la ley de los gases ideales, calcule la polarizabilidad molecular en función de la temperatura inversa y grafítela. A partir de la pendiente de la curva, deduzca un valor para el momento dipolar permanente de la molécula H_2O (exprese el momento dipolar en coulomb-metros).

T(K)	Pressure (cm Hg)	$(\epsilon\epsilon_0 - 1) \times 10^5$
393	56.49	400.2
423	60.93	371.7
453	65.34	348.8
483	69.75	328.7

13. Dos superficies conductoras cilíndricas, coaxiales y largas de radios a y b se introducen verticalmente en un dieléctrico líquido. Si el líquido sube una altura promedio h entre los electrodos cuando se establece una diferencia de potencial V entre ellos, demuestre que la susceptibilidad del líquido es

$$\chi_e = \frac{(b^2 - a^2) \rho gh \ln(b/a)}{\epsilon_0 V^2}$$

donde ρ es la densidad del líquido, g es la aceleración de la gravedad y se desprecia la susceptibilidad del aire.

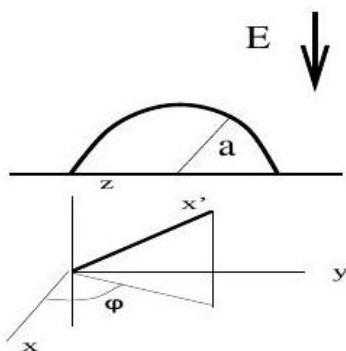
4.12 Problemas Valdivia

1. Plano infinito y semiesfera dieléctrica (Sol: 13.31)

Suponga un plano infinito conductor a tierra ($\psi = 0$) con una semiesfera dieléctrica de radio $r < a$ en el origen del plano conductor.

a) Asuma un campo eléctrico asintótico uniforme E_0 en la dirección $-\hat{z}$ para $r \rightarrow \infty$. Encuentre el potencial en todo el espacio.

b) Encuentre la función de Green para $r > a$.



2. Tarea 2 P1 2022 Sol:13.82

Tomemos una esfera de radio a hecha de un material eléctrico permanente \mathbf{P} constante. Esta esfera es puesta en forma concéntrica dentro de una esfera conductora de radio $b > a$. Encuentre el campo eléctrico dentro de la esfera y la densidad de carga superficial en el conductor.

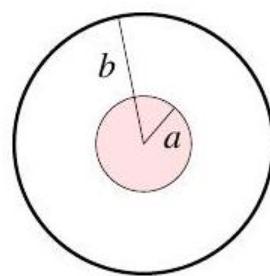
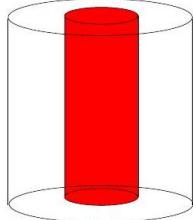


Figure 34: Esfera con \mathbf{P} constante dentro de una esfera conductora.

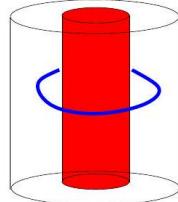
3. Tarea 2 P2 2022 (Sol:13.83)

Considere un cascarón cilíndrico conductor a tierra (infinito y uniforme en la dirección longitudinal) de radio R . Dentro del cilindro hay otro

cilindro de radio $a < R$, como se ve en la figura, compuesto de un material que responde con $\mathbf{P} = P_o \hat{x}$ independiente de la intensidad del campo eléctrico que se le aplica. Encuentre el campo eléctrico dentro del conductor y la densidad de carga en las superficies.



4. Considere un cascarón cilíndrico conductor a tierra (infinito y uniforme en la dirección longitudinal) de radio R . Dentro del cilindro hay otro cilindro de radio $a < R$, como se ve en la figura, compuesto de un material lineal polarizable de valor μ . Si además ponemos un anillo de carga de radio $a < b < R$, encuentre el campo eléctrico dentro del conductor y la densidad de carga en la superficie.



5. Plasma (Sol: 13.85)

Un medio dieléctrico consistente en cargas libres positivas y negativas (un plasma) responde a los campos eléctricos suavemente variables en el espacio, manteniendo el equilibrio térmico, de manera que

$$n_i(z) \approx n_{io} \exp(-q_i \Phi(z)/k_B T)$$

donde $\Phi(z)$ es el potencial electrostático, T es la temperatura, q_i es la carga de la especie i , y n_{io} es a la densidad de la especie i cuando $\Phi(z) = 0$, expresada en partículas por unidad de volumen.

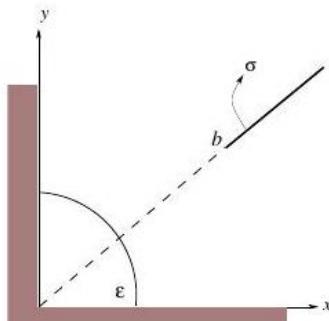
- Demuestre que si el potencial es pequeño, la densidad de carga neta esta dada por

$$\rho(z) = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda^2} \frac{1}{\lambda^2} = \sum_i \frac{4\pi n_{io} q_i^2}{k_B T}$$

- b) Suponga que un electrodo con forma de plano infinito con densidad de carga σ se inserta en el plasma en $z = 0$. Calcule el potencial $\Phi(z)$ en ambos lados del electrodo.
- c) ¿Cuán pequeña debe ser σ para que sea válida la solución?
- d) Encuentre la densidad de polarización $P(x)$ en este plasma

6. Cuarto de esfera dieléctrica (Sol: 13.86)

Considere un cuarto de esfera dieléctrica de radio a y constante dieléctrica ϵ , confinada por los planos $x - z$ e $y - z$, los cuales son conductores y están conectados a tierra. A esta geometría se le agrega una línea de carga de largo L y densidad de carga σ constante, la cual se ubica en forma radial a la esfera a una distancia b del origen y a un ángulo $\pi/4$ con respecto al eje x . Calcule el potencial en todo el espacio.



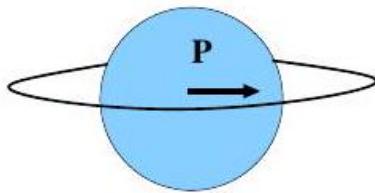
7. Anillo y esfera (Sol: 13.87)

Considere un anillo de radio a , el cual tiene una densidad de carga uniforme λ . Suponga que en forma concéntrica con el anillo ponemos una esfera de radio $b < a$ de material polarizable con polarización uniforme \mathbf{P} en una dirección arbitraria, como se muestra en la figura.

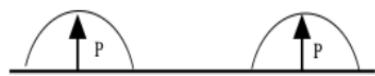
- a) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio.
- b) Asumiendo que $a \gg$, obtenga el primer término de la energía electrostática de la esfera en la presencia del anillo.
- c) Cuál es la configuración de menor energía?

8. Semiesfera dipolar eléctrica (Sol: 13.76)

Sea una semiesfera de radio $r = a$ hecha de material dipolar eléctrico permanente y puesto sobre un conductor plano infinito. La dirección de \vec{P} es perpendicular a la superficie del conductor (ver Figura). Calcule el campo eléctrico \vec{E} producido por esta configuración.



(a) Semiesfera con \vec{P} constante



(b) Posibles configuraciones

9. Dos esferas concéntricas $a < b$ tienen cargas $\pm Q$. La mitad del espacio entre las esferas ($\theta < \pi/2$) tiene un dialéctico ϵ_1 , el resto ($\theta > \pi/2$) tiene ϵ_2
 - (a) encuentre el campo eléctrico entre las esferas
 - (b) calcule la densidad de carga superficial $r = a$ y $r = b$
 - (c) calcule la densidad de carga de polarización inducida en $r = b$ y $r = a$
10. Tomemos un cilindro a tierra ($\Psi = 0$) de radio b y largo L . Para $\rho \leq a < b$, tenemos un dieléctrico con constante ϵ . Este cilindro tiene a la mitad de su altura un anillo de radio $a < R < b$ con una densidad lineal de carga λ , como se muestra en la figura. Encuentre el potencial dentro del cilindro.

4.13 Problemas Exámen

1. Momentos multipolares (Ayuda Sol: 13.53)

Considere un sistema de cuatro partículas cargadas puntuales ubicadas en los vértices de un cuadrado de arista d . Las partículas tienen alternadamente, carga Q y $-Q$. Encuentre los tres primeros momentos multipolares del sistema.

2. Dipolo eléctrico y dieléctrico semi-infinito (Sol: 13.67)

Un dipolo eléctrico puntual con momento dipolar \vec{p} está ubicado en el vacío apuntando hacia afuera y a una distancia d de la superficie plana de un dieléctrico semi-infinito con permitividad ϵ .

- a) Encuentra el potencial eléctrico Φ en todas partes.
- b) ¿Cuál es el potencial eléctrico si el dipolo está orientado paralelo a la superficie del dieléctrico?

5 Magnetostática

5.1 Revisión de magnetostática en materiales magnéticos

- Currents give rise to curling magnetic fields:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{total}} \text{ or } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \text{ or } \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M \text{ where } \mathbf{J}_{\text{total}} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_M$$

- There are no magnetic monopoles:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ which leads to } \nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

- Defining a vector potential $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ leads to:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_{\text{total}} \text{ and } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{\text{total}}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

- In a region where the magnetic material is linear and uniform so that $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ we can apply all of the \mathbf{B} -field equations to the free current \mathbf{J} instead of the total current $\mathbf{J}_{\text{total}}$ if we replace the permittivity of free space μ_0 with the permittivity of the material μ . For instance:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \text{ and } \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

- The boundary conditions for any type of materials are:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ and } \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

5.2 Casos Especiales en Magnetostática

- If the materials are linear and there is no free current density in the region of space where we want to know the fields ($\mathbf{J} = 0$), then the equation reduces to:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

- These can be solved in the usual way with appropriate boundary conditions.

- An alternate approach is to define a scalar potential $\mathbf{B} = -\nabla\Psi_M$ so that the zero-divergence equation becomes:

$$\nabla^2\Psi_M = 0$$

- If there is no current density, $\mathbf{J} = 0$, and if the material is not linear, but instead the magnetization \mathbf{M} is known and fixed (such as in permanent magnets), the equations reduces to:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_M \text{ and } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \text{ where } \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

- The alternate scalar approach $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_M$ can also be used in this case. The statement of no magnetic monopoles really means that the divergence of the \mathbf{H} field and the \mathbf{M} field are equal:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}) &= 0 \\ -\nabla \cdot \mathbf{H} &= \nabla \cdot \mathbf{M} \\ \nabla^2 \Phi_M &= \nabla \cdot \mathbf{M} \end{aligned}$$

- where we can now treat the divergence of the magnetization as an effective magnetic charge density: $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$.

5.3 Problema de muestra

Considere una esfera sólida no magnetizada de radio a hecha de un material magnético lineal uniforme con permeabilidad μ que luego se coloca en un campo magnético externo originalmente uniforme $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$.

Solución:

Como solo hay material lineal y no hay corrientes, podemos resolver el potencial magnético:

$$\nabla^2 \Psi_M = 0$$

donde $\mathbf{B} = -\nabla\Psi_M$ y el potencial lejano se vuelve $\Psi_M = -B_0 r \cos \theta$

- Esta es simplemente la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con simetría azimutal, cuya solución general ya sabemos que es:

$$\Psi_M(r, \theta, \phi) = \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

- Fuera de la esfera, aplicar la condición de frontera en grande r :

$$-B_0 r \cos \theta = \sum_l (A_l r^l) P_l(\cos \theta)$$

$$A_1 = -B_0, A_0 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0 \dots$$

$$\Psi_M^{\text{out}}(r, \theta, \phi) = -B_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l^{\text{out}} r^{-l-1} P_l(\cos \theta)$$

- Dentro de la esfera, $B_l = 0$ para mantener una solución válida en el origen:

$$\Psi_M^{\text{in}}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l^{\text{in}} r^l P_l(\cos \theta)$$

- No hay corrientes y todos los materiales son lineales, por lo que las condiciones de contorno se convierten en:

$$(\mathbf{B}^{\text{out}} - \mathbf{B}^{\text{in}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0 \text{ y } \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{\text{out}} - \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^{\text{in}} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 \text{ at } r = a$$

- Aplicando la primera condición de contorno se obtiene:

$$(-\nabla \Psi_M^{\text{out}} + \nabla \Psi_M^{\text{in}}) \cdot \mathbf{r} = 0$$

$$\frac{\partial \Psi_M^{\text{out}}}{\partial r} = \frac{\partial \Psi_M^{\text{in}}}{\partial r}$$

$$-B_0 \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l^{\text{out}} (-l-1) a^{-l-2} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l^{\text{in}} l a^{l-1} P_l(\cos \theta)$$

$$B_0^{\text{out}} = 0$$

$$A_1^{\text{in}} = -B_0 - 2B_1^{\text{out}} a^{-3}$$

$$A_l^{\text{in}} = B_l^{\text{out}} \frac{(-l-1)}{l} a^{-2l-1}$$

- Aplicando la segunda condición de contorno se obtiene:

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \Psi_M^{\text{out}}}{\partial \theta} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi_M^{\text{in}}}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \left[B_0 a \sin \theta + \sum_{l=1}^{\infty} B_l^{\text{out}} a^{-l-1} P'_l(\cos \theta) \right] = \frac{1}{\mu} \left[\sum_{l=1}^{\infty} A_l^{\text{in}} a^l P'_l(\cos \theta) \right]$$

$$A_1^{\text{in}} = \frac{\mu}{\mu_0} [-B_0 + B_1^{\text{out}} a^{-3}]$$

$$A_l^{\text{in}} = \frac{\mu}{\mu_0} B_l^{\text{out}} a^{-2l-1}$$

- Todas las ecuaciones en los recuadros solo se pueden satisfacer si $B_l^{\text{out}} = A_l^{\text{in}} = 0$ para $l > 1$ y si

$$B_1^{\text{out}} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} a^3 B_0$$

$$A_1^{\text{in}} = \left[\frac{-3\mu}{\mu + 2\mu_0} \right] B_0$$

- Ahora tenemos la solución final al potencial magnético, y por lo tanto podemos encontrar los campos magnéticos:

$$\Psi_M^{\text{out}}(r, \theta, \phi) = \left[-\left(\frac{r}{a} \right) + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] B_0 a \cos \theta \quad \text{y} \quad \Psi_M^{\text{in}}(r, \theta, \phi) = \left[\frac{-3\mu}{\mu + 2\mu_0} \right] B_0 r \cos \theta$$

$$\mathbf{B} = -\nabla \Psi_M$$

$$\mathbf{B} = -\left[\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \Psi_M}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_M}{\partial \theta} \right]$$

$$\mathbf{B}^{\text{in}} = \left[\frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} \right] B_0 [\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta]$$

$$\mathbf{B}^{\text{in}} = \left[\frac{3\mu^2}{\mu + 2\mu_0} \right] B_0 \hat{\mathbf{z}} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}^{\text{out}} = B_0 \hat{\mathbf{z}} + B_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \left(\frac{a}{r} \right)^3 [3\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\mathbf{z}}]$$

y los otros campos están linealmente relacionados:

$$\mathbf{H}^{\text{in}} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^{\text{in}} \rightarrow \mathbf{H}^{\text{in}} = \left[\frac{3}{\mu + 2\mu_0} \right] B_0 \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{H}^{\text{out}} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{\text{out}} \rightarrow \mathbf{H}^{\text{out}} = \frac{1}{\mu_0} B_0 \hat{\mathbf{z}} + B_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0(\mu + 2\mu_0)} \left(\frac{a}{r} \right)^3 [3\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\mathbf{z}}]$$

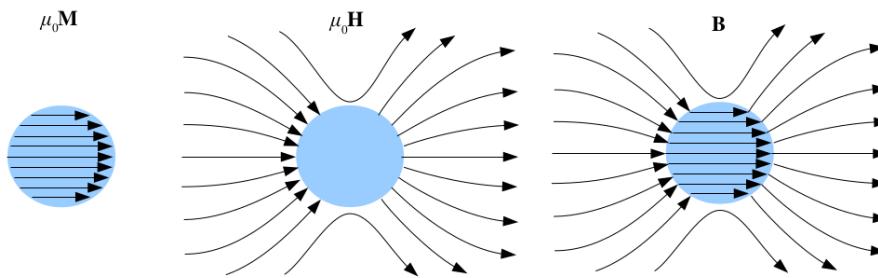
$$\mathbf{M}^{\text{in}} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B}^{\text{in}} \rightarrow \mathbf{M}^{\text{in}} = \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu_0(\mu + 2\mu_0)} B_0 \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{M}^{\text{out}} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B}^{\text{out}} \rightarrow \mathbf{M}^{\text{out}} = 0$$

- Podemos verificar esto mirando varios casos especiales.

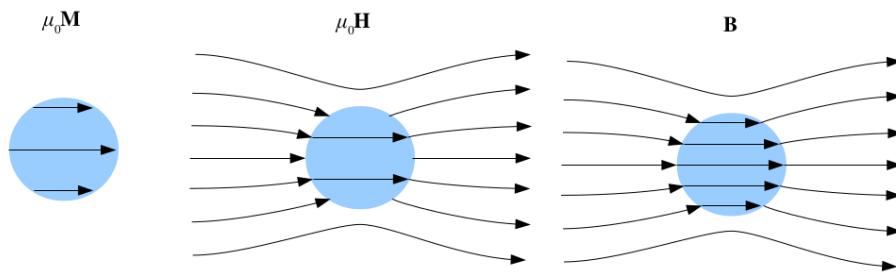
- Si la permeabilidad de la esfera es solo la permeabilidad del espacio libre, $\mu = \mu_0$, la esfera esencialmente se elimina y no debería haber campos excepto el campo uniforme original. Las ecuaciones anteriores lo confirman.
- Si la permeabilidad de la esfera es positivamente infinita (un material perfectamente paramagnético), los campos se reducen a:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{\text{in}} &= 0, \quad \mathbf{B}^{\text{in}} = \mu_0 \mathbf{M}^{\text{in}} = 3B_0 \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{M}^{\text{out}} &= 0, \quad \mathbf{B}^{\text{out}} = \mu_0 \mathbf{H}^{\text{out}} = B_0 \hat{\mathbf{z}} + B_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 [3\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\mathbf{z}}] \\ (\text{en } r = a, \text{ tenemos } \mathbf{B}^{\text{out}} &= 3B_0 \cos \theta \hat{\mathbf{r}})\end{aligned}$$



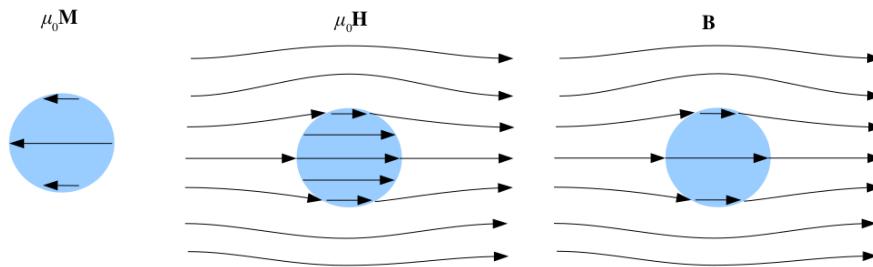
- Si la permeabilidad es el doble de la permeabilidad del espacio libre (material paramagnético débil), $\mu = 2\mu_0$ entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\mu_0 \mathbf{M}^{\text{in}} &= \frac{3}{4} B_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \mu_0 \mathbf{H}^{\text{in}} = \frac{3}{4} B_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B}^{\text{in}} = \frac{3}{2} B_0 \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{M}^{\text{out}} &= 0, \quad \mathbf{B}^{\text{out}} = \mu_0 \mathbf{H}^{\text{out}} = B_0 \hat{\mathbf{z}} + B_0 \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^3 [3\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\mathbf{z}}]\end{aligned}$$



- Si la permeabilidad es la mitad de la permeabilidad del espacio libre (material diamagnético), $\mu = (1/2)\mu_0$ entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\mu_0 \mathbf{M}^{\text{in}} &= -\frac{3}{5} B_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \mu_0 \mathbf{H}^{\text{in}} = \frac{6}{5} B_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B}^{\text{in}} = \frac{3}{5} B_0 \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{M}^{\text{out}} &= 0 \quad \mathbf{B}^{\text{out}} = \mu_0 \mathbf{H}^{\text{out}} = B_0 \hat{\mathbf{z}} - B_0 \frac{1}{5} \left(\frac{a}{r}\right)^3 [3\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\mathbf{z}}]\end{aligned}$$



5.4 Resumen

2. Densidad de corriente eléctrica,

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

$J = I/A$, donde $I = dq/dt$ es la intensidad de corriente eléctrica. En esféricas:
 $\mathbf{J} = \sigma \omega a \sin \theta \delta(r - a) \hat{\phi}, \quad \hat{\phi}' = -\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}$

3. Ley de Ohm (experimental),

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_{\text{ext}}$$

con σ la conductividad eléctrica. Su inverso $\rho = \sigma^{-1}$ se llama la resistividad eléctrica.

$$I = \frac{V}{R}$$

con R la resistencia del material.

1. Ecuaciones de Maxwell para la Magnetostática, las cargas en movimiento producen campo magnético, además de campo eléctrico.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}\end{aligned}$$

esta es la Ley de Ampere, \mathbf{B} también se llama inducción magnética.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

es compatible con la conservación de la carga eléctrica.

$$\frac{\partial}{\partial \rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

4. Ecuaciones de la Magnetostática en términos del potencial vector \mathbf{A} ,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} && \text{densidad de flujo magnético} \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}\end{aligned}$$

5. Potencial vector de una distribución de corriente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

7. Ley de Biot-Savart en forma diferencial,

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

6. Campo magnético debido a una densidad de corriente,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

8. Ley de Ampere

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}.$$

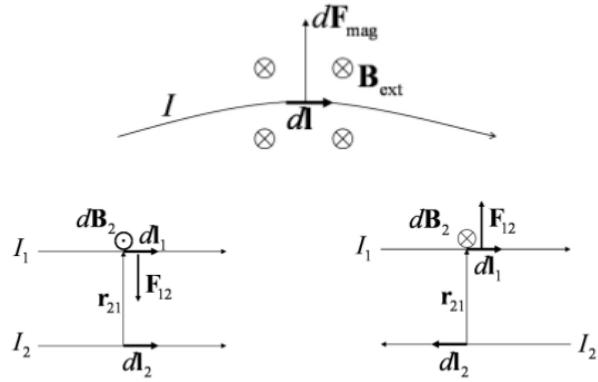
8. Ley de Ampere en forma integral,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{enc}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

- Fuerza sobre un elemento de corriente $Id\mathbf{l}$ en un campo magnético externo.

9. Fuerza magnética entre dos circuitos de corrientes,

$$\mathbf{F}_{\text{mag}12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}, \quad \text{sobre 1 debido a 2}$$



10. Dipolo magnético de una distribución de corriente, o momento magnético dipolar

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{I}{2c} \oint_C \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'$$

- La magnetización

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') \equiv \frac{1}{2c} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')$$

11. Potencial vector de un dipolo magnético,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

12. Campo magnético de un dipolo magnético,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}.$$

13. Energía de un dipolo en un campo magnético externo.

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}$$

14. Ecuaciones de la Magnetostática en medios materiales,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- El campo magnético en el medio

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

- La magnetización:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

donde χ_m es la susceptibilidad del medio.

- El campo queda

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

donde $\mu = 1 + 4\pi\chi_m$ se llama permeabilidad magnética del medio, donde

$$\begin{aligned}\mu > 1, \quad \chi_m > 0, & \text{ materiales paramagnéticos} \\ \mu < 1, \quad \chi_m < 0, & \text{ materiales diamagnéticos}\end{aligned}$$

15. Condiciones de frontera en la superficie que separa dos medios,

$$\mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} - \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{sup}}$$

- Solo hay material lineal y no hay corrientes, podemos resolver el potencial magnético:

$$\nabla^2 \Psi_M = 0$$

donde $\mathbf{B} = -\nabla \Psi_M$, el potencial escalar, y el potencial lejano se vuelve $\Psi_M = -B_0 r \cos \theta$

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}^{\text{out}} - \mathbf{B}^{\text{in}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} &= 0 \text{ y } \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^{\text{out}} - \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^{\text{in}} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 \text{ at } r = a \\ \frac{\partial \Psi_M^{\text{out}}}{\partial r} &= \frac{\partial \Psi_M^{\text{in}}}{\partial r} \\ \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \Psi_M^{\text{out}}}{\partial \theta} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi_M^{\text{in}}}{\partial \theta} \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'\end{aligned}$$

- Fuerza magnética:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int \mathbf{I}(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

- Fuerza de Lorentz:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}))$$

Formula de ciclotrón:

$$QvB = \frac{mv^2}{R}, \quad op = QBR$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{r} da',$$

donde $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$,
 $da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$

5.5 Ejemplos

1. Cosenso Ej 4.2.1 Sol: (13.56)

Calcular el campo magnético producido por un cable recto e infinito, ubicado a lo largo del eje z , por el cual fluye una corriente constante I en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$.

2. Cosenso Ejemplo 4.2.2 (Sol: 13.57)

Calcular el campo magnético dentro de un solenoide infinito, con n vueltas por unidad de longitud, por el cual fluye una corriente constante I .

3. Cosenso Ej 4.3.3 (Sol: 13.58)

Calcular el campo magnético sobre el eje perpendicular de una espira de radio a que lleva una corriente constante I .

4. Cosenso Ej 4.5.1 (Sol: 13.60)

Momento magnético de un circuito de área A que lleva una corriente I .

5. Consensa Ej 4.5.2 (Sol: 13.61)

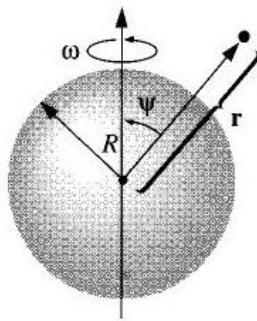
Momento magnético de un sistema de N partículas con carga q_i y masa μ_i en las posiciones \mathbf{r}_i , que se mueven con velocidad \mathbf{v}_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

6. Griffiths Example 5.11 (Sol: 13.70)

Una capa esférica, de radio R , que lleva una carga superficial uniforme σ , se pone a girar a una velocidad angular ω . Encuentre el potencial vectorial que produce en el punto \mathbf{r} .

7. Griffiths Example 5.12 (Sol: 13.71)

Encuentre el vector potencial de un solenoide infinito con n vueltas por unidad de longitud, radio R y corriente I .



8. Problema de muestra (Sol: 5.3)

Es el mismo Ej Valdivia 1

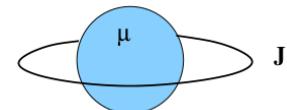
Considere una esfera sólida no magnetizada de radio a hecha de un material magnético lineal uniforme con permeabilidad μ que luego se coloca en un campo magnético externo originalmente uniforme $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$.

Ejemplo Valdivia Magnetismo 1 (Sol: 13.72)

Una esfera de radio a y $\mu = \text{const}$ en un campo \mathbf{B} asintótico $\mathbf{B} = B_o \hat{\mathbf{z}}$. Encuentre el campo magnético adentro y fuera de la esfera.

Ejemplo Valdivia Magnetismo 2 (Sol: 13.73)

Considere una esfera de radio a de material polarizable con constante μ . En el plano ecuatorial alrededor de esta esfera tenemos un anillo de radio $b > a$ en la cual fluye una corriente constante $\mathbf{J} = J_o \hat{\phi}$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.



Ejemplo Valdivia Magnetismo 3 (Sol: 13.74)

Una esfera de radio a con magnetización $\mathbf{M} = M_o \hat{\mathbf{z}}$ constante. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.

Ejemplo Valdivia Magnetismo 4 (Sol: 13.75)

Calcular el campo magnético producido por un magneto permanente dentro de una cavidad conductora.

5.6 Problemas Jackson

1. Comenzando con la expresión diferencial

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

para la inducción magnética en el punto P con coordenada \mathbf{x} producida por un incremento de corriente Idl' en \mathbf{x}' , muestre explícitamente que para un lazo cerrado que transporta una corriente I , la inducción magnética en P es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega$$

donde Ω es el ángulo sólido subtendido por el bucle en el punto P . Esto corresponde a un potencial escalar magnético, $\Phi_M = -\mu_0 I \Omega / 4\pi$. La convención de signos para el ángulo sólido es que Ω es positivo si el punto P ve el lado "interior" de la superficie que abarca el bucle, es decir, si una unidad normal \mathbf{n} a la superficie está definida por la dirección del flujo de corriente a través de la regla de la mano derecha, Ω es positivo si \mathbf{n} apunta en dirección opuesta al punto P y negativo en caso contrario. Esta es la misma convención que en la Sección 1.6 para la capa de dipolo eléctrico.

2. Un solenoide ideal largo, cilíndrico recto, de sección transversal arbitraria se crea apilando una gran cantidad de bucles portadores de corriente idénticos uno encima del otro, con N bobinas por unidad de longitud y cada bucle transportando una corriente I . [En la práctica, un solenoide de este tipo podría enrollarse en un mandril mecanizado con una sección transversal arbitraria. Después de que la bobina se hiciera rígida (por ejemplo, con epoxi), se retiraría el mandril.]
 (a) En la aproximación de que la bobina solenoide es una hoja de corriente ideal e infinitamente larga, use el Problema 5.1 para establecer que en cualquier punto dentro de la bobina el campo magnético es axial e igual a

$$H = NI$$

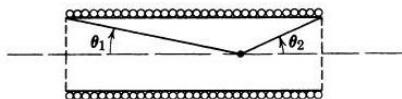
y que $H = 0$ para cualquier punto fuera de la bobina.

- (b) Para un solenoide realista de sección transversal circular de radio $a(Na \gg 1)$, pero aún de longitud infinita, demuestre que el campo magnético "suavizado" justo fuera del solenoide (promediado axialmente durante varias vueltas) no es cero, pero tiene la misma magnitud y dirección que la de un solo cable en el eje que transporta una corriente I , incluso si $Nes \rightarrow \infty$. Compara campos por dentro y por fuera.

3. Un solenoide circular recto de longitud finita L y radio a tiene N vueltas por unidad de longitud y conduce una corriente I . Demuestra que la inducción magnética sobre el eje del cilindro en el límite $NL \rightarrow \infty$ es

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

donde los ángulos están definidos en la figura.



4. Una inducción magnética \mathbf{B} en una región libre de corriente en un medio uniforme es cilíndricamente simétrica con componentes $B_z(\rho, z)$ y $B_\rho(\rho, z)$ y con un $B_z(0, z)$ conocido en el eje de simetría. La magnitud del campo axial varía lentamente en z . (a) Demuestre que cerca del eje las componentes axial y radial de la inducción magnética son aproximadamente

$$B_z(\rho, z) \approx B_z(0, z) - \left(\frac{\rho^2}{4} \right) \left[\frac{\partial^2 B_z(0, z)}{\partial z^2} \right] + \dots$$

$$B_\rho(\rho, z) \approx - \left(\frac{\rho}{2} \right) \left[\frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \right] + \left(\frac{\rho^3}{16} \right) \left[\frac{\partial^3 B_z(0, z)}{\partial z^3} \right] + \dots$$

(b) ¿Cuáles son las magnitudes de los términos despreciados, o de manera equivalente, cuál es el criterio que define "cerca" del eje?

5. (a) Utilice los resultados de los problemas 5.4 y 5.3 para encontrar las componentes axial y radial de la inducción magnética en la región central ($|z| \ll L/2$) de un solenoide largo y uniforme de radio a y termina en $z = \pm L/2$, incluido el valor de B_z justo dentro de la bobina ($\rho = a^-$).
 (b) Utilice la ley de Ampère para demostrar que la inducción magnética longitudinal justo fuera de la bobina es aproximadamente

$$B_z(\rho = a^+, z) \approx - \left(\frac{2\mu_0 N I a^2}{L^2} \right) \left(1 + \frac{12z^2}{L^2} - \frac{9a^2}{L^2} + \dots \right)$$

Para $L \gg a$, el campo exterior es despreciable comparado con el interior. ¿Cómo se compara esta componente axial en tamaño con la componente azimutal del Problema 5.2 b?

(c) Demuestre que al final del solenoide la inducción magnética cerca del eje tiene componentes

$$B_z \simeq \frac{\mu_0 NI}{2}, \quad B_\rho \simeq \pm \frac{\mu_0 NI}{4} \left(\frac{\rho}{a} \right)$$

6. Un conductor cilíndrico de radio a tiene un orificio de radio b perforado paralelo y centrado a una distancia d del eje del cilindro ($d+b < a$). La densidad de corriente es uniforme en todo el metal restante del cilindro y es paralela al eje. Use la ley de Ampère y el principio de superposición lineal para encontrar la magnitud y la dirección de la densidad del flujo magnético en el agujero.
7. Una bobina circular compacta de radio a , que lleva una corriente I (quizás N vueltas, cada una con corriente I/N), se encuentra en el plano $x - y$ con su centro en el origen.
 - (a) Por medios elementales [Ec. (5.4)] encuentre la inducción magnética en cualquier punto del eje z .
 - (b) Una bobina idéntica con la misma magnitud y sentido de la corriente está ubicada en el mismo eje, paralela ya una distancia b por encima de la primera bobina. Con el origen de coordenadas reubicado en el punto medio entre los centros de las dos bobinas, determine la inducción magnética en el eje cerca del origen como una expansión en potencias de z , hasta z^4 inclusive:

$$B_z = \left(\frac{\mu_0 I a^2}{d^3} \right) \left[1 + \frac{3(b^2 - a^2) z^2}{2d^4} + \frac{15(b^4 - 6b^2 a^2 + 2a^4) z^4}{16d^8} + \dots \right]$$

donde $d^2 = a^2 + b^2/4$.

(c) Demuestre que, fuera del eje cerca del origen, las componentes axial y radial, correctas al segundo orden en las coordenadas, toman la forma

$$B_z = \sigma_0 + \sigma_2 \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right); \quad B_\rho = -\sigma_2 z \rho$$

(d) Para las dos bobinas en la parte b, demuestre que la inducción magnética en el eje z para $|z|$ grande está dada por la expansión en potencias impares inversas de $|z|$ obtenidas de z pequeño expansión de la parte b por la sustitución formal, $d \rightarrow |z|$.

(e) Si $b = a$, las dos bobinas se conocen como un par de bobinas de Helmholtz. Para esta elección de geometría, los segundos términos en

las expansiones de las partes b y d están ausentes ($\sigma_2 = 0$ en la parte c). El campo cerca del origen es entonces muy uniforme. ¿Cuál es el valor máximo permitido de $|z|/a$ si el campo axial debe ser uniforme a una parte en 10^4 , una parte en 10^2 ?

8. Una distribución de corriente cilíndricamente simétrica localizada es tal que la corriente fluye solo en la dirección azimutal; la densidad de corriente es una función solo de r y θ (o ρ y z) : $\mathbf{J} = \hat{\phi} J(r, \theta)$. La distribución es "hueca" en el sentido de que hay una región libre de corriente cerca del origen, así como en el exterior.
 - (a) Demuestre que el campo magnético se puede derivar de la componente azimutal del potencial vectorial, con una expansión multipolar

$$A_\phi(r, \theta) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_L m_L r^L P_L^1(\cos \theta)$$

en el interior y

$$A_\phi(r, \theta) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_L \mu_L r^{-L-1} P_L^1(\cos \theta)$$

fuera de la distribución actual.

- (b) Demuestre que los momentos multipolares internos y externos son

$$m_L = -\frac{1}{L(L+1)} \int d^3x r^{-L-1} P_L^1(\cos \theta) J(r, \theta)$$

y

$$\mu_L = -\frac{1}{L(L+1)} \int d^3x r^L P_L^1(\cos \theta) J(r, \theta)$$

9. Las dos bobinas circulares de radio a y separación b del Problema 5.7 se pueden describir en coordenadas cilíndricas por la densidad de corriente

$$\mathbf{J} = \hat{\phi} I \delta(\rho - a) [\delta(z - b/2) + \delta(z + b/2)]$$

- (a) Utilizando el formalismo del problema 5.8, calcule los momentos multipolares interno y externo para $L = 1, \dots, 5$.
- (b) Usando el desarrollo multipolar interno del problema 5.8, escriba explícitamente una expresión para B_z en el eje z y relacionela con la respuesta del problema 5.7 b.

10. Un bucle de corriente circular de radio a que lleva una corriente I se encuentra en el plano $x - y$ con su centro en el origen.
- (a) Demuestre que la única componente que no desaparece del potencial vectorial es

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \int_0^\infty dk \cos kz I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>)$$

donde $\rho_<$ ($\rho_>$) es el menor (mayor) de a y ρ .

(b) Demuestre que una expresión alternativa para A_ϕ es

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_0 I a}{2} \int_0^\infty dk e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho)$$

(c) Escriba expresiones integrales para los componentes de la inducción magnética, usando las expresiones de las partes a y b. Evalúe explícitamente los componentes de B en el eje z realizando las integraciones necesarias.

11. Una espira circular de alambre que lleva una corriente I está ubicada con su centro en el origen de coordenadas y la normal a su plano que tiene ángulos esféricos θ_0, ϕ_0 . Hay un campo magnético aplicado, $B_x = B_0(1 + \beta y)$ y $B_y = B_0(1 + \beta x)$.
- (a) Calcule la fuerza que actúa sobre la espira sin hacer aproximaciones. Compare su resultado con el resultado aproximado (5.69). Comentario.
- (b) Calcule el momento de torsión en el orden más bajo. ¿Puedes deducir algo acerca de las contribuciones de orden superior? ¿Desaparecen por el bucle circular? ¿Qué pasa con otras formas?
12. Dos espiras circulares concéntricas de radios a, b y corrientes I, I' , respectivamente ($b < a$), tienen un ángulo α entre sus planos. Muestre que el momento de torsión en una de las espiras es sobre la línea de intersección de los dos planos que contienen las espiras y tiene la magnitud.

$$N = \frac{\mu_0 \pi I I' b^2}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} \left[\frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)\Gamma(\frac{3}{2})} \right]^2 \left(\frac{b}{a} \right)^{2n} P_{2n+1}^1(\cos \alpha)$$

donde $P_l^1(\cos \alpha)$ es un polinomio de Legendre asociado. Determine el sentido del par para α un ángulo agudo y las corrientes en las mismas direcciones (opuestas).

13. Una esfera de radio a tiene una distribución de carga superficial uniforme σ . La esfera gira alrededor de un diámetro con velocidad angular constante ω . Encuentre el vector potencial y la densidad de flujo magnético tanto dentro como fuera de la esfera.
 (Sol: 13.69)
14. Un cilindro circular recto largo, hueco, de radio interior (exterior) $a(b)$, y de permeabilidad relativa μ_r , se coloca en una región de densidad de flujo magnético inicialmente uniforme \mathbf{B}_0 en ángulo recto con el campo. Encuentre la densidad de flujo en todos los puntos del espacio y dibuje el logaritmo de la razón de las magnitudes de \mathbf{B} en el eje del cilindro a \mathbf{B}_0 como una función de $\log_{10}\mu_r$ para $a^2/b^2 = 0.5, 0.1$. Desprecie los efectos finales.
15. Considere dos cables largos y rectos, paralelos al eje z , separados por una distancia d y que transportan corrientes I en direcciones opuestas. Describe el campo magnético \mathbf{H} en términos de un potencial escalar magnético Φ_M , con $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_M$.
- (a) Si los cables son paralelos al eje z con posiciones, $x = \pm d/2, y = 0$, demuestre que en el límite de espaciamiento pequeño, el potencial es aproximadamente el de un dipolo bidimensional,

$$\Phi_M \approx -\frac{Id \sin \phi}{2\pi\rho} + O(d^2/\rho^2)$$

donde ρ y ϕ son las coordenadas polares habituales.

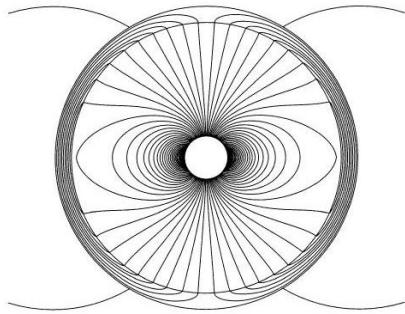
(b) Los alambres estrechamente espaciados ahora están centrados en un cilindro circular recto hueco de acero, de radio interior (exterior) $a(b)$ y permeabilidad magnética $\mu = \mu_r\mu_0$. Determine el potencial escalar magnético en las tres regiones, $0 < \rho < a$, $a < \rho < b$ y $\rho > b$. Demuestre que el campo fuera del cilindro de acero es un campo dipolar bidimensional, como en el inciso a, pero con una intensidad reducida por el factor

$$F = \frac{4\mu_r b^2}{(\mu_r + 1)^2 b^2 - (\mu_r - 1)^2 a^2}$$

Relaciona tu resultado con el Problema 5.14.

(c) Suponiendo que $\mu_r \gg 1$, y $b = a + t$, donde el espesor $t \ll b$, escriba una expresión aproximada para F y determine su valor numérico para $\mu_r = 200$ (típico del acero en 20G), $b = 1.25$ cm, $t = 3$ mm. El efecto de

blindaje es relevante para la reducción de campos dispersos en cableado residencial y comercial de 60 Hz, 110 o 220 V. La figura ilustra el efecto de blindaje para $a/b = 0.9$, $\mu_r = 100$.



16. Una espira circular de alambre de radio a y espesor despreciable conduce una corriente I . El bucle está centrado en una cavidad esférica de radio $b > a$ en un gran bloque de hierro dulce. Suponga que la permeabilidad relativa del hierro es efectivamente infinita y la del medio en la cavidad, la unidad.
 - (a) En la aproximación de $b \gg a$, demuestre que el campo magnético en el centro de la espira aumenta por un factor $(1 + a^3/2b^3)$ por la presencia del hierro.
 - (b) ¿Cuál es el radio del bucle de corriente "imagen" (que lleva la misma corriente) que simula el efecto del hierro para $r < b$?
17. Existe una distribución de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ en un medio de permeabilidad relativa unitaria adyacente a una losa semi-infinita de material que tiene permeabilidad relativa μ_r y llena el semiespacio, $z < 0$.
 - (a) Demuestre que para $z > 0$ la inducción magnética se puede calcular reemplazando el medio de permeabilidad μ_r por una imagen de distribución de corriente, \mathbf{J}^* , con componentes ,

$$\left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) J_x(x, y, -z), \quad \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) J_y(x, y, -z), \quad - \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) J_z(x, y, -z)$$
 - (b) Demuestre que para $z < 0$ la inducción magnética parece deberse a una distribución de corriente $[2\mu_r / (\mu_r + 1)] \mathbf{J}$ en un medio de permeabilidad relativa unitaria.
18. Un bucle circular de alambre que tiene un radio a y por el que circula una corriente I está ubicado en el vacío con su centro a una distancia d

de una losa semi-infinita de permeabilidad μ . Encuentre la fuerza que actúa sobre la espira cuando

- (a) el plano del bucle es paralelo a la cara de la losa,
 - (b) el plano del bucle es perpendicular a la cara de la losa.
 - (c) Determine la forma límite de su respuesta a las partes ayb cuando $d \gg a$. ¿Puedes obtener estos valores límite de alguna manera simple y directa? 5.19 Un material magnéticamente "duro" tiene la forma de un cilindro circular recto de longitud L y radio a . El cilindro tiene una magnetización permanente M_0 , uniforme en todo su volumen y paralela a su eje.
 - (a) Determine el campo magnético \mathbf{H} y la inducción magnética \mathbf{B} en todos los puntos del eje del cilindro, tanto dentro como fuera.
 - (b) Trace las razones $\mathbf{B}/\mu_0 M_0$ y \mathbf{H}/M_0 en el eje como funciones de z para $L/a = 5$.
19. (a) Partiendo de la ecuación de fuerza (5.12) y del hecho de que una magnetización \mathbf{M} dentro de un volumen V delimitado por una superficie S es equivalente a una densidad de corriente volumétrica $\mathbf{J}_M = (\nabla \times \mathbf{M})$ y una densidad de corriente superficial $(\mathbf{M} \times \mathbf{n})$, muestran que en ausencia de corrientes de conducción macroscópicas, la fuerza magnética total sobre el cuerpo se puede escribir
- $$\mathbf{F} = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{M}) \mathbf{B}_e d^3x + \int_S (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_e da$$
- donde \mathbf{B}_e es la inducción magnética aplicada (sin incluir la del cuerpo en cuestión). La fuerza ahora se expresa en términos de las densidades de carga efectivas ρ_M y σ_M . Si la distribución de la magnetización no es discontinua, la superficie puede estar en el infinito y la fuerza dada por la integral del volumen.
- (b) Una esfera de radio R con magnetización uniforme tiene su centro en el origen de coordenadas y su dirección de magnetización formando ángulos esféricos θ_0 , ϕ_0 . Si el campo magnético externo es el mismo que en el problema 5.11, use la expresión del inciso a para evaluar las componentes de la fuerza que actúa sobre la esfera.
20. Un campo magnetostático se debe enteramente a una distribución localizada de magnetización permanente.
- (a) Demuestre que

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d^3x = 0$$

siempre que la integral se tome en todo el espacio.

- (b) A partir de la energía potencial (5.72) de un dipolo en un campo externo, demuestre que para una distribución continua de magnetización permanente, la energía magnetostática se puede escribir

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} d^3x = -\frac{\mu_0}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} d^3x$$

además de una constante aditiva, que es independiente de la orientación o posición de los diversos cuerpos magnetizados constituyentes.

21. Muestre que, en general, una barra larga y recta de área transversal uniforme A con magnetización longitudinal uniforme M , cuando se coloca con su extremo plano contra una superficie plana infinitamente permeable, se adhiere con una fuerza dada aproximadamente por

$$F \simeq \frac{\mu_0}{2} A M^2$$

Relacione su discusión con las consideraciones electrostáticas en la Sección 1.11.

22. Un cilindro circular recto de longitud L y radio a tiene una magnetización longitudinal uniforme M . (a) Demuestre que, cuando se coloca con su extremo plano contra una superficie plana infinitamente permeable, se adhiere con una fuerza

$$F = 2\mu_0 a L M^2 \left[\frac{K(k) - E(k)}{k} - \frac{K(k_1) - E(k_1)}{k_1} \right]$$

donde

$$k = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + L^2}}, \quad k_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + L^2}}$$

- (b) Encuentre la forma límite de la fuerza si $L \gg a$.

23. (a) Para el plano perfectamente conductor de la Sección 5.13 con el agujero circular en él y el campo magnético tangencial asintóticamente uniforme \mathbf{H}_0 en un lado, calcule el campo magnético tangencial sumado

$\mathbf{H}^{(1)}$ en el lado del plano con \mathbf{H}_0 . Demuestre que sus componentes para $\rho > a$ son

$$H_x^{(1)} = \frac{2H_0a^3}{\pi} \frac{xy}{\rho^4 \sqrt{\rho^2 - a^2}}$$

$$H_y^{(1)} = \frac{2H_0a^3}{\pi} \frac{y^2}{\rho^4 \sqrt{\rho^2 - a^2}} + \frac{H_0}{\pi} \left[\frac{a}{\rho} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\rho^2}} - \sin^{-1} \left(\frac{a}{\rho} \right) \right]$$

- (b) Dibuje las líneas de flujo de corriente superficial en la vecindad del agujero en ambos lados del plano.
24. Un lazo rectangular recto y plano que lleva una corriente constante I_1 se coloca cerca de un alambre largo y recto que lleva una corriente I_2 . El bucle está orientado de modo que su centro esté a una distancia perpendicular d del alambre; los lados de longitud a son paralelos al alambre y los lados de longitud b forman un ángulo α con el plano que contiene el alambre y el centro del lazo. La dirección de la corriente I_1 es la misma que la de I_2 en el lado del rectángulo más cercano al cable.
- (a) Demuestre que la energía magnética de interacción

$$W_{12} = \int \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{A}_2 d^3x = I_1 F_2$$

(donde F_2 es el flujo magnético de I_2 que une el circuito rectangular que lleva I_1), es

$$W_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{4\pi} \ln \left[\frac{4d^2 + b^2 + 4db \cos \alpha}{4d^2 + b^2 - 4db \cos \alpha} \right]$$

- (b) Calcule la fuerza entre la espira y el alambre para corrientes fijas.
 (c) Repetir el cálculo para una espira circular de radio a , cuyo plano es paralelo al alambre y forma un ángulo α con respecto al plano que contiene el centro de la espira y el alambre. Demuestre que la energía de interacción es

$$W_{12} = \mu_0 I_1 I_2 d \cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{t\alpha} - \sqrt{e^{2i\alpha} - a^2/d^2} \right\}$$

Encuentra la fuerza.

- (d) Para ambos bucles, demuestre que cuando $d \gg a, b$ la energía de interacción se reduce a $W_{12} \approx \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$, donde \mathbf{m} es el momento magnético de la espira. Explica el signo.

25. Una línea de transmisión de dos hilos consta de un par de hilos paralelos impermeables de radios a y b separados por una distancia $d > a + b$. Una corriente fluye por un cable y regresa por el otro. Se distribuye uniformemente sobre la sección transversal de cada alambre. Demuestre que la autoinductancia por unidad de longitud es

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{d^2}{ab} \right) \right]$$

26. Un circuito consta de una capa conductora larga y delgada de radio a y un cable de retorno paralelo de radio b en el eje interior. Si se supone que la corriente se distribuye uniformemente a lo largo de la sección transversal del cable, calcule la autoinductancia por unidad de longitud. ¿Cuál es la autoinducción si el conductor interior es un tubo hueco delgado?
27. Muestre que la inductancia mutua de dos espiras coaxiales circulares en un medio homogéneo de permeabilidad μ es

$$M_{12} = \mu \sqrt{ab} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right]$$

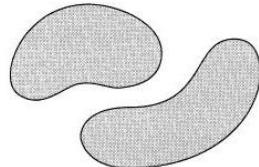
donde

$$k^2 = \frac{4ab}{(a + b^2) + d^2}$$

y a, b son los radios de las espiras, d es la distancia entre sus centros, y K y E son las integrales elípticas completas.

Encuentre el valor límite cuando $d \ll a, b$ y $a \simeq b$.

28. La figura representa una línea de transmisión que consta de dos conductores perfectos paralelos de sección transversal arbitraria, pero constante. La corriente fluye por un conductor y regresa por el otro.



Problem 5.29

Demuestre que el producto de la inductancia por unidad de longitud L y la capacitancia por unidad de longitud C es

$$LC = \mu\epsilon$$

donde μ y ϵ son la permeabilidad y la permitividad del medio que rodea a los conductores. (Vea la discusión sobre campos magnéticos cerca de conductores perfectos al comienzo de la Sección 5.13).

29. (a) Muestre que una densidad de corriente superficial $K(\phi) = I \cos \phi / 2R$ que fluye en la dirección axial sobre una superficie cilíndrica circular recta de radio R produce dentro del cilindro una corriente magnética uniforme inducción $B_0 = \mu_0 I / 4R$ en una dirección perpendicular al eje del cilindro. Demuestre que el campo exterior es el de un dipolo bidimensional.
 - (b) Calcule la energía del campo magnetostático total por unidad de longitud. ¿Cómo se divide dentro y fuera del cilindro?
 - (c) ¿Cuál es la inductancia por unidad de longitud del sistema, visto como un circuito largo con corriente que fluye hacia arriba por un lado del cilindro y regresa por el otro?
- Respuesta: $L = \pi \mu_0 / 8$.
30. Un imán acelerador de flexión consta de N vueltas de cable superconductor cuya configuración actual se puede describir aproximadamente por la densidad de corriente axial

$$J_z(\rho, \phi) = \left(\frac{NI}{2R} \right) \cos \phi \delta(\rho - R)$$

El cilindro de corriente circular derecho está centrado en el eje de un cilindro de hierro hueco de radio interior R' ($R' > R$). Las dimensiones relativas (R, R' unos pocos centímetros y una longitud de imán de varios metros) permiten el uso de una aproximación bidimensional, al menos lejos de los extremos del imán. Suponga que la permeabilidad relativa del hierro puede tomarse como infinita. [Entonces el radio exterior de la plancha es irrelevante.]

- (a) Demuestre que el campo magnético dentro de la vaina de corriente es perpendicular al eje del cilindro en la dirección definida por $\phi = \pm\pi/2$ y tiene la magnitud

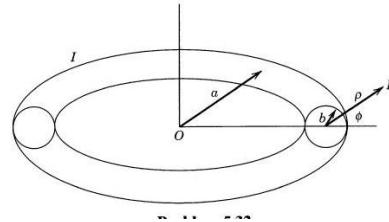
$$B_0 = \left(\frac{\mu_0 NI}{4R} \right) \left[1 + \frac{R^2}{R'^2} \right]$$

(b) Demuestre que la energía magnética en el interior de $r = R$ aumenta (y en el exterior disminuye) en relación con los valores en ausencia del hierro. (Compare la parte b del problema 5.30.)

(c) Demuestre que la inductancia por unidad de longitud es

$$\frac{dL}{dz} = \left(\frac{\pi \mu_0 N^2}{8} \right) \left[1 + \frac{R^2}{R'^2} \right]$$

31. Un bucle circular de radio medio a está hecho de alambre que tiene una sección transversal circular de radio b , con $b \ll a$. El croquis muestra las dimensiones y coordenadas relevantes para este problema.



32. (a) Usando (5.37), la expresión del potencial vectorial de una espira circular filamentaria y las aproximaciones apropiadas para las integrales elípticas, demuestre que el potencial vectorial en el punto P cerca del alambre es aproximadamente

$$A_\phi = (\mu_0 I / 2\pi) [\ln(8a/\rho) - 2]$$

donde ρ es la coordenada transversal que se muestra en la figura y las correcciones son del orden $(\rho/a) \cos \phi$ y $(\rho/a)^2$.

(b) Dado que el potencial vectorial de la parte a es, aparte de una constante, justo fuera de un alambre circular recto por el que circula una corriente I , determine el potencial vectorial dentro del alambre ($\rho < b$) en la misma aproximación al requerir la continuidad de A_ϕ y su derivada radial en $\rho = b$, asumiendo que la corriente es uniforme en densidad dentro del cable:

$$A_\phi = (\mu_0 I / 4\pi) (1 - \rho^2/b^2) + (\mu_0 I / 2\pi) [\ln(8a/b) - 2], \quad \rho < b$$

(c) Use (5.149) para encontrar la energía magnética, por lo tanto, la autoinductancia,

$$L = \mu_0 a [\ln(8a/b) - 7/4]$$

¿Son las correcciones de orden b/a o $(b/a)^2$? ¿Cuál es el cambio en L si se supone que la corriente fluye solo en la superficie del cable (como ocurre a altas frecuencias cuando la profundidad de la piel es pequeña en comparación con b)?

33. Considere dos bucles de corriente (como en la figura 5.3) cuya orientación en el espacio es fija, pero cuya separación relativa se puede cambiar. Sean O_1 y O_2 los orígenes de los dos bucles, fijos en relación con cada bucle, y \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 ser las coordenadas de los elementos $d\mathbf{l}_1$ y $d\mathbf{l}_2$, respectivamente, de los bucles referidos a los respectivos orígenes. Sea \mathbf{R} la coordenada relativa de los orígenes, dirigida desde el bucle 2 al bucle 1.

- (a) A partir de (5.10), la expresión de la fuerza entre los bucles, demuestre que se puede escribir

$$\mathbf{F}_{12} = I_1 I_2 \nabla_R M_{12}(\mathbf{R})$$

donde M_{12} es la inductancia mutua de los bucles,

$$M_{12}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{R}|}$$

y se supone que la orientación de los bucles no cambia con \mathbf{R} .

- (b) Demuestre que la inductancia mutua, vista como una función de \mathbf{R} , es una solución de la ecuación de Laplace,

$$\nabla_R^2 M_{12}(\mathbf{R}) = 0$$

La importancia de este resultado es que la unicidad de las soluciones de la ecuación de Laplace permite la explotación de las propiedades de tales soluciones, siempre que se pueda encontrar una solución para un valor particular de \mathbf{R} .

34. Dos espiras circulares idénticas de radio a están ubicadas inicialmente a una distancia R una de otra sobre un eje común perpendicular a sus planos.

- (a) De la expresión $W_{12} = \int d^3x \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{A}_2$ y el resultado para A_ϕ del problema 5.10 b, demuestre que la inductancia mutua de los bucles es

$$M_{12} = \mu_0 \pi a^2 \int_0^\infty dk e^{-kR} J_1^2(ka)$$

(b) Demuestre que para $R > 2a$, M_{12} tiene la expansión,

$$M_{12} = \frac{\mu_0 \pi a}{2} \left[\left(\frac{a}{R} \right)^3 - 3 \left(\frac{a}{R} \right)^5 + \frac{75}{8} \left(\frac{a}{R} \right)^7 + \dots \right]$$

(c) Use las técnicas de la Sección 3.3 para soluciones de la ecuación de Laplace para mostrar que la inductancia mutua para dos espiras circulares idénticas coplanares de radio a cuyos centros están separados por una distancia $R > 2a$ es

$$M_{12} = -\frac{\mu_0 \pi a}{4} \left[\left(\frac{a}{R} \right)^3 + \frac{9}{4} \left(\frac{a}{R} \right)^5 + \frac{375}{64} \left(\frac{a}{R} \right)^7 + \dots \right]$$

(d) Calcule las fuerzas entre los bucles en el eje común y las configuraciones coplanares. Relaciona las respuestas con las del Problema 5.18.

35. Una bobina aislada se enrolla en la superficie de una esfera de radio a de tal manera que produce una inducción magnética uniforme B_0 en la dirección z dentro de la esfera y un campo dipolar fuera de la esfera. El medio dentro y fuera de la esfera tiene una conductividad σ y una permeabilidad μ uniformes.
- (a) Encuentre la densidad de corriente superficial necesaria \mathbf{K} y demuestre que el potencial vectorial que describe el campo magnético tiene solo una componente azimutal, dada por

$$A_\phi = \frac{B_0 a^2}{2} \frac{r_-}{r_+^2} \sin \theta$$

donde r_- (r_+) es el menor (mayor) de r y a .

(b) En $t = 0$ se corta la corriente en la bobina. [La presencia de la bobina puede ignorarse de ahora en adelante.] Con el desprecio de la corriente de desplazamiento de Maxwell, el decaimiento del campo magnético se describe mediante la ecuación de difusión, (5.160). Usando una transformada de Laplace y una expansión de la función de Bessel esférica (3.113), demuestre que el vector potencial en los tiempos $t > 0$ está dado por

$$A_\phi = \frac{3B_0 a}{\pi} \sin \theta \int_0^\infty e^{-\nu t k^2} j_1(k) j_1 \left(\frac{kr}{a} \right) dk$$

donde $\nu = 1/\mu\sigma a^2$ es una tasa de decaimiento característica y $j_1(x)$ es la función esférica de Bessel de orden uno. Demuestre que el campo

magnético en el centro de la esfera se puede escribir explícitamente en términos de la función de error $\Phi(x)$ como

$$B_z(0, t) = B_0 \left[\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{4\nu t}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\right) \right]$$

(c) Demuestre que la energía magnética total en el instante $t > 0$ se puede escribir

$$W_m = \frac{6B_0^2 a^3}{\mu} \int_0^\infty e^{-2\nu t k^2} [j_1(k)]^2 dk$$

Muestre que en tiempos largos ($\nu t \gg 1$) la energía magnética decae asintóticamente como

$$W_m \rightarrow \frac{\sqrt{2\pi} B_0^2 a^3}{24\mu(\nu t)^{3/2}}$$

- (d) Encuentre una expresión correspondiente para la forma asintótica del vector potencial (en r, θ y $\nu t \rightarrow \infty$ fijos) y demuestre que decae como $(\nu t)^{-3/2}$ también. Dado que la energía es cuadrática en la fuerza del campo, parece haber un rompecabezas aquí. Muestre por medios numéricos o analíticos que el comportamiento del campo magnético en el instante t es tal que, para distancias pequeñas comparadas con $R = a(\nu t)^{1/2} \gg a$, el campo es uniforme con fuerza $(B_0/6\pi^{1/2})(\nu t)^{-3/2}$, y para distancias grandes en comparación con R , el campo es esencialmente el campo dipolar original. Explique físicamente.
36. El campo magnético variable en el tiempo para $t > 0$ en el problema 5.35 induce un campo eléctrico y hace que fluya corriente.
- (a) ¿Qué componentes del campo eléctrico existen? Determine expresiones integrales para los componentes del campo eléctrico y encuentre una forma explícita simple de la densidad de corriente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ en $t = 0^+$. Compara tu resultado con la densidad de corriente del problema 5.35a. Encuentre el comportamiento asintótico de los campos eléctricos en el tiempo. (b) Con la ley de Ohm y los campos eléctricos encontrados en el inciso a, demuestre que la potencia total disipada en el medio resistivo se puede escribir

$$P = \frac{12B_0^2 a^3 \nu}{\mu} \int_0^\infty e^{-2\nu k^2} [k j_1(k)]^2 dk$$

Tenga en cuenta que la potencia es la derivada temporal negativa de la energía magnética, W_m .

(c) Debido a la ley de Ohm, la energía eléctrica total es $W_e = \epsilon_0 P / 2\sigma$. La energía total es la suma de W_e y W_m ; su derivada temporal debe ser el negativo de la disipación de potencia. Demuestre que el desprecio de la energía en el campo eléctrico es del mismo orden de aproximación que el desprecio de la corriente de desplazamiento en las ecuaciones que gobiernan el campo magnético.

5.7 Problemas Valdivia

1. Tarea 1 2021 P4, tarea 3 2009 P2

Una esfera de radio a tiene densidad de carga ρ . La esfera es rotada sobre su diámetro a una frecuencia ω . Encuentre y grafique el campo magnético dentro y fuera de la esfera.

2. Tarea 1 2021 P6

Considere un cilindro de largo L y radio a con un material de magnetización permanente y uniforme M_0 a lo largo del eje de cilindro. Construya la solución para \mathbf{H} .

Ayuda: Demuestre primero que la solución a la ecuación de Laplace con simetría azimutal se puede escribir como

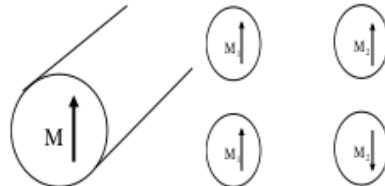
$$\Psi = \int_0^\infty dk A(k) e^{\pm kz} J_0(k\rho)$$

que puede incluir o no a un material magnético en un rango finito de ρ .

3. Tarea 2 2022 P3 (Sol: 13.84)

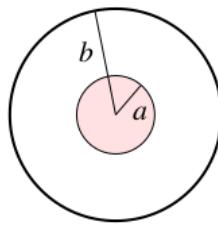
Tomemos un cilindro de material magnético de radio a y muy largo, con magnetización constante \bar{M} como se muestra en la figura (a)

- a) Encuentre el campo magnético en todo el espacio (a)
- b) Si ponemos otro cilindro a una distancia $d \gg a$, cual de las dos configuraciones que se muestran en la figura (b) es la mas favorable energéticamente (explique).



4. Esfera de material magnetizado (Sol:13.77)

Tomemos una esfera de radio a hecha de un material magnético con magnetización permanente M constante. Esta esfera es puesta en forma concéntrica dentro de una esfera conductora de radio $b > a$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio y la corriente superficial en el conductor. Demuestre que la integral de la corriente es cero.



Esfera con \mathbf{M} constante dentro de un conductor

Ayuda: Asuma que los campos dentro del conductor son cero.

5. Esfera de material magnético constante 13.78

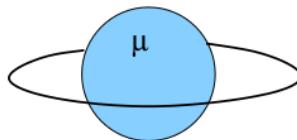
Tomemos una esfera de material magnético constante M . Calcule el campo magnético producido por esta esfera. Si ahora la ponemos en un campo magnético externo constante, que fuerza siente? ¿Qué pasa si la esfera esta hecha de un material magnético con constante μ ?

6. Anillo de corriente (Sol: 13.79)

Tomemos un anillo de corriente de radio a y corriente I_0 puesto en forma concéntrica dentro de un hueco esférico de radio b en un material magnético de constante μ . Calcule el campo magnético en todo el espacio. Grafique las líneas de campo para diferentes valores de μ . Que pasa en el límite $\mu \rightarrow \infty$. Grafique las líneas de campo.

7. Esfera polarizable dentro de anillo (Sol: 13.80)

Considere una esfera de radio a de material polarizable con constante μ . En el plano ecuatorial alrededor de esta esfera tenemos un anillo de radio $b > a$ en la cual fluye una corriente constante $\mathbf{J} = J_0 \hat{\phi}$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.



5.8 Exámen

1. Esfera que rota (Sol: 13.69)

Una esfera de radio R que tiene una densidad de carga superficial σ rota en torno a su eje con velocidad angular constante. Determine el campo magnético B al interior y exterior de la esfera.

6 Variaciones temporales y las ecuaciones de Maxwell

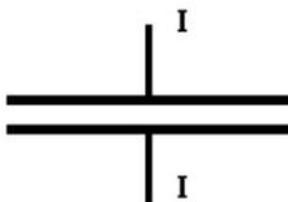
6.1 Problemas Valdivia

1. Condensador de placas circulares (Sol: 13.97)

Un condensador ideal consiste de dos placas circulares de radio a (ver figura) y separadas por una distancia $d \ll a$, el cual esta conectado a una fuente de corriente dada por $I(t) = I_0 \cos \omega t$.

- Calcule los campos magnéticos entre las placas a segundo orden en la frecuencia (no considere efectos de borde)
- Calcule los volúmenes de integrales $w_e y^m$, que entran en la definición de X , usando $I_i = -i\omega Q_i$
- Encuentre además que el circuito equivalente en serie tiene satisface $C \simeq a^2/4d$, $L \simeq d/2c^2$.
- Resuelva los campos en forma exacta. Encuentre C y L nuevamente.
- Repita utilizando dos placas cuadradas de perímetro $4L$?

Aquí la simetría del campo es diferente.



2. Cilindro infinito con campos armónicos (Sol: 13.98)

Considere un cilindro infinito en z ($\partial z = 0$) de radio a y campos armónicos $e^{-i\omega t}$

- Demuestre que $\mathbf{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)} \hat{z}$ es una solución de la ecuación de Helmholtz, y por ende de Maxwell. Usando el Gauge de Lorentz pruebe que podemos utilizar la misma forma para \mathbf{A} .
- Encuentre una expresión para la ecuación de Helmholtz en términos de las funciones de Bessel.
- Asuma que tenemos esta onda incidente en forma asintótica sobre nuestro cilindro y que \mathbf{A} y \mathbf{E} tienen solo componentes en la dirección z . Por lo tanto $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathbf{A} \sim e^{ikx} \hat{z}$. ¿Cuál sería el campo \mathbf{E} en todo

el espacio que satisface la ecuación de onda o de Helmholtz? Esto es parecido a los problemas de funciones de Green vistos antes.

3. Derive la ecuación para la corriente macroscópica y la relación

$$B_\alpha = H_\alpha + 4\pi M_\alpha + (D - E) \times \frac{v}{c}$$

Asumamos que tenemos una esfera dieléctrica en un campo eléctrico asintótico constante $E = E_o \hat{x}$. La esfera esta rotando con velocidad angular ω . Encuentre el campo magnético producido y grafique las lineas de campo.

4. Fem producida por un circuito (Sol: [13.102](#))

Un elemento de alambre de largo orientado $d\vec{l}$ se mueve con velocidad \vec{u} en un campo magnético \vec{B} . Muestre que la fem producida por el movimiento del alambre está dada por

$$d\varepsilon = \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

5. Fem producida por un cascarón esférico (Sol: [13.103](#))

Un cascarón esférico conductor de radio a rota con velocidad angular $\omega = \omega_0 \hat{z}$, en un campo magnético uniforme descrito por $\hat{B} = B_0 \hat{z}$. Calcule la fem producida entre un polo y un punto en el círculo ecuatorial.

6. Vela radiación (Sol:[13.96](#))

Resuelva el problema de la vela de radiación en el espacio. Supongamos que tenemos un espejo que refleja la radiación electromagnética proveniente del sol.

- a) Encuentre cual es el poder radiado por el sol (0.14 watt/cm^2). Estime cuantos kgs de hidrógeno se transforman por segundo en He.
- b) Calcule la presión electromagnética sobre un espejo y compare con la presión del viento solar
- c) Estime que característica debe de tener esta vela para vencer a la fuerza gravitacional de atracción del sol.
- d) Busque en la internet la densidad y grosor del materia que se piensa usar en la vela y calcule cuanto tiempo se demoraría en llegar esta vela al planeta júpiter y con que velocidad llegaría? Use un área de 100 m^2 y una masa del satélite $m_s = 10 \text{ kg}$.

e) Se ha pensado construir una magnetosfera artificial con un magneto superconductor. Asumamos que podemos generar en nuestro anillo superconductor de radio $R = 1\text{mt}$ una corriente de $I = 10^6$ Amperes. Encuentre el tamaño de la magnetosfera donde la presión magnética y la presión del viento solar $B^2 = P$ son iguales. Que aceleración sentiría este satélite. Cuanto se demoraría en llegar al planeta júpiter y con que velocidad llegaría? masa del satélite $m_s = 10 \text{ kg}$, masa del anillo superconductor $m_a = 50\text{kgs}$.

7. **T3P2 2022 13.89**

Supongamos que tenemos un espejo que refleja la radiación electromagnética proveniente del sol. La potencia radiada por el sol es de 0.14watts/cm^2 . La vela tiene 100 m^2 de área y lleva una masa del 100gr, incluyendo la vela. Si ponemos esta vela electromagnética en una orbita alrededor del sol cercana a la tierra. Cuanto seria la velocidad de escape de esta configuración. Asuma que la vela solo interactúa gravitacionalmente con el sol.

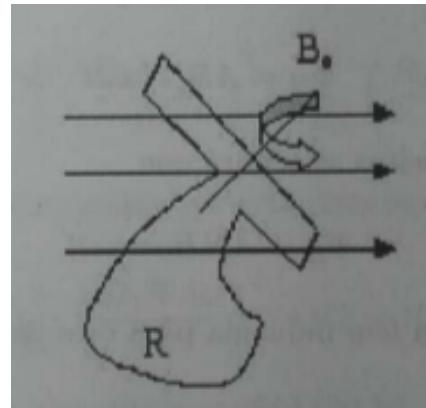
8. **Central hidroeléctrica 2 (Sol: 13.94)**

Una central hidroeléctrica convierte energía gravitacional en energía eléctrica. Supongamos que el agua cae "libremente" de una altura de 10 m con un flujo de 10 m^3 por segundo.

- Asumiendo que la conversión es perfecta, estime cuanta energía podemos convertir a eléctrica.
- Supongamos que tenemos un magneto que genera un campo magnético constante B_0 , La energía gravitacional se convierte en energía rotacional a través de un circuito formado por un solenoide con n vueltas que gira en el campo magnético constante a frecuencia ω . Estime la "fuerza ponderomotiva" que se genera.
- ¿Cuál es la máxima corriente que se puede generar asumiendo conversión perfecta?
- ¿Cuántas luces puede prender?
- Dado que en general R varia lentamente (prender y apagar luces), ¿cómo puedo controlar estas variaciones?

9. **Central 3 (Sol: 13.95)**

Piense en el siguiente generador eléctrico. Un péndulo forzado de masa M hecho de un conductor de largo L y conductividad σ . El péndulo

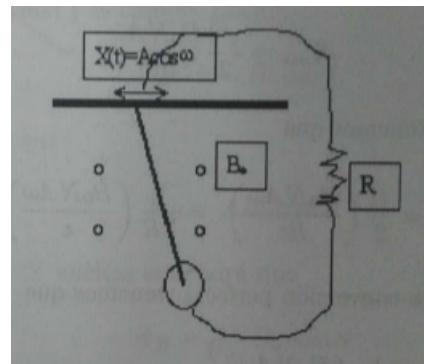


tiene una ecuación de movimiento

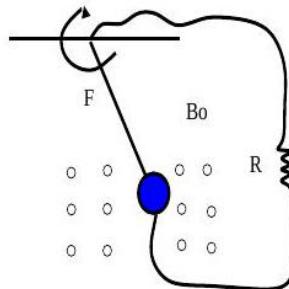
$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A \cos \omega t$$

Primero asuma que $A = 0$.

- a) Estime la "fuerza ponderomotiva" del circuito que se genera en función de θ y su derivada temporal.
- b) Escriba la ecuación de continuidad y estime la corriente. ¿Cuánta energía se convierte a energía eléctrica? Esta energía da origen al término β . Estime β (Hint: ¿Cómo estimo la energía disipada por el péndulo si $A = 0$?)
- c) Escriba la ecuación de movimiento para el péndulo incluyendo A y la disipación eléctrica estimada en la parte b).
- d) ¿Cuál es la variación temporal de la corriente? (Deseche variaciones transientes.) ¿Hay resonancia? En general R es una lenta función del tiempo lo que requiere que la central funcione a diferentes frecuencias o amplitudes A .



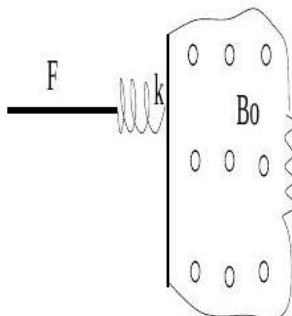
10. Una central hidroeléctrica convierte energía gravitacional en energía eléctrica. Supongamos que el agua cae "libremente" de una altura de 10 m con un flujo de 10 m^3 por segundo. Piense en el siguiente generador eléctrico: un péndulo forzado de masa M hecho de un conductor de largo L y conductividad σ , que oscila en un campo magnético constante B_0 en dirección perpendicular al movimiento del péndulo..
- Asumiendo que la conversión es perfecta, estime cuanta potencia eléctrica podemos generar.
 - Encuentre la ecuación del péndulo no forzado
 - Estime la fuerza ponderomotiva del circuito que se genera en función de θ y su derivada temporal.
 - Escriba la ecuación de continuidad y estime la corriente. El péndulo actua como una fem. Cuanta energía (potencia) se disipa en la resistencia? Esta disipación da origen al término disipativo β en la ecuación del péndulo, por lo menos para pequeños ángulos. Estime β . (Ayuda: escriba la expresión de la potencia disipada por un pendulo con roce. Con esto estime el valor de $\beta \neq 0?$). Escriba la ecuación de movimiento para el péndulo incluyendo la disipación eléctrica.
 - El flujo de agua genera un forzamiento angular constante sobre el péndulo. Incluya este efecto y escriba la ecuación de movimiento del péndulo.
 - Cual es la variación temporal de la corriente? (deseche variaciones transientes) Hay una resonancia?. En general R es una lenta función del tiempo. Cual es la máxima corriente que puede generar asumiendo conversión perfecta?
 - Cuantas luces puede prender? En general R varia lentamente (prender y apagar luces) y como puedo controlar eso?



11. T3P4 2022 (Sol: 13.91)

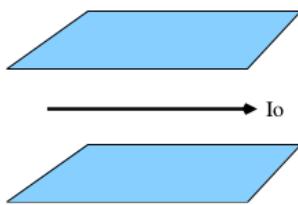
Una central hidroeléctrica convierte energía gravitacional en energía eléctrica. Supongamos que el agua cae "libremente" de una altura de 50 m con un flujo de 100 m^3 por segundo. Piense en el siguiente generador eléctrico: una barra de conductora de masa M , largo L , y conductividad σ es forzada a oscilar en un campo magnético constante B_0 como se muestra en la figura.

- Asumiendo que la conversión es perfecta, estime cuanta potencia eléctrica podemos generar.
- Encuentre la ecuación de movimiento de la barra no forzada
- Estime la fuerza ponderomotiva del circuito que se genera en función de x y su derivada temporal.
- Escriba la ecuación de continuidad y estime la corriente. Cuanta energía se convierte a energía eléctrica? Esta energía da origen al término disipativo proporcional a la velocidad en la ecuación del resorte. Estime este término y la constante de proporcionalidad β . (Ayuda: estimar la energía disipada por el resorte con disipación). Escriba la ecuación disipación eléctrica.
- El flujo de agua genera un forzamiento angular tipo $A \cos \omega t$ sobre el resorte. Incluya este efecto y escriba la ecuación de movimiento del péndulo y el forzamiento
- Cual es la variación temporal de la corriente? (deseche variaciones transientes) Hay una resonancia?. En general R es una lenta función del tiempo. Cual es la máxima corriente que se puede generar asumiendo conversión perfecta?
- Cuantas luces puede prender? En general R varia lentamente (prender y apagar luces) y como se puede controlar eso?



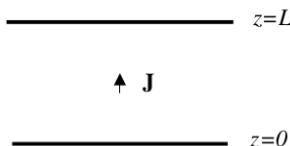
12. Condensador de placas conductoras infinitas

Considere un condensador compuesto de dos placas conductoras infinitas separadas por una distancia L . Entre las dos placas, a media altura, hay una linea de corriente oscilante uniforme $I_0 e^{-i\omega t}$, como se observa en la Figura. Encuentre los campos electromagnéticos en el condensador, la potencia radiada por unidad de largo y las densidades de corriente y carga en las placas.

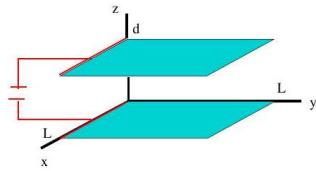


13. Considere una corriente puntual $\vec{J} = J_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z - L/2) e^{-i\omega t} \hat{z}$ entre dos planos conductores $z = 0$ y $z = L$. Calcule el campo eléctrico y magnético en todo el espacio.

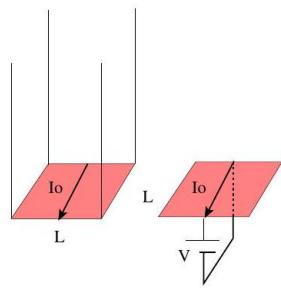
Sugerencia: Mire el problema desde el punto de vista del potencial vector con su respectivas simetrías.



14. Considere dos conductores planos infinitos en $z = 0$ y $z = L$. Además, se tiene un anillo de radio a que transporta una corriente armónica de frecuencia ω y amplitud I_0 , puesto en un plano paralelo y a distancia $L/2$ del plano conductor. Encuentre el campo electromagnético en todo el espacio.
15. Considere un capacitor hecho de 2 planos cuadrados conductores paralelos de lado L y separación d , con $L \ll d$ tal que los efectos de borde se pueden despreciar. Este capacitor se fuerza con un voltaje alterno de amplitud V_0 como se muestra en la figura. Este voltaje genera una corriente también oscilante con amplitud I_0 . Encuentre los campos y calcule la impedancia del sistema.
16. Consideremos una pistola electromagnética, que consiste en una cavidad cuadrada infinita en z de superficie conductora como se muestra



en la figura. En la mitad ($y = L/2$) de $z = 0$ se pone un alambre con una corriente uniforme $I_0 e^{-i\omega t} \hat{x}$. Cual es la frecuencia mínima de funcionamiento de esta pistola. Encuentre la potencia radiada hacia $z \rightarrow \infty$ por esta pistola como función de la frecuencia. Si esta corriente esta producida por una fuente de poder $V = V_0 e^{-i\omega t}$, encuentre la impedancia $V = ZI = (R - iX)I$ (esto es un guía de onda).



17. Sábana infinita (Sol: 13.100)

Supongamos que tenemos un sabana infinita con una densidad de carga σ en el plano $z = 0$.

- Cual es el campo eléctrico electrostático?
- Supongamos que movemos esta sabana como $x = \Delta e^{i\omega t}$. Que campos espera que se generen? En que dirección?
- Demuestre que el campo eléctrico satisface

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + aE = b\delta(z)$$

y encuentre a y b

- Cuales son las soluciones para $z > 0$ y $z < 0$? Cual es la solución final para los campos.
- Calcule el vector de Poynting. Que causa el input de energía. Demuestre que la energía radiada es la misma que el input de energía.

18. Considere un cascarón cilíndrico infinito, de radio a , con densidad de carga superficial σ , distribuida uniformemente en su superficie. El cascarón oscila armónicamente en torno a su eje de simetría, con frecuencia $\Omega(t) = \Omega_0 e^{-i\omega t}$. Encuentre la potencia radiada por unidad de largo, y demuestre que es constante.
19. Considere un cascarón esférico conductor sobre el cual hay una carga total Q que tiene un radio que cambia como $R = R_o + \Delta R \cos(\omega t)$. Encuentre los campos electromagnéticos generados.
20. **Potencia irradiada por un cascarón esférico (Sol: 13.99)**

Considere un cascarón esférico de radio R y densidad de carga superficial σ que rota sobre su eje de simetría con frecuencia angular $\Omega = \Omega_0 e^{-i\omega t}$. Encuentre el potencial vector y muestre que la potencia irradiada cae como $\frac{1}{r^2}$ para $r \gg R$.

21. T3P3 2022 13.90

Considere un cilindro conductor infinito de radio R . En forma concéntrica ponemos un anillo de radio $a < R$ por el cual se transporta una corriente armónica de frecuencia ω y amplitud I_0 . Encuentre el campo electromagnético en el cilindro y la potencia radiada.

22. Considere una fuente puntual $J = \delta(x)e^{i\omega t}\hat{z}$ entre dos planos $x = \pm L$. Calcule el campo eléctrico resolviendo directamente las ecuaciones de Maxwell. Esto es similar a encontrar la ecuación de Green.
23. Tomemos un "electrón laser" donde tenemos electrones que se mueven en campos localizados

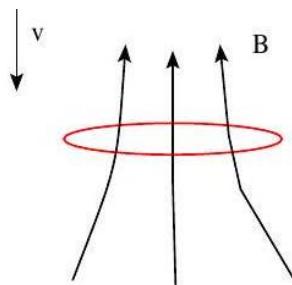
$$m \frac{dv}{dt} = -eE - \frac{e}{c}v \times B \quad v(t=0) = v_o \hat{y}$$

Debido al movimiento del electrón se producen campos radiados aparte de los campos localizados.

- a) Encuentre los campos radiados numéricamente y grafique $dP/d\Omega$.
- b) Encuentre los campos radiados en la aproximación lejana y grafique $dP/d\Omega$. Los campos locales son:
 - a) $B = 0, \quad E = E_o \hat{x}$
 - b) $B = 0, \quad E = E_o e^{i\omega t} \hat{x}$
 - c) $B = B_o \hat{z}, \quad E = 0$
 - d) $B = B_o \hat{z}, \quad E = E_o \hat{x}$

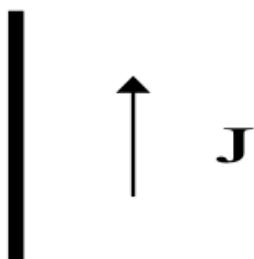
24. T3P1 2022 (Sol: 13.88)

Considere un alambre de radio a y resistencia R que cae en forma horizontal en un campo magnético vertical que varía con la altura $\mathbf{B} = B(z)\hat{z}$. Encuentre la ecuación de movimiento del anillo y su velocidad terminal. Si imponemos una corriente continua en el anillo a través de una batería, puede este flotar?



25. T3P5 2022 (Sol: 13.92)

Tomemos una corriente alterna constante $J_0 e^{-i\omega t}$ en un alambre muy largo como se muestra en la figura. Encuentre los campos producidos por este alambre y la potencia radiada por unidad de largo.

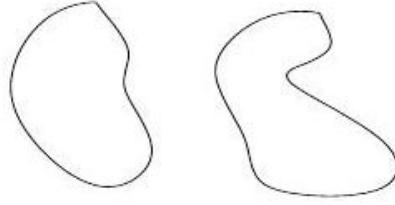


26. Línea de transmisión (Sol: 13.113)

Tenemos una linea de trasmisión, al cual consiste en dos conductores perfectos de forma arbitraria, pero de sección constante (la misma forma en z), ver figura. Demuestre que la inductancia por unidad de largo L y la capacitancia por unidad de largo esta dada por $LC = \mu\varepsilon/c^2$. (Es importante acordarse de la discusión sobre campos magnéticos cerca de conductores perfectos).

27. Circuito de corriente circular (Sol: 13.101)

Un circuito de corriente circular de radio a acarrea una corriente I . Este es colocado en el plano $x - y$ con su centro en el origen.



- a) Muestre que la única componente del potencial vector distinta de cero es la componente ϕ . Demuestre que A_ϕ se puede escribir de la siguiente forma

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk$$

donde $\rho_< = \min(\rho, a)$ y $\rho_> = \max(\rho, a)$.

- b) Muestre que una forma alternativa de escribir A_ϕ es

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk$$

- c) Encuentre expresiones integrales para las componentes de la inducción magnética, utilizando los resultados obtenidos en a) y b). Calcule explícitamente las componentes de B en el eje \hat{z} , desarrollando las integrales necesarias. Hint: use que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{I_1(k\rho)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J_1(k\rho)}{\rho} = \frac{k}{2} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(kz) K_0(k\rho) dk = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

28. Encuentre los campo electromagnéticos producido por un dipolo oscilante $p = \delta^{(3)}(x)p_0 e^{i\omega t} \hat{z}$. Demuestre que hay 3 distancias de interés, y grafique en cada caso la potencia radiada por ángulo sólido. Encuentre la potencia total radiada para distancias muy grandes.
29. **Dipolo infinito uniforme (Sol: 13.113)**

Considere una dipolo infinito (uniforme en z)

$$\mathbf{P} = P_o \frac{\delta(\rho)}{\rho} \hat{z} e^{-i\omega t}$$

cuya dirección esta oscilando con frecuencia ω . Encuentre los campos y la potencia radiada.

6.2 Resumen

1. Ley de inducción de Faraday,

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

\mathbf{B} campo magnético en la vecindad,

La fuerza electromotriz,

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_m}{dt},$$

2. Ecuaciones de Maxwell en el vacío,

Ley de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

Ley de inducción de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Ley de Ampere

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

3. Potenciales electromagnéticos,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

4. Calibre de Lorentz,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

- Gauge de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

5. Densidad de energía del campo electromagnético,

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2)$$

Fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

6. Vector de Poynting,

$$\mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Flujo de energía del campo electromagnético por unidad de tiempo
teorema de Poynting

7 Ondas electromagnéticas

7.1 Resumen

7. Ecuación de onda para el campo eléctrico (o magnético cambiar E por B)

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

8. Onda plana, (cambiar E por B)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_1 \mathcal{R} e [E_o e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}]$$

- constante dieléctrica compleja

$$\epsilon' = \epsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega} \approx \frac{i\sigma}{\omega}$$

Esto da

$$n' = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} \approx \sqrt{\frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega}} = (1+i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} = \frac{2}{\gamma}$$

así como

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad k' = \frac{\omega n'}{c} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \frac{(1+i)}{\delta}$$

9. Número de onda,

$$k = n \frac{\omega}{c}, \quad n = \sqrt{\mu\epsilon}$$

- Potencia disipada en el conductor. Por la ley de Ohm, escribimos

$$P = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^* = \frac{\sigma}{2} |\vec{E}|^2$$

-*Potencia perdida por unidad de área de sección transversal, tenemos que integrar esto a lo largo de la dirección z

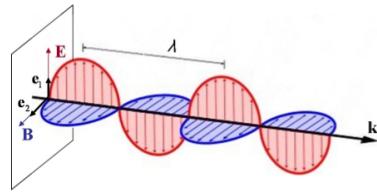
$$P^\perp = \int_0^\infty P dz = \epsilon_0 |E_i|^2 \omega \delta \cos^2 i$$

10. Transversalidad de ondas electromagnéticas,

$$\mathbf{B} = n\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

- Amplitudes de los campos en un medio material

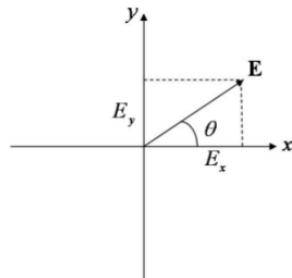
$$B_0 = nE_0.$$



11. Polarización de ondas planas ($E_1, E_2, \in \Re$),

a) $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_1\hat{\mathbf{x}} + E_2\hat{\mathbf{y}}) e^{i(kz - \omega t)}$, polarización lineal. $\mathbf{E}_0 = (E_1\hat{\mathbf{x}} + E_2\hat{\mathbf{y}})$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = n(E_1\hat{\mathbf{y}} - E_2\hat{\mathbf{x}})e^{i(kz - \omega t)},$$

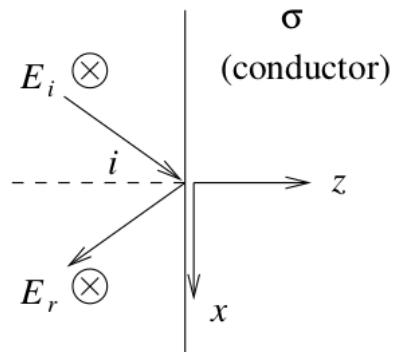
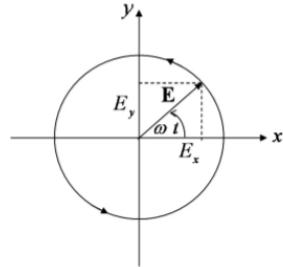


b) $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_1\hat{\mathbf{x}} + iE_1\hat{\mathbf{y}}) e^{i(kz - \omega t)}$, polarización circular. $E_2 = \pm iE_1$

7.2 Exámen

1. Onda polarizada plana incidente en conductor (Sol: 13.68)

Una onda electromagnética polarizada plana de frecuencia ω en el espacio libre incide con un ángulo i sobre la superficie plana de un excelente conductor ($\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ y $\sigma \gg \omega\epsilon_0$) que llena la región $z > 0$.



Considere solo la polarización lineal perpendicular al plano de incidencia.

- a) Si la onda incidente viene dada por $\vec{E} = \vec{E}_i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$, Demuestre que (en el límite $\sigma \gg \omega \epsilon_0$) la magnitud del campo eléctrico dentro del conductor es

$$E_c = E_i \gamma \cos i e^{-z/\delta} e^{i(kx \sin i + z/\delta - \omega t)}$$

donde

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad \text{y} \quad \gamma = (1 - i) \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega}{\sigma}}$$

La dirección z es perpendicular a la superficie plana del conductor, mientras que la dirección x es paralela a ella.

- b) Demuestre que la potencia promediada en el tiempo por unidad de área que fluye hacia el conductor está dada por $S^\perp = \epsilon_0 |E_i|^2 \omega \delta$ porque e^{2i} .

8 *Guías de ondas

9 Radiación

9.1 Problemas Jackson

1. Jackson 9.3 (Sol: 13.81)

Dos mitades de un cascarón esférico metálico de radio R y conductividad infinita están separadas por un espacio aislante muy pequeño. Se aplica un potencial alterno entre las dos mitades de la esfera para que los potenciales sean $\pm V \cos \omega t$. En el límite de longitud de onda larga, encuentre los campos de radiación, la distribución angular de la potencia radiada y la potencia radiada total de la esfera.

10 Relatividad

10.1 Problemas

1. Suma de velocidades paralelas (Solución: 13.110)

Muestre explícitamente que dos transformaciones de Lorentz sucesivas en la misma dirección son equivalentes a una sola transformación de Lorentz con una velocidad

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)}$$

Esta es una forma alternativa de derivar la ley de suma de velocidades paralelas.

2. Escalares de Lorentz (Solución: 13.111)

(a) Exprese los escalares de Lorentz $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ en términos de \mathbf{E} y \mathbf{B} . ¿Existen otros invariantes cuadráticos en las intensidades de campo \mathbf{E} y \mathbf{B} ?

(b) ¿Es posible tener un campo electromagnético que aparezca como un campo puramente eléctrico en un marco inercial y como un campo puramente magnético en algún otro marco inercial? ¿Cuáles son los criterios impuestos a \mathbf{E} y \mathbf{B} de modo que haya un marco inercial en el que no haya campo eléctrico?

(c) Para medios macroscópicos, \mathbf{E} , \mathbf{B} forman el tensor de campo $F^{\alpha\beta}$ y \mathbf{D} , \mathbf{H} el tensor $G^{\alpha\beta}$. ¿Qué otras invariantes se pueden formar? ¿Cuáles son sus expresiones explícitas en términos de los campos de 3 vectores?

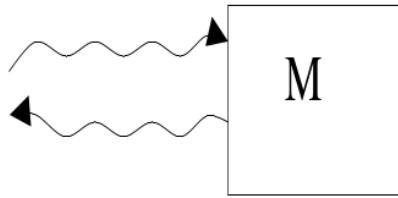
3. Espejo relativista (Solución: 13.112)

Considere un espejo de masa M y superficie S , que se mueve a una velocidad cercana a la velocidad de la luz. Como método de propulsión iluminaremos este espejo con un potente láser en forma normal a la superficie, tal que el haz de luz reflejado se propague en la dirección opuesta a la del haz incidente.

a) Muestre que el campo que rebota del espejo es pequeño a velocidades relativistas en el sistema del laboratorio.

b) En el sistema inercial, que esta instantáneamente en reposo con el espejo, encuentre la fuerza que siente el espejo.

c) Transforme esta fuerza al sistema del laboratorio y demuestre que para velocidades relativistas $\beta \approx 1$ obtenemos $\gamma \sim t^{1/3}$.



4. Conservación de la carga (Solución: [13.104](#))

Demuestre que $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ si se cumple con la conservación de carga. ¿Qué condición debe cumplir k_α para que la onda plana $F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$ sea solución de esta ecuación? Demuestre ahora que la transformación de la frecuencia entre dos sistemas inerciales es

$$\omega' = \gamma\omega[1 - \beta \cos(\theta)]$$

donde θ es el ángulo entre la velocidad \vec{v} de la onda y k . Demuestre por último que

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[\cos(\theta) - \beta]}$$

donde θ' es el ángulo entre \vec{v} y k' . ¿Cómo pueden usarse estas expresiones para medir la velocidad (incluyendo dirección) de un objeto?

5. Lámina infinita relativista (Solución: [13.105](#))

Una lámina de carga que se extiende infinitamente tanto en los ejes x como y , tiene una densidad de carga uniforme $\sigma > 0$, que está en reposo relativo al observador 1. La lámina está situada en $z = 0$ y se mueve en la dirección x con una rapidez v (relativista) en relación al observador 2.

- a) Transformando los campos desde el sistema de referencia del observador 1 al del 2, encuentre los campos \vec{E} y \vec{B} en la región $z > 0$ del sistema de referencia del observador 2.
- b) Demuestre que los campos son los mismos que aquellos calculados, a partir de la transformación de la densidad de corriente desde el sistema del observador 1 al del 2, y luego utilizando las leyes de Gauss y Ampère para encontrar los campos en el sistema de referencia del observador 2.

- c) Una carga $q > 0$ está inicialmente en reposo en el punto $(x, y, z) = (0, 0, d)$ en el sistema de referencia del observador 1. Describa cualitativamente el movimiento posterior de la partícula desde el punto de vista de ambos observadores.

6. Partícula en un campo magnético (Solución: 13.106)

Sea una partícula de carga q y masa m que se mueve en un campo magnético uniforme B_0 . Encuentre la trayectoria de esta partícula en términos de la velocidad inicial perpendicular v_{\perp} al campo, la velocidad inicial paralela v_{\parallel} al campo, la fase inicial ϕ y la frecuencia ciclotrónica $\Omega_c = eB_0/mc$. Asumiendo que $\beta \ll 1$, encuentre los potenciales y los campos radiados en la aproximación de campo lejano para esta partícula. Si se tienen N partículas, con la misma masa y carga, encuentre $dP/d\Omega$. Asuma una distribución térmica definida por una temperatura T_{\perp} y T_{\parallel} con respecto al campo magnético tal que

$$T_{\perp} = \frac{1}{2} \sum_n m v_{\perp}^2 \quad T_{\parallel} = \frac{1}{2} \sum_n m v_{\parallel}^2$$

Hint:

$$\int \left[1 - \sin^2(\theta) \cos^2 \left(\Omega_c t + \tilde{\phi} \right) \right] d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

7. Dipolo magnético oscilatorio (Solución: 13.107)

Considere el siguiente modelo de un dipolo magnético oscilatorio: Suponga que se tiene un anillo sin cargas, de radio b , por el cual circula una corriente alterna $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Encuentre la potencia total radiada $\langle P \rangle$ (promediado sobre un periodo), asumiendo la aproximación de campo lejano $r \gg c/\omega$, y la aproximación para un dipolo perfecto $b \ll r$ y $b \ll c/\omega$.

8. Hamiltoniano de una partícula (Solución: 13.108)

Muestre que el hamiltoniano de una partícula moviéndose en un campo electromagnético es

$$\mathcal{H} = \sqrt{|cP - eA|^2 + m^2c^4} + e\Phi,$$

donde $P_j = \partial_{u_j} \mathcal{L}$.

9. La paradoja de los gemelos (Solución: [13.109](#))

La estrella más cercana está a 4 años luz. Suponga que se desea enviar a un gemelo en un cohete que acelere con aceleración g la mitad del camino hacia esta estrella y desacelere con aceleración $-g$ la otra mitad (para evitar problemas de salud por ingavidez). Supongamos que, para ello, contamos con una turbina del Enterprise, que convierte perfectamente materia y antimateria en energía (por lo tanto, la velocidad de expulsión de la masa es con velocidad c respecto al cohete). Sin hacer consideraciones relativistas, encuentre la masa inicial M del cohete necesaria para llegar a esta estrella (asuma que la masa del módulo más la de la tripulación es de $m_c = 100 \text{ kg}$). Resuelva el problema relativista y calcule la diferencia de edad cuando los gemelos se encuentran nuevamente en la tierra, ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el cohete? Considerando efectos relativistas y una masa $m = 100 \text{ kg}$, encuentre la masa inicial del cohete necesaria para llegar a la estrella.

10. Considere una alambre muy largo y de sección transversal muy pequeña con densidad de carga lineal λ . Si ahora ponemos en movimiento este alambre con velocidad v_o en la dirección longitudinal, encuentre el campo magnético y eléctrico producido por este alambre en movimiento en el sistema de laboratorio. Encuentre la corriente y la densidad de carga en el laboratorio, encuentre los campos que estos producen y demuestre que da el resultado anterior.
11. En plasmas es posible tener, en forma aproximada, una discontinuidad (un shock) en el campo magnético y eléctrico que se propaga a velocidad $\mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = c\mathbf{E} \times \mathbf{B}/|B|^2 = V_o \hat{x}$ (con $\beta_o = V_o/c$) tal que

$$\mathbf{B}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{B}_0 \hat{z} & x < V_0 t \\ 0 & x > V_0 t \end{cases} \quad \mathbf{E}(x, t) = \begin{cases} \beta_0 B_0 \hat{y} & x < V_0 t \\ 0 & x > V_0 t \end{cases}$$

siendo uniforme en el plano $y - z$. La discontinuidad se encuentra con una partícula en reposo en tiempo $t = 0$. Calcule la energía ganada por la partícula en esta interacción. Que pasaría con la energía de la partícula si consideramos múltiples discontinuidades provenientes de diferentes direcciones. Esto se denomina aceleración estocástica de Fermi de tipo 1. Esta es una forma de producir rayos cósmicos de alta energía.

12. Construya la transformación relativista de las aceleraciones entre el laboratorio K y el sistema \bar{K} . Considere una partícula cargada que experimenta campos eléctricos y magnéticos (en el laboratorio). Usando la

formula de Larmor para la potencia radiada para una particular no relativista (la cual es aplicable en el sistema \bar{K} que esta instantáneamente en reposo con la partícula), encuentre la formula de potencia radiada en término de los campos locales E y B que producen la radiación.

13. Considere el siguiente modelo de un dipolo magnético oscilatorio: Suponga que se tiene un anillo sin cargas, de radio b , por el cual circula una corriente alterna $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Encuentre la potencia total radiada $\langle P \rangle$ (promediado sobre un período), asumiendo la aproximación de campo lejano $r \gg c/\omega$, y la aproximación para un dipolo perfecto $b \ll r$ y $b \ll c/\omega$.
14. Un problema que enfrentó la física a principios del siglo 20 es que el átomo de Rutherford es clásicamente inestable, ya que debería decaer por radiación. Considere un núcleo de masa $M \gg m_e$ fijo en el origen con carga $q = 1,6 \times 10^{-19} C$, en torno al cual orbita un electrón de masa m_e . Suponga que el movimiento es circular y las cargas están separadas por una distancia $r_e = 0,5 \text{ \AA}$ (átomo de Bohr). Estime cuánto demoraría el electrón en precipitarse sobre el núcleo debido a las perdidas radiativas. Puede ser útil: $m_e = 9 \times 10^{-28} \text{ g}$ y $e = 5 \times 10^{-10} \text{ esu}$.
15. Considere un conductor delgado sobre el cual fluye una corriente uniforme $I_o \cos \omega t$ en la dirección \hat{z} . Encuentre el potencial vectoriales para $r > \lambda$ (sin aproximación para $\lambda = 2\pi c/\omega$). Calcule los campos y el patrón de radiación para $r > \lambda > L$.
16. **Doppler Relativista**
Asuma dos sistemas de referencia K del receptor y
17. **Rel**
Queremos calcular la radiación producida por una carga relativista en presencia de

11 Plasmas

1. Agregaremos el efecto de la temperatura en la relación de dispersión de ondas propagándose en un plasma no magnetizado. Por simplicidad supondremos que los iones del plasma no se mueven, y que toda la dinámica está concentrada en los electrones. Además supondremos que la presión de los electrones, P_e , está relacionada con su densidad, n_e , a través de la siguiente ecuación de estado:

$$P_e = P_{e,0} \left(\frac{n_e}{n_{e,0}} \right)^\gamma$$

donde el subíndice 0 indica "valor inicial" y γ es el índice politrópico ¹ de los electrones.

- a) Muestre que las transformadas de Fourier del campo eléctrico y de la velocidad promedio de los electrones $\tilde{\vec{E}}$ y $\tilde{\vec{U}_e}$ así como de las perturbaciones a la densidad y presión de los electrones (\tilde{n}_e y \tilde{P}_e) satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\omega \tilde{n}_e &= n_{e,0} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}_e}, \\ im_e n_{e,0} \omega \tilde{\vec{U}_e} &= n_{e,0} |e| \tilde{\vec{E}} + i \vec{k} \tilde{P}_e, \\ \tilde{P}_e &= m_e c_e^2 \gamma \tilde{n}_e,\end{aligned}$$

donde ω y \vec{k} son la frecuencia y vector de onda de los modos de Fourier, m_e y $|e|$ son la masa y módulo de la carga de los electrones, y c_e^2 es el cuadrado de la "velocidad del sonido" de los electrones, definida por $c_e^2 = k_B T_{e,0} / m_e$ (k_B es la constante de Boltzmann y $T_{e,0}$ es la temperatura inicial de los electrones).

- b) Demuestre que la relación de dispersión de las ondas transversales que se propagan en el plasma no se modifica debido a la temperatura de los electrones. ¿Por qué esto tiene sentido?
- c) Demuestre que la relación de dispersión de las ondas longitudinales sí se modifica. Bosqueje $\omega(k)$ para estas ondas y describa la diferencia con el caso en que los electrones están "frios" ($T_{e,0} = 0$).
2. Resuelva el problema de un rayo que parte de la tierra hacia la ionosfera en forma oblicua, asumiendo una densidad de electrones $n_e(z) = n_0 z e^{-(z-10)^2/4}$. ¿Qué frecuencias escapan?
3. Asuma que las partículas se mueven con la siguiente ecuación de movimiento

$$\left. \begin{aligned} E &= [E_x, E_y, E_z] e^{-i\omega t} \\ B &= \{0, 0, B_o\} \end{aligned} \right\} \rightarrow m \frac{dv}{dt} = -eE - \frac{e}{c} v \times B - m\gamma v$$

a) Encuentre los tensores de conductividad y dieléctrico. La constante γ esta relacionada con la frecuencia de colisiones de estas partículas.

12 Problemas resueltos

13 Soluciones

13.1 Campo eléctrico de un plano infinito

Calcule el campo eléctrico de un plano infinito con densidad de carga superficial uniforme σ .

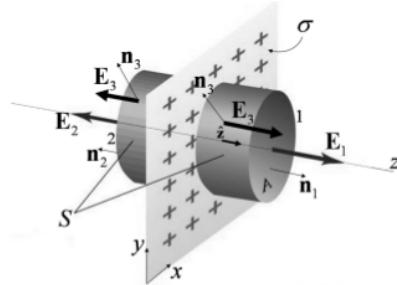


Figure 35: Ley de Gauss

Solución:

Por simetría, \mathbf{E} es perpendicular al plano y paralelo al eje z . Usamos la Ley de Gauss en su forma integral para una superficie cilíndrica S , como se muestra en la figura.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 4\pi q_{\text{enc}}$$

La integral del flujo a través de S contiene contribuciones de tres integrales de superficie: dos términos correspondientes a las tapas del cilindro, de área A cada una, indicadas como 1 y 2 ; y un término correspondiente al lado del cilindro, identificado con 3.

Sobre el lado 3 del cilindro, el campo eléctrico \mathbf{E}_3 es perpendicular a la normal $\hat{\mathbf{n}}_3$ asociada a ese lado. Luego, $\mathbf{E}_3 \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 = 0$, y la contribución del término 3 al flujo a través de S , es nula. Sobre la tapa 1, $\mathbf{E}_1 = E\hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{z}}$;

mientras que sobre la tapa 2, $\mathbf{E}_2 = -E\hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{z}}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da &= \int_1 \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 da + \int_2 \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da \\ &= \int_1 E\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} da + \int_2 E(-\hat{\mathbf{z}}) \cdot (-\hat{\mathbf{z}}) da = 2EA \\ &= 4\pi q[\text{ total sobre } A] = 4\pi\sigma A \\ \Rightarrow E &= 2\pi\sigma.\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbf{E}_1 = 2\pi\sigma\hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{E}_2 = -2\pi\sigma\hat{\mathbf{z}}$$

13.2 Demostraciones del Teorema de Gauss

Use el teorema de Gauss $\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{q}{\epsilon_0}$ y $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ para probar lo siguiente:

- a) Cualquier exceso de carga colocado sobre un conductor debe recaer completamente sobre su superficie. (Un conductor, por definición, contiene cargas capaces de moverse libremente bajo la acción de campos eléctricos aplicados).
- b) Un conductor hueco y cerrado protege su interior de los campos debidos a las cargas externas, pero no protege su exterior de los campos debidos a las cargas colocadas en su interior.
- c) El campo eléctrico en la superficie del conductor es normal a la superficie y tiene una magnitud σ/ϵ_0 , donde σ es la densidad de carga por unidad de área en la superficie.

Solución:

- a) Primero, el problema contiene la suposición no declarada de que lo que se busca es la **ubicación de las cargas en equilibrio estático**. Esta suposición es válida porque este problema se encuentra en el capítulo sobre **electrostática**. El equilibrio estático (la falta de movimiento) solo puede existir **cuando hay cargas libres si no hay campos eléctricos en el volumen donde existen las cargas libres**. De lo contrario, las cargas, al ser libres, se acelerarían en respuesta a los campos eléctricos. Por lo tanto, el campo eléctrico dentro de un conductor es cero. Tenga en cuenta que este problema también supone que un conductor es un conductor perfecto, es decir, las cargas son perfectamente libres para moverse dentro del conductor. En la vida real, ningún conductor es perfecto, por lo que todos los conceptos derivados de este problema son solo aproximaciones a los materiales de la vida real.

En la superficie de un conductor, las cargas no están libres en la dirección normal a la superficie del conductor (ya que están unidas dentro del material conductor) y, por lo tanto, el único campo eléctrico que puede existir en o sobre un conductor es un campo eléctrico en la superficie del conductor que es normal a la superficie. Existe un campo eléctrico exteriormente normal para carga superficial positiva y un campo eléctrico interiormente normal existe para densidad de carga superficial negativa. Esta última parte es cierta porque las cargas negativas sienten una fuerza $\mathbf{F} = -|q|\mathbf{E}$, de modo que si la fuerza eléctrica neta sobre una carga negativa debe apuntar hacia afuera, el campo eléctrico debe apuntar en la dirección opuesta. La **componente del campo eléctrico en la superficie de un conductor que es tangencial a la superficie debe ser cero**, de lo contrario las cargas sentirían una fuerza de este campo y, al estar libres en esta dirección, se moverían en respuesta a la fuerza, lo que contradice nuestro requisito de equilibrio estático. Entonces la componente tangencial debe ser cero. Hasta ahora hemos probado dos conceptos

Concepto 1. El campo eléctrico en todo el interior de un conductor en equilibrio estático es cero.

Concepto 2. El campo eléctrico en la superficie de un conductor es normal a la superficie.

Podemos dibujar cualquier superficie gaussiana arbitraria y cerrada completamente dentro del conductor y siempre tendrá cero campo eléctrico en cada punto de la superficie gaussiana ya que el campo eléctrico es cero en todas partes dentro del conductor. La integral de un grupo de ceros sigue siendo cero, por lo que la integral del campo eléctrico sobre cualquier superficie gaussiana interior es cero y, por lo tanto, la ley de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{se convierte} \quad 0 = q.$$

Debido a que la superficie gaussiana cerrada es arbitraria, se puede elegir que sea muy pequeña y centrada en cualquier punto del interior del conductor, siempre que toda la superficie esté dentro del conductor y siempre contenga carga cero. Por lo tanto, todo punto dentro de un conductor tiene carga cero. Si hay alguna carga eléctrica libre en un conductor, por lo tanto, debe terminar en la superficie del conductor cuando el conductor alcance el equilibrio estático. Físicamente, podemos entender esto como que las cargas libres netas se repelen mutuamente y se aceleran alejándose unas de otras bajo esta repulsión hasta que chocan contra la superficie del conductor. Por lo tanto, hemos probado:

Concepto 3. Toda la carga eléctrica libre de un conductor reside en su superficie.

b) Consideremos ahora una capa conductora cerrada y hueca. Ya hemos demostrado que el campo eléctrico dentro del material de la capa conductora en sí tiene campo cero y carga cero, pero ¿qué pasa en la región hueca interior? Dado que la región hueca es hueca, por definición no contiene carga. Por lo tanto, cualquier superficie gaussiana que esté completamente contenida en la región hueca no contiene carga y, por lo tanto, tiene una integral que es cero según la ley de Gauss:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad \text{porque } q = 0$$

Coloquemos una superficie gaussiana justo a lo largo de la superficie interna de la capa conductora. El vector unitario \mathbf{n} en la ecuación anterior es exteriormente normal a la superficie gaussiana y, por lo tanto, está en dirección opuesta a la normal a la superficie interna del conductor, \mathbf{n}' .

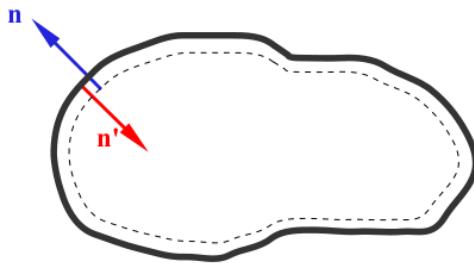


Figure 36: Superficie gaussiana.

Dado que el campo eléctrico en la superficie de un conductor debe ser normal a la superficie del material, el campo eléctrico en la superficie interna de la capa conductora (si existe) también debe ser normal a la superficie gaussiana:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \pm |\mathbf{E}|, \text{ tal que:}$$

$$\oint_S (\pm |\mathbf{E}|) da = 0$$

Tenga en cuenta que el producto punto puede ser positivo o negativo: positivo si el campo eléctrico en la superficie conductora interna apunta hacia el infinito, lo que sería el caso de una densidad de carga superficial negativa presionada contra la superficie conductora interna; y negativo si el campo eléctrico en la superficie conductora interna apunta hacia el interior hueco de la cubierta, que sería el caso de una densidad de carga superficial positiva presionada contra la superficie conductora interna. También tenga en cuenta que, en general, el campo eléctrico puede apuntar en ciertos lugares de la

superficie gaussiana hacia el infinito y en otros lugares de la superficie gaussiana hacia la región hueca. Por lo tanto, el signo del producto escalar no es una constante, sino una función de ubicación en este punto de la derivación.

Para simplificar, suponga que la cubierta conductora está conectada a tierra. Esto significa que el conductor está conectado a una fuente o sumidero de carga eléctrica efectivamente infinita. Cuando se coloca una carga externa cerca de la capa conductora, su campo atrae las cargas de la capa hacia él. Cuando el caparazón está conectado a tierra, toda la carga que extrae proviene del suelo y se convierte en un exceso de carga en el caparazón. Por lo tanto, la densidad de carga superficial en todas partes del caparazón tiene el mismo signo. Por ejemplo, si la carga externa es positiva, el caparazón está cargado negativamente en todas partes. Si la carga externa es negativa, la cáscara está cargada positivamente en todas partes. Si un extremo del caparazón fuera positivo y el otro extremo negativo, extraería más carga del suelo hasta que desapareciera.

Dado que la densidad de carga y el campo eléctrico en la superficie de un conductor están directamente relacionados (como demostraremos en la parte c), la densidad de carga superficial que tiene el mismo signo en todas partes significa que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ tiene el mismo signo en todas partes. En otras palabras, el campo eléctrico en la superficie de la capa interna está en todas partes apuntando hacia adentro o está en todas partes apuntando hacia afuera. Por lo tanto, el signo del producto escalar es constante sobre la superficie gaussiana y puede resultar de la integral:

$$\pm \oint_S |\mathbf{E}| da = 0$$

Tenga en cuenta que esto solo es cierto si tenemos una capa conductora cerrada sólida. Si tomamos una esfera y la cortamos por la mitad para que las dos mitades estén aisladas entre sí, podríamos cargar positivamente una mitad y negativamente la otra mitad y obtener campos eléctricos apuntando hacia adentro en una mitad y campos eléctricos hacia afuera en la otra mitad.

El integrando en la ecuación anterior ahora es siempre positivo o cero. Integrar sobre un integrando que siempre es distinto de cero y positivo da un número positivo (ya que una integral es esencialmente una suma de pequeñas partes y una suma de números positivos es un número positivo). La única forma en que la integral puede ser cero es si el integrando es cero en todas partes. Por lo tanto, el campo eléctrico es cero en todas partes a lo largo de la superficie gaussiana. Acabamos de demostrar:

Concepto 4. El campo eléctrico en la superficie interior de un cascarón

conductor cerrado puesto a tierra es cero.

Podemos elegir una superficie gaussiana ligeramente diferente que todavía esté completamente en la región hueca y tenga la mayor parte de su superficie en la superficie interna de la cubierta. La carga encerrada sigue siendo cero y la parte de la integral a lo largo de la superficie interna de la cubierta es cero (llamemos a esta parte de la superficie A) porque el campo eléctrico es cero aquí. Por lo tanto, la integral sobre la parte restante de la superficie gaussiana (llamemos a esta superficie B) debe ser cero:

$$\int_A |\mathbf{E}| da + \int_B |\mathbf{E}| da = 0$$

donde la superficie cerrada $S =$ superficie $A +$ superficie B .

$\int_B |\mathbf{E}| da = 0$ ya que $\int_A |\mathbf{E}| da = 0$. Dado que la superficie gaussiana es arbitraria, siempre que se encuentre en la región hueca, la superficie A puede ser tan pequeña que el campo eléctrico se vuelve efectivamente constante y puede salirse de la integral:

$$|\mathbf{E}| \int_A da = 0$$

$$|\mathbf{E}| = 0$$

Y dado que la superficie A se puede dibujar en cualquier parte de la región hueca, el campo eléctrico debe ser cero en todas partes de la región hueca. Por lo tanto, el caparazón protege la región hueca de campos y cargas externos. Hemos mostrado:

Concepto 5. El campo eléctrico en todas partes dentro de la región hueca de un cascarón conductor cerrado conectado a tierra es cero, incluso si hay cargas externas al cascarón.

Note que si el conductor no está puesto a tierra, pero está aislado, podemos tratar la solución a este nuevo problema como la solución al problema del conductor puesto a tierra más la solución a un problema donde el conductor está aislado pero no hay carga externa, porque la electricidad los campos obedecen a la superposición. En otras palabras, si una capa conductora aislada tiene una carga original Q , y la capa conductora conectada a tierra de forma equivalente en presencia de una carga externa tiene una carga inducida total q , entonces la capa aislada tendrá una carga q parte de su carga total se efectuará por la carga externa de la misma manera que una carcasa puesta a tierra, y la carga eléctrica restante (Qq) no se efectuará por la carga

eléctrica externa. Dado que esta parte restante no se ve afectada por la carga externa, se distribuirá de manera uniforme sobre la cubierta, y el campo en la región hueca debido a esta carga restante será cero, ya que se distribuirá uniformemente. La suma de un campo eléctrico de cero en la región hueca de la porción q más un campo eléctrico de cero en la región hueca de la porción $(Q - q)$ sigue siendo un campo eléctrico de cero. Por lo tanto:

Concepto 6. El campo eléctrico en todas partes dentro de la región hueca de un cascarón conductor cerrado y aislado es cero, incluso si hay cargas externas al cascarón.

Como un caso aparte, colocamos una carga aislada q dentro de la región hueca de un caparazón conductor aislado originalmente sin carga y queremos conocer el campo fuera del caparazón. Ahora colocamos una superficie gaussiana justo fuera del caparazón y lo encerramos por completo. La carga total encerrada ahora es q , por lo que, según la ley de Gauss, los campos fuera del caparazón no pueden ser cero, sino que deben depender de la carga interna q . Vemos eso:

Concepto 7. Una coraza conductora cerrada y aislada no protege el exterior de los campos creados por las cargas en su región hueca.

Aunque el problema no lo pedía, para completar, veamos el caso de una carga aislada dentro de una capa conductora cerrada y conectada a tierra. **Dado que el caparazón está conectado a tierra, colocar una carga q dentro de la región hueca atrae una carga $-q$ desde el suelo hasta el caparazón.** La carga total encerrada por una superficie gaussiana que rodea todo es, por tanto, $(q) + (-q) = 0$. Dado que el campo eléctrico es en todas partes perpendicular a la superficie conductora externa y en todas partes tiene el mismo signo, el campo eléctrico debe ser cero en todas partes fuera del caparazón por los mismos argumentos que se usaron anteriormente. Por lo tanto:

Concepto 8. Una capa conductora cerrada, puesta a tierra, protege el exterior de los campos creados por las cargas en su región hueca.

c) Dibujamos una superficie pastilla cerrada mitad adentro y mitad afuera de la superficie del conductor e integramos el campo eléctrico sobre la superficie. No hay campo eléctrico tangencial a la superficie del conductor, por lo que los lados del pastillero no contribuyen en nada a la integral. Además, el campo eléctrico es cero dentro del conductor, por lo que la parte inferior del pastillero no contribuye en nada a la integral. Todo lo que queda es la parte

superior del pastillero. La superficie normal de su parte superior y el campo eléctrico son paralelos ya que el campo eléctrico es normal a la superficie como mostramos arriba, por lo que la ley de Gauss se convierte en:

$$\int_{\text{top}} E da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

donde q es la carga contenida dentro del pastillero. Ahora encoge el pastillero hasta que sea muy pequeño. El campo eléctrico es efectivamente constante sobre una superficie muy pequeña y se puede sacar de la integral, de modo que la integral se evalúa como el área total de la parte superior del pastillero:

$$EA_{\text{top}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Reorganizando:

$$E = \frac{q}{A_{\text{top}}} \frac{1}{\epsilon_0}$$

Definiendo σ como la carga por unidad de superficie q/A_{top} y la ecuación se convierte en:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

13.3 Tres esferas

Considere tres esferas cargadas de radio a , una conductora, otra con una densidad de carga uniforme dentro de su volumen y otra con una densidad de carga esféricamente simétrica que varía radialmente como $r^n (n > -3)$, tiene una carga total Q . Utilice el teorema de Gauss para obtener los campos eléctricos tanto dentro como fuera de cada esfera. Dibuje el comportamiento de los campos en función del radio para las dos primeras esferas y para la tercera con $n = -2, n = +2$.

Solución:

a) La primera esfera es conductora. El campo eléctrico dentro de la esfera es cero. Para obtener el campo fuera de la esfera, dibuje una esfera de integración concéntrica a la esfera conductora y con un radio r . El campo eléctrico es normal a la esfera conductora, por lo tanto, es normal a la superficie de integración y, por lo tanto, es paralelo a la normal de la superficie de integración. La ley de Gauss se convierte en:

$$\oint_S E da = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Debido a la simetría de la esfera conductora y la esfera de integración, el campo eléctrico es constante sobre la superficie de integración y puede sacarse de la integral:

$$E \oint_S da = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

La integral de superficie se evalúa como el área total de la esfera de integración con radio r .

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Despejando:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Cabe señalar que, de acuerdo con la ley de Coulomb, este es el mismo campo que el creado por una carga puntual Q en el origen. [La esfera actúa como si toda su carga estuviera concentrada en su centro, aunque en realidad se distribuye uniformemente sobre su superficie.](#)

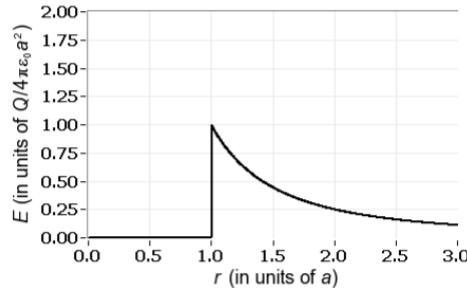


Figure 37: Esfera1.

b) La segunda esfera tiene una densidad de carga uniforme. Fuera de la esfera, la integración superficial utilizada en la ley de Gauss contiene la misma cantidad de carga que la esfera conductora anterior y, por lo tanto, tiene la misma solución:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dentro de la esfera hay una densidad de carga uniforme:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

Dibujemos una superficie de integración esférica concéntrica con y dentro de la esfera cargada, con un radio r . La carga total contenida en esta esfera de integración es:

$$q = \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \right) \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right)$$

$$q = Q \frac{r^3}{a^3}$$

Debido a los vectores paralelos y la simetría, como se muestra arriba, la ley de Gauss se convierte en:

$$E \oint_S da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{r^3}{a^3}$$

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

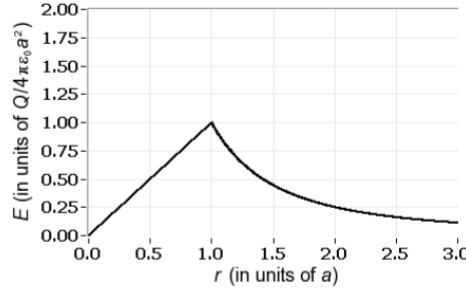


Figure 38: Esfera2.

c) La tercera esfera tiene una densidad de carga esféricamente simétrica que varía radialmente como r^n . Fuera de la esfera, la integración superficial utilizada en la ley de Gauss contiene la misma cantidad de carga que la esfera conductora anterior y, por lo tanto, tiene la misma solución:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dentro de la esfera primero debemos encontrar la forma completa de la densidad de carga. La densidad de carga tiene la forma:

$$\rho = Ar^n$$

Para determinar la constante A , integramos la densidad de carga sobre toda la esfera y la igualamos a la carga total:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a Ar^n r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi &= Q \\ A &= \frac{Q}{4\pi \int_0^a r^{n+2} dr} \\ A &= \frac{Q}{4\pi \left[\frac{a^{n+3}}{n+3} \right]} \end{aligned}$$

La densidad de carga ahora tiene la forma:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi \left[\frac{a^{n+3}}{n+3} \right]} r^n$$

Dibujemos una superficie de integración esférica concéntrica con y dentro de la esfera cargada, con un radio r . La carga total contenida en esta esfera de integración se obtiene integrando:

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \sin \theta d\theta d\phi \\ q &= 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \\ q &= 4\pi \int_0^r \frac{Q}{4\pi \left[\frac{a^{n+3}}{n+3} \right]} r'^n r'^2 dr' \\ q &= 4\pi \frac{Q}{4\pi \left[\frac{a^{n+3}}{n+3} \right]} \int_0^r r'^{n+2} dr' \\ q &= 4\pi \frac{Q}{4\pi \left[\frac{a^{n+3}}{n+3} \right]} \frac{r^{n+3}}{n+3} \\ q &= Q \frac{r^{n+3}}{a^{n+3}} \end{aligned}$$

Debido a los vectores paralelos y la simetría, como se muestra arriba, la ley de Gauss se convierte en:

$$E \oint_S da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{r^{n+3}}{a^{n+3}}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r^{n+3}}{a^{n+3}} \right)$$

Para $n = -2$:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r a}$$

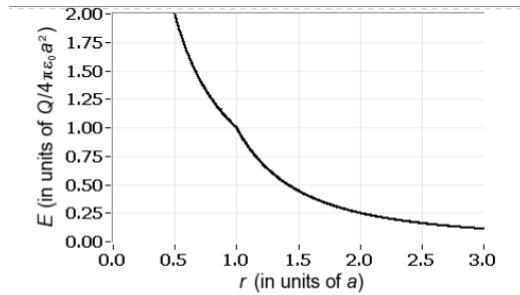


Figure 39: Campo eléctrico para $n = -2$

Para $n = 2$:

$$E = \frac{Q r^3}{4\pi\epsilon_0 a^5}$$

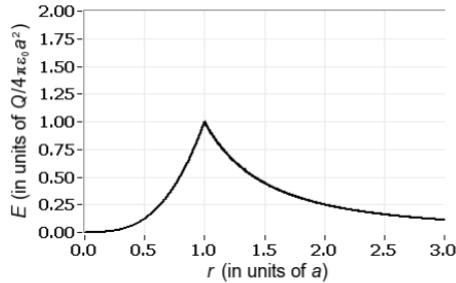


Figure 40: Campo eléctrico para $n = 2$.

13.4 Distribuciones de carga

Usando funciones delta de Dirac en las coordenadas apropiadas, exprese las siguientes distribuciones de carga como densidades de carga tridimensionales $\rho(\mathbf{x})$.

- (a) En coordenadas esféricas, una carga Q uniformemente distribuida sobre una capa esférica de radio R .
- (b) En coordenadas cilíndricas, una carga λ por unidad de longitud uniformemente distribuida sobre una superficie cilíndrica de radio b .
- (c) En coordenadas cilíndricas, una carga Q se distribuye uniformemente sobre un disco circular plano de espesor despreciable y radio R .
- (d) Lo mismo que (c), pero usando coordenadas esféricas.

Solución:

Agregar monitos

El método más fácil de usar es establecer un delta de Dirac para cada dimensión que tenga una apariencia infinitamente delgada. Multiplique esto por algún parámetro arbitrario, integre sobre todo el objeto, establezca esto igual a la carga total, luego resuelva para el parámetro arbitrario.

- (a) Para la capa esférica, la distribución de carga es solo delgada en la dirección radial.

$$\rho(r, \theta, \phi) = A\delta(r - R)$$

Ahora integre todo el espacio y configúrelo igual al cargo total Q .

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ Q &= 4\pi A \int_0^{\infty} \delta(r - R) r^2 dr \\ Q &= 4\pi R^2 A \\ A &= \frac{Q}{4\pi R^2} \\ \rho(r, \theta, \phi) &= \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R) \end{aligned}$$

Esta respuesta debería ser obvia ahora. Es solo la carga total dividida por el área de una esfera multiplicada por el delta.

- (b) Para la superficie cilíndrica:

$$\begin{aligned}
\rho(r, \phi, z) &= A\delta(r - b) \\
\lambda &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho(r, \phi, z) r dr d\theta \\
\lambda &= A \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \delta(r - b) r dr \\
\lambda &= A2\pi b \\
A &= \frac{\lambda}{2\pi b} \\
\rho(r, \phi, z) &= \frac{\lambda}{2\pi b} \delta(r - b)
\end{aligned}$$

Una vez más, debería ser obvio que esta es la densidad de carga superficial por el delta, donde la densidad de carga superficial es la densidad de carga lineal dividida por la circunferencia del cilindro.

(c) Para el disco plano, debemos usar la función de paso H en la dirección radial.

$$\begin{aligned}
\rho(r, \phi, z) &= A\delta(z)H(R - r) \\
Q &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho(r, \phi, z) r dr d\phi dz \\
Q &= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty H(R - r) r dr \\
Q &= A2\pi \int_0^R r dr \\
A &= \frac{Q}{\pi R^2} \\
\rho(r, \phi, z) &= \frac{Q}{\pi R^2} \delta(z) H(R - r)
\end{aligned}$$

Nuevamente, debería ser obvio que estos son los deltas multiplicados por la densidad de carga superficial, que es la carga total dividida por el área del disco.

(d) Para el disco plano en coordenadas esféricas intente:

$$\begin{aligned}\rho(r, \theta, \phi) &= A \frac{\delta(\theta - \pi/2)}{r} H(R - r) \\ Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ Q &= A \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \delta(\theta - \pi/2) \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} H(R - r) r dr \\ A &= \frac{Q}{\pi R^2} \\ \rho(r, \theta, \phi) &= \frac{Q}{\pi R^2} \frac{\delta(\theta - \pi/2)}{r} H(R - r)\end{aligned}$$

13.5 Cálculo de capacitancias

Un capacitor simple es un dispositivo formado por dos conductores aislados uno al lado del otro. Si se colocan cargas iguales y opuestas sobre los conductores, habrá cierta diferencia de potencial entre ellos. La relación entre la magnitud de la carga en un conductor y la magnitud de la diferencia de potencial se denomina **capacitancia** (en unidades del SI se mide en faradios). Usando la ley de Gauss, calcule la capacitancia de

- (a) dos láminas conductoras grandes, planas, de área A , separadas por una pequeña distancia d ;
- (b) dos esferas concéntricas con radios a, b ($b > a$)
- (c) dos cilindros conductores concéntricos de longitud L , grandes en comparación con sus radios a, b ($b > a$).
- (d) ¿Cuál es el diámetro interior del conductor exterior en un cable coaxial lleno de aire cuyo conductor central es un alambre cilíndrico de diámetro 1 mm y cuya capacitancia es $3 \times 10^{-11} F/m$? $3 \times 10^{-12} F/m$?

Solución:

En cada caso, las dimensiones son tales que podemos ignorar los efectos marginales y, por lo tanto, podemos aprovechar la simetría.

(a) Placas paralelas

Si colocamos una carga de $-Q$ en una placa en $z = 0$ y una carga de $+Q$ en una placa en $z = d$, entonces se establece una diferencia de voltaje constante V entre las dos placas. La relación entre potencial y campo eléctrico es:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

Para un sistema unidimensional (porque las láminas son lo suficientemente grandes como para aproximarse a ellas como infinitas), la magnitud

se reduce a:

$$|\mathbf{E}| = \frac{d\Phi}{dz}$$

Para un campo eléctrico uniforme (como debe ser debido a la simetría) esto se convierte en:

$$E = \frac{\Phi}{z}$$

La diferencia de potencial entre las dos placas es entonces:

$$E = \frac{V}{d}$$

Si dibujamos una superficie gaussiana alrededor de una sección de la placa positiva, contendremos parte de su carga. Apliquemos la ley de Gauss en forma integral sobre la superficie de la superficie gaussiana:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

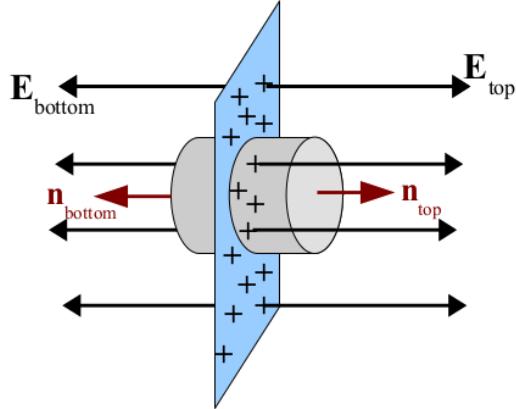


Figure 41: Capacitancia.

Si encogemos la caja correctamente, la parte de la integral debida a los lados de la superficie gaussiana se vuelve insignificante, y nos queda la parte superior e inferior de la superficie. Si encogemos la caja lo suficiente, el campo eléctrico se vuelve constante a lo largo de la superficie y se puede sacar de la integral, de modo que:

$$\mathbf{E}_{\text{sup}} \cdot \mathbf{n}_{\text{sup}} \int da + \mathbf{E}_{\text{inf}} \cdot \mathbf{n}_{\text{inf}} \int da = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

En este caso particular, los campos y las normales apuntan en la misma dirección (ver diagrama) y por lo tanto se reducen a un simple producto escalar.

$$E_{\text{pos placa}} = \frac{q_{\text{enc}}}{2a\epsilon_0}$$

$$E_{\text{pos placa}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_{\text{pos placa}} = \frac{Q}{2A\epsilon_0}$$

Este es el campo debido a la placa positiva. Debería ser obvio a partir de la geometría que la magnitud del campo debido a la placa negativa es la misma, de modo que el campo total es:

$$E = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

Sustituyamos en la relación entre el campo eléctrico y la diferencia de potencial V que se encuentra arriba y resolvamos para Q/V , que es la capacitancia:

$$\frac{Q}{V} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

(b) Esferas concéntricas:

Coloquemos una carga $+Q$ en la esfera en $r = a$ y $-Q$ en la esfera en $r = b$. Si dibujamos una superficie gaussiana esférica alrededor de la esfera interior tal que $a < r < b$, aplicamos la ley de Gauss en forma integral y usamos simetría, es fácil demostrar que entre las esferas el campo eléctrico es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

El potencial eléctrico es:

$$-\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Hacemos producto punto en ambos lados por el vector unitario radial e integremos con respecto a r para obtener la diferencia de potencial entre las esferas:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dr} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\ \int_b^a d\Phi &= - \int_b^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr \\ V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ \frac{Q}{V} &= \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \\ C &= \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}\end{aligned}$$

(c) Cilindros concéntricos:

Coloquemos una carga $+Q$ en el cilindro en $r = a$ y $-Q$ en el cilindro en $r = b$. Si dibujamos una superficie cilíndrica gaussiana alrededor del cilindro interior tal que $a < r < b$, aplicamos la ley de Gauss en forma integral y usamos simetría, es fácil demostrar que entre los cilindros el campo eléctrico es:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi r \epsilon_0 L} \hat{\mathbf{r}}$$

Ahora encontraremos la diferencia de potencial:

$$\begin{aligned}d\Phi &= -\frac{Q}{2\pi r \epsilon_0 L} dr \\ V &= - \int_b^a \frac{Q}{2\pi r \epsilon_0 L} dr \\ V &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ \frac{Q}{V} &= \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \\ C &= \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}\end{aligned}$$

(d) Resolviendo para b:

$$b = ae^{2\pi\epsilon_0 L/C}$$

$$b = (1 \text{ mm}) e^{2\pi(0.89 \times 10^{-11} \text{ F/m})/(3 \times 10^{-11} \text{ F/m})}$$

$$b = 6 \text{ mm}$$

Así:

$$b = (1 \text{ mm}) e^{2\pi(8.9 \times 10^{-12} \text{ F/m})/(3 \times 10^{-12} \text{ F/m})}$$

$$b = 10^8 \text{ mm or } 100 \text{ km}$$

13.6 Capacitancia de dos cilindros

Dos conductores cilíndricos largos de radios a_1 y a_2 son paralelos y están separados por una distancia d , que es grande en comparación con cualquiera de los dos radios. Demuestre que la capacitancia por unidad de longitud está dada aproximadamente por

$$C \approx \pi \epsilon_0 \left(\ln \frac{d}{a} \right)^{-1}$$

donde a es la media geométrica de los dos radios. Aproximadamente qué calibre de cable (diámetro del diámetro en milímetros) sería necesario para hacer una línea de transmisión de dos cables con una capacitancia de $1.2 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ si la separación de los cables fuera 0.5 cm ? 1.5 cm ? 5.0 cm ?

Solución:

Ubiquemos el centro del cilindro 1 en el origen y el centro del cilindro 2 en $x = d$. Coloquemos una carga total por unidad de longitud $-Q/L$ en el cilindro 1 y $+Q/L$ en el cilindro 2. Primero hagamos que el cilindro 2 no está presente y resolvemos por superposición. Sin el cilindro 2, las líneas de campo del cilindro 1 son radialmente hacia afuera. Esta simetría nos permite usar la ley de Gauss en forma integral. Dibujemos una superficie Gaussiana cilíndrica centrada en el cilindro 1 y encerrándolo.

$$\oint \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n} da = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{-Q}{2\pi r L \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

El segundo cilindro por sí solo creará un campo similar, solo que desplazado hacia la derecha:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q}{2\pi |\mathbf{x} - d\hat{\mathbf{i}}|^2 L \epsilon_0} (\mathbf{x} - d\hat{\mathbf{i}})$$

De modo que el campo total es:

$$\mathbf{E} = \frac{-Q}{2\pi(x^2 + y^2)L\epsilon_0}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) + \frac{Q}{2\pi((x-d)^2 + y^2)L\epsilon_0}((x-d)\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})$$

El potencial es entonces:

$$\nabla\Phi = \frac{Q}{2\pi(x^2 + y^2)L\epsilon_0}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) - \frac{Q}{2\pi((x-d)^2 + y^2)L\epsilon_0}((x-d)\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})$$

Para calcular la **capacitancia**, no necesitamos saber el potencial en todas partes, solo la **diferencia de potencial entre los dos conductores**. Además, las superficies de los **conductores son equipotenciales**, por lo que solo necesitamos conocer el potencial en un punto de la superficie para conocerlo en todas partes. Calculemos la diferencia de potencial entre los puntos ($x = a_1, y = 0$) y ($x = d - a_2, y = 0$). Ubiquemos un punto en la ecuación anterior con $\hat{\mathbf{i}}$.

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{Q}{2\pi(x^2 + y^2)L\epsilon_0}x - \frac{Q}{2\pi((x-d)^2 + y^2)L\epsilon_0}(x-d)$$

Integrando entre nuestros dos puntos:

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{Q}{2\pi(x^2 + y^2)L\epsilon_0}dx - \frac{Q}{2\pi((x-d)^2 + y^2)L\epsilon_0}(x-d)dx \\ \Delta V &= \int_{a_1}^{d-a_2} d\Phi = \int_{a_1}^{d-a_2} \left[\frac{Q}{2\pi x L\epsilon_0} - \frac{Q}{2\pi(x-d)L\epsilon_0} \right] dx \\ \Delta V &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\int_{a_1}^{d-a_2} \frac{1}{x} dx - \int_{a_1}^{d-a_2} \frac{1}{x-d} dx \right] \\ \Delta V &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\ln\left(\frac{d-a_2}{a_1}\right) - \ln\left(\frac{-a_2}{a_1-d}\right) \right] \\ \Delta V &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\ln\left(\left(\frac{d-a_1}{a_2}\right)\left(\frac{d-a_2}{a_1}\right)\right) \right] \\ CL &= \frac{Q}{\Delta V} \\ C &= 2\pi\epsilon_0 \left[\ln\left(\left(\frac{d-a_1}{a_2}\right)\left(\frac{d-a_2}{a_1}\right)\right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

Para $d \gg a_1, a_2$ **¿Qué hacemos ahora?**

$$C \approx \pi\epsilon_0 \left[\ln \left(\frac{d}{\sqrt{a_1 a_2}} \right) \right]^{-1}$$

$$C \approx \pi\epsilon_0 \left(\ln \frac{d}{a} \right)^{-1}$$

$$a \approx d e^{\frac{-\pi\epsilon_0}{C}}$$

Para una línea de transmisión de dos hilos con una capacitancia de 1.2×10^{-11} F/m, esto se convierte en:

$$a \approx (0.1)d$$

o en términos del diámetro:

$$\text{diametro} \approx (0.2)d$$

Si la separación de los cables fue de 0,5 cm, 1,5 cm o 5,0 cm, el calibre debe ser:

1 mm, 3 mm, or 10 mm

13.7 Densidad de energía para capacidores

(a) Para las tres geometrías del problema de los tres capacitores, calcule la energía electrostática total y exprésela alternativamente en términos de las cargas iguales y opuestas Q y $-Q$ colocadas en los conductores y la diferencia de potencial entre ellos.

(b) Dibuje la densidad de energía del campo electrostático en cada caso como una función de la coordenada lineal apropiada.

Solución:

(a) Para un capacitor simple, la **energía total** viene dada por $W = 1/2QV$. En el problema 1.6, encontramos los siguientes resultados.

Condensador de placas paralelas:

$$V = \frac{Qd}{A\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

Condensador de esferas concéntricas:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad \text{y} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Condensador de cilindros concéntricos:

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{y} \quad E = \frac{Q}{2\pi r\epsilon_0 L}$$

Es sencillo sustituir estas ecuaciones en la ecuación de energía y encontrar lo siguiente:

Condensador de placas paralelas:

$$W = \frac{Q^2 d}{2A\epsilon_0} \quad \text{y} \quad W = \frac{V^2 A\epsilon_0}{2d}$$

Condensador de esferas concéntricas:

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad \text{y} \quad W = \frac{V^2 2\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

Condensador de cilindros concéntricos:

$$W = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{y} \quad W = \frac{V^2 \pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

(b) La **densidad de energía** se define como

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2.$$

Una simple sustitución de los campos encontrados en el problema de los 3 capacitores da:

Condensador de placas paralelas:

$$w = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A^2}$$

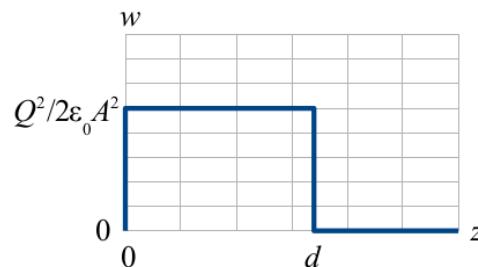


Figure 42: Condensador de placas paralelas.

Condensador de esferas concéntricas:

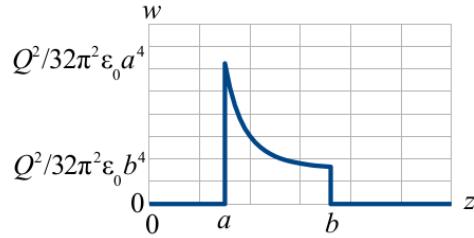


Figure 43: Condensador de esferas concéntricas.

$$w = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} r^{-4}$$

Cilindro concéntrico:

$$w = \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 L^2} r^{-2}$$

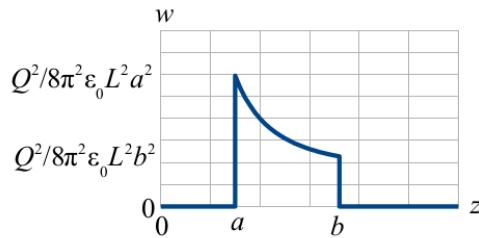


Figure 44: Cilindro concéntrico.

13.8 Fuerza de atracción entre conductores

Calcule la fuerza de atracción entre los conductores del capacitor de placas paralelas (Problema 1.6a: área A , separadas por la distancia d) y el capacitor de cilindros paralelos (Problema 1.7: radios a_1 y a_2 , separados por la distancia d) para

- (a) cargas fijas en cada conductor
- (b) diferencia de potencial fijo entre conductores.

Solución:

- (a) Placas paralelas

Debido a que las placas son grandes, planas y cercanas, podemos despreciar los efectos marginales. Si una placa tiene carga total $+Q$ y la otra placa tiene carga total $-Q$, entonces cada una tiene una densidad de carga

$$\rho = \frac{Q}{A} \delta(z - d) \text{ y } \rho = \frac{-Q}{A} \delta(z) \text{ para } 0 < x < A^{1/2} \text{ y } 0 < y < A^{1/2}$$

La fuerza total sobre la placa positiva debida a la otra placa es la suma de la fuerza sobre todas sus partes, que matemáticamente toma la forma de una integral:

$$\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Aquí \mathbf{E} no es el campo eléctrico total, sino el **campo eléctrico debido a la placa negativa**

Expandiendo en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, z) \mathbf{E}(x, y, z) dx dy dz$$

Encontremos la fuerza sobre la placa cargada positivamente colocada en $z = d$ sustituyendo su densidad de carga:

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{A} \int_0^{\sqrt{A}} \int_0^{\sqrt{A}} \mathbf{E}(x, y, d) dx dy$$

Debido a que ignoramos los efectos marginales (en efecto, asumimos que las placas son lo suficientemente grandes como para parecer infinitas en comparación con el resto del sistema), la simetría del sistema requiere que el campo eléctrico solo pueda ser una función de z . Las integrales restantes se reducen al área de la placa, que cancela el área en el denominador.

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{E}(z = d)$$

El campo eléctrico se puede encontrar colocando una superficie gaussiana alrededor de una sección de cada placa. Debido a que la placa es delgada, tanto la parte superior como la inferior de la superficie gaussiana tienen líneas de campo eléctrico que se cruzan y contribuyen:

$$2E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E_n = \frac{\pm Q}{2A\epsilon_0}$$

Debemos tener cuidado de darnos cuenta de que la normal del interior de la placa positiva apunta hacia $-z$ y la normal del interior de la placa negativa apunta hacia $+z$.

$$\mathbf{E}_{\text{pos placa}} = \frac{Q}{2A\epsilon_0}(-\hat{\mathbf{z}})$$

$$\mathbf{E}_{\text{neg placa}} = \frac{(-Q)}{2A\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Debido a la simetría, el campo es constante y uniforme a lo largo de ese espacio, de modo que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{pos placa}} + \mathbf{E}_{\text{neg placa}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{-Q}{A\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

Pero para efectos del cálculo de la fuerza, no usamos el campo total, sino que usamos el campo debido a la placa negativa porque es el que actúa sobre la placa positiva.

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_{\text{neg placa}}$$

$$\mathbf{F} = \frac{-Q^2}{2A\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$$

La placa de la derecha experimenta una fuerza en la dirección $-z$, hacia la otra placa y, por lo tanto, es atraída por ella, como es de esperar porque los opuestos se atraen.

Cilindros Paralelos:

Debido a que la distancia entre los cilindros es grande en comparación con sus radios, podemos aproximarlos como alambres infinitamente delgados con el fin de calcular los campos. Coloquemos el cilindro 1 en el origen con carga positiva por unidad de longitud $+\lambda$ y el cilindro 2 en $x = d$ con carga negativa por unidad de longitud $-\lambda$. Si queremos encontrar la fuerza sobre el cilindro 2, solo necesitamos encontrar el campo debido al cilindro 1 porque el cilindro 2 no ejercerá una fuerza neta sobre sí mismo.

El campo debido al cilindro 1 se puede encontrar colocando una superficie

cilíndrica gaussiana a su alrededor y aprovechando la simetría:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$l \int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} r d\phi = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E_r 2\pi r = \left(\frac{q_{enc}}{l} \right) \frac{1}{\epsilon_0}$$

Reconocemos q_{enc}/l como el cargo por unidad de longitud λ :

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, z) \mathbf{E}(x, y, z) dx dy dz$$

$$\mathbf{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \delta(x - d) (-\lambda) \mathbf{E}(x, y, z) dx dy dz$$

$$\frac{\mathbf{F}}{l} = -\lambda \mathbf{E}(d, 0)$$

$$\frac{\mathbf{F}}{l} = \frac{-\lambda^2}{2\pi d \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

El cilindro 2 experimenta una fuerza en la dirección $-r$, hacia el origen, donde reside el cilindro 1.

(b) Placas paralelas:

Se mantiene una diferencia de potencial fija V a través del condensador en lugar de cargas fijas. El potencial está relacionado con el campo eléctrico de acuerdo con:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

Para un campo unidimensional, esto se convierte en:

$$E = \frac{d\Phi}{dz}$$

Para un campo uniforme esto se convierte en:

$E = \frac{V}{d}$ donde d es la distancia entre los dos puntos donde se mide el potencial.

La contribución de una sola placa es $E_{\text{neg placa}} = \frac{V}{2d}$

Anteriormente encontramos que la relación entre el campo eléctrico total y la carga en una placa es:

$$E = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

así que:

$$\begin{aligned} Q &= A\epsilon_0 E \\ Q &= \frac{A\epsilon_0 V}{d} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= Q \mathbf{E}_{\text{neg placa}} \\ \mathbf{F} &= -\frac{A\epsilon_0 V^2}{2d^2} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Cilindros Paralelos:

Se encontró que el campo eléctrico debido al cilindro 1 es:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

Limitémonos a puntos a lo largo del eje x .

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi x \epsilon_0} \hat{\mathbf{x}}$$

El campo debido al cilindro 2 es

$$\mathbf{E}_2 = \frac{-\lambda}{2\pi(x-d)\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}}$$

El campo total es:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d} \right] \hat{\mathbf{x}}$$

La diferencia de potencial entre los dos cilindros se puede encontrar integrando:

$$\begin{aligned} V &= - \int_{a_1}^{d-a_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} \\ V &= \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{a_1}^{d-a_2} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d} \right] dx \\ V &= \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(d-a_2)(d-a_1)}{a_1 a_2} \right] \end{aligned}$$

con $d \gg a$, podemos simplificar esto

$$V = \frac{-\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{d}{\sqrt{a_1 a_2}} \right]$$

Resolvamos para la densidad de carga de la línea:

$$\lambda = \frac{-\pi\epsilon_0 V}{\ln \left[\frac{d}{\sqrt{a_1 a_2}} \right]}$$

$$\frac{\mathbf{F}}{l} = -\lambda \mathbf{E}_1(d, 0)$$

$$\frac{\mathbf{F}}{l} = \frac{\pi\epsilon_0 V^2}{2d \left[\ln \left(\frac{d}{\sqrt{a_1 a_2}} \right) \right]^2} (-\hat{\mathbf{x}})$$

13.9 Dos placas de metal conectadas a tierra

Dos placas infinitas de metal conectadas a tierra se encuentran paralelas al plano xz , una en $y = 0$ y la otra en $y = a$. El extremo izquierdo, en $x = 0$, se cierra con una tira infinita aislada de las dos placas y mantenida a un potencial específico $\Phi_0(y)$. Encuentre el potencial dentro de esta ranura.

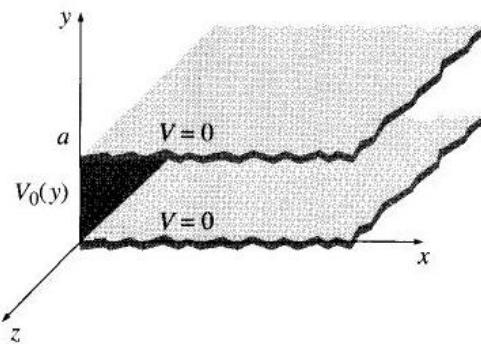


Figure 45: La ranura.

Solución:

Primero como no hay cargas externas, debemos resolver la Ec. de Laplace.

La configuración es independiente de z , por lo que este es realmente un problema de dos dimensiones.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (19)$$

¿Qué condiciones de frontera hay?

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \Phi = 0 \text{ cuando } y = 0, \\ \text{(ii)} & \Phi = 0 \text{ cuando } y = a, \\ \text{(iii)} & \Phi = V_0(y) \text{ cuando } x = 0, \\ \text{(iv)} & \Phi \rightarrow 0 \text{ como } x \rightarrow \infty. \end{array} \right\} \quad (20)$$

El primer paso es buscar soluciones en forma de productos:

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (21)$$

Poniendo la Ec. (21) en la ecuación (19), obtenemos

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0.$$

Ahora vamos a “separar las variables” (es decir, reunir todas las dependencias x en un término y todas las dependencias y en otro). Por lo general, esto se logra dividiendo entre Φ :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0. \quad (22)$$

Aquí el primer término depende solo de x y el segundo solo de y ; en otras palabras, tenemos una ecuación de la forma

$$f(x) + g(y) = 0 \quad (23)$$

Ahora, solo hay una forma en que esto podría ser cierto: f y g deben ser constantes. Se sigue de la ecuación (23), entonces, que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_1 \text{ y } \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2, \quad \text{con } C_1 + C_2 = 0. \quad (24)$$

Una de estas constantes es positiva, la otra negativa, en nuestro problema particular necesitamos C_1 positivo y C_2 negativo, por razones que aparecerán en un momento. Por lo tanto

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y. \quad (25)$$

Tenemos:

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad Y(y) = C \sin ky + D \cos ky,$$

así que

$$\Phi(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx}) (C \sin ky + D \cos ky) \quad (26)$$

Ahora vamos a imponer la condición (iv) requiere que A sea igual a cero. Absorbiendo B en C y D , nos queda

$$\Phi(x, y) = e^{-kx} (C \sin ky + D \cos ky).$$

Por la condición (i) entonces D debe ser igual a cero, por lo que

$$\Phi(x, y) = Ce^{-kx} \sin ky. \quad (27)$$

Y de la condición (ii) $\sin ka = 0$, es decir:

$$k = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Por eso elegimos C_1 positivo y C_2 negativo: si X fuera sinusoidal, nunca podríamos hacer que llegara a cero en el infinito, y si Y fueran exponenciales, no podríamos hacer que se desvaneciera tanto en 0 como en a .

Podemos juntar las soluciones separables (27) para construir una solución mucho más general:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a). \quad (28)$$

Esto todavía satisface las primeras tres condiciones de contorno; la pregunta es, ¿podemos (mediante una elección astuta de los coeficientes C_n) ajustarnos a la última condición de contorno?

$$\Phi(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi y/a) = V_0(y). \quad (29)$$

¿Reconocen esta suma? ¿Qué es?

Es una serie de seno de Fourier. Y el [teorema de Dirichlet](#) garantiza que cualquier función $V_0(y)$ (incluso si tiene un número finito de discontinuidades) puede expandirse en tal serie.

Pero, ¿cómo determinamos realmente los coeficientes C_n , metidos como están en esa suma infinita?

Para lograr esto usamos [el truco de Fourier](#): Multiplicamos la Ec. (29) por $\sin(n'\pi y/a)$ (donde n' es un entero positivo), e integramos de 0 hasta a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \int_0^a V_0(y) \sin(n'\pi y/a) dy. \quad (30)$$

La integral nos da

$$\int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \begin{cases} 0, & \text{si } n' \neq n, \\ \frac{a}{2}, & \text{si } n' = n. \end{cases}$$

Por lo tanto, todos los términos de la serie desaparecen, excepto el que tiene $n' = n$, y el lado izquierdo de la ecuación (30), se reduce a $(a/2)C_n$. Despejando tenemos:

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin(n\pi y/a) dy. \quad (31)$$

La Ec. (28) es la solución, con coeficientes dados por la (31). Hasta aquí se terminó el ejercicio.

Ahora les propongo un ejemplo...

Suponga que la tira en $x = 0$ es una placa de metal con potencial constante V_0 (recuerde, está aislada de las placas conectadas a tierra en $y = 0$ y $y = a$). Luego

$$C_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin(n\pi y/a) dy = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Y así obtenemos:

$$\Phi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{impar}} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a) \quad (32)$$

La Figura 46 es un gráfico de este potencial; La Fig. 47 muestra cómo se combinan los primeros términos de la serie de Fourier para hacer una aproximación cada vez mejor a la constante V_0 : (a) es $n = 1$ solamente, (b) incluye n hasta 5, (c) es la suma de los primeros 10 términos, y (d) es la suma de los primeros 100 términos.

Por cierto, la serie infinita en Eq. (32) se pueden sumar explícitamente y da

$$\Phi(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\pi y/a)}{\sinh(\pi x/a)} \right).$$

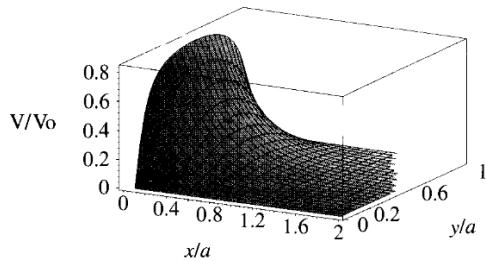


Figure 46: Gráfico del potencial $V = \Phi$.

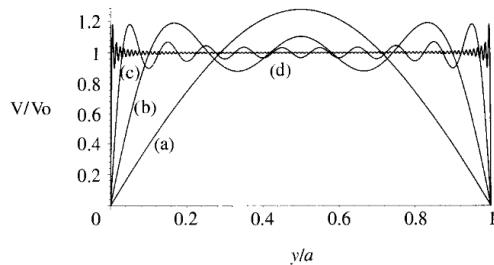


Figure 47: Términos de la serie de Fourier.

De esta forma es fácil comprobar que se cumple la ecuación de Laplace y se satisfacen las cuatro condiciones de contorno (20).

13.10 Potencial en la tapa de una caja

Considere por simplicidad una caja con una esquina en el origen y la esquina opuesta en el punto (a, b, c) en las dimensiones (x, y, z) , donde el potencial es cero en todas partes en la superficie de la caja excepto en la superficie $z = c$ donde hay un potencial:

$$\Phi(x, y, z = c) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

- Las otras cinco condiciones de contorno son los otros cinco lados de la caja mantenidos en cero.

- Un análisis cuidadoso nos lleva a ver que todos los lados de potencial cero obligan a desaparecer todas las soluciones particulares excepto las más comunes:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{\beta \neq 0} (A_{\alpha\beta} e^{i\alpha x} + B_{\alpha\beta} e^{-i\alpha x}) (C_{\alpha\beta} e^{i\beta y} + D_{\alpha\beta} e^{-i\beta y}) (F_{\alpha\beta} e^{\gamma z} + G_{\alpha\beta} e^{-\gamma z})$$

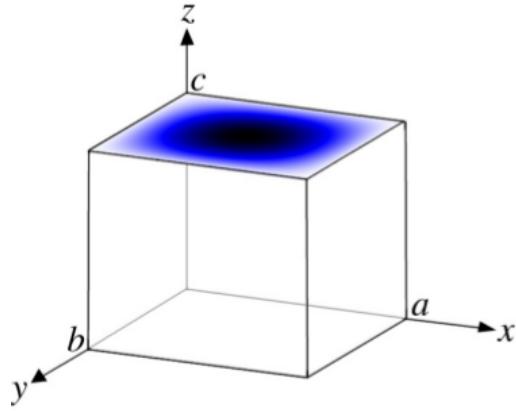


Figure 48: Caja.

- Ahora aplicamos todas las condiciones de contorno una por una:

$$\Phi(x = 0, y, z) = 0$$

$$0 = \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{\beta \neq 0} (A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}) (C_{\alpha\beta} e^{i\beta y} + D_{\alpha\beta} e^{-i\beta y}) (F_{\alpha\beta} e^{\gamma z} + G_{\alpha\beta} e^{-\gamma z})$$

- Esto solo es cierto para todos los y y z si $A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} = 0$, o $B_{\alpha\beta} = -A_{\alpha\beta}$.
- La solución es ahora:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{\beta \neq 0} A_{\alpha\beta} (e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}) (C_{\alpha\beta} e^{i\beta y} + D_{\alpha\beta} e^{-i\beta y}) (F_{\alpha\beta} e^{\gamma z} + G_{\alpha\beta} e^{-\gamma z})$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{\beta \neq 0} A_{\alpha\beta} \sin(\alpha x) (C_{\alpha\beta} e^{i\beta y} + D_{\alpha\beta} e^{-i\beta y}) (F_{\alpha\beta} e^{\gamma z} + G_{\alpha\beta} e^{-\gamma z})$$

- A continuación, apliquemos la condición de frontera $\Phi(x = a, y, z) = 0$:

$$0 = \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{\beta \neq 0} A_{\alpha\beta} \sin(\alpha a) (C_{\alpha\beta} e^{i\beta y} + D_{\alpha\beta} e^{-i\beta y}) (F_{\alpha\beta} e^{\gamma z} + G_{\alpha\beta} e^{-\gamma z})$$

- Esto solo es cierto para todos los y y z si $\alpha a = n\pi$ donde $n = 0, 1, 2, \dots$ así la solución queda:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n \neq 0} \sum_{\beta \neq 0} A_{n\beta} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) (C_{n\beta} e^{i\beta y} + D_{n\beta} e^{-i\beta y}) (F_{n\beta} e^{\gamma z} + G_{n\beta} e^{-\gamma z})$$

- El mismo proceso ocurre exactamente en la dimensión y , dando como resultado:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) (F_{nm} e^{yz} + G_{nm} e^{-yz}) \text{ donde } n, m = 0, 1, 2, \dots$$

- Con α y β determinados, se puede encontrar γ :

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}} \rightarrow \gamma = \pi\sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2}$$

- A continuación, aplicamos la condición de frontera $\Phi(x, y, z = 0) = 0$:

$$0 = \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) (F_{nm} + G_{nm}) \text{ y así } G_{nm} = -F_{nm}, \text{ da:}$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh\left(\pi\sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2}z\right)$$

- Aplicando la última condición de contorno: $\Phi(x, y, z = c) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) = \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh\left(\pi\sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2}c\right)$$

- El único término de la expansión en serie que se necesita para representar el lado izquierdo de la igualdad es el término $n = 1, m = 1$, reduciendo la ecuación a:

$$1 = A_{1,1} \sinh\left(\pi\sqrt{1/a^2 + 1/b^2}c\right)$$

y despejando el coeficiente final:

$$A_{1,1} = \frac{1}{\sinh\left(\pi\sqrt{1/a^2 + 1/b^2}c\right)}$$

- La solución final a este ejemplo es:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sinh\left(\pi\sqrt{1/a^2 + 1/b^2}z\right)}{\sinh\left(\pi\sqrt{1/a^2 + 1/b^2}c\right)}$$

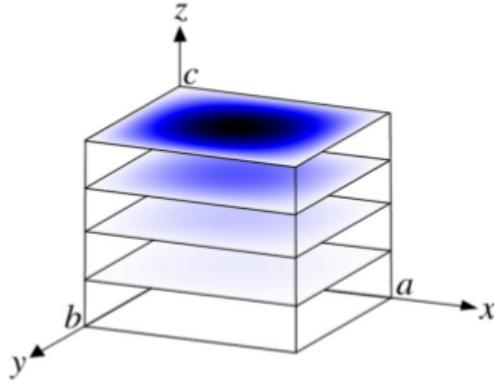


Figure 49: Caja.

- Podemos hacer que el caso sea más general proporcionando la condición de frontera arbitraria: $\Phi(x, y, z = c) = V(x, y)$

- Entonces sigue el análisis anterior, **excepto que ahora la última condición de contorno requiere:**

$$V(x, y) = \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh\left(\pi \sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2} c\right)$$

- La función de valor límite V se está expandiendo en una **serie de Fourier** con coeficientes:

$$A_{nm} \sinh\left(\pi \sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2} c\right)$$

- Al igual que se hizo con la serie de Fourier general, determinamos los coeficientes multiplicando ambos lados por senos de x e y , e integrando para que la ortogonalidad tome coeficientes:

$$A_{nm} \sinh\left(\pi \sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2} c\right) = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh\left(\pi \sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2} c\right)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

- De modo que la solución general es:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} A_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh\left(\pi \sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2} z\right).$$

13.11 Ranura infinita

Dos placas de metal conectadas a tierra infinitamente largas, nuevamente en $y = 0$ y $y = a$, están conectadas en $x = \pm b$ mediante tiras de metal que se mantienen a un potencial constante V_0 , como se muestra en la figura 50 (una fina capa de aislamiento en cada esquina evita que se produzca un cortocircuito). Encuentre el potencial dentro de la tubería rectangular resultante.

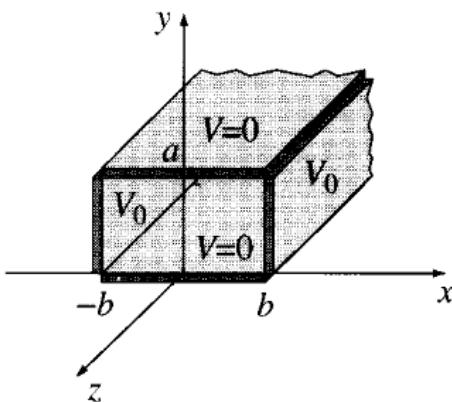


Figure 50: Dos placas de metal conectadas a tierra infinitamente largas.

Solución:

Una vez más, la configuración es independiente de z . Nuestro problema es resolver la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

sujeto a las condiciones de contorno

$$(i) \Phi = 0 \quad \text{cuando} \quad y = 0$$

$$(ii) \Phi = 0 \quad \text{cuando} \quad y = a,$$

$$(iii) \Phi = V_0 \quad \text{cuando} \quad x = b,$$

$$(iv) \Phi = V_0 \quad \text{cuando} \quad x = -b.$$

Podemos usar lo que habíamos encontrado

$$\boxed{\Phi(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky)}.$$

Esta vez, sin embargo, no podemos decir $A = 0$; la región en cuestión no se extiende a $x = \infty$, por lo que e^{kx} es perfectamente aceptable. Por otro lado, la situación es simétrica con respecto a x , entonces $\Phi(-x, y) = \Phi(x, y)$, y se sigue que $A = B$. Utilizando

$$e^{kx} + e^{-kx} = 2 \cosh kx,$$

y metiendo $2A$ dentro de C y D , tenemos

$$\Phi(x, y) = \cosh kx(C \sin ky + D \cos ky).$$

Las condiciones de contorno (i) y (ii) requieren que $D = 0$ y $k = n\pi/a$, así

$$\Phi(x, y) = C \cosh(n\pi x/a) \sin(n\pi y/a).$$

Como $\Phi(x, y)$ es par en x , cumplirá automáticamente la condición (iv) si se ajusta a (iii). Resta, por tanto, construir la combinación lineal general,

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(n\pi x/a) \sin(n\pi y/a),$$

y elija los coeficientes C_n de tal manera que satisfagan la condición (iii):

$$\Phi(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(n\pi b/a) \sin(n\pi y/a) = V_0.$$

Este es el mismo problema en el análisis de Fourier que enfrentamos antes donde obtuvimos el resultado:

$$C_n \cosh(n\pi b/a) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

El potencial en este caso está dado por

$$\Phi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \frac{\cosh(n\pi x/a)}{\cosh(n\pi b/a)} \sin(n\pi y/a)$$

Esta función se muestra en la figura 51.

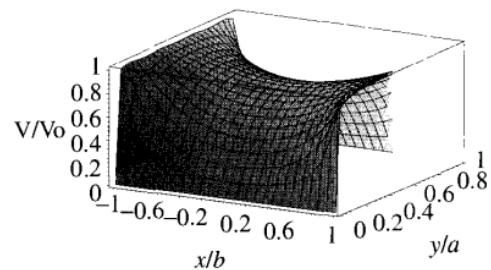


Figure 51: Potencial.

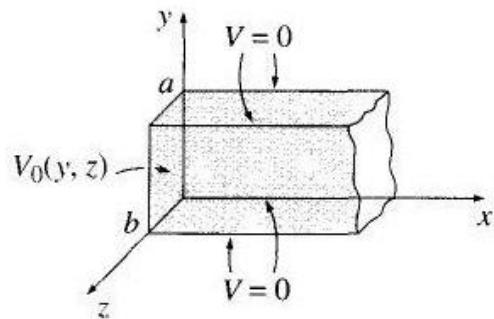


Figure 52: Tubería rectangular.

13.12 Tubería rectangular

Una tubería de metal rectangular infinitamente larga (lados a y b) está conectado a tierra, pero un extremo, en $x = 0$, se mantiene a un potencial especificado $V_0(y, z)$, como se indica en la figura 52. Encuentre el potencial dentro de la tubería.

Solución:

Este es un problema genuinamente tridimensional,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (33)$$

sujeto a las condiciones de borde

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \Phi = 0 \text{ cuando } y = 0, \\ \text{(ii)} & \Phi = 0 \text{ cuando } y = a, \\ \text{(iii)} & \Phi = 0 \text{ cuando } z = 0, \\ \text{(iv)} & \Phi = 0 \text{ cuando } z = b, \\ \text{(v)} & \Phi \rightarrow 0 \text{ como } x \rightarrow \infty \\ \text{(vi)} & \Phi = V_0(y, z) \text{ cuando } x = 0. \end{array} \right\}$$

Como siempre, buscamos soluciones que sean productos:

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Poniendo esto en la Ec. (33), y dividiendo por Φ , encontramos

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = 0.$$

nos da

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = C_1, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = C_2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = C_3, \quad \text{con } C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$

Nuestra experiencia previa sugiere que C_1 debe ser positivo, C_2 y C_3 negativo. Sea $C_2 = -k^2$ y $C_3 = -l^2$, tenemos $C_1 = k^2 + l^2$, y por lo tanto

$$\frac{d^2X}{dx^2} = (k^2 + l^2)X, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2Y, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} = -l^2Z.$$

Una vez más, la separación de variables ha convertido una ecuación diferencial parcial en ecuaciones diferenciales ordinarias. Las soluciones son

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{\sqrt{k^2+l^2}x} + Be^{-\sqrt{k^2+l^2}x}, \\ Y(y) &= C \sin ky + D \cos ky, \\ Z(z) &= E \sin lz + F \cos lz. \end{aligned}$$

La condición de frontera (v) implica $A = 0$, (i) da $D = 0$ y (iii) da $F = 0$, mientras que (ii) y (iv) requieren que $k = n\pi/a$ y $l = m\pi/b$, donde n y m son números enteros positivos. Combinando las constantes restantes, nos quedamos con

$$\Phi(x, y, z) = Ce^{-\pi\sqrt{(n/a)^2+(m/b)^2}x} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b).$$

Esta solución cumple todas las condiciones de contorno excepto (vi). Contiene dos enteros no especificados (n y m), y la combinación lineal más general es una suma doble:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} e^{-\pi\sqrt{(n/a)^2 + (m/b)^2}x} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b). \quad (34)$$

Aplicamos la condición de contorno restante,

$$\Phi(0, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) = V_0(y, z)$$

Para determinar estas constantes, multiplicamos por $\sin(n'\pi y/a) \sin(m'\pi z/b)$, donde n' y m' son números enteros positivos arbitrarios e integramos:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy \int_0^b \sin(m\pi z/b) \sin(m'\pi z/b) dz \\ &= \int_0^a \int_0^b V_0(y, z) \sin(n'\pi y/a) \sin(m'\pi z/b) dy dz. \end{aligned}$$

El lado izquierdo nos da $(ab/4)C_{n',m'}$, así

$$C_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b V_0(y, z) \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b) dy dz. \quad (35)$$

La Ecuación (34), con los coeficientes dados por la Ec. (35), es la solución a nuestro problema.

Por ejemplo, si el extremo del tubo es un conductor a potencial constante V_0 ,

$$\begin{aligned} C_{n,m} &= \frac{4V_0}{ab} \int_0^a \sin(n\pi y/a) dy \int_0^b \sin(m\pi z/b) dz \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ o } m \text{ es par,} \\ \frac{16V_0}{\pi^2 nm}, & \text{si } n \text{ y } m \text{ son impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

En este caso

$$V(x, y, z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{n,m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{nm} e^{-\pi\sqrt{(n/a)^2 + (m/b)^2}x} \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi z/b).$$

Note que los términos sucesivos decrecen rápidamente; se obtendría una aproximación razonable conservando sólo las primeras.

13.13 Cubo hueco

Un cubo hueco tiene paredes conductoras definidas por seis planos $x = 0, y = 0, z = 0$ y $x = a, y = a, z = a$. Las paredes $z = 0$ y $z = a$ se mantienen a potencial constante V . Los otros cuatro lados tienen potencial cero.

- (a) Encuentre el potencial $\Phi(x, y, z)$ en cualquier punto dentro del cubo.
- (b) Evalúe numéricamente el potencial en el centro del cubo, con una precisión de tres cifras significativas. ¿Cuántos términos en la serie es necesario mantener para lograr esta precisión? Compare su resultado numérico con el valor promedio del potencial en las paredes. (Vea el Problema 2.28. de Jackson)
- (c) Encuentre la densidad de carga superficial en la superficie $z = a$.

Solución:

El problema no contiene carga, por lo que el potencial eléctrico se describe en todas partes dentro del cubo mediante la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Este problema tiene un límite, el cubo, que se ajusta mejor a las coordenadas rectangulares. En coordenadas rectangulares, la ecuación de Laplace se convierte en:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Usando el método de separación de variables, la solución más general a esta ecuación es:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & (A_{\alpha 0} + B_{\alpha 0}x)(A_{\beta 0} + B_{\beta 0}y)(A_{\gamma 0} + B_{\gamma 0}z) \\ & + \sum_{\beta}^{\beta} (A_{\alpha 0} + B_{\alpha 0}x)(A_{\beta} e^{i\beta y} + B_{\beta} e^{-i\beta y})(A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \\ & + \sum_{\alpha}^{\alpha} (A_{\alpha} e^{i\alpha x} + B_{\alpha} e^{-i\alpha x})(A_{\beta 0} + B_{\beta 0}y)(A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \\ & + \sum_{\alpha, \beta} (A_{\alpha} e^{i\alpha x} + B_{\alpha} e^{-i\alpha x})(A_{\beta} e^{i\beta y} + B_{\beta} e^{-i\beta y})(A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \end{aligned}$$

Aplicando la condición de contorno, $\Phi(x = 0, y, z) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= (A_{\alpha 0}) (A_{\beta 0} + B_{\beta 0}y) (A_{\gamma 0} + B_{\gamma 0}z) \\
&\quad + \sum_{\beta} (A_{\alpha 0}) (A_{\beta} e^{i\beta y} + B_{\beta} e^{-i\beta y}) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \\
&\quad + \sum_{\alpha} (A_{\alpha} + B_{\alpha}) (A_{\beta 0} + B_{\beta 0}y) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \\
&\quad + \sum_{\alpha, \beta} (A_{\alpha} + B_{\alpha}) (A_{\beta} e^{i\beta y} + B_{\beta} e^{-i\beta y}) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z})
\end{aligned}$$

This must be true for all y and z , so that each term must vanish separately. This forces $A_{\alpha 0} = 0$ and $B_{\alpha} = -A_{\alpha}$. The solution now becomes:

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z) &= (B_{\alpha 0}x) (A_{\beta 0} + B_{\beta 0}y) (A_{\gamma 0} + B_{\gamma 0}z) \\
&\quad + \sum_{\beta} (B_{\alpha 0}x) (A_{\beta} e^{i\beta y} + B_{\beta} e^{-i\beta y}) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \\
&\quad + \sum_{\alpha} A_{\alpha} \sin(\alpha x) (A_{\beta 0} + B_{\beta 0}y) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \\
&\quad + \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha} \sin(\alpha x) (A_{\beta} e^{i\beta y} + B_{\beta} e^{-i\beta y}) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z})
\end{aligned}$$

Similarly, the boundary condition, $\Phi(x, y = 0, z) = 0$ leads to $A_{\beta 0} = 0$ and $B_{\beta} = -A_{\beta}$ which gives the solution:

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z) &= (B_{\alpha 0}x) (B_{\beta 0}y) (A_{\gamma 0} + B_{\gamma 0}z) \\
&\quad + \sum_{\beta} (B_{\alpha 0}x) A_{\beta} \sin(\beta y) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \\
&\quad + \sum_{\alpha} A_{\alpha} \sin(\alpha x) (B_{\beta 0}y) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \\
&\quad + \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha} \sin(\alpha x) A_{\beta} \sin(\beta y) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z})
\end{aligned}$$

Now apply the boundary condition $\Phi(x = a, y, z) = 0$

$$\begin{aligned}
0 = & (B_{\alpha 0} a) (B_{\beta 0} y) (A_{\gamma 0} + B_{\gamma 0} z) \\
& + \sum_{\beta}^{\beta} (B_{\alpha 0} a) A_{\beta} \sin(\beta y) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \\
& + \sum_{\alpha}^{\alpha} A_{\alpha} \sin(\alpha a) (B_{\beta 0} y) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) \\
& + \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha} \sin(\alpha a) A_{\beta} \sin(\beta y) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z})
\end{aligned}$$

The only way this can be true for all y and z is if $B_{\alpha 0} = 0$ and $\alpha = n\pi/a$ where $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Phi(x, y, z) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) (B_{\beta 0} y) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z}) + \sum_{n, \beta} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) A_{\beta} \sin(\beta y) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z})$$

Similarly, apply the boundary condition $\Phi(x, y = a, z) = 0$ to get $B_{\beta 0} = 0$ and $\beta = m\pi/a$ where $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n, m} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) A_m \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) (A_{\gamma} e^{\gamma z} + B_{\gamma} e^{-\gamma z})$$

By definition we have $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ so that we now know $\gamma = \sqrt{(n^2 + m^2)\pi^2/a^2}$. We can combine several constants so that we now have:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n, m} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \left(A_{n, m} e^{z\sqrt{(n^2 + m^2)\pi^2/a^2}} + B_{n, m} e^{-z\sqrt{(n^2 + m^2)\pi^2/a^2}} \right)$$

Now apply the boundary condition $\Phi(x, y, z = 0) = V$

$$V = \sum_{n, m} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) (A_{n, m} + B_{n, m})$$

Multiply both side by $\sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{a}\right)$ and integrate over x and y from 0 to a

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^a V \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{a}\right) dx dy \\
= \sum_{n, m} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) dx \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{a}\right) dy
\end{aligned}$$

Due to orthogonality, each integral on the right is zero, except when $n = n'$ and $m = m'$

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^a V \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dx dy &= \frac{a^2}{4} (A_{n,m} + B_{n,m}) \\ (A_{n,m} + B_{n,m}) &= \frac{4V}{a^2} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy \\ (A_{n,m} + B_{n,m}) &= \frac{4V}{a^2} \frac{a}{n\pi} [1 - (-1)^n] \frac{a}{m\pi} [1 - (-1)^m] \\ A_{n,m} + B_{n,m} &= \frac{16V}{nm\pi^2} \quad n, m = \text{ odd} \end{aligned}$$

Now apply the final boundary condition $\Phi(x, y, z = a) = V$

$$V = \sum_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \left(A_{n,m} e^{a\sqrt{(n^2+m^2)\pi^2/a^2}} + B_{n,m} e^{-a\sqrt{(n^2+m^2)\pi^2/a^2}} \right)$$

Repeat the process done above to get

$$A_{n,m} e^{\sqrt{(n^2+m^2)\pi^2}} + B_{n,m} e^{-\sqrt{(n^2+m^2)\pi^2}} = \frac{16V}{nm\pi^2} \quad n, m = \text{ odd}$$

Solve the system of equations in the boxes above to find:

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{8V}{nm\pi^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{(n^2+m^2)\pi^2}}}{\cosh((\pi/2)\sqrt{n^2+m^2})} \\ B_{n,m} &= \frac{8V}{nm\pi^2} \frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{(n^2+m^2)\pi^2}}}{\cosh((\pi/2)\sqrt{n^2+m^2})} \end{aligned}$$

The final solution is now:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \sum_{n,m \text{ odd}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \frac{8V}{nm\pi^2} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{(n^2+m^2)\pi^2}} e^{z\sqrt{(n^2+m^2)\pi^2/a^2}} + e^{\frac{1}{2}\sqrt{(n^2+m^2)\pi^2}} e^{-z\sqrt{(n^2+m^2)\pi^2/a^2}}}{\cosh((\pi/2)\sqrt{n^2+m^2})} \right) \\ \Phi(x, y, z) &= \sum_{n,m \text{ odd}} \frac{16V}{nm\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \left(\frac{\cosh((\pi/2)\sqrt{n^2+m^2}(2z/a) - 1))}{\cosh((\pi/2)\sqrt{n^2+m^2})} \right) \end{aligned}$$

(b) Evaluate the potential at the center of the cube numerically, accurate to three significant figures. How many terms in the series is it necessary to

keep in order to attain this accuracy? Compare your numerical result with the average value of the potential on the walls. See Problem 2.28.

The potential at the center of the cube is:

$$\begin{aligned}\Phi(a/2, a/2, a/2) &= \frac{16V}{\pi^2} \sum_{n,m \text{ odd}} \frac{1}{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{\cosh((\pi/2)\sqrt{n^2 + m^2})} \right) \\ \Phi(a/2, a/2, a/2) &= V \left[\frac{16}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{\cosh((\pi/2)\sqrt{2})} \right) \right. \\ &\quad + \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{\cosh((\pi/2)\sqrt{10})} \right) \\ &\quad + \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{\cosh((\pi/2)\sqrt{10})} \right) \\ &\quad \left. + \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{5} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{\cosh((\pi/2)\sqrt{26})} \right) + \dots \right] \\ \Phi(a/2, a/2, a/2) &= V[0.3476 - 0.0075 - 0.0075 + 0.0002 + \dots]\end{aligned}$$

Here is solution, to three significant figures, if you only keep the first term, or the first two terms, etc:

$$\begin{aligned}\Phi_{1 \text{ term}}(a/2, a/2, a/2) &= V[0.348] \\ \Phi_{2 \text{ terms}}(a/2, a/2, a/2) &= V[0.340] \\ \Phi_{3 \text{ terms}}(a/2, a/2, a/2) &= V[0.333] \\ \Phi_{4 \text{ terms}}(a/2, a/2, a/2) &= V[0.333]\end{aligned}$$

We only have to keep the first three terms to have the answer accurate to three significant figures. It is obvious that the solution is converging to:

$$\Phi(a/2, a/2, a/2) = \frac{V}{3}$$

There are six walls on the cube and two sides have a non-zero potential V , so the average value of the potential on the sides of the cube is $\Phi_{\text{ave on surf}} = \frac{2V}{6} = \frac{V}{3}$. This leads to the interesting conclusion that:

$$\Phi(a/2, a/2, a/2) = \Phi_{\text{ave on surf}}$$

(c) Find the surface-charge density on the surface $z = a$.

$$\sigma = \left[-\epsilon_0 \frac{d\Phi}{dn} \right]_{n=a}$$

We have solved the potential on the inside of the cube, so we can only use that potential to find the surface charge density on the inside of the $z = a$ surface. The normal to the inside surface is in the negative z direction so that:

$$\begin{aligned}\sigma &= \left[\epsilon_0 \frac{d\Phi}{dz} \right]_{z=a} \\ \sigma &= \left[\epsilon_0 \frac{d}{dz} \sum_{n,m \text{ odd}} \frac{16V}{nm\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \left(\frac{\cosh((\pi/2)\sqrt{n^2+m^2}((2z/a)-1))}{\cosh((\pi/2)\sqrt{n^2+m^2})} \right) \right]_{z=a} \\ \sigma &= \left[\epsilon_0 \sum_{n,m \text{ odd}} \frac{16V}{nm\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \left(\frac{\sinh((\pi/2)\sqrt{n^2+m^2}((2z/a)-1))}{\cosh((\pi/2)\sqrt{n^2+m^2})} \right) (\pi/a)\sqrt{n^2+m^2} \right]_{z=a} \\ \sigma &= \frac{16\epsilon_0 V}{\pi a} \sum_{n,m \text{ odd}} \frac{\sqrt{n^2+m^2}}{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \left(\tanh((\pi/2)\sqrt{n^2+m^2}) \right)\end{aligned}$$

13.14 Tubería rectangular 2

Una tubería rectangular, paralela al eje z (desde $-\infty$ hasta $+\infty$), tiene tres lados metálicos conectados a tierra, en $y = 0$, $y = a$ y $x = 0$. El cuarto lado, en $x = b$, se mantiene en un potencial especificado $V_0(y)$.

- (a) Desarrolle una fórmula general para el potencial dentro de la tubería.
- (b) Encuentre el potencial explícitamente, para el caso $V_0(y) = V_0$ (una constante).

Solución:

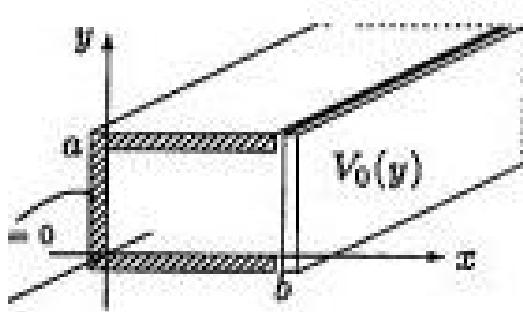


Figure 53: Tubería rectangular.

(a)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

con condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \Phi(x, 0) = 0 \\ \text{(ii)} & \Phi(x, a) = 0 \\ \text{(iii)} & \Phi(0, y) = 0 \\ \text{(iv)} & \Phi(b, y) = V_0(y) \end{array} \right\}$$

Separando variables nos da

$$\Phi(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky).$$

Entonces (i) $\Rightarrow D = 0$, (iii) $\Rightarrow B = -A$, (ii) $\Rightarrow ka$ es un múltiplo entero de π :

$$\Phi(x, y) = AC (e^{n\pi x/a} - e^{-n\pi x/a}) \sin(n\pi y/a) = (2AC) \sinh(n\pi x/a) \sin(n\pi y/a).$$

Pero $(2AC)$ es una constante, y la combinación lineal más general de soluciones separables consistente con (i), (ii) y (iii) es

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(n\pi x/a) \sin(n\pi y/a).$$

Queda por determinar los coeficientes C_n para que se ajusten a la condición de contorno (iv):

$$\sum C_n \sinh(n\pi b/a) \sin(n\pi y/a) = V_0(y)$$

Usando el truco de Fourier

$$\Rightarrow C_n \sinh(n\pi b/a) = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin(n\pi y/a) dy.$$

Por lo tanto

$$C_n = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a V_0(y) \sin(n\pi y/a) dy.$$

(b)

$$C_n = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} V_0 \int_a^a \sin(n\pi y/a) dy = \frac{2V_0}{a \sinh(n\pi b/a)} \times \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{2a}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\Phi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sinh(n\pi x/a) \sin(n\pi y/a)}{n \sinh(n\pi b/a)},$$

13.15 Tubo infinito con mitad de potencial

Encuentre el potencial en el interior de un tubo infinito cuadrado (de lado a) con las condiciones de borde que muestra la figura

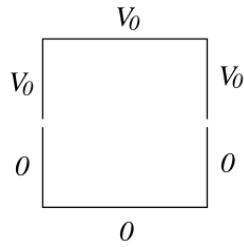


Figure 54: Tubo cuadrado infinito.

Solución 1:

Dentro del paralelepípedo no hay carga encerrada, luego $\nabla^2\Phi = 0$. La solución general a este problema está dada por (ver apéndice A):

$$\Phi(x, y, z) = \sum_n [A_n \cos(\alpha_n x) + B_n \sin(\alpha_n x)] [C_n \cosh(\alpha_n y) + D_n \sinh(\alpha_n y)]$$

Las condiciones de borde para este problema son

- (i) $\Phi(x, 0) = 0$
- (ii) $\Phi(x, a) = V_0$
- (iii) $\Phi(0, y) = V(y)$
- (iv) $\Phi(a, y) = V(y)$

donde

$$V(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < y \leq b \\ V_0 & \text{si } b < y < a \end{cases}$$

Consideremos por un momento los dos problemas mostrados en la siguiente figura 55

Encontremos el potencial dentro de la tubería a la derecha. Las condiciones de borde son

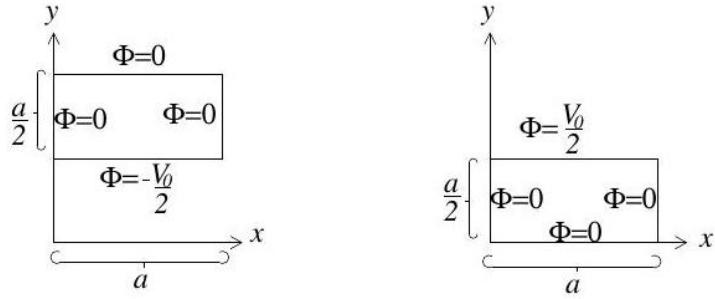


Figure 55: Dos tuberías rectangulares mantenidas a potencial cero en tres caras, y distinto de cero en la otra.

$$\begin{aligned}\Phi_{II}(0, y) &= 0 \\ \Phi_{II}(x, 0) &= 0 \\ \Phi_{II}(a, y) &= 0 \\ \Phi_{II}(x, a/2) &= \frac{V_0}{2}.\end{aligned}$$

La solución general está dada por

$$\Phi_{II}(x, y, z) = \sum_n [A_n \cos(\alpha_n x) + B_n \sin(\alpha_n x)] [C_n \cosh(\alpha_n y) + D_n \sinh(\alpha_n y)]$$

De la primera condición, (7.7a), obtenemos

$$0 = \sum_n A_n [C_n \cosh(\alpha_n y) + D_n \sinh(\alpha_n y)]$$

lo que implica que \$A_n = 0\$. Luego

$$\Phi_{II}(x, y, z) = \sum_n \sin(\alpha_n x) [\bar{C}_n \cosh(\alpha_n y) + \bar{D}_n \sinh(\alpha_n y)]$$

con \$\bar{C}_n = B_n C_n\$, \$\bar{D}_n = B_n D_n\$. De (7.7b) obtenemos

$$0 = \sum_n \sin(\alpha_n x) \bar{C}_n$$

lo que implica que \$C_n = 0\$. Luego

$$\Phi_{II}(x, y, z) = \sum_n \bar{D}_n \sin(\alpha_n x) \sinh(\alpha_n y)$$

De (7.7c) obtenemos

$$0 = \sum_n \bar{D}_n \sin(\alpha_n a) \sinh(\alpha_n y)$$

lo que implica que $\sin(\alpha_n a) = 0$, que a su vez implica que $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$. De (7.7d) se obtiene

$$\frac{V_0}{2} = \sum_n \bar{D}_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Aplicando el proyector $\int_0^a dy \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)$ a ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$\frac{V_0}{2} \frac{a}{m\pi} (1 - (-1)^m) = \bar{D}_m \frac{a}{2} \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

es decir,

$$\bar{D}_m = \frac{V_0}{m\pi} (1 - (-1)^m) \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Por lo tanto

$$\Phi_{II}(x, y, z) = \sum_{n \text{ impar}} \frac{2V_0}{n\pi} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

El problema de encontrar el potencial dentro de la tubería izquierda es totalmente equivalente al de encontrar el potencial dentro de la tubería derecha, ya que ambos son un rectángulo con tres caras a potencial cero. Lo único que cambia en el problema de la tubería a la izquierda es la orientación del eje y (la cara a potencial cero está en el máximo valor de y) y el valor del potencial en la cara que no está a potencial cero. Pero el valor máximo es el negativo del potencial máximo de la otra caja, por lo que no es difícil ver que todo el desarrollo se mantiene idéntico, salvo estas dos excepciones. Entonces, reemplazando y por $a - y$ y V_0 por $-V_0$, tenemos

$$\Phi_I(x, y, z) = \sum_{n \text{ impar}} \frac{-2V_0}{n\pi} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(a - y)\right)$$

Ahora que conocemos el potencial en todo punto, podemos elevar el potencial una cantidad V_0 en cada punto interior (x, y, z) en la tubería izquierda, de modo que

$$\bar{\Phi}_I(x, y, z) = V_0 + \sum_{n \text{ impar}} \frac{-2V_0}{n\pi} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(a-y)\right)$$

es la solución al potencial de la misma tubería rectangular, pero con tres caras a potencial V_0 y la de abajo a $\frac{V_0}{2}$: Ahora notamos que juntando la tubería a la derecha en la figura 13 con la tubería a la izquierda, después de haber elevado su potencial en V_0 , obtenemos la figura del problema que queremos resolver (una tubería con la mitad de arriba a potencial V_0 y la mitad de abajo a potencial cero), salvo por la equipotencial $V_0/2$ que aparece al medio. Pero el potencial es una función continua, por lo que podemos suponer, debido a la simetría del problema, que efectivamente el plano $y = a/2$ estará a potencial $V_0/2$ dentro de la tubería, ya que es el promedio entre cero y V_0 . Por lo tanto, la solución al problema es la mezcla de las dos soluciones independientes:

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \sum_{n \text{ impar}} \frac{2V_0}{n\pi} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) & \text{si } 0 \leq y \leq a/2 \\ V_0 - \sum_{n \text{ impar}} \frac{2V_0}{n\pi} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(a-y)\right) & \text{si } a/2 \leq y \end{cases}$$

13.16 Ec. de Laplace con límites uniformes en capa cilíndrica

- Considere una capa cilíndrica de radio ρ_0 con un potencial V en la capa. Encuentre el potencial dentro del caparazón.

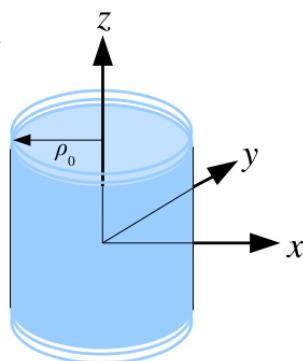


Figure 56: Capa cilíndrica.

Solución:

- Debido a que la región de interés involucra el barrido completo de Φ , para mantener Φ con un solo valor, debemos requerir:

$$\Phi(\rho, \phi) = \Phi(\rho, \phi + 2\pi)$$

- Esta condición no es cierta para geometrías para las cuales la región donde se requiere un potencial válido no abarca todas las posibles valores de Φ .

- En esta geometría, el requisito de valor único conduce a:

$$\begin{aligned} & (a_0 + b_0 \ln \rho) (A_0 + B_0 \phi) + \sum_{\nu, \nu \neq 0} (a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu}) (A_\nu e^{i\nu\phi} + B_\nu e^{-i\nu\phi}) \\ &= (a_0 + b_0 \ln \rho) (A_0 + B_0(\phi + 2\pi)) + \sum_{\nu, \nu \neq 0} (a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu}) (A_\nu e^{i\nu(\phi+2\pi)} + B_\nu e^{-i\nu(\phi+2\pi)}) \end{aligned}$$

- Debido a que las variables son independientes, todos los términos de la serie deben coincidir, lo que lleva a:

$$B_0 = 0$$

así como también: $e^{i\nu\phi} = e^{i\nu(\phi+2\pi)}$ lo cual solo es posible si $\nu = m$ donde m es un número entero: $m = 0, 1, 2, \dots$

- La solución ahora se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi})$$

- Debido a que la región de interés incluye el origen, el potencial debe ser finito en el origen. Por lo tanto, $b_m = 0$ y $b_0 = 0$, para evitar que esos términos exploten en el origen. Esto reduce la solución a:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi})$$

donde el término a_0 ahora se ha incluido en la suma.

- Se puede hacer que el índice m vaya de infinito negativo a infinito positivo, cubriendo así ambos términos:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \rho^{|m|} e^{im\phi}$$

- Ahora aplicando la condición de contorno: $\Phi(\rho = \rho_0, \phi) = V(\phi)$

$$V(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \rho_0^{|m|} e^{im\phi}$$

- Multiplicando ambos lados por una exponencial compleja, integremos y usamos la ortogonalidad de las exponenciales para encontrar:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \rho^{|m|} e^{im\phi} \quad \text{donde} \quad A_m = \frac{1}{2\pi} \rho_0^{-|m|} \int_{-\pi}^{\pi} V(\phi') e^{-i(m\phi')} d\phi'$$

- O, escrito de forma más intuitiva:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{|m|} e^{im\phi} \quad \text{donde} \quad A_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(\phi') e^{-i(m\phi')} d\phi'$$

- Aunque este ejemplo solo consideró una capa cilíndrica, se usa el mismo enfoque para resolver las condiciones de contorno en varias capas cilíndricas.

13.17 Tubo separado en dos mitades

Encontrar el potencial dentro de un tubo infinitamente largo, de radio a , separado en dos mitades longitudinales mantenidas a potenciales constantes V y $-V$, respectivamente, y separadas por una brecha muy estrecha.

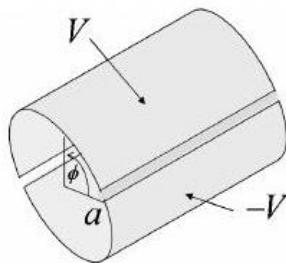


Figure 57: Tubo separado en dos mitades.

Solución:

Puesto que el origen se incluye en la región $r < a$, debemos tener $b_n = 0$, $\forall n$. Medimos el ángulo ϕ como se indica en la figura. Las condiciones de contorno para el potencial Φ son

$$\Phi(a, \phi) = R(a)\Psi(\phi) = \begin{cases} V, & \phi \in (0, \pi) \\ -V, & \phi \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Note que $\Psi(\phi) = -\Psi(-\phi)$. Luego, Ψ debe ser una función impar, es decir $A_n = 0$. La solución general queda

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n \sin(n\phi)}.$$

En $\rho = a$,

$$\Phi(a, \phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a^n \sin(n\phi),$$

lo que equivale a una serie de Fourier para la función $\Phi(a, \phi)$, y cuyos coeficientes se determinan como

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a, \phi) d\phi \\ &= \frac{V}{\pi} \int_0^\pi d\phi - \frac{V}{\pi} \int_\pi^{2\pi} d\phi = 0. \\ C_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a, \phi) \sin(n\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin(n\phi) d\phi - \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} V \sin(n\phi) d\phi \\ &= \frac{V}{\pi n} \cos(n\phi) \Big|_0^\pi - \frac{V}{\pi n} \cos(n\phi) \Big|_\pi^{2\pi} \\ &= \frac{V}{\pi n} [1 - \cos(n\pi) - \cos(n\pi) + \cos(2n\pi)] \\ &= \frac{2V}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)] \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4V}{\pi n}, & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego,

$$\Phi(r, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n-1} \sin[(2n-1)\phi].$$

13.18 Potencial cilindro en forma integral de Poisson

Comenzando con la solución en serie

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\phi - \alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\phi + \beta_n)$$

para el problema de potencial bidimensional con el potencial especificado en la superficie de un cilindro de radio b , evalúe los coeficientes formalmente, sustitúyalos en la serie y súmelos para obtener el potencial dentro el cilindro en forma de [integral de Poisson](#):

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(b, \phi') \frac{b^2 - \rho^2}{b^2 + \rho^2 - 2b\rho \cos(\phi' - \phi)} d\phi'}$$

¿Qué modificación es necesaria si el potencial se desea en la región del espacio limitada por el cilindro y el infinito?

Solución:

Cuando los potenciales y las cargas son uniformes en la dirección z , como es el caso de este problema con el cilindro, el sistema se reduce a un problema bidimensional. La sección transversal circular del cilindro dicta que las coordenadas polares son el sistema de coordenadas bidimensionales más apropiado para usar. No hay cargas involucradas, por lo que necesitamos resolver la ecuación de Laplace. Jackson encontró que [la solución en serie de la ecuación de Laplace en coordenadas polares es](#):

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\phi - \alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\phi + \beta_n)}$$

Debido a que esta es una solución a una ecuación diferencial bidimensional de segundo orden (la ecuación de Laplace), debe haber cuatro coeficientes indeterminados (o conjuntos de coeficientes para soluciones en serie). Por lo tanto, necesitamos cuatro condiciones de contorno; o una condición de contorno en el máximo y mínimo de cada dimensión. Para este problema las condiciones de contorno son:

- (1) mínimo angular: $\Phi(\phi = 0) = \Phi(\phi = 2\pi)$
- (2) mínimo angular: $\Phi(\phi = 2\pi) = \Phi(\phi = 0)$

- (3) mínimo radial: $\Phi(\rho = 0) = \text{finito}$
- (4) máximo radial: $\Phi(\rho = b) = V(\phi)$

Las condiciones de contorno (1) y (2) son las mismas condiciones de contorno que garantizan la periodicidad porque el barrido angular completo se incluye en la región de interés. La aplicación de las condiciones de contorno (1) y (2) conduce a que el coeficiente multiplicado por ϕ se convierta en un número entero. Estas condiciones de contorno ya se han aplicado en la solución dada en Jackson Eq. 2.71. Con dos condiciones de contorno restantes, solo deberíamos tener dos conjuntos de coeficientes indeterminados. Pero la ecuación. 2.71 parece contener cuatro coeficientes indeterminados independientes. En realidad, no todos son independientes y serán atendidos a medida que avancemos.

Cuando aplicamos la condición de contorno (3) vemos de inmediato que: $b_n = 0$ y $b_0 = 0$
por lo que la solución se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\phi - \alpha_n)$$

Debido a que a_n y α_n son arbitrarios en este punto, podemos redefinirlos si queremos obtener esta solución general en una forma más útil. Saque b^{-n} de las constantes a_n .

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\rho}{b}\right)^n \sin(n\phi - \alpha_n)$$

Use $\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) / (2i)$

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2i} \left(\frac{\rho}{b}\right)^n [e^{-i\alpha_n} e^{in\phi} - e^{i\alpha_n} e^{-in\phi}]$$

Redefinir constantes:

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^n [c_n e^{in\phi} + d_n e^{-in\phi}]$$

Ambos términos (así como a_0) se pueden combinar dejando que el índice de suma se extienda a números negativos:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{\rho}{b}\right)^{|n|} e^{in\phi}$$

Aplique la condición de frontera (4) para encontrar:

$$V(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\phi}$$

Multiplique ambos lados por una exponencial compleja e integre:

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-in'\phi} d\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi$$

Ahora reconozca la integral de la derecha como el enunciado de ortogonalidad para exponentiales complejas de modo que:

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-in'\phi} d\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2\pi \delta_{nn'}$$

Aplique el delta y resuelva para c_n :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-in\phi} d\phi$$

Nuestra solución final se convierte en:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' V(\phi') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{|n|} e^{in(\phi-\phi')} \\ \Phi(\rho, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' V(\phi') \left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^n e^{in(\phi-\phi')} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^n e^{-in(\phi-\phi')} \right] \\ \Phi(\rho, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' V(\phi') \left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\rho}{b}\right) e^{i(\phi-\phi')}\right]^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\rho}{b}\right) e^{-i(\phi-\phi')}\right]^n \right] \end{aligned}$$

Usando

$$\sum_0^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' V(\phi') \left[-1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{\rho}{b}\right) e^{i(\phi-\phi')}} + \frac{1}{1 - \left(\frac{\rho}{b}\right) e^{-i(\phi-\phi')}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' V(\phi') \left[\frac{\left((1 - \left(\frac{\rho}{b}\right) e^{-i(\phi-\phi')}) + (1 - \left(\frac{\rho}{b}\right) e^{i(\phi-\phi')}) - (1 - \left(\frac{\rho}{b}\right) e^{i(\phi-\phi')})(1 - \left(\frac{\rho}{b}\right) e^{-i(\phi-\phi')})\right)}{(1 - \left(\frac{\rho}{b}\right) e^{i(\phi-\phi')})(1 - \left(\frac{\rho}{b}\right) e^{-i(\phi-\phi')})} \right] \end{aligned}$$

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(b, \phi') \frac{b^2 - \rho^2}{b^2 + \rho^2 - 2b\rho \cos(\phi' - \phi)} d\phi'$$

Si, en cambio, queremos encontrar el potencial en la región externa al cilindro, intercambiamos b y ρ para encontrar:

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(b, \phi') \frac{\rho^2 - b^2}{b^2 + \rho^2 - 2b\rho \cos(\phi' - \phi)} d\phi'$$

13.19 Mitades de un cilindro

(a) Dos mitades de un cilindro conductor largo y hueco de radio interior b están separadas por pequeños espacios longitudinales en cada lado y se mantienen a diferentes potenciales V_1 y V_2 . Demuestre que el potencial interior está dado por

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2b\rho}{b^2 - \rho^2} \cos \phi \right)$$

donde ϕ se mide desde un plano perpendicular al plano a través del espacio.

(b) Calcule la densidad de carga superficial en cada mitad del cilindro.

Solución:

Debido a la [simetría del problema](#), es evidente que la solución se expresará mejor en [coordenadas cilíndricas](#). Además, debido a que la [solución será independiente de la coordenada \$z\$](#) , el problema se reduce a las dos dimensiones de las [coordenadas polares \$\(\rho, \phi\)\$](#) . Debido a que el [problema no contiene carga](#), el problema se simplifica para [resolver la ecuación de Laplace \$\nabla^2 \Phi = 0\$](#) en [coordenadas polares](#) y aplicar la condición límite $\Phi(\rho = b, \phi) = V(\phi)$ donde:

$$V(\phi) = \begin{cases} V_1 & \text{si } -\pi/2 > \phi > \pi/2 \\ V_2 & \text{si } \pi/2 < \phi < 3\pi/2 \end{cases}$$

La ecuación de Laplace en coordenadas polares es:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0}$$

La separación de variables conduce a la solución general:

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho) (A_0 + B_0 \phi) + \sum_{v,v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v}) (A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi})}$$

Deseamos una solución válida en el origen, que solo es posible si $b_0 = 0$ y $b_v = 0$ para que la solución sea:

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = A_0 + B_0\phi + \sum_{v, v \neq 0} \rho^v (A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi})}$$

Deseamos una única solución válida en todo el rango angular, por lo que el requisito de valor único significa $\Phi(\rho, \phi) = \Phi(\rho, \phi + 2\pi)$. Cuando aplicamos esto, obtenemos:

$$A_0 + B_0\phi + \sum_{v, v \neq 0} \rho^v (A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi}) = A_0 + B_0(\phi + 2\pi) + \sum_{v, v \neq 0} \rho^v (A_v e^{iv(\phi+2\pi)} + B_v e^{-iv(\phi+2\pi)})$$

Lo que lleva a $B_0 = 0$ y $v = n$ donde $n = 1, 2, \dots$ Ahora tenemos:

$$\Phi(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n e^{in\phi} + B_n e^{-in\phi})$$

Ahora aplique la última condición de frontera $\Phi(\rho = b, \phi) = V(\phi)$

$$V(\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b^n (A_n e^{in\phi} + B_n e^{-in\phi}) \quad (36)$$

Primero busquemos el término A_0 . Integre ambos lados en el barrido angular completo.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} V(\phi) d\phi &= \int_0^{2\pi} A_0 d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} b^n \left(A_n \int_0^{2\pi} e^{in\phi} d\phi + B_n \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} d\phi \right) \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_1 d\phi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} V_2 d\phi &= A_0 2\pi \\ V_1 \pi + V_2 \pi &= A_0 2\pi \\ A_0 &= \frac{V_1 + V_2}{2} \end{aligned}$$

Busquemos ahora los coeficientes A_n . Multiplique (36) a ambos lados por $e^{-in'\phi}$ e integre sobre todos los ángulos ϕ :

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-in'\phi} d\phi = A_0 \int_0^{2\pi} e^{-in'\phi} d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} b^n \left(A_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi + B_n \int_0^{2\pi} e^{-i(n+n')\phi} d\phi \right)$$

Usar la condición de ortonormalidad

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi \delta_{k,k'}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi V(\phi) e^{-in\phi} = 2\pi b^n A_n$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi b^n} \int_0^{2\pi} d\phi V(\phi) e^{-in\phi}$$

Reemplaza la forma explícita del potencial en el límite que divide la integral en dos partes:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi b^n} \left[V_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi e^{-in\phi} + V_2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\phi e^{-in\phi} \right] \\ A_n &= \frac{1}{2\pi b^n} \left[V_1 \left[\frac{e^{-in\phi}}{-in} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + V_2 \left[\frac{e^{-in\phi}}{-in} \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \right] \\ A_n &= \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{-n\pi b^n} [V_1 - V_2] \text{ y } A_n = 0 \text{ si } n = \text{ par} \end{aligned}$$

Resolvamos ahora los coeficientes B_n . Tome (36) nuevamente y esta vez multiplique por $e^{in'\phi}$ e integre sobre todo ϕ :

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{in'\phi} d\phi = A_0 \int_0^{2\pi} e^{in'\phi} d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} b^n \left(A_n \int_0^{2\pi} e^{i(n+n')\phi} d\phi + B_n \int_0^{2\pi} e^{i(n'-n)\phi} d\phi \right)$$

Usar la condición de ortonormalidad $\int_0^{2\pi} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi \delta_{k,k'}$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} V(\phi) e^{in\phi} d\phi &= b^n B_n 2\pi \\ B_n &= \frac{1}{2\pi b^n} \int_0^{2\pi} V(\phi) e^{in\phi} d\phi \end{aligned}$$

Reemplaza la forma explícita del potencial en el límite que divide la integral en dos partes:

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{2\pi b^n} \left[V_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi e^{in\phi} + V_2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\phi e^{in\phi} \right] \\
B_n &= \frac{1}{2\pi b^n} \left[V_1 \left[\frac{e^{in\phi}}{in} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + V_2 \left[\frac{e^{in\phi}}{in} \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \right] \\
B_n &= \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{-n\pi b^n} [V_1 - V_2] \text{ y } B_n = 0 \text{ si } n = \text{ par}
\end{aligned}$$

Ahora que hemos encontrado todos los coeficientes, la solución está determinada:

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho, \phi) &= \frac{V_1 + V_2}{2} + \sum_{n=1, \text{ impar}}^{\infty} \rho^n \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{-n\pi b^n} [V_1 - V_2] (e^{in\phi} + e^{-in\phi}) \\
\Phi(\rho, \phi) &= \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1, \text{ impar}}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)/2} \rho^n}{-nb^n} \cos(n\phi) \\
\Phi(\rho, \phi) &= \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2} \frac{4}{\pi} \mathcal{R} \sum_{n=1, \text{ impar}}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^{(n+1)/2}}{n} \left(\frac{\rho e^{i\phi}}{b} \right)^n
\end{aligned}$$

Ahora reconocemos la expansión de Taylor de la arctan :

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}(x) &= \sum_{n=1, \text{ impar}}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^{(n+1)/2}}{n} x^n \\
\Phi(\rho, \phi) &= \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2} \frac{4}{\pi} \mathcal{R} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\rho e^{i\phi}}{b} \right) \right]
\end{aligned}$$

Usando la identidad

$$\tan^{-1}(z) = \frac{i}{2} [\ln(1 - iz) - \ln(1 + iz)]$$

y expandiendo el número complejo z en sus componentes, podemos probar la identidad:

$$\mathcal{R} [\tan^{-1}(z)] = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\mathcal{R}(z)}{1 - |z|^2} \right)$$

Ahora usamos esta identidad:

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2b\rho}{b^2 - \rho^2} \cos \phi \right)$$

(b) Calcule la densidad de carga superficial en cada mitad del cilindro.

Como se derivó anteriormente utilizando una superficie pastillero gaussiana, la densidad de carga superficial en un conductor está relacionada con el potencial de acuerdo con:

$$\sigma = \left[-\epsilon_0 \frac{d\Phi}{dn} \right]_{n=a}$$

Suponemos que el problema es buscar la densidad de carga en la superficie interior del conductor porque ahí es donde conocemos el potencial. En ese caso, la normal a la superficie interior del conductor apunta en la dirección opuesta a la dimensión radial, de modo que $n = -\rho$.

$$\begin{aligned}\sigma &= \left[\epsilon_0 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2b\rho}{b^2 - \rho^2} \cos \phi \right) \right) \right]_{\rho=b} \\ \sigma &= \left[\epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{\pi} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{2b\rho}{b^2 - \rho^2} \cos \phi \right)^2} \right) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2b\rho}{b^2 - \rho^2} \cos \phi \right) \right]_{\rho=b} \\ \sigma &= \left[\epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{\pi} \left(\frac{2b \cos \phi (b^2 + \rho^2)}{(b^2 - \rho^2)^2 + (2b\rho \cos \phi)^2} \right) \right]_{\rho=b} \\ \sigma &= \epsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{\pi b \cos \phi}\end{aligned}$$

13.20 Cuartos de un cilindro

Una variante del problema bidimensional anterior es un cilindro conductor largo y hueco de radio b que se divide en cuartos iguales, los segmentos alternos se mantienen en potencial $+V$ y $-V$.

(a) Resuelva mediante la solución en serie y demuestre que el potencial dentro del cilindro es

$$\phi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b} \right)^{4n+2} \frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}$$

(b) Sume la serie y demuestre que

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho^2 b^2 \sin 2\phi}{b^4 - \rho^4} \right)$$

(c) Grafique las líneas de campo y las equipotenciales

Solución:

(a) Primero bosquejemos el problema (Fig. 58) y definamos nuestro sistema de coordenadas:

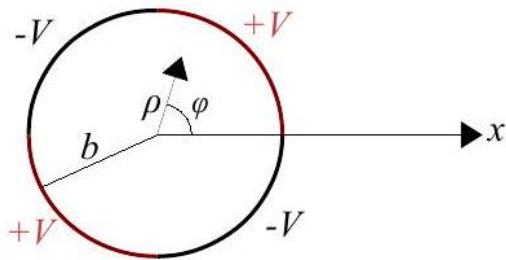


Figure 58: Tubo. Note que en el dibujo aparece φ pero en el desarrollo usará ϕ en minúscula.

La ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0}$$

Intentar una solución de la forma $\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$ conduce a:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = \nu^2 R(\rho) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \Psi(\phi)}{\partial \phi^2} = -\nu^2 \Psi(\phi)$$

que cuando se resuelve conduce a la solución general en serie:

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho) (A_0 + B_0 \phi) + \sum_{\nu, \nu \neq 0} (a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu}) (A_\nu e^{i\nu\phi} + B_\nu e^{-i\nu\phi})}$$

La ecuación de Laplace contiene dos derivadas para cada una de las dos coordenadas, por lo que necesitaremos cuatro condiciones de contorno para determinar de manera única las cuatro constantes de integración. Las cuatro condiciones de contorno son:

$$\Phi(\phi = 0) = \Phi(\phi = 2\pi)$$

$$\Phi(\rho = 0) = \text{finito}$$

$$\Phi(\rho = b) = \begin{cases} V \text{ si } 0 < \phi < \pi/2 \text{ o } \pi < \phi < 3\pi/2 \\ -V \text{ si } \pi/2 < \phi < \pi \text{ o } 3\pi/2 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

La aplicación de las primeras condiciones de contorno obliga a que ν sea un número entero que volvemos a etiquetar como m y $B_0 = 0$.

La aplicación de la segunda condición de contorno conduce a $b_\nu = 0$ y $b_0 = 0$. Los términos anteriores ahora pueden combinarse en una sola constante y unirse en la suma como el caso $m = 0$. Nuestra solución será:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi})$$

Podemos combinar los términos positivos y negativos de m

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \rho^{|m|} e^{im\phi}$$

Ahora aplicamos la última condición de contorno, que por ahora expresamos como $V(\phi)$, no se preocupen de los límites de ϕ por ahora, eso se va a resolver cuando evaluemos la integral más adelante,

$$V(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m b^{|m|} e^{im\phi}$$

Multiplicamos ambos lados por una exponencial compleja e integramos de 0 a 2π

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im'\phi} d\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m b^{|m|} \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi$$

y entonces podemos aplicar la ortogonalidad para exponentiales complejas:

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im'\phi} d\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m b^{|m|} 2\pi \delta_{mm'}$$

dejemos A_m :

$$A_m = \frac{1}{2\pi b^{|m|}} \int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi$$

Ahora aplique la condición límite real a esta integral:

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{1}{2\pi b^{|m|}} \left[V \int_0^{\pi/2} e^{-im\phi} d\phi - V \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-im\phi} d\phi + V \int_{\pi}^{3\pi/2} e^{-im\phi} d\phi - V \int_{3\pi/2}^{2\pi} e^{-im\phi} d\phi \right] \\
 A_m &= \frac{V}{(-im)2\pi b^{|m|}} \left[(e^{-im(\pi/2)} - e^{-im(0)}) - (e^{-im(\pi)} - e^{-im(\pi/2)}) + (e^{-im(3\pi/2)} - e^{-im(\pi)}) - (e^{-im(2\pi)} - e^{-im(\pi/2)}) \right] \\
 A_m &= \frac{V}{(-im)\pi b^{|m|}} [e^{-im\pi/2} - 1 - e^{-im\pi} + e^{-im3\pi/2}]
 \end{aligned}$$

Un cálculo rápido revela que si m es impar, A_m siempre es cero. Con m par tenemos:

$$A_m = \frac{2V}{(-im)\pi b^{|m|}} [(-1)^{m/2} - 1]$$

De modo que la solución final es:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty, \text{ par}}^{\infty} \frac{2V}{im\pi} [1 - (-1)^{m/2}] \left(\frac{\rho}{b}\right)^{|m|} e^{im\phi}$$

Separemos los m casos positivos y negativos.

$$\begin{aligned}
 \Phi(\rho, \phi) &= \sum_{m=0, \text{ par}}^{\infty} \frac{2V}{im\pi} \left(\frac{\rho}{b}\right)^m [1 - (-1)^{m/2}] [e^{im\phi} - e^{-im\phi}] \\
 \Phi(\rho, \phi) &= \sum_{m=0, \text{ par}}^{\infty} \frac{4V}{m\pi} \left(\frac{\rho}{b}\right)^m [1 - (-1)^{m/2}] \sin(m\phi)
 \end{aligned}$$

Para $m = 0, 4, 8, \dots$ se hacen cero, por lo que solo quedan los términos para $m = 2, 6, 10, 14, \dots$ para lo cual la solución se reduce a:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=2,6,10,\dots}^{\infty} \frac{8V}{m\pi} \left(\frac{\rho}{b}\right)^m \sin(m\phi)$$

Hay que hacer un cambio de variable Ahora haga un cambio para las variables $m = 4n + 2$ donde $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{4n+2} \frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}$$

(b) No se si es tan necesario resolver este ítem del problema, tal vez saltarlo y hacer otros ejercicios.

La función seno es la parte imaginaria de una exponencial compleja

$$\Phi(\rho, \phi) = \mathcal{I} \left[\frac{8V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b} e^{i\phi} \right)^{4n+2} \frac{1}{4n+2} \right]$$

Defina $Z = \frac{\rho}{b} e^{i\phi}$ para que terminemos con la forma:

$$\Phi(\rho, \phi) = \mathcal{I} \left[\frac{8V}{\pi} \sum_{m=2,6,10,\dots}^{\infty} \frac{Z^m}{m} \right]$$

Esto se parece a la expansión del logaritmo:

$$\ln(1 + Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^n}{n} (-1)^{n-1}$$

Intentemos que coincidan. Voltee el signo de Z para encontrar:

$$\begin{aligned} \ln(1 - Z) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^n}{n} \\ \ln(1 + Z) + \ln(1 - Z) &= -2 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{Z^n}{n} \\ \ln[(1 + Z)(1 - Z)] &= -2 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{Z^n}{n} \end{aligned}$$

Reemplace Z en esta expresión por Z^2 para encontrar:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \ln [(1 + Z^2)(1 - Z^2)] &= +2 \sum_{n=4,8,12,\dots}^{\infty} \frac{Z^n}{n} \\ \ln[(1 + Z)(1 - Z)] - \frac{1}{2} \ln [(1 + Z^2)(1 - Z^2)] &= -2 \sum_{n=2,6,10,\dots}^{\infty} \frac{Z^n}{n} \end{aligned}$$

Aplicando esta relación a nuestro problema y simplificando, encontramos:

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \mathcal{I} \left[\ln \left[\frac{1 + Z^2}{1 - Z^2} \right] \right]$$

Usando $\mathcal{I}[\ln z] = \operatorname{Arg} z$

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{Arg} \left[\frac{1 + Z^2}{1 - Z^2} \right]$$

Usando:

$$\operatorname{Arg} z = \tan^{-1} \left((-i) \left(\frac{z - z^*}{z + z^*} \right) \right)$$

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1}(-i) \left(\frac{\left(\frac{1+Z^2}{1-Z^2} \right) - \left(\frac{1+Z^2}{1-Z^2} \right)^*}{\left(\frac{1+Z^2}{1-Z^2} \right) + \left(\frac{1+Z^2}{1-Z^2} \right)^*} \right)$$

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left((-i) \left(\frac{Z^2 - Z^{*2}}{1 - Z^2 Z^{*2}} \right) \right)$$

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left((-i) \left(\frac{Z^2 - Z^*}{1 - Z^2 Z^{*2}} \right) \right)$$

Sustituir de nuevo en $Z = \frac{\rho}{b} e^{i\phi}$

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(-i \left(\frac{\frac{\rho^2}{b^2} e^{i2\phi} - \frac{\rho^2}{b^2} e^{-i2\phi}}{1 - \frac{\rho^2}{b^2} e^{i2\phi} \frac{\rho^2}{b^2} e^{-i2\phi}} \right) \right)$$

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho^2 b^2 \sin(2\phi)}{b^4 - \rho^4} \right)$$

(c) Se puede hacer una gráfica numérica de esta solución. También podemos dibujar las equipotenciales y las líneas de campo:

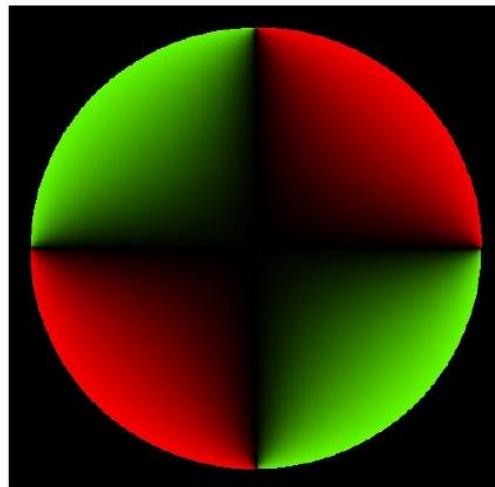


Figure 59: Equipotenciales

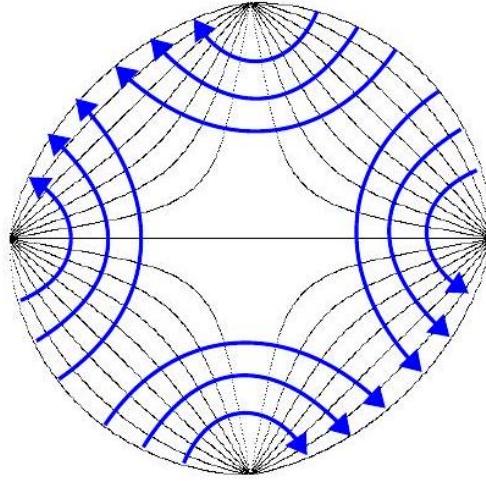


Figure 60: Líneas de campo

13.21 Carga puntual en armónicos esféricos

Expanda el potencial de una carga puntual en armónicos esféricos.

Solución:

Vimos que el potencial producido en \mathbf{r} por una carga puntual $q = 1$ ubicada en \mathbf{r}' se puede expresar en la forma

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos \gamma).}$$

Empleando el teorema de la adición para los esféricos armónicos, podemos escribir

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Supongamos $r_> = r$, y $r_< = r'$. Entonces, comparando la expansión anterior con la solución general:

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta, \phi)],$$

obtenemos

$$A_{lm} = 0$$

$$B_{lm} = \frac{4\pi r'^l}{(2l+1)} Y_{lm}^* (\theta', \phi')$$

de modo que el potencial se hace cero en el infinito.

13.22 Potencial dentro de esfera hueca

El potencial $V_0(\theta)$ se especifica en la superficie de una esfera hueca, de radio a . Encuentre el potencial dentro de la esfera.

Solución:

Partimos con la solución a la Ec. de Laplace con simetría azimutal

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l^{m=0}(\cos \theta)$$

Los coeficientes A_l y B_l se determinan mediante las condiciones de frontera del problema.

En este caso, $B_l = 0$ para todos los l ; de lo contrario, el potencial explotaría en el origen. Por lo tanto,

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (37)$$

En $r = a$, esto debe coincidir con la función especificada $V_0(\theta)$:

$$\Phi(a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) = V_0(\theta) \quad (38)$$

¿Se puede satisfacer esta ecuación, para una elección apropiada de coeficientes A_l ?

Sí: Los polinomios de Legendre (como los senos) constituyen un conjunto completo de funciones, en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ ($0 \leq \theta \leq \pi$).

¿Cómo determinamos las constantes?

Nuevamente, por el truco de Fourier, los polinomios de Legendre (como los senos) son funciones ortogonales:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx &= \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } l' \neq l, \\ \frac{2}{2l+1}, & \text{si } l' = l. \end{cases} \end{aligned}$$

Así, multiplicando la Ec. (38) por $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$ e integrando, tenemos

$$A_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l'+1} = \int_0^\pi V_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

o

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (39)$$

La ecuación (37) es la solución a nuestro problema, con los coeficientes dados por la Ec. (39).

Puede ser difícil evaluar analíticamente integrales de la forma (39) y, en la práctica, a menudo es más fácil resolver la ecuación (38) “a simple vista”.

Por ejemplo, supongamos que se nos dice que el potencial en la esfera es

$$V_0(\theta) = k \sin^2(\theta/2),$$

donde k es una constante. Usando la fórmula del medio ángulo, reescribimos esto como

$$V_0(\theta) = \frac{k}{2}(1 - \cos \theta) = \frac{k}{2} [P_0(\cos \theta) - P_1(\cos \theta)].$$

Poniendo esto en la Ec. (38), leemos inmediatamente que $A_0 = k/2$, $A_1 = -k/(2R)$, y todos los demás A_l desaparecen. Evidentemente,

$$\Phi(r, \theta) = \frac{k}{2} \left[r^0 P_0(\cos \theta) - \frac{r^1}{a} P_1(\cos \theta) \right] = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{r}{a} \cos \theta \right)$$

13.23 Potencial afuera de una esfera hueca

El potencial $V_0(\theta)$ se especifica nuevamente en la superficie de una esfera de radio a . Encuentre el potencial afuera, asumiendo que no hay carga allí.

Solución

Comenzando con la Ec:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l^{m=0}(\cos \theta)$$

En este caso, son los A_l los que deben ser cero (o de lo contrario, Φ no llegaría a cero en ∞), por lo que

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{r^{i+1}} P_i(\cos \theta) \quad (40)$$

En la superficie de la esfera requerimos que

$$\Phi(a, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{a^{i+1}} P_i(\cos \theta) = V_0(\theta)$$

Multiplicando por $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$ e integrando, usamos la relación de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \frac{B_{l'}}{a^{l'+1}} \frac{2}{2l'+1} &= \int_0^\pi V_0(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \\ \text{o} \quad B_l &= \frac{2l+1}{2} a^{l+1} \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (41)$$

Ecuación (40), con los coeficientes dados por la Ec. (41), es la solución a nuestro problema.

13.24 Esfera en presencia de un campo eléctrico

Una esfera de metal sin carga de radio a se coloca en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{z}}$. [El campo empujará la carga positiva hacia la superficie “norte” de la esfera, dejando una carga negativa en la superficie “sur” (Fig 61). Esta carga inducida, a su vez, distorsiona el campo en la vecindad de la esfera.] Encuentre el potencial en la región fuera de la esfera.

Solución:

La esfera es una equipotencial; también podemos ponerla a cero. Entonces, por simetría, todo el plano xy está en el potencial cero. Esta vez, sin embargo, Φ no tiende a cero en z grande. De hecho, lejos de la esfera el campo es $E_0 \hat{\mathbf{z}}$, y por lo tanto

$$\Phi \rightarrow -E_0 z + C.$$

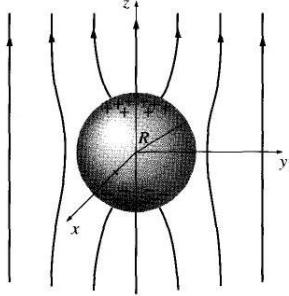


Figure 61: Esfera en campo eléctrico uniforme.

Como $\Phi = 0$ en el plano ecatorial, la constante C debe ser cero. En consecuencia, las condiciones de contorno para este problema son

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } \Phi = 0 \quad \text{cuando } r = a, \\ \text{(ii) } \Phi \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad \text{para } r \gg a. \end{array} \right\}$$

Debemos ajustar estas condiciones de contorno con una función de la forma

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l^{m=0}(\cos \theta)$$

La primera condición produce

$$A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} = 0,$$

o

$$B_l = -A_l a^{2l+1},$$

así

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Para $r \gg a$, el segundo término entre paréntesis es insignificante y, por lo tanto, la condición (ii) requiere que

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

Evidentemente, sólo está presente un término: $l = 1$. De hecho, como $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, podemos ver inmediatamente

$A_1 = -E_0$, todas las otras A_l son cero.

Conclusión:

$$\Phi(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta.$$

El primer término ($-E_0 r \cos \theta$) se debe al campo externo: la contribución atribuible a la carga inducida es evidentemente

$$E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta.$$

Si desea conocer la densidad de carga inducida, se puede calcular de la forma habitual:

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \Big|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (42)$$

Como era de esperar, es positivo en el hemisferio “norte” ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) y negativo en el “sur” ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$).

13.25 Potencial de esfera en presencia de campo eléctrico

Calcular el potencial fuera de una esfera conductora aislada de radio a , sin carga, en presencia de un campo eléctrico externo uniforme.

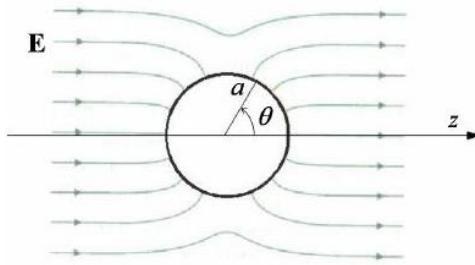


Figure 62: Esfera conductora en un campo eléctrico externo uniforme.

Solución:

Tomemos el campo eléctrico externo en la dirección z , $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$. El sistema tiene simetría azimutal, por lo que buscamos una solución de la forma

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta). \quad (43)$$

Las condiciones de frontera son:

- (a) En $r = a$, $\Phi(a, \theta) = \text{cte}$, puesto que la esfera es conductora.
- (b) Para $r \rightarrow \infty$, Φ debe corresponder al potencial del campo externo $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$.

La condición $\Phi(a, \theta) = \text{cte}$ significa que en $r = a$ el potencial no depende de θ . Luego, el único polinomio de Legendre que debe aparecer en el potencial Ec. (43) evaluado en $r = a$ es el término correspondiente a $l = 0$, para el cual $P_0(\cos \theta) = 1$. Esto implica que

$$\begin{aligned} A_l a^l + B_l a^{-(l+1)} &= 0, \forall l > 0 \\ \Rightarrow B_l &= -A_l a^{2l+1}, \forall l > 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Puesto que $E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = E$, la condición para el potencial en $r \rightarrow \infty$ debe tener la forma $\Phi = -Ez$, donde $z = r \cos \theta$. Es decir, la condición de frontera en $r \rightarrow \infty$ es

$$\Phi(r \rightarrow \infty, \theta) = -Er \cos \theta,$$

lo cual significa que solamente los términos $A_l r^l P_l(\cos \theta)$ sobreviven en la solución Ec. (43) para poder satisfacer esta condición para $r \rightarrow \infty$. De estos términos, sólo el término $l = 1$, que tiene la forma $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, satisface la condición de Φ para $r \rightarrow \infty$. Los demás términos deben ser cero; es decir,

$$A_l = 0, \quad B_l = 0, \quad \text{si } l \neq 1.$$

Manteniendo sólo el término $l = 1$ para $r \rightarrow \infty$ en la Ec. (43), tenemos

$$\Phi(r \rightarrow \infty, \theta) = A_1 r \cos \theta = -Er \cos \theta,$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} A_1 &= -E, \\ B_1 &= -A_1 a^3 = Ea^3 \end{aligned}$$

donde hemos usado la Ec. (44).

Entonces, la solución Ec. (43) para $r > a$, con el único término sobreviviente $l = 1$, queda

$$\boxed{\Phi(r, \theta) = -Er \cos \theta + \frac{Ea^3}{r^2} \cos \theta.}$$

Esta solución satisface ambas condiciones de frontera en $r = a$ y en $r \rightarrow \infty$. El primer término corresponde al potencial asociado al campo externo, si no hubiera esfera presente, y el segundo término corresponde al potencial producido por la carga inducida sobre la esfera conductora.

La densidad de carga inducida sobre la esfera se puede calcular mediante la relación $E_n = 4\pi\sigma$ para una superficie conductora, donde $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$; esto da

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= \left. \frac{1}{4\pi} E_r \right|_{r=a} = - \left. \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} \\ &= \frac{3E}{4\pi} \cos \theta.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &> 0, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \sigma(\theta) &< 0, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi.\end{aligned}$$

La carga total inducida sobre la esfera aislada es

$$\begin{aligned}Q_{\text{total}} &= \int \sigma da \\ &= \frac{3E}{4\pi} a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{3E}{2} a^2 \frac{1}{2} \int_0^\pi d(\sin^2 \theta) = \frac{3E}{4} a^2 \sin^2 \theta \Big|_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

13.26 Capa esférica con densidad de carga superficial

La superficie de una capa esférica de radio a tiene una densidad de carga $\sigma_0(\theta)$. Encuentre el potencial resultante dentro y fuera de la esfera.

Solución

Por supuesto, podría hacer esto mediante integración directa:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_0}{r} da,$$

pero la separación de variables es a menudo más fácil. Para la región interior tenemos

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (r \leq a) \quad (45)$$

(no hay términos B_l : explotan en el origen); en la región exterior

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (r \geq a) \quad (46)$$

(sin términos A_l , no llegan a cero en el infinito). Estas dos funciones deben estar unidas por las condiciones de contorno apropiadas en la superficie misma. Primero, el potencial es continuo en $r = a$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (47)$$

De ello se deduce que los coeficientes de los polinomios de Legendre son iguales:

$$B_l = A_l a^{2l+1}. \quad (48)$$

(Para probar eso formalmente, multiplique ambos lados de la Ec. (47) por $P_l(\cos \theta) \sin \theta$ e integre desde 0 hasta π , usando la relación de ortogonalidad.) Segundo, la derivada radial de Φ sufre una discontinuidad en la superficie:

$$\left(\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta).$$

Así

$$-\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l}{a^{l+2}} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l a^{l-1} P_l(\cos \theta) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta)$$

o, usando Ec. (48):

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l a^{l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0(\theta).$$

A partir de aquí, los coeficientes se pueden determinar utilizando el truco de Fourier:

$$A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 a^{l-1}} \int_0^\pi \sigma_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (49)$$

Las ecuaciones (45) y (46) constituyen la solución a nuestro problema, con los coeficientes dados por las Ecs. (48) y (49).

Por ejemplo, si

$$\sigma_0(\theta) = k \cos \theta = k P_1(\cos \theta),$$

para alguna constante k , entonces todos los A_l son cero excepto $l = 1$, y

$$A_1 = \frac{k}{2\epsilon_0} \int_0^\pi [P_1(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = \frac{k}{3\epsilon_0}.$$

Por lo tanto, el potencial dentro de la esfera es

$$\Phi(r, \theta) = \frac{k}{3\epsilon_0} r \cos \theta \quad (r \leq a),$$

mientras que fuera de la esfera

$$\Phi(r, \theta) = \frac{ka^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (r \geq a)$$

En particular, si $\sigma_0(\theta)$ es la carga inducida sobre una esfera metálica en un campo externo $E_0 \hat{\mathbf{z}}$, entonces $k = 3\epsilon_0 E_0$ (Ec. (42)), entonces el potencial interior es $E_0 r \cos \theta = E_0 z$, y el campo es $-E_0 \hat{\mathbf{z}}$ - exactamente correcto para cancelar el campo externo, como por supuesto debería ser. Fuera de la esfera, el potencial debido a esta carga superficial es

$$E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta.$$

13.27 Método de imágenes conductor plano

Una carga puntual q se lleva a una posición a una distancia d de un conductor plano infinito mantenido a potencial cero. Usando el método de las imágenes, encuentre:

- (a) la densidad de carga superficial inducida en el plano y graficarla;
- (b) la fuerza entre el plano y la carga usando la ley de Coulomb para la fuerza entre la carga y su imagen;
- (c) la fuerza total que actúa sobre el plano integrando $\sigma^2/2\epsilon_0$ sobre todo el plano;
- (d) el trabajo necesario para remover la carga q desde su posición hasta el infinito
- (e) la energía potencial entre la carga q y su imagen [compare la respuesta con la parte d y discuta].
- (f) Encuentre la respuesta a la parte d en electronvoltios para un electrón originalmente a un angstrom de la superficie.

Solución:

Colocamos la carga puntual q en $z = d$ y su carga imagen $-q$ en $z = -d$. El potencial total es entonces solo el potencial debido a estas dos cargas puntuales:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$

a) La densidad de carga superficial se puede encontrar usando:

$$\left[\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial n} \right]_{\text{sobre } S}$$

donde $\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial n}$ es la derivada normal en la superficie. En este caso, la dirección normal es la dirección z , por lo que

$$\begin{aligned} & \left[\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial z} \right]_{z=0} \\ & \left[\sigma = -\epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-(z-d)}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} + \frac{(z+d)}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right] \right]_{z=0} \\ & \sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Como se esperaba, la densidad de carga inducida es negativa (suponiendo que q sea positiva) y mayor en $x = y = 0$. Ya que estamos en eso, calculemos la carga inducida total

$$Q = \int \sigma da$$

Esta integral, sobre el plano xy , podría hacerse en coordenadas cartesianas, con $da = dx dy$, pero es un poco más fácil usar coordenadas polares (r, θ) , con $r^2 = x^2 + y^2$ y $da = r dr d\theta$. Luego

$$\sigma(r) = \frac{-qd}{2\pi (r^2 + d^2)^{3/2}}$$

y

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-qd}{2\pi (r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\phi = \frac{qd}{\sqrt{r^2 + d^2}} \Big|_0^\infty = -q$$

Evidentemente, la carga total inducida en el plano es $-q$.

(b) La carga q es atraída hacia el plano, debido a la carga negativa inducida. Calculemos la fuerza de atracción. Dado que el potencial en la vecindad de q es el mismo que en el problema analógico (el que tiene $+q$ y $-q$ pero no tiene conductor), también lo es el campo y, por lo tanto, la fuerza:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2} \hat{\mathbf{z}}$$

La carga real es atraída hacia el conductor. La fuerza se vuelve más fuerte a medida que se acerca.

(c) La fuerza sobre el conductor debe ser igual y opuesta a la fuerza sobre la partícula, que derivamos en la parte *b*. Se supone que debemos calcularlo de todos modos. Calculemos la fuerza como la interacción de la carga superficial y la partícula, en oposición a la interacción de la partícula con su imagen.

$$\frac{d\mathbf{F}}{da} = \sigma \mathbf{E}$$

El incremento de fuerza por unidad de área que se muestra a la izquierda es la presión electrostática. Pero el campo también está relacionado con la carga superficial (al despreciar la parte del campo que daría lugar a una fuerza propia) según:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

de modo que

$$\frac{d\mathbf{F}}{da} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad \text{Presión electrostática en la superficie de un conductor.}$$

La fuerza total es simplemente la presión multiplicada por un parche incremental de área, integrado en todos los parches de área:

$$d\mathbf{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \int \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} da \hat{\mathbf{n}} \\
\mathbf{F} &= \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q^2 d^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + d^2)^3} \hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{F} &= \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q^2 d^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + d^2)^3} \hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{F} &= -\hat{\mathbf{z}} \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q^2 d^2}{8\pi} \left[\frac{1}{(\rho^2 + d^2)^2} \right]_0^\infty \\
\mathbf{F} &= \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2} \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

d) El trabajo necesario para llevar la carga al infinito es:

$$\begin{aligned}
W &= \int_d^\infty F(l) dl \\
W &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_d^\infty \frac{1}{l^2} dl \\
W &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{l} \right]_d^\infty \\
W &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}
\end{aligned}$$

(e) La energía potencial entre la carga q y su imagen:

La energía potencial es el doble del trabajo requerido para mover la partícula al infinito. La razón por la que no coinciden es porque la partícula de la imagen no es una partícula real. Debemos recordar que en realidad no hay campos dentro del conductor. El cálculo de energía potencial anterior cuenta la energía de los campos en el conductor, que en realidad no existen.

$$\begin{aligned}
W &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \\
W &= -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d}
\end{aligned}$$

A medida que muevo q hacia el conductor, solo trabajo sobre q . Es cierto que la carga inducida se mueve sobre el conductor, pero esto no me cuesta nada, ya que todo el conductor está a potencial cero. Por el contrario, si introduzco simultáneamente dos cargas puntuales (sin conductor), trabajo sobre ambas y el total es el doble.

(f) Ahora encontramos la respuesta a la parte *d* en electronvoltios para un electrón originalmente a un angstrom de la superficie.

$$W = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$$

$$W = \frac{(1e)^2}{16\pi (5.526 \times 10^7 e/Vm) (10^{-10} m)}$$

$$W = 3.6 \text{ eV}$$

13.28 Método imágenes carga dentro de esfera hueca

Usando el método de las imágenes, analice el problema de una carga puntual *q* dentro de una esfera conductora hueca, conectada a tierra, de radio interior *a*. Encontrar

- (a) el potencial dentro de la esfera;
- (b) la densidad de carga superficial inducida;
- (c) la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre *q*.

(d) ¿Hay algún cambio en la solución si la esfera se mantiene a un potencial fijo *V*? Si la esfera tiene una carga total *Q* en sus superficies interior y exterior?

Solución:

Este problema es idéntico al problema de una carga puntual fuera de una esfera conductora, excepto que cambiamos la posición de la carga de la imagen y la carga real.

- (a) Debido a la simetría, el potencial seguirá siendo el mismo:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{1}{\left| \frac{y}{a}\mathbf{x} - \frac{a}{y}\mathbf{y} \right|} \right]$$

(b) La densidad de carga superficial se evaluará con el mismo valor, excepto que la normal ahora apunta en la dirección opuesta, por lo que debemos agregar un signo negativo:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{y} \right) \frac{1 - \frac{a^2}{y^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos\theta \right)^{3/2}}$$

Tenga en cuenta que para una carga real dentro de la esfera, $y < a$, por lo que el numerador termina siendo negativo, por lo que la carga total sigue

siendo la carga opuesta de q como lo fue para el caso de la carga real fuera de la esfera.

(c) La fuerza es la misma que antes pero está dirigida en la dirección opuesta:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^3 \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^{-2} \hat{\mathbf{y}}$$

(d) Nada cambia. Si se agrega la carga Q a la esfera, la carga inducida en la superficie interior de la esfera aún debe ser $-q$, dejando una carga $Q - q$ en la superficie exterior de la esfera.

13.29 Línea cargada y cascarón esférico conductor

Una línea cargada de largo $2d$ con carga total Q tiene una densidad lineal de carga que varía como $(d^2 - z^2)$, donde z es la distancia medida desde el punto medio. Un cascarón esférico conductor (a tierra) de radio $b > d$ está centrado en el punto medio de la línea cargada (Fig. [64]).

- a) Encuentre el potencial en el espacio como una expansión de polinomios de Legendre.
- b) Calcule la densidad superficial de carga inducida sobre el cascarón.
- c) Calcule el límite $d \ll b$ y compare con el caso correspondiente.

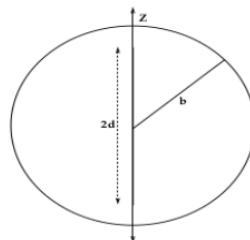


Figure 63: Línea cargada y cascarón esférico conductor

Solución:

- a) Se debe resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) = -4\pi\rho(r, \theta, \phi),$$

para lo cual se calculará primero la función de Green del sistema, la cual cumple con

$$\nabla^2 G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (50)$$

En coordenadas esféricas, la delta de Dirac puede expandirse de la forma

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{\delta(r - r')}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \\ &= \frac{\delta(r - r')}{(r')^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'), \end{aligned} \quad (51)$$

por lo que se propone la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r, r') Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

Usando la identidad para los armónicos esféricos

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \phi),$$

se deduce que

$$\nabla^2 G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'). \quad (52)$$

Reemplazando la Ec. (51) y la Ec. (52) en la Ec. (50) se llega a la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} = -4\pi \frac{\delta(r - r')}{(r')^2}, \quad (53)$$

la cual para $r \neq r'$ corresponde a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - l(l+1) R_{lm} = 0$$

con solución

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r < r' \\ C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > r' \end{cases}$$

Como la solución no puede diverger en $r = 0$, se deduce que $B_{lm} = 0$, mientras que de la condición de borde

$$\psi(r = b) = 0,$$

se obtiene

$$D_{lm} = -C_{lm} b^{2l+1}$$

y la solución queda

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < r' \\ C_{lm} [r^l - b^{2l+1} r^{-(l+1)}] & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} r^l_{<} [r^l_{>} - b^{2l+1} r^{-l+1}_{>}],$$

donde $r_{<} = \min(r, r')$ y $r_{>} = \max(r, r')$. Para encontrar la constante E_{lm} se debe integrar la discontinuidad $r = r'$ en la Ec.(4), esto se hace pensando en una lámina de grosor $\epsilon \rightarrow 0$ tal que $r_{>} = r' + \epsilon y r_{<} = r' - \epsilon$, luego

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} l(l+1) R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \delta(r - r') dr,$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left. \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para $R_{lm}(r, r')$ se obtiene

$$E_{lm} r^2_{>} r^l_{<} \left[lr^{l-1}_{>} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{r^{l+2}_{>}} \right] - l E_{lm} r^{l+1}_{<} \left[r^l_{>} - \frac{b^{2l+1}}{r^{l+1}_{>}} \right] = -4\pi.$$

Considerando $\epsilon \rightarrow 0$ tal que $r_{>} = r_{<} = r'$ se reescribe

$$E_{lm} (r')^{l+2} \left[l (r')^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+2}} \right] - l E_{lm} (r')^{l+1} \left[(r')^l - \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+1}} \right] = -4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = -\frac{4\pi}{(2l+1)b^{2l+1}},$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = -\frac{4\pi r_<^l}{(2l+1)b^{2l+1}} \left[r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = \frac{4\pi r_<^l}{(2l+1)} \left[\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right]$$

y la función de Green es:

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{r_<^l}{(2l+1)} \left[\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right].$$

La densidad de carga es proporcional a $d^2 - z^2$, pero

$$z = r' \cos(\theta'),$$

luego se tiene que

$$d^2 - z^2 = d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta')$$

y la densidad de carga del sistema será

$$\rho(r', \theta', \phi') = \rho_0 \frac{[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta')]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)],$$

donde la delta angular considera ambos lados del alambre. Como la carga encerrada en la esfera es Q , se escribe

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho dV \\ &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^d \frac{[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta')]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] (r')^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi' \\ &= 2\pi \rho_0 \int_0^\pi \int_0^d [d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta')] [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] dr' d\theta' \\ &= 4\pi \rho_0 \int_0^d [d^2 - (r')^2] dr' \\ &= 4\pi \rho_0 \left[d^2 (r') - \frac{(r')^3}{3} \right] \Big|_0^d \\ &= \frac{8\pi \rho_0 d^3}{3} \end{aligned}$$

luego la constante es

$$\rho_0 = \frac{3Q}{8\pi d^3}$$

y la densidad de carga es

$$\rho(r', \theta', \phi') = \frac{3Q}{8\pi d^3} \frac{[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta')]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)].$$

El potencial eléctrico viene dado por la expresión

$$\psi(r, \theta, \phi) = \int \rho(r', \theta', \phi') G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') dV - \frac{1}{4\pi} \oint \psi(r, \theta, \phi) \frac{\partial G}{\partial n_y} dy,$$

donde la primera integral considera la contribución al potencial por densidades de carga y la segunda integral considera las condiciones de borde sobre el problema. Como la esfera está conectada a tierra, la segunda integral es nula, luego el potencial eléctrico será

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) = & \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta')]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] \\ & r'_< \left[\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right] (r')^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

y usando que

$$Y_{lm}^*(\theta', \phi') = N_l^m e^{-im\phi'} P_l^m [\cos(\theta')],$$

el potencial se reescribe como

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) = & \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{N_l^m Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} \int e^{-im\phi'} P_l^m [\cos(\theta')] \left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] \\ & [\delta(\theta') + \delta(\theta' - \pi)] r'_< \left[\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right] dr' d\theta' d\phi'. \end{aligned}$$

Notar ahora que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{-im\phi'} d\phi' &= \frac{i}{m} \int_0^{-2im\pi} e^u du \\
&= \frac{i}{m} [e^{-2im\pi} - 1] \\
&= \frac{i}{m} [\cos(2m\pi) - i \sin(2m\pi) - 1] \\
&= 0 \quad \forall m \neq 0,
\end{aligned} \tag{54}$$

luego $m = 0$ tal que $\psi(r, \theta, \phi) \neq 0$ y se tiene

$$\begin{aligned}
\psi(r, \theta, \phi) &= \frac{3Q\pi}{d^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{N_l^0 Y_l^0(\theta, \phi)}{(2l+1)} \int P_l^0[\cos(\theta')] \left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] [\delta(\theta') + \delta(\theta' - \pi)] \\
&\quad r'_< \left[\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>}{b^{2l+1}} \right] dr' d\theta'.
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$Y_l^0(\theta, \phi) = N_l^0 P_l^0[\cos(\theta)] \quad N_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

y el potencial queda

$$\begin{aligned}
\psi(r, \theta, \phi) &= \frac{3Q}{4d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] \int P_l^0[\cos(\theta')] \left[d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] [\delta(\theta') + \delta(\theta' - \pi)] \\
&\quad r'_< \left[\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>}{b^{2l+1}} \right] dr' d\theta' \\
&= \frac{3Q}{4d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] [P_l^0(1) + P_l^0(-1)] \int \left[d^2 - (r')^2 \right] r'_< \left[\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>}{b^{2l+1}} \right] dr'
\end{aligned}$$

Como $P_l^0(1) = 1$ y $P_l^0(-1) = (-1)^l P_l^0(1) = (-1)^l$, se tienen las opciones

$$P_l^0(1) + P_l^0(-1) = \begin{cases} 2 & \text{si } l \text{ es par} \\ 0 & \text{si } l \text{ es impar} \end{cases}$$

luego se concluye que

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] \int r'_< \left[d^2 - (r')^2 \right] \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>}{b^{2l+1}} \right) dr'.$$

La integral dependerá del tramo, luego para $r < r' < d$ se obtiene y el potencial queda

$$\psi_1(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \left[d^2 \frac{r^{l+1}}{(l+1)} - \frac{r^{l+3}}{(l+3)} \right].$$

$$\begin{aligned} \int_0^r r_{<}^l \left[d^2 - (r')^2 \right] \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) dr' &= \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^r (r')^l \left[d^2 - (r')^2 \right] dr' \\ &= \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \left[d^2 \int_0^r (r')^l dr' - \int_0^r (r')^{l+2} dr' \right] \\ &= \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \left[\frac{d^2}{(l+1)} (r')^{l+1} \Big|_0^r - \frac{(r')^{l+3}}{(l+3)} \Big|_0^r \right] \\ &= \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \left[d^2 \frac{r^{l+1}}{(l+1)} - \frac{r^{l+3}}{(l+3)} \right] \end{aligned}$$

Para el caso $r' < r < d$ se tendrá

$$\begin{aligned} \int_r^d r_{<}^l \left[d^2 - (r')^2 \right] \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) dr' &= r_{<}^l \int_r^d \left[d^2 - (r')^2 \right] \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) dr' \\ &= r_{<}^l \left[d^2 \int_r^d \frac{dr'}{(r')^{l+1}} - \frac{d^2}{b^{2l+1}} \int_r^d (r')^l dr' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b^{2l+1}} \int_r^d (r')^{l+2} dr' - \int_r^d \frac{dr'}{(r')^{l-1}} \right] \\ &= r_{<}^l \left[\frac{(r')^{l+3}}{(l+3)b^{2l+1}} \Big|_r^d - \frac{d^2 (r')^{l+1}}{(l+1)b^{2l+1}} \Big|_r^d - \frac{d^2}{l (r')^l} \Big|_r^d \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(l-2) (r')^{l-2}} \Big|_r^d \right] \\ &= r_{<}^l \left[\frac{(l+3)d^2 r^{l+1} - (l+1)r^{l+3} - 2d^{l+3}}{(l+1)(l+3)b^{2l+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(l-2)r^{-l}d^2 - r^{2-l} + 2d^{2-l}}{l(l-2)} \right] \end{aligned}$$

y el potencial queda

$$\psi_2(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] r_<^l \left[\frac{(l+3)d^2 r^{l+1} - (l+1)r^{l+3} - 2d^{l+3}}{(l+1)(l+3)b^{2l+1}} + \frac{(l-2)r^{-l}d^2 - r^{2-l} + 2d^{2-l}}{l(l-2)} \right]$$

Por último, para el caso $r' < d < r$ se escribe

$$\begin{aligned} \int_0^d r_<^l \left[d^2 - (r')^2 \right] \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr' &= \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^d (r')^l \left[d^2 - (r')^2 \right] dr' \\ &= \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[d^2 \int_0^d (r')^l dr' - \int_0^d (r')^{l+2} dr' \right] \\ &= \left(\frac{1}{r_>^{l+1} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}} \right) \left[\frac{d^2}{(l+1)} (r')^{l+1} \Big|_0^d - \frac{(r')^{l+3}}{(l+3)} \Big|_0^d \right] \\ &= \frac{2d^{l+3}}{(l+1)(l+3)} \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) \end{aligned}$$

y el potencial queda

$$\psi_3(r, \theta, \phi) = 3Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)} \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right).$$

b) La discontinuidad en el campo eléctrico se relaciona con la densidad de carga superficial a través de la relación

$$\left. \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right|_{r=b} = -4\pi\sigma,$$

deduciéndose entonces que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right|_{r=b} &= -3Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)} \left[\frac{l+1}{r_>^{l+2}} + \frac{lr_>^{l-1}}{b^{2l+1}} \right] \Big|_{r=b} \\ &= -3Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l (2l+1) P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)b^{l+2}} \end{aligned}$$

por lo que la densidad de carga superficial es

$$\sigma = \frac{3Q}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l (2l+1) P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)b^{l+2}}.$$

c) En el límite $d \ll b$ se puede aproximar la expresión con $l = 0$, luego el potencial queda

$$\psi_3(r, \theta, \phi) \approx Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

y la densidad de carga queda

$$\sigma \approx \frac{Q}{4\pi b^2}.$$

13.30 Línea cargada y cascarón esférico conductor

Una linea cargada de longitud $2d$ con una carga total Q tiene una densidad lineal de carga que varía como $(d^2 - z^2)$, donde z es la distancia medida desde el punto medio. Un cascarón esférico conductor puesto a tierra de radio $b > d$ está centrado en el punto medio de la línea cargada.

- a) Encuentre el potencial en el espacio como una expansión de polinomios de Legendre.
- b) Calcule la densidad superficial de carga inducida sobre el cascarón.
- c) Calcule el límite $d \ll b$ y compare con el caso correspondiente.

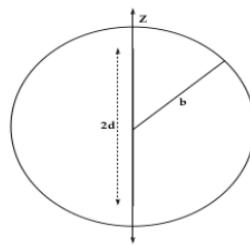


Figure 64: Línea cargada y cascarón esférico conductor

Solución:

Este problema incluye tanto una [distribución de carga](#) como una [condición de contorno](#). [Debemos usar el método de la función de Green para incluir ambos](#). La solución del método de la función de Green para las condiciones de contorno de [Dirichlet](#) es:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_D d^3 \mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi} \oint \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) da'$$

En este caso particular, la condición de contorno establece que el [potencial es cero en la superficie esférica](#). Esto hace que toda la integral de superficie en la solución de la función de Green sea igual a cero. La solución es entonces:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_D d^3 \mathbf{x}'$$

La densidad de carga que satisface la descripción anterior es:

$$\rho(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{8\pi d^3} \frac{(d^2 - r^2)}{r^2} [\delta(\cos \theta - 1) + \delta(\cos \theta + 1)] \text{ si } r < d \text{ y } \rho(r, \theta, \phi) = 0 \text{ } r > d$$

Se requirió r^2 en el denominador para convertir la densidad de carga lineal en coordenadas esféricas. Las constantes al frente se encontraron integrando sobre todo el espacio y estableciendo el resultado igual al cargo total Q . La solución ahora se convierte en:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(\mathbf{x}') G_D r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{3Q}{16\pi\epsilon_0 d^3} \left[\int_0^d (d^2 - r'^2) G_D(\theta' = 0) dr' + \int_0^d (d^2 - r'^2) G_D(\theta' = \pi) dr' \right]$$

La función de Green para este problema se encuentra colocando una unidad de carga puntual dentro de una esfera conductora, usando el método de la imagen para simular los efectos de la esfera conductora, escribiendo el potencial debido a la carga puntual y la carga imagen y expandiendo la solución en armónicos esféricos. La función de Green entonces resulta:

$$G_D = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_-^l}{r_+^{l+1}} - \frac{(rr')^l}{b^{2l+1}} \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Este problema tiene simetría azimutal, por lo que es obvio que todos los términos de la suma deben ser cero excepto los términos $m = 0$ (ver también (54)). Después de expandir la definición de los armónicos esféricos y mantener solo los términos $m = 0$, la función de Green se simplifica a:

$$G_D = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{r_-^l}{r_+^{l+1}} - \frac{(rr')^l}{b^{2l+1}} \right] P_l(\cos\theta') P_l(\cos\theta)$$

La integral necesita la función de Green solo en ciertos ángulos, por lo que ahora evaluamos en esos ángulos:

$$G_D(\theta' = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{r_-^l}{r_+^{l+1}} - \frac{(rr')^l}{b^{2l+1}} \right] P_l(\cos\theta) \text{ y } G_D(\theta' = \pi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{r_-^l}{r_+^{l+1}} - \frac{(rr')^l}{b^{2l+1}} \right] (-1)^l P_l(\cos\theta)$$

Ahora podemos evaluar la solución final:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 d^3} \sum_{l=0, \text{ par}}^{\infty} P_l(\cos\theta) \int_0^d dr' (d^2 - r'^2) \left[\frac{r_-^l}{r_+^{l+1}} - \frac{(rr')^l}{b^{2l+1}} \right]$$

Si $r > d$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 d^3} \sum_{l=0, \text{ par}}^{\infty} P_l(\cos\theta) \int_0^d dr' (d^2 - r'^2) \left[\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{(rr')^l}{b^{2l+1}} \right]$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{x}) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0, \text{ par}}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{d^l}{(l+1)(l+3)b^{l+1}} \left[\left(\frac{b}{r}\right)^{l+1} - \left(\frac{r}{b}\right)^l \right]}.$$

Si $r < d$ la integral debe dividirse en dos partes, la parte $r > r'$ y la parte $r < r'$:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 d^3} \sum_{l=0, \text{ par}}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left[\int_0^r dr' (d^2 - r'^2) \left[\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{(rr')^l}{b^{2l+1}} \right] \right. \\ \left. + \int_r^d dr' (d^2 - r'^2) \left[\frac{r'^l}{r'^{l+1}} - \frac{(rr')^l}{b^{2l+1}} \right] \right]$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 d^3} \sum_{l=0, \text{ par}}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left[d^2 \left(\frac{2l+1}{l(l+1)} \right) + r^2 \left(\frac{2l+1}{(2-l)(3+l)} \right) \right. \\ \left. + r^l \left(\frac{1}{d^{l-2}} \left(\frac{2}{l(l-2)} \right) - \left(\frac{2}{(l+3)(l+1)} \right) \frac{d^{l+3}}{b^{2l+1}} \right) \right]$$

(b) Calcule la densidad de carga superficial inducida en el cascarón.

$$\sigma = \left[-\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\text{sobreS}}$$

Queremos que la densidad de carga superficial sea inducida en el lado interior del caparazón, de modo que su normal apunte hacia adentro, en la dirección opuesta a la dimensión radial: $n = -r$

$$\sigma = \left[\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r=b}$$

Se necesita el potencial en la superficie $r = b$, que es mayor que d , por lo que usamos la solución $r > d$:

$$\sigma = \left[\epsilon_0 \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{l=0, \text{ par}}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{d^l}{(l+1)(l+3)b^{l+1}} \left[\left(\frac{b}{r}\right)^{l+1} - \left(\frac{r}{b}\right)^l \right] \right]_{r=b} \\ \sigma = -\frac{3Q}{4\pi b^2} \sum_{l=0, \text{ par}}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{(2l+1)}{(l+1)(l+3)} \left(\frac{d}{b}\right)^l$$

(c) Discuta sus respuestas a la parte a y b en el límite que $d \ll b$.

Cuando $d \ll b$, el potencial de mayor importancia se convierte en el caso donde $r > d$ que se encontró como:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0, \text{ par}}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{1}{(l+1)(l+3)} \left(\frac{d}{b}\right)^l \left[\left(\frac{b}{r}\right)^{l+1} - \left(\frac{r}{b}\right)^l \right]$$

El hecho de que $d \ll b$ significa que $(d/b) \ll 1$ de modo que el término $(d/b)^l$ se convierte en cero para todos los términos excepto $l = 0$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right]$$

Este es solo el potencial debido a una carga puntual Q en el centro de una esfera conductora de radio b .

El mismo razonamiento se aplica a la densidad de carga superficial, de modo que solo queda el término $l = 0$:

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi b^2}$$

Esto es solo una carga total $-Q$ repartida uniformemente sobre una esfera de radio b .

13.31 Plano infinito y semiesfera

Suponga un plano infinito conductor a tierra ($\psi = 0$) con una semiesfera dieléctrica de radio $r < a$ en el origen del plano conductor.

- a) Asuma un campo eléctrico asintótico uniforme E_0 en la dirección $-\hat{z}$ para $r \rightarrow \infty$. Encuentre el potencial en todo el espacio.
- b) Encuentre la función de Green para $r > a$.

Solución:

- a) Puesto que $m = 0$ por simetría azimutal, el potencial eléctrico tiene la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] Y_l^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ \sum_{l=0}^{\infty} [C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}] Y_l^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

como no debe diverger en $r = 0$ entonces $B_l = 0$. Por otro lado, se tiene un campo eléctrico constante asintótico E_0 en la dirección z , por lo que al usar la relación $\mathbf{E} = -\nabla\psi$, se obtiene

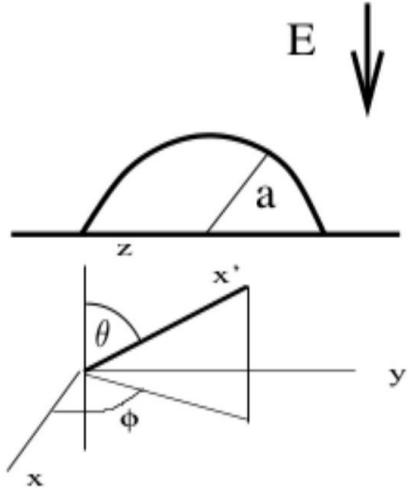


Figure 65: Semiesfera dieléctrica sobre el plano conductor.

$$\psi_{r \rightarrow \infty}(r, \theta, \phi) = - \int_z^0 E_0 (-\hat{z}) \cdot dz' \hat{z} = -E_0 z = -E_0 r \cos(\theta).$$

Ahora, evaluando $r \rightarrow \infty$ en el potencial propuesto,

$$\psi_{r \rightarrow \infty}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l Y_l^0(\theta, \phi)$$

e igualando ambas expresiones

$$-E_0 r \cos(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l Y_l^0(\theta, \phi),$$

deduciéndose que $l = 1$ (de manera que calcen los exponentes de r), luego se escribe

$$r C_1 Y_1^0(\theta, \phi) = -r E_0 \cos(\theta).$$

Usando que

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta),$$

$$r C_1 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta) = -r E_0 \cos(\theta).$$

se concluye el valor de la constante

$$C_1 = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}E_0$$

Reescribiendo el potencial para $l = 1$ se obtiene

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} rA_1 Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ [rC_1 + r^{-2}D_1] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

y por continuidad en $r = a$,

$$A_1 = C_1 + a^{-3}D_1,$$

con lo que se vuelve a reescribir

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} [rC_1 + a^{-3}rD_1] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ [rC_1 + r^{-2}D_1] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

Puesto que en dieléctricos la componente paralela de la **corriente de desplazamiento** \mathbf{D} es continua, es decir,

$$(\mathbf{D}_{\text{ext}}|_{r=a} - \mathbf{D}_{in}|_{r=a}) \cdot \hat{r} = 0$$

y usando que $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = -\epsilon\nabla\psi$, con ϵ la constante dieléctrica, se tiene que solo sobreviven las componentes del gradiente paralelas a \hat{r} (las derivadas respecto a r), así

$$\begin{aligned} 0 &= (C_1 - 2D_1a^{-3}) Y_1^0(\theta, \phi) - \epsilon(C_1 + D_1a^{-3}) Y_1^0(\theta, \phi) \\ &= C_1 - \epsilon C_1 - 2D_1a^{-3} - \epsilon D_1a^{-3} \\ &= -C_1(\epsilon - 1) - D_1a^{-3}(\epsilon + 2) \end{aligned}$$

y despejando la constante D_1 se concluye

$$D_1 = -C_1a^3 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)$$

y el potencial eléctrico queda

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} rC_1 \left[1 - \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ rC_1 \left[1 - \frac{a^3}{r^3} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

o, uniendo ambas soluciones,

$$\psi(r, \theta, \phi) = rC_1 \left[1 - \frac{a^3}{r^3} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right] Y_1^0(\theta, \phi).$$

Usando los valores de C_1 e $Y_1^0(\theta, \phi)$ se obtiene

$$\boxed{\psi(r, \theta, \phi) = -rE_0 \cos(\theta) \left[1 - \frac{a^3}{r_>^3} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right].}$$

b) La función de Green para una esfera en el vacío es

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi)$$

pero al tenerse dos espacios separados por el dieléctrico, y al ser una semiesfera, los armónicos esféricos deben cumplir con las condiciones angulares $\psi(\theta = 0) = \psi(\theta = \pi) = 0$, lo que obliga a redefinir los armónicos esféricos modificados

$$\Omega_{lm}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi) \sin(\theta) \quad \Omega_{lm}^*(\theta', \phi') = Y_{lm}^*(\theta', \phi') \sin(\theta'),$$

que cumplen las condiciones de borde angulares. Así nos queda

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi) \Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1)} \begin{cases} A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r < a \\ \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} + C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > a \end{cases}$$

donde el término $r_<^l r_>^{-(l+1)}$ aparece solo fuera del dieléctrico puesto que **dentro se tienen cargas libres que cumplen con la ecuación de Laplace (la densidad de carga se considera por fuera de la superficie)**. Luego $B_{lm} = 0$ tal que no diverge en $r = 0$ y $C_{lm} = 0$ tal que no diverge en $r \rightarrow \infty$, así

$$\boxed{G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi) \Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1)} \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < a \\ \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} + D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > a \end{cases}}$$

c) Por continuidad en $r = a$ se escribe

$$A_{lm} = \frac{1}{r_>^{l+1}} + \frac{D_l}{a^{2l+1}}, \quad (55)$$

mientras que de la continuidad en la componente paralela de la **corriente de desplazamiento \mathbf{D}** se deduce la relación

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\left(-\frac{\partial G_{\text{ext}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} - \left(-\frac{\partial G_{in}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \right] \cdot \hat{r} \\
&= \left(\frac{\partial G_{in}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \frac{\partial G_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=a} \right) \cdot \hat{r} \\
&= l\epsilon A_{lm} a^{l-1} - \left[\frac{la^{l-1}}{r_>} - (l+1) \frac{D_{lm}}{a^{l+2}} \right] \\
\epsilon A_{lm} &= \frac{1}{r_>} - \frac{(l+1)D_{lm}}{la^{2l+1}}. \tag{56}
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones compuesto por la Ec. (55) y la Ec. (56) se obtiene:

$$\begin{aligned}
A_{lm} &= \frac{2l+1}{r_>^{l+1}[l(\epsilon+1)+1]}, \\
D_{lm} &= -\frac{la^{2l+1}(\epsilon-1)}{r_>^{l+1}[l(\epsilon+1)+1]},
\end{aligned}$$

luego la función de Green para $r < a$ será

$$G_{r<a}(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi)\Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{[l(\epsilon+1)+1]} \left(\frac{r^l}{r_>} \right)$$

y para $r > a$ será

$$G_{r>a}(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi)\Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1)} \left[\frac{r_<^l}{r_>} - \left(\frac{1}{r_>} \right) \frac{la^{2l+1}(\epsilon-1)}{r_>^{l+1}[l(\epsilon+1)+1]} \right].$$

d) Usando imágenes.

13.32 Anillo entre un condensador

Considere un condensador formado por dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia L y mantenidas a una diferencia de potencial V_0 . Además, dentro de este condensador tenemos un anillo de radio a , con una densidad de carga lineal λ constante, puesto en un plano paralelo a las placas, y a la mitad de distancia entre ellas. Construya una función de Green para este problema y resuelva el potencial entre las placas, ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie de los conductores?

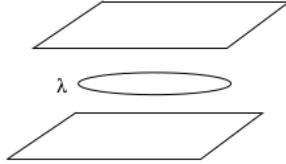


Figure 66: Anillo entremedio de un condensador

Solución:

Se debe resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi(r, \phi, z) = -4\pi\rho(r, \phi, z),$$

para lo cual se calculará la función de Green del sistema, la que cumple con la igualdad

$$\nabla^2 G(r, \phi, z; r', \phi', z') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{y})$$

y, puesto que en coordenadas cilíndricas la delta de Dirac se expande de la forma

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{y}) &= \frac{\delta(r - r')}{r'} \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \\ &= \frac{\delta(r - r')}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right), \end{aligned}$$

se propone la función de Green

$$G(r, \phi, z; r', \phi', z') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mn}(r, r') e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right).$$

Desarrollando el Laplaciano en coordenadas cilíndricas se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 G &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} A_{mn} + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 A_{mn} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) A_{mn} \right] \end{aligned}$$

e igualando a la delta se llega a la expresión

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) A_{mn} = -4\pi \frac{\delta(r - r')}{r'},$$

donde al tomar $r \neq r'$ se obtiene la ecuación de Bessel modificada con solución

$$A_{mn}(r, r') = \begin{cases} B_{mn} I_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) + C_{mn} K_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) & \text{si } r < r' \\ D_{mn} I_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) + E_{mn} K_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) & \text{si } r > r' \end{cases}$$

La función $K_m(r)$ diverge en $r = 0$, mientras que $I_m(r)$ diverge en $r \rightarrow \infty$, luego se deduce que $C_{mn} = D_{mn} = 0$ y se escribe

$$A_{mn}(r, r') = \begin{cases} B_{mn} I_m(kr) & \text{si } r < r' \\ E_{mn} K_m(kr) & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando las soluciones,

$$A_{mn}(r, r') = F_{mn} I_m(kr_<) K_m(kr_>),$$

donde $r_< = \min(r, r')$ y $r_> = \max(r, r')$. Integrando la discontinuidad en $r = r'$, se escribe

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} A_{mn} \left[\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right] r dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r - r') dr,$$

donde la segunda integral es cero por continuidad de la función A_{mn} y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega entonces a la igualdad

$$\left. \left(r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} = -4\pi,$$

y reemplazando la solución para A_{mn} y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r_< = r'$, se obtiene

$$\begin{aligned} -4\pi &= F_{mn} r_> I_m(kr_<) K'_m(kr_>) - F_{mn} r_< I'_m(kr_<) K_m(kr_>) \\ &= F_{mn} [r' I_m(kr') K'_m(kr') - r' I'_m(kr') K_m(kr')] \\ &= F_{mn} r' \left[I_m\left(\frac{n\pi}{L}r'\right) K'_m\left(\frac{n\pi}{L}r'\right) - I'_m\left(\frac{n\pi}{L}r'\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L}r'\right) \right], \end{aligned}$$

por lo que la constante será

$$F_{mn} = -\frac{4\pi}{r' \left[I_m \left(\frac{n\pi}{L} r' \right) K'_m \left(\frac{n\pi}{L} r' \right) - I'_m \left(\frac{n\pi}{L} r' \right) K_m \left(\frac{n\pi}{L} r' \right) \right]}$$

y la función de Green queda

$$G(r, \phi, z; r', \phi', z') = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im(\phi-\phi')} \sin(kz) \sin(kz') I_m(kr_<) K_m(kr_>)}{r' [I_m(kr') K'_m(kr') - I'_m(kr') K_m(kr')]}.$$

El anillo tiene densidad lineal λ , radio a y se ubica a una distancia $L/2$ de las placas, por lo que la densidad de carga vendrá dada por

$$\rho(r', \phi', z') = \lambda \delta(r' - a) \delta\left(z' - \frac{L}{2}\right).$$

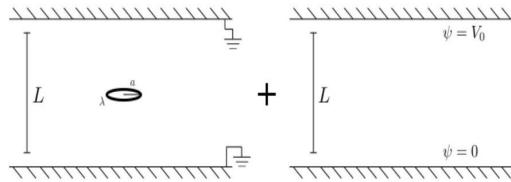


Figure 67: Anillo entremedio de un condensador

Para resolver el problema (notar que la segunda integral en la expresión general para el potencial no es cero debido a que las superficies están sometidas a una diferencia de potencial distinta de cero), [se utiliza el principio de superposición para dividir el sistema en un caso donde se tiene la densidad de carga \(anillo\) ubicada entre las dos placas a potencial cero \(a tierra\) y otro donde no se tiene densidad de carga y las superficies están sometidas al potencial distinto de cero](#). En el primer caso se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \phi, z) &= \int \rho(r', \phi', z') G(r, \phi, z; r', \phi', z') dV - \frac{1}{4\pi} \oint \psi(r, \phi, z) \frac{\partial G}{\partial n_y} dy \\ &= -4\pi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{e^{im(\phi-\phi')} \sin(kz) \sin(kz') I_m(kr_<) K_m(kr_>)}{r' [I_m(kr') K'_m(kr') - I'_m(kr') K_m(kr')]} \delta(r' - a) \\ &\quad \delta\left(z' - \frac{L}{2}\right) r' dr' d\phi' dz' \\ &= -4\pi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(kz) I_m(kr_<) K_m(kr_>) e^{im\phi}}{[I_m(ka) K'_m(ka) - I'_m(ka) K_m(ka)]} \int_0^{2\pi} e^{-im\phi'} d\phi', \end{aligned}$$

pero la integral solo es distinta de cero para $m = 0$, por lo que

$$\psi_1(r, \phi, z) = -8\pi^2 \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(kz) I_0(kr_<) K_0(kr_>)}{[I_0(ka)K'_0(ka) - I'_0(ka)K_0(ka)]}.$$

Ahora, usando que

$$I_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right)K'_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) - I'_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right)K_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) = \frac{L}{n\pi a},$$

se obtiene el potencial eléctrico

$$\psi_1(r, \phi, z) = -\frac{8\pi^3 \lambda a}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right).$$

El segundo caso debe cumplir con la ecuación de Laplace (puesto que ya no hay una densidad de carga entre las placas) y las condiciones de borde

$$\psi_2(z = L) = V_0 \quad \psi_2(z = 0) = 0$$

y notando que

$$\psi_2(r, \phi, z) = \frac{V_0}{L}z$$

cumple con las condiciones de borde y con que

$$\nabla^2 \psi_2 = \nabla \cdot \nabla \psi_2 = \nabla \cdot \left(0, 0, \frac{V_0}{L}\right) = 0,$$

se concluye que $\psi_2(r, \phi, z)$ es el potencial eléctrico para el segundo caso. De esta manera, el potencial eléctrico total es

$$\psi(r, \phi, z) = \frac{V_0}{L}z - \frac{8\pi^3 \lambda a}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right)$$

y el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\nabla \psi = \left[\frac{8\pi^4 \lambda a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right) - \frac{V_0}{L} \right] \hat{z} = E_z \hat{z}$$

Ahora, se tiene que el campo eléctrico externo no es influenciado por el anillo, luego los potenciales son constantes, con $\psi_{\text{inf}} = 0$ y $\psi_{\text{sup}} = V_0$,

deduciéndose que el campo externo es nulo, por lo que tomando $\hat{n} = \pm\hat{z}$ se obtiene

$$E_z \hat{z} \cdot \hat{z} = 4\pi\sigma_{sup} \quad E_z \hat{z} \cdot (-\hat{z}) = 4\pi\sigma_{inf}$$

y las densidades de carga (evaluando $z = 0$ y $z = L$) son

$$\begin{aligned}\sigma_{sup} &= \frac{2\pi^3\lambda a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_{<}\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_{>}\right) - \frac{V_0}{4\pi L}, \\ \sigma_{inf} &= \frac{V_0}{4\pi L} - \frac{2\pi^3\lambda a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_{<}\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_{>}\right).\end{aligned}$$

13.33 Anillo entre un condensador

Considere un condensador formado por dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia L y mantenidas a una diferencia de potencial V_0 . Además, dentro de este condensador tenemos un anillo de radio a , con una densidad de carga lineal λ constante, puesto en un plano paralelo a las placas, y a la mitad de distancia entre ellas. Construya una función de Green para este problema y resuelva el potencial entre las placas, ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie de los conductores?

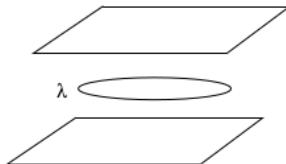


Figure 68: Anillo entremedio de un condensador

Solución:

(a) Para resolver el problema se utiliza el principio de superposición para dividir el sistema en un caso donde se tiene la densidad de carga (anillo) ubicada entre las dos placas a potencial cero (a tierra) y otro donde no se tiene densidad de carga y las superficies están sometidas al potencial distinto de cero.

(notar que la segunda integral en la expresión general para el potencial no es cero debido a que las superficies están sometidas a una diferencia de potencial distinta de cero),

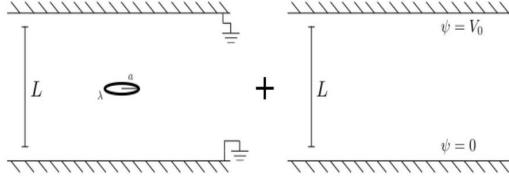


Figure 69: Anillo entremedio de un condensador

En el primer caso se tiene que

$$\Phi_1(r, \phi, z) = \int \rho(r', \phi', z') G(r, \phi, z; r', \phi', z') dV$$

El anillo tiene densidad lineal λ , radio a y se ubica a una distancia $L/2$ de las placas, por lo que la densidad de carga vendrá dada por

$$\rho(r', \phi', z') = \lambda \delta(r' - a) \delta\left(z' - \frac{L}{2}\right).$$

y utilizamos la función de Green para los planos de la ayudantía:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right)$$

Luego

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \phi, z) &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{4\lambda}{L} \delta(r' - a) \delta\left(z' - \frac{L}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \\ &\quad I_m\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right) r' dr' d\phi' dz' \end{aligned}$$

Integramos, evaluando las deltas, y en el caso de la exponencial el único término que no se anula es cuando $m = 0$, sí nos da

$$\Phi_1(r, \phi, z) = \frac{8\pi\lambda}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) a$$

- El segundo caso debe cumplir con la ecuación de Laplace (puesto que ya no hay una densidad de carga entre las placas) y las condiciones de borde

$$\Phi_2(z = L) = V_0 \quad \Phi_2(z = 0) = 0$$

entonces el potencial que cumple con estas condiciones es

$$\Phi_2(r, \phi, z) = \frac{V_0}{L}z$$

y además cumple con

$$\nabla^2 \Phi_2 = 0,$$

De esta manera, el potencial eléctrico total es

$$\boxed{\Phi(r, \phi, z) = \frac{V_0}{L}z + \frac{8\pi a \lambda}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right).}$$

(b) El campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi = -\left[\frac{V_0}{L} + \frac{8\pi^2 a \lambda}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) \right] \hat{z} = E_z \hat{z}$$

Ahora, se tiene que el campo eléctrico externo no es influenciado por el anillo, luego los potenciales son constantes, con $\Phi_{\text{inf}} = 0$ y $\Phi_{\text{sup}} = V_0$, así que el campo externo es nulo, por lo que tomando $\hat{n} = \pm \hat{z}$ se obtiene

$$E_z \hat{z} \cdot \hat{z} = 4\pi \sigma_{\text{sup}} \quad E_z \hat{z} \cdot (-\hat{z}) = 4\pi \sigma_{\text{inf}}$$

y las densidades de carga (evaluando $z = 0$ y $z = L$) son

$$\boxed{\sigma_{\text{inf}} = -\frac{V_0}{4\pi L} - \frac{2\pi a \lambda}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right)}$$

$$\boxed{\sigma_{\text{sup}} = \frac{V_0}{4\pi L} + \frac{2\pi a \lambda}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right)}$$

13.34 Esferas concéntricas

Dos esferas concéntricas tienen radios $a, b (b > a)$ y cada una está dividida en dos hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interior y el hemisferio inferior de la esfera exterior se mantienen en potencial V . Los otros hemisferios están a potencial cero. Determine el

potencial en la región $a \leq r \leq b$ como una serie en polinomios de Legendre. Incluya términos por lo menos hasta $l = 4$. Verifique su solución con los resultados conocidos en el caso límite $b \rightarrow \infty$ y $a \rightarrow 0$.

Solución:

El esquema de este problema es:

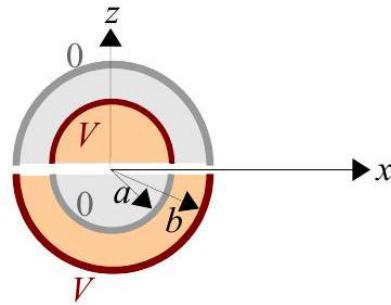


Figure 70: Dos esferas concéntricas.

Debido a la geometría esférica del problema y la ausencia de carga, debemos resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Utilizando el método de separación de variables se llega a la solución general:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi) &= \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) (A_{m=0} + B_{m=0} \phi) P_l^{m=0}(\cos \theta) \\ &+ \sum_{m \neq 0, l} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}) P_l^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

Vemos que hay **simetría azimutal**, por lo que la solución para el potencial no será una función de ϕ . La única forma de hacer que la solución general sea independiente de ϕ es para el caso $m = 0$ y $B_{m=0} = 0$:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l^{m=0}(\cos \theta)$$

En otros problemas donde debemos tener una solución válida en el origen, B_l debe ser cero para evitar que la solución explote en el origen. **Pero en**

este problema no buscamos una solución válida en el origen, por lo que no podemos usar esta restricción.

Si Aplicamos la condición de borde: $\Phi(r = a) = V_1$ donde $V_1 = V$ si $\theta < \pi/2$ y $V_1 = 0$ si $\theta > \pi/2$

$$V_1 = \sum_l (A_l a^l + B_l a^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

(no se compliquen con los límites de θ todavía, eso va a salir cuando fijemos los límites de integración).

Ahora multiplicamos ambos lados por $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$ e integramos (es decir aplicamos proyector)

$$\int_0^\pi V_1 P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_l (A_l a^l + B_l a^{-l-1}) \int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Usando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l} \\ \int_0^\pi V_1 P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \sum_l (A_l a^l + B_l a^{-l-1}) \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l} \\ \int_0^\pi V_1 P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= (A_l a^l + B_l a^{-l-1}) \frac{2}{2l+1} \end{aligned}$$

Despejamos y reemplazamos la forma explícita de V_1

$$A_l a^l + B_l a^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Hacemos un cambio de variable: $x = \cos \theta, dx = -\sin \theta d\theta$

$$A_l a^l + B_l a^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_0^1 P_l(x) dx \quad (57)$$

Ahora aplicamos la otra condición de contorno: $\Phi(r = b) = V_2$ donde $V_2 = 0$ si $\theta < \pi/2$ y $V_2 = V$ si $\theta > \pi/2$

$$V_2 = \sum_l (A_l b^l + B_l b^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

Multiplicando ambos lados por $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$ e integrando

$$\int_0^\pi V_2 P_l'(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_l (A_l b^l + B_l b^{-l-1}) \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\implies A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi V_2 P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Introduzcamos la forma explícita de V_2

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_{\pi/2}^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Haciendo el cambio de variable: $x = \cos \theta, dx = -\sin \theta d\theta$

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_{-1}^0 P_l(x) dx$$

Hacemos otro cambio de variable $x \rightarrow -x$ y usando la identidad:

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V (-1)^l \int_0^1 P_l(x) dx$$

(58)

Las Ec. (57) y (58) forman un sistema de ecuaciones, que al resolver nos dan A_l y B_l respectivamente:

$$A_l = \frac{(-a^{l+1} + (-1)^l b^{l+1})}{(-a^{2l+1} + b^{2l+1})} \left(\frac{2l+1}{2} \right) V \int_0^1 P_l(x) dx$$

$$B_l = \frac{a^{l+1} b^{2l+1} - (-1)^l a^{2l+1} b^{l+1}}{-a^{2l+1} + b^{2l+1}} \left(\frac{2l+1}{2} \right) V \int_0^1 P_l(x) dx$$

La solución final es entonces:

$$\Phi = \frac{V}{2} \sum_l (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx \frac{[(a^{l+1} - (-1)^l b^{l+1}) r^l - ab(a^l b^{2l} - (-1)^l a^{2l} b^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Podemos hacer la integral, pero debemos tener cuidado de hacer los casos $l = 0$ y $l > 0$ por separado:

$$l = 0 : \quad \int_0^1 P_0(x) dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$\begin{aligned}
l > 0 : \quad & \int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} \int_0^1 \frac{d}{dx} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)] dx \\
& \int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]_0^1 \\
& \int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(1) - P_{l-1}(1) - P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)] \\
& \int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)]
\end{aligned}$$

La solución final se convierte en:

$$\Phi = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[(a^{l+1} - (-1)^l b^{l+1}) r^l - ab(a^l b^{2l} - (-1)^l a^{2l} b^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Cabe señalar que $[P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] = 0$ cuando l es par, por lo que todos los términos pares desaparecen. Como l solo es impar, entonces $(-1)^l = -1$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[(a^{l+1} + b^{l+1}) r^l - a^{l+1} b^{l+1} (b^l + a^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Expresándolo como una suma expandida hasta el término $l = 4$:

$$\begin{aligned}
\Phi(r, \theta, \phi) = & \frac{V}{2} \left[1 + \left(\frac{3}{2} \right) \frac{[(a^2 + b^2) r - a^2 b^2 (b + a) r^{-2}]}{a^3 - b^3} \cos \theta \right. \\
& \left. + \left(\frac{-7}{16} \right) \frac{[(a^4 + b^4) r^3 - a^4 b^4 (b^3 + a^3) r^{-4}]}{a^7 - b^7} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]
\end{aligned}$$

Para ver el comportamiento de la solución cuando $b \rightarrow \infty$, dejamos b siempre es el denominador de una fracción:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[((a/b)^{l+1} + 1) (r/b)^l - (1 + (a/b)^l) (a/r)^{l+1}]}{(a/b)^{2l+1} - 1} P_l(\cos \theta)$$

Entonces cuando $b \rightarrow \infty$, $(a/b) \rightarrow 0$, y $(r/b) \rightarrow 0$ de modo que:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} P_l(\cos \theta)$$

Esto se puede expresar explícitamente como una suma expandida (se muestra hasta el término $l = 4$):

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} \left[1 + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos \theta + \left(\frac{-7}{16}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^4 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]$$

Podemos verificar esto resolviendo el problema directamente. Con simetría azimutal, incluido el rango angular completo y la condición de que la solución no explote en el infinito, la solución general se convierte en:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = A_0 + \sum_l B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta)$$

Aplique la condición de contorno (derivada de argumentos físicos):

$$\Phi(r \rightarrow \infty) = V/2$$

$$V/2 = A_0$$

Aplicar la condición de frontera: $\Phi(r = a) = V_1$ donde $V_1 = V$ si $\theta < \pi/2$ y $V_1 = 0$ si $\theta > \pi/2$

$$V_1 = \frac{V}{2} + \sum_l B_l a^{-l-1} P_l(\cos \theta)$$

Multiply both sides by $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ where $l' > 0$ and integrate.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi V_1 P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= B_l a^{-l-1} \frac{2}{2l+1} \\ B_l &= \frac{2l+1}{2} a^{l+1} \int_0^\pi V_1 P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ B_l &= \frac{2l+1}{2} V a^{l+1} \int_0^1 P_l(x) dx \\ B_l &= \frac{V}{2} a^{l+1} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \text{ where } l \text{ is odd} \\ \Phi(r, \theta, \phi) &= \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{ odd}} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

This matches the solution found above.

El comportamiento de la solución cuando $a \rightarrow 0$ es:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{ odd}}^\infty [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[(a^{l+1} + b^{l+1}) r^l - a^{l+1} b^{l+1} (b^l + a^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} - \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{ odd}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \left(\frac{r}{b}\right)^l P_l(\cos \theta)$$

Esto se puede expresar explícitamente como una suma expandida hasta el término $l = 4$:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right) \frac{r}{b} \cos \theta - \left(\frac{-7}{16}\right) \left(\frac{r}{b}\right)^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]$$

We can check this by solving the problem outright. With azimuthal symmetry, the full angular range included, and the condition that the solution does not blow up at the origin, the general solution becomes:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

Apply the boundary condition: $\Phi(r = b) = V_2$ where $V_2 = 0$ if $\theta < \pi/2$ and $V_2 = V$ if $\theta > \pi/2$

$$V_2 = \sum_l A_l b^l P_l(\cos \theta)$$

Multiply both sides by $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ and integrate.

$$\int_0^\pi V_2 P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_l A_l b^l \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^\pi V_2 P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = A_l b^l \frac{2}{2l+1}$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2} b^{-l} \int_0^\pi V_2 P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2} V b^{-l} \int_{-1}^0 P_l(x) dx$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2} V b^{-l} (-1)^l \int_0^1 P_l(x) dx$$

$$A_l = \frac{-V}{2} b^{-l} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \text{ where } l \text{ is odd, and } A_0 = \frac{V}{2}$$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} - \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{ odd}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \left(\frac{r}{b}\right)^l P_l(\cos \theta)$$

This matches the solution found above.

13.35 Esfera con potencial en superficie

Encontrar la expresión del potencial producido dentro y fuera de una esfera no conductora de radio a , que posee un potencial $V(\theta)$ sobre su superficie.

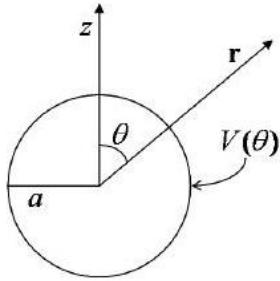


Figure 71: Esfera con potencial $V(\theta)$ sobre su superficie.

Solución:

La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con simetría azimutal tiene la forma

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta)$$

Los coeficientes A_l y B_l se determinan mediante las condiciones de frontera del problema.

Para $r < a$, dentro de la esfera, no hay cargas eléctricas. Luego, el potencial Φ debe ser finito para $r \rightarrow 0$, lo que implica que $B_l = 0, \forall l$. Es decir, la solución interna debe poseer la forma

$$\Phi_{\text{in}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r < a \quad (59)$$

Para $r > a$, fuera de la esfera, debemos tener $\Phi \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$. Esto implica que $A_l = 0$ para $r > a$. Por lo tanto, la solución externa debe tener la forma

$$\Phi_{\text{ex}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta), \quad r > a.$$

Las soluciones interna y externa deben coincidir en $r = a$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = V(\theta),$$

lo que implica

$$\begin{aligned} A_l a^l &= B_l a^{-(l+1)} \\ \Rightarrow B_l &= A_l a^{2l+1}. \end{aligned}$$

En $r = a$, la solución interna da

$$\Phi_{\text{in}}(a, \phi) = V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta). \quad (60)$$

La Ec. (60) representa la expansión de la función $V(\theta)$ en una serie de polinomios de Legendre para $\theta \in [0, \pi]$. Luego,

$$A_l = \frac{(2l+1)}{2a^l} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (61)$$

Entonces el potencial puede escribirse

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), & r < a. \\ \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), & r > a. \end{cases}$$

donde el coeficiente A_l determinado por la Ec. (61).

13.36 Potencial dentro de dos hemisferios

Encontrar el potencial dentro de una esfera de radio a , la cual está dividida en dos hemisferios sujetos a potenciales constantes V y $-V$, respectivamente.

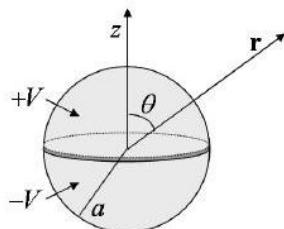


Figure 72: Esfera dividida en hemisferios sujetos a potenciales V y $-V$.

Solución:

En este caso,

$$V(\theta) = \begin{cases} V, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

El coeficiente A_l en la Ec. (61) puede calcularse explícitamente

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{(2l+1)}{2a^l} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{(2l+1)}{2a^l} V \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] \end{aligned}$$

En términos de la variable $x = \cos \theta$, las integrales definidas corresponden a

$$\int_0^1 P_l(x) dx - \int_{-1}^0 P_l(x) dx = 2 \int_0^1 P_l(x) dx, \quad \text{para } l \text{ impar.}$$

Luego, de acuerdo a la propiedad (iv)

$$A_l = \frac{(2l+1)}{a^l} V \int_0^1 P_l(x) dx, \quad \text{para } l \text{ impar}$$

mientras que $A_l = 0$ para l par. Usando la propiedad (iv) de los polinomios de Legendre, obtenemos

$$A_l = \frac{(2l+1)}{a^l} (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(l-2)!!}{(l+1)!!} V, \quad l \text{ impar} \quad (62)$$

donde

$$\begin{aligned} (l-2)!! &\equiv (l-2)(l-4)(l-6)\dots 4 \times 2 \\ (l+1)!! &\equiv (l+1)(l-1)(l-3)\dots 5 \times 3 \times 1. \end{aligned}$$

Luego, el potencial para $r < a$ está dado por la Ec. (59) con los coeficientes A_l dados en la Ec. (62),

$$\Phi(r, \theta) = V \sum_{l \text{ impar}} (-1)^{\frac{l-1}{2}} (2l+1) \left(\frac{r}{a}\right)^l \frac{(l-2)!!}{(l+1)!!} P_l(\cos \theta), \quad r < a.$$

Los primeros términos de esta expresión son

$$\Phi(r, \theta) = V \left[\frac{3}{2} \frac{r}{a} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos \theta) + \dots \right].$$

13.37 Expansión de carga puntual en Pol. Legendre

Es mejor la otra solución 2.4.3

Expanda el potencial de una carga puntual en polinomios de Legendre.

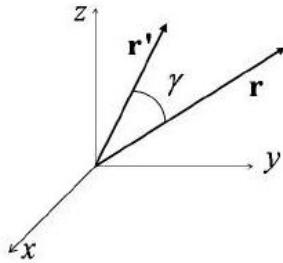


Figure 73: Expansión de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ en polinomios de Legendre.

Solución:

Consideremos el potencial producido en la posición \mathbf{r} por una carga puntual $q = 1$ ubicada en \mathbf{r}' ,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Si escogemos \mathbf{r}' en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, el sistema tiene simetría azimutal con respecto al eje z . Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{1/2}} \\ &= \Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta), \end{aligned} \quad (63)$$

donde $\theta = \gamma$ es el ángulo entre \mathbf{r}' y \mathbf{r} . Esta relación es válida $\forall \theta$, en particular para $\theta = 0$, lo cual da

$$\Phi(r, 0) = \frac{1}{|r - r'|} = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}].$$

La expresión para $\Phi(r, 0)$ se puede interpretar como una condición de frontera para el potencial cuando $\theta = 0$.

Supongamos $r' < r$, es decir, $r'/r \equiv x < 1$. Entonces,

$$\frac{1}{|r - r'|} = (r - r')^{-1} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r'}{r}\right)^{-1}.$$

Utilizamos la siguiente expansión en serie para $x < 1$,

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Luego, para $r' < r$,

$$\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^l = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}.$$

Entonces, para $r' < r$ y $\forall \theta$, la Ec. (63) da

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \theta).$$

Si $r' > r$, una expansión similar se puede obtener intercambiando $r \leftrightarrow r'$. En general, si γ es el ángulo entre \mathbf{r}' y \mathbf{r} , podemos escribir la expansión

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos \gamma)$$

donde $r_<$ es el menor entre r y r' , y $r_>$ es el mayor entre r y r' .

13.38 Green para carga frente a esfera conectada a tierra

Expanda la función de Green en polinomios de Legendre para el problema de una carga frente a una esfera conductora conectada a tierra.

Solución:

Tenemos que la función de Green para una esfera es:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r' |\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'^2} \mathbf{r}'|}. \quad (64)$$

donde a es el radio de la esfera y, tanto r como r' , son mayores que a . Digamos que \mathbf{r}' va en dirección $\hat{\mathbf{z}}$, y llamemos θ al ángulo entre \mathbf{r}' y \mathbf{r} .

El primer término en la función de Green (64) se puede expresar como:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l P_l(\cos \theta).$$

Ahora expandamos el segundo término de (64) considerando el caso en que \mathbf{r}' y \mathbf{r} son paralelos,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{r'}}{\left[r - \left(\frac{a}{r'} \right)^2 r' \right]} &= \frac{\frac{a}{r'}}{r \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^2 \frac{r'}{r} \right]} \\ &= \frac{\frac{a}{rr'}}{\left[1 - \frac{a^2}{rr'} \right]} \end{aligned}$$

y expandiendo usando la [serie geométrica](#):

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-s} &= \sum_{l=0}^{\infty} s^l : \\ \frac{a}{rr'} \left[1 - \frac{a^2}{rr'} \right]^{-1} &= \frac{a}{rr'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^l. \end{aligned}$$

Luego, podemos escribir el segundo término de la función de Green como

$$\frac{a}{r' |\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'^2} \mathbf{r}'|} = \frac{a}{r_{>} r_{<}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{r_{>} r_{<}} \right)^l P_l(\cos \theta),$$

donde $r_{>} r_{<} = rr'$. Entonces, la función de Green (64) expandida en polinomios de Legendre es:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l P_l(\cos \theta) - \frac{a}{r_{>} r_{<}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{r_{>} r_{<}} \right)^l P_l(\cos \theta)$$

factorizando

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r_{>}^{l+1}} \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

(65)

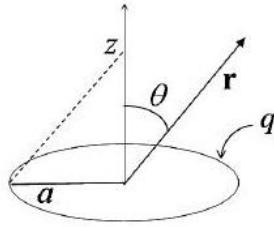


Figure 74: Potencial producido por un aro cargado.

13.39 Potencial producido por aro

Calcular el potencial producido en todo el espacio por una carga q uniformemente distribuida sobre un aro de radio a .

Solución:

Tomemos el eje z perpendicular al plano del aro y que pasa por su centro. Este sistema posee simetría azimutal. El diferencial de potencial producido sobre el eje z por un elemento del aro de longitud ds es

$$d\Phi(z) = \frac{q}{2\pi a} \frac{ds}{(a^2 + z^2)^{1/2}}$$

El potencial total para una distancia z sobre el eje es

$$\Phi(z) = \frac{q}{(a^2 + z^2)^{1/2}},$$

el cual, en coordenadas esféricas con simetría azimutal, corresponde a la condición de frontera para $\theta = 0$,

$$\Phi(r, 0) = \frac{q}{(a^2 + r^2)^{1/2}}.$$

La solución para el potencial en todo el espacio tiene la forma

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta).$$

Para $\theta = 0$ debemos tener,

$$\frac{q}{(a^2 + r^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]. \quad (66)$$

Para determinar los coeficientes A_l y B_l , debemos expandir la función en el lado izquierdo de la Ec. (66) en serie de potencias de r , y comparar esa serie con la expresión en el lado derecho. En tal sentido, consideremos la siguiente expansión válida para $x < 1$,

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots$$

Supongamos $r > a$, y definamos $x \equiv a^2/r^2 < 1$. Entonces, la función en el lado izquierdo de la Ec. (66) puede expandirse en serie como

$$\begin{aligned} \frac{q}{(a^2 + r^2)^{1/2}} &= \frac{q}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{q}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{a}{r}\right)^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{a}{r}\right)^8 + \dots\right] \\ &= \frac{q}{r} \sum_{l \text{ par}}^{\infty} (-1)^{l/2} \frac{(l-1)!!}{l!!} \left(\frac{a}{r}\right)^l, \quad l = 0, 2, 4, \dots \end{aligned} \tag{67}$$

Comparando la Ec. (67) con la Ec. (66) para $\theta = 0$, tenemos

$$q \sum_{l \text{ par}}^{\infty} (-1)^{l/2} \frac{a^l}{r^{l+1}} \frac{(l-1)!!}{l!!} = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} A_l &= 0 \\ B_l &= q(-1)^{l/2} a^l \frac{(l-1)!!}{l!!}, \quad l = 0, 2, 4, \dots \end{aligned}$$

Luego, el potencial para $r > a$ es

$$\Phi(r, \theta) = q \sum_{l \text{ par}}^{\infty} (-1)^{l/2} \frac{a^l}{r^{l+1}} \frac{(l-1)!!}{l!!} P_l(\cos \theta).$$

Similarmente, intercambiando $r \leftrightarrow a$, obtenemos para $r < a$,

$$\Phi(r, \theta) = q \sum_{l \text{ par}}^{\infty} (-1)^{l/2} \frac{r^l}{a^{l+1}} \frac{(l-1)!!}{l!!} P_l(\cos \theta).$$

Ambos resultados pueden expresarse en la siguiente forma

$$\Phi(r, \theta) = q \sum_{l \text{ par}}^{\infty} (-1)^{l/2} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \frac{(l-1)!!}{l!!} P_l(\cos \theta),$$

donde $r_<$ es el menor entre r y a , y $r_>$ es el mayor entre r y a .

13.40 Green para varios casos

Encuentre la función de Green en los siguientes casos.

- a) Esfera en el vacío (condición de borde en infinito).
- b) Cascarón esférico conductor de radio b .
- c) Esferas conductoras concéntricas de radios $a < b$.
- d) Utilice el resultado del cascarón esférico de radio b para encontrar el potencial al interior de la esfera cuando se posiciona un anillo de radio a y carga Q concéntrica a la esfera.

Solución:

Se debe resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) = -4\pi\rho(r, \theta, \phi),$$

para lo cual se calculará primero la función de Green del sistema, la cual cumple con

$$\nabla^2 G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}').$$

En coordenadas esféricas, la delta de Dirac puede expandirse de la forma

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{\delta(r - r')}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \\ &= \frac{\delta(r - r')}{(r')^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'), \end{aligned}$$

por lo que se propone la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r, r') Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

Usando la identidad para los esféricos armónicos

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

se deduce que

$$\nabla^2 G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi').$$

Reemplazando la Ec.(2) y la Ec.(3) en la Ec.(1) se llega a la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} = -4\pi \frac{\delta(r-r')}{(r')^2}$$

la cual para $r \neq r'$ corresponde a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - l(l+1) R_{lm} = 0$$

con solución

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r < r' \\ C_{lm}r^l + D_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r > r' \end{cases}$$

a) Como la solución no puede diverger en $r = 0$, se deduce que $B_{lm} = 0$. De igual manera, $C_{lm} = 0$ debido a que la solución no puede diverger para $r \rightarrow \infty$, ya que se debe cumplir que $\psi(r \rightarrow \infty) = 0$. Se escribe entonces

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm}r^l & \text{si } r < r' \\ D_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}},$$

donde $r_< = \min(r, r')$ y $r_> = \max(r, r')$. Para encontrar la constante E_{lm} se debe integrar la discontinuidad $r = r'$ en la Ec.(4), esto se hace pensando en una lámina de grosor $\epsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r' + \epsilon$ y $r_< = r' - \epsilon$, luego

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} l(l+1) R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \delta(r-r') dr,$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left. \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para $R_{lm}(r, r')$ se obtiene

$$E_{lm} \left[(l+1) \frac{r_-^l}{r_>} + l \frac{r_-^{l+1}}{r_>} \right] = 4\pi.$$

Considerando $\epsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r_- = r'$ se reescribe

$$E_{lm}[(l+1) + l] = 4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = \frac{4\pi}{(2l+1)},$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = \frac{4\pi}{(2l+1)} \frac{r_-^l}{r_>}^{l+1}$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \frac{r_-^l}{r_>}^{l+1} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi').$$

b) Como la solución no puede diverger en $r = 0$, se deduce que $B_{lm} = 0$, mientras que de la condición de borde

$$\psi(r = b) = 0,$$

se obtiene

$$D_{lm} = -C_{lm} b^{2l+1}$$

y la solución queda

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} r_-^l & \text{si } r < r' \\ C_{lm} [r_-^l - b^{2l+1} r_-^{-(l+1)}] & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} r_-^l \left[r_-^l - b^{2l+1} r_-^{-(l+1)} \right],$$

donde $r_- = \min(r, r')$ y $r_> = \max(r, r')$. Para encontrar la constante E_{lm} se debe integrar la discontinuidad $r = r'$ en la Ec.(4), esto se hace pensando en una lámina de grosor $\epsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r' + \epsilon$ y $r_- = r' - \epsilon$, luego

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} l(l+1) R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \delta(r-r') dr,$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left. \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para $R_{lm}(r, r')$ se obtiene

$$E_{lm} r_>^2 r_<^l \left[lr_>^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+2}} \right] - l E_{lm} r_<^{l+1} \left[r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = -4\pi.$$

Considerando $\epsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r_< = r'$ se reescribe

$$E_{lm} (r')^{l+2} \left[l(r')^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+2}} \right] - l E_{lm} (r')^{l+1} \left[(r')^l - \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+1}} \right] = -4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = -\frac{4\pi}{(2l+1)b^{2l+1}},$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = -\frac{4\pi r_<^l}{(2l+1)b^{2l+1}} \left[r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = \frac{4\pi}{(2l+1)} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{1}{b} \left(\frac{r_< r_>}{b^2} \right)^l \right]$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{r_<^l r_>^l}{b^{2l+1}} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'),$$

la cual para $b \rightarrow \infty$, coincide con la expresión de la esfera posicionada en el vacío con condiciones de borde solo en infinito.

c) Puesto que ambas superficies son conductoras, para la esfera interior de radio a se tiene que $\psi(r=a)=0$, luego

$$A_{lm}a^l + B_{lm}a^{-(l+1)} = 0,$$

mientras que para la esfera de radio b se cumple

$$C_{lm}b^l + D_{lm}b^{-(l+1)} = 0.$$

En la primera condición se despeja B_{lm} en función de A_{lm} (puesto que no se quiere divergencia en $r = 0$) y para la segunda se despeja C_{lm} en función de D_{lm} (puesto que no se quiere divergencia en $r \rightarrow \infty$), así

$$B_{lm} = -A_{lm}a^{2l+1} \quad C_{lm} = -D_{lm}b^{-(2l+1)}$$

y la solución queda

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) & \text{si } r < r' \\ D_{lm} \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas expresiones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right),$$

donde $r_< = \min(r, r')$ y $r_> = \max(r, r')$. Para encontrar la constante E_{lm} se debe integrar la discontinuidad $r = r'$ en la Ec.(4), esto se hace pensando en una lámina de grosor $\epsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r' + \epsilon$ y $r_< = r' - \epsilon$, luego

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} l(l+1) R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \delta(r - r') dr,$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left. \left(r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para $R_{lm}(r, r')$ se obtiene

$$-E_{lm}r_>^2 \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{l+1}{r_>^{l+2}} + \frac{lr_>^{l-1}}{b^{2l+1}} \right) - E_{lm}r_<^2 \left(lr_<^{l-1} + \frac{(l+1)a^{2l+1}}{r_<^{l+2}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} + \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) = -4\pi.$$

Considerando $\epsilon \rightarrow 0$ tal que $r_> = r_< = r'$ se reescribe

$$E_{lm} \left[(2l+1) - (2l+1) \frac{a^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right] = 4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]},$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right),$$

la cual para $a = 0$ y $b \rightarrow \infty$, coincide con la expresión de la esfera posicionada en el vacío con condiciones de borde solo en infinito. d) La densidad de carga del anillo viene dada por la expresión

$$\rho(r', \theta', \phi') = \rho_0 \frac{\delta(r' - a)}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta' - \pi/2),$$

donde se debe resolver

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho(r', \theta', \phi') dV \\ &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^b \frac{\delta(r' - a)}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta' - \pi/2) (r')^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi' \\ &= 2\pi \rho_0 \int_0^\pi \int_0^b \delta(r' - a) \delta(\theta' - \pi/2) dr' d\theta' \\ &= 2\pi \rho_0, \end{aligned}$$

luego la densidad de carga se escribe

$$\rho(r', \theta', \phi') = \frac{Q}{2\pi} \frac{\delta(r' - a)}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta' - \pi/2).$$

De esta manera, el potencial eléctrico será (la segunda integral es cero debido a que la esfera es conductora)

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, \phi) &= \int \rho(r', \theta', \phi') G(r, \theta, \phi) dV - \frac{1}{4\pi} \oint \psi(r, \theta, \phi) \frac{\partial G}{\partial n_y} dy \\ &= 2Q \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{r_<r_>}{a^2} \right)^l \right] \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^b \delta(r' - a) \delta(\theta' - \pi/2) \\ &\quad Y_{lm}^*(\theta', \phi') dr' d\theta' d\phi'\end{aligned}$$

y usando que

$$Y_{lm}^*(\theta', \phi') = N_l^m e^{im\phi'} P_l^m [\cos(\theta')],$$

se deduce que $\psi(r, \theta, \phi) \neq 0$ solo para $m = 0$, luego

$$\psi(r, \theta, \phi) = 4\pi Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(N_l^0)^2 P_l^0[\cos(\theta)]}{(2l+1)} \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{r_<r_>}{a^2} \right)^l \right] \int_0^\pi P_l^0[\cos(\theta')] \delta(\theta' - \pi/2) d\theta'.$$

Para armónicos esféricos se tiene que

$$N_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}},$$

concluyéndose el potencial eléctrico

$$\psi(r, \theta, \phi) = Q \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[0] r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{a^{2l+1}} \right) P_l^0[\cos(\theta)]$$

13.41 Equivalencia para el potencial dentro de una esfera

Una esfera hueca de radio interior a tiene el potencial especificado en su superficie $\Phi = V(\theta, \phi)$. Demostrar la equivalencia de las dos formas de solución para el potencial dentro de la esfera:

(a)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \phi')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega'$$

donde $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi')$.

(b)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

donde $A_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \phi') V(\theta', \phi')$

Solución:

La primera solución es solo la solución del método de función de Green y la segunda es la solución de la ecuación de Laplace. Resolvamos ambos.

Se encontró que la función de Green esférica usando el método de imágenes es:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{\left|\frac{x'}{a}\mathbf{x} - \frac{a}{x'}\mathbf{x}'\right|}$$

En coordenadas esféricas esto se convierte en:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^2}x^2 + a^2 - 2xx' \cos \gamma}}$$

donde $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi')$.

Se encuentra que la derivada normal de la función de Green esférica para el problema interno, evaluada en la superficie de la esfera, es:

$$\left[\frac{dG}{dn'} \right]_{x'=a} = \frac{(x^2 - a^2)}{a(x^2 + a^2 - 2xa \cos \gamma)^{3/2}}$$

La solución general para el método de la función de Green es:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_D d^3\mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi} \oint \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) da'$$

No hay densidad de carga, por lo que esto se reduce a:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{4\pi} \oint \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) da' \\ \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{4\pi} \int \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) a^2 d\Omega' \\ \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \phi')}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega'\end{aligned}$$

donde $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi')$

Si, en cambio, intentamos resolver la ecuación de Laplace, comenzamos con la solución general (como se derivó anteriormente) en términos de armónicos esféricos Y_{lm} :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{l,m} r^l + B_{l,m} r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

La región de interés incluye el origen, por lo que para tener una solución válida allí, $B_{l,m}$ debe ser cero

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{l,m} r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Aplicando la condición de frontera:

$$V(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{l,m} a^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) V(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{l,m} a^l \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

Usando

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi &= \delta_{l'l} \delta_{m'm} \\ A_{l,m} &= a^{-l} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) V(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{a} \right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \text{ donde } A_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \phi') V(\theta', \phi')$$

Por lo tanto, hemos demostrado indirectamente que las dos formas son equivalentes porque ambas son soluciones válidas del mismo problema.

También podemos mostrar directamente que las dos formas son equivalentes:

Comience con la forma de la solución del método de función de Green:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \phi')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega'$$

Queremos usar la expansión de potencial puntual demostrada anteriormente:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \text{ si } r < r_0$$

Si tomamos \mathbf{r}_0 como un vector que apunta a la ubicación (a, θ', ϕ') entonces esto se convierte en :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Toma la derivada de ambos lados con respecto a r y luego multiplícalo por r :

$$\frac{ar \cos \gamma - r^2}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{l}{2l+1} \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Toma la derivada de la expansión original en ambos lados con respecto a a y multiplícalo por $(-a)$:

$$\frac{-ar \cos \gamma + a^2}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{l+1}{2l+1} \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Sume las dos ecuaciones anteriores entre sí:

$$\frac{a^2 - r^2}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Usando esto, expanda parte de la solución del método de función de Green:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int V(\theta', \phi') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r^l}{a^l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) d\Omega'$$

Finalmente:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \text{ donde } A_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \phi') V(\theta', \phi')$$

13.42 Línea cargada entre planos conductores que se intersectan

Dos planos conductores con potencial cero se encuentran a lo largo del eje z , formando un ángulo β entre ellos, como en la figura 75. Una línea de carga unitaria paralela al eje z está ubicada entre los planos en la posición (ρ', φ') .
(a) Demuestre que $(4\pi\epsilon_0)$ veces el potencial en el espacio entre los planos, es decir, la función de Green de Dirichlet $G(\rho, \phi; \rho', \varphi')$, está dada por la serie infinita

$$G(\rho, \phi, \rho', \varphi') = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \rho_{<}^{m\pi/\beta} \rho_{>}^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(m\pi\phi'/\beta)$$

(b) Por medio de técnicas de variables complejas u otros medios, demuestre que la serie se puede sumar para dar una forma cerrada,

$$G(\rho, \phi, \rho', \varphi') = \ln \left[\frac{(\rho)^{2\pi/\beta} + (\rho')^{2\pi/\beta} - 2(\rho\rho')^{\pi/\beta} \cos[\pi(\phi + \varphi')/\beta]}{(\rho)^{2\pi/\beta} + (\rho')^{2\pi/\beta} - 2(\rho\rho')^{\pi/\beta} \cos[\pi(\phi - \varphi')/\beta]} \right]$$

(c) Verifique que obtiene los resultados familiares cuando $\beta = \pi$ y $\beta = \pi/2$.

Solución:

(a) Dividamos el espacio entre los planos en dos regiones, la [región I](#) donde $\rho < \rho'$ y la [región II](#) donde $\rho > \rho'$.

1- Cada región está libre de carga, por lo que podemos resolver la ecuación de [Laplace en dos dimensiones en coordenadas polares](#). La carga lineal [entrará en juego](#) cuando apliquemos las condiciones de contorno que unen las dos regiones.

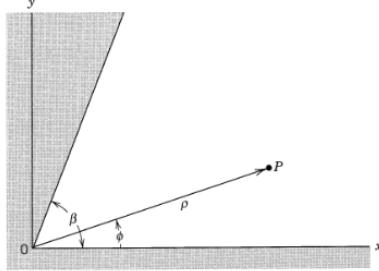


Figure 75: Intersección de dos planos conductores que definen una esquina en dos dimensiones con ángulo de apertura β .

- La solución general es:

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho) (A_0 + B_0 \phi) + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v}) (A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi})}$$

2 - Primero aplicamos la condición de contorno en el plano inferior:

$$\begin{aligned}\Phi(\rho, \phi = 0) &= 0 \\ 0 &= (a_0 + b_0 \ln \rho) (A_0) + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v}) (A_v + B_v) \\ A_0 &= 0 \text{ y } B_v = -A_v\end{aligned}$$

La solución se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho) \phi + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v}) \sin(v\phi)$$

3- Ahora aplicamos la condición de contorno en el otro plano

$$\begin{aligned}\Phi(\rho, \phi = \beta) &= 0 \\ 0 &= (a_0 + b_0 \ln \rho) \beta + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v}) \sin(v\beta)\end{aligned}$$

para que esto se cumpla entonces $a_0 = 0$ y $b_0 = 0$ y $0 = \sin(v\beta)$ lo cual lleva a $v = \frac{m\pi}{\beta}$ donde $m = 1, 2, \dots$

La solución se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_m (a_m \rho^{m\pi/\beta} + b_m \rho^{-m\pi/\beta}) \sin(m\pi\phi/\beta) \text{ donde } m = 1, 2, \dots$$

4- La solución en ambas regiones debe tener esta forma. Ahora debemos mirar cada región por separado. En la región (I) cercana al origen, debemos tener una solución válida en el origen, de manera que $b_m = 0$, dando lugar a:

$$\boxed{\Phi_I(\rho, \phi) = \sum_m a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta)}$$

En la región (II) alejada del origen, debemos tener una solución válida en el infinito, de modo que $a_m = 0$, dando lugar a:

$$\boxed{\Phi_{II}(\rho, \phi) = \sum_m b_m \rho^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta)}$$

5- Ahora aplicamos condiciones de contorno para unir las dos regiones, recordando que hay una línea de carga presente en el límite:

$$\boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma C} \quad (68)$$

donde $C = \frac{1}{\epsilon_0}$ o 4π

$$\left[-\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial \rho} + \frac{\partial \Phi_I}{\partial \rho} \right]_{\text{en } \rho=\rho'} = \frac{\lambda \delta(\phi - \phi')}{\rho'} C$$

$$\sum_m m \sin(m\pi\phi/\beta) [b_m \rho'^{-m\pi/\beta} + a_m \rho'^{m\pi/\beta}] = \frac{\beta}{\pi} \lambda \delta(\phi - \phi') C$$

6- Multiplicamos a ambos lados por un seno e integrando con respecto al ángulo polar:

$$\sum_m m \int_0^\beta \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(n\pi\phi/\beta) d\phi [b_m \rho'^{-m\pi/\beta} + a_m \rho'^{m\pi/\beta}] = \frac{\beta}{\pi} \lambda \sin(n\pi\phi'/\beta) C$$

$$[b_m \rho'^{-m\pi/\beta} + a_m \rho'^{m\pi/\beta}] = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{m} \sin(n\pi\phi'/\beta) C \quad (69)$$

7- La otra condición de contorno es:

$$\boxed{\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_I}{\partial \phi} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial \phi} \right]_{\text{en } \rho=\rho'}$$

$$\boxed{a_m \rho'^{m\pi/\beta} = b_m \rho'^{-m\pi/\beta}} \quad (70)$$

8- Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones con las dos variables independientes de las ecuaciones (69) y (70), y llegamos a:

$$b_m = \rho'^{m\pi/\beta} \frac{1}{\pi m} \lambda \sin(m\pi\phi'/\beta) C \quad \text{y} \quad a_m = \rho'^{-m\pi/\beta} \frac{1}{\pi m} \lambda \sin(m\pi\phi/\beta) C$$

La solución final se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = C \frac{\lambda}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \rho_{<}^{m\pi/\beta} \rho_{>}^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(m\pi\phi'/\beta)$$

Si establecemos $\lambda = 4\pi\epsilon_0$ o $\lambda = 1$, este potencial se convierte en la función de Green:

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \rho_{<}^{m\pi/\beta} \rho_{>}^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(m\pi\phi'/\beta)$$

(b) Let us try to convert the sum into closed form. First note that the sine function is the imaginary part of the complex exponential, so that the Green function becomes:

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \rho_{<}^{m\pi/\beta} \rho_{>}^{-m\pi/\beta} \mathcal{J}\left(e^{im\pi\phi'/\beta}\right) \mathcal{J}\left(e^{im\pi\phi/\beta}\right)$$

Next use the identity: $2\mathcal{J}(z_1)\mathcal{J}(z_2) = \mathcal{R}[-z_1z_2 + z_1 * z_2]$

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = \Re \left[-2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \rho_{<}^{m\pi/\beta} \rho_{>}^{-m\pi/\beta} e^{im\pi(\phi+\phi')/\beta} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \rho_{<}^{m\pi/\beta} \rho_{>}^{-m\pi/\beta} e^{im\pi(\phi-\phi')/\beta} \right]$$

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = \mathcal{R} \left[-2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} Z_1^m + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} Z_2^m \right]$$

where $Z_1 = \rho_{<}^{\pi/\beta} \rho_{>}^{-\pi/\beta} e^{i\pi(\phi+\phi')/\beta}$ and $Z_2 = \rho_{<}^{\pi/\beta} \rho_{>}^{-\pi/\beta} e^{i\pi(\phi-\phi')/\beta}$
Now use $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{Z^m}{m} = -\ln(1 - Z)$

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = 2\mathcal{R}[\ln(1 - Z_1) - \ln(1 - Z_2)]$$

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = 2\Re \left[\ln \left(\frac{1 - Z_1}{1 - Z_2} \right) \right]$$

Use $2\mathcal{R}[\ln z] = \ln(zz^*)$:

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = \ln \left(\frac{1 + |Z_1|^2 - 2\mathcal{R}(Z_1)}{1 + |Z_2|^2 - 2\mathcal{R}(Z_2)} \right)$$

Insert back in Z_1 and Z_2 :

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi, \rho', \phi') &= \ln \left(\frac{1 + \rho_{<}^{2\pi/\beta} \rho_{>}^{-2\pi/\beta} - 2\rho_{<}^{\pi/\beta} \rho_{>}^{-\pi/\beta} \cos(\pi(\phi + \phi')/\beta)}{1 + \rho_{<}^{2\pi/\beta} \rho_{>}^{-2\pi/\beta} - 2\rho_{<}^{\pi/\beta} \rho_{>}^{-\pi/\beta} \cos(\pi(\phi - \phi')/\beta)} \right) \\ G(\rho, \phi, \rho', \phi') &= \ln \left(\frac{\rho_{>}^{2\pi/\beta} + \rho_{<}^{2\pi/\beta} - 2(\rho_{<} \rho_{>})^{\pi/\beta} \cos(\pi(\phi + \phi')/\beta)}{\rho_{>}^{2\pi/\beta} + \rho_{<}^{2\pi/\beta} - 2(\rho_{<} \rho_{>})^{\pi/\beta} \cos(\pi(\phi - \phi')/\beta)} \right) \end{aligned}$$

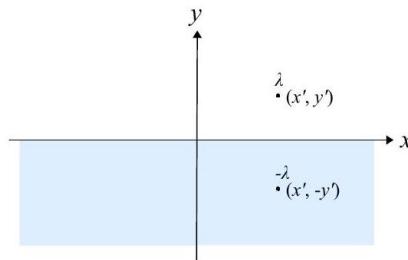
Because of the symmetry, we can drop the greater-than and less-than subscripts:

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = \ln \left(\frac{\rho^{2\pi/\beta} + \rho'^{2\pi/\beta} - 2(\rho \rho')^{\pi/\beta} \cos(\pi(\phi + \phi')/\beta)}{\rho^{2\pi/\beta} + \rho'^{2\pi/\beta} - 2(\rho \rho')^{\pi/\beta} \cos(\pi(\phi - \phi')/\beta)} \right)$$

(c) For $\beta = \pi$ this reduces to:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} G(\rho, \phi, \rho', \phi') = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|) - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$$

This is the potential of a unit line charge located at \mathbf{x}' near a grounded conducting plane in the $x-z$ axis, which is effectively the same as a negative image line charge at the mirror location \mathbf{x}'' .

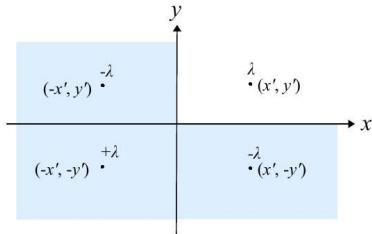


For $\beta = \pi/2$ this reduces to:

$$G(\rho, \phi, \rho', \phi') = \ln \left(\frac{\rho^4 + \rho'^4 - 2(\rho\rho')^2 \cos(2(\phi + \phi'))}{\rho^4 + \rho'^4 - 2(\rho\rho')^2 \cos(2(\phi - \phi'))} \right)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} G(\rho, \phi, \rho', \phi') = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')} \right) - \ln \left(\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\phi + \phi')} \right) \right. \\ \left. - \ln \left(\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi + \phi')} \right) + \ln \left(\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')} \right) \right]$$

This is the potential of a unit line charge located at \mathbf{x}' near a right-angle interior edge, which is equivalent to three image charges, two negative ones offset by plus and minus 90 degrees, and one positive one offset by 180 degrees. This result matches the one found in Problem 2.3.



13.43

Considere un problema potencial en el semiespacio definido por $z \geq 0$, con condiciones de contorno de Dirichlet en el plano $z = 0$ (y en el infinito).

- (a) Escriba la función de Green apropiada $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$
- (b) Si se especifica que el potencial en el plano $z = 0$ es $\Phi = V$ dentro de un círculo de radio a centrado en el origen, y $\Phi = 0$ fuera de ese círculo, encuentre un expresión integral para el potencial en el punto P especificado en términos de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) .
- (c) Demuestre que, a lo largo del eje del círculo ($\rho = 0$), el potencial viene dado por

$$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

- (d) Demuestre que a grandes distancias ($\rho^2 + z^2 \gg a^2$) el potencial se puede expandir en una serie de potencias en $(\rho^2 + z^2)^{-1}$, y que los términos principales son

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho^2a^2 + a^4)}{8(\rho^2 + z^2)^2} + \dots \right]$$

Verifique que los resultados de las partes c y d sean consistentes entre sí en su rango común de validez.

Solución:

(a) The Green function solution to the potential problem with this boundary for Dirichlet boundary conditions requires that $G_D = 0$ on the surface and that G_D obeys

$$\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

everywhere else. The problem of finding the Green function amounts to finding the proper function F above so that the Green function G disappears on the boundary. This problem is exactly equivalent to a the situation where we have a unit point charge at \mathbf{x}' , which creates the potential $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, in the presence of a flat conductor running along the $z = 0$ plane. The solution for the potential of the equivalent problem will then be identical to the Green function for the original problem.

To solve the problem of the charge q at \mathbf{x}' in the presence of a conducting sheet at the $z = 0$ plane, we use the method of images. We place an image charge q' at $(x', y', -z')$ so that the potential is just the sum of the two point charges:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}}$$

Apply the boundary condition of a conductor at the $z = 0$ plane: $\Phi(x, y, z = 0) = 0$

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z')^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z')^2}}$$

$$q' = -q$$

The image charge is just the perfect mirror image in location and in charge, which makes sense because a perfectly conducting surface that is perfectly flat is just a perfect mirror. The potential is then:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}} \right]$$

Now go back to the original problem without the conductor and point, but some potentially complex charge distribution in the presence of some potentially complex boundary condition along the $z = 0$ plane. The solution to this original problem is, according to the Green function method:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G_D d^3\mathbf{x}' - \frac{1}{4\pi} \oint \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) da'$$

where we now know the Green function used by this equation. It is just the solution to the equivalent problem with unit charge ($q = 4\pi\epsilon_0$) :

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

(b) If the potential on the plane $z = 0$ is specified to be $\Phi = V$ inside a circle of radius a centered on the origin, and $\Phi = 0$ outside that circle, find an integral expression for the potential at the point P specified in terms of cylindrical coordinates (ρ, ϕ, z) .

Although not stated, it can be assumed that there is no charge present anywhere in this problem. When that is the case, then the Green function solution for Dirichlet boundary conditions becomes:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi} \oint_S \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) da'$$

The enclosing surface S in this case is a box with one side on the plane $z = 0$ and the other sides at infinity. The potential dies off to zero at infinity, so the sides at infinity make no contribution to the integral. The potential is also zero everywhere on the plane $z = 0$ outside the circle, so that those locations make no contribution to the integral. The only piece of the integral left is inside the circle, so that: $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\Phi \frac{dG_D}{dn'} \right) \rho' d\phi' d\rho'$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{-V}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{dG_D}{dn'} \rho' d\phi' d\rho'$$

The normal n' is defined as pointing out of the volume enclosed so that for this problem $n' = -z'$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{dG_D}{dz'} \rho' d\phi' d\rho'$$

Plugging in the Green function we found above:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{d}{dz'} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]$$

Putting everything in cylindrical coordinates:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{V}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{d}{dz'} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}} \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}} \right] \\ \Phi(\mathbf{x}) = \frac{V}{4\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[(-1/2) \frac{2(z - z')(-1)}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2)^{3/2}} \right. \\ \left. - (-1/2) \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + z^2)^{3/2}} \right]$$

We now evaluate everything at $z' = 0$ because our integration surface (the primed system) is completely contained in this plane.

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + z^2)^{3/2}}$$

The problem is azimuthally symmetric, so that we are free to make a change of variables: $\phi' \rightarrow \phi' + \phi$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi') + z^2)^{3/2}}$$

(c) Show that, along the axis of the circle ($\rho = 0$), the potential is given by

$$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

Take the general solution found above and plug in ($\rho = 0$) to get the on-axis solution:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \\ \Phi(\mathbf{x}) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \\ \Phi(\mathbf{x}) = zV \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

Make a change of variables $u = \rho'^2 + z^2$, $du = 2\rho' d\rho'$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{zV}{2} \int_{z^2}^{a^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}} \\ \Phi(\mathbf{x}) &= -zV \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{z^2}^{a^2+z^2} \\ \Phi(\mathbf{x}) &= V \left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]\end{aligned}$$

(d) Show that at large distances ($\rho'^2 + z^2 \gg a^2$) the potential can be expanded in a power series in $(\rho'^2 + z^2)^{-1}$, and that the leading terms are

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(\rho'^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho'^2 a^2 + a^4)}{8(\rho'^2 + z^2)^2} + \dots \right]$$

Verify that the results of parts c and d are consistent with each other in their common range of validity. The general solution found above was:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{zV}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{(\rho'^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi') + z^2)^{3/2}}$$

Divide top and bottom by $(\rho'^2 + z^2)^{3/2}$ $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{zV}{2\pi} \frac{1}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a d\rho' \rho' \left(1 + \frac{\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi')}{\rho'^2 + z^2} \right)^{-1}$

Expand the last factor using the Binomial series: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{zV}{2\pi} \frac{1}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a d\rho' \rho' \left[1 - \frac{3}{2} (\rho'^2 + z^2)^{-1} (\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi')) \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8} (\rho'^2 + z^2)^{-2} (\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi'))^2 + \dots \right]\end{aligned}$$

We can now integrate term by term

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{zV}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a d\rho' \rho' \right] - \frac{3}{2} (\rho^2 + z^2)^{-1} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a d\rho' \rho' [\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi')] \\
\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{zV}{2\pi} \frac{15}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[\pi a^2 + \frac{3}{2} (\rho^2)^{-2} \int_0^{2\pi} dz^2 \right]^{-1} \int_0^a d\rho' \rho' [(\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi'))^2] + \dots \right] \phi' \int_0^a d\rho' \rho' \\
&\quad + \frac{15}{8} (\rho^2 + z^2)^{-2} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a d\rho' \rho' [\rho'^4 + 4\rho^2 \rho'^2 \cos^2(\phi') - 4\rho\rho'^3 \cos(\phi')] + \dots \right] \\
\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{zV}{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[\pi a^2 - \frac{3}{2} (\rho^2 + z^2)^{-1} \left[\frac{\pi}{2} a^4 \right] + \frac{15}{8} (\rho^2 + z^2)^{-2} \left[2\pi \frac{a^6}{6} + 4\rho^2 \frac{a^4}{4} \pi \right] + \dots \right] \\
\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{Va^2}{2} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8(\rho^2 + z^2)^2} + \dots \right]
\end{aligned}$$

Along the axis this becomes

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{Va^2}{2} \frac{1}{z^2} \left[1 - \frac{3a^2}{4z^2} + \frac{5a^4}{8z^4} + \dots \right] \\
\Phi(\mathbf{x}) &= V \left[\frac{a^2}{2z^2} - \frac{3a^4}{8z^4} + \frac{5a^6}{16z^6} + \dots \right] \\
\Phi(\mathbf{x}) &= V \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{2z^2} + \frac{3a^4}{8z^4} - \frac{5a^6}{16z^6} + \dots \right) \right]
\end{aligned}$$

Now we recognize the expansion: $(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{x}) &= V \left[1 - \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right] \\
\Phi(\mathbf{x}) &= V \left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]
\end{aligned}$$

This matches part c.

13.44 Expansión de la función de Green en armónicos esféricos.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da'$$

donde la función de Green satisface $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_S = 0$.

Volumen V limitado por dos esferas concéntricas

Consideremos un volumen V limitado por dos esferas concéntricas que constituyen la superficie S . Sean a el radio de la esfera interior y b el radio de la esfera exterior. Entonces, la magnitud de \mathbf{r} en la región de interés para la solución es tal que $a \leq r \leq b$.

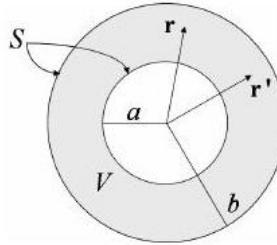


Figure 76: Volumen V limitado por las dos esferas concéntricas.

- Queremos expandir la función de Green en armónicos esféricos, ya que esta satisface la Ec. de Poisson
- La función $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ satisface Poisson:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

donde el subíndice del Laplaciano indica derivadas con respecto a las coordenadas de \mathbf{r} , con condición de frontera $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_S = 0$, para $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ en $r = a$ y en $r = b$.

- Expandimos la delta de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ se puede expresar en coordenadas esféricas como

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r'^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$$

y usamos la relación de completitud de los armónicos esféricos

$$\delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

y así nos queda

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Y así se llega a escribir la Ec. de Poisson en términos de armónicos esféricos:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (71)$$

- Supongamos una solución $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, como función de $\mathbf{r}(r, \theta, \phi)$, en forma de expansión en armónicos esféricos:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(r, r', \theta, \theta', \phi, \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(r, r', \theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (72)$$

Para determinar los coeficientes A_{lm} , debemos sustituir esta expansión en la Ec.(71) y comparar ambos lados de la relación resultante.

Aplicando el Laplaciano en coordenadas esféricas al izquierdo de la Ec. (71) se obtiene:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rG) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}$$

reemplazando (72)

$$\begin{aligned} \nabla_r^2 G &= \sum_l \sum_m \left\{ \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA_{lm}(r, r', \theta', \phi')) + \frac{(r, r', \theta', \phi')}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y_{lm}(\theta, \phi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (73)$$

Como los $Y_{lm}(\theta, \phi)$ satisfacen la ecuación angular

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \right) + l(l+1)Y_{lm} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y_{lm}(\theta, \phi) = 0.$$

y si reemplazamos esta Ec. angular en (73) da:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \left[\frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA_{lm}(r, r', \theta', \phi')) - \frac{A_{lm}(r, r', \theta', \phi')}{r^2} l(l+1)Y_{lm}(\theta, \phi) \right]$$

$$\boxed{\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_{lm}(r, r', \theta', \phi')) - \frac{l(l+1) A_{lm}(r, r', \theta', \phi')}{r^2} \right] Y_{lm}(\theta, \phi)} \quad (74)$$

Si comparamos (74) con (71), encontramos la siguiente relación entre los coeficientes de $Y_{lm}(\theta, \phi)$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_{lm}(r, r', \theta', \phi')) - \frac{l(l+1) A_{lm}(r, r', \theta', \phi')}{r^2} = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') Y_{lm}^*(\theta', \phi'). \quad (75)$$

La Ec. (75) es una ecuación en derivadas parciales para $A_{lm}(r, r', \theta', \phi')$. Su forma sugiere buscar una solución por separación de variables, tal como

$$A_{lm}(r, r', \theta', \phi') = g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi').$$

Sustituyendo en la Ec. (75) da la siguiente ecuación para $g_l(r, r')$:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_l(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r'). \quad (76)$$

Consideremos primero la Ec. (76) para el caso $r \neq r'$,

$$(r g)^{\prime \prime} - \frac{l(l+1)}{r} g = 0.$$

Digamos que $U = r g$, se obtiene la ecuación

$$U'' - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0,$$

que tiene solución de la forma:

$$U = A r^{l+1} + B r^{-l};$$

por lo tanto,

$$g(r, r') = A r^l + B r^{-(l+1)}. \quad (77)$$

La función $g(r, r')$ corresponde a la parte radial de la función de Green en la Ec. (72), y por lo tanto debe satisfacer las condiciones de frontera

$$G|_S = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(a, r') = 0, & r = a \\ g(b, r') = 0, & r = b. \end{cases}$$

Evaluando la función $g(r, r')$ de la Ec. (77) en $r = a$, obtenemos

$$Aa^l + Ba^{-(l+1)} = 0 \Rightarrow B = -Aa^{2l+1},$$

luego,

$$g(r, r') = A \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right), \quad \text{válida para } r < r'.$$

Similarmente, en $r = b$ obtenemos

$$A = -Bb^{-(2l+1)}$$

luego,

$$g(r, r') = B \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right), \quad \text{válida para } r > r'.$$

Puesto que la función de Green debe tener simetría ante el intercambio $r \leftrightarrow r'$, la función $g(r, r')$ se puede expresar en general como

$$g(r, r') = C \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right), \quad (78)$$

donde $r_{>}$ es el mayor entre r y r' , y $r_{<}$ es el menor entre r y r' .

- Para determinar la constante C , consideramos la Ec. (76) para $g(r, r')$, en el caso $r \rightarrow r'$ tal que $\delta(r - r') \neq 0$,

$$\frac{d^2}{dr^2} rg(r, r') - \frac{l(l+1)}{r} g(r, r') = -\frac{4\pi}{r} \delta(r - r').$$

Integramos todos los términos de esta ecuación desde $r = r' - \varepsilon$ hasta $r = r' + \varepsilon$,

$$\int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{d^2}{dr^2} (rg(r, r')) dr - l(l+1) \int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{g(r, r')}{r} dr = -4\pi \int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{\delta(r - r')}{r} dr$$

y tomamos el límite $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{d}{dr} [rg(r, r')] \Big|_{r=r'+\varepsilon} - \frac{d}{dr} [rg(r, r')] \Big|_{r=r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'}. \quad (79)$$

Existe una discontinuidad en la derivada de $rg(r, r')$ en $r = r'$. Debemos evaluar las derivadas $(rg)'|_{r=r'+\varepsilon}$ y $(rg)'|_{r=r'-\varepsilon}$, y tomar el límite $\varepsilon \rightarrow 0$:

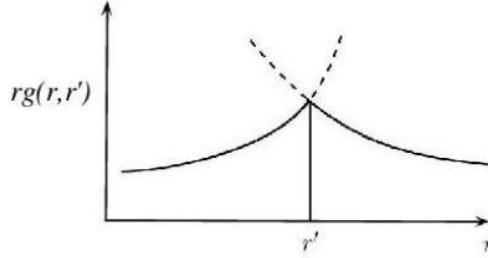


Figure 77: Discontinuidad en la derivada de la parte radial de la función de Green en $r = r'$.

i) Para $r = r' + \varepsilon$, tenemos $r > r'$, y por lo tanto, $r_< = r', r_> = r$. Luego, utilizando la Ec. (78),

$$rg(r, r') = C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}} \right).$$

Evaluamos la derivada en $r = r' + \varepsilon$, y hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'+\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} &= -C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[\frac{l}{r'^{l+1}} + \frac{(l+1)r'^l}{b^{2l+1}} \right] \Big|_{r=r'} \\ &= -C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[\frac{l}{r'^{l+1}} + \frac{(l+1)r'^l}{b^{2l+1}} \right] \\ &= -Cr'^l \left(1 - \frac{a^{2l+1}}{r'^{2l+1}} \right) \frac{1}{r'^{l+1}} \left[l + (l+1) \frac{r'^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right] \\ \frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'+\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} &= -\frac{C}{r'} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \quad (80) \end{aligned}$$

ii) Para $r = r' - \varepsilon$, tenemos $r < r'$, y por lo tanto $r_< = r, r_> = r'$. Luego, utilizando la Ec. (78),

$$rg(r, r') = C \left(r^{l+1} - \frac{a^{2l+1}}{r^l} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right).$$

Evaluamos la derivada en $r = r' - \varepsilon$, y hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'-\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} &= C \left[(l+1)r^l + \frac{la^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) \Big|_{r=r'} \\ &= C \frac{r'^l}{r'^{l+1}} \left[(l+1) + \frac{la^{2l+1}}{r'^{2l+1}} \right] \left(1 - \frac{r'^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr}(rg)\Big|_{\substack{r=r'+\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} = \frac{C}{r'} \left[(l+1) + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \quad (81)$$

Sustituyendo (80) y (81) en la Ec. (79), tenemos:

$$-\frac{C}{r'} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] - \frac{C}{r'} \left[(l+1) + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] = -\frac{4\pi}{r'}$$

de donde podemos obtener C ,

$$\begin{aligned} & C \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} - l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} - (l+1) \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right. \\ & \left. + (l+1) - (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} - l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] = \frac{4\pi}{r'}, \\ & C \left[l - (l+1) \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} + (l+1) - l \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right] = \frac{4\pi}{r'}, \\ & C(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right] = \frac{4\pi}{r'} \\ \Rightarrow & \boxed{C = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]}} \end{aligned}$$

Luego, la función $g(r, r')$ en la Ec. (78) es:

$$g(r, r') = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

Entonces, la función de Green en la Ec. (72)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(r, r', \theta, \theta', \phi, \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi), \end{aligned}$$

se puede expresar, sustituyendo $g(r, r')$, como

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{\left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}}\right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}}\right)}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (82)$$

La Ec. (82) constituye la expansión de la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en coordenadas esféricas, donde $r_>$ es el mayor entre r y r' , y $r_<$ es el menor entre r y r' .

Algunos casos particulares de interés son:

1. **Potencial de una carga puntual en el espacio libre**, que corresponde al caso $a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty$,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{(2l+1)} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

2. **Problema interior de la esfera**, que corresponde a $a \rightarrow 0, b$ finito, igual al radio de la esfera.
3. **Problema exterior de la esfera**, que corresponde a a finito, igual al radio de la esfera, y $b \rightarrow \infty$.

13.45 Potencial dentro de una esfera sin carga

Calcule el potencial dentro de una esfera radio b , sin carga en su interior, sujeta a un potencial $V(\theta, \phi)$ en su superficie.

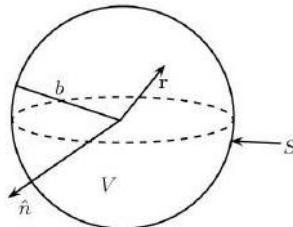


Figure 78: Esfera sujeta a potencial $V(\theta, \phi)$ en su superficie.

Solución:

Para este problema, tomamos $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en la Ec. (82) con $a = 0$,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

donde $r_>$ es el mayor entre r y r' ; $r_<$ es el menor entre r y r' , y la sustituimos en la solución para Φ en la ecuación:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n} da'.$$

Puesto que no hay cargas dentro del volumen V correspondiente a la esfera de radio b , tenemos $\rho = 0$ en V y, por lo tanto,

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n} da' \quad (83)$$

donde $\Phi|_S = V(\theta, \phi)$. Calculamos

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n'} \right|_S = \left. \frac{\partial G}{\partial r'} \right|_{r'=b}$$

Cuando $r' = b$, tenemos $r' > r$; luego $r_< = r$ y $r_> = r'$. Entonces, la forma de la función de Green que se debe tomar en la frontera $r' = b$ es

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} r^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$

Luego,

$$\frac{\partial G}{\partial r'} = -4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} r^l \left(\frac{l+1}{r'^{l+2}} + \frac{lr'^{l-1}}{b^{2l+1}} \right).$$

En la superficie de la esfera,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial r'} \right|_{r'=b} &= -4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} r^l \left(\frac{l+1}{b^{l+2}} + \frac{ll^{l-1}}{b^{2l+1}} \right) \\ &= -\frac{4\pi}{b^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \left(\frac{r}{b} \right)^l. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ec. (83), con diferencial de área $da' = b^2 d\phi' \sin \theta' d\theta'$, obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{b^2} \oint_S V(\theta', \phi') \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \left(\frac{r}{b}\right)^l \right] b^2 d\phi' \sin \theta' d\theta' \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{b}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi),\end{aligned}\quad (84)$$

donde

$$A_{lm} = \left[\int V(\theta', \phi') Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\phi' \sin \theta' d\theta' \right].$$

Note que el potencial Ec. (84) tiene la misma forma que la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, para el interior de una esfera sin cargas.

13.46 Potencial para esfera hueca con anillo

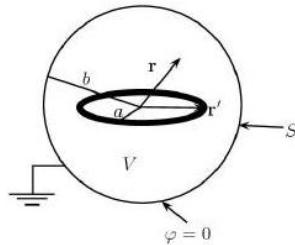


Figure 79: Esfera conectada a tierra, con un aro cargado en su interior.

- Debemos expresar la densidad de carga del aro en términos de funciones delta de Dirac. Esto es, $\rho(\mathbf{r}') \propto q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Recordemos que la función delta de Dirac, en coordenadas esféricas, corresponde a:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r'^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta').$$

La carga está localizada en $r = a, \theta = \pi/2, \forall \phi$. Luego,

$$\rho(\mathbf{r}') = k \frac{q}{a^2} q \delta(r' - a) \delta(\cos \theta),$$

donde k es una constante que se determina mediante la condición

$$\int \rho(\mathbf{r}') d^3 r' = q.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \rho(\mathbf{r}') d^3 r' &= k \frac{q}{a^2} \int \delta(r' - a) \delta(\cos \theta) r'^2 dr d\phi d(\cos \theta) \\ &= k \frac{q}{a^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^b \delta(r' - a) r'^2 dr \int_0^\pi \delta(\cos \theta) d(\cos \theta) \\ &= kq2\pi = q \Rightarrow k = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{\rho(\mathbf{r}') = \frac{q}{2\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta).}$$

La solución para el potencial dentro del volumen V de la esfera es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n} da'$$

con las siguientes condiciones de frontera:

1. $\Phi|_S = 0$ sobre la superficie S de la esfera. Luego, la integral sobre la superficie S es cero, y el potencial dentro de la esfera es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' \quad (85)$$

2. En la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ expandida en coordenadas esféricas $a = 0$.
3. Simetría azimutal: $\Phi(\mathbf{r})$ es independiente de ϕ ; esto implica que $m = 0$ en la expansión de $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en coordenadas esféricas.

Estas condiciones implican que la función de Green debe tener la forma

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{l0}^*(\theta', \phi') Y_{l0}(\theta, \phi)}{(2l+1)} r'_< \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

donde

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta).$$

Luego,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta') P_l(\cos \theta) r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right).$$

Consideremos el caso $r > r'$. Entonces $r_> = r$, $r_< = r'$, y el potencial de la Ec. (85) queda como:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{2\pi a^2} \int \delta(r' - a) \delta(\cos \theta') \left[\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta') P_l(\cos \theta) r'^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) \right] \times \\ &\quad \times r'^2 dr' d\phi' d(\cos \theta') \\ &= \frac{q}{2\pi a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^b \delta(r' - a) r'^{2+l} dr' \int_0^\pi \delta(\cos \theta') P_l(\cos \theta') d(\cos \theta') \right] \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \end{aligned}$$

Esto es,

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} a^l P_l(0) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

En el caso $r < r'$, tenemos $r_< = r$, $r_> = r'$, y

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{2\pi a^2} \int_V \delta(r' - a) \delta(\cos \theta') \left[\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta') P_l(\cos \theta) r'^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) \right] r'^2 dr' d\phi' d(\cos \theta') \\ &= \frac{q}{2\pi a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^b \delta(r' - a) r'^2 \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) dr' \int \delta(\cos \theta') P_l(\cos \theta') d(\cos \theta') \right] r^l P_l(\cos \theta). \end{aligned}$$

Esto es,

$$\Phi(\mathbf{r}') = q \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(0) \left(\frac{1}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Ambos casos se pueden expresar como

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} r_<^l P_l(0) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Sustituyendo

$$P_l(0) = \begin{cases} 0, & l \text{ impar} \\ (-1)^{l/2} \frac{(l-1)!!}{l!!}, & l \text{ par} \end{cases}$$

podemos escribir

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l \text{ par}}^{\infty} (1)^{l/2} \frac{(l-1)!!}{l!!} r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos \theta),$$

donde $r_>$ es el mayor entre r y a , y $r_<$ es el menor entre r y a .

En el límite $b \rightarrow \infty$, tenemos un aro cargado en el espacio libre, y el potencial da

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l \text{ par}}^{\infty} (-1)^{l/2} \frac{(l-1)!!}{l!!} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos \theta),$$

13.47 Jackson 3.13

Resuelva el potencial en el Problema 3.1, usando la función de Green apropiada obtenida en el texto, y verifique que la respuesta obtenida de esta manera concuerde con la solución directa de la ecuación diferencial.

Solución:

Recuerde que el Problema 3.1 pregunta por el potencial entre dos esferas concéntricas de radios a y b (con $b > a$), donde el hemisferio superior de la esfera interior y el hemisferio inferior de la esfera exterior se mantienen en potencial V , y donde los otros hemisferios tienen potencial cero. Como este problema involucra el potencial entre dos esferas, usamos la función de Dirichlet Green

tal vez cambiar el Ω por los ángulos

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) Y_l^m(\Omega) Y_l^{m*}(\Omega') \quad (86)$$

Debido a que no hay cargas entre las esferas, la solución de la función de Green para el potencial solo involucra la integral de superficie

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} da'$$

Aquí, notamos una sutileza en el sentido de que la superficie límite en realidad está desconectada e incluye tanto la esfera interior de radio a como la esfera exterior de radio b . Esto significa que el potencial puede escribirse como la suma de dos contribuciones

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{r'=a} \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} a^2 d\Omega' - \frac{1}{4\pi} \int_{r'=b} \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} b^2 d\Omega' \quad (87)$$

Ahora calculamos las derivadas normales de la función de Green (86)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n'} \right|_{r'=a} &= - \left. \frac{\partial G}{\partial r'} \right|_{r_<=r'=a} = \\ &= -\frac{4\pi}{a^2} \sum_{l,m} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{l+1} \left(\frac{r}{b}\right)^l \right] Y_l^m(\Omega) Y_l^{m*}(\Omega') \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n'} \right|_{r'=b} &= \left. \frac{\partial G}{\partial r'} \right|_{r_>=r'=b} = \\ &= -\frac{4\pi}{b^2} \sum_{l,m} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} \left[\left(\frac{r}{b}\right)^l - \left(\frac{a}{b}\right)^l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right] Y_l^m(\Omega) Y_l^{m*}(\Omega') \end{aligned}$$

Insertando estas dos expresiones en (87) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \sum_{l,m} \left[\int V_a(\Omega') Y_l^{m*}(\Omega') d\Omega' \right] \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{l+1} \left(\frac{r}{b}\right)^l \right] Y_l^m(\Omega) \\ &\quad + \sum_{l,m} \left[\int V_b(\Omega') Y_l^{m*}(\Omega') d\Omega' \right] \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} \left[\left(\frac{r}{b}\right)^l - \left(\frac{a}{b}\right)^l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right] Y_l^m(\Omega) \end{aligned}$$

Esta es la expresión general para la solución del problema de valor en la frontera donde $V_a(\Omega)$ es el potencial en la esfera interior y $V_b(\Omega)$ es el potencial en la esfera exterior.

Para el problema de los hemisferios superior/inferior, notamos que la simetría azimutal nos permite restringir los valores de m a $m = 0$ únicamente.

En este caso, la expansión armónica esférica se reduce a una expansión en polinomios de Legendre:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \sum_l \left[\int_{-1}^1 V_a(\zeta) P_l(\zeta) d\zeta \right] \frac{2l+1}{2 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right)} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} - \left(\frac{a}{b} \right)^{l+1} \left(\frac{r}{b} \right)^l \right] P_l(\cos \theta) \\ &\quad + \sum_l \left[\int V_b(\zeta) P_l(\zeta) d\zeta \right] \frac{2l+1}{2 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right)} \left[\left(\frac{r}{b} \right)^l - \left(\frac{a}{b} \right)^l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] P_l(\cos \theta)\end{aligned}$$

donde $\zeta = \cos \theta'$. Dado que $V_a = V$ para $\zeta > 0$ y $V_b = V$ para $\zeta < 0$, la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \sum_l \frac{(2l+1)VN_l}{2 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right)} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} - \left(\frac{a}{b} \right)^{l+1} \left(\frac{r}{b} \right)^l \right] P_l(\cos \theta) \\ &\quad + \sum_l \frac{(2l+1)(-1)^l VN_l}{2 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right)} \left[\left(\frac{r}{b} \right)^l - \left(\frac{a}{b} \right)^l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] P_l(\cos \theta) \\ \Phi(\mathbf{x}) &= \sum_l \frac{(2l+1)VN_l}{2 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right)} \left[\left(\left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} - \left(\frac{a}{b} \right)^{l+1} \left(\frac{r}{b} \right)^l \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^l \left(\left(\frac{r}{b} \right)^l - \left(\frac{a}{b} \right)^l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right) \right] P_l(\cos \theta)\end{aligned}$$

donde

$$N_l = \int_0^1 P_l(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ (-1)^{j+1} \frac{\Gamma(j-\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi} j!} & l = 2j-1 \text{ impar} \end{cases}$$

Reordenando los términos del potencial:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \sum_l \frac{(2l+1)VN_l}{2 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right)} \left[\left(1 + (-1)^{l+1} \left(\frac{a}{b} \right)^l \right) \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^l \left(1 + (-1)^{l+1} \left(\frac{a}{b} \right)^{l+1} \right) \left(\frac{r}{b} \right)^l \right] P_l(\cos \theta) \\ \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{V}{2} + V \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} (4j-1) \Gamma(j-\frac{1}{2})}{4\sqrt{\pi} j! \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{4j-1} \right)} \left[\left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{2j-1} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^{2j} \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{2j} \right) \left(\frac{r}{b} \right)^{2j-1} \right] P_{2j-1}(\cos \theta)\end{aligned}$$

13.48 Función de Green entre dos planos

La función de Green de Dirichlet para el espacio ilimitado entre los planos en $z = 0$ y $z = L$ permite discutir una carga puntual o una distribución de carga entre planos conductores paralelos mantenidos a potencial cero.

a) Utilizando coordenadas cilíndricas, demuestre que una forma de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_<\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_>\right)$$

b) Demuestre que una forma alternativa de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') \frac{\sinh(kz_<) \sinh[k(L-z_>)]}{\sinh(kL)}$$

Solución:

¿Qué coordenadas utilizamos?

- Bueno, como tenemos planos y necesitamos abarcarlos a ambos nos conviene utilizar coordenadas cilíndricas (la idea es similar al uso del cilindro para el Teorema de Gauss) Luego en coordenadas cilíndricas, ϕ es periódica con período 2π . Por lo tanto podemos expandir la función de Green como una serie de Fourier en forma exponencial, $e^{im\phi}$.

- Ahora, si miramos las condiciones de contorno en entre los planos $z = 0$ y $z = L$, entonces debemos usar la serie de senos de Fourier $\sin(n\pi z/L)$ en la coordenada z .

Luego la ecuación de Poisson

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

en coordenadas cilíndricas es:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \quad (88)$$

donde el ρ en el denominador no lleva prima.

Usando las relaciones de completitud

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} = 2\pi\delta(\phi - \phi') \quad (89)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) = \frac{L}{2} \delta(z - z')$$

el lado derecho (88) nos queda

$$-\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') = -\frac{4\pi}{\rho} \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L} \delta(\rho - \rho') \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right)$$

y la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(\rho, \rho') e^{im(\phi - \phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \quad (90)$$

De esta manera la Ec. (88) nos queda:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right] g(\rho, \rho') = -\frac{4}{L\rho} \delta(\rho - \rho')$$

Haciendo la sustitución

$$x = \frac{n\pi\rho}{L}$$

convierte la parte homogénea de esto en una ecuación de Bessel modificada

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2} \right) \right] g(x, x') = -\frac{4}{Lx} \delta(x - x')$$

$$g(x, x') = \begin{cases} A_{mn} I_m(x) + B_{mn} K_m(x) & x < x' \\ C_{mn} I_m(x) + D_{mn} K_m(x) & x > x' \end{cases}$$

Para hallar la solución notemos que la función de Bessel modificada $I_m(x)$ diverge cuando $x \rightarrow \infty$ y la función $K_m(x)$ diverge cuando $x \rightarrow 0$, así:

$$g(x, x') = \begin{cases} A_{mn} I_m(x) & x < x' \\ D_{mn} K_m(x) & x > x' \end{cases}$$

donde los coeficientes A_{mn} y D_{mn} están determinados por las condiciones de contorno en $x = x'$

$$g_< = g_>, \quad \frac{d}{dx} g_< - \frac{d}{dx} g_> = \frac{4}{Lx'}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$A_{mn}I_m(x') = D_{mn}K_m(x') \quad (i)$$

$$A_{mn}I'_m(x') - D_{mn}K'_m(x') = \frac{4}{Lx'} \quad (ii)$$

de (i):

$$\Rightarrow A_{mn} = \frac{D_{mn}K_m(x')}{I_m(x')}$$

y sustituyendo A_{mn} en (i),

$$\begin{aligned} D_{mn} \frac{K_m(x')}{I_m(x')} I'_m(x') - D_{mn} K'_m(x') &= \frac{4}{Lx'} \\ \Rightarrow D_{mn} &= \frac{4}{Lx'} \frac{I_m(x')}{I'_m(x') K_m(x') - I_m(x') K'_m(x')} \end{aligned}$$

y similarmente obtenemos:

$$A_{mn} = \frac{4}{Lx'} \frac{K_m(x')}{I'_m(x') K_m(x') - I_m(x') K'_m(x')}$$

Aquí viene lo interesante, resulta que las [funciones de Bessel modificadas satisfacen la fórmula de Wronskiano](#)

$$\boxed{I_m(x)K'_m(x) - I'_m(x)K_m(x) = -\frac{1}{x}}$$

finalmente nos da

$$\begin{aligned} g(x, x') &= \frac{4}{L} \begin{cases} I_m(x)K_m(x') & x < x' \\ I_m(x')K_m(x) & x > x' \end{cases} \\ g(x, x') &= \frac{4}{L} I_m(x_<)K_m(x_>) \end{aligned} \quad (91)$$

donde

$$x_< = \min(x, x'), \quad x_> = \max(x, x')$$

Entonces sustituimos (91) en (90), y con $x = \frac{n\pi\rho}{L}$ la función de Green nos queda:

$$\boxed{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi\rho_<}{L}\right) K_m\left(\frac{n\pi\rho_>}{L}\right)}$$

b) Demuestre que una forma alternativa de la función de Green es

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') \frac{\sinh(kz_<) \sinh[k(L-z_>)]}{\sinh(kL)}$$

Esta forma alternativa de la función de Green se obtiene expandiendo ϕ y ρ en lugar de ϕ y z . Para la expansión ρ , usamos la relación integral

$$\int_0^{\infty} k J_\nu(k\rho) J_\nu(k\rho') dk = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho')$$

junto con la relación de completitud (4) para motivar la descomposición

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k dk g_k(z, z') e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho')$$

Dado que la función de Bessel $J_m(k\rho)$ satisface la ecuación de Bessel

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] J_m(k\rho) = 0$$

la sustitución de (6) en la ecuación de la función de Green (3) da

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right] g_k(z, z') = -2\delta(z - z')$$

Dado que $g_k(z, z')$ desaparece en $z = 0$ y $z = L$, este es un problema de función de Green unidimensional estándar.

$$g_k(z, z') = \begin{cases} A \sinh(kz) & z < z' \\ B \sinh[k(L-z)] & z > z' \end{cases}$$

encontramos que las condiciones de emparejamiento y salto se vuelven

$$A \sinh(kz') = B \sinh[k(L-z')], \quad A \cosh(kz') = -B \cosh[k(L-z')] + \frac{2}{k}$$

Esto se puede resolver para dar

$$A = \frac{2 \sinh[k(L-z')]}{k \sinh(kL)}, \quad B = \frac{2 \sinh(kz')}{k \sinh(kL)}$$

así que

$$g_k(z, z') = \frac{2}{k \sinh(kL)} \sinh(kz_<) \sinh[k(L - z_>)]$$

Sustituyendo esto en (6) entonces se obtiene

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^k dk e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') \frac{\sinh(kz_<) \sinh[k(L - z_>)]}{\sinh(kL)}$$

13.49 Capa cilíndrica dieléctrica muy larga

Una capa cilíndrica circular recta muy larga de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 y radios interior y exterior a y b , respectivamente, se coloca en un campo eléctrico previamente uniforme E_0 con su eje perpendicular al campo. El medio dentro y fuera del cilindro tiene una constante dieléctrica de la unidad.

(a) Determine el potencial y campo eléctrico en las tres regiones, despreciando los efectos finales.

(b) Dibuje las líneas de fuerza para un caso típico $b \approx 2a$.

(c) Discuta las formas límite de su solución apropiadas para un cilindro dieléctrico sólido en un campo uniforme y una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

Solución:

(a) Debido a que el cilindro es largo y uniforme a lo largo de su eje, y el campo original es uniforme, el problema se reduce a un problema de **coordenadas polares bidimensionales**. Coloquemos el campo apuntando en la dirección positiva x .

No hay carga libre en ninguna parte, y no hay carga ligada en ninguna parte excepto en la superficie, por lo que podemos dividir el problema en tres regiones y usar la solución de la ecuación de Laplace en cada región.

Luego, se encontró que la solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas polares cuando se involucra el barrido angular completo es:

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi})}$$

La región interior comprende el origen, por lo que debe tener la forma:

$$\Phi_{\rho < a} = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi})$$

La región externa debe convertirse en un campo uniforme muy lejos:

$$-E_0\rho \cos \phi = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi})$$

Debido a la ortogonalidad, $a_0 = 0, b_0 = 0$, solo el término $m = 1$ es distinto de cero y $A_1 = B_1$

$$-E_0 = a_1 2B_1$$

De modo que la solución se convierte en:

$$\Phi_{\rho>b} = (-E_0\rho + b_1\rho^{-1}) \cos \phi$$

La región central simplemente conecta las otras dos regiones:

$$\Phi_{a<\rho$$

Ahora aplicamos las condiciones de contorno:

$$(\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma$$

No hay carga libre y la dirección normal es en la dirección radial:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\rho} &= \epsilon_1 \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\rho} \\ \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} &= \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \end{aligned}$$

Aplicemos esto en la superficie exterior primero ($\rho = b$) :

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{\rho>b}}{\partial \rho} &= \epsilon \frac{\partial \Phi_{a<\rho**}}{\partial \rho} \text{ en } \rho = b \\ \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial \rho} ((-E_0\rho + b_1\rho^{-1}) \cos \phi) &= \epsilon \frac{\partial}{\partial \rho} \left(c_0 + d_0 \ln \rho + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \rho^m + d_m \rho^{-m}) (C_m e^{im\phi} + D_m e^{-im\phi}) \right) \\ \epsilon_0 ((-E_0 - b_1 b^{-2}) \cos \phi) &= \epsilon \left(d_0 \frac{1}{b} + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m m b^{m-1} - m d_m b^{-m-1}) (C_m e^{im\phi} + D_m e^{-im\phi}) \right) \end{aligned}**$$

Debido a la ortogonalidad $d_0 = 0, D_m = C_m$ y solo el término $m = 1$ es distinto de cero. También podemos descartar c_0 ya que es solo una constante general que no afecta el campo final.

$$\epsilon_0 ((-E_0 - b_1 b^{-2}) \cos \phi) = \epsilon ((c_1 - d_1 b^{-2}) C_1 2 \cos \phi)$$

El factor c_1 se puede combinar con C_1

$$\implies C_1 = \frac{-\epsilon_0 (E_0 + b_1 b^{-2})}{2\epsilon (1 - d_1 b^{-2})}$$

La solución en la región media ahora se convierte en:

$$\Phi_{a < \rho < b} = -(\rho + d_1 \rho^{-1}) \frac{\epsilon_0 (E_0 + b_1 b^{-2})}{\epsilon (1 - d_1 b^{-2})} \cos \phi$$

Apliquemos la otra condición de contorno en la superficie exterior ($\rho = b$)

$$\frac{\partial \Phi_{\rho > b}}{\partial \phi} = \frac{\partial \Phi_{a < \rho < b}}{\partial \phi} \text{ en } \rho = b$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} ((-E_0 \rho + b_1 \rho^{-1}) \cos \phi) = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(c_0 - (\rho + d_1 \rho^{-1}) \frac{\epsilon_0 (E_0 + b_1 b^{-2})}{\epsilon^2 (1 - d_1 b^{-2})} \cos \phi \right) \text{ en } \rho = b$$

$$(E_0 - b_1 b^{-2}) \epsilon (1 - d_1 b^{-2}) = (1 + d_1 b^{-2}) \epsilon_0 (E_0 + b_1 b^{-2})$$

$$d_1 = b^2 \frac{b_1 (\epsilon + \epsilon_0) - E_0 b^2 (\epsilon - \epsilon_0)}{b_1 (\epsilon - \epsilon_0) - E_0 b^2 (\epsilon + \epsilon_0)}$$

La solución en la región media ahora se convierte en:

$$\Phi_{a < \rho < b} = ((b_1 (\epsilon - \epsilon_0) - E_0 b^2 (\epsilon + \epsilon_0)) \rho + b^2 (b_1 (\epsilon + \epsilon_0) - E_0 b^2 (\epsilon - \epsilon_0)) \rho^{-1}) \frac{1}{2\epsilon b^2} \cos \phi$$

Ahora apliquemos las condiciones de contorno en la superficie interior ($\rho = a$):

$$\epsilon \frac{\partial \Phi_{a < \rho < b}}{\partial \rho} = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{\rho < a}}{\partial \rho} \text{ en } \rho = a$$

$$((b_1 (\epsilon - \epsilon_0) - E_0 b^2 (\epsilon + \epsilon_0)) - b^2 (b_1 (\epsilon + \epsilon_0) - E_0 b^2 (\epsilon - \epsilon_0)) a^{-2}) \frac{1}{2b^2} = \epsilon_0 A_1$$

Así como:

$$\frac{\partial \Phi_{a < \rho < b}}{\partial \phi} = \frac{\partial \Phi_{\rho < a}}{\partial \phi} \text{ en } \rho = a$$

$$((b_1 (\epsilon - \epsilon_0) - E_0 b^2 (\epsilon + \epsilon_0)) a + b^2 (b_1 (\epsilon + \epsilon_0) - E_0 b^2 (\epsilon - \epsilon_0)) a^{-1}) \frac{1}{2\epsilon a b^2} = A_1$$

Resolvamos este sistema de ecuaciones para las constantes restantes:

$$b_1 = E_0 b^2 \frac{(b^2 - a^2)(\epsilon^2 - \epsilon_0^2)}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2}$$

$$A_1 = \left(\frac{-4b^2 E_0 \in \epsilon_0}{(b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2)} \right)$$

De modo que las soluciones finales son:

$$\Phi_{\rho < a} = \left(\frac{-4b^2 \epsilon \epsilon_0}{(b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2)} \right) E_0 \rho \cos \phi$$

$$\Phi_{a < \rho < b} = \frac{-2ab^2 \epsilon_0}{(b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2)} \left((\epsilon + \epsilon_0) \frac{\rho}{a} + (\epsilon - \epsilon_0) \frac{a}{\rho} \right) E_0 \cos \phi$$

$$\Phi_{\rho > b} = \left(-\rho + \frac{(b^2 - a^2)(\epsilon^2 - \epsilon_0^2)}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2} \frac{b^2}{\rho} \right) E_0 \cos \phi$$

Calculemos los campos eléctricos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\hat{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \\ \mathbf{E}_{\rho < a} &= \left(\frac{4b^2 \epsilon \epsilon_0}{(b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2)} \right) E_0 [\hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi] \\ \mathbf{E}_{\rho < a} &= \left(\frac{4b^2 \epsilon \epsilon_0}{(b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2)} \right) E_0 \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_{a < \rho < b} = \frac{2b^2 \epsilon_0}{(b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2)} E_0 \left[(\epsilon + \epsilon_0) \hat{\mathbf{i}} - (\epsilon - \epsilon_0) \frac{a^2}{\rho^2} (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\phi} \sin \phi) \right]$$

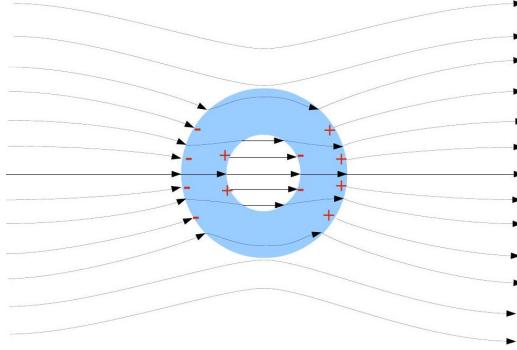
$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{i}} + \frac{(b^2 - a^2)(\epsilon^2 - \epsilon_0^2)}{b^2(\epsilon + \epsilon_0)^2 - a^2(\epsilon - \epsilon_0)^2} \frac{b^2}{\rho^2} E_0 (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\phi} \sin \phi)$$

(b) Dibujemos las líneas de fuerza para el caso típico $b \approx 2a$.

$$\mathbf{E}_{\rho < a} = \left(\frac{16\epsilon \epsilon_0}{(4(\epsilon + \epsilon_0)^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2)} \right) E_0 \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{E}_{a < p < b} = \frac{8\epsilon_0}{(4(\epsilon + \epsilon_0)^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2)} E_0 \left[(\epsilon + \epsilon_0) \hat{\mathbf{i}} - (\epsilon - \epsilon_0) \frac{a^2}{\rho^2} (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\phi} \sin \phi) \right]$$

$$\mathbf{E}_{\rho > b} = E_0 \hat{\mathbf{i}} + \frac{12(\epsilon^2 - \epsilon_0^2)}{4(\epsilon + \epsilon_0)^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2} \frac{a^2}{\rho^2} E_0 (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\phi} \sin \phi)$$



Nótese que el campo es uniforme en el interior. El borde exterior izquierdo desarrolla una densidad de carga ligada a la superficie negativa, que destruye las líneas de campo. El borde exterior derecho desarrolla una densidad de carga unida a la superficie positiva, lo que crea líneas de campo. Como resultado, hay menos líneas de campo y, por lo tanto, un campo más débil dentro del material. Las cargas ligadas negativas en el exterior izquierdo atraerían una carga de prueba, por lo que las líneas de campo se doblan hacia el objeto.

(c) Para un cilindro dieléctrico sólido en un campo uniforme, simplemente hacemos que a se acerque a cero.

$$\mathbf{E}_{\rho < b} = \frac{2\epsilon_0}{(\epsilon + \epsilon_0)} E_0 \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{E}_{\rho > b} = E_0 \hat{\mathbf{i}} + \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{(\epsilon + \epsilon_0)} \frac{b^2}{\rho^2} E_0 (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\phi} \sin \phi)$$

Cuando el cilindro se vuelve sólido, el campo interior se vuelve uniforme.

Para una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme, dejamos que b se acerque al infinito.

$$\mathbf{E}_{\rho < a} = \frac{4\epsilon\epsilon_0}{(\epsilon + \epsilon_0)^2} E_0 \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{E}_{a < \rho} = \frac{2\epsilon_0}{(\epsilon + \epsilon_0)^2} E_0 \left[(\epsilon + \epsilon_0) \hat{\mathbf{i}} - (\epsilon - \epsilon_0) \frac{a^2}{\rho^2} (\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\phi} \sin \phi) \right]$$

13.50 Jackson 4.8 v2

Una capa cilíndrica circular recta muy larga de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 y radios interior y exterior a y b , respectivamente, se coloca en un campo eléctrico previamente uniforme E_0 con su eje perpendicular al campo. El medio dentro y fuera del cilindro tiene una constante dieléctrica de la unidad.

a) Determine el potencial y el campo eléctrico en las tres regiones, despreciando los efectos finales.

Solución:

Como el cilindro es muy largo, lo tratamos como un problema bidimensional. En este caso, el potencial admite una expansión general

$$\Phi = \sum_m [\alpha_m \rho^m + \beta_m \rho^{-m}] \cos(m\phi - \delta_m)$$

(donde el término $m = 0$ en realidad debería ser $\alpha_0 + \beta_0 \log \rho$). Además, al orientar el campo eléctrico a lo largo de la dirección $+x$, podemos usar la simetría $\phi \leftrightarrow -\phi$ de este problema para eliminar las fases δ_m . Como resultado, podemos escribir el potencial como una expansión en cada una de las tres regiones.

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1 = A_0 + \sum_m A_m \rho^{-m} \cos(m\phi) - E_0 \rho \cos \phi, & \rho > b \\ \Phi_2 = B_0 + C_0 \log \rho + \sum_m (B_m \rho^m + C_m \rho^{-m}) \cos(m\phi), & a < \rho < b \\ \Phi_3 = D_0 + \sum_m D_m \rho^m \cos(m\phi), & \rho < a \end{cases}$$

Para cada valor de m , hay cuatro incógnitas, A_m, B_m, C_m y D_m . Por otro lado, también hay cuatro condiciones coincidentes (D^\perp y E^\parallel tanto en a como en b). Tenga en cuenta, sin embargo, que cuando $m \neq 1$ estas condiciones coincidentes producen ecuaciones homogéneas que solo admiten la solución trivial

$$A_m = B_m = C_m = D_m = 0 \quad m \neq 1$$

(Aunque el caso $m = 0$ debe tratarse por separado, es fácil ver que $C_0 = 0$. Las constantes restantes deben satisfacer $A_0 = B_0 = D_0$, y se puede considerar que desaparece, ya que una constante general añadida al potencial no es física). Por lo tanto, podemos centrarnos en $m = 1$ y escribir

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1 = (A\rho^{-1} - E_0\rho) \cos \phi, & \rho > b \\ \Phi_2 = (B\rho + C\rho^{-1}) \cos \phi, & a < \rho < b \\ \Phi_3 = D\rho \cos \phi, & \rho < a \end{cases}$$

Podemos obtener el campo eléctrico tomando un gradiente

$$E_\rho = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \begin{cases} E_\rho^1 = (A\rho^{-2} + E_0) \cos \phi, & \rho > b \\ E_\rho^2 = (-B + C\rho^{-2}) \cos \phi, & a < \rho < b \\ E_\rho^3 = -D \cos \phi, & \rho < a \end{cases}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \begin{cases} E_\phi^1 = (A\rho^{-2} - E_0) \sin \phi, & \rho > b \\ E_\phi^2 = (B + C\rho^{-2}) \sin \phi, & a < \rho < b \\ E_\phi^3 = D \sin \phi, & \rho < a \end{cases}$$

La coincidencia en $\rho = a$ es

$$\epsilon_0 E_\rho^3 = \epsilon E_\rho^2 \Big|_{\rho=a}, \quad E_\phi^3 = E_\phi^2 \Big|_{\rho=a}$$

o

$$(\epsilon_0/\epsilon) D - B + Ca^{-2} = 0, \quad D - B - Ca^{-2} = 0$$

Esto puede resolverse para C y D en términos de B

$$C = \frac{1 - \epsilon_0/\epsilon}{1 + \epsilon_0/\epsilon} Ba^2, \quad D = \frac{2}{1 + \epsilon_0/\epsilon} B$$

Similarly, the matching at $\rho = b$ is

$$\epsilon E_\rho^2 = \epsilon_0 E_\rho^1 \Big|_{\rho=b}, \quad E_\phi^2 = E_\phi^1 \Big|_{\rho=b}$$

or

$$(\epsilon_0/\epsilon) Ab^{-2} + B - Cb^{-2} = -(\epsilon_0/\epsilon) E_0, \quad Ab^{-2} - B - Cb^{-2} = E_0$$

Eliminating C using (5) gives rise to the simultaneous equations

$$\begin{pmatrix} b^{-2} & -1 - \frac{1-\epsilon_0/\epsilon}{1+\epsilon_0/\epsilon} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ (\epsilon_0/\epsilon) b^{-2} & 1 - \frac{1-\epsilon_0/\epsilon}{1+\epsilon_0/\epsilon} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon_0/\epsilon \end{pmatrix}$$

This yields a solution

$$A = E_0 \Delta^{-1} (1 - \epsilon_0/\epsilon) \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right) b^2$$

$$B = -E_0 \Delta^{-1} (2\epsilon_0/\epsilon)$$

where

$$\Delta = (1 + \epsilon_0/\epsilon) \left(1 - \left(\frac{1 - \epsilon_0/\epsilon a}{1 + \epsilon_0/\epsilon b}\right)^2\right)$$

is b^2 times the determinant of the above matrix. Substituting B into (5) then gives the remaining coefficients

$$C = -E_0 \Delta^{-1} \frac{(1 - \epsilon_0/\epsilon) 2\epsilon_0/\epsilon}{1 + \epsilon_0/\epsilon} a^2$$

$$D = -E_0 \Delta^{-1} \frac{4\epsilon_0/\epsilon}{1 + \epsilon_0/\epsilon}$$

These expressions may be simplified to read

$$A = E_0 b^2 \frac{(\epsilon^2 - \epsilon_0^2)(b^2 - a^2)}{(\epsilon + \epsilon_0)^2 b^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2 a^2}$$

$$B = -2E_0 \frac{\epsilon_0 (\epsilon + \epsilon_0) b^2}{(\epsilon + \epsilon_0)^2 b^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2 a^2}$$

$$C = -2E_0 a^2 \frac{\epsilon_0 (\epsilon - \epsilon_0) b^2}{(\epsilon + \epsilon_0)^2 b^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2 a^2}$$

$$D = -4E_0 \frac{\epsilon \epsilon_0 b^2}{(\epsilon + \epsilon_0)^2 b^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2 a^2}$$

The potential and electric field are obtained by substituting these coefficients into (3) and (4). For the potential, we have

$$b < \rho : \Phi_1 = E_0 \left[\frac{(\epsilon^2 - \epsilon_0^2)(b^2 - a^2)}{(\epsilon + \epsilon_0)^2 b^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2 a^2} \frac{b^2}{\rho} - \rho \right] \cos \phi$$

$$a < \rho < b : \Phi_2 = -2E_0 \frac{\epsilon_0 b^2 [(\epsilon + \epsilon_0) \rho + (\epsilon - \epsilon_0) a^2 / \rho]}{(\epsilon + \epsilon_0)^2 b^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2 a^2} \cos \phi$$

$$\rho < a : \Phi_3 = -4E_0 \frac{\epsilon \epsilon_0 b^2 \rho}{(\epsilon + \epsilon_0)^2 b^2 - (\epsilon - \epsilon_0)^2 a^2} \cos \phi$$

- b) Sketch the lines of force for a typical case of $b \simeq 2a$. For $\epsilon/\epsilon_0 = 1.5$, the 'electric field' lines look like Note that we have actually plotted the electric displacement field \vec{D} , as Gauss' law in vacuum $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ ensures that the lines of electric displacement are continuous and unbroken. The electric field lines themselves are discontinuous at the interface between dielectrics. c) Discuss the limiting forms of your solution appropriate for a solid dielectric cylinder in a uniform field, and a cylindrical cavity in a uniform dielectric.

A solid dielectric cylinder of radius b may be obtained by taking the limit $a \rightarrow 0$. In this case the expressions (6) and (7) simplify considerably. We give the potential

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1 = -E_0 x + E_0 \frac{1 - \epsilon_0/\epsilon}{1 + \epsilon_0/\epsilon} \frac{b^2 x}{\rho^2}, & \rho > b \\ \Phi_2 = -E_0 \frac{2\epsilon_0/\epsilon}{1 + \epsilon_0/\epsilon} x, & \rho < b \end{cases}$$

where $x = \rho \cos \phi$. The potential Φ_3 is irrelevant in this case. Here we see that the potential Φ_2 inside the cylinder is uniform (but corresponds to a reduced electric field provided $\epsilon > \epsilon_0$). The potential outside is that of the original uniform electric field combined with a two-dimensional dipole.

For the opposite limit, we obtain a cylindrical cavity of radius a by taking the limit $b \rightarrow \infty$. In this case, we end up with

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_2 = -E_0 \frac{2\epsilon_0/\epsilon}{1+\epsilon_0/\epsilon} x - E_0 \frac{2\epsilon_0/\epsilon(1-\epsilon_0/\epsilon)}{(1+\epsilon_0/\epsilon)^2} \frac{a^2 x}{\rho^2}, & \rho > a \\ \Phi_3 = -E_0 \frac{4\epsilon_0/\epsilon}{(1+\epsilon_0/\epsilon)^2} x, & \rho < a \end{cases}$$

At first glance, this appears to be considerably different from (8). However, note that the physical electric field we measure as $\rho \rightarrow \infty$ is $\tilde{E}_0 = E_0 (2\epsilon_0/\epsilon) / (1 + \epsilon_0/\epsilon)$.

13.51 Jackson 4.9

Una carga puntual q se encuentra en el espacio libre a una distancia d del centro de una esfera dieléctrica de radio a ($a < d$) y constante dieléctrica ϵ/ϵ_0 .

- (a) Encuentre el potencial en todos los puntos del espacio como una expansión en armónicos esféricos.
- (b) Calcule las componentes rectangulares del campo eléctrico cerca del centro de la esfera.
- (c) Verifique que, en el límite $\epsilon/\epsilon_0 \rightarrow \infty$, su resultado es el mismo que para la esfera conductora.

Solución:

(a) Coloque la esfera en el origen y la carga puntual en el eje z en $z = d$. Ahora el problema tiene simetría azimutal, de modo que $m = 0$ y la solución involucrará solo polinomios ordinarios de Legendre. Hay dos regiones que tendremos que resolver por separado y conectar por condiciones de contorno:

$$\Phi_{\text{in}} \text{ existe para } r < a, \quad \text{donde tenemos } \epsilon$$

$$\Phi_{\text{ext}} \text{ existe para } r > a, \quad \text{donde tenemos } \epsilon_0$$

Resolvamos para la región exterior primero. **Coloque una carga de imagen q' en $z = a^2/d$** para tener en cuenta los efectos de la esfera dieléctrica. (Esta ubicación nos la sugiere la carga cerca de un problema de esfera conductora hecho anteriormente). El potencial en la región exterior debido a la carga

puntual y la carga imagen es:

$$\Phi_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - d\hat{\mathbf{z}}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - (a^2/d)\hat{\mathbf{z}}|} \right)$$

Podemos expandir cada término en una serie de polinomios de Legendre y combinar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_-^l}{r_+^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad \text{donde } r_- \text{ es el mas pequeño de } (r, r_0) \\ \Phi_{\text{ext}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{1}{r^{l+1}} \left(qd^l + q' \frac{a^{2l}}{d^l} \right) \quad \text{si } r > d \\ \Phi_{\text{ext}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(q \frac{r^l}{d^{l+1}} + q' \frac{a^{2l}}{d^l r^{l+1}} \right) \quad \text{si } r < d \end{aligned}$$

Ahora resolvamos el potencial dentro de la esfera. No hay carga dentro de la esfera, así que todo lo que necesitamos es una imagen de carga q'' fuera de la esfera en $z = d$ para simular los efectos del material dieléctrico. Debemos tener cuidado de notar que la región tiene una permitividad ϵ que debería usarse en nuestra solución:

$$\Phi_{\text{in}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q''}{|\mathbf{r} - d\hat{\mathbf{z}}|} \right)$$

El punto de observación r siempre es menor que d'' , por lo que solo hay una expansión:

$$\Phi_{\text{in}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\sum_{l=0}^{\infty} q'' \frac{r^l}{d^{l+1}} P_l(\cos\theta) \right)$$

Aplicamos la condición de contorno en $r = a$ que $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma$. No hay densidad de carga libre en la superficie de la esfera, por lo que esta condición límite se convierte en:

$$\begin{aligned} (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} &= 0 \\ (\epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{out}} - \epsilon \mathbf{E}_{\text{in}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} &= 0 \\ \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} &= \epsilon \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \\ ql + q'(-l-1) \frac{d}{a} &= q''l \end{aligned}$$

Aplicamos la condición de frontera en $r = a$ que $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n}_{12} = 0$.

$$E_{\text{in},\theta} = E_{\text{out},\theta}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \theta}$$

$$q'' = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} q + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} q' \frac{d}{a}$$

Resolvemos las ecuaciones en los recuadros para encontrar:

$$q' = \frac{\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1}{d(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(l+1) + l)} qla$$

$$q'' = \frac{2l+1}{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(l+1) + l} q$$

La solución final es:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon d} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(l+1) + l} \left(\frac{r}{d}\right)^l P_l(\cos \theta) \right) \\ \Phi_{\text{ext}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{d^{l+1}}{r^{l+1}} \left(1 + \frac{\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1\right)l}{\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(l+1) + l\right)} \left(\frac{a}{d}\right)^{2l+1} \right) \quad \text{si } r > d \\ \Phi_{\text{ext}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\left(\frac{r}{d}\right)^l + \frac{\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1\right)l}{\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(l+1) + l\right)} \left(\frac{a}{d}\right)^l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right) \quad \text{si } r < d \end{aligned}$$

(b) Cerca del centro de la esfera, tenemos $r \ll d$ o $r/d \ll 1$. Debido a que el campo interno está en términos de potencias de r/d , los términos de orden superior se vuelven insignificantes.

$$\Phi_{\text{in}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left[1 + \frac{3}{1 + 2\epsilon_0/\epsilon} \frac{r}{d} \cos \theta \right]$$

$$\Phi_{\text{in}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left[1 + \frac{3}{2 + \epsilon/\epsilon_0} \frac{z}{d} \right]$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left[\frac{3}{2 + \epsilon/\epsilon_0} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

El campo eléctrico cerca del centro de la esfera apunta lejos de la carga puntual, en la dirección negativa z , como si la esfera no estuviera allí, pero

su magnitud se debilita por la cantidad entre corchetes. Por ejemplo, si la constante dieléctrica de la esfera es 4, entonces el campo cerca de su centro es la mitad de fuerte que si la esfera no estuviera allí.

(c) En el límite $\varepsilon/\varepsilon_0 \rightarrow \infty$ podemos encontrar los campos. Debemos tener cuidado de tratar los términos $l = 0$ por separado.

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{in}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{(l+1)+l\epsilon/\epsilon_0} \left(\frac{r}{d}\right)^l P_l(\cos\theta) \right) \\ \Phi_{\text{in}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \\ \Phi_{\text{out}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{l=1}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{d^{l+1}}{r^{l+1}} \left(1 - \left(\frac{a}{d}\right)^{2l+1} \right) \text{ si } r > d \\ \Phi_{\text{out}} &= \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 dr} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{d^l}{r^{l+1}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{a^{l+1}}{r^{l+1}} \left(\frac{a}{d}\right)^l \text{ si } r > d \\ \Phi_{\text{out}} &= \frac{q(a/d)}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - d\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{q(a/d)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - (a^2/d)\hat{\mathbf{z}}|} \text{ si } r > d \\ \Phi_{\text{out}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{l=1}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\left(\frac{r}{d}\right)^l - \left(\frac{a}{d}\right)^l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right) \text{ si } r < d \\ \Phi_{\text{out}} &= \frac{q(a/d)}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - d\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{q(a/d)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - (a^2/d)\hat{\mathbf{z}}|} \text{ si } r > d\end{aligned}$$

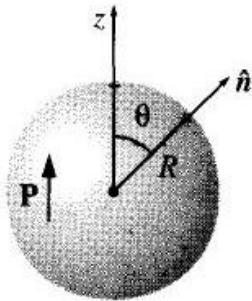
Esto es lo mismo que el potencial de una carga puntual cerca de una esfera conductora. El primer término es el potencial sin conexión a tierra antes de que se aproxime la carga. El segundo se debe a la carga puntual y el tercero se debe a la carga de la imagen.

13.52 Esfera polarizada

Encuentre el campo eléctrico producido por una esfera uniformemente polarizada de radio R .

Solución:

También podemos elegir el eje z para que coincida con la dirección de polarización. La densidad de carga ligada al volumen ρ_b es cero, ya que \mathbf{P} es uniforme, pero



$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \cos \theta,$$

donde θ es la coordenada esférica habitual. Lo que queremos, entonces, es el campo producido por una densidad de carga $P \cos \theta$ pegada sobre la superficie de una esfera. Pero ya hemos calculado el potencial de tal configuración: [Ver ex 3.9](#)

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta, & \text{para } r \leq R, \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, & \text{para } r \geq R. \end{cases}$$

Como $r \cos \theta = z$, el campo dentro de la esfera es uniforme,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad \text{para } r < R$$

Este notable resultado será muy útil en lo que sigue. Fuera de la esfera el potencial es idéntico al de un dipolo perfecto en el origen,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad \text{para } r \geq R,$$

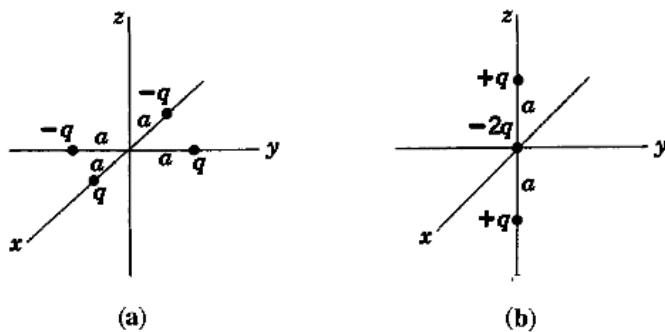
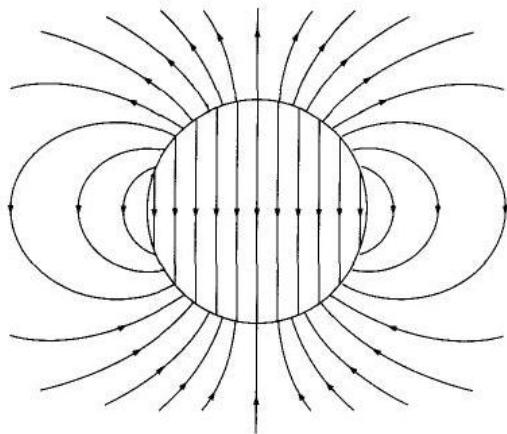
cuyo momento dipolar es, como era de esperar, igual al momento dipolar total de la esfera:

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{P}.$$

El campo de la esfera uniformemente polarizada se muestra en la figura 4.10.

13.53 Jackson 4.1

Calcule los momentos multipolares q_{lm} de las distribuciones de carga que se muestran en las partes a y b. Trate de obtener resultados para los momentos



no nulos válidos para todos los l , pero en cada caso encuentre los dos primeros conjuntos de momentos no nulos como mínimo.

(c) Para la distribución de carga del segundo conjunto b) escriba la expansión multipolar para el potencial. Manteniendo solo el término de orden más bajo en la expansión, grafique el potencial en el plano $x - y$ en función de la distancia desde el origen para distancias mayores que a .

(d) Calcular directamente a partir de la ley de Coulomb el potencial exacto para b) en el plano $x - y$. Graficarlo como una función de la distancia y compararlo con el resultado encontrado en la parte c).

Solución:

(a) La densidad de carga se escribe en coordenadas esféricas como:

$$\rho = \frac{q}{a^2} \delta(r - a) \delta(\cos \theta) [\delta(\phi) - \delta(\phi - 3\pi/2) - \delta(\phi - \pi) + \delta(\phi - \pi/2)]$$

Inserte esto en la definición de momentos multipolares y evalúe:

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \frac{q}{a^2} \int_{lm}^* Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \delta(r' - a) \delta(\cos \theta') [\delta(\phi') - \delta(\phi' - 3\pi/2) - \delta(\phi' - \pi) + \delta(\phi' - \pi/2)] d\mathbf{x}' \\ q_{lm} &= qa^l \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^*(\theta', \phi') \delta(\cos \theta') [\delta(\phi') - \delta(\phi' - 3\pi/2) - \delta(\phi' - \pi) + \delta(\phi' - \pi/2)] \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ q_{lm} &= qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(0) \int_0^{2\pi} e^{-im\phi'} [\delta(\phi') - \delta(\phi' - 3\pi/2) - \delta(\phi' - \pi) + \delta(\phi' - \pi/2)] d\phi' \end{aligned}$$

Usando

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

por ejemplo en el último término

$$\begin{aligned} e^{-i\phi'} &= \cos \frac{\pi}{2} m - i \sin \frac{\pi}{2} m = (-1)^m i^m, \\ q_{lm} &= qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(0) [1 - i^m - (-1)^m + (-1)^m i^m] \\ q_{lm} &= qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(0) (1 - (-1)^m) (1 - i^m) \\ q_{lm} &= 2qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(0) (1 - i^m) \quad \text{si } m \text{ es impar, } q_{lm} = 0 \text{ si } m \text{ es par} \end{aligned}$$

Esta es la solución válida para todos los l . Escribamos los primeros multipolos explícitamente para ver qué significa esto.

El momento monopolar es:

$$q_{00} = 0 \text{ porque } m \text{ es par}$$

Esto tiene sentido porque la carga total es cero.

Los momentos dipolares son:

$$\begin{aligned} q_{1,-1} &= qa \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (1 + i) \\ q_{1,0} &= 0 \\ q_{11} &= qa \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (-1 + i) \end{aligned}$$

Póngalos juntos en el vector de momento dipolar cartesiano:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= p_x \hat{\mathbf{i}} + p_y \hat{\mathbf{j}} + p_z \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{p} &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left((q_{1,-1} - q_{11}) \hat{\mathbf{i}} - i (q_{1,-1} + q_{11}) \hat{\mathbf{j}} + \sqrt{2} q_{10} \hat{\mathbf{k}} \right) \\ \mathbf{p} &= 2qa(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})\end{aligned}$$

Los momentos cuadripolares son:

$$\begin{aligned}q_{2,-2} &= 0 \\ q_{2,-1} &= 0 \\ q_{2,0} &= 0 \\ q_{21} &= 0 \\ q_{2,2} &= 0\end{aligned}$$

El problema nos pide los dos primeros conjuntos de momentos que no desaparecen, por lo que debemos continuar. Los momentos octupolares distintos de cero son:

$$\begin{aligned}q_{3,-3} &= qa^3 \sqrt{\frac{35}{16\pi}} (1 - i) \\ q_{3,-1} &= qa^3 \sqrt{\frac{21}{16\pi}} (-1 - i) \\ q_{31} &= qa^3 \sqrt{\frac{21}{16\pi}} (1 - i) \\ q_{33} &= qa^3 \sqrt{\frac{35}{16\pi}} (-1 - i)\end{aligned}$$

(b) La densidad de carga se escribe en coordenadas esféricas como:

$$\rho = \frac{q}{2\pi a^2} \delta(r - a) [\delta(\cos \theta - 1) + \delta(\cos \theta + 1)] - \frac{2q}{4\pi r^2} \delta(r)$$

Inserte esto en la definición de momentos multipolares y evalúe:

$$\begin{aligned}
q_{lm} &= \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
q_{lm} &= \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \left[\frac{q}{2\pi a^2} \delta(r' - a) [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)] - \frac{2q}{4\pi r'^2} \delta(r') \right] d\mathbf{x}' \\
q_{lm} &= \frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^*(\theta', \phi') a^l [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)] \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
&\quad - \frac{2q}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \delta(r') \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'
\end{aligned}$$

Expande los armónicos esféricos e intenta hacer la integral sobre la coordenada azimutal. [Encontramos que desaparece excepto cuando \$m = 0\$. Esto tiene sentido porque el problema tiene simetría azimutal.](#) En la segunda integral, todos los términos desaparecen excepto $l = 0$.

$$q_{lm} = \delta_{m,0} \left[qa^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} [1 + (-1)^l] - \delta_{l,0} q \sqrt{\frac{1}{\pi}} \right]$$

Esto se vuelve más claro si lo dividimos en diferentes casos, incluidos primero los monopolos más simples:

$$\begin{aligned}
q_{00} &= 0 \\
q_{10} &= q_{1,-1} = q_{11} = 0 \\
q_{20} &= \sqrt{\frac{5}{\pi}} qa^2 \quad q_{2,-2} = q_{2,-1} = q_{2,1} = q_{2,2} = 0 \\
q_{3,-3} &= q_{3,-2} = q_{3,-1} = q_{3,0} = q_{3,1} = q_{3,2} = q_{3,3} = 0 \\
q_{40} &= \sqrt{\frac{9}{\pi}} qa^4
\end{aligned}$$

y todos los términos superiores se pueden expresar como:

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} qa^l \text{ si } m = 0 \text{ y } l = \text{ par}, \quad q_{lm} = 0 \text{ de lo contrario}$$

(c) Para la distribución de carga del segundo conjunto b) escriba la expansión multipolar para el potencial. Manteniendo solo el término de orden más bajo en la expansión, grafique el potencial en el plano $x - y$ en función de la distancia desde el origen para distancias mayores que a .

La expansión multipolar del potencial es:

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\theta, \phi)}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4\pi}{5} q_{20} \frac{1}{r^3} Y_{20}(\theta, \phi) + \frac{4\pi}{9} q_{40} \frac{1}{r^5} Y_{40}(\theta, \phi) + \sum_{l=6, \text{ even}}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} q_{l,0} \frac{Y_{l,0}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \right]$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 (3 \cos^2 \theta - 1) + \left(\frac{a}{r}\right)^5 \frac{1}{4} (35 \cos^4 \theta - 20 \cos^2 \theta + 3) + 2 \sum_{l=6, \text{ par}}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\theta, \phi) \right]$$

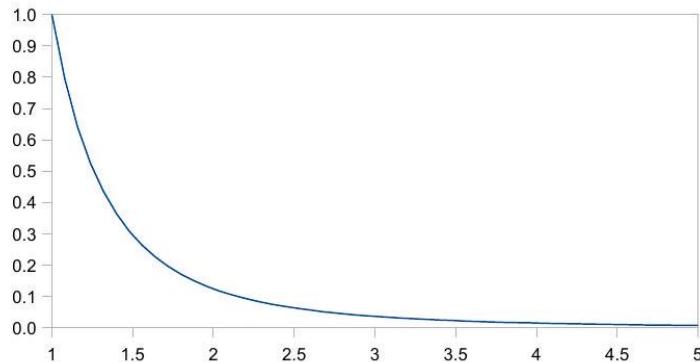
Ahora bien, si r es mucho mayor que a , entonces (a/r) es mucho menor que uno y (a/r) elevado a potencias superiores es aún menor, por lo que solo necesitamos mantener el Primer periodo.

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{a}{r}\right)^3 (3 \cos^2 \theta - 1)$$

En el plano $x - y$ esto se convierte en:

$$\Phi = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{a}{r}\right)^3$$

Podemos graficar el potencial en unidades de $(-q/4\pi\epsilon_0 a)$ y la distancia en unidades de a :



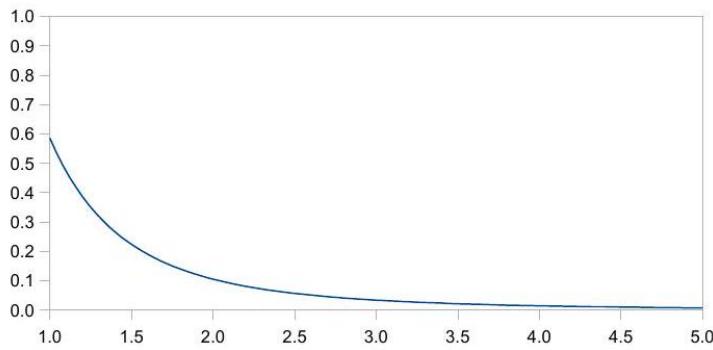
(d) Calculate directly from Coulomb's law the exact potential for b) in the x-y plane. Plot it as a function of distance and compare with the result found in part c).

We have three points charge and can write out an exact solution for the point charges:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{2}{|\mathbf{r}|} \right]$$

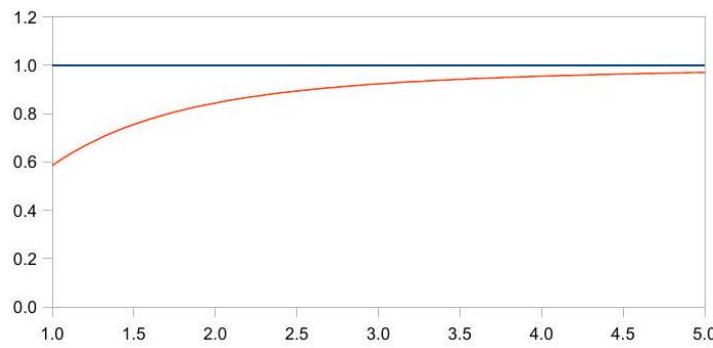
In the $x - y$ plane this becomes:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} - \frac{1}{r} \right] \\ \Phi &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{2}{(r/a)} - \frac{2}{\sqrt{(r/a)^2 + 1}} \right]\end{aligned}$$



It becomes apparent now that the first term in the multipole expansion is a good approximation to as close as $r = 2a$, but becomes inaccurate closer than that.

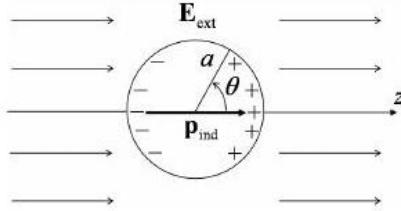
Dividing out the asymptotic form (a^3/r^3) lets us compare them for clearly:



13.54 Esfera en campo externo

Consideremos el problema de una esfera conductora aislada de radio a , sin carga neta, sujeta a un campo externo uniforme $\mathbf{E}_{\text{ext}} = E\hat{\mathbf{z}}$. Encuentre el

potencial del dipolo inducido y la polarizabilidad γ de la esfera.



Solución

Recordemos que el potencial resultante fuera de la esfera es

$$\varphi(r, \theta) = -Er \cos \theta + \frac{Ea^3}{r^2} \cos \theta$$

El primer término es el potencial asociado al campo externo, $\varphi_{\text{ext}} = Ez$, mientras que el segundo término corresponde al potencial producido por la carga superficial inducida por el campo externo sobre la esfera,

$$\varphi_{\text{ind}} = \frac{Ea^3}{r^2} \cos \theta = \frac{Ea^3}{r^2} \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{P}_{\text{ind}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

el cual describe el potencial de un dipolo inducido

$$\mathbf{P}_{\text{ind}} = Ea^3 \hat{\mathbf{z}} = \gamma \mathbf{E}_{\text{ext}}$$

donde la polarizabilidad de la esfera conductora está dada por $\gamma = a^3$.

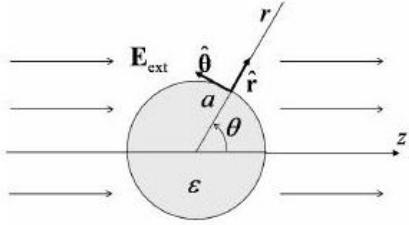
Este ejemplo sirve para ilustrar el comportamiento de un átomo neutro en un campo externo. El resultado permite estimar la polarizabilidad típica de un átomo como $\gamma \sim (\text{radio atómico})^3 \sim (10^{-8} \text{ cm})^3 = 10^{-24} \text{ cm}^3$.

13.55 Cosenso Ej. 3.4.1

Calcular el potencial dentro y fuera de una esfera de radio a y constante dieléctrica ϵ , sin cargas libres, sujeta a un campo eléctrico externo $\mathbf{E}_{\text{ext}} = E\hat{\mathbf{z}}$.

Solución:

Puesto que $\rho_{\text{libre}} = 0$, el potencial satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$, **dentro y fuera de la esfera**. Entonces, buscamos soluciones del potencial ϕ con simetría azimutal para $r < a$, en un medio con constante dieléctrica $\epsilon_1 = \epsilon$,



y para $r > a$, en un medio con $\epsilon_2 = 1$, tales que cumplan las condiciones de frontera en $r \rightarrow \infty$ y $r = a$.

El potencial dentro de la esfera no debe poseer singularidades en $r = 0$, luego para $r < a$, tenemos

$$\phi_1(r, \theta) = \sum_{l=0} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

Para $r > a$

$$\phi_2(r, \theta) = \sum_{l=0} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta)$$

Para $r \rightarrow \infty$, la condición de frontera es $\phi_2 = -Er \cos \theta$. Luego, en $r \rightarrow \infty$, tenemos

$$\sum_{l=0} B_l r^l P_l(\cos \theta) = -Er P_1(\cos \theta)$$

lo cual implica,

$$\begin{aligned} B_1 &= -E \\ B_l &= 0, \quad \forall l \neq 1 \end{aligned}$$

Luego, podemos escribir

$$\phi_2(r, \theta) = (-Er + C_1 r^{-2}) P_1(\cos \theta) + \sum_{l \neq 1} C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$$

En coordenadas esféricas, el campo eléctrico se puede expresar como

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right)$$

En $r = a$, tenemos las siguientes condiciones:

(a) continuidad de la componente tangencial de \mathbf{E} , dada por $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$:

$$-\frac{1}{a} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=a}$$

$$A_1 a \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + \sum_{l \neq 1} A_l a^l \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta} = (-Ea + C_1 a^{-2}) \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + \sum_{l \neq 1} C_l a^{-(l+1)} \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta}$$

de donde, comparando coeficientes en ambos lados, obtenemos

$$l = 1, \quad A_1 a = -Ea + C_1 a^{-2} \Rightarrow A_1 = -E + \frac{C_1}{a^3}$$

$$l \neq 1, \quad A_l a^l = C_l a^{-(l+1)} \Rightarrow A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}}$$

(b) continuidad de la componente normal de $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, correspondiente a $D_n = D_r = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial r}$, puesto que $\sigma_{\text{libre}} = 0$.

$$-\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (92)$$

Calculamos,

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = A_1 P_1(\cos \theta) + \sum_{l \neq 1} l A_l r^{l-1} P_l(\cos \theta)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial r} = - (E + 2C_1 r^{-3}) P_1(\cos \theta) - \sum_{l \neq 1} (l+1) C_l r^{-(l+2)} P_l(\cos \theta)$$

Comparando coeficientes en ambos lados de la Ec. (92), obtenemos

$$l = 1, \quad \epsilon A_1 = -E - 2C_1 a^{-3} \Rightarrow \epsilon A_1 = -E - \frac{2C_1}{a^3}$$

$$l \neq 1, \quad \epsilon l A_l a^{(l-1)} = -(l+1) C_l a^{-(l+2)} \Rightarrow \epsilon l A_l = -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}}$$

Comparando las cuatro ecuaciones para las condiciones de frontera de \mathbf{E} tangencial y \mathbf{D} normal en $r = a$, encontramos los coeficientes

$$l = 1, \quad C_1 = \frac{(\epsilon-1)}{(\epsilon+2)} E a^3, \quad A_1 = -\frac{3}{(\epsilon+2)} E$$

$$l \neq 1, \quad C_l = 0, \quad A_l = 0$$

Luego, el potencial dentro y fuera de la esfera dieléctrica es

$$\phi_1(r, \theta) = -\frac{3}{(\epsilon+2)} E \cos \theta, \quad r < a$$

$$\phi_2(r, \theta) = -Er \cos \theta + \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 2)} E \frac{a^3}{r^2} \cos \theta, \quad r > a \quad (93)$$

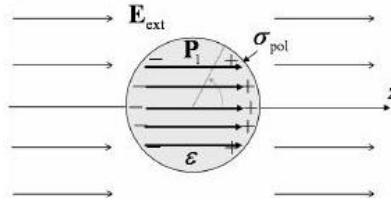
El potencial dentro de la esfera puede expresarse como

$$\phi_1 = -\frac{3}{(\epsilon + 2)} Ez$$

luego, el campo eléctrico dentro de la esfera es

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} = \frac{3}{(\epsilon + 2)} E \hat{\mathbf{z}}$$

Note que la intensidad del campo eléctrico dentro de la esfera dieléctrica es menor que la del campo externo, puesto que $\epsilon > 1$. En el límite $\epsilon \rightarrow \infty$, tenemos un conductor perfecto, y el campo eléctrico dentro de la esfera es cero, como debe esperarse.



La polarización de la esfera puede calcularse a partir de

$$\mathbf{P}_1 = \chi_e \mathbf{E}_1 = \frac{(\epsilon - 1)}{4\pi} \mathbf{E}_1 = \frac{3}{4\pi} \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 2)} E \hat{\mathbf{z}}$$

La densidad superficial de carga inducida por la polarización en la superficie de la esfera puede calcularse a partir de la relación

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

puesto que $\mathbf{P}_2 = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pol}} &= \frac{3}{4\pi} \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 2)} E \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{3}{4\pi} \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 2)} E \cos \theta \end{aligned}$$

Note que $\sigma_{\text{pol}} > 0$ para $\theta \in [0, \pi/2]$, y $\sigma_{\text{pol}} < 0$ para $\theta \in (\pi/2, \pi]$.

El momento dipolar total inducido en la esfera es

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \int_{\text{esfera}} \mathbf{P}_1 d^3 r \\ &= \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 2)} a^3 E \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Note que los dos términos en el potencial ϕ_2 fuera de la esfera dieléctrica, Ec. (93), corresponden justamente al potencial asociado al campo externo, más el potencial producido por este dipolo \mathbf{p} .

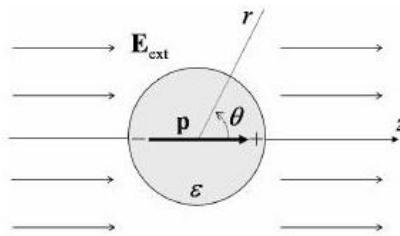


Figure 80: Momento dipolar de la esfera inducido por el campo externo.

Recordemos que la polarizabilidad γ de un objeto en un campo externo se define como $\mathbf{p} = \gamma \mathbf{E}_{\text{ext}}$. Entonces, la polarizabilidad de la esfera es

$$\gamma = \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 2)} a^3$$

En el límite $\epsilon \rightarrow \infty$, recobramos la polarizabilidad de una esfera conductora en un campo externo, $\gamma = a^3$.

13.56 Cosenso Ej 4.2.1

Calcular el campo magnético producido por un cable recto e infinito, ubicado a lo largo del eje z , por el cual fluye una corriente constante I en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$.

Solución:

Sea R una distancia fija perpendicular al cable. De la figura, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r} - \mathbf{r}' &= \mathbf{R} + z' \hat{\mathbf{z}} \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (R^2 + z'^2)^{1/2} \\ dl' &= dz' \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Luego,

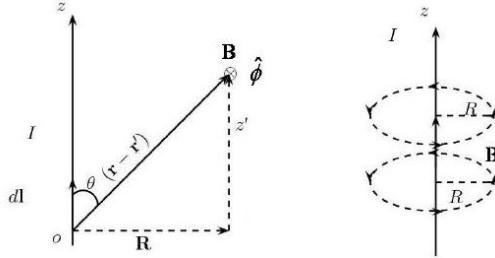


Figure 81: Campo magnético \mathbf{B} producido por un cable infinito en la dirección z con corriente I .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \int_C \frac{Idl' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\
 &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{R} + z' \hat{\mathbf{z}}) \\
 &= \frac{I}{c} R \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{I}{c} R \hat{\phi} \left. \frac{z'}{R^2 (R^2 + z'^2)^{1/2}} \right|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{2I}{cR} \hat{\phi},
 \end{aligned}$$

donde hemos usado $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{R} = R \hat{\phi}$. Las líneas de campo magnético forman circunferencias alrededor del eje z , en la dirección que se obtiene con la regla de la mano derecha.

El campo magnético también se puede calcular directamente usando la ley de Ampère en forma integral. Tomamos el contorno C como una circunferencia de radio R en un plano perpendicular a la dirección del cable. Por simetría, la magnitud de \mathbf{B} es constante sobre esta circunferencia, y su dirección es paralela al vector tangente $d\mathbf{l} = dl \hat{\phi}$. Entonces obtenemos

$$B 2\pi R = \frac{4\pi}{c} I_{\text{enc}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{2I}{cR}$$

13.57 Cosenso Ejemplo 4.2.2

Calcular el campo magnético dentro de un solenoide infinito, con n vueltas por unidad de longitud, por el cual fluye una corriente constante I .

Solución:

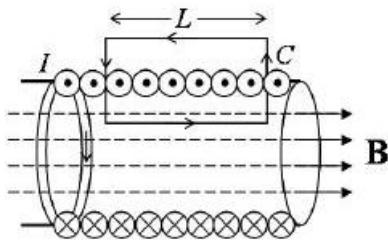


Figure 82: Campo magnético \mathbf{B} producido por un cable infinito en la dirección z con corriente I .

Por simetría, el campo magnético dentro del solenoide debe estar en la dirección de su eje z . El campo magnético fuera de un solenoide infinito es cero (las líneas de campo nunca alcanzan a cerrarse). Aplicamos la Ley de Ampére en forma integral al rectángulo C de longitud L , como se muestra en la figura. Entonces,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = BL = \frac{4\pi}{c} NI$$

donde N es el número de vueltas (espiras) contenidas en la longitud L del solenoide y $n = N/L$. Luego, la magnitud del campo magnético es

$$B = \frac{4\pi}{c} nI$$

13.58 Cosenso Ej 4.3.3

Calcular el campo magnético sobre el eje perpendicular de una espira de radio a que lleva una corriente constante I .

Solución:

El campo producido en \mathbf{r} por un elemento de corriente de la espira es

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

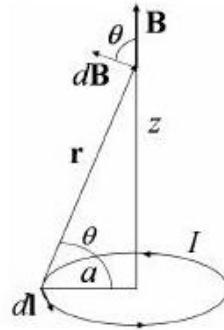


Figure 83: Campo magnético \mathbf{B} sobre el eje perpendicular de un aro de radio a con corriente I .

donde $r = (a^2 + z^2)^{1/2}$. El vector tangente dl es perpendicular a r . Luego,

$$dB = \frac{I}{c} \frac{dl}{r^2}.$$

La componente de $d\mathbf{B}$ en la dirección z es

$$dB_z = dB \cos \theta = dB \frac{a}{r} = \frac{I}{c} \frac{adl}{r^3}.$$

Las componentes de $d\mathbf{B}$ perpendiculares a z se anulan entre sí. Luego,

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{I}{c} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_C dl \\ &= \frac{2\pi I}{c} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

13.59 Consensa Ej 4.3.1

Fuerza magnética por unidad de longitud entre dos cables paralelos e infinitos con corrientes I_1 y I_2 .

Solución:

Sea d la distancia perpendicular entre los cables con corrientes I_1 y I_2 , paralelas en la dirección z . Por simetría, solamente la componente perpendicular de la fuerza $d\mathbf{F}_{mag12}$ contribuye a la fuerza neta sobre el elemento de longitud dl_1 .

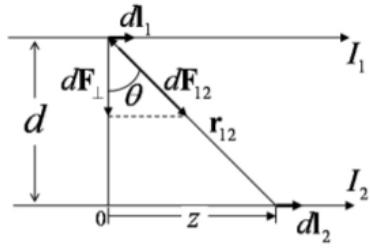


Figure 84: Fuerza por unidad de longitud entre dos corrientes paralela.

La magnitud de esa componente perpendicular por unidad de longitud es

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_{\perp}}{dl_1} &= \frac{dF_{\text{mag}12}}{dl_1} \cos \theta \\
 &= \frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{C_2} \frac{dl_2}{r_{21}^2} \frac{d}{r_{21}} \\
 &= \frac{I_1 I_2}{c^2} d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(d^2 + z^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{I_1 I_2}{c^2} d \frac{z}{d^2 (d^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{2I_1 I_2}{c^2 d}
 \end{aligned}$$

13.60 Cosenso Ej 4.5.1

Momento magnético de un circuito de área A que lleva una corriente I .

Solución:

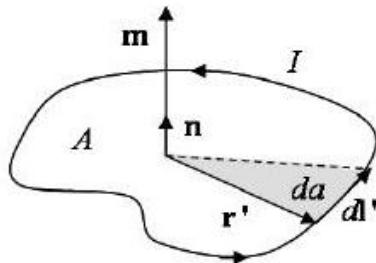


Figure 85: Momento magnético m de un circuito cerrado de corriente.

Para una distribución de corriente que fluye en un cable tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int_C \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= \frac{I}{2c} \oint_C \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'\end{aligned}$$

El elemento de área del circuito C es $da' = \frac{1}{2} |\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'|$. Luego,

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} A \hat{\mathbf{n}}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal al área del circuito, en la dirección $\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'$.

13.61 Consensu Ej 4.5.2

Momento magnético de un sistema de N partículas con carga q_i y masa μ_i en las posiciones \mathbf{r}_i , que se mueven con velocidad \mathbf{v}_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Solución:

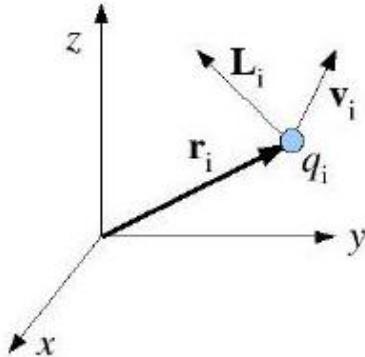


Figure 86: Momento angular \mathbf{L}_i de una partícula con carga q_i , velocidad \mathbf{v}_i , en la posición \mathbf{r}_i .

La densidad de carga es $\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ y la densidad de corriente es

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' \\
 &= \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) d^3 r' \\
 &= \frac{1}{2c} \sum_i q_i \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{v}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) d^3 r' \\
 &= \frac{1}{2c} \sum_i q_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2c} \sum_i \frac{q_i}{\mu_i} (\mathbf{r}_i \times \mu_i \mathbf{v}_i) \\
 &= \frac{1}{2c} \sum_i \frac{q_i}{\mu_i} \mathbf{L}_i.
 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mu_i \mathbf{v}_i$ es el momento angular de la partícula i . Si las partículas son idénticas, $\frac{q_i}{\mu_i} = \frac{q}{\mu}$ es constante. Entonces,

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2\mu c} \mathbf{L}$$

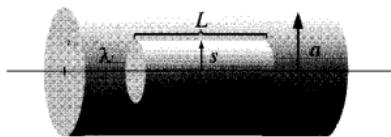
donde \mathbf{L} es el momento angular total del sistema. El momento magnético y el momento angular de un sistema con carga eléctrica están relacionados clásicamente mediante la anterior.

13.62 Griffiths Ejemplo 4.4

Un alambre largo y recto, que lleva una carga lineal uniforme λ , está rodeado por un aislante de goma hasta un radio a . Encuentre el desplazamiento eléctrico.

Solución:

Dibujar una superficie cilíndrica gaussiana, de radio s y longitud L ,



y aplicar la Ec:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{fenc}$$

encontramos

$$D(2\pi sL) = \lambda L$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi s} \hat{\mathbf{s}}$$

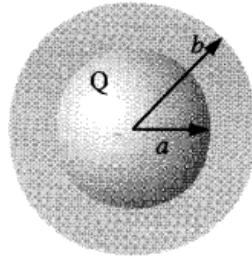
Tenga en cuenta que esta fórmula es válida tanto dentro como fuera del aislamiento. En esta última región. $\mathbf{P} = 0$, entonces

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{\mathbf{s}}, \quad \text{para } s > a.$$

Dentro de la goma no se puede determinar el campo eléctrico, ya que no sabemos \mathbf{P} .

13.63 Griffiths Ejemplo 4.5

Una esfera de metal de radio a tiene una carga Q . Está rodeado, hasta el radio b , por material dieléctrico lineal de permitividad ϵ . Encuentre el potencial en el centro (relativo al infinito).



Solución:

Para calcular V , necesitamos saber \mathbf{E} ; para encontrar \mathbf{E} , primero podríamos tratar de ubicar la carga ligada; podríamos obtener la carga ligada de \mathbf{P} , pero no podemos calcular \mathbf{P} a menos que ya sepamos \mathbf{E} ($\mathbf{B} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$). Parece que estamos en un aprieto. Lo que sí sabemos es la carga libre Q y, afortunadamente, el arreglo es esféricamente simétrico, así que comencemos calculando \mathbf{D} , usando la ecuación:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{libre}}$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{para todos los puntos } r > a.$$

(Dentro de la esfera de metal, por supuesto, $\mathbf{E} = \mathbf{P} = \mathbf{D} = 0$.) Una vez que sabemos \mathbf{D} , es un asunto trivial obtener \mathbf{E} , por $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}, & \text{para } a < r < b, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, & \text{para } r > b \end{cases}$$

Por lo tanto, el potencial en el centro es

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\infty}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right) dr - \int_a^0 (0) dr \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b} \right) \end{aligned}$$

Resulta que no fue necesario que calculáramos la polarización o la carga ligada explícitamente, aunque esto se puede hacer fácilmente:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

en el dieléctrico, y por lo tanto mientras

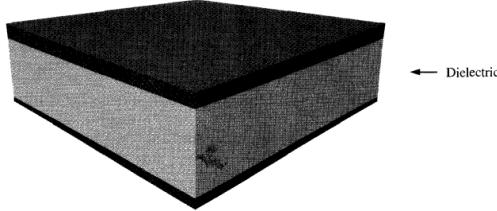
$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon b^2}, & \text{en la superficie exterior,} \\ \frac{-\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon a^2}, & \text{en la superficie interior,} \end{cases}$$

Observe que la carga unida a la superficie en a es negativa dieléctrico, que es $+\hat{\mathbf{r}}$ en b pero $-\hat{\mathbf{r}}$ en a). Esto es natural, ya que la carga de la esfera metálica atrae a su contrario en todas las moléculas dieléctricas. Es esta capa de carga negativa la que reduce el campo, dentro del dieléctrico, de $1/4\pi\epsilon_0 (Q/r^2) \hat{\mathbf{r}}$ a $1/4\pi\epsilon (Q/r^2) \hat{\mathbf{r}}$. A este respecto, un dieléctrico es más bien como un conductor imperfecto: en una capa conductora, la carga superficial inducida sería tal que cancelaría completamente el campo de Q en la región $a < r < b$: el dieléctrico hace lo mejor que puede. puede, pero la cancelación es sólo parcial.

13.64 Griffiths Ej 4.6

Un capacitor de placas paralelas está lleno de material aislante de constante dieléctrica ϵ_r . ¿Qué efecto tiene esto en su capacitancia?

Solución:



Dado que el campo está confinado al espacio entre las placas, el dieléctrico reducirá \mathbf{E} , y por lo tanto también la diferencia de potencial V , por un factor $1/\epsilon_r$. En consecuencia, la capacitancia $C = Q/V$ se incrementa por un factor de la constante dieléctrica,

$$C = \epsilon_r C_{\text{vac}}$$

Esta es, de hecho, una forma común de reforzar un capacitor.

Por cierto, un cristal es generalmente más fácil de polarizar en algunas direcciones que en otras, y en este caso la Ec.

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E},$$

se reemplaza por la relación lineal general

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\chi_{e_{xx}} E_x + \chi_{e_{xy}} E_y + \chi_{e_{xz}} E_z) \\ P_y &= \epsilon_0 (\chi_{e_{yx}} E_x + \chi_{e_{yy}} E_y + \chi_{e_{yz}} E_z) \\ P_z &= \epsilon_0 (\chi_{e_{zx}} E_x + \chi_{e_{zy}} E_y + \chi_{e_{zz}} E_z) \end{aligned} \right\},$$

tal como la Ec. 4.1 fue reemplazada por la Eq. 4.3 para moléculas asimétricas. Los nueve coeficientes. $\chi_{e_{xx}}, \chi_{e_{xy}}, \dots$, constituyen el tensor de susceptibilidad.

13.65 Jackson 4.2

Un punto dipolo con momento dipolar \mathbf{p} está ubicado en el punto \mathbf{x}_0 . A partir de las propiedades de la derivada de una función delta de Dirac, demuestre que para el cálculo del potencial Φ o la energía de un dipolo en un campo externo, el dipolo puede describirse mediante una densidad de carga efectiva

$$\rho_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Solución:

The potential due to a dipole is:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

The potential due to a charge density is:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

so that:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \\ \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} &= \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

Use the relation proved earlier that $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} = \nabla_{x_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right)$ where \mathbf{r} is the separation vector

$$\mathbf{p} \cdot \nabla_{x_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

Add to the left an integral and a Dirac delta:

$$\int \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) \mathbf{p} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d\mathbf{x}' = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

Use integration by parts

$$-\int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{p} \cdot \nabla' (\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)) d\mathbf{x}' = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

Shrink down the integrals until it must be true at every point, so that the integrands must match.

$$\rho(\mathbf{x}') = -\mathbf{p} \cdot \nabla' (\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0))$$

Relabel the primed variables to be unprimed:

$$\rho_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

We can also go other way in the same manner, putting this into Coulomb's law and ending up with the dipole potential.

The energy of a dipole in an external field is $W = [-\mathbf{p} \cdot \nabla \Phi]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$

The energy in general of a charge distribution in an external field is $W = \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

So that:

$$[-\mathbf{p} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x})]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$-\int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{p} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Applying integration by parts:

$$-\int \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{p} \cdot \nabla (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) d\mathbf{x} = \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

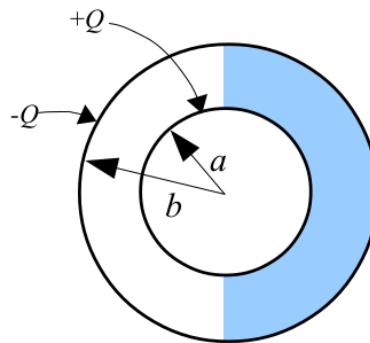
Equating integrands:

$$\rho_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

13.66 Jackson 4.10

Dos esferas conductoras concéntricas de radios interior a y exterior b , respectivamente, llevan cargas $\pm Q$. El espacio vacío entre las esferas está medio lleno por una capa hemisférica de dieléctrico (de constante dieléctrica ϵ/ϵ_0), como se muestra en la figura.

- (a) Encuentre el campo eléctrico en todas partes entre las esferas.
- (b) Calcule la distribución de carga superficial en la esfera interior.
- (c) Calcule la densidad de carga de polarización inducida en la superficie del dieléctrico en $r = a$.



Solución:

Podemos dividir la región donde queremos conocer el campo eléctrico en dos regiones, el hemisferio izquierdo y el hemisferio derecho, resolver el campo

en cada región por separado y luego aplicar las condiciones de contorno para obtener la solución final. En la región izquierda, no hay dieléctricos ni cargas. Entonces el potencial eléctrico obedece a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi_L = 0$$

Si alineamos el eje z apuntando hacia la derecha, el problema tiene simetría azimutal. La solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas para simetría azimutal es:

$$\Phi_L(r, \theta, \phi) = \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

El potencial en la superficie de un conductor es siempre constante:

$$\begin{aligned} \Phi_L(r = a) &= C \\ C &= \sum_l (A_l a^l + B_l a^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

Debido a que esta ecuación debe cumplirse para todos los valores de la variable polar independiente y debido a que los polinomios de Legendre son ortogonales, todos los coeficientes deben ser iguales de forma independiente: $C = A_0 + \frac{B_0}{a}$ y $B_l = -A_l a^{2l+1}$ para $l > 0$. Esta solución ahora se convierte en (la constante arbitraria C no contiene ninguna información nueva, por lo que dejamos las constantes $l = 0$ como están):

$$\Phi_L(r, \theta, \phi) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left(\left(\frac{r}{a}\right)^l - \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right) P_l(\cos \theta)$$

La otra superficie también es conductora y también debe tener un potencial constante:

$$\begin{aligned} \Phi_L(r = b) &= D \\ D &= A_0 + \frac{B_0}{b} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left(\left(\frac{b}{a}\right)^l - \left(\frac{a}{b}\right)^{l+1} \right) P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

Debido a que esta ecuación debe cumplirse para todos los valores de la variable polar independiente y debido a que los polinomios de Legendre son ortogonales, todos los coeficientes deben ser iguales de forma independiente. A_l debe ser cero para todo $l > 1$. Esto deja el potencial:

$$\Phi_L(r, \theta, \phi) = A_0 + \frac{B_0}{r}$$

Esto conduce a un campo eléctrico total de:

$$\mathbf{E}_L = \frac{B_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Podríamos haber adivinado esta forma de solución basándonos en la simetría del problema, pero a menudo es más seguro e instructivo seguir todos los pasos.

El hemisferio derecho es una región separada y ahora se puede resolver por separado. En la región entre las capas, podemos decir que no hay cargas libres ni cargas ligadas (las cargas ligadas, o cargas de polarización, residirán a lo largo de las fronteras, pero no en el volumen donde queremos conocer el potencial). El potencial eléctrico total obedece entonces a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi_R = 0$$

Se aplica el mismo proceso que el anterior, lo que conduce a la misma forma de la solución:

$$\mathbf{E}_R = \frac{C_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Ahora podemos aplicar condiciones de contorno donde el material dieléctrico se encuentra con el espacio libre. La componente tangente del campo eléctrico debe ser continua a través de la frontera:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_L \times \hat{\theta} &= \mathbf{E}_R \times \hat{\theta} \\ [\mathbf{E}_L \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{E}_R \cdot \hat{\mathbf{r}}]_{\theta=\pi/2} \\ \frac{B_0}{r^2} &= \frac{C_0}{r^2} \\ B_0 &= C_0 \end{aligned}$$

lo que lleva a:

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_L = \frac{B_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Como todos los materiales son lineales, esto nos dice directamente que

$$\mathbf{D}_L = \epsilon_0 \frac{B_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}_R = \epsilon \frac{B_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Debido a que las cargas libres dan lugar al campo \mathbf{D} , el hecho de que \mathbf{D} a la izquierda sea diferente de \mathbf{D} a la derecha significa que las densidades de carga libre en cada lado debe ser diferente.

El último hecho que sabemos es que hay una carga libre total Q en la superficie del conductor interno y una carga libre total $-Q$ en la superficie del conductor externo. Solo conocemos la carga gratuita total, no la densidad

de carga gratuita. No podemos asumir que la carga gratuita se distribuye uniformemente sobre la esfera, porque no hay nada en el problema que sugiera eso. Debido a que no conocemos la densidad de carga, no podemos usar una condición de contorno local, sino una condición de contorno integrada que hace uso de la carga total.

Dibujamos una esfera de integración con radio r donde $a < r < b$ para que encierre completamente la carga libre Q y usamos la ley de Gauss en forma integral. Podríamos usar la ley de Gauss para los campos \mathbf{E} , \mathbf{D} o \mathbf{P} . Solo conocemos la carga libre total, que solo da lugar al campo \mathbf{D} , por lo que usamos:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{r}} d^3 \mathbf{x} = Q$$

Debemos tener cuidado aquí. Encontramos arriba que el campo \mathbf{D} no es el mismo en esta esfera de integración, por lo que debemos dividir la integral en dos partes:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\mathbf{D}_R \cdot \hat{\mathbf{r}}) r^2 \sin \theta d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\mathbf{D}_L \cdot \hat{\mathbf{r}}) r^2 \sin \theta d\theta d\phi &= Q \\ \epsilon B_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta d\phi + \epsilon_0 B_0 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta d\phi &= Q \\ B_0 = \frac{Q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_0)} \end{aligned}$$

Ahora tenemos nuestras soluciones finales:

$$\mathbf{D}_L = \frac{\epsilon_0 Q}{(\epsilon + \epsilon_0) 2\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\text{y } \mathbf{D}_R = \frac{\epsilon Q}{(\epsilon + \epsilon_0) 2\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{(\epsilon + \epsilon_0) 2\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

(b) Calcule la distribución de carga superficial en la esfera interior.

La distribución de cargas de superficie libre σ está ligada al campo \mathbf{D} según:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Dibujamos un pastillero gaussiano a ambos lados de la superficie y usamos el teorema de la divergencia para encontrar:

$$[(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma]_{\text{on } S}$$

Dentro de un conductor no hay campos, entonces $\mathbf{D}_1 = 0$.

$$\sigma_L = [\mathbf{D}_L \cdot \hat{\mathbf{r}}]_{r=a} \text{ y}$$

$$\sigma_L = \frac{\epsilon_0 Q}{(\epsilon + \epsilon_0) 2\pi a^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\sigma_R = [\mathbf{D}_R \cdot \hat{\mathbf{r}}]_{r=a}$$

$$\text{y } \sigma_R = \frac{\epsilon Q}{(\epsilon + \epsilon_0) 2\pi a^2} \hat{\mathbf{r}}$$

(c) Calcule la densidad de carga de polarización inducida en la superficie del dieléctrico en $r = a$.

Usamos la ley de Gauss en la superficie de un pastillero nuevamente, pero en su lugar solo encerramos la carga de polarización.

$$[(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n} = -\sigma_{\text{pol}}]_{\text{on } S}$$

Dentro del conductor no hay campos, entonces $\mathbf{P}_2 = 0$ y la normal ahora apunta hacia adentro, $\mathbf{n} = -\mathbf{r}$

$$[\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\sigma_{\text{pol}}]_{r=a}$$

$$\sigma_{\text{pol}} = [-P]_{r=a}$$

Para materiales lineales, sabemos $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$

$$\sigma_{\text{pol}} = [-(\epsilon - \epsilon_0) E]_{r=a}$$

$$\sigma_{\text{pol}} = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon) Q}{(\epsilon_0 + \epsilon) 2\pi a^2}$$

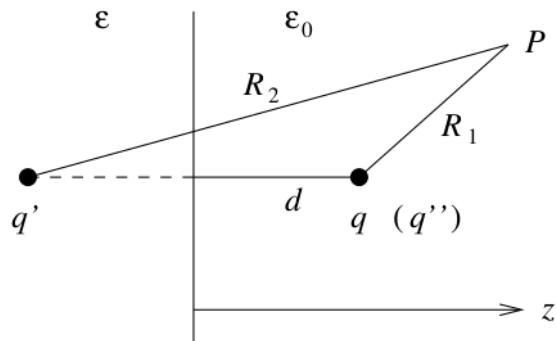
Por supuesto, esto solo se aplica al lado derecho. No hay material dieléctrico en el lado izquierdo y, por lo tanto, no hay carga de polarización.

13.67 Dipolo eléctrico y dieléctrico semi-infinito

Un dipolo eléctrico puntual con momento dipolar \vec{p} está ubicado en el vacío apuntando hacia afuera y a una distancia d de la superficie plana de un dieléctrico semi-infinito con permitividad ϵ .

- a) Encuentra el potencial eléctrico Φ en todas partes.
- b) ¿Cuál es el potencial eléctrico si el dipolo está orientado paralelo a la superficie del dieléctrico? **Solución:**

Aquí hemos asumido que la carga física q está ubicada en $(0, 0, d)$ y el observador está en el punto P dado por (x, y, z) .



Este problema se puede resolver por el método de imágenes para un dieléctrico. Recuerde que para una carga puntual q ubicada a una distancia d de la superficie plana de un dieléctrico semi-infinito, el potencial eléctrico está dado por

$$\begin{aligned}\Phi(z > 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right) \\ \Phi(z < 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q''}{R_1}\end{aligned}$$

donde

$$q' = -q \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \right), \quad q'' = q \frac{2\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0}$$

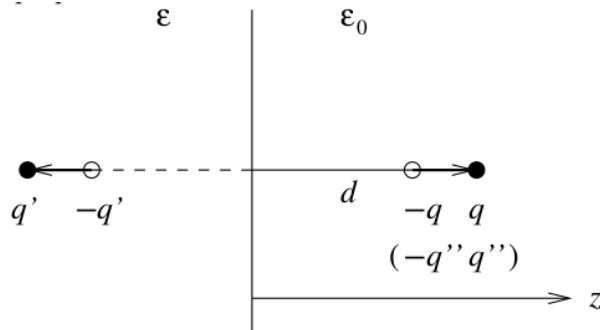
y donde los vectores de posición son

$$\vec{R}_1 = (x, y, z - d), \quad \vec{R}_2 = (x, y, z + d)$$

Al sustituir q' y q'' , el potencial se escribe más explícitamente como

$$\begin{aligned}\Phi(z > 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{1}{R_2} \right) \\ \Phi(z < 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{2\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{1}{R_1} \right)\end{aligned}\tag{94}$$

Como se puede obtener un dipolo eléctrico puntual tomando dos cargas $-q$ y $+q$ separadas por una distancia l en el límite $l \rightarrow 0$, el problema del dipolo se puede resolver por superposición lineal



Dado que el potencial eléctrico de un dipolo en el espacio libre está dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

la generalización del dipolo eléctrico de la solución de carga puntual (94) es entonces

$$\begin{aligned}\Phi(z > 0) &= \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{\vec{R}_1}{R_1^3} + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{\vec{R}_2}{R_2^3} \right) \\ \Phi(z < 0) &= \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{2\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{\vec{R}_1}{R_1^3} \right)\end{aligned}\quad (95)$$

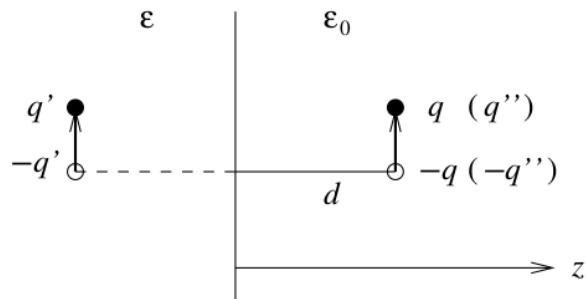
donde $\vec{p} = p\hat{z}$ apunta en dirección opuesta al dieléctrico. Tenga en cuenta que, de acuerdo con la figura, el dipolo de la imagen apunta en la dirección opuesta a la física, siempre que definamos la dirección de $-q'$ a $+q'$. Esto es lo que explica la diferencia de signo entre los dos términos en las primeras líneas de (94) y (95). Sin embargo, en realidad, dado que la carga de la imagen q' tiene el signo opuesto a q (suponiendo que $\epsilon > \epsilon_0$), el dipolo de la imagen en realidad apunta en la misma dirección que el uno físico. Este resultado físico es consistente con el signo más en la primera línea de (95), que muestra que ambos dipolos apuntan en la misma dirección.

b) ¿Cuál es el potencial eléctrico si el dipolo está orientado paralelo a la superficie del dieléctrico?

Tenga en cuenta que la orientación del dipolo de imagen es diferente para la configuración paralela

Como resultado, el potencial está dado en cambio por

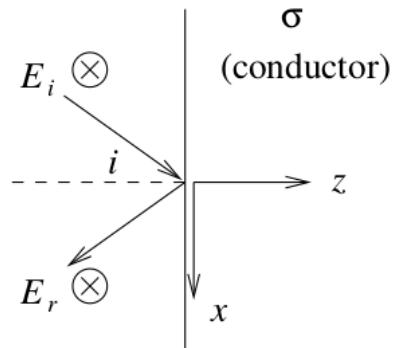
$$\begin{aligned}\Phi(z > 0) &= \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{\vec{R}_1}{R_1^3} - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{\vec{R}_2}{R_2^3} \right) \\ \Phi(z < 0) &= \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{2\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{\vec{R}_1}{R_1^3} \right)\end{aligned}$$



donde $\vec{p} = p\hat{x}$ apunta paralelo a la superficie del dieléctrico. Tenga en cuenta que la solución de imagen se puede generalizar para un dipolo en un ángulo arbitrario con respecto a la superficie del dieléctrico.

13.68 Onda polarizada plana incidente en conductor

Una onda electromagnética polarizada plana de frecuencia ω en el espacio libre incide con un ángulo i sobre la superficie plana de un excelente conductor ($\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ y $\sigma \gg \omega\epsilon_0$) que llena la región $z > 0$.



Considere solo la polarización lineal perpendicular al plano de incidencia.

a) Si la onda incidente viene dada por $\vec{E} = \vec{E}_i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$, Demuestre que (en el límite $\sigma \gg \omega\epsilon_0$) la magnitud del campo eléctrico dentro del conductor es

$$E_c = E_i \gamma \cos i e^{-z/\delta} e^{i(kx \sin i + z/\delta - \omega t)}$$

donde

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \quad \text{y} \quad \gamma = (1 - i)\sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}$$

La dirección z es perpendicular a la superficie plana del conductor, mientras que la dirección x es paralela a ella.

b) Demuestre que la potencia promediada en el tiempo por unidad de área que fluye hacia el conductor está dada por $S^\perp = \epsilon_0 |E_i|^2 \omega \delta \cos^2 i$.

Solución:

a) Usamos una constante dieléctrica compleja

$$\epsilon' = \epsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega} \approx \frac{i\sigma}{\omega}$$

Esto da

$$n' = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} \approx \sqrt{\frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega}} = (1+i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} = \frac{2}{\gamma}$$

así como

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad k' = \frac{\omega n'}{c} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \frac{(1+i)}{\delta}$$

Para \vec{E} perpendicular al plano de incidencia, la onda 'transmitida' viene dada por

$$E' = E_i \frac{2n \cos i}{n \cos i + \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}}$$

Así

$$\begin{aligned} E_c &= E' e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)} = E_i \frac{2n \cos i}{n \cos i + \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}} e^{i(k' z \cos r + k' x \sin r - \omega t)} \\ &= E_i \frac{2 \cos i}{\cos i + \sqrt{n'^2 - \sin^2 i}} e^{i((1+i)(z/\delta) \cos r + kx n' \sin r - \omega t)} \end{aligned}$$

Sin embargo, en el límite $|n'| \gg 1$ encontramos

$$n' \cos r = \sqrt{n'^2 - \sin^2 i} \approx n'$$

de modo que $\cos r \approx 1$. Usando estas aproximaciones en lo anterior, llegamos a

$$E_c = E_i \frac{2 \cos i}{n} e^{i((1+i)z/\delta + kx \sin i - \omega t)} = E_i \gamma \cos i e^{-z/\delta} e^{i(kx \sin i + z/\delta - \omega t)}$$

b) Existen numerosas formas de calcular la potencia que fluye hacia el conductor. Podemos calcular la potencia incidente menos la reflejada, o podemos simplemente calcular la potencia transmitida justo dentro del conductor. También podríamos calcular la potencia total disipada en el conductor integrando toda la profundidad del conductor. Por conservación de energía, todos estos deberían dar el mismo resultado. Supongamos que calculamos la potencia disipada en el conductor. Por la ley de Ohm, escribimos

$$P = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^* = \frac{\sigma}{2} |\vec{E}|^2$$

Usando la expresión anterior, esto da

$$P = \frac{\sigma}{2} |E_i|^2 |\gamma|^2 \cos^2 i e^{-2z/\delta} = 2\epsilon_0 \omega |E_i|^2 \cos^2 i e^{-2z/\delta}$$

Tenga en cuenta que esta es la densidad de potencia (por volumen) perdida en el conductor. Para obtener la potencia perdida por unidad de área de sección transversal, tenemos que integrar esto a lo largo de la dirección z

$$P^\perp = \int_0^\infty P dz = \epsilon_0 |E_i|^2 \omega \delta \cos^2 i$$

Por conservación de la energía, esta debe ser igual a la potencia que fluye hacia el conductor.

13.69 Jackson 5.13

Una esfera de radio a tiene una distribución de carga superficial uniforme σ . La esfera gira alrededor de un diámetro con velocidad angular constante ω . Encuentre el vector potencial y la densidad de flujo magnético tanto dentro como fuera de la esfera.

Solución:

Para encontrar el campo magnético \mathbf{B} dentro y fuera de la esfera, calcularemos primero el potencial vector \mathbf{A} , ya que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

y

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

Luego lo primero que hay que hacer es encontrar la densidad de corriente

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

Dado que la esfera gira con velocidad angular constante ω , la velocidad en cualquier punto de la esfera está dada por

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = \omega r \sin \theta \hat{\phi}.$$

La densidad de carga para una esfera uniformemente cargada de radio a es

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma \delta(\mathbf{r} - a)$$

de esta manera la densidad de corriente y el potencial vector son

$$\mathbf{J} = \sigma \omega a \sin \theta \delta(r' - a) \hat{\phi} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \int \frac{\sigma \omega a \sin \theta' \delta(r' - a) \hat{\phi}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

Podemos expandir el denominador del potencial vector en armónicos esféricos, de acuerdo con

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \sigma \omega \delta(r' - a) \hat{\phi}' 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) r'^2 \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

Debemos tener cuidado y darnos cuenta de que $\hat{\phi}' \neq \hat{\phi}$ porque las variables primadas se están integrando. La mejor manera de manejar esto es usar la expansión: $\hat{\phi}' = -\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}$. Luego dentro de la esfera (para $r < r'$, es decir el mayor es r'),

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mu_0 \sigma \omega a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \delta(r' - a) \left(-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}} \right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r'^{l-1}} \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

y para fuera de la esfera (para $r > r'$, es decir el mayor ahora es r),

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mu_0 \sigma \omega a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \delta(r' - a) \left(-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}} \right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^{l+2}}{r'^{l+1}} \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

Ahora evaluamos las deltas y reorganizamos:

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mu_0 \sigma \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{a^{l-2}} Y_{lm}(\theta, \phi) I_{l,m} \quad (\text{dentro}) \quad (96)$$

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mu_0 \sigma \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{a^{l+3}}{r'^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) I_{l,m} \quad (\text{fuera}) \quad (97)$$

$$\text{donde } I_{l,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}} \right) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \sin^2 \theta' d\theta' d\phi'$$

Escribamos explícitamente la expresión para los armónicos esféricos

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

$$I_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \int_0^{2\pi} \left(-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}} \right) e^{-im\phi'} d\phi' \int_0^\pi P_l^m(\cos \theta') \sin^2 \theta' d\theta'$$

Resolvemos la primera integral en ϕ' , la exponencial la escribimos en términos de senos y cosenos, y aplicamos la condición de ortogonalidad de Fourier. Debido a la ortogonalidad en la primera integral, todos los términos desaparecen excepto $m = 1$ y $m = -1$. Recordar que $\sin(-x) = -\sin(x)$, y que si el intervalo es a entonces la condición de ortogonalidad es $a/2$, en este caso será igual a π . La primera integral nos da entonces:

$$I_{l,\pm 1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l \mp 1)!}{(l \pm 1)!}} \pi (\pm i \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \int_0^\pi P_l^{\pm 1}(\cos \theta') \sin^2 \theta' d\theta'$$

Ahora seguimos buscando usar la ortogonalidad, pero para los Polinomios asociados de Legendre.

Haciendo la sustitución $x = \cos \theta$, $dx = -\sin \theta d\theta$:

$$\sin \theta = \sqrt{1-x^2} = P_1^1(x) = -2P_1^{-1}(x)$$

Luego, consideraremos los casos $+1$ y -1 por separado

$$I_{l,1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-1)!}{(l+1)!}} \pi (i \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \int_{-1}^1 P_l^1(x) P_1^1(x) dx \quad (98)$$

$$I_{l,-1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!}} \pi (-i \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) (-2) \int_{-1}^1 P_l^{-1}(x) P_1^{-1}(x) dx \quad (99)$$

Calculemos explícitamente (98). Debido a la condición de ortogonalidad, solo el término $l = 1$ será distinto de cero. Luego utilizando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l}$$

la Ec. (98) nos queda:

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-1)!}{(l+1)!}} \pi(i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \int_{-1}^1 P_1^1(x) P_1^1(x) dx \\ I_{1,1} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{1}{2}} \pi(i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \frac{2}{3} 2 \\ I_{1,1} &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \end{aligned}$$

y haciendo lo mismo con Ec. (99) (donde $m = -1$), podemos escribir,

$$I_{1,\pm 1} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (i\hat{\mathbf{i}} \pm \hat{\mathbf{j}}) \quad (100)$$

La solución ahora es solo la suma del término $l = 1, m = -1$ y el término $l = 1, m = 1$. Con esto (96) y (97) no quedan:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi \mu_0 \sigma \omega}{c} \frac{a}{3} ar [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,-1}(\theta, \phi) I_{1,-1}] \quad (\text{dentro}) \\ \mathbf{A} &= \frac{4\pi \mu_0 \sigma \omega}{c} \frac{a^4}{r^2} [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,-1}(\theta, \phi) I_{1,-1}] \quad (\text{fuera}) \end{aligned}$$

Según propiedad $Y_{1,-1} = -Y_{1,1}^*$ y $I_{1,-1} = -I_{1,1}^*$ así que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi \mu_0 \sigma \omega}{c} \frac{a}{3} ar [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,1}^*(\theta, \phi) I_{1,1}^*] \quad (\text{dentro}) \\ \mathbf{A} &= \frac{4\pi \mu_0 \sigma \omega}{c} \frac{a^4}{r^2} [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,1}^*(\theta, \phi) I_{1,1}^*] \quad (\text{fuera}) \end{aligned}$$

Recordemos que para números complejos en general $z + z^* = 2R(z)$, usando en las expresiones anteriores nos queda

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi \mu_0 \sigma \omega}{c} \frac{a}{3} ar \sin \theta \hat{\phi} \quad \text{dentro} \\ \mathbf{A} &= \frac{4\pi \mu_0 \sigma \omega}{c} \frac{a^4}{r^2} \sin \theta \hat{\phi} \quad \text{fuera} \end{aligned}$$

El campo magnético se obtiene de:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Calculamos el rotor en coordenadas esféricas, conservando solo los términos distintos de cero para este caso:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & \hat{\phi}r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & rA_\phi \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (rA_\phi) \right] + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Pero como $\mathbf{A} = A\hat{\phi}$, las componentes A_r y A_θ son cero y entonces

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\phi)$$

Dentro:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) = \frac{4\pi}{c} \frac{\mu_0 \sigma \omega a r}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) = \frac{4\pi}{c} \frac{\mu_0 \sigma \omega a r}{3r \sin \theta} 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\phi) = \frac{1}{r} \frac{4\pi}{c} \frac{\mu_0 \sigma \omega}{3} a \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{4\pi}{c} \frac{2}{3} a \mu_0 \sigma \omega \sin \theta$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{2}{3} a \mu_0 \sigma \omega [\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta}]}$$

$$\implies \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{2}{3} a \mu_0 \sigma \omega \hat{\mathbf{z}}$$

Fuera:

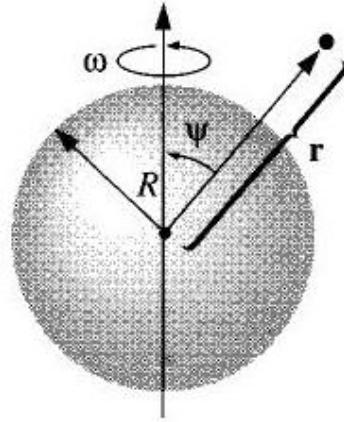
$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{\mu_0 \sigma \omega}{3} \frac{a^4}{r^3} [2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\theta}]}$$

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{\mu_0 \sigma \omega}{3} \frac{a^4}{r^3} [3 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}]$$

13.70 Griffiths Example 5.11

Una capa esférica, de radio R , que lleva una carga superficial uniforme σ , se pone a girar a una velocidad angular ω . Encuentre el potencial vectorial que produce en el punto \mathbf{r} .

Solución



Puede parecer natural alinear el eje polar a lo largo de ω , pero de hecho la integración es más fácil si dejamos que \mathbf{r} se encuentre en el eje z , de modo que ω esté inclinado en un ángulo ψ . También podemos orientar el eje x de modo que ω quede en el plano xz , como se muestra en la figura 13.70

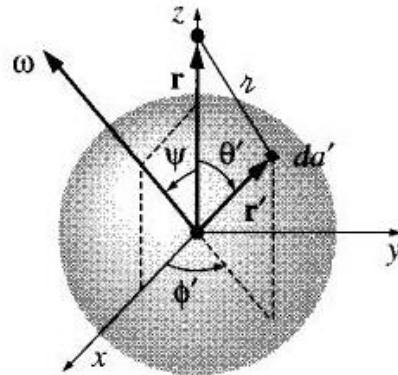


Figure 87: Esfera rotando

De acuerdo con:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{r} da',$$

donde $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$, $r = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}$, y $da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$. Ahora la velocidad de un punto \mathbf{r}' en un cuerpo rígido giratorio está dada por $\omega \times \mathbf{r}'$; en este caso,

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \omega \sin \psi & 0 & \omega \cos \psi \\ R \sin \theta' \cos \phi' & R \sin \theta' \sin \phi' & R \cos \theta' \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v} = R\omega [- (\cos \psi \sin \theta' \sin \phi') \hat{\mathbf{x}} + (\cos \psi \sin \theta' \cos \phi' - \sin \psi \cos \theta') \hat{\mathbf{y}} + (\sin \psi \sin \theta' \sin \phi') \hat{\mathbf{z}}].$$

Observe que cada uno de estos términos, excepto uno, implica $\sin \phi'$ o $\cos \phi'$. Ya que

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0.$$

tales términos no aportan nada. Ahí permanece

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin \psi}{2} \left(\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} d\theta' \right) \hat{\mathbf{y}}.$$

Haciendo $u \equiv \cos \theta'$, la integral se convierte en

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru}} du &= -\frac{(R^2 + r^2 + Rru)}{3R^2 r^2} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru} - |_{-1}^{+1} \\ &= -\frac{1}{3R^2 r^2} [(R^2 + r^2 + Rr) |R - r| - (R^2 + r^2 - Rr) (R + r)] \end{aligned}$$

Si el punto \mathbf{r} está dentro de la esfera, entonces $R > r$, y esta expresión se reduce a $(2r/3R^2)$; si \mathbf{r} se encuentra fuera de la esfera, entonces $R < r$, se reduce a $(2R/3r^2)$. Observando que $(\omega \times \mathbf{r}) = -\omega r \sin \psi \hat{\mathbf{y}}$, tenemos, finalmente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} (\omega \times \mathbf{r}), & \text{para puntos dentro de la esfera,} \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (\omega \times \mathbf{r}), & \text{para puntos fuera de la esfera.} \end{cases}$$

Habiendo evaluado la integral, volvemos a las coordenadas orifinales de la Fig. 13.70, en las que ω coincide con el eje z y el punto \mathbf{r} está en (r, θ, ϕ) :

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \omega \sigma}{3} r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}, & (r \leq R), \\ \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma}{3} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}}, & (r \geq R). \end{cases}$$

Curiosamente, el campo dentro de esta capa esférica es uniforme:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{2\mu_0 R \omega \sigma}{3} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \hat{\mathbf{z}} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega.$$

13.71 Griffiths Example 5.12

Encuentre el vector potencial de un solenoide infinito con n vueltas por unidad de longitud, radio R y corriente I ,

Solución:

This time we cannot use Eq. 5.64, since the current itself extends to infinity. But here's a cute method that does the job. Notice that

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi,$$

where Φ is the flux of \mathbf{B} through the loop in question. This is reminiscent of Ampère's law in the integral form (5.55),

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}.$$

De hecho, es la misma ecuación, con $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ y $\mu_0 I_{\text{enc}} \rightarrow \Phi$. Si la simetría lo permite, podemos determinar \mathbf{A} a partir de Φ de la misma manera que obtuvimos \mathbf{B} a partir de I_{enc} , en la Secc. 5.3.3. El problema presente (con un campo magnético longitudinal uniforme $\mu_0 n I$ dentro del solenoide y sin campo afuera) es análogo al problema de la ley de Ampère de un alambre grueso que transporta una corriente uniformemente distribuida. El vector potencial es "circunferencial" (imita el campo magnético del alambre); usando un "bucle amperiano" circular en el radio s dentro del solenoide, tenemos

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A(2\pi s) = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 n I (\pi s^2),$$

so

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I}{2} s \hat{\phi}, \text{ for } s < R.$$

For an amperian loop outside the solenoid, the flux is

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 n I (\pi R^2),$$

since the field only extends out to R . Thus

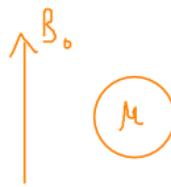
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{R^2}{s} \hat{\phi}, \text{ for } s > R.$$

If you have any doubts about this answer, check it: Does $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$? Does $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$? If so, we're done.

13.72 Ejemplo Valdivia Magnetismo 1

Una esfera de radio a y $\mu = \text{const}$ en un campo \mathbf{B} asintótico $\mathbf{B} = B_o \hat{\mathbf{z}}$. Encuentre el campo magnético adentro y fuera de la esfera.

Solución:



No hay corrientes $J = 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{H} &= -\nabla \phi \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \Rightarrow \nabla^2 \phi &= 0\end{aligned}$$

Adentro y afuera se satisface Laplace. Uno podría hacer esto:

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu H) = 0 \rightarrow \mu \nabla^2 \Phi + \nabla \mu \cdot \nabla \Phi = 0$$

pero es complicado. Esto garantiza que Φ es continuo cruzando la interfase. Además, en las dos regiones (no en el borde) tenemos $\mu = \text{const}$, por lo tanto la ecuación de Maxwell satisface

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Dado que $\mathbf{H}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{B}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{B}_o$ tenemos $\Phi(r \rightarrow \infty) = -B_o z = -B_o r \cos \theta$, y la expansión

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{in}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \\ \Phi_{\text{out}} &= -B_o r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)\end{aligned}$$

Notemos que μ no aparece todavía. Solo aparece en las condiciones de borde, para B_r y H_{θ} . Tenemos que aplicar las condiciones de borde de Maxwell.

$$(H_2 - H_1) \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} K$$

$$(B_2 - B_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \\ -\mu \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} \end{aligned} \right\} \mu = 1 \quad \text{afuera}$$

En vez de la continuidad del componente tangencial de \mathbf{H} , dado por las ecuaciones de Maxwell, es mas fácil usar la continuidad del potencial, lo cual usamos para resolver este set de ecuaciones.

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \theta) \left[A_{\ell} a^{\ell} - \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+1}} + B_o a \delta_{\ell,1} \right] = 0$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \theta) \left[-\mu \ell A_{\ell} a^{\ell-1} + (\ell+1) \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+2}} + B_o \delta_{\ell,1} \right] = 0$$

Solo si $A_{\ell} = B_{\ell} = 0$ $\ell \neq 1$. Luego se evaluando A_{ℓ} y B_{ℓ} , se resuelve y se encuentra

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &= -\left[\frac{3}{\mu+2}\right] B_o r \cos \theta \\ \Phi_{\text{out}} &= -\left[1 + \frac{1-\mu}{\mu+2} \frac{a^3}{r^3}\right] B_o r \cos \theta \end{aligned}$$

Si evaluamos en $\mu = 1$, es decir, la esfera polarizada ya no está, se recupera

$$\Phi_{\text{in}} = -B_0 r \cos \theta$$

Con esto se pueden calcular las líneas de campo. En términos de los campos tenemos

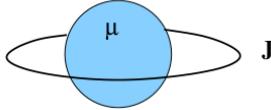
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{in}} &= \left[\frac{3}{\mu+2}\right] \mathbf{B}_o \\ \mathbf{H}_{\text{out}} &= B_o + \frac{1-\mu}{\mu+2} \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{B}_o - 3(\mathbf{B}_o \cdot \hat{x}) \hat{x}] \end{aligned}$$

El campo dentro de la esfera es un campo magnético constante proporcional a \mathbf{B}_o , mientras que el campo de afuera tiene también una contribución de un campo de dipolo magnético con momento

$$\mathbf{m} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 \mathbf{B}_o \rightarrow \quad \mathbf{M} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu-1}{\mu+2} \mathbf{B}_o$$

13.73 Ejemplo Valdivia Magnetismo 2

Considere una esfera de radio a de material polarizable con constante μ . En el plano ecuatorial alrededor de esta esfera tenemos un anillo de radio $b > a$ en la cual fluye una corriente constante $\mathbf{J} = J_o \hat{\phi}$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.



Solución:

Primero escribamos el potencial vector $\mathbf{A} = A_o \hat{\phi}$ para el anillo en todo el espacio, con

$$A_o = \frac{4\pi I a}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_<^\ell}{r_>} |C_\ell^1|^2 P_\ell^1(0) P_\ell^1(\cos \theta)$$

donde ahora $r_> = \text{Max}[r, b]$ y $r_< = \text{Min}[r, b]$. Dado que

$$P_\ell^1(0) = \begin{cases} (-1)^{(\ell-1)/2} \frac{(\ell+1)!}{2\ell(\frac{\ell-1}{2})!(\frac{\ell+1}{2})!} & \ell \text{ impar} \\ 0 & \ell \text{ par} \end{cases}$$

Por lo tanto supongamos $\mathbf{A} = A_\phi(r, \theta) \hat{\phi}$ y para $r \neq b$ tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\phi = 0$$

Con lo cual podemos plantear la solución

$$A_\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} |C_{\ell,1}|^2 P_\ell^1(0) P_\ell^1(\cos \theta) \begin{cases} C_\ell r^\ell & r < a \\ \frac{r_<^\ell}{r_>} + \frac{a^\ell D_\ell}{r_>} & r > a \end{cases}$$

Ahora hay que garantizar las condiciones de Maxwell en la superficie de la esfera

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 \cdot \hat{n} = 0$$

Utilizando las condiciones de borde de continuidad, la primera condición nos da

$$C_\ell a^\ell = \frac{a^\ell}{b^{\ell+1}} + \frac{a^\ell D_\ell}{a^{\ell+1}} \quad (101)$$

Es mas fácil usar la continuidad del potencial que la condición de Maxwell para el componente radial del campo magnético.

Usando

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[r \frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} \hat{r} - r \sin \theta \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{\theta} \right],$$

necesitamos asegurar que el campo magnético tangencial \mathbf{H} sea continuo y también el campo magnético normal, con $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ y dado que no hay corriente superficiales, tenemos (adentro = afuera)

$$\mu \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \Big|_{r=a-} = \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \Big|_{r=a+}$$

que es equivalente a (derivando (101))

$$\mu C_\ell (\ell + 1) a^\ell = (\ell + 1) \frac{a^\ell}{b^{\ell+1}} - \ell \frac{a^\ell D_\ell}{a^{\ell+1}}$$

De estas relaciones podemos resolver C_ℓ y D_ℓ , y también calcular el campo magnético

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

13.74 Ejemplo Valdivia Magnetismo 2

Una esfera de radio a con magnetización $\mathbf{M} = M_o \hat{z}$ constante. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.

Solución:

Notemos que en general μ depende de la posición. En particular en la interfase tenemos

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

Esto garantiza que Φ es continuo cruzando la interfase. Además, en las dos regiones (no en el borde) tenemos $\mu = \text{const}$, por lo tanto la ecuación de Maxwell satisface

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Con

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta) \\ \Phi_{\text{out}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta) \end{aligned}$$

Notemos que M no aparece todavía. Solo aparece en las condiciones de borde, para B_r y H_θ

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= 0 \\ -\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \left[-\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} + 4\pi \mathbf{M} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Phi_{\text{in}} = \frac{4\pi}{3} M_o r \cos \theta \quad \Phi_{\text{out}} = \frac{4\pi}{3} M_o \frac{a^3}{r^3} r \cos \theta$$

Es mejor usar continuidad del potencial que la condición de Maxwell para \mathbf{H} tangencial. Notemos el signo positivo en la expresión del componente radial de \mathbf{B} ya que la normal en $r < a$ apunta hacia adentro de la caja. En vez de la continuidad de los campos tangenciales hemos utilizado la continuidad de Φ . En términos de los campos tenemos

$$\mathbf{H}_{\text{in}} = 4\pi \mathbf{M} \quad \mathbf{H}_{\text{out}} = 4\pi \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{M} - 3(\mathbf{M} \cdot \hat{x}) \hat{x}],$$

y el campo magnético es

$$\mathbf{B}_{\text{in}} = 8\pi \mathbf{M} \quad \mathbf{B}_{\text{out}} = 4\pi \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{M} - 3(\mathbf{M} \cdot \hat{x}) \hat{x}]$$

Es interesante notar que hay otras formas de resolver este mismo problema. Por ejemplo dado que tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot [\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}] = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

podemos escribir el potencial como

$$\Phi = - \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}(y)}{|x-y|} d^3y$$

donde la integral es en todo es espacio. Notemos que para la esfera tenemos

$$\mathbf{M} = M_o \hat{z} \theta(a-r)$$

con

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = M_o \frac{\partial}{\partial z} \theta(a - r) = -M_o \delta(a - r) \frac{z}{r} = \mathbf{M} \cdot \hat{n} \delta(a - r)$$

Esto implica que obtenemos el mismo resultado anterior

$$\begin{aligned} \Phi &= M_o \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{4\pi}{2\ell + 1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \int_0^{\infty} r_y^2 dr_y \delta(r_y - a) \frac{r_-^\ell}{r_+^{\ell+1}} \\ &\quad \int_0^{\pi} \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{2\pi} d\phi_y \cos \theta_y Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y) = \frac{4\pi}{3} M_o a^2 \frac{r_-}{r_+^2} \cos \theta \end{aligned}$$

ya que

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi)$$

Si \mathbf{M} es suave y localizado, podemos usar

$$\nabla_x \cdot \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

y

$$0 = \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = - \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \nabla_y \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

para escribir

$$\Phi = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int_{\bar{\Omega}} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

donde $\bar{\Omega}$ corresponde a la región donde $\mathbf{M} \neq 0$.

Si la magnetización puede ser considerada como discontinua en la superficie podemos escribir también

$$\Phi = - \int_{\bar{\Omega}} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \oint_{\bar{\Omega}\Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y}) \cdot \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y$$

ya que la expresión anterior para el caso de una esfera se puede re-escribir como

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{M} = -\mathbf{M} \cdot \hat{n} \delta(a - \xi)$$

con ξ como la variable que parametriza el borde de magneto. Para el caso de la esfera tenemos el mismo resultado anterior

$$\begin{aligned} \Phi &= M_o \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{4\pi}{2\ell + 1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) a^2 \frac{r_-^\ell}{r_+^{\ell+1}} \\ &\quad \int_0^{\pi} \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{2\pi} d\phi_y (\hat{z}_y \cdot \hat{r}_y) Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y) = \frac{4\pi}{3} M_o a^2 \frac{r_-}{r_+^2} \cos \theta. \end{aligned}$$

Este problema también se puede resolver en términos del vector potencial \mathbf{A} ya que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times [\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}] = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi\nabla \times \mathbf{M}$$

lo que tiene como solución

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \times \mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

en el Gauge de Coulomb. Donde la integral es sobre todo el espacio Ω . Si \mathbf{M} es suave y localizado, entonces podemos escribir

$$\mathbf{A} = \nabla_x \times \int_{\bar{\Omega}} \frac{\mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

Si hay una discontinuidad podemos escribir

$$\mathbf{A} = \int_{\bar{\Omega}} \frac{\nabla_y \times \mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{M}(y) \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS$$

por la misma razón anterior.

13.75 Ejemplo Valdivia Magnetismo 3

Calcular el campo magnético producido por un magneto permanente dentro de una cavidad conductora.

Solución:

Las condiciones de borde en el conductor son

$$(\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \cdot \hat{n} = 0 \quad (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

Si en el conductor perfecto podemos asumir que las cargas se moverán libremente para forzar que no hayan campos dentro de este, podemos entonces decir que

$$\mathbf{B} \cdot \hat{n} = 0 \quad \mathbf{B} \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

Por lo tanto el campo magnético normal $\mathbf{B}_{\perp} = 0$ en el borde. Ahora la segunda condición no es muy satisfactoria, ya que sabemos que si la conductividad es alta, pero finita, entonces la corriente superficial eventualmente se debería disipar tal que $\mathbf{K} \rightarrow 0$. Por lo tanto, la condición

$$\mathbf{B} \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

se da por lo general en una situación tiempo dependiente, donde tenemos un forzamiento que mantiene $\mathbf{K} \neq 0$.

Osea, esta condición de borde depende de la historia del proceso que crea la configuración final. De la misma manera, si la conductividad es grande, pero finita, entonces

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

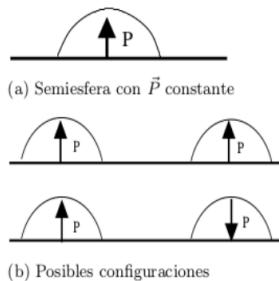
y por lo tanto tenemos que resolver el problema como un problema tiempo dependiente, ya que vamos a necesitar otra ecuación que relacione \mathbf{E} con \mathbf{B} (la ecuación de Faraday).

Notemos que el campo magnético terrestre tiene un campo magnético estático, aproximadamente dipolar, sobre su superficie, y por lo tanto el campo magnético no es cero dentro de la tierra, a pesar de que la conductividad es bastante alta. En este caso las condiciones de borde son, dado que no tenemos corriente en la superficie,

$$(\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \cdot \hat{n} = 0 \quad (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \times \hat{n} = \mathbf{0}$$

13.76 Semiesfera dipolar eléctrica

Sea una semiesfera de radio $r = a$ hecha de material dipolar eléctrico permanente y puesto sobre un conductor plano infinito. La dirección de \vec{P} es perpendicular a la superficie del conductor (ver Figura). Calcule el campo eléctrico \vec{E} producido por esta configuración.



Solución:

El potencial general para una configuración esférica tiene la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \left[A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right]$$

donde $\Omega_l^m(\theta, \phi)$ es el armónico esférico modificado dado por

$$\Omega_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) \sin(\phi)$$

tal que se cumplan las condiciones angulares $\psi(\phi = 0) = \psi(\phi = \pi) = 0$ (que es donde la semiesfera hace contacto con el plano conductor). Notar que se piensa la semiesfera como si estuviese posicionada en el plano $x - z$, luego tanto θ como ϕ quedan en el intervalo $[0, \pi]$. Dividiendo el potencial en ambas regiones (dentro y fuera de la semiesfera)

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r < a \\ C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > a \end{cases}$$

donde $B_{lm} = 0$ tal que el potencial no diverge en $r = 0$ y $C_{lm} = 0$ tal que el potencial no diverge en $r \rightarrow \infty$, escribiéndose entonces

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < a \\ D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > a \end{cases}$$

De la continuidad del potencial en $r = a$ se deduce que

$$D_{lm} = A_{lm} a^{2l+1}$$

y reemplazando en la solución se tiene

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < a \\ A_{lm} \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} & \text{si } r > a \end{cases}$$

La condición de material dipolar establece que existe una discontinuidad en la componente paralela de la corriente de desplazamiento \vec{D} igual a 4π veces el vector de densidad de polarización \vec{P} , luego

$$\boxed{\left(\vec{D}_{\text{out}} \Big|_{r=a} - \vec{D}_{\text{in}} \Big|_{r=a} \right) \cdot \hat{r} = 4\pi \vec{P} \cdot \hat{r}}$$

Puesto que en este caso $\vec{D} = -\vec{\nabla}\psi$, se escribe

$$\frac{\partial \psi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \frac{\partial \psi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} = 4\pi \vec{P} \cdot \hat{r}$$

luego, como el vector unitario \hat{r} de la configuración esférica en la Figura 88 es

$$\hat{r} = \sin(\phi) \cos(\theta) \hat{y}$$

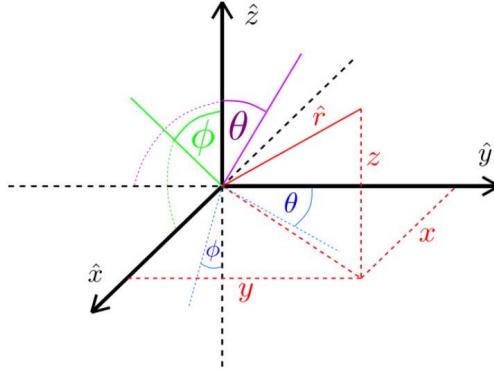


Figure 88: Nueva configuración esférica tras “posicionar” la semiesfera en el plano $x - z$ (azul para los ejes originales tras pasar al plano $x - z$, verde para el nuevo eje ϕ) y morado para el eje θ .

y el vector de densidad de polarización es perpendicular a la superficie (ver Figura 1) tal que

$$\vec{P} = P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \hat{y}$$

donde P es la magnitud de la polarización y las cantidades ϕ_0 y θ_0 son los ángulos de la polarización del material (notar que las tres cantidades son constantes, puesto que la polarización del material dipolar es permanente), la condición dipolar queda

$$\Omega_l^m(\theta, \phi) [A_{lm}la^{l-1} + (l+1)A_{lm}a^{l-1}] = 4\pi P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \sin(\phi) \cos(\theta)$$

Usando que

$$\Omega_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) \sin(\phi),$$

se deduce que $l = 1$ y $m = 0$ tal que se pueda escribir

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$$

obteniéndose la igualdad

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} [A_1^0 + 2A_1^0] = 4\pi P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0)$$

luego la constante es

$$A_1^0 = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0)$$

y el potencial eléctrico queda

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta) \sin(\phi) \begin{cases} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) r & \text{si } r < a \\ \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \frac{a^3}{r^2} & \text{si } r > a \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{4\pi}{3} P \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \left(\frac{r_-^3}{r^2}\right)$$

con $r_- = \min(r, a)$. Finalmente, puesto que en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{\phi} = 0$$

para el campo eléctrico exterior se obtiene

$$\vec{E}_> = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) [2 \sin(\phi) \cos(\theta) \hat{r} + \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{\theta} - \cot(\theta) \cos(\phi) \hat{\phi}],$$

mientras que para el campo interior se escribe

$$\vec{E}_< = -\frac{4\pi}{3} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) [\sin(\phi) \cos(\theta) \hat{r} - \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{\theta} + \cot(\theta) \cos(\phi) \hat{\phi}].$$

13.77 Esfera de material magnetizado

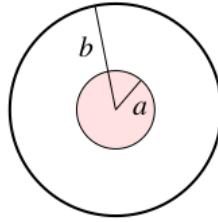
Tomemos una esfera de radio a hecha de un material magnético con magnetización permanente M constante. Esta esfera es puesta en forma concéntrica dentro de una esfera conductora de radio $b > a$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio y la corriente superficial en el conductor. Demuestre que la integral de la corriente es cero.

Ayuda: Asuma que los campos dentro del conductor son cero.

Solución 1:

Sea un sistema rectangular tal que $\vec{M} = M\hat{z}$, luego

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$$



Esfera con \mathbf{M} constante dentro de un conductor

y al aplicar la divergencia se obtiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{H} + 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

pero de la ley de monopolos magnéticos se tiene que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, por lo que

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

Puesto que no hay campo eléctrico ni cargas en movimiento (no hay densidad de corriente), de la ley de Ampère en medios materiales se escribe

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

lo que implica que \vec{H} puede escribirse como el gradiente de un potencial, ya que se sabe por identidades vectoriales que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = 0$, así $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m$ y se tiene

$$\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \Phi_m) = 0$$

de la misma manera que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ implica $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, puesto que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$. Ahora, recordando que $-\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$, se escribe

$$-\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi_m) = \nabla^2 \Phi_m = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 4\pi \vec{\nabla} \cdot (M \hat{z}) = 0,$$

es decir, el potencial magnético cumple con la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi_m = 0$. Considerando la simetría azimutal, la solución del potencial en el espacio será

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n[\cos(\theta)] & \text{si } r < a \\ \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n[\cos(\theta)] & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y como la solución no puede diverger en $r = 0$, se deduce que $B_n = 0$, luego

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n[\cos(\theta)] & \text{si } r < a \\ \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n[\cos(\theta)] & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

Para la esfera interna se tienen las condiciones de borde

$$(\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}}) \cdot \hat{n}_{21} = 0 \quad \hat{n}_{21} \times (\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}}) = 0$$

donde $\hat{n}_{21} = \hat{r}$, por lo que se reescribe

$$\vec{B}_{\text{out}} \cdot \hat{r} = \vec{B}_{\text{in}} \cdot \hat{r} \quad \vec{H}_{\text{out}} \times \hat{r} = \vec{H}_{\text{in}} \times \hat{r}$$

Recordando que $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$, la primera condición queda de la forma

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{out}} \cdot \hat{r} &= (\vec{H}_{\text{in}} + 4\pi\vec{M}) \cdot \hat{r} \\ - \frac{\partial \Phi_m^>}{\partial r} \Big|_{r=a} &= - \frac{\partial \Phi_m^<}{\partial r} \Big|_{r=a} + 4\pi M \hat{z} \cdot \hat{r} \\ - \frac{\partial \Phi_m^>}{\partial r} \Big|_{r=a} &= - \frac{\partial \Phi_m^<}{\partial r} \Big|_{r=a} + 4\pi M \cos(\theta) \end{aligned}$$

puesto que $\hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$, mientras que para la segunda condición se escribe

$$- \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_m^>}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_m^<}{\partial \theta} \Big|_{r=a}$$

y reemplazando la solución del potencial se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} -[nC_n a^{n-1} - (n+1)D_n a^{-(n+2)}] P_n[\cos(\theta)] &= -nA_n a^{n-1} P_n[\cos(\theta)] + 4\pi M \cos(\theta) \\ [C_n a^n + D_n a^{-(n+1)}] \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] &= A_n a^n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] \end{aligned}$$

Notando que $P_1[\cos(\theta)] = \cos(\theta)$, se reescribe

$$\begin{aligned} [nC_n a^{n-1} - (n+1)D_n a^{-(n+2)}] P_n[\cos(\theta)] &= nA_n a^{n-1} P_n[\cos(\theta)] - 4\pi M P_1[\cos(\theta)] \\ [C_n a^n + D_n a^{-(n+1)}] \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] &= A_n a^n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] \end{aligned}$$

luego se deduce que $n = 1$ y las condiciones de borde quedan

$$\begin{aligned} C_1 - 2D_1 a^{-3} &= A_1 - 4\pi M \\ C_1 a + D_1 a^{-2} &= A_1 a \end{aligned}$$

sistema del cual se obtiene

$$D_1 = \frac{4\pi}{3} a^3 M \quad C_1 = A_1 - \frac{4\pi}{3} M$$

La solución del potencial queda

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} A_1 r \cos(\theta) & \text{si } r < a \\ \left[A_1 r - \frac{4\pi}{3} r M + \frac{4\pi}{3} \frac{a^3}{r^2} M \right] \cos(\theta) & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y usando que sobre la esfera conductora

$$(\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}}) \cdot \hat{r} = 0$$

ya que sigue cumpliéndose que $\hat{n}_{12} = \hat{r}$, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi \Phi_m^>}{\partial r} \Big|_{r=b} &= -\frac{\partial \Phi_m^<}{\partial r} \Big|_{r=b} \\ 0 &= \left[A_1 - \frac{4\pi}{3} M - \frac{8\pi}{3} \left(\frac{a}{b} \right)^3 M \right] \cos(\theta), \end{aligned}$$

siendo inmediato que

$$A_1 = \frac{4\pi}{3} M \left[1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right]$$

luego el potencial en el espacio es

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} M \left[1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right] r \cos(\theta) & \text{si } r < a \\ \frac{4\pi}{3} M \left[\left(\frac{a}{r} \right)^3 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right] r \cos(\theta) & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y como $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m$, se obtiene el campo magnético

$$\vec{H} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3} M \left[1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right] [\cos(\theta) \hat{r} - \sin(\theta) \hat{\theta}] & \text{si } r < a \\ \frac{4\pi}{3} M \left[\left(\frac{a}{r} \right)^3 - 2 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right] \cos(\theta) \hat{r} + \frac{4\pi}{3} M \left[\left(\frac{a}{r} \right)^3 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^3 \right] \sin(\theta) \hat{\theta} & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y ya que solo hay magnetización en $r < a$, luego usando que $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$, se obtiene

$$\vec{B} = \begin{cases} 4\pi M [\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}] - \frac{4\pi}{3}M \left[1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3\right] [\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}] & \text{si } r < a \\ \frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^3\right] \cos(\theta)\hat{r} + \frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3\right] \sin(\theta)\hat{\theta} & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

Por último, usando la condición sobre la superficie de la esfera conductora

$$\hat{r} \times (\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}}) = \frac{4\pi}{c} \vec{K}$$

y, puesto que $\vec{H}_{\text{out}} = 0$ para $r > b$, se escribe

$$-\hat{r} \times \left(\frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \cos(\theta)\hat{r} + \frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sin(\theta)\hat{\theta} \right) \Big|_{r=b} = \frac{4\pi}{c} \vec{K}$$

y desarrollando se obtiene

Para evaluar la corriente total producida se tiene en x que

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{\Omega} [K(x) \cdot \hat{x}] d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^b Mc \sin(\theta) \left(\frac{a}{b}\right)^3 \sin(\phi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{3} M c a^3 \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi \\ &= \frac{\pi}{6} M c a^3 \int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

y, de manera análoga,

$$I_y = \int_{\Omega} [K(y) \cdot \hat{y}] d\Omega = -\frac{\pi}{6} M c a^3 \int_0^{2\pi} \cos(\phi) d\phi = 0$$

luego $I_x = I_y = 0$, como se quería demostrar.

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3}M \left[\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sin(\theta)\hat{\phi} &= \frac{4\pi}{c} \vec{K} \\ -Mc \sin(\theta) \left(\frac{a}{b}\right)^3 \hat{\phi} &= \vec{K}. \end{aligned}$$

Solución 2:

Para este problema sabemos que en la superficie $r = b$ los campos deben ser 0 además escribiremos $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$, ante ausencia de corrientes libres supondremos que el campo se puede escribir como el gradiente de un potencial

$$\begin{aligned} B &= \nabla \Phi_{\text{mag}} \\ B_{\text{in}} &= \nabla \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos(\theta)) \\ B_{\text{out}} &= \nabla \sum_{l=0}^{\infty} B_l \left[\frac{l}{l+1} \frac{1}{r^{l+1}} + \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right] P_l(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

elegimos esta expresión sin un término angular ϕ debido a la simetría del problema y para que B_{out} sea igual a 0 en b .

De las ecuaciones de Maxwell tenemos 2 condiciones de borde, una para B y otra para H , las cuales pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} (B_{\text{out}} - B_{\text{in}}) \cdot \hat{r} &= 0 \\ (H_{\text{out}} - H_{\text{in}}) \times \hat{r} &= 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, $H_{\text{in}} = B_{\text{in}} - 4\pi \mathbf{M}$, y $\mathbf{M} = M_0(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} l A_l a^{l-1} P_l(\cos(\theta)) &= - \sum_{l=0}^{\infty} B_l \left[\frac{l}{a^{l+2}} - \frac{la^{l-1}}{b^{2l+1}} \right] P_l(\cos(\theta)) \\ A_l + B_l \left[\frac{1}{a^{2l+1}} - \frac{1}{b^{2l+1}} \right] &= 0 \\ \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial d\theta} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial d\theta} - 4\pi M_0 \sin \theta &= 0 \\ \sum_{l=1}^{\infty} \left[B_l \left[\frac{l}{l+1} \frac{1}{a^{l+2}} + \frac{a^{l-1}}{b^{2l+1}} \right] - A_l a^{l-1} \right] \frac{\partial P_l(\cos(\theta))}{\partial \theta} &= 4\pi M_0 \sin \theta \end{aligned}$$

sin embargo, podemos notar inmediatamente que $-\sin \theta = \frac{\partial P_1(\cos(\theta))}{\partial \theta}$, por ortonormalidad tendremos entonces que si $l \neq 1$ se debe cumplir que $A_l = B_l = 0$, y para $l = 1$

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 \left[\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right] &= 0 \\ A_1 - B_1 \left[\frac{1}{2a^3} + \frac{1}{b^3} \right] &= 4\pi M_0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A_1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{a^3}{3b^3} \right) 8\pi M_0$$

$$B_1 = -M_0 \frac{8\pi a^3}{3}$$

habiendo determinado estos coeficientes podemos escribir nuestro campo magnético como

$$\begin{aligned} B_{\text{in}} &= \nabla \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{a^3}{3b^3} \right) 8\pi M_0 r \cos(\theta) \right) \\ &= \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{a^3}{3b^3} \right) 8\pi M_0 \cos(\theta) \hat{r} - \left(\frac{1}{3} - \frac{a^3}{3b^3} \right) 8\pi M_0 \sin(\theta) \hat{\theta} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{a^3}{3b^3} \right) 8\pi M_0 \hat{z} \\ B_{\text{out}} &= -M_0 \frac{8\pi a^3}{3} \left[\frac{1}{2r^2} + \frac{r}{b^3} \right] \cos(\theta) \\ &= -M_0 \frac{8\pi a^3}{3} \left(\left[\frac{-1}{r^3} + \frac{1}{b^3} \right] \cos(\theta) \hat{r} - \left[\frac{1}{2r^3} + \frac{1}{b^3} \right] \sin(\theta) \hat{\theta} \right) \\ &= M_0 \frac{8\pi a^3}{3} \left(\left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right] \cos(\theta) \hat{r} - \left[\frac{-1}{2r^3} - \frac{1}{b^3} \right] \sin(\theta) \hat{\theta} \right) \end{aligned}$$

En el borde $r = b$ tendremos que

$$\begin{aligned} (0 - B_{\text{out}}) \times r &= 4\pi k \\ -M_0 \frac{8\pi a^3}{3} \left[\frac{1}{2b^3} + \frac{1}{b^3} \right] \sin(\theta) \hat{\phi} &= 4\pi k \\ -M_0 \frac{a^3}{2b^3} \sin \theta \hat{\phi} &= k \end{aligned}$$

notamos que al integrar este valor en θ tenemos por resultado 0 por lo cual la suma de las corrientes debe ser 0.

13.78 Esfera de material magnético constante

Tomemos una esfera de material magnético constante M . Calcule el campo magnético producido por esta esfera. Si ahora la ponemos en un campo magnético externo constante, que fuerza siente? ¿Qué pasa si la esfera está hecha de un material magnético con constante μ ?

Solución:

Para este problema sabemos que en la superficie $r \rightarrow \infty$ los campos deben ser 0 además escribiremos $\mathbf{M} = M_0\hat{z}$, ante ausencia de corrientes libres supondremos que el campo se puede escribir como el gradiente de un potencial

$$\begin{aligned} B &= \nabla\Phi_{\text{mag}} \\ B_{\text{in}} &= \nabla \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos(\theta)) \\ B_{\text{out}} &= \nabla \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

elegimos esta expresión sin un término angular ϕ debido a la simetría del problema

De las ecuaciones de Maxwell tenemos 2 condiciones de borde, una para B y otra para H , las cuales pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} (B_{\text{out}} - B_{\text{in}}) \cdot \hat{r} &= 0 \\ (H_{\text{out}} - H_{\text{in}}) \times \hat{r} &= 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, $H_{\text{in}} = B_{\text{in}} - 4\pi\mathbf{M}$, y $\mathbf{M} = M_0(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta})$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} l A_l a^{l-1} P_l(\cos(\theta)) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l(l+1)}{a^{l+2}} P_l(\cos(\theta)) &= 0 \\ A_l + B_l \frac{l+1}{la^{2l+1}} &= 0 \\ \frac{1}{a} \frac{\partial\Phi_{\text{out}}}{\partial d\theta} - \frac{1}{a} \frac{\partial\Phi_{\text{in}}}{\partial d\theta} - 4\pi M_0 \sin\theta &= 0 \\ \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{B_l}{a^{l+2}} - A_l a^{l-1} \right] \frac{\partial P_l(\cos(\theta))}{\partial \theta} &= 4\pi M_0 \sin\theta \end{aligned}$$

sin embargo, podemos notar inmediatamente que $-\sin\theta = \frac{\partial P_1(\cos(\theta))}{\partial \theta}$, por ortonormalidad tendremos entonces que si $l \neq 1$ se debe cumplir que $A_l = B_l = 0$, y para $l = 1$

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 \left[\frac{2}{a^3} \right] &= 0 \\ A_1 - B_1 \left[\frac{1}{a^3} \right] &= 4\pi M_0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A_1 = \frac{8\pi M_0}{3}$$

$$B_1 = -\frac{4\pi M_0 a^3}{3}$$

podemos escribir entonces nuestro campo magnético como

$$\begin{aligned} B_{in} &= \frac{8\pi M_0}{3} \nabla r \cos(\theta) \\ &= \frac{8\pi M_0}{3} (\cos(\theta) \hat{r} - \sin(\theta) \hat{\theta}) \\ &= \frac{8\pi M_0}{3} \hat{z} \\ B_{out} &= -\frac{4\pi M_0 a^3}{3} \nabla \frac{\cos(\theta)}{r^2} \\ &= -\frac{4\pi M_0 a^3}{3} \left(\frac{-2 \cos(\theta)}{r^3} \hat{r} + \frac{-\sin(\theta)}{r^3} \hat{\theta} \right) \\ &= \frac{4\pi M_0 a^3}{3} \left(\frac{2 \cos(\theta)}{r^3} \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{r^3} \hat{\theta} \right) \\ &= \frac{4\pi M_0 a^3}{3 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(2 \hat{z} + 3 \frac{\rho z \hat{\rho} - \rho^2 \hat{z}}{\rho^2 + z^2} \right) \\ &= \frac{4\pi M_0 a^3}{3 (\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} ((\rho^2 + 2z^2) \hat{z} + 3\rho z \hat{\rho}) \end{aligned}$$

Si existiese un campo externo constante podemos calcular la fuerza que esta ejerce sobre nuestro magneto, esta viene dada por

$$F = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

sin embargo, la magnetización y el campo son constantes, por lo cual podemos concluir que nuestra fuerza es 0 .

13.79 Problema 8

Tomemos un anillo de corriente de radio a y corriente I_0 puesto en forma concéntrica dentro de un hueco esférico de radio b en un material magnético de constante μ . Calcule el campo magnético en todo el espacio. Grafique las lineas de campo para diferentes valores de μ . Que pasa en el límite $\mu \rightarrow \infty$. Grafique las lineas de campo.

Solución:

Para solucionar este problema utilizaremos el potencial vector A , sabemos que

$$J = I \frac{\delta(r - a)}{r} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \hat{\phi}$$

por lo cual supondremos que A solo tiene componentes en $\hat{\phi}$, por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \times B &= \nabla \times \nabla \times A \\ \frac{4\pi J}{C} + \frac{1}{C} \frac{\partial D}{\partial t} &= \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \end{aligned}$$

Elegiremos entonces el gauge de Coulomb, tal que $\nabla(\nabla \cdot A) = 0$, además sabemos que $\frac{1}{C} \frac{\partial D}{\partial t} = 0$. Sabemos también que por la simetría de este problema A_ϕ no puede tener dependencia de ϕ , luego

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \\ \nabla^2 A_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2} - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Debemos resolver entonces

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2} - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{4\pi}{C} I \frac{\delta(r - a)}{r} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Notamos que la solución a esta ecuación es semejante a la función de Green en el espacio infinito, con la restricción adicional que $m = 1$, consideraremos entonces 3 zonas, $a < r$, $a < r < b$, $r > b$

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} [\alpha r^l] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)), \quad r < a \\ A_\phi &= \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\beta r^l + \frac{\gamma}{r^{l+1}} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)) \quad a < r < b \\ A_\phi &= \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\epsilon}{r^{l+1}} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)) \quad r > b \end{aligned}$$

ya que no tenemos corrientes superficiales para $r = b$, de nuestras condiciones de borde tenemos que

$$(B_i - B_j) \cdot r = 0$$

$$(\nabla \times (A_{\phi i} - A_{\phi j})) \cdot r = 0$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta (A_{\phi i} - A_{\phi j})) = 0 \quad (102)$$

$$(H_i - H_j) \times r = 0$$

$$\left(\nabla \times \left(\frac{A_{\phi i}}{\mu_i} - \frac{A_{\phi j}}{\mu_j} \right) \right) \times r = \frac{4\pi}{c} k$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi i}}{\mu_i} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi j}}{\mu_j} \right) = \frac{4\pi}{c} k$$

$$\frac{\partial}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi i}}{\mu_i} \right) \Big|_b = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi j}}{\mu_j} \right) \Big|_b \quad (103)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi j}}{\mu_j} \right) \Big|_a = \frac{4\pi}{c} k \quad (104)$$

de (102) podemos concluir que A_ϕ debe ser continuo en r mientras que (103) y (104) nos da una relación sobre la derivada, luego

$$\alpha a^l - \beta a^l - \frac{\gamma}{a^{l+1}} = 0$$

$$\beta b^l + \frac{\gamma}{b^{l+1}} - \frac{\epsilon}{b^{l+1}} = 0$$

$$(l+1)\beta b^l - l \frac{\gamma}{b^{l+1}} + l \frac{\epsilon}{\mu b^{l+1}} = 0$$

este sistema tiene por solución

$$\alpha = \frac{a^{l+1}l(\mu-1)}{b^{2l+1}(l+\mu(l+1))(2l+1)} + \frac{a^{l+1}l(\mu-1)}{a^l(2)}$$

$$\beta = \frac{a^{l+1}}{b^{2l+1}(l+\mu(l+1))(2l+1)}$$

$$\gamma = \frac{(2l+1)}{(a^{l+1})}$$

$$\epsilon = \frac{1+\mu(l+1)}{l+\mu}$$

recordamos que

$$B = \nabla \times A$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{\theta}$$

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \cot \theta A_\phi \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{\theta}$$

podemos calcular $\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta}$, omitiremos la parte radial en este cálculo ya que no depende de ella, y será marcada como F_r^l

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \cot \theta A_\phi &= \frac{\partial A_\phi}{\partial \cos \theta} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} + \cot \theta A_\phi \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} [F_r^l] |C_l^1|^2 P_l^1(0) [\cos \theta P_l^1(\cos \theta) - \sin^2 \theta P_l^{1'}(\cos(\theta))] \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} [F_r^l] |C_l^1|^2 P_l^1(0)(l+1) [\cos \theta P_l^1(\cos \theta) - P_{l-1}^1(\cos(\theta))]\end{aligned}$$

finalmente

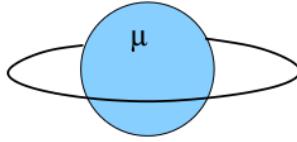
$$\begin{aligned}B_r^I &= \frac{4\pi I}{\sin \theta C} \sum_{l=1}^{\infty} r^{l-1} \left[\frac{a^{l+1} l (\mu - 1) (l+1)}{b^{2l+1} (l + \mu(l+1))(2l+1)} + \frac{(l+1)}{a^l (2l+1)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) [\cos \theta P_l^1(\cos \theta) - P_{l-1}^1(\cos(\theta))] \\ B_r^{II} &= \frac{4\pi I}{\sin \theta C} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{r^{l-1} a^{l+1} l (\mu - 1) (l+1)}{b^{2l+1} (l + \mu(l+1))(2l+1)} + \frac{a^{l+1} (l+1)}{r^{l+2} (2l+1)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) [\cos \theta P_l^1(\cos \theta) - P_{l-1}^1(\cos(\theta))] \\ B_r^{III} &= \frac{4\pi I}{\sin \theta C} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l+1}{r^{l+2}} \left[\frac{\mu a^{l+1}}{l + \mu(l+1)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) [\cos \theta P_l^1(\cos \theta) - P_{l-1}^1(\cos(\theta))] \\ B_\theta^I &= -\frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} r^{l-1} (l+1) \left[\frac{a^{l+1} l (\mu - 1)}{b^{2l+1} (l + \mu(l+1))(2l+1)} + \frac{1}{a^l (2l+1)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)) \\ B_\theta^{II} &= -\frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{r^{l-1} (l+1) a^{l+1} l (\mu - 1)}{b^{2l+1} (l + \mu(l+1))(2l+1)} - \frac{l a^{l+1}}{r^{l+2} (2l+1)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)) \\ B_\theta^{III} &= \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{r^{l+2}} \left[\frac{\mu a^{l+1}}{l + \mu(l+1)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta))\end{aligned}$$

13.80 Esfera polarizable dentro de anillo

Considere una esfera de radio a de material polarizable con constante μ . En el plano ecuatorial alrededor de esta esfera tenemos un anillo de radio $b > a$ en la cual fluye una corriente constante $\mathbf{J} = J_0 \hat{\phi}$. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.

Solución:

Para solucionar este problema utilizaremos el potencial vector A , sabemos que



$$J = I \frac{\delta(r-a)}{r} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \hat{\phi}$$

por lo cual supondremos que A solo tiene componentes en $\hat{\phi}$, por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \times B &= \nabla \times \nabla \times A \\ \frac{4\pi J}{C} + \frac{1}{C} \frac{\partial D}{\partial t} &= \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \end{aligned}$$

Elegiremos entonces el gauge de Coulomb, tal que $\nabla(\nabla \cdot A) = 0$, además sabemos que $\frac{1}{C} \frac{\partial D}{\partial t} = 0$. Sabemos también que por la simetría de este problema A_ϕ no puede tener dependencia de ϕ , luego

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \\ \nabla^2 A_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2} - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Debemos resolver entonces

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r A_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2} - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{4\pi}{C} I \frac{\delta(r-a)}{r} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Notamos que la solución a esta ecuación es semejante a la función de Green en el espacio infinito, con la restricción adicional que $m = 1$, consideraremos entonces 3 zonas, $a < r$, $a < r < b$, $r > b$

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} [\alpha r^l] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)), \quad r < a \\ A_\phi &= \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\beta r^l + \frac{\gamma}{r^{l+1}} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)) \quad a < r < b \\ A_\phi &= \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\epsilon}{r^{l+1}} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)) \quad r > b \end{aligned}$$

ya que no tenemos corrientes superficiales para $r = a$, de nuestras condiciones de borde tenemos que

$$(B_i - B_j) \cdot r = 0,$$

$$(\nabla \times (A_{\phi i} - A_{\phi j})) \cdot r = 0,$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta (A_{\phi i} - A_{\phi j})) = 0 \quad (105)$$

$$(H_i - H_j) \times r = 0,$$

$$\left(\nabla \times \left(\frac{A_{\phi i}}{\mu_i} - \frac{A_{\phi j}}{\mu_j} \right) \right) \times r = \frac{4\pi}{c} k,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi i}}{\mu_i} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi j}}{\mu_j} \right) = \frac{4\pi}{c} k$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi i}}{\mu_i} \right) \Big|_a = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi j}}{\mu_j} \right) \Big|_a \quad (106)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi i}}{\mu_i} \right) \Big|_b - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{A_{\phi j}}{\mu_j} \right) \Big|_b = \frac{4\pi}{c} k \quad (107)$$

de (105) podemos concluir que A_ϕ debe ser continuo en r mientras que (106) y (107) nos da una relación sobre la derivada, luego

$$\begin{aligned} \alpha a^l - \beta a^l - \frac{\gamma}{a^{l+1}} &= 0 \\ \beta b^l + \frac{\gamma}{b^{l+1}} - \frac{\epsilon}{b^{l+1}} &= 0 \\ (l+1) \frac{\alpha}{\mu} a^l - (l+1) \beta a^l + l \frac{\gamma}{a^{l+1}} &= 0 \\ (l+1) \beta b^l - l \frac{\gamma}{b^{l+1}} + l \frac{\epsilon}{b^{l+1}} &= 1 \end{aligned}$$

este sistema tiene por solución

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu}{b^l(l+1+\mu l)} \\ \beta &= \frac{1}{b^l(2l+1)} \\ \gamma &= \frac{a^{2l+1}(l+1)(\mu-1)}{b^l(l+1+\mu l)(2l+1)} \\ \epsilon &= \frac{a^{2l+1}(l+1)(\mu-1)}{b^l(l+1+\mu l)(2l+1)} + \frac{b^{l+1}}{(2l+1)} \end{aligned}$$

recordamos que

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{\theta} \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \cot \theta A_\phi \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{\theta} \end{aligned}$$

podemos calcular $\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta}$, omitiremos la parte radial en este cálculo ya que no depende de ella, y será marcada como F_r^l

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \cot \theta A_\phi &= \frac{\partial A_\phi}{\partial \cos \theta} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} + \cot \theta A_\phi \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} [F_r^l] |C_l^1|^2 P_l^1(0) [\cos \theta P_l^1(\cos \theta) - \sin^2 \theta P_l^{1'}(\cos(\theta))] \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} [F_r^l] |C_l^1|^2 P_l^1(0) [(2 \cos \theta P_l^1(\cos \theta) + \sin \theta P_l^2(\cos(\theta))] \end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned} B_r^I &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\mu r^{l-1}}{b^l(l+1+\mu l)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) [(2 \cos \theta P_l^1(\cos \theta) + \sin \theta P_l^2(\cos(\theta))] \quad r < a \\ B_r^{II} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{r^{l-1}}{b^l(2l+1)} + \frac{a^{2l+1}(l+1)(\mu-1)}{r^{l+2}b^l(l+1+\mu l)(2l+1)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) [(2 \cos \theta P_l^1(\cos \theta) + \sin \theta P_l^2(\cos(\theta))] \\ B_r^{III} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{r^{l+2}} \left[\frac{a^{2l+1}(l+1)(\mu-1)}{b^l(l+1+\mu l)(2l+1)} + \frac{b^{l+1}}{(2l+1)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) [(2 \cos \theta P_l^1(\cos \theta) + \sin \theta P_l^2(\cos(\theta))] \\ B_\theta^I &= -\frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{(l+1)\mu r^{l-1}}{b^l(l+1+\mu l)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)) \\ B_\theta^{II} &= -\frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{(l+1)r^{l-1}}{b^l(2l+1)} - \frac{l a^{2l+1}(l+1)(\mu-1)}{r^{l+2}b^l(l+1+\mu l)(2l+1)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)) \\ B_\theta^{III} &= \frac{4\pi I}{C} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{r^{l+2}} \left[\frac{a^{2l+1}(l+1)(\mu-1)}{b^l(l+1+\mu l)(2l+1)} + \frac{b^{l+1}}{(2l+1)} \right] |C_l^1|^2 P_l^1(0) P_l^1(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

13.81 Jackson 9.3

Dos mitades de un cascarón esférico metálico de radio R y conductividad infinita están separadas por un espacio aislante muy pequeño. Se aplica un

potencial alterno entre las dos mitades de la esfera para que los potenciales sean $\pm V \cos \omega t$. En el límite de longitud de onda larga, encuentre los campos de radiación, la distribución angular de la potencia radiada y la potencia radiada total de la esfera.

Solución:

Two halves of a sphere that are charged oppositely should immediately remind us of a dipole so that we can assume the dipole term is the dominant term. We just need to find the dipole moment of this configuration and then we can apply the equations in the class notes for the fields radiated by a dipole. Let us consider the sphere at an instant in time when the voltages are at their peak. We previously found the external potential due to such a sphere in terms of Legendre polynomials. We found the first term to be:

$$\Phi = V \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} \cos \theta$$

We know that the potential due to a electric dipole pointing in the z direction should look like:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos \theta$$

Setting these equal and solving for p we end up with

$$\mathbf{p} = 6\pi\epsilon_0 V R^2 \hat{\mathbf{z}}$$

Now the potentials on the sphere vary according to $\cos(\omega t)$, which is just the real part of the complex exponential signifying harmonic dependence. We already found in the class notes the radiation-zone fields due to an electric dipole varying harmonically in time. We can write them down immediately and plug in the dipole moment we have here.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 c k^2 p}{4\pi} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{p}}) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \\ \mathbf{B} &= -\frac{3}{2} \frac{V k^2 R^2}{c} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \sin \theta \hat{\phi} \\ \mathbf{E} &= -\frac{k^2 p}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{p}}) \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \\ \mathbf{E} &= -\frac{3}{2} V k^2 R^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \sin \theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

The time-averaged angular distribution of radiated power is:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2}\mathcal{R} [r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2}\mathcal{R} \left[r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[-\frac{3}{2} V k^2 R^2 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \times \left[-\frac{1}{\mu_0} \frac{3}{2} \frac{V k^2 R^2}{c} \frac{e^{-i(kr-\omega t)}}{r} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] \right]$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{9}{8} \frac{V^2 k^4 R^4}{\mu_0 c} \sin^2 \theta$$

The total radiated power is:

$$P = \int \frac{9}{8} \frac{V^2 k^4 R^4}{\mu_0 c} \sin^2 \theta d\Omega, \quad P = \frac{3\pi V^2 k^4 R^4}{\mu_0 c}$$

13.82 Tarea 2 P1 2022

Tomemos una esfera de radio a hecha de un material eléctrico permanente \mathbf{P} constante. Esta esfera es puesta en forma concéntrica dentro de una esfera conductora de radio $b > a$. Encuentre el campo eléctrico dentro de la esfera y la densidad de carga superficial en el conductor.

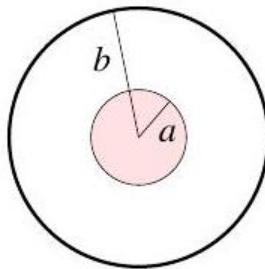
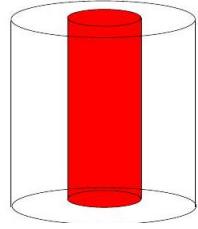


Figure 89: Esfera con \mathbf{P} constante dentro de una esfera conductora.

13.83 Tarea 2 P2 2022

Considere un cascarón cilíndrico conductor a tierra (infinito y uniforme en la dirección longitudinal) de radio R . Dentro del cilindro hay otro cilindro de radio $a < R$, como se ve en la figura, compuesto de un material que responde con $\mathbf{P} = P_o \hat{x}$ independiente de la intensidad del campo eléctrico que se le aplica. Encuentre el campo eléctrico dentro del conductor y la densidad de carga en las superficies.

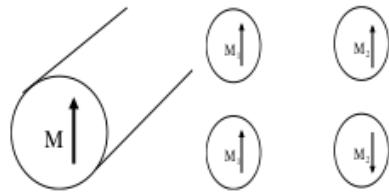
Solución: en la tablet.



13.84 T3 P3

Tomemos un cilindro de material magnético de radio a y muy largo, con magnetización constante \vec{M} como se muestra en la figura (a)

- Encuentre el campo magnético en todo el espacio (a)
- Si ponemos otro cilindro a una distancia $d \gg a$, cual de las dos configuraciones que se muestran en la figura (b) es la mas favorable energéticamente (explique).



Solución 1:

a) Para este problema sabemos que en la superficie $r \rightarrow \infty$ los campos deben ser 0 además escribiremos $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$, ante ausencia de corrientes libres supondremos que el campo se puede escribir como el gradiente de un potencial

$$\begin{aligned} B &= \nabla \Phi_{\text{mag}} \\ B_{\text{in}} &= \nabla \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos(\theta)) \\ B_{\text{out}} &= \nabla \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

elegimos esta expresión sin un término angular ϕ debido a la simetría del problema De las ecuaciones de Maxwell tenemos 2 condiciones de borde, una para B y otra para H , las cuales pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} (B_{\text{out}} - B_{\text{in}}) \cdot \hat{r} &= 0 \\ (H_{\text{out}} - H_{\text{in}}) \times \hat{r} &= 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, $H_{in} = B_{in} - 4\pi\mathbf{M}$, y $\mathbf{M} = M_0(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta})$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} l A_l a^{l-1} P_l(\cos(\theta)) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l(l+1)}{a^{l+2}} P_l(\cos(\theta)) &= 0 \\ A_l + B_l \frac{l+1}{la^{2l+1}} &= 0 \\ \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial d\theta} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial d\theta} - 4\pi M_0 \sin\theta &= 0 \\ \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{B_l}{a^{l+2}} - A_l a^{l-1} \right] \frac{\partial P_l(\cos(\theta))}{\partial \theta} &= 4\pi M_0 \sin\theta \end{aligned}$$

sin embargo, podemos notar inmediatamente que $-\sin\theta = \frac{\partial P_1(\cos(\theta))}{\partial \theta}$, por ortonormalidad tendremos entonces que si $l \neq 1$ se debe cumplir que $A_l = B_l = 0$, y para $l = 1$

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 \left[\frac{2}{a^3} \right] &= 0 \\ A_1 - B_1 \left[\frac{1}{a^3} \right] &= 4\pi M_0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{8\pi M_0}{3} \\ B_1 &= -\frac{4\pi M_0 a^3}{3} \end{aligned}$$

podemos escribir entonces nuestro campo magnético como

$$\begin{aligned} B_{in} &= \frac{8\pi M_0}{3} \nabla r \cos(\theta) \\ &= \frac{8\pi M_0}{3} (\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}) \\ &= \frac{8\pi M_0}{3} \hat{z} \\ B_{out} &= -\frac{4\pi M_0 a^3}{3} \nabla \frac{\cos(\theta)}{r^2} \\ &= -\frac{4\pi M_0 a^3}{3} \left(\frac{-2 \cos(\theta)}{r^3} \hat{r} + \frac{-\sin(\theta)}{r^3} \hat{\theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi M_0 a^3}{3} \left(\frac{2\cos(\theta)}{r^3} \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{r^3} \hat{\theta} \right) \\
&= \frac{4\pi M_0 a^3}{3(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(2\hat{z} + 3 \frac{\rho z \hat{\rho} - \rho^2 \hat{z}}{\rho^2 + z^2} \right) \\
&= \frac{4\pi M_0 a^3}{3(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} ((\rho^2 + 2z^2) \hat{z} + 3\rho z \hat{\rho})
\end{aligned}$$

b) La [definición de la energía](#) viene dada por

$$\begin{aligned}
U &= -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \\
\mathbf{m}_i &= \int \mathbf{M}_i d^3x \\
&= M_i \hat{z} \int dV \\
&= \frac{4\pi M_i a^3}{3} \hat{z}
\end{aligned}$$

para B constante, ya que supondremos que ambas magnetizaciones son paralelas o antiparalelas nos interesaría únicamente la [componente paralela a la magnetización](#) de nuestro resultado anterior. La energía total del sistema viene dada por la suma de la [energía de cada esfera](#). El campo eléctrico al interior de una de las esferas vendrá dado por su campo interior más el campo exterior producido por la otra esfera, notamos que:

$$U_{in} = \frac{4\pi M_i a^3}{3} \frac{8\pi M_i}{3} \hat{z} \cdot \hat{z}$$

este término no depende del signo de M_i , por lo cual aparecerá en nuestra energía independiente de si los imanes se ubican de forma paralela o anti-paralela, nos interesa evaluar entonces el efecto del campo exterior sobre el magneto.

$$\begin{aligned}
U_{out} &= -\frac{4\pi M_i a^3}{3} \hat{z} \cdot \frac{4\pi M_0 a^3}{3(\bar{\rho}^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} ((\bar{\rho}^2 + 2z^2) \hat{z} + 3\bar{\rho} z \hat{\rho}) \\
U_{out} &\approx -\frac{4\pi M_i a^3}{3} \frac{4\pi M_j a^3}{3d^3}
\end{aligned}$$

Podemos notar que la energía se minimiza si $M_i = M_j$, es decir, si son paralelos.

Solución 2:



a) Tenemos las ecuaciones de Maxwell en magnetostática

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= 4\pi \frac{c}{c} \vec{J}\end{aligned}$$

donde $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$.

Como en este problema no hay asociada una densidad de corriente, entonces $\vec{J} = 0$

$$\implies \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$$

Esto nos permite afirmar que $\vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi$. Aplicamos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \\ \Rightarrow \nabla^2 \varphi &= 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M}\end{aligned}$$

como M es uniforme, podemos darnos cuenta que podemos escribirlo como

$$\vec{M} = M_0 \Theta(n - a) \hat{x}$$

Lo cual nos permite inferir que $\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$ excepto en el borde del cilindro. Finalmente debemos resolver

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Como el cilindro es infinito, tenemos simetría en z . Luego la solución para φ está en coordenadas polares:

$$\varphi(r, \phi) = (a + b \ln r)(c + d\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi))$$

Nuestra región de interés es al interior del cilindro y afuera del cilindro.

Para $r < a$, consideramos $b = B_n = 0$ para evitar la divergencia y $d = 0$ ya que el potencial debe ser periódico. Así nos queda

$$\varphi_{\text{in}}(r, \phi) = a + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi)\} \quad r < a$$

Para $r > a$, consideramos $b = A_n = d = 0$ por los mismos argumentos anteriores. Así nos queda

$$\varphi_{\text{out}}(r, \phi) = c + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \{E_n \cos(n\phi) + F_n \sin(n\phi)\} \quad r > a$$

para determinar las constantes, impondremos las condiciones de Maxwell

$$\left(\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}} \right) \times \hat{r} = \frac{4\pi}{c} \vec{k}$$

como no hay corrientes superficiales

$$\Rightarrow \left(\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}} \right) \times \hat{r} = 0$$

Recordemos que $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi$.

El gradiente en coordenadas polares es

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\varphi \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}\varphi \hat{\phi}$$

Calculemos \vec{H}

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{out}} &= -\vec{\nabla}\varphi_{\text{out}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r}\varphi_{\text{out}} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}\varphi_{\text{out}} \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nr^{-n-1} \{E_n \cos(n\phi) + F_n \sin(n\phi)\} \hat{r} - \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} nr^{-n} \{-E_n \sin(n\phi) + F_n \cos(n\phi)\} \hat{\phi}$$

$$\vec{H}_{\text{in}} = -\vec{\nabla}\varphi_{\text{in}}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r}\varphi_{\text{in}} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}\varphi_{\text{in}} \hat{\phi}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} \{C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi)\} \hat{r} - \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} nr^n \{-C_n \sin(n\phi) + D_n \cos(n\phi)\} \hat{\phi}$$

Luego

$$\vec{H}_{\text{out}} \times \hat{r}|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} na^{-(n+1)} \{F_n \cos(n\phi) - E_n \sin(n\phi)\} \hat{z}$$

$$\vec{H}_{\text{in}} \times \hat{r}|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} \{D_n \cos(n\phi) - C_n \sin(n\phi)\} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} na^{-(n+1)} \{F_n \cos(n\phi) - E_n \sin(n\phi)\} = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} \{D_n \cos(n\phi) - C_n \sin(n\phi)\}$$

Lo cual nos permite demostrar que

$$\begin{aligned} F_n a^{-(n+1)} &= D_n a^{n-1} \Rightarrow \\ E_n a^{-(n+1)} &= c_n a^{n-1} \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_n = D_n a^{2n} \\ E_n = C_n a^{2n} \end{array} \right\}$$

Apliquemos la segunda condición de Maxwell

$$\begin{aligned} (\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}}) \cdot \hat{r} &= 0 \\ \vec{B}_{\text{in}} \cdot \hat{r} &= -\vec{\nabla} \varphi_{\text{in}} \cdot \hat{r} + 4\pi \vec{M} \cdot \hat{r} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \{C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi)\} + 4\pi M_0 \cos(\phi) \\ \vec{B}_{\text{out}} \cdot \hat{r} &= -\vec{\nabla} \varphi_{\text{out}} \cdot \hat{r} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n r^{-n-1} \{E_n \cos(n\phi) + F_n \sin(n\phi)\} \end{aligned}$$

Luego

$$B_{\text{out}}|_{r=a} = B_{\text{in}}|_{r=a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a^{-n-1} \{E_n \cos(n\phi) + F_n \sin(n\phi)\} = -\sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1} \{C_n \cos(n\phi) + D_n \sin(n\phi)\} + 4\pi M_0 \cos(\phi)$$

Podemos plantear

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n a^{-n-1} \cos(n\phi) \{na^{-n-1} E_n + na^{n-1} C_n\} &= 4\pi M_0 \cos(\phi) \\ \sum_{n=1}^{\infty} n a^{-n-1} \sin(n\phi) \{na^{-n-1} F_n + D_n na^{n-1}\} &= 0 \end{aligned}$$

Notamos que solo sobrevive la serie para $n = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^{-2} E_1 + C_1 &= 4\pi M_0 \\ \Rightarrow F_1 &= D_1 a^2 \end{aligned}$$

pero como $F_n = D_n a^{2n} \Rightarrow F_n = D_n = 0$.

Tenemos que encontrar E_1 y C_1

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = C_1 a^2 \\ a^{-2} E_1 + C_1 = 4\pi M_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 2\pi M_0 \\ E_1 = 2\pi M_0 a^2 \end{array}$$

Ahora que hemos determinado los coeficientes, el potencial magnético asociado a \vec{H} viene dado por

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} 2\pi M_0 r \cos(\phi) & r < a \\ 2\pi M_0 \frac{a^2}{r} \cos(\phi) & r > a \end{cases}$$

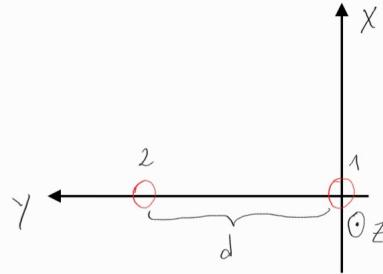
Podemos plantear que $z = r \cos \phi$ entonces

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} 2\pi M_0 z & r < a \\ 2\pi M_0 z \left(\frac{a^2}{n^2} \right) & r > a \end{cases}$$

Calculemos el campo \vec{H}

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} -2\pi M_0 \hat{z} & r < a \\ -2\pi M_0 \left(\frac{a^2}{n^2} \right) \hat{z} + 4\pi M_0 \left(\frac{a^2}{n^3} \right) \hat{z} \rho & r > a \end{cases}$$

b) Como en este caso tenemos que la separación de los cilindros es mucho mayor que sus radios ($d \gg a$) el sistema se aproxima a un dipolo magnético.



El campo magnético asociado a un dipolo se expresa como

$$\vec{B} = \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{m})\hat{r} - \vec{m}}{|r|^3}$$

En nuestro caso, las líneas de campo que salen de 1 y llegan a 2, se expresa como

$$\vec{B}_{12} = \frac{3(\hat{y} \cdot \vec{m}_1)\hat{y} - \vec{m}_1}{|y|^3}$$

Por otro lado, también sabemos que la energía de un dipolo se expresa como

$$\begin{aligned} U &= -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_{12} \\ &= \left\{ \frac{\vec{m}_2 \cdot \vec{m}_1 - 3(\vec{m}_2 \cdot \hat{y})(\vec{m}_1 \cdot \hat{y})}{|y|^3} \right\} \end{aligned}$$

Sabemos que el momento dipolar viene dado por

$$\vec{m} = \int \vec{M} da$$

Luego el momento dipolar del primer cilindro es

$$\vec{m}_1 = M_0 \pi a^2 \hat{x}$$

El momento dipolar del segundo cilindro es

$$\vec{m}_2 = M_0 \pi a^2 \hat{r}$$

en alguna dirección radial que aún desconocemos. Como la separación de los cilindros es $y = d \gg a$, la energía sería

$$\begin{aligned} U &= \frac{M_0^2 \pi^2 a^4 \hat{x} \cdot \hat{r} - 3 (M_0 \pi a^2 \hat{r} \cdot \hat{y}) (M_0 \pi a^2 \hat{x} \cdot \hat{y})}{d^3} \\ &= \frac{M_0^2 \pi^2 a^4 \hat{x} \cdot \hat{r}}{d^3} \\ &= \frac{M_0^2 \pi^2 a^4}{d^3} \cos(\phi) \end{aligned}$$

donde ϕ es el ángulo entre la dirección de magnetización cilindro 1 con el del cilindro 2

Nosotros sabemos que todo sistema busca el estado de menor energía, entonces U adquiere su menor energía cuando $\phi = \pi$ lo que indica que las direcciones de magnetización entre los cilindros es opuesta

$$U = -\frac{M_0^2 \pi^2 a^4}{d^3}$$

13.85 T2 P4

Un medio dieléctrico consistente en cargas libres positivas y negativas (un plasma) responde a los campos eléctricos suavemente variables en el espacio, manteniendo el equilibrio térmico, de manera que

$$n_i(z) \approx n_{i0} \exp \left[-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right]$$

donde $\Phi(z)$ es el potencial electrostático, T es la temperatura, q_i es la carga de la partícula i y n_{i0} es la densidad de la partícula i cuando $\Phi(z) = 0$, expresada en cantidad de partículas por unidad de volumen.

a) Demuestre que si el potencial es pequeño, la densidad de carga neta está dada por

$$\rho(z) = -\frac{\Phi(z)}{4\pi\lambda^2}, \quad \frac{1}{\lambda^2} = 4\pi \sum_i \frac{n_{i0}q_i^2}{k_B T} \quad (108)$$

Solución:

a) La densidad de carga de un material viene dada, en general, por la expresión

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

con Q la carga encerrada en un volumen V . Esto implica que se puede escribir

$$\rho(z) = \sum_i q_i n_i(z)$$

donde n_i se define como la cantidad de partículas por unidad de volumen. De la aproximación en el enunciado se deduce que

$$\rho(z) \approx \sum_i q_i n_{i0} \exp\left[-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T}\right]$$

y expandiendo en series de Taylor en torno a $z = 0$, y como

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

a segundo orden se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(z) &\approx \sum_i q_i n_{i0} \left[1 - \frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right] \\ &= \sum_i q_i n_{i0} - \sum_i \frac{q_i^2 n_{i0} \Phi(z)}{k_B T} \end{aligned}$$

Ahora, el primer término corresponde a la densidad de carga del plasma cuando $\Phi(z) = 0$, ya que n_{i0} es la densidad de la partícula i cuando $\Phi(z) = 0$, pero al ser cargas libres (no interactúan entre sí, por lo que no hay un potencial interno), la densidad de carga se anula y el primer término es cero. Otra forma de convencerse de que n_{i0} es la densidad de partículas cuando

$\Phi(z) = 0$ es que el primer término corresponde a $\rho(z)$ cuando el argumento de la exponencial es cero (tal que su valor sea uno), luego

$$\exp\left[-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T}\right] = 1$$

y aplicando el logaritmo natural,

$$-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} = 0$$

pero $q_i \neq 0$ (puesto que solo hay cargas positivas y negativas), $T \neq 0$ (puesto que no se puede alcanzar el cero absoluto) y $k_B \neq 0$ (puesto que es la constante de Boltzmann con valor aproximado $\sim 1.38 \times 10^{-23}$ [J K⁻¹]), luego cuando la cantidad de partículas por unidad de volumen del plasma es n_{i0} , se cumple que $\Phi(z) = 0$ y como son cargas libres (no interactúan entre sí, por lo que no hay un potencial interno), se concluye nuevamente que

$$\sum_i q_i n_{i0} = 0$$

escribiéndose la densidad de carga

$$\rho(z) = - \sum_i \frac{q_i^2 n_{i0} \Phi(z)}{k_B T}$$

y por enunciado (108) nos queda

$$\rho(z) = -\frac{\Phi(z)}{4\pi\lambda^2}$$

(109)

b) Suponga que un electrodo con forma de plano infinito con densidad de carga σ se inserta en el plasma en $z = 0$. Calcule el potencial $\Phi(z)$ en ambos lados del electrodo.

La introducción del electrodo (conductor eléctrico utilizado para hacer contacto con la parte no metálica de un circuito, por ejemplo, los electrodos en las baterías), divide el potencial en dos regiones, luego de la ecuación de Poisson en coordenadas rectangulares

$$\nabla^2 \Phi(z) = -4\pi\rho(z) \quad (110)$$

con (109) en (110) nos da

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\Phi(z)}{\lambda^2}$$

que es una ecuación diferencial con soluciones exponenciales de la forma

$$\Phi(z) = \begin{cases} Ae^{z/\lambda} + Be^{-z/\lambda} & \text{para } z < 0 \\ Ce^{z/\lambda} + De^{-z/\lambda} & \text{para } z > 0 \end{cases}$$

Ya que el potencial (en ambas direcciones) debe cumplir que en $z \rightarrow \pm\infty$ sea cero, se tiene que $B = 0$ y $C = 0$, tal que la expresión no diverja en infinito. Así nos queda

$$\Phi(z) = \begin{cases} Ae^{z/\lambda} & \text{para } z < 0 \\ De^{-z/\lambda} & \text{para } z > 0 \end{cases}$$

Por continuidad en $z = 0$ se deduce que $A = D$,

$$\Phi(z) = \begin{cases} Ae^{z/\lambda} & \text{para } z < 0 \\ Ae^{-z/\lambda} & \text{para } z > 0 \end{cases} \quad (111)$$

De la discontinuidad en el campo se tiene que

$$\frac{\partial \Phi_{<}}{\partial z} \Big|_{z=0} - \frac{\partial \Phi_{>}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 4\pi\sigma \quad (112)$$

y reemplazando la solución del potencial (111) en (112) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{2A}{\lambda} &= 4\pi\sigma \\ \implies A &= 2\pi\lambda\sigma \end{aligned}$$

luego el potencial queda

$$\boxed{\Phi(z) = \begin{cases} 2\pi\lambda\sigma e^{z/\lambda} & \text{para } z < 0 \\ 2\pi\lambda\sigma e^{-z/\lambda} & \text{para } z > 0 \end{cases}}$$

c) ¿Qué condición debe cumplir σ tal que la solución sea válida?

La solución fue obtenida bajo la premisa de que la expansión

$$e^x \approx 1 + x + \dots$$

es válida, lo cual solo ocurre para $x \ll 1$, luego

$$-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \ll 1$$

y reemplazando el potencial (considerando $z = 0$, donde se hizo la expansión)

$$2\pi\lambda\sigma \gg \frac{k_B T}{q_i},$$

por lo que la condición tal que la solución sea válida es

$$\boxed{\sigma \gg \frac{k_B T}{2\pi\lambda q_i}}$$

d) Encuentre la densidad de polarización \vec{P} para este plasma.

El plasma siente la contribución del campo eléctrico producto del electrodo, que debido al comportamiento dieléctrico del plasma (con $\epsilon \sim 1$ debido a que, esencialmente, se tiene solo vacío y con la gran suposición de que la constante dieléctrica del plasma no depende del tiempo ni la temperatura), viene dado por la expresión

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ &= 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) \hat{z}\end{aligned}$$

mientras que el campo eléctrico debido al potencial aplicado sobre el plasma es

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) e^{z/\lambda} & \text{para } z < 0 \\ 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) e^{-z/\lambda} & \text{para } z > 0 \end{cases}$$

por lo que la polarización del plasma será

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi} [\vec{D} - \vec{E}]$$

y separando por regiones, para $z > 0$ se tiene

$$\vec{P}_> = \frac{\operatorname{sgn}(z)}{4\pi} [2\pi\sigma - 2\pi\sigma e^{-z/\lambda}] \hat{z} = \frac{\sigma}{2} (1 - e^{-z/\lambda}) \hat{z}$$

y para $z < 0$ se tiene

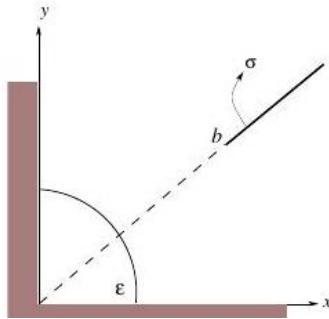
$$\vec{P}_< = \frac{\operatorname{sgn}(z)}{4\pi} [2\pi\sigma - 2\pi\sigma e^{z/\lambda}] \hat{z} = -\frac{\sigma}{2} (1 - e^{z/\lambda}) \hat{z}$$

es decir,

$$\boxed{\vec{P} = \operatorname{sgn}(z) \frac{\sigma}{2} [1 - e^{-\operatorname{sgn}(z)z/\lambda}] \hat{z}}$$

13.86 T2 P5

Considera un cuarto de esfera dieléctrica de radio a y constante dieléctrica ϵ , confinada por los planos $x - z$ e $y - z$, los cuales son conductores y están conectados a tierra. A esta geometría se le agrega una línea de carga de largo L y densidad de carga σ constante, la cual se ubica en forma radial a la esfera a una distancia b del origen y a un ángulo $\pi/4$ con respecto al eje x . Calcule el potencial en todo el espacio.



Solución:

Notemos que conviene redefinir los armónicos esféricos

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{\delta(r_x - r_y)}{r_y^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell/2} P_\ell^{2m}(\cos \theta_x) \sin(2m\phi_x) P_\ell^{2m}(\cos \theta_y) \sin(2m\phi_y)$$

y

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell/2} \frac{4\pi}{2\ell+1} \left[g_{\ell,m} + \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} \right] (r_x, r_y) P_\ell^{2m}(\cos \theta_x) \sin(2m\phi_x) P_\ell^{2m}(\cos \theta_y) \sin(2m\phi_y)$$

donde $r_< = \min(r_x, r_y)$, $r_> = \max(r_x, r_y)$ y

$$g_{\ell,m}(r_x, r_y) = \begin{cases} A_{\ell,m} r_x^\ell & r < a \\ B_{\ell,m} \frac{1}{r^{\ell+1}} & r > a. \end{cases}$$

Para la función de Green externa (para $r_x > a$, con $r_> = r_y$ y $r_< = r_x$) podemos exigir continuidad

$$A_{\ell,m} a^\ell = B_{\ell,m} \frac{1}{a^{\ell+1}},$$

y la condición dieléctrica

$$-\epsilon \frac{\partial G_{in}}{\partial r_x} \Big|_{r_x=a} = -\frac{\partial G_{out}}{\partial r_x} r_{r_x=a}$$

que implica

$$-\epsilon \left(A_{\ell,m} \ell a^{\ell-1} + \frac{\ell a^{\ell-1}}{r_y^{\ell+1}} \right) = - \left(-(\ell+1) B_{\ell,m} \frac{1}{a^{\ell+1}} + \frac{\ell a^{\ell-1}}{r_y^{\ell+1}} \right).$$

Con esto podemos construir $A_{\ell,m}$ y $B_{\ell,m}$. Vemos inmediatamente que $A_{\ell,m} = B_{\ell,m} = 0$ cuan $\epsilon \rightarrow 0$ como debe de ser. La densidad de carga es

$$Q = L\lambda = C\delta(\theta - \pi/2)\delta(\phi - \pi/4)H(b, L)$$

donde C es la constante que garantiza la integral de la densidad y $H(b, L) = 1$ entre $b \leq r \leq b+L$ y cero para otros valores. Para calcular el potencial vemos que hay 3 regiones de interés a) Para $r_x \leq b$ (con $r_< = r_x$ y $r_> = r_y$)

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_b^{b+L} r_y^2 dr_y \int_0^\pi \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{\pi/2} d\phi_y G(r_< = r_x, r_> = r_y) \rho(\mathbf{y})$$

b) Para $b \leq r_x \leq b + L$

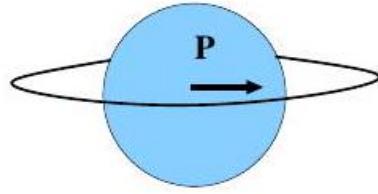
$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) &= \int_b^{r_x} r_y^2 dr_y \int_0^\pi \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{\pi/2} d\phi_y G(r_< = r_y, r_> = r_x) \rho(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int_{r_x}^{b+L} r_y^2 dr_y \int_0^\pi \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{\pi/2} d\phi_y G(r_< = r_x, r_> = r_y) \rho(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

c) Para $r_x \geq b$ (con $r_< = r_y$ y $r_> = r_x$)

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_b^{b+L} r_y^2 dr_y \int_0^\pi \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{\pi/2} d\phi_y G(r_< = r_y, r_> = r_x) \rho(\mathbf{y})$$

13.87 T2 P6

Considere un anillo de radio a , el cual tiene una densidad de carga uniforme λ . Suponga que en forma concéntrica con el anillo ponemos una esfera de radio $b < a$ de material polarizable con polarización uniforme P en una dirección arbitraria. Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio. Asumiendo que $a \gg b$, obtenga el primer término de la energía electrostática de la esfera en la presencia del anillo, ¿Cuál es la configuración de menor energía?



Solución:

El potencial del anillo viene dado por

$$\Psi_a = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) [Ar^l + Br^{-(l+1)}]$$

y separando el potencial por regiones se tiene

$$\Psi_a = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} Ar^l + Br^{-(l+1)} & r < a \\ Cr^l + Dr^{-(l+1)} & r > a \end{cases}$$

donde $B = 0$ para que el potencial no diverja en $r = 0$ y $C = 0$ debido a la condición $\Psi(r \rightarrow \infty) = 0$. De la continuidad en $r = a$ se tiene

$$Aa^l = Da^{-(l+1)} \implies D = Aa^{2l+1}$$

quedando el potencial

$$\Psi_a = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} Ar^l & r < a \\ Aa^{2l+1}r^{-(l+1)} & r > a \end{cases}$$

Por la discontinuidad en el campo eléctrico

$$\begin{aligned} (\vec{E}_{\text{out}} - \vec{E}_{\text{in}}) \cdot \hat{r} &= 4\pi\lambda a \\ \frac{\partial \Psi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \frac{\partial \Psi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= 4\pi\lambda a \end{aligned}$$

obteniéndose que

$$lAa^{l-1} + (l+1)Aa^{l-1} = 4\pi\lambda a \implies A = \frac{4\pi\lambda}{(2l+1)a^l}$$

luego el potencial en el anillo será

$$\begin{aligned} \Psi_a^< &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi\lambda}{(2l+1)} \left(\frac{r^l}{a^l} \right) Y_l^0(\theta, \phi), \\ \Psi_a^> &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi\lambda}{(2l+1)} \left(\frac{a^{l+1}}{r^{l+1}} \right) Y_l^0(\theta, \phi). \end{aligned}$$

Para la esfera se tiene que

$$\Psi_e = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} Ar^l + Br^{-(l+1)} & r < b \\ Cr^L + Dr^{-(l+1)} & r > b \end{cases}$$

donde $B = 0$ para que el potencial no diverja en $r = 0$ y $C = 0$ debido a la condición $\Psi(r \rightarrow \infty) = 0$. De la continuidad en $r = b$ se tiene

$$Ab^l = Db^{-(l+1)} \implies D = Ab^{2l+1},$$

quedando el potencial

$$\Psi_e = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l^0(\theta, \phi) \begin{cases} Ar^l & r < b \\ Ab^{2l+1}r^{-(l+1)} & r > b \end{cases}$$

De la condición del material polarizado

$$\begin{aligned} (\vec{D}_{\text{out}} - \vec{D}_{\text{in}}) \cdot \hat{r} &= 0 \\ \frac{\partial \Psi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=b} - \frac{\partial \Psi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=b} &= 4\pi P \cdot \hat{r} \end{aligned}$$

se obtiene la expresión (acomodando \vec{P} para que calce con los armónicos esféricos)

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) [lAb^{l-1} + (l+1)Ab^{l-1}] = 4\pi P[\cos(\theta)\sin(\phi)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{z}]$$

y usando que

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta) \quad Y_1^{-1}(\theta, \phi) - Y_1^1(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin(\theta) \cos(\phi)$$

se deduce que $l = 1$ y $m = -1, 0, 1$. De esta forma, de la parte radial se obtiene

$$A = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} P [Y_1^{-1}(\theta, \phi) - Y_1^1(\theta, \phi) + \sqrt{2}Y_1^0(\theta, \phi)],$$

por lo que el potencial de la esfera es

$$\Psi_e^< = 2^{5/2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2} P [Y_1^{-1}(\theta, \phi) - Y_1^1(\theta, \phi) + \sqrt{2}Y_1^0(\theta, \phi)] r,$$

$$\Psi_e^> = 2^{5/2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2} P \left[Y_1^{-1}(\theta, \phi) - Y_1^1(\theta, \phi) + \sqrt{2} Y_1^0(\theta, \phi) \right] \left(\frac{b^3}{r^2} \right).$$

Finalmente, el potencial en todo el espacio será

$$\Psi_{r < b} = 2^{5/2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2} P \left[Y_1^{-1}(\theta, \phi) - Y_1^1(\theta, \phi) + \sqrt{2} Y_1^0(\theta, \phi) \right] r + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi\lambda}{(2l+1)} \left(\frac{r^l}{a^l} \right) Y_l^0(\theta, \phi)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{b < r < a} &= 2^{5/2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2} P \left[Y_1^{-1}(\theta, \phi) - Y_1^1(\theta, \phi) + \sqrt{2} Y_1^0(\theta, \phi) \right] \left(\frac{b^3}{r^2} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi\lambda}{(2l+1)} \left(\frac{r^l}{a^l} \right) Y_l^0 \\ \Psi_{r > a} &= 2^{5/2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2} P \left[Y_1^{-1}(\theta, \phi) - Y_1^1(\theta, \phi) + \sqrt{2} Y_1^0(\theta, \phi) \right] \left(\frac{b^3}{r^2} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi\lambda}{(2l+1)} \left(\frac{a^{l+1}}{r^{l+1}} \right) Y_l^0. \end{aligned}$$

Se tiene ahora que la energía electroestática viene dada por la expresión

$$U = -p \cdot E = -p \cdot \left[\frac{\partial \Psi_a^<}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_a^<}{\partial \theta} \right]$$

deduciéndose que el primer término será para $l = 1$, puesto que para $l = 0$ la derivada del potencial se anula. De esta forma,

$$U = -p \cdot \left[\frac{\lambda}{a} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \cos(\theta) - \frac{\lambda}{a} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sin(\theta) \right] = -\frac{\lambda p}{a} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} [\cos(\theta) - \sin(\theta)],$$

luego la configuración de menor energía será

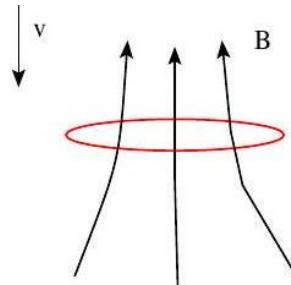
$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\lambda p}{a} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} [\cos(\theta) + \sin(\theta)] = 0$$

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = 0$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

13.88 Anillo que cae en un campo magnético

Considere un anillo de radio a y resistencia R que cae en forma horizontal en un campo magnético vertical que varía con la altura $\mathbf{B} = B(z)\hat{z}$. Encuentre la ecuación de movimiento del anillo y su velocidad terminal. Si imponemos una corriente continua en el anillo a través de una batería, ¿puede este flotar?



Solución:

El flujo magnético a través del alambre viene dado por

$$\Phi(z) = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B(z)dA$$

luego su variación en el tiempo es

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d}{dt} \int B(z)dA \\ &= \frac{d}{dt} B(z) \int dA \\ &= \pi a^2 \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

y la fuerza electromotriz sobre el alambre al dejarlo caer en el campo será

$$\begin{aligned}\epsilon &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

Analizando la energía cinética y potencial gravitatoria, se obtiene el Lagrangiano

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{z})^2 - mgz$$

y aplicando la ecuación de Euler-Lagrange sobre la variable z se obtiene

$$L_z - \frac{d}{dt} L_{\dot{z}} = -mg - m\ddot{z} = 0$$

es decir, $\ddot{z} + g = 0$. Pero el sistema posee una resistencia que disipa energía debido al flujo que atraviesa el centro del alambre en forma de anillo, esto implica que el oscilador armónico contiene un término más (relacionado a la disipación), luego

$$\ddot{z} - \gamma\dot{z} + g = 0, \quad (113)$$

para algún coeficiente de fricción γ . Por otro lado, la variación temporal de la energía es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m(\dot{z})^2 + mgz \right] = m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z}$$

de manera que, si se reestructura la Ec. (113), se llega a que

$$\begin{aligned} 0 &= m\dot{z}\ddot{z} - \gamma m(\dot{z})^2 + mg\dot{z} \\ &= [m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z}] - \gamma m(\dot{z})^2 \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m(\dot{z})^2 + mgz \right] - \gamma m(\dot{z})^2 \\ 0 &= P - \gamma m(\dot{z})^2 \end{aligned} \quad (114)$$

donde P es la potencia radiada por el sistema. Por otro lado, es también cierto que

$$P = IV = \left(\frac{\epsilon}{R} \right) \epsilon = \frac{\epsilon^2}{R}$$

y, puesto que

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dz} \dot{z} \end{aligned}$$

la potencia disipada será

$$P = \frac{\epsilon^2}{R} = \frac{\pi^2 a^4}{R c^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2$$

Reemplazando en la Ec. (114) se obtiene

$$\frac{\pi^2 a^4}{Rc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2 - \gamma m (\dot{z})^2 = 0$$

luego el coeficiente de fricción es

$$\gamma = \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left(\frac{dB}{dz} \right)^2$$

De esta manera, reemplazando en la Ec. (113), se obtiene la ecuación de movimiento del anillo

$$\ddot{z} + \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left(\frac{dB}{dz} \right)^2 \dot{z} + g = 0.$$

Para la velocidad terminal, se tiene que $\ddot{z} = 0$, luego

$$\frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left(\frac{dB}{dz} \right)^2 \dot{z} + g = 0$$

y despejando \dot{z} se concluye

$$\dot{z} = -\frac{Rmgc^2}{\pi^2 a^4} \left(\frac{dB}{dz} \right)^{-2}.$$

Al añadir una corriente debido a una batería, la nueva potencia radiada por el alambre será

$$\begin{aligned} P &= I\epsilon \\ &= \frac{(\epsilon + \epsilon_0)}{R}\epsilon, \end{aligned}$$

con ϵ_0 el voltaje añadido por la batería al circuito. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P &= \frac{\epsilon^2}{R} + \frac{\epsilon\epsilon_0}{R} \\ &= \frac{\pi^2 a^4}{Rc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2 - \frac{\pi a^2 \epsilon_0}{Rc} \frac{dB}{dz} \dot{z} \end{aligned}$$

luego la Ec. (114) queda

$$\frac{\pi^2 a^4}{Rc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2 - \frac{\pi a^2 \epsilon_0}{Rc} \frac{dB}{dz} \dot{z} - \gamma m (\dot{z})^2 = 0$$

obteniéndose el coeficiente de fricción

$$\gamma = \frac{\pi a^2 \epsilon_0}{Rmcz} \frac{dB}{dz} - \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2$$

y reemplazando en la Ec. (113) se llega a la ecuación de movimiento del alambre

$$\ddot{z} - \left[\frac{\pi a^2 \epsilon_0}{Rmcz} \frac{dB}{dz} - \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \right] \dot{z} + g = 0$$

o, lo que es equivalente,

$$\ddot{z} - \frac{\pi a^2}{Rmc} \frac{dB}{dz} \epsilon_0 + \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \dot{z} + g = 0$$

Para que el anillo levite debe cumplirse que $\ddot{z} = \dot{z} = 0$, así

$$-\frac{\pi a^2}{Rmc} \frac{dB}{dz} \epsilon_0 + g = 0$$

por lo que la condición sobre el voltaje entregado por la batería al circuito, tal que el anillo levite, vendrá dada por

$$\boxed{\epsilon_0 = \frac{Rmgc}{\pi a^2} \left(\frac{dB}{dz} \right)^{-1}}$$

13.89 T3P2 2022

Supongamos que tenemos un espejo que refleja la radiación electromagnética proveniente del sol. La potencia radiada por el sol es de 0.14watts/cm². La vela tiene 100 m² de área y lleva una masa del 100gr, incluyendo la vela. Si ponemos esta vela electromagnética en una órbita alrededor del sol cercana a la tierra. Cuanto sería la velocidad de escape de esta configuración. Asuma que la vela solo interactúa gravitacionalmente con el sol.

13.90 T3P3 2022

Considere un cilindro conductor infinito de radio R . En forma concéntrica ponemos un anillo de radio $a < R$ por el cual se transporta una corriente armónica de frecuencia ω y amplitud I_0 . Encuentre el campo electromagnético en el cilindro y la potencia radiada.

T3 2020 P5

Debes resolver la Ec. de Helholtz, te dicen que el campo es armónico y al resolver por separación de variables naturalmente te van a aparecer las soluciones. El campo eléctrico por lo demás es $E = -1/c\partial A/\partial t$.

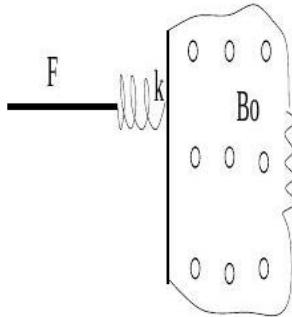
13.91 T3P4 2022

Una central hidroeléctrica convierte energía gravitacional en energía eléctrica. Supongamos que el agua cae "libremente" de una altura de 50 m con un flujo de $100 \text{ m}^3/\text{s}$. Piense en el siguiente generador eléctrico: una barra de conductora de masa M , largo L , y conductividad σ es forzada a oscilar en un campo magnético constante B_0 como se muestra en la figura.

- a) Asumiendo que la conversión es perfecta, estime cuanta potencia eléctrica podemos generar.
- b) Encuentre la ecuación de movimiento de la barra no forzada
- c) Estime la fuerza ponderomotiva del circuito que se genera en función de x y su derivada temporal.
- d) Escriba la ecuación de continuidad y estime la corriente. Cuanta energía se convierte a energía eléctrica? Esta energía da origen al término disipativo proporcional a la velocidad en la ecuación del resorte. Estime este término y la constante de proporcionalidad β . (Ayuda: estimar la energía disipada por el resorte con disipación). Escriba la ecuación disipación eléctrica.
- e) El flujo de agua genera un forzamiento angular tipo $A \cos \omega t$ sobre el resorte. Incluya este efecto y escriba la ecuación de movimiento del péndulo y el forzamiento
- f) Cual es la variación temporal de la corriente? (deseche variaciones transientes) Hay una resonancia?. En general R es una lenta función del tiempo. Cual es la máxima corriente que se puede generar asumiendo conversión perfecta?
- g) Cuantas luces puede prender? En general R varia lentamente (prender y apagar luces) y como se puede controlar eso?

Solución

Una central hidroeléctrica convierte energía gravitacional en energía eléctrica. Supongamos que el agua cae "libremente" de una altura de $50m$, con un flujo de $100m^3/\text{s}$. Piense en el siguiente generador eléctrico: una barra conductora de masa M , largo L y conductividad σ es forzada a oscilar en un campo magnético constante B_0 , como se muestra en la figura.



- a) Asumiendo que la conversión es perfecta, estime cuánta potencia eléctrica podemos generar.

Como la conversión es perfecta, toda la energía gravitacional se convierte en energía eléctrica, luego

$$Mgh = \rho \Delta V gh = P \Delta t$$

lo que implica que

$$P = \rho g h \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right) = 1000 \left[\frac{Kg}{m^3} \right] \cdot 9.8 \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot 50[m] \left(100 \left[\frac{m^3}{s} \right] \right) = 4.9 \times 10^7 [W]$$

- b) Encuentre la ecuación de movimiento de la barra no forzada.

Solución:

Sobre la barra están actuando, en contra del movimiento de la barra, la fuerza ejercida por el resorte ($-kx$) y una fuerza de rozamiento disipativa, proporcional a la velocidad ($f_r = -\gamma \dot{x}(t)$). Luego

$$F_{\text{Total}} = M\ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) - kx(t),$$

donde $\gamma \equiv 2M\eta$ es la constante de proporcionalidad y tiene unidades de Kg dividido por segundo. Por lo tanto, la ecuación de movimiento será

$$\ddot{x}(t) + 2\eta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{con} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M}.$$

- c) Estime la fuerza ponderomotiva del circuito que se genera en función de x y su derivada temporal.

De la ley de inducción de Faraday, sabemos que la F.E.M. que se generará en el circuito será

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_M}{dt},$$

donde Φ es el flujo magnético y c , la velocidad de la luz en el vacío. Como el campo magnético aplicado es constante, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_M}{dt} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\int \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (B_0 A) \\ &= -\frac{B_0}{c} \frac{dA}{dt} \\ &= -\frac{B_0}{c} \frac{dA}{dt} \\ &= -\frac{B_0}{c} \frac{(Ldx)}{dt} \\ &= -\frac{B_0 L}{c} \dot{x}(t)\end{aligned}$$

d) Escriba la ecuación de continuidad y estime la corriente. ¿Cuánta energía se convierte a energía eléctrica? Esta energía da origen al término discipativo β en la ecuación del resorte. Estime β .

El voltaje entregado al circuito es el inducido por la variación en el campo magnético dentro del área del circuito, es decir, \mathcal{E} . La caída de potencial en la resistencia es IR , luego, usando las leyes de Kirchoff, tenemos

$$-\frac{B_0 L}{c} \dot{x}(t) - IR = 0,$$

de donde obtenemos la corriente que circula por el circuito

$$I = -\frac{B_0 L}{R c} \dot{x}(t). \quad (115)$$

Para estimar la cantidad de energía eléctrica que podemos obtener a partir de la energía cinética, consideremos el calor discipulado (trabajo de la fuerza de roce):

$$W_r(t) = \int_A^B \vec{f}_r \cdot d\vec{s} = \int_{x_1}^{x_2} (-2M\eta \dot{x}(t')) dx = \int_0^t (-2M\eta \dot{x}(t')) \dot{x}(t') dt'.$$

Esta es la energía que pierde el sistema debido a esta fuerza discipativa; energía que es entregada a la resistencia, de modo que la pérdida de energía en función del tiempo (potencia) es

$$P = \frac{dW_r(t)}{dt} = -2M\eta \dot{x}^2(t)$$

Pero sabemos que la potencia entregada a una resistencia está dada por $P = I^2R$, por lo tanto

$$I^2R = \frac{B_0^2L^2}{Rc^2}\dot{x}^2(t) = |-2M\eta\dot{x}^2(t)| = 2M\eta\dot{x}^2(t)$$

Despejando η de esta ecuación y definiendo $\beta \equiv 2\eta$, tenemos

$$\beta = \frac{B_0^2L^2}{MRc^2}$$

e) El flujo de agua genera un forzamiento angular constante sobre el péndulo. Incluya este efecto y escriba la ecuación de movimiento del oscilador y el forzamiento.

Este forzamiento adicional indica que estamos en presencia de un oscilador armónico forzado, por lo que la ecuación de movimiento ahora será

$$\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = \frac{F}{M} \cos(\omega t). \quad (116)$$

En esta ecuación, $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$, $\beta = \frac{B_0^2L^2}{MRc^2}$.

f) ¿Cuál es la variación temporal de la corriente (deseche variaciones transientes)? ¿Hay una resonancia?. En general, R es una “lenta” función del tiempo. ¿Cuál es la máxima corriente que se puede generar, asumiendo conversión perfecta?

De la ecuación (115), la variación de la corriente está dada por

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{B_0L}{Rc}\ddot{x}(t)$$

Notamos que necesitamos la solución explícita a \ddot{x} . Esta viene dada por la solución a la ecuación de movimiento mostrada en (116). Si consideramos $F \neq 0$, y aplicamos la transformada de Fourier, obtenemos

$$((-is)^2 + \beta(-is) + \omega_0^2)\mathcal{F}\{x(t), s\} = \frac{F}{M}\mathcal{F}\{\cos(\omega t), s\}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t), s\} &= \frac{F}{M} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega + s) + \delta(\omega - s)]}{(-is)^2 + \beta(-is) + \omega_0^2} \\ &= \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\delta(\omega + s)}{(-is)^2 + \beta(-is) + \omega_0^2} + \frac{\delta(\omega - s)}{(-is)^2 + \beta(-is) + \omega_0^2} \right] \end{aligned}$$

Como estamos considerando el caso particular en que $F \neq 0$, este método nos permite encontrar una solución particular a la ecuación (116), que denotaremos por x_p , dada por

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{x(t), s\} e^{-ist} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\delta(\omega + s)e^{-ist}}{(-is)^2 + \beta(-is) + \omega_0^2} + \frac{\delta(\omega - s)e^{-ist}}{(-is)^2 + \beta(-is) + \omega_0^2} \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \frac{F}{M} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{(i\omega)^2 + \beta(i\omega) + \omega_0^2} + \frac{e^{i\omega t}}{(-i\omega)^2 + \beta(-i\omega) + \omega_0^2} \right] \\ &= \frac{F}{M} \left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \beta\omega \sin(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \right). \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso en que $F = 0$, es decir, la ecuación homogénea. En este caso, el método de Fourier no nos sirve, ya que la solución es oscilatoria con amplitud constante, es decir, no es módulo-integrable (requisito para que la transformada de Fourier exista).

Como sabemos que con $\beta = 0$ tenemos una solución oscilatoria ($Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$), y para $\beta \neq 0$ debe decaer (Ae^{-kt}), suponemos que la solución es del tipo $\bar{x}(t) = Ae^{\Gamma t}$.

Notamos que $\dot{\bar{x}}(t) = A\Gamma e^{\Gamma t}$ y $\ddot{\bar{x}}(t) = A\Gamma^2 e^{\Gamma t}$, funciones que, al ser reemplazadas en la ecuación (116) para $F = 0$, resultan en

$$A\Gamma^2 e^{\Gamma t} + 2\eta A\Gamma e^{\Gamma t} + \omega_0^2 A e^{\Gamma t} = 0$$

lo que nos indica que $\Gamma^2 + 2\eta\Gamma + \omega_0^2 = 0$. Las soluciones posibles para Γ son $\Gamma_{\pm} = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2}$, con $\eta = \frac{\beta}{2M}$. Esto nos permite decir que la solución a la ecuación homogénea es una combinación lineal de las soluciones del tipo $\bar{x}(t) = Ae^{\Gamma t}$, es decir,

$$\begin{aligned} x_h(t) &= Ae^{\Gamma_+ t} + Be^{\Gamma_- t} = Ae^{-\eta t + \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2} t} + Be^{-\eta t - \sqrt{\eta^2 - \omega_0^2} t} \\ &= e^{-\eta t} \left(Ae^{\sqrt{\eta^2 - \omega_0^2} t} + Be^{-\sqrt{\eta^2 - \omega_0^2} t} \right) \\ &= e^{-\eta t} \left(Ae^{it\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}} + Be^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}} \right) \\ &= e^{-\eta t} (Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}), \end{aligned}$$

donde $\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}$. Como

$$\begin{cases} x_h(0) = A + B \equiv \bar{x}_0 \\ \dot{x}_h(0) = A\Gamma_+ + B\Gamma_- \equiv \bar{v}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\bar{x}_0 \Gamma_- - \bar{v}_0}{\Gamma_- - \Gamma_+} = \frac{\bar{x}_0}{2} + \frac{(\bar{x}_0 \eta + \bar{v}_0)}{2i\Omega} \\ B = \frac{\bar{x}_0 \Gamma_+ - \bar{v}_0}{\Gamma_+ - \Gamma_-} = \frac{\bar{x}_0}{2} - \frac{(\bar{x}_0 \eta + \bar{v}_0)}{2i\Omega} \end{cases}$$

podemos escribir la solución como

$$x_h(t) = e^{-\eta t} \left[\bar{x}_0 \cos(\Omega t) + \left(\frac{\bar{x}_0 \eta}{\Omega} + \frac{\bar{v}_0}{\Omega} \right) \sin(\Omega t) \right].$$

Finalmente, como tenemos la solución a todos los casos posibles de la ecuación (116) (en los que $F = 0$ y en los que $F \neq 0$), podemos conocer la solución más general, dada por la combinación lineal de las soluciones particulares,

$$x(t) = C_1 x_h(t) + C_2 x_p(t),$$

es decir

$$x(t) = C_1 e^{-\eta t} \left[\bar{x}_0 \cos(\Omega t) + \left(\frac{\bar{x}_0 \eta}{\Omega} + \frac{\bar{v}_0}{\Omega} \right) \sin(\Omega t) \right] + C_2 \frac{F}{M} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \beta \omega \sin(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \right]. \quad (117)$$

Mostramos el gráfico de la función x para condiciones iniciales particulares en la siguiente figura:

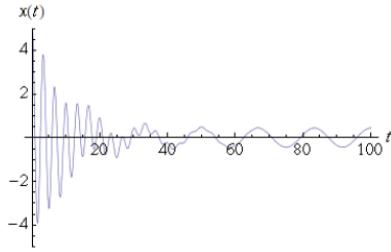


Figure 90: Evolución de la posición de la barra para $F \neq 0, \omega \neq \omega_0$.

La variación temporal de la corriente será

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{B_0 L}{Rc} \dot{x}(t)$$

con $x(t)$ dado en la ecuación (117). En ella, notamos que hay resonancia cuando $\omega = \omega_0$. Ahora bien, desechando **variaciones transientes**, consideramos $x(t)$ como

$$x(t) = C_2 \frac{F}{M} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \beta \omega \sin(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \right]$$

Derivando dos veces x con respecto al tiempo, se obtiene $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$. Esta función tiene un (primer) máximo en

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

si $\omega \neq \omega_0$, y, tomando el límite,

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$$

si $\omega = \omega_0$ (**resonancia**); el cual representa el tiempo en el cual, tanto la función x como \ddot{x} , tendrá una amplitud máxima, como se muestra en la figura 91

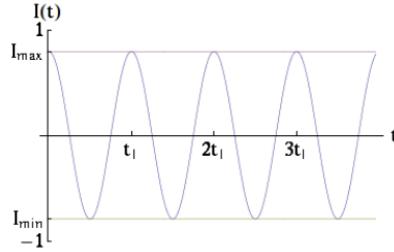


Figure 91: Variación de la corriente.

Evaluando en este tiempo, tenemos

$$\dot{I}_{\text{MAX}} = \frac{B_0 L}{R c} \omega^2 |x_{\text{MAX}}| = \frac{3 F B_0 L \omega^2}{M R c |\omega_0^2 - \omega^2|} \left(1 + \frac{\beta^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Este es el valor máximo puede tomar la función \dot{I} sobre todo instante t . Ahora, si queremos maximizar este valor, tomamos el límite cuando $\omega \rightarrow \pm\infty$ y encontramos que

$$I_{\text{MAX}} = \frac{3 B_0 F L}{c M R},$$

mientras que cuando $\omega \rightarrow \omega_0$,

$$I_{\text{MAX}} = \frac{3 B_0 F L \sqrt{\beta^2 \omega_0}}{c M R \beta^2}.$$

Es decir, el valor máximo que toma la corriente se da cuando el sistema entra en resonancia ($\omega = \omega_0$) y el valor de la corriente máxima será

$$I_{\text{MAX}} = \frac{3 F \omega_0 c}{B_0 L}.$$

g) ¿Cuántas luces puede prender? En general, R varía lentamente (prender y apagar luces). ¿Cómo se puede controlar esto?

Dependiendo de la energía que consume una ampolleta en cierta cantidad de tiempo (potencia interna) podemos determinar la cantidad de cantidad

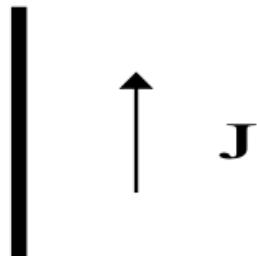
de ampolletas que pueden prenderse con la potencia suministrada. De la sección a) (Potencia Máxima), sabemos que la potencia entregada son $P = 4.9 \times 10^7 [W]$, lo que permitiría prender n ampolletas de distintas tasas de consumo P_0 , mostradas en siguiente tabla:

Consumo [W]	$n = P/P_0$
100	490000
60	816666
20	2450000
16	3062500

Notamos que una casa que usa ampolletas de bajo consumo (16 W) consume más de 6 veces lo que consume una casa que utiliza ampolletas de 100 W, es decir, esta planta podría entregar su suministro a 6 veces la cantidad de casas a las que se lo entrega si todas se cambiaron a ampolletas de bajo consumo.²

13.92 T3P5 2022

Tomemos una corriente alterna constante $J_o e^{-i\omega t}$ en un alambre muy largo como se muestra en la figura. Encuentre los campos producidos por este alambre y la potencia radiada por unidad de largo.

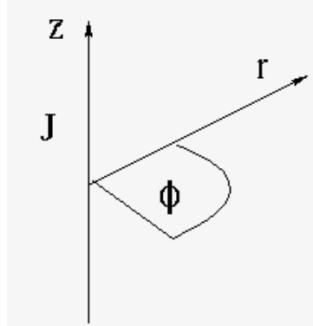


Solución:

Utilizando el siguiente sistema de referencia:

En este caso la densidad de corriente puede escribirse como:

$$\vec{J} = \frac{J_0 e^{-i\omega t} \delta(r)}{\pi r} \hat{z}$$



Pues, al integrar sobre todo el plano perpendicular al alambre:

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0 e^{-i\omega t} \delta(r) r dr d\phi}{\pi r}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r) dr J_0 e^{-i\omega t}$$

$$= J_0 e^{-i\omega t}$$

En este caso hay **oscilaciones armónicas** por lo cual las ecuaciones de Maxwell quedan de la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \frac{i\omega}{c} \vec{D}$$

Y para los potenciales:

$$\nabla^2 \Phi + \sqrt{\mu\epsilon} k_0^2 \Phi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

$$\nabla^2 \vec{A} + \sqrt{\mu\epsilon} k_0^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{J}$$

En el **Gauge de Lorentz** y con $k_0 = \frac{\omega}{c}$. Para este problema, tenemos simetría azimutal ($\frac{\partial}{\partial\phi} = 0$) y el alambre lo tomamos como infinito ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$), entonces para $r > 0$ hay que **resolver la ecuación de Helmholtz**:

$$\boxed{\nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0}$$

Con $k = |\frac{\omega}{c}|$, pues sabemos que $\nabla^2 \vec{A} \Big|_z = \nabla^2 A_z$, resultando una ecuación para $A_z(r)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + k^2 A_z = 0,$$

cuyas soluciones son las [funciones de Hankel](#):

$$\boxed{\begin{aligned} H_0^{(1)}(kr) &= J_0(kr) + iN_0(kr) \\ H_0^{(2)}(kr) &= J_0(kr) - iN_0(kr) \end{aligned}}$$

Ocupando aquí la [condición de borde de radiación en infinito](#), es decir que al usar las [formas asintóticas](#):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} J_m(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} N_m(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Y exigir que en $r \rightarrow \infty$, las ondas que se ven como $\approx \frac{e^{\pm ikr}}{\sqrt{r}}$ vayan de la fuente hacia afuera, concluimos que:

$$A_z = A_0 H_0^{(1)}(kr)$$

Donde A_0 es una constante que despejaremos luego. En lo que sigue, omitiremos la parte temporal, $e^{-i\omega t}$, de los campos para simplificar notación y sólo la volveremos a incluir en la respuesta final. Recordando de las ecuaciones de Maxwell que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, notamos que la única componente del campo magnético que sobrevivirá es:

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -A_0 k G_0(kr) \quad (118)$$

Donde:

$$G_0(x) = \frac{dH_0^{(1)}}{dx}$$

Ahora, recordemos que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \frac{i\omega}{c} \vec{E}$$

Usaremos el teorema de Stokes para un contorno definido por una circunferencia C que encierre al alambre y luego haremos tender su radio a cero. Como \vec{B} y \vec{E} son perpendiculares, \vec{E} sólo tendrá componente en \hat{z} (como se deduce en la ecuación (119) más adelante) y en el límite $r \rightarrow 0$ ésta será nula pues estaremos sobre un conductor. Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial C} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \frac{4\pi}{c} \oint_C \vec{J} \cdot d\vec{A} \\ \lim_{r \rightarrow 0} B_\phi \Big|_{r=0} \cdot 2\pi r &= \frac{4\pi}{c} J_0 \\ B_\phi|_{r=0} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2J_0}{cr} \end{aligned}$$

A partir de esto, igualando con (118) para $r \rightarrow 0$ se obtiene:

$$A_0 = -\frac{2J_0}{ck} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{rG_0(kr)}$$

Y entonces:

$$B_\phi = \frac{2J_0}{c} G_0(kr) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{rG_0(kr)}$$

Para despejar el campo eléctrico, usamos que para $r > 0$:

$$-\frac{i\omega}{c} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Y en ese caso, la única componente que sobrevive es E_z :

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{1}{ikr} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\phi) \\ &= \frac{1}{ik} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \right] \\ &= \frac{1}{ik} [-k^2 A_z] \\ &= ikA_0 H_0^{(1)}(kr) \end{aligned}$$

$$E_z = -\frac{2J_0}{c} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{rG_0(kr)} H_0^{(1)}(kr) i \quad (119)$$

Por lo tanto: Ahora, para calcular el límite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{rG_0(kr)}$$

Recurriremos a las aproximaciones del capítulo 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) &\rightarrow 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} N_0(x) &\rightarrow \frac{2}{\pi}(\ln x + \gamma - \ln 2) \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{rG_0(kr)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r \frac{d}{dx} (J_0(x) + iN_0(x))} \Big|_{x=kr} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{ir \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^r}} \\ &= -\frac{i\pi k}{2} \end{aligned} \quad (120)$$

De este modo podemos escribir finalmente los campos, con $k = \frac{\omega}{c}$ (suponiendo $\omega > 0$) :

$$B_\phi = -\frac{i\pi J_0 \omega}{c^2} G_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) e^{-i\omega t}$$

$$E_z = -\pi J_0 \frac{\omega}{c^2} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c}\right) e^{-i\omega t}$$

Cuyas partes reales, (si suponemos J_0 real) serán:

$$B_{\phi, \text{real}} = -\frac{\pi J_0 \omega}{c^2} G_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) \sin \omega t$$

$$E_{z, \text{real}} = -\pi J_0 \frac{\omega}{c^2} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c}\right) \cos \omega t$$

La potencia radiada por unidad de largo será:

$$\begin{aligned} \frac{P}{L} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{c}{8\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \cdot \hat{r} R d\phi \\ &= 2\pi \frac{c}{8\pi} |k|^2 |A_0|^2 \lim_{R \rightarrow \infty} \left(R H_0^{(1)}(kR) G_0^*(kR) \right) \\ &= (2\pi) \frac{c}{8\pi} |k|^2 \left(\frac{4 |J_0|^2}{c^2 |k|^2} \right) \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r G_0(kr)} \right|^2 \frac{2}{\pi} \\ &= \frac{2}{c\pi} |J_0|^2 \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r G_0(kr)} \right|^2 \end{aligned} \quad (121)$$

Aquí en el penúltimo paso, hemos usado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Para calcular:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R H_0^{(1)}(kR) G_0^*(kR) = \frac{2}{\pi}$$

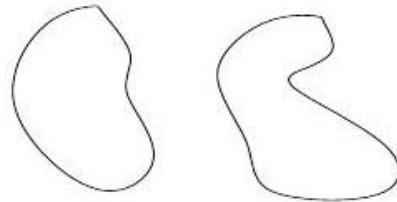
Sustituyendo el valor de (120) en (121), se obtiene finalmente (ω real):

$$\frac{P}{L} = \frac{\pi}{2} \frac{|J_0|^2 \omega^2}{c^3}$$

Todo lo hecho es equivalente a haber tomado el $\lim_{a \rightarrow 0}$ en el resultado de los apuntes para el cilindro infinito (el signo de A_0 que aparece en los apuntes estaba malo, debe ir con signo -).

13.93 T3P6 2022

Tenemos una linea de trasmisión, al cual consiste en dos conductores perfectos de forma arbitraria, pero de sección constante (la misma forma en z), ver figura. Demuestre que la inductancia por unidad de largo L y la capacitancia por unidad de largo esta dada por $LC = \mu\varepsilon/c^2$. (Es importante acordarse de la discusión sobre campos magnéticos cerca de conductores perfectos).



Solución 1:

Puesto que las inductancias están asociadas a campos magnéticos, la energía almacenada debido a una inductancia en un campo magnético viene dada por

$$W_B = \frac{1}{2}LI^2$$

de igual manera, los capacitadores están asociados a campos eléctricos, luego la energía almacenada debido a un capacitor será

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Por otro lado, considerando las densidades de corriente

$$\vec{J}_1 = \sigma_1(x') \vec{v}_1 \quad \vec{J}_2 = \sigma_2(x') \vec{v}_2$$

se obtiene el potencial vector

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{J(x')}{|x - x'|} d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int_{S_1} \frac{J(x')}{|x - x'|} d^3x' + \frac{1}{c} \int_{S_2} \frac{J(x')}{|x - x'|} d^3x' \end{aligned}$$

Ahora, el hecho de que ambos conductores sean perfectos, permite afirmar que $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$, pero al ser paralelos, se deduce que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v} = v\hat{z}$, llegándose a la expresión

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\hat{z}}{c} \int_{S_1} \frac{\sigma_1(x') v}{|x - x'|} d^3 x' + \frac{\hat{z}}{c} \int_{S_2} \frac{\sigma_2(x') v}{|x - x'|} d^3 x' \\
&= \frac{v \hat{z}}{c} \int_{S_1} \frac{\sigma_1(x')}{|x - x'|} d^3 x' + \frac{v \hat{z}}{c} \int_{S_2} \frac{\sigma_2(x')}{|x - x'|} d^3 x' \\
&= \frac{v}{c} (\Phi_1 + \Phi_2) \hat{z} \\
&= \frac{v}{c} \Phi \hat{z}
\end{aligned}$$

con Φ el potencial eléctrico. Así se obtiene el campo magnético

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
&= \frac{v}{c} (\partial_y \Phi \hat{x} - \partial_x \Phi \hat{y})
\end{aligned}$$

y, puesto que hay simetría en el eje z para el potencial, se obtiene el campo eléctrico

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi \\
&= -(\partial_x \Phi \hat{x} + \partial_y \Phi \hat{y})
\end{aligned}$$

Con esto, es inmediato que para el campo magnético

$$\begin{aligned}
|\vec{B}|^2 &= \vec{B} \cdot \vec{B} \\
&= \frac{v}{c} (\partial_y \Phi \hat{x} - \partial_x \Phi \hat{y}) \cdot \frac{v}{c} (\partial_y \Phi \hat{x} - \partial_x \Phi \hat{y}) \\
&= \frac{v^2}{c^2} [(\partial_y \Phi)^2 \hat{x} \cdot \hat{x} - 2 (\partial_x \Phi) (\partial_y \Phi) \hat{x} \cdot \hat{y} + (\partial_x \Phi)^2 \hat{y} \cdot \hat{y}] \\
&= \frac{v^2}{c^2} [(\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2]
\end{aligned}$$

y para el campo eléctrico

$$\begin{aligned}
|\vec{E}|^2 &= \vec{E} \cdot \vec{E} \\
&= (\partial_x \Phi \hat{x} + \partial_y \Phi \hat{y}) \cdot (\partial_x \Phi \hat{x} + \partial_y \Phi \hat{y}) \\
&= (\partial_x \Phi)^2 \hat{x} \cdot \hat{x} + 2 (\partial_x \Phi) (\partial_y \Phi) \hat{x} \cdot \hat{y} + (\partial_y \Phi)^2 \hat{y} \cdot \hat{y} \\
&= (\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2
\end{aligned}$$

concluyéndose que

$$|\vec{B}|^2 = \frac{v^2}{c^2} |\vec{E}|^2$$

Ahora, la energía almacenada en el campo magnético es

concluyéndose la relación

$$\begin{aligned}
\frac{W_B}{W_E} &= \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2}. \\
W_B &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{H}^* d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \int \vec{B} \cdot (\mu \vec{H}^*) d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \int \vec{B} \cdot \vec{B}^* d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \int |\vec{B}|^2 d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{v^2}{c^2} \int |\vec{E}|^2 d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{v^2}{c^2} \int \vec{E} \cdot \vec{E}^* d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2} \int \vec{E} \cdot (\epsilon \vec{E}^*) d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2} \int \vec{E} \cdot \vec{D}^* d^3x \\
&= \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2} W_E,
\end{aligned}$$

Reemplazando los valores de W_B y W_E se obtiene

$$\frac{2LI^2C}{2Q^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2}$$

e identificándose $I/Q = v$, se sigue

$$LC = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{1}{c^2},$$

pero esta velocidad c fue siempre la velocidad de la luz en el material, es decir,

$$\bar{c} = \frac{c}{\mu\epsilon},$$

concluyéndose que

$$\begin{aligned} LC &= \frac{1}{\mu\epsilon} \left(\frac{\mu\epsilon}{c} \right)^2 \\ &= \frac{\mu\epsilon}{c^2} \end{aligned}$$

que es lo que se deseaba demostrar.

Solución 2:

Los campos generados en el espacio por la línea de transmisión, que se compone de dos conductores, satisfacen:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned}$$

Como los conductores tienen sección constante, es decir la misma forma en el eje \hat{z} , se puede afirmar que Φ y \vec{A} sólo dependerán de ρ y ϕ y vendrán dados por:

$$\Phi(\rho, \phi) = \int \frac{\sigma_1 da_1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int \frac{\sigma_2 da_2}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (122)$$

$$\vec{A}(\rho, \phi) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}_1 da_1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}_2 da_2}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (123)$$

Donde, en nuestro caso:

$$\vec{J}_i = \vec{v}\sigma_i$$

Con σ , la densidad de carga superficial y \vec{v} , la velocidad de los portadores de carga, con lo cual podemos reescribir (123) de la forma:

$$\vec{A}(\rho, \phi) = \frac{\vec{v}}{c} \left(\int \frac{\sigma_1 da_1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int \frac{\sigma_2 da_2}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Igualando esto último a (122), resulta:

$$\vec{A}(\rho, \phi) = \frac{\vec{v}}{c} \Phi(\rho, \phi)$$

Definiendo:

$$\vec{I} = \vec{v}q$$

Se tiene la relación:

$$\vec{A} = \frac{\vec{I}}{qc} \Phi(\rho, \phi)$$

De los apuntes sabemos que al estar presente un medio dieléctrico (ϵ) y magnético (μ), las energías respectivas son:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon} \int |\vec{E}|^2 dV \\ W_m &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV \\ &= \frac{\mu}{8\pi} \int |\vec{B}|^2 dV \end{aligned}$$

Entonces, para $\vec{I} = \text{ctte}$:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \vec{\nabla} \times \frac{\vec{I}}{qc} \Phi \\ &= \frac{I}{qc} \vec{\nabla} \Phi \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$|\vec{B}|^2 = \left(\frac{I}{qc}\right)^2 |\vec{E}|^2$$

Sustituyendo esto en las relaciones anteriores y tomando la razón entre W_e/W_m , se llega a :

$$\frac{W_e}{W_m} = \frac{1}{\epsilon\mu} \left(\frac{qc}{I}\right)^2 \quad (124)$$

Además sabemos de electromagnetismo que las energías también se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{q^2}{2C} \\ W_m &= \frac{LI^2}{2} \end{aligned}$$

Tomando nuevamente la razón, resulta:

$$\frac{W_e}{W_m} = \frac{q^2}{CLI^2} \quad (125)$$

Finalmente, igualando (124) a (125) se llega a:

$$\frac{q^2}{CLI^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \left(\frac{qc}{I}\right)^2$$

De donde:

$$LC = \frac{\epsilon\mu}{c^2}$$

Solución 2018

Tomando coordenadas cilíndricas, suponemos que tener la misma forma es un plano $z = \text{cte}$ implica que, tanto el potencial eléctrico como el potencial vector, dependerán sólo de ρ y φ . Como el potencial vector viene dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3x',$$

pero sólo estamos considerando un área, y no un volumen, cambiamos d^3x' por $d^2x' = dA'$, donde A' representa a las dos regiones (placas) del espacio en donde se ubica la carga. Como la corriente es $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{v}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{v}\sigma}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} dA' \\ &= \frac{\mathbf{v}}{c} \int \frac{\sigma dA'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \\ &= \frac{\mathbf{v}}{c} \int \frac{dq'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \\ &= \frac{\mathbf{v}}{c} \Phi(\mathbf{x}) \\ &= \frac{I\Phi(\mathbf{x})}{cq\|\mathbf{v}\|} (v_\rho \hat{\rho} + v_\varphi \hat{\varphi}) \end{aligned}$$

donde $v_\rho^2 + v_\varphi^2 = \|\mathbf{v}\|^2$, y por lo tanto

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{I}{qc} \nabla \Phi(\mathbf{x})$$

Ahora, la densidad de energía eléctrica viene dada por

$$w_e = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) = \frac{1}{8\pi\epsilon} \|\mathbf{E}\|^2,$$

mientras que la densidad de energía magnética, por

$$w_m = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*) = \frac{\mu}{8\pi} \|\mathbf{B}\|^2 = \frac{\mu}{8\pi} \left(\frac{I}{qc} \right)^2 \|\mathbf{E}\|^2,$$

por lo tanto,

$$\frac{w_e}{w_m} = \frac{1}{\mu\epsilon} \left(\frac{qc}{I} \right)^2$$

Como $W_e = \frac{q^2}{2C}$ y $W_m = \frac{LI^2}{2}$, tenemos

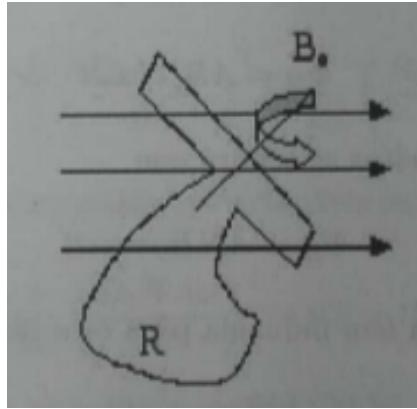
$$\frac{W_e}{W_m} = \frac{q^2}{CLI^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{q^2 c^2}{I^2} = \frac{w_e}{w_m},$$

es decir,

$$LC = \frac{\mu\epsilon}{c^2}.$$

13.94 Central hidroeléctrica 2

Una central hidroeléctrica convierte energía gravitacional en energía eléctrica. Supongamos que el agua cae “libremente” de una altura de 10 m con un flujo de $10 \text{ m}^3/\text{s}$.



- a) Asumiendo que la conversión es perfecta, estime cuanta energía podemos convertir a eléctrica.

Solución:

Dado que la conversión de energías es perfecta, podemos decir que la energía potencial del agua a una altura h

$$U = mgh$$

se transforma completamente a energía eléctrica. Luego, como en un fluido se tiene que $m = \rho V \Rightarrow U = \rho V g h$. Luego, la potencia por unidad de tiempo viene dado por

$$P = \frac{dU}{dt}$$

$$P = \frac{\rho dV gh}{dt} = \rho \phi g h$$

donde $\phi = dV/dt$ es el flujo del fluido. Luego, introduciendo los valores del enunciado

$$\rho = 1 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \phi = 10 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad h = 10 \text{ m} \quad g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Obtenemos la potencia

$$P = 9.8 \times 10^5 \text{ W}$$

Como la conversión es perfecta, esta será la potencia eléctrica.

- b) Supongamos que tenemos un magneto que genera un campo magnético constante B_0 . La energía gravitacional se convierte en energía rotacional a través de un circuito formado por un solenoide con n vueltas que gira en el campo magnético constante a frecuencia ω . Estime la “fuerza ponderomotiva” que se genera.

Solución:

La ecuación que relaciona a la fuerza electromotriz y el flujo magnético es

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (126)$$

Entonces para calcular la fem inducida por el solenoide calculamos primero la **fem inducida por una espira de área A** . Primero que todo, calculemos el **flujo magnético**. Se tiene que

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \hat{n} da$$

Sea θ el ángulo entre la normal y el campo. Luego,

$$\vec{B} \cdot \hat{n} = B_0 \cos \theta$$

Pero como $\theta = \omega t$, se tiene que

$$\Phi_B = AB_0 \cos \omega t$$

Luego, para el **solenoide de N vueltas** se tendrá que

$$\Phi_B = ANB_0 \cos \omega t$$

Así, utilizando (126), se tiene que la fem inducida para este caso es

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (ANB_0 \cos \omega t)$$

$$\varepsilon = \frac{B_0 N A \omega}{c} \operatorname{sen} \omega t$$

c) ¿Cuál es la **máxima corriente** que se puede generar asumiendo conversión perfecta?

Solución:

Si suponemos que el circuito cumple la **ley de Ohm**, se cumple

$$\boxed{\varepsilon = RI}$$

Luego, el máximo de corriente se tendrá cuando $I(t)$ dada por

$$I(t) = \frac{B_0 N A \omega}{R c} \operatorname{sen} \omega t$$

tenga un máximo. Este será cuando

$$I_{\max}(t) = \frac{B_0 N A \omega}{R c}$$

d) ¿Cuántas luces puede prender?

Solución

La **potencia en una corriente alterna** viene dada por

$$\boxed{P = I_{rms}^2 R} \quad (127)$$

donde $I_{rms} = \sqrt{\langle I \rangle^2}$. Entonces, calculemos $\langle I \rangle^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle I \rangle^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{B_0 N A \omega}{R c} \operatorname{sen} \omega t \right)^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{B_0 N A \omega}{R c} \right)^2 \int_0^T \operatorname{sen}^2 \omega t dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{B_0 N A \omega}{R c} \right)^2 \frac{T}{2} \\ \langle I \rangle^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{B_0 N A \omega}{R c} \right)^2 \end{aligned}$$

Así, se tiene que

$$I_{rms} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{B_0 N A \omega}{R c}$$

Luego, reemplazando en (127), tenemos que

$$P = \frac{R}{2} \left(\frac{B_0 N A \omega}{R c} \right)^2 = \frac{1}{2R} \left(\frac{B_0 N A \omega}{c} \right)^2$$

Luego, asumiendo nuevamente **conversión perfecta**, tenemos que

$$\frac{1}{2R} \left(\frac{B_0 N A \omega}{c} \right)^2 = 9.8 \times 10^5 \text{ W}$$

Finalmente, suponiendo que las **ampolletas son de 100 W**, tenemos que podemos prender unas

$$\frac{9.8 \times 10^5}{10^2} = 9.8 \times 10^3 \text{ ampolletas}$$

número insuficiente para una ciudad como Santiago.

- e) Dado que en general R varía lentamente (prender y apagar luces), ¿cómo puedo controlar estas variaciones?

Solución:

Asumamos que B varía muy lentamente con respecto al tiempo. Luego, la fem inducida viene dada por

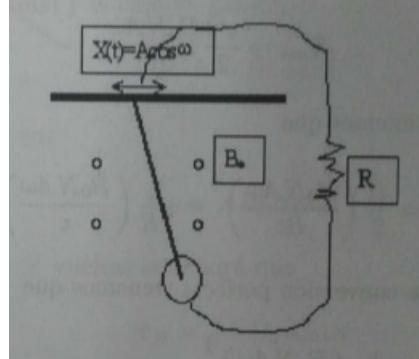
$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (ANB \cos \omega t) \\ &= \frac{NA}{c} \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \cos \omega t + B \omega \sin \omega t \right) \end{aligned}$$

Luego, si hay una variación muy lenta de la resistencia lo podremos controlar con el cambio pequeño del campo magnético.

13.95 Central 3

Piense en el siguiente generador eléctrico. Un péndulo forzado de masa M hecho de un conductor de largo L y conductividad σ . El péndulo tiene una ecuación de movimiento

$$\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A \cos \omega t$$



Primero asuma que $A = 0$.

- a) Estime la “fuerza ponderomotiva” del circuito que se genera en función de θ y su derivada temporal.

Solución:

Para poder calcular la fem inducida por este péndulo, primero debemos [conocer \$\theta\(t\)\$](#) . Para esto, resolvemos la ecuación diferencial homogénea

$$\boxed{\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \quad (128)$$

Supongamos que $\theta(t) = A_0 e^{\alpha t}$. Reemplazando esta solución en la ecuación diferencial (128), se tiene que

$$\alpha^2 A_0 e^{\alpha t} + \alpha\beta A_0 e^{\alpha t} + \omega_0^2 A_0 e^{\alpha t} = 0$$

Simplificando, tenemos

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \omega_0^2 = 0$$

Con soluciones

$$\alpha = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

Como sabemos que el péndulo oscila, se debe cumplir que $\beta^2 < 4\omega_0^2$. Así, se tiene que

$$\alpha = \frac{-\beta \pm i\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}}{2}$$

Así, obtenemos que

$$\theta(t) = A_0 \exp \left(\frac{-\beta \pm i\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}}{2} t \right)$$

Ahora, definamos por $\omega \equiv \sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}$. Luego, por propiedades de la función exponencial, se tiene que

$$\theta(t) = e^{-\beta t/2} \left[\theta_0 \cos \omega t + \dot{\theta}_0 \sin \omega t \right]$$

Supongamos que en $t = 0$, $\dot{\theta} = 0$. Luego, tenemos que

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\beta t/2} \cos \omega t$$

Ahora que conocemos $\theta(t)$, podemos calcular la fem inducida por este sistema. Tenemos

$$\boxed{\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \hat{n} da = B_0 \int da}$$

Ya que $\vec{B} \cdot \hat{n} = B_0$. Luego

$$\begin{aligned} \Phi_B &= B_0 \int_0^L \int_0^\theta r dr d\theta \\ &= \frac{B_0 L^2}{2} \theta(t) = \frac{B_0 L^2 \theta_0}{2} e^{-\beta t/2} \cos \omega t \end{aligned}$$

Así

$$\varepsilon = -\frac{B_0 L^2 \theta_0}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-\beta t/2} \cos \omega t)$$

Derivando y simplificando, obtenemos

$$\varepsilon = \frac{B_0 L^2 \theta_0}{2c} e^{-\beta t/2} \left[\frac{\beta}{2} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right]$$

En términos de $\theta(t)$ podemos escribir

$$\varepsilon = \frac{B_0 L^2}{2c} \dot{\theta}(t)$$

Nos podemos dar cuenta que desconociendo las condiciones iniciales del problema podemos escribir la fem.

- b) Escriba la ecuación de continuidad y estime la corriente. ¿Cuánta energía se convierte a energía eléctrica? Esta energía da origen al término β . Estime β (Hint: ¿Cómo estimo la energía disipada por el péndulo si $A = 0$?)

Solución:

Primero que todo notemos que se nos pregunta que escribamos una ley de Ohm equivalente para este caso. Sabemos que si el circuito es óhmico. tenemos que

$$\varepsilon = RI$$

Ahora, como σ es la conductividad del circuito, podemos escribir una expresión para la resistencia,

$$R = \frac{L}{\sigma A}$$

con A el área que barre el péndulo. Luego,

$$I = \frac{\sigma A}{L} \varepsilon$$

Reemplazando el valor de ε obtenido en (a), se tiene que

$$I(t) = \frac{\sigma A B_0 L^2}{2 L c} \dot{\theta}(t)$$

Si asumimos conversión perfecta, toda la energía mecánica del péndulo se transformará en energía eléctrica, con la energía mecánica del péndulo dada por

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

$$E = \frac{mL^2 \dot{\theta}^2}{2} + mgL(1 - \cos \theta)$$

Ahora, sabemos que la potencia disipada por el péndulo es de

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R}$$

Y si la ecuación diferencial del movimiento la multiplicamos por mL , se tiene que

$$mL\ddot{\theta} + mL\beta\dot{\theta} + mL\omega_0^2\theta = 0$$

Observamos que la fuerza disipativa viene dada por

$$F_r = mL\beta\dot{\theta}$$

Luego, para esta fuerza, la potencia disipada por unidad de tiempo es

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}_r \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

Luego, tomando que los vectores \vec{F}_r y $d\vec{\ell}$ van en una misma dirección en el instante que nos interesa, reemplazando el valor obtenido de la fuerza disipativa y usando que $\ell = Ld\theta$, se tiene que

$$\frac{dW}{dt} = mL\beta\dot{\theta}L\frac{d\theta}{dt} = mL^2\beta\dot{\theta}^2$$

Luego, se tendrá

$$\begin{aligned} mL^2\beta\dot{\theta}^2 &= \frac{\varepsilon^2}{R} \\ mL^2\beta\dot{\theta}^2 &= \frac{\dot{\theta}^2}{R} \left(\frac{B_0\theta_0L^2}{2c} \right)^2 \\ \Rightarrow \beta &= \frac{B_0^2L^2}{4mc^2R} \end{aligned}$$

c) Escriba la ecuación de movimiento para el péndulo incluyendo A y la disipación eléctrica estimada en la parte b).

Solución:

En este caso, debemos resolver

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A \cos \omega t$$

cuya solución viene dada por la suma de la solución particular más la solución homogénea. En la parte (a) ya calculamos la solución homogénea, ahora nos falta calcular la solución particular. Postulamos que $\theta_p(t) = A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t$. Luego, reemplazando en la ecuación diferencial, se tiene que $-A_0\omega^2 \cos \omega t - B_0\omega^2 \sin \omega t - A_0\omega\beta \sin \omega t$

$$+ B_0\beta\omega \cos \omega t + \omega_0(A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t) = A \cos \omega t$$

Lo que nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -A_0\omega^2 + B_0\beta\omega + \omega_0^2A_0 &= A \\ -B_0\omega^2 - A_0\beta\omega + \omega_0^2B_0 &= 0 \end{aligned}$$

con soluciones

$$A_0 = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2} \quad B_0 = \frac{A\omega\beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2}$$

Finalmente, si juntamos las ecuaciones, obtenemos

$$\theta(t) = e^{-\beta t/2} \left[\theta_0 \cos \omega t + \dot{\theta}_0 \sin \omega t \right] + \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \omega\beta \sin \omega t \right]$$

El término β relacionado con la disipación seguirá siendo el mismo.

d) ¿Cuál es la variación temporal de la corriente? (Deseche variaciones transientes.) ¿Hay resonancia? En general R es una lenta función del tiempo lo que requiere que la central funcione a diferentes frecuencias o amplitudes A .

Solución:

Si deseamos el transiente, se tiene que

$$\theta(t) = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2} [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \omega\beta \sin \omega t]$$

Calculamos la fem inducida, dada por

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}}$$

Además, se sabe que

$$\Phi_B = \frac{B_0 L^2}{2} \theta(t)$$

Luego,

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{B_0 L^2}{2} \dot{\theta}(t)$$

Así, reemplazando el valor de $\theta(t)$ suponiendo que parte del reposo y además sin el transiente. se tiene que

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{B_0 L^2}{2} \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2} [\omega^2 \beta \cos \omega t - (\omega_0^2 - \omega^2) \omega \sin \omega t]$$

Luego, suponiendo que es ohmico, se tiene que

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\sigma B}{L} \frac{B_0 L^2}{2c} \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2} [(\omega_0^2 - \omega^2) \omega \sin \omega t - \omega^2 \beta \cos \omega t]$$

Donde B es el área transversal. Luego, **habrá resonancia cuando $\omega_0 = \omega$, y la corriente resonante vendrá dada por**

$$I_{\text{res}}(t) = \frac{\sigma B B_0 L A}{2c (\beta \omega_0)^2} [-\omega_0^2 \beta \cos \omega_0 t]$$

$$I_{\text{res}}(t) = -\frac{\sigma B B_0 L^2 A}{2c L \beta} \cos \omega_0 t$$

A hora, usamos el valor de β obtenido en la parte (b), obteniendo

$$I_{\text{res}}(t) = -\frac{R B_0 L^2 A}{2c B_0^2 L^2} 4c^2 R \cos \omega_0 t$$

$$I_{\text{res}}(t) = -\frac{2cAm}{B_0} \cos \omega_0 t$$

Finalmente, si usamos el valor $\omega_0^2 = g/L$, obtenemos

$$I_{\text{res}}(t) = -\frac{2cAm}{B_0} \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right)$$

13.96 Vela radiación

Resuelva el problema de la vela de radiación en el espacio. Supongamos que tenemos un espejo que refleja la radiación electromagnética proveniente del sol.

- a) Encuentre cual es la potencia radiada por el sol (0.14 watt/cm^2). Estime cuantos kgs de hidrógeno se transforman por segundo en He.

Solución:

El enunciado debe decir que la potencia por unidad de área radiada por el sol sobre la tierra es:

$$K = \frac{dP}{dA_t} = 0,14 \left[\frac{\text{Watts}}{\text{cm}^2} \right] = 1400 \left[\frac{\text{Watts}}{\text{m}^2} \right]$$

Como la tierra se encuentra a una distancia aproximada del sol (Wikipedia), $D = 1,5 \times 10^{11} [\text{m}]$, la potencia radiada por el sol la obtenemos multiplicando el área total de una esfera de radio igual a D por la potencia irradiada por unidad de área a esta distancia D :

$$\begin{aligned} P &= 4\pi D^2 \frac{dP}{dA_t} = 4\pi D^2 K \\ &= 4\pi \cdot (1,5 \times 10^{11} [\text{m}])^2 \cdot 1400 \left[\frac{\text{Watts}}{\text{m}^2} \right] \\ P &= 3,95 \cdot 10^{26} [\text{Watts}] \end{aligned}$$

Como el radio del sol es aproximadamente $R = 7 \times 10^8 [\text{m}]$, procediendo de igual modo, con R en vez de D , la potencia radiada por unidad de área del sol es:

$$\frac{dP}{dA_s} = 6,4 \times 10^7 \left[\frac{\text{Watts}}{\text{m}^2} \right]$$

Ahora calcularemos la cantidad de Hidrógeno que se transforma en Helio en el Sol. Por las altas temperaturas, podemos suponer que en el Sol los átomos están libres (no formando moléculas). La masa de un núcleo de Helio es

$m_{He} = 3,97m_p$, con $m_p = 1,672 \times 10^{-27}[Kg]$ la masa de un protón. Como en una reacción 4 núcleos de Hidrógeno ($m_h = m_p$) dan origen a un núcleo de Helio, la energía liberada en la reacción la estimamos como la diferencia entre las energías (relativistas) en reposo de los cuatro núcleos de Hidrógeno iniciales y el núcleo de Helio que se forma:

$$\begin{aligned}\Delta E &= 0,03m_pc^2 \\ &= 4,51 \times 10^{-12}[J]\end{aligned}$$

Pero ya conocemos la potencia irradiada por el sol, que corresponderá (si despreciamos otras reacciones) a la energía total liberada por estas reacciones (H-He) por segundo. Entonces, el número total de reacciones producidas por segundo será:

$$N \approx \frac{P}{\Delta E} = 8,75 \times 10^{37}$$

Como para cada reacción requerimos de cuatro protones y la masa de cada uno de ellos es m_p , la cantidad total de Kilogramos de Hidrógeno que se transforman por segundo en Helio es:

$$\begin{aligned}M_T &= 4 \cdot N \cdot m_p \\ &= 4 \cdot (8,75 \times 10^{37}) \cdot 1,672 \times 10^{-27}[Kg] \\ &= 5,85 \times 10^{11}[Kg]\end{aligned}$$

- b) Calcule la presión electromagnética sobre un espejo y compare con la presión del viento solar

Solución:

Calcularemos la presión electromagnética sobre la vela, que es un espejo, de la siguiente forma. Sabemos que la fuerza sobre la vela será:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}_V}{dt}} \quad (129)$$

Supondremos el espejo, bastante alejado del sol de modo que todos los fotones de la radiación llegan perpendiculares a su superficie. Cada fotón tendrá masa 0 por lo cual el momentum total de los fotones que inciden será(en módulo):

$$p_f = \frac{E}{c}$$

Donde $c = 3 \times 10^8 \left[\frac{m}{s} \right]$ y E será la energía total de los fotones que impactan a la vela, que se puede obtener como:

$$E = \frac{dP}{dA} \cdot A_V$$

$$E = \frac{P}{4\pi d^2} A_V \quad (130)$$

Con A_V , el área de la vela, P conocido del item a) y d la distancia de la vela al sol. Como la vela es un espejo, se puede asumir reflexión perfecta; es decir que si el momentum total de los fotones incidentes es \vec{p}_f , entonces todos rebotarán con momentum total $-\vec{p}_f$ y por conservación de momentum la vela quedará con momentum $\vec{p}_V = 2\vec{p}_f$. Con esto último y (130) en (129), se despeja el valor de la fuerza:

$$\begin{aligned} F &= \frac{d(2p_f)}{dt} \\ &= \frac{2}{c} \frac{dE}{dt} \\ &= \frac{2}{c} \frac{PA_v}{4\pi d^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto la presión electromagnética es:

$$p_e = \frac{F}{A_V} = \frac{2}{c} \frac{P}{4\pi d^2} = \frac{2}{c} \frac{dP}{dA}$$

Si situamos la vela en las cercanías de la tierra, ocupando el resultado de a), tenemos:

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{2}{c} \frac{dP}{dA_t} \\ &= 2 \cdot 1400 \left[\frac{\text{Watts}}{m^2} \right] \frac{1}{3 \times 10^8 \left[\frac{m}{s} \right]} \\ &= 9,3 \times 10^{-6} [\text{Pa}] \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, el hecho de que ocupemos un espejo como vela ayuda a que ésta se mueva más rápido. Para estimar la presión del viento solar, se tiene:

$$p_{v.s} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Donde ρ es la densidad de las partículas que lo componen en el espacio y v su rapidez. Buscando en internet estimamos esta cantidad asumiendo 1 partícula por cm^3 , que suponemos como protones ($m_p = 1,672 \times 10^{-27}$) y de rapidez $v = 500 \left[\frac{Km}{s} \right]$, resultando:

$$p_{v.s} \approx 0,2 [\text{nano Pa}]$$

Valor que es del orden de los datos de la NASA. Como vemos este resultado es 4 órdenes de magnitud menor que la presión electromagnética, por lo cual puede despreciarse.

c) Estime que característica debe de tener esta vela para **vencer a la fuerza gravitacional de atracción del sol**.

Para que la vela logre vencer a la fuerza gravitacional de atracción del Sol (despreciando las interacciones gravitacionales de los otros planetas), debe cumplirse que **la fuerza electromagnética supere a la fuerza gravitacional**, es decir a una distancia r del Sol: **cambiar a signo del Sol**

$$\frac{GM_{sol}m_V}{r^2} < \frac{2PA_V}{c4\pi r^2}$$

Con m_V la masa total de la vela. Es decir, se necesita que:

$$\sigma_V = \frac{m_V}{A_V} < \frac{P}{2\pi c GM_{sol}}$$

Para $G = 6,67 \times 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{Kg^2} \right]$, $M_{sol} = 1,99 \times 10^{30} [Kg]$, $c = 3 \times 10^8 \left[\frac{m}{s} \right]$ y $P = 3,95 \times 10^{26} [Watts]$, se tiene:

$$\sigma_v < 0,0016 \left[\frac{Kg}{m^3} \right]$$

O sea **si suponemos el ancho de la vela del orden de 2[mm]**, tendría que cumplirse:

$$\rho_V < 0,8 \left[\frac{Kg}{m^3} \right]$$

d) Busque en la internet la densidad y grosor del material que se piensa usar en la vela y calcule **cuanto tiempo se demoraría** en llegar esta vela al planeta **júpiter** y con que **velocidad** llegaría? Use un área de $100 m^2$ y una masa del satélite $m_s = 10 kg$.

Buscando tenemos que en el 2000, Energy Science Laboratories desarrolló un nuevo material de **fibras de Carbono para hacer la vela**. No habían datos por separado de la densidad y grosor, sino que daban directamente el parámetro $\sigma_V = 3 \left[\frac{g}{m^2} \right] = 3 \times 10^{-3} \left[\frac{Kg}{m^2} \right]$, que en el ítem anterior vimos que es el que interesa. Notamos también del ítem c) que (para los módulos):

$$\begin{aligned} \frac{F_g}{F_e} &= \frac{G(m_V + m_s) M_{sol} c 2\pi}{PA_V} \\ &= \frac{2\pi G c M_{sol} (\sigma_V + m_s/A_v)}{P} \end{aligned}$$

Donde notamos que la masa total que siente la atracción del sol es ahora la suma de la masa del satélite m_s y la de la vela, m_V . Reemplazando acá los mismos datos de antes pero ahora con $m_s = 10[Kg]$, $A_V = 1000[m^2]$ y $\sigma_V = 3 \times 10^{-3} \left[\frac{Kg}{m^2} \right]$, obtenemos:

$$\frac{F_g}{F_e} = 8,23$$

Por lo tanto en este caso la vela no podría ir a Júpiter pues no se cumple la condición de c) y la gravedad supera a la fuerza eléctrica, por lo cual la vela tendría un trágico fin en el sol. Aunque usáramos otro material aún más delgado tampoco se podría pues incluso al tomar $\sigma_V = 0$:

$$\frac{F_g}{F_e} = 6,33$$

Porque el satélite es muy pesado:

$$\frac{m_s}{A_V} = 0,01 \left[\frac{Kg}{m^2} \right] > 0,0016 \left[\frac{Kg}{m^2} \right]$$

Y no se satisface la condición de c).

e) Se ha pensado construir una magnetosfera artificial con un magneto superconductor. Asumamos que podemos generar en nuestro anillo superconductor de radio $R = 1\text{mt}$ una corriente de $I = 10^6$ Amperes. Encuentre el tamaño de la magnetosfera donde la presión magnética y la presión del viento solar $B^2 = P$ son iguales. Que aceleración sentiría este satélite. Cuanto se demoraría en llegar al planeta júpiter y con que velocidad llegaría? masa del satélite $m_s = 10 \text{ kg}$, masa del anillo superconductor $m_a = 50\text{kgs}$.

e) El enunciado está malo, el profesor dijo que debe decir $R = 1[m]$, $I = 10^6[A]$. La presión para el viento solar la calculamos como:

$$p_{v.s} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Usando las mismas consideraciones de b), tenemos:

$$p_{v.s} \approx 2 \times 10^{-10} [Pa] = 0,2[nPa]$$

Pensemos el anillo superconductor como un dipolo magnético de valor m dado por:(en M.K.S)

$$\begin{aligned} m &= IA \\ &= I\pi R^2 \end{aligned}$$

Y el valor del campo de este dipolo a una distancia r es :

$$B \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3}$$

Con $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{N}{A^2} \right]$. A partir de esto despejamos el tamaño de la magnetósfera, haciendo:

$$\begin{aligned} p_{v.s} &= B^2 \\ &= \frac{\mu_0^2}{16} \frac{I^2 R^4}{r^6} \end{aligned}$$

De aquí:

$$r \approx \left(\frac{\mu_0^2 I^2 R^4}{16 p_{v.s}} \right)^{1/6} \approx 28,1[m]$$

Entonces, la sección eficaz de esta magnetósfera es del orden de :

$$S = \pi r^2 \approx 2482,59 \left[m^2 \right]$$

Y el valor de la fuerza que sentirá la magnetósfera debido al viento solar será:

$$\begin{aligned} F &= p_{v.s} \times S \\ &= 4,97 \times 10^{-7} [N] \end{aligned}$$

La fuerza de gravedad del sol inicial(suponiendo que el sistema parte desde la tierra), con $m_s = 10[Kg]$ y $m_a = 50[Kg]$, es:

$$\begin{aligned} F &= \frac{G (m_s + m_a) M_{sol}}{D^2} \\ &= 0,35 [N] \end{aligned}$$

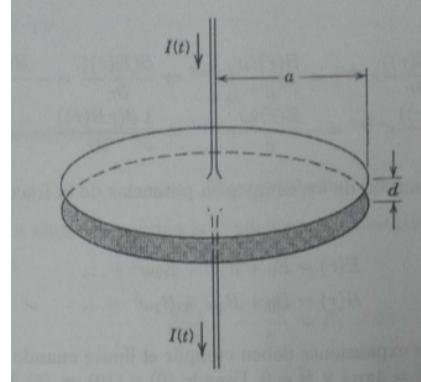
Tampoco logra vencer a la gravedad. Le pregunté al profesor y dijo que en estos casos (item d) y e), bastaba con hacer esto. Una posible solución sería aumentar el radio del anillo y/o la corriente, y para el caso anterior construir la vela de un material más liviano y disminuir la masa del satélite.

13.97 Condensador de placas circulares

Complementar con T4 P7 2008

Un condensador ideal consiste de dos placas circulares de radio a (ver figura) y separadas por una distancia $d \ll a$, el cual está conectado a una fuente de corriente dada por $I(t) = I_o \cos \omega t$.

- a) Calcule los campos magnéticos entre las placas a segundo orden en la frecuencia (no considere efectos de borde)



Observamos que, por simetría cilíndrica del problema, el campo eléctrico y magnético tendrán la forma

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, t) &= E(r)e^{-i\omega t} \hat{z} \\ \vec{B}(r, t) &= B(r)e^{-i\omega t} \hat{\phi}\end{aligned}$$

como $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$, las ecuaciones de Maxwell quedan [poner esto primero](#)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Si suponemos que podemos expandir los dos campos en potencias de ω , las únicas ecuaciones que nos darán información sobre los campos son las ecuaciones de Maxwell que contienen rotores. Entonces, analizemos las derivadas temporales de los campos. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} &= -\frac{E(r)i\omega}{c} e^{-i\omega t} \hat{z} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{B(r)i\omega}{c} e^{-i\omega t} \hat{\phi}\end{aligned}$$

Entonces analizamos las componentes $(\nabla \times \vec{B})_z$ y $(\nabla \times \vec{E})_{\hat{\phi}}$. Usando el rotor en coordenadas cilíndricas, tenemos que

$$\begin{aligned}(\nabla \times \vec{B})_z &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rB_{\phi})}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB(r))}{\partial r} e^{-i\omega t} \\ (\nabla \times \vec{E})_{\hat{\phi}} &= \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial(E(r))}{\partial r} e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

Luego, igualando las respectivas expresiones, tenemos

$$-\frac{\partial(E(r))}{\partial r} e^{-i\omega t} = \frac{B(r)i\omega}{c} e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{\partial(E(r))}{\partial r} = -\frac{B(r)i\omega}{c} \quad (131)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB(r))}{\partial r} e^{-i\omega t} = -\frac{E(r)i\omega}{c} e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rB(r))}{\partial r} = -\frac{E(r)i\omega}{c} \quad (132)$$

Ahora, incluyamos la expansión de los campos en potencias de la frecuencia,

$$E(r) = E_0 + E_1\omega + E_2\omega^2 + \dots \quad (133)$$

$$B(r) = B_0 + B_1\omega + B_2\omega^2 + \dots \quad (134)$$

Recordemos que estas dos expansiones deben cumplir el límite cuando $\omega \rightarrow 0$, es decir, el caso de la corriente continua $\vec{E} = 4\pi\sigma\hat{z}$ y $\vec{B} = 0$. Usando (133) y (134) en (131), tenemos

$$\frac{\partial}{\partial r} (E_0 + E_1\omega + E_2\omega^2) = -\frac{i\omega}{c} (B_0 + B_1\omega + B_2\omega^2)$$

De donde obtenemos

$$\frac{\partial E_0}{\partial r} + \frac{\partial E_1}{\partial r}\omega + \frac{\partial E_2}{\partial r}\omega^2 = -\frac{iB_0}{c}\omega - \frac{iB_1}{c}\omega^2 - \frac{iB_2}{c}\omega^3 \quad (135)$$

Análogamente, usando (133) y (134) en (132), obtenemos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_0) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_1)\omega + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_2)\omega^2 = -\frac{iE_0}{c}\omega - \frac{iE_1}{c}\omega^2 - \frac{iE_2}{c}\omega^3 \quad (136)$$

Entonces, pasemos a calcular los coeficientes

Igualando potencias en (135), tenemos

$$\frac{\partial E_0}{\partial r} = 0 \Rightarrow E_0 = \text{constante}$$

Esta constante la calculamos de la condicion $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow E_0 = 4\pi\sigma$. Como tenemos placas circulares, se tiene

$$\sigma = \frac{q}{\pi a^2}$$

pero como $q = \int I(t)dt$, se tiene que

$$\sigma = \frac{1}{\pi a^2} \int I(t)dt = \frac{1}{\pi a^2} \int I_0 e^{-i\omega t} = i \frac{I_0}{\omega a^2 \pi} e^{-i\omega t}$$

Luego, a ordenes bajos de frecuencias

$$\sigma = \frac{iI_0}{\omega a^2 \pi}$$

Finalmente, obtenemos que

$$E_0 = \frac{4I_0 i}{\omega a^2}$$

- De (136), tenemos que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_0) = 0$$

De donde podemos observar que $B_0 = \text{constante}$ que debe ser cero para que cumpla la condición electroestática $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow B = 0$.

- De (135), se tiene

$$\frac{\partial E_1}{\partial r} = -\frac{iB_0}{c} \Rightarrow E_1 = 0$$

- De (136), se tiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_1) = -\frac{iE_0}{c} \Rightarrow B_1 = -\frac{iE_0 r}{2c}$$

- De (135), se tiene

$$\frac{\partial E_2}{\partial r} = -\frac{iB_1}{c} \Rightarrow E_2 = -\frac{E_0 r^2}{4c^2}$$

- De (136), se tiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_3) = -\frac{i}{c} E_2 \Rightarrow B_3 = \frac{iE_0 r^3}{16c^3}$$

Entonces, reemplazando el valor de E_0 obtenido, e incluyendo la dependencia temporal, se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{4I_0 i}{\omega a^2} \left(1 - \frac{r^2}{4c^2} \omega^2 \right) e^{-i\omega t} \hat{z} \\ \vec{B} &= \frac{4I_0}{\omega a^2} \left(\frac{r}{2c} \omega - \frac{r^3}{16c^3} \omega^3 \right) e^{-i\omega t} \hat{\phi} = \frac{2I_0 r}{a^2 c} \left(1 - \frac{r^2}{8c^2} \omega^2 \right) e^{-i\omega t} \hat{\phi} \end{aligned}$$

Finalmente, tomando la parte real de estos dos campos, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{4I_0}{\omega a^2} \left(1 - \frac{r^2}{4c^2} \omega^2 \right) \sin \omega t \hat{z} \\ \vec{B} &= \frac{2I_0 r}{a^2 c} \left(1 - \frac{r^2}{8c^2} \omega^2 \right) \cos \omega t \hat{\phi} \end{aligned}$$

b) Calcule los volúmenes de integrales $w_e y^m$, que entran en la definición de X , usando $I_i = -i\omega Q_i$

Sabemos que la definición de reactancia X para un sistema ohmico a bajas frecuencias es

$$X \simeq \frac{4\omega}{|I_i|^2} \int_V (w_m - w_e) d^3x \quad (137)$$

donde

$$w_e = \frac{1}{16\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D}^*) \quad w_m = \frac{1}{16\pi} (\vec{B} \cdot \vec{H}^*)$$

e $I_i = -i\omega Q$, donde Q es la carga total en uno de los platos. Calculemos primero w_e y w_m . Se tiene que, en nuestro caso

$$w_e = \frac{1}{16\pi} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \quad w_m = \frac{1}{16\pi} (\vec{B} \cdot \vec{B}^*)$$

Entonces, despreciando los términos superiores a ω^2 , tenemos

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{16\pi} \left(\left(\frac{4I_0}{\omega a^2} \right)^2 \left(1 - \frac{r^2}{4c^2} \omega^2 \right)^2 \right) = \frac{|I_0|^2}{\pi (\omega a^2)^2} \left(1 - \frac{r^2}{2c^2} \omega^2 \right) \\ w_m &= \frac{1}{16\pi} \left(\left(\frac{2I_0 r}{a^2 c} \right)^2 \left(1 - \frac{r^2}{8c^2} \omega^2 \right)^2 \right) = \frac{|I_0|^2 r^2}{4\pi (a^2 c)^2} \left(1 - \frac{r^2}{4c^2} \omega^2 \right) \end{aligned}$$

Luego, tomando el jacobiano en coordenadas cilíndricas, tenemos que

$$\begin{aligned} \int w_e d^3x &= 2\pi d \frac{|I_0|^2}{\pi (\omega a^2)^2} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{2c^2} \omega^2 \right) r dr \\ &= \frac{2d |I_0|^2}{(\omega a^2)^2} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{\omega^2 a^4}{8c^2} \right) \\ \int w_e d^3x &= \frac{d |I_0|^2}{\omega^2 a^2} \end{aligned}$$

en este último paso despreciamos el segundo término por ser demasiado pequeño. Haciendo el proceso equivalente para w_m , tenemos

$$\begin{aligned} \int w_m d^3x &= 2\pi d \frac{|I_0|^2}{4\pi (a^2 c)^2} \int_0^a r^3 dr \\ &= \frac{d |I_0|^2}{2 (a^2 c)^2} \frac{a^4}{4} \\ \int w_m d^3x &= \frac{d |I_0|^2}{8c^2} \end{aligned}$$

Sólo nos falta establecer una relación entre $|I_0|^2$ e $|I_i|^2$. Sabemos que en uno de los platos se cumple $E = 4\pi\sigma$, luego

$$\sigma = \frac{E(r)}{4\pi}$$

Entonces, aplicando la expansión en serie obtenida para el campo eléctrico, se tiene

$$\sigma = \frac{I_0 i}{\pi \omega a^2} \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{4c^2} \right)$$

Luego, la carga en uno de los platos también tendrá una expansión en serie para las frecuencias, que a segundo orden es

$$Q = 2\pi \int_0^a \sigma(r) r dr = \frac{2I_0 i}{\omega a^2} \int_0^a \left(r - \frac{r^3 \omega^2}{4c^2} \right) dr$$

$$Q = \frac{I_0 i}{\omega} \left(1 - \frac{a^2 \omega^2}{8c^2} \right)$$

Luego, como $I_i = -i\omega Q$, se tiene

$$I_i = I_0 \left(1 - \frac{a^2 \omega^2}{8c^2} \right)$$

Luego,

$$|I_i|^2 = |I_0|^2 \left(1 - \frac{a^2 \omega^2}{4c^2} \right)$$

Así, obtenemos

$$\int_V w_e d^3x = \frac{d |I_i|^2}{w^2 a^2} \quad \int_V w_m d^3x = \frac{d |I_i|^2}{8c^2}$$

c) Encuentre además que el circuito equivalente en serie tiene satisface $C \simeq a^2/4d$, $L \simeq d/2c^2$.

Usando (137), se tiene

$$X \simeq \frac{4\omega}{|I_i|^2} \left(\frac{d |I_i|^2}{8c^2} - \frac{d |I_i|^2}{w^2 a^2} \right) = \frac{\omega d}{2c^2} - \frac{4d}{\omega a^2}$$

y recordando que si tenemos un circuito LC en serie $X = \omega L - 1/\omega C$, obtenemos

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \simeq \frac{\omega d}{2c^2} - \frac{4d}{\omega a^2}$$

obtenemos

$$L \simeq \frac{d}{2c^2} \quad C \simeq \frac{a^2}{4d}$$

d) Resuelva los campos en forma exacta. Encuentre C y L nuevamente.

Recordemos que en este problema se cumple

$$\frac{\partial(E(r))}{\partial r} = -\frac{B(r)i\omega}{c} \quad \frac{\partial(rB(r))}{\partial r} = -\frac{E(r)i\omega r}{c} \quad (138)$$

entonces, si derivamos con respecto a r la ecuación de la derecha de (138), obtenemos

$$\frac{\partial^2(rB)}{\partial r^2} = -i\omega r \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{i\omega E}{c}$$

y usando la ecuación de la izquierda y de la derecha de (138), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(rB)}{\partial r^2} &= -\frac{\omega^2}{c^2}rB + \frac{1}{r}\frac{\partial(rB)}{\partial r} \\ \frac{\partial^2(rB)}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rB)}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2}rB &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, por regla de la cadena,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rB)}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r}B$$

Luego,

$$\frac{\partial^2(rB)}{\partial r^2} - \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{r}B + \frac{\omega^2}{c^2}rB = 0$$

Sin embargo,

$$\frac{\partial(rB)}{\partial r} = B + r\frac{\partial B}{\partial r} \implies \frac{\partial^2(rB)}{\partial r^2} = \frac{\partial B}{\partial r} + r\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\partial B}{\partial r}$$

Entonces,

$$\frac{\partial B}{\partial r} + r\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{r}B + \frac{\omega^2}{c^2}rB = 0$$

Multiplicando por r y factorizando, obtenemos

$$r^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + r\frac{\partial B}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - 1\right)B = 0$$

Ecuación diferencial cuya solución es la función de Bessel $J_1(kr)$, donde $k = \omega/c$. Entonces, la solución exacta para el campo magnético para este caso es

$$\vec{B}(r, t) = C J_1(kr) e^{-i\omega t} \hat{\phi}$$

donde C depende de las condiciones para el caso continuo de la corriente. Entonces, calculamos fácilmente la forma exacta del campo eléctrico para este caso. Se tiene que

$$\frac{\partial(E(r))}{\partial r} = -\frac{i\omega C J_1(kr)}{c}$$

Integrando con respecto a r , se tiene

$$E(r) = -\frac{i\omega C}{c} \int J_1(kr) dr \implies E(r) = iC J_0(kr)$$

ya que sabemos de nuestro curso de MFM II que $-J'_0(x) = J_1(x)$. Así, se tiene que

$$\vec{E}(r, t) = iC J_0(kr) e^{-i\omega t} \hat{z}$$

Calculemos la constante C . Si $\omega \rightarrow 0 \implies E = 4\pi\sigma$. Luego,

$$C = \frac{4I_0}{a^2\omega}$$

e) Repita utilizamos dos placas cuadradas de perímetro $4L$?

Aquí la simetría del campo es diferente.

13.98 Cilindro infinito con campos armónicos

Considere un cilindro infinito en $z(\partial z = 0)$ de radio a y campos armónicos $e^{-i\omega t}$

a) Demuestre que $\mathbf{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \hat{z}$ es una solución de la ecuación de Helmholtz, y por ende de Maxwell. Usando el Gauge de Lorentz pruebe que podemos utilizar la misma forma para \mathbf{A} .

Demostremos primero que podemos llevar una de las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico a una ecuación de Helmholtz. Consideraremos la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Si le aplicamos rotor, se tiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$$

Usando identidades vectoriales, se tiene

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$$

Pero como $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$ ya que en este problema no hay cargas libres, Luego,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$$

Ahora bien,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Luego,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Sin ir más lejos, como $\mathbf{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)} \hat{z}$, se tiene que

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

con $k = \omega/c$. Finalmente demostremos que $\mathbf{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)} \hat{z}$ cumple la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

Tenemos

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

Reemplazando, tenemos

$$-k^2 E_0 e^{i(kx-\omega t)} + k^2 E_0 e^{i(kx-\omega t)} = 0$$

Tomaremos el Gauge de Coulomb para demostrar que \mathbf{A} tendrá la misma forma. Si elegimos este Gauge, el potencial \mathbf{A} cumplirá la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

y los campos cumplirán

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

pero en esta situación $\Phi = 0$, luego

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Integrando con respecto al tiempo, obtenemos

$$\mathbf{A} = -\frac{ic}{\omega} E_0 e^{i(kx-\omega t)} \hat{z}$$

Finalmente, \mathbf{A} tendrá también una forma armónica.

- b) Encuentre una expresión para la ecuación de Helmholtz en términos de las funciones de Bessel.

Como tenemos un cilindro, usaremos coordenadas cilíndricas. Como demostramos en la parte (a), el potencial vector \mathbf{A} cumplirá una ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$$

Entonces, para cada coordenada de este potencial, se cumplirá

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2 A = 0$$

Ahora, si asumimos que $A(r, \phi, z) = k(r)e(\phi)m(z)$ y multiplicamos por $r^2k(r)e(\phi)m(z)$, tenemos

$$\frac{i}{k(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dk(r)}{dr} \right) + \frac{1}{e(\phi)} \frac{d^2 e(\phi)}{d\phi^2} + \frac{r^2}{m(z)} \frac{d^2 m(z)}{dz^2} + k^2 r^2 = 0$$

Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{e(\phi)} \frac{d^2 e(\phi)}{d\phi^2} &= -p^2 \\ \frac{1}{m(z)} \frac{d^2 m(z)}{dz^2} &= -s^2 \\ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dk(r)}{dr} \right) + \{(k^2 - s^2)r^2 - p^2\} k(r) &= 0 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son dos partes oscilatorias y la parte radial en función de las funciones de Bessel. Luego, definiendo $c_n^2 = k^2 - s^2$, podemos escribir

$$A(r, \phi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{n,m} J_m(c_n r) + B_{n,m} N_m(c_n r)] [C_n \cos(nz) + D_n \sin(nz)] e^{im\phi}$$

c) Asuma que tenemos esta onda incidente en forma asintótica sobre nuestro cilindro y que A y E tienen solo componentes en la dirección z . Por lo tanto $\lim_{r \rightarrow \infty} A \sim e^{ikx} \hat{z}$. ¿Cuál sería el campo E en todo el espacio que satisface la ecuación de onda o de Helmholtz? Esto es parecido a los problemas de funciones de Green vistos antes.

Dada la simetría del problema, usaremos coordenadas polares. Dada las características del conductor, el campo eléctrico y el potencial vector deben anularse en su interior. Luego, considerando la condición de potencial asintótico, podemos decir que el potencial tendrá sólo componente \hat{z} . Luego,

$$\mathbf{A} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_m J_m(kr) + B_m N_m(kr)] e^{im\phi} \hat{z} & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

Ahora, de la condición de potencial asintótico, se tiene que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathbf{A} \sim e^{ikx} \hat{z} = e^{ikr \cos \phi} \hat{z}$$

Luego, recordando que

$$e^{ikr \cos \phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) e^{im\phi}$$

Se tiene que cuando $r \rightarrow \infty$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) e^{im\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_m J_m(kr) + B_m N_m(kr)] e^{im\phi} \Rightarrow A_m = i^m, B_m = 0 \quad \forall m$$

Así

$$\mathbf{A} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(kr) e^{im\phi} \hat{z}$$

Ahora, se debe cumplir además que cuando $r = a$

$$i^m J_m(ka) = 0 \Rightarrow ka = x_{m,n} \Rightarrow k = \frac{x_{m,n}}{a}$$

donde $x_{m,n}$ es el n -ésimo cero de la función J_m de Bessel. Entonces, agregando la parte temporal

$$\mathbf{A} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i^m J_m \left(\frac{x_{m,n}}{a} r \right) e^{i(m\phi - \omega t)} \hat{z} & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

Finalmente, usando

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Se obtiene

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{\omega}{c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i^{m+1} J_m \left(\frac{x_{m,n}}{a} r \right) e^{i(m\phi - \omega t)} \hat{z} & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

13.99 Potencia irradiada por un cascarón esférico

Considere un cascarón esférico de radio R y densidad de carga superficial σ que rota sobre su eje de simetría con frecuencia angular $\Omega = \Omega_0 e^{-i\omega t}$. Encuentre el potencial vector y muestre que la potencia irradiada cae como $\frac{1}{r^2}$ para $r \gg R$.

Solución:

El potencial vector cumple con la ecuación

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

donde la densidad de corriente viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \rho \vec{v} \\ &= [\sigma \delta(r - R)] R \sin(\theta) \vec{\Omega} \\ &= \delta(r - R) R \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \hat{\phi} \end{aligned}$$

Suponiendo $\vec{A} = A(r, \theta) e^{-i\omega t} \hat{\phi}$, se escribe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(r, \theta) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-i\omega A(r, \theta) e^{-i\omega t} \hat{\phi} \right] \\ &= -\omega^2 A(r, \theta) e^{-i\omega t} \hat{\phi} \\ &= -\omega^2 \vec{A}(r, \theta) \end{aligned}$$

obteniéndose la ecuación de Helmholtz inhomogénea

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \delta(r - R) R \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \hat{\phi}$$

donde $k = \omega/c$. Desarrollando el Laplaciano en coordenadas esféricas se tiene que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] + \left[k^2 - \frac{\omega^2}{r^2 \sin^2(\theta)} \right] A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r - R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

o, factorizando,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] - \frac{\omega^2}{\sin^2(\theta)} A \right) + k^2 A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r - R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

Ahora, la ecuación diferencial de Legendre modificada es

$$(1 - x^2) \frac{d^2 A}{dx^2} - 2x \frac{dA}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] A = 0$$

donde el cambio de variable $x = \cos(\theta)$ permite escribir

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^{-1} \frac{dA}{d\theta} = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta}$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dA}{dx} \right) = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{dx} \left(\frac{dA}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dA}{dx} \right) = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right]$$

luego se obtiene la ecuación

$$\frac{[1 - \cos^2(\theta)]}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] + \frac{2 \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} + l(l+1)A - \frac{m^2}{1 - \cos^2(\theta)} A = 0$$

o, lo que es equivalente,

$$\sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] + \frac{2 \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A = -l(l+1)A$$

Desarrollando esta expresión se escribe

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \left(\sin^2(\theta) \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] + 2 \cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A = -l(l+1)A$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \left[-\cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} + \sin(\theta) \frac{d^2A}{d\theta^2} + 2 \cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A = -l(l+1)A$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \left[\sin(\theta) \frac{d^2A}{d\theta^2} + \cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A = -l(l+1)A$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A = -l(l+1)A$$

ecuación que es igual al término entre paréntesis en la ecuación de Helmholtz inhomogénea (con $m^2 = \omega^2$), así

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} A + k^2 A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

pero escribiendo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA) \right] \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[A + r \frac{\partial A}{\partial r} \right] \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) \\
&= \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \\
&= \frac{1}{r^2} \left[2r \frac{\partial A}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right] \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right),
\end{aligned}$$

la ecuación queda

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) - \frac{l(l+1)}{r^2} A + k^2 A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

Puesto que \vec{A} cumple con la ecuación de Legendre asociada, se propone

$$\vec{A}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f(r) P_l^m[\cos(\theta)] \hat{\phi}$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{P_l^m[\cos(\theta)]}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] f(r) P_l^m[\cos(\theta)] = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

deduciéndose que $l = m = 1$, luego $P_1^1[\cos(\theta)] = -\sin(\theta)$ y se escribe

$$-\frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{2f}{r^2} \sin(\theta) - k^2 f \sin(\theta) = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) - \frac{2f}{r^2} + k^2 f = \frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0$$

En $r \neq R$, la ecuación queda

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) - \frac{2f}{r^2} + k^2 f = 0$$

y haciendo el cambio de variable $f(r) = F(r)/\sqrt{r}$ se obtiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sqrt{r} F) + \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) \frac{F}{\sqrt{r}} = 0$$

Desarrollando, se escribe

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} F) \right] + \sqrt{r} \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) F \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{F}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right] + \sqrt{r} \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) F \\ &= -\frac{F}{4r^{3/2}} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \sqrt{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \sqrt{r} k^2 F - \frac{2F}{r^{3/2}} \\ &= \sqrt{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(\sqrt{r} k^2 - \frac{9}{4r^{3/2}} \right) F \\ &= r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + r \frac{\partial F}{\partial r} + \left[r^2 k^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] F \end{aligned}$$

la cual corresponde a una función de Hankel esférica con solución

$$F(r) = \begin{cases} A_0 \left[h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr) \right] & \text{si } r < R \\ B_0 h_{(3/2)}^{(1)}(kr) & \text{si } r > R \end{cases}$$

escribiéndose el potencial vector

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = -\frac{F(r)}{\sqrt{r}} \sin(\theta) \hat{\phi}$$

Las funciones de Hankel esféricas tienen la forma

$$h_{3/2}^{(1)}(kr) = j_{3/2}^{(1)}(kr) + iy_{3/2}^{(1)}(kr) \quad h_{3/2}^{(2)}(kr) = j_{3/2}^{(2)}(kr) - iy_{3/2}^{(2)}(kr)$$

luego es importante destacar que la solución en el interior $r < R$ es una suma de funciones de Hankel esféricas de manera que se cumpla

$$\left[iy_{3/2}^{(1)}(kr) - iy_{3/2}^{(2)}(kr) \right] \sim 0,$$

puesto que las funciones de Neumann esféricas o $y_{3/2}^{(2)}(kr)$, divergen en el origen $r = 0$ (no puede hacerse directamente cero la función de Neumann esférica, puesto que implica anular $A_0 = 0$ y no existiría solución en $r <$

R , lo cual no es cierto). La elección de $h_{3/2}^{(1)}(kr)$ en el exterior $r > R$ no es arbitraria, puesto que implica una radiación hacia el infinito, aunque el cálculo sí es el mismo para cualquiera de las dos funciones de Hankel esféricas, en caso de haberse escogido $h_{3/2}^{(2)}(kr)$ para $r > R$ (lo cual no es problema en la matemática, pero sí en la interpretación física). De la condición de continuidad en el campo \vec{B} se tiene que

$$\left(\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}} \right) \cdot \hat{n} = 0,$$

pero $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, luego se escribe (usando que \vec{A} solo tiene dirección en $\hat{\phi}$)

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} [A_\phi \sin(\theta)] - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} [r A_\phi] \right) \hat{\theta} \\ &= \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\phi \sin(\theta)] \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_\phi] \hat{\theta} \end{aligned}$$

y, puesto que solo sobrevive la componente paralela, se obtiene por lo que la constante B_0 será

$$B_0 = A_0 \left[\frac{h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \right]$$

y la solución queda

$$F(r) = \begin{cases} A_0 \left[h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr) \right] & \text{si } r < R \\ A_0 \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] \frac{h_{3/2}^{(1)}(kr)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} & \text{si } r > R \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$F(r) = A_0 \left[h_{3/2}^{(1)}(kr_<) + h_{3/2}^{(2)}(kr_<) \right] \frac{h_{3/2}^{(1)}(kr_>)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)}$$

donde $r_< = \min(r, R)$ y $r_> = \max(r, R)$. De la discontinuidad del campo en $r = R$ (notar que desaparece la delta de Dirac en la densidad de corriente),

$$\left(\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}} \right) \times \hat{n} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

y usando que

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\phi \sin(\theta)] \Big|_{r=R} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_\phi] \Big|_{r=R} \hat{\theta}$$

se obtiene el campo externo

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{out}} &= - \frac{F_{\text{out}}}{r^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2(\theta)] \Big|_{r=R} \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} F_{\text{out}}) \Big|_{r=R} \hat{\theta} \\ &= - \frac{2A_0}{R^{3/2}} \cos(\theta) \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0}{R} \sin(\theta) \left[\frac{\bar{H}_{3/2}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} h_{3/2}^{(1)}(kr) \right] \Big|_{r=R} \hat{\theta}, \end{aligned}$$

donde, por simplicidad, se usa

$$\bar{H}_{3/2}(kR) = \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial [r^{-1/2} F_{\text{in}} \sin^2(\theta)]}{\partial \theta} \Big|_{r=R} - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial [r^{-1/2} F_{\text{out}} \sin^2(\theta)]}{\partial \theta} \Big|_{r=R} &= 0 \\ \frac{F_{\text{in}}}{R^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial [\sin^2(\theta)]}{\partial \theta} - \frac{F_{\text{out}}}{R^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial [\sin^2(\theta)]}{\partial \theta} &= 0 \\ F_{\text{in}} - F_{\text{out}} &= 0 \\ A_0 \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] - B_0 h_{3/2}^{(1)}(kR) &= 0 \end{aligned}$$

Desarrollando la derivada se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{out}} &= - \frac{2A_0 \cos(\theta)}{R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0 \sin(\theta)}{2R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R}} \frac{\bar{H}_{3/2}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) \right]' \hat{\theta} \\ &= \frac{A_0}{R^{3/2}} \left(-2 \cos(\theta) \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{2} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + kR \sin(\theta) \frac{\bar{H}_{3/2}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \left[h_{3/2}^{(1)}(kR) \right]' \hat{\theta} \right) \end{aligned}$$

Análogamente, para el campo interno se tiene

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{in} &= -\frac{F_{in}}{r^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2(\theta)] \Big|_{r=R} \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} F_{in}) \Big|_{r=R} \hat{\theta} \\
&= -\frac{2A_0 \cos(\theta)}{R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0 \sin(\theta)}{R} \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{r} \bar{H}_{3/2}(kr)] \Big|_{r=R} \hat{\theta} \\
&= -\frac{2A_0 \cos(\theta)}{R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0 \sin(\theta)}{2R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R}} \bar{H}'_{3/2}(kR) \hat{\theta} \\
&= \frac{A_0}{R^{3/2}} \left[-2 \cos(\theta) \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{2} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + kR \sin(\theta) \bar{H}'_{3/2}(kR) \hat{\theta} \right]
\end{aligned}$$

y reemplazando ambos campos en la condición de discontinuidad se obtiene

$$\begin{aligned}
(\vec{B}_{out} - \vec{B}_{in}) \times \hat{n} &= \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R}} \left[\left([h_{3/2}^{(1)}(kR)]' + [h_{3/2}^{(2)}(kR)]' \right) - \frac{[h_{3/2}^{(1)}(kR)]'}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \right. \\
&\quad \left. = \frac{(h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR))}{\sqrt{R} h_{3/2}^{(1)}(kR)} [h_{3/2}^{(1)}(kR) h_{3/2}^{(2)}(kR)' - h_{3/2}^{(1)}(kR)' h_{3/2}^{(2)}(kR)] \right] \\
&= \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R} h_{3/2}^{(1)}(kR)} W[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]
\end{aligned}$$

con W el Wronskiano de las funciones de Hankel esféricas. Se tiene entonces que

$$\frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R} h_{3/2}^{(1)}(kR)} W[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)] = -\frac{4\pi}{c} R \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta)$$

por lo que la constante será

$$A_0 = -\frac{4\pi R^{3/2} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} h_{3/2}^{(1)}(kR)}{\omega W[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]}$$

luego la función queda

$$F_<(r) = -\frac{4\pi R^{3/2} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} h_{3/2}^{(1)}(kR)}{\omega W[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]} [h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr)],$$

$$F_>(r) = -\frac{4\pi R^{3/2} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} h_{3/2}^{(1)}(kr)}{\omega W \left[h_{3/2}^{(1)}(kr), h_{3/2}^{(2)}(kr) \right]} \left[h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr) \right]$$

y el potencial vector será

$$\vec{A}_<(r) = -\frac{4\pi}{\omega} \sqrt{\frac{R^3}{r}} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \left(\frac{h_{3/2}^{(1)}(kr) \left[h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr) \right]}{W \left[h_{3/2}^{(1)}(kr), h_{3/2}^{(2)}(kr) \right]} \right),$$

$$\vec{A}_>(r) = -\frac{4\pi}{\omega} \sqrt{\frac{R^3}{r}} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \left(\frac{h_{3/2}^{(1)}(kr) \left[h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr) \right]}{W \left[h_{3/2}^{(1)}(kr), h_{3/2}^{(2)}(kr) \right]} \right)$$

Puesto que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, si $r \gg R$, el término que domina el campo es

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial [\sin(\theta) A]}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A)}{\partial r} \hat{\theta} \sim r^{-3/2}$$

y usando el gauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ tal que $\Psi = 0$, el campo eléctrico queda

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Psi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \sim r^{-1/2}$$

Ahora, la potencia radiada viene dada por la expresión

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$$

y centrándose en la magnitud,

$$S \simeq \frac{1}{r^{1/2}} \frac{1}{r^{3/2}} = \frac{1}{r^2}$$

luego la potencia cae como r^{-2} para $r \gg R$.

13.100 Sábana infinita

Supongamos que tenemos una sábana infinita con una densidad de carga σ en el plano $z = 0$.

- a) ¿Cuál es el campo eléctrico para el caso electroestático?
- b) Suponga que se mueve la sábana como $x = \Delta e^{i\omega t}$, ¿Qué campos se espera que se generen? ¿En qué dirección?
- c) Demuestre que el campo eléctrico satisface

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \alpha E = b\delta(z).$$

Encuentre a y b .

d) ¿Cuáles son las soluciones para $z > 0$ y $z < 0$? ¿Cuál es la solución final para los campos?

e) Calcule el vector de Poynting, ¿Qué causa el input de energía? Demuestre que la energía radiada es la misma que el input de energía.

Solución:

a) Por simetría respecto al plano $x - y$ (ver Figura 13.100), el campo eléctrico debiese solo tener componente en la dirección \hat{z} , luego de la ley de Gauss se escribe

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi \int_{\partial S} \rho dV,$$

donde se escoge un cilindro virtual de área basal A para el cálculo del flujo a través del plano y y donde la integral del lado derecho corresponde a la carga encerrada en el volumen.

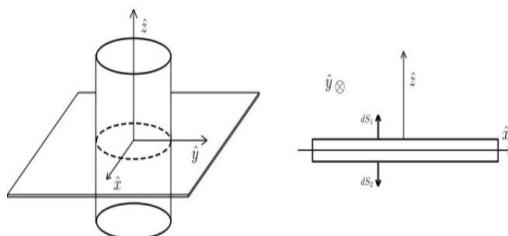


Figure 92: Cilindro virtual para calcular el flujo (izquierda) y el plano infinito visto a la misma altura del plano $x - y$ (derecha).

Puesto que el manto del cilindro no contribuye al campo eléctrico debido a que el vector normal a la superficie es perpendicular a la dirección del flujo, se escribe

$$2 \int_{\text{tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi Q$$

y, considerando que $\vec{E} = E(z)\hat{z}$, se obtiene

$$E(z) \int_{\text{tapas}} da = 2\pi Q$$

La integral del lado izquierdo corresponde al área de las tapas A , mientras que de la definición de densidad de carga superficial

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

se deduce el campo eléctrico

$$\vec{E}(z) = 2\pi\sigma\hat{z}$$

pero, notando que en realidad se tienen dos regiones ($z < 0$ y $z > 0$), el campo eléctrico viene dado por la expresión

$$\vec{E} = 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z)\hat{z}$$

b) La oscilación $x = \Delta e^{i\omega t}$ genera un campo eléctrico (dependiente de z) en la dirección \hat{x} , luego el campo magnético tendrá dirección \hat{y} y se suponen los campos

$$\vec{E}(z, t) = E(z)e^{i\omega t}\hat{x} \quad \vec{B}(z, t) = B(z)e^{i\omega t}\hat{y}$$

De la ley de Faraday se escribe

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times \vec{E} \\ &= \frac{\partial E}{\partial z} e^{i\omega t} \hat{y} \end{aligned}$$

y, usando que $k = \omega/c$, se concluyen los campos

$$\vec{E}(z, t) = E(z)e^{i\omega t}\hat{x} \quad \vec{B}(z, t) = \frac{i}{k} \frac{\partial E}{\partial z} e^{i\omega t}\hat{y}$$

c) Al aplicar el rotor a la ley de Faraday se obtiene

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

y usando la ley de Ampère se escribe

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

De la identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

y usando la ley de Gauss en el vacío tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, se llega a la expresión

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right],$$

la cual, al desarrollar, se transforma en la ecuación de Helmholtz inhomogénea

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

Notando que

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

y que la densidad de corriente viene dada por

$$\vec{J} = \rho \dot{\vec{x}} = \sigma \delta(z) i\omega \Delta e^{i\omega t} \hat{x}$$

la ecuación de Helmholtz queda de la forma

$$e^{i\omega t} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \hat{x} + k^2 E e^{i\omega t} \hat{x} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} [\sigma i\omega \Delta e^{i\omega t}] \delta(z) \hat{x}$$

y desarrollando la derivada,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = -4\pi k^2 \sigma \Delta \delta(z)$$

identificándose $a = k^2$ y $b = -4\pi k^2 \sigma \Delta$.

d) Para $z \neq 0$, la ecuación de Helmholtz homogénea tiene solución

$$E(z, t) = \begin{cases} Ae^{-ikz} + Ce^{ikz} & \text{si } z < 0 \\ De^{-ikz} + Fe^{ikz} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

pero se sabe que

$$\vec{E}(z, t) = E(z) e^{i\omega t} \hat{x},$$

luego la onda que sobrevive es la componente en la cual la onda se propaga hacia afuera de la sábana, es decir, $A = F = 0$. Ahora, por continuidad de la solución en $z = 0$, se deduce que $C = D$, por lo que

$$E(z, t) = C e^{-ik|z|}$$

Integrando la discontinuidad en $z = 0$ se escribe

$$\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z) dz + k^2 \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} E(z) dz = -4\pi k^2 \sigma \Delta \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \delta(z) dz$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedades de la delta de Dirac, luego

$$\left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=0} = -4\pi k^2 \sigma \Delta$$

y reemplazando la solución para el campo eléctrico,

$$\begin{aligned} -Cik e^{-ikz} \Big|_{z=0} - Cik e^{ikz} \Big|_{z=0} &= -4\pi k^2 \sigma \Delta \\ -2Cik &= -4\pi k^2 \sigma \Delta \\ C &= -2\pi ik \sigma \Delta \end{aligned}$$

concluyéndose el campo eléctrico

$$\vec{E}(z, t) = -2\pi ik \sigma \Delta e^{i(\omega t - k|z|)} \hat{x}$$

y el campo magnético

$$\begin{aligned} \vec{B}(z, t) &= \frac{i}{k} \frac{\partial E}{\partial z} e^{i\omega t} \hat{y} \\ &= \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} [-2\pi ik \sigma \Delta e^{-ik|z|}] e^{i\omega t} \hat{y} \\ &= 2\pi \sigma \Delta \frac{\partial}{\partial z} e^{-ik|z|} e^{i\omega t} \hat{y} \\ &= -2\pi ik \sigma \Delta e^{i(\omega t - k|z|)} \operatorname{sgn}(z) \hat{y} \end{aligned}$$

e) Puesto que no existe polarización, el teorema de Poynting se escribe de la forma

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V (U_e - U_m) dV = \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A} + \int_V \vec{J}^* \cdot \vec{E} dV$$

donde se tiene que

$$U_e = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}(z, t)|^2 \quad U_m = \frac{1}{8\pi} |\vec{B}(z, t)|^2 \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}(z, t) \times \vec{B}^*(z, t)$$

Puesto que para el campo eléctrico

$$\begin{aligned} |\vec{E}(z, t)|^2 &= |-2\pi ik \sigma \Delta e^{i(\omega t - k|z|)} \hat{x}|^2 \\ &= 4\pi^2 k^2 \sigma^2 \Delta^2 \end{aligned}$$

y para el campo magnético

$$\begin{aligned} |\vec{B}(z, t)|^2 &= \left| -2\pi i k \sigma \Delta e^{i(\omega t - k|z|)} \operatorname{sgn}(z) \hat{y} \right|^2 \\ &= 4\pi^2 k^2 \sigma^2 \Delta^2 \end{aligned}$$

se deduce que

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V (U_e - U_m) dV = 0.$$

Por otro lado, el vector de Poynting viene dado por

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}^* \\ &= \frac{c}{4\pi} \left[-2\pi i k \sigma \Delta e^{i(\omega t - k|z|)} \hat{x} \right] \times \left[2\pi i k \sigma \Delta e^{-i(\omega t - k|z|)} \operatorname{sgn}(z) \hat{y} \right] \\ &= \frac{c}{4\pi} \left[-4\pi^2 i^2 k^2 \sigma^2 \Delta^2 \operatorname{sgn}(z) \right] \hat{x} \times \hat{y} \\ &= \pi c k^2 \sigma^2 \Delta^2 \operatorname{sgn}(z) \hat{z} \end{aligned}$$

quedando el teorema de Poynting

$$\oint_{\partial V} \pi c k^2 \sigma^2 \Delta^2 \operatorname{sgn}(z) dA + \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = 0$$

Finalmente, integrando sobre un cilindro de largo L centrado en $z = 0$, con bases de área A y paralelas a la dirección \hat{z} , se obtiene

$$\begin{aligned} \int_V \vec{J}^* \cdot \vec{E} dV &= \int_V \left[-\sigma \delta(z) i \omega \Delta e^{-i \omega t} \hat{x} \right] \cdot \left[-2\pi i k \sigma \Delta e^{i(\omega t - k|z|)} \hat{x} \right] dV \\ &= -2\pi \omega k \sigma^2 \Delta^2 \int_V e^{-ik|z|} \delta(z) d^3 x \\ &= -2\pi \omega k \sigma^2 \Delta^2 A \end{aligned}$$

y para la integral del vector de Poynting,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A} &= \pi c k^2 \sigma^2 \Delta^2 \left[\oint \operatorname{sgn} \left(\frac{L}{2} \right) dA + \oint -\operatorname{sgn} \left(-\frac{L}{2} \right) dA \right] \\ &= \pi \omega k \sigma^2 \Delta^2 [2 \oint dA] \\ &= 2\pi \omega k \sigma^2 \Delta^2 A \end{aligned}$$

obteniéndose, al reemplazar en el teorema de Poynting, que

$$\oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A} + \int_V \vec{J}^* \cdot \vec{E} dV = 2\pi\omega k\sigma^2 \Delta^2 A - 2\pi\omega k\sigma^2 \Delta^2 A = 0$$

demostrándose que la energía irradiada es igual al input y que la energía se conserva.

13.101 Circuito de corriente circular

Un circuito de corriente circular de radio a acarrea una corriente I . Este es colocado en el plano $x - y$ con su centro en el origen.

a) Muestre que la única componente del potencial vector distinta de cero es la componente ϕ . Demuestre que A_ϕ se puede escribir de la siguiente forma

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk$$

donde $\rho_< = \min(\rho, a)$ y $\rho_> = \max(\rho, a)$.

b) Muestre que una forma alternativa de escribir A_ϕ es

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk$$

c) Encuentre expresiones integrales para las componentes de la inducción magnética, utilizando los resultados obtenidos en a) y b). Calcule explícitamente las componentes de B en el eje \hat{z} , desarrollando las integrales necesarias. Hint: use que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{I_1(k\rho)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J_1(k\rho)}{\rho} = \frac{k}{2} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(kz) K_0(k\rho) dk = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Solución:

a) De las series de Fourier se escribe la expansión en coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \cos[k(z - z')] \left[\frac{I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) \right] dk$$

y usando que la densidad de corriente es

$$\begin{aligned} \vec{J} &= I\delta(z')\delta(\rho' - a)\phi' \\ &= I\delta(z')\delta(\rho' - a)[- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \end{aligned}$$

se obtiene el potencial vector

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}}{|r - r'|} d^3 \mathbf{r} \\
&= \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{I \delta(z') \delta(\rho' - a)}{|r - r'|} [-\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}] \rho' dz' d\phi' d\rho' \\
&= \frac{4I}{\pi c} \int_0^\infty \rho' \delta(\rho' - a) d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty \cos[k(z - z')] \left\{ \frac{I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>)}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{m=1}^\infty \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) dk \right\} \right] [-\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}] \delta(z') dz' \\
&= \frac{4I}{\pi c} \int_0^\infty \rho' \delta(\rho' - a) d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty \cos[k(z - z')] \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) \right. \\
&\quad \left. K_m(k\rho_>) dk \right] [-\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}] \delta(z') dz',
\end{aligned}$$

donde pasó a omitirse la suma de índice m y se usó que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos[k(z - z')] I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) \sin(\phi') d\phi' &= 0 \\
\int_0^{2\pi} \cos[k(z - z')] I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) \cos(\phi') d\phi' &= 0
\end{aligned}$$

es decir, la integral sobre el ángulo ϕ' del término $m = 0$ en la expansión por series de Fourier es siempre cero. Se tiene entonces para la componente \hat{x} que

$$\begin{aligned}
A_x &= -\frac{4Ia\hat{x}}{\pi c} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \cos[k(z - z')] \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) dk \sin(\phi') \delta(z') dz' \\
&= -\frac{4Ia\hat{x}}{c} \int_0^\infty \cos(kz) \sin(\phi) \delta_{m,1} I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) dk
\end{aligned}$$

donde se usa que

$$\int_0^{2\pi} \cos[m(\phi - \phi')] \sin(\phi') d\phi' = \pi \sin(\phi) \delta_{m,1}$$

luego $A_x \neq 0$ solo para $m = 1$, por lo que se escribe

$$A_x(\rho, \phi, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk [-\sin(\phi) \hat{x}]$$

De forma análoga se deduce que

$$A_y(\rho, \phi, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk [\cos(\phi)\hat{y}],$$

pudiendo derivarse así la expresión para el potencial vector

$$\begin{aligned} \vec{A}(\rho, \phi, z) &= A_x(\rho, \phi, z) + A_y(\rho, \phi, z) \\ &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk [-\sin(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y}] \\ &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk \hat{\phi} \end{aligned}$$

es decir, la única componente que sobrevive es en la dirección $\hat{\phi}$, dada por

$$A_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk$$

b) Otra forma válida de expandir la función de Green en coordenadas cilíndricas (ver Problema 3.14 Jackson) es

$$\frac{1}{|r - r'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty e^{im(\phi - \phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k(z_> - z_<)}$$

y usando que la densidad de corriente es

$$\begin{aligned} \vec{J} &= I\delta(z')\delta(\rho' - a)\phi' \\ &= I\delta(z')\delta(\rho' - a)[- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \end{aligned}$$

se obtiene el potencial vector

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}}{|r - r'|} d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{I\delta(z')\delta(\rho' - a)}{|r - r'|} [- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \rho' dz' d\phi' d\rho' \\ &= \frac{I}{c} \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty e^{im(\phi - \phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k(z_> - z_<)} \right] \delta(z') \delta(\rho' - a) \\ &\quad [- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] dz' \end{aligned}$$

donde pasó a omitirse la suma de índice m . Se tiene entonces para la componente \hat{x} que

$$\begin{aligned}
A_x &= -\frac{Ia\hat{x}}{c} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(ka) e^{-k(z>-z<)} dk \sin(\phi') \delta(z') dz' \\
&= -\frac{Ia\hat{x}}{c} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\infty} \left[J_0(k\rho) J_0(ka) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi-\phi')] J_m(ka) J_m(k\rho) \right] \sin(\phi') e^{-k|z|} dk \\
&= -\frac{2\pi Ia\hat{x}}{c} \int_0^{\infty} \sin(\phi) \delta_{m,1} J_m(ka) J_m(k, \rho) e^{-k|z|} dk \\
&= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(ka) dk [-\sin(\phi)\hat{x}]
\end{aligned}$$

en la cual se usó que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{-k|z|} J_0(k\rho) J_0(ka) \sin(\phi') d\phi' &= 0 \\
\int_0^{2\pi} \cos[m(\phi-\phi')] \sin(\phi') d\phi' &= \pi \sin(\phi) \delta_{m,1}
\end{aligned}$$

y los resultados para $z > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(z>-z<)} \delta(z') dz' &= \int_{-\infty}^z e^{-k(z-z')} \delta(z') dz' + \int_z^{\infty} e^{-k(z'-z)} \delta(z') dz' \\
&= e^{-k(z-0)} + 0 \\
&= e^{-kz}
\end{aligned}$$

y para $z < 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(z>-z<)} \delta(z') dz' &= \int_{-\infty}^z e^{-k(z-z')} \delta(z') dz' + \int_z^{\infty} e^{-k(z'-z)} \delta(z') dz' \\
&= 0 + e^{-k(0-z)} \\
&= e^{kz}
\end{aligned}$$

De forma análoga y mediante el resultado

$$\int_0^{2\pi} e^{-k|z|} J_0(k\rho) J_0(ka) \cos(\phi') d\phi' = 0$$

se llega, para la componente \hat{y} del potencial vector, a que

$$A_y(\rho, \phi, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk [\cos(\phi)\hat{y}]$$

pudiendo derivarse así la expresión para el potencial vector

$$\begin{aligned}\vec{A}(\rho, \phi, z) &= A_x(\rho, \phi, z) + A_y(\rho, \phi, z) \\ &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk [-\sin(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y}] \\ &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk \hat{\phi}\end{aligned}$$

es decir, la única componente que sobrevive es en la dirección $\hat{\phi}$, dada por

$$A_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk$$

c) Tomando el rotor para la expresión derivada en a) con $\rho < a$ se obtiene y, puesto que solo es de interés el campo magnético en la dirección \hat{z} , haciendo tender $\rho \rightarrow 0$ y usando el hint del enunciado, se obtiene

$$\begin{aligned}B_\rho &= \frac{2Ia}{c} \int_0^\infty k^2 \sin(kz) K_1(ka) dk, \\ B_\phi &= 0, \\ B_z &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty k \cos(kz) K_1(ka) dk.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_\rho &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{4Ia}{\rho c} \int_0^\infty k \sin(kz) I_1(k\rho) K_1(ka) dk, \\ B_\phi &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ &= 0, \\ B_z &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left(A_\phi + \rho \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho) K_1(ka) dk + \rho \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I'_1(k\rho) K_1(ka) dk \right] \\ &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) \frac{I_1(k\rho)}{\rho} K_1(ka) dk + \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \left(\frac{k}{2} \right) \cos(kz) [I_0(k\rho) + I_2(k\rho)] K_1(ka) dk\end{aligned}$$

Para encontrar B_z , integrando por partes y usando el hint del enunciado se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty k \cos(kz) K_1(ka) dk &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \sin(kz) K_1(ka) dk \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \sin(kz) \left[-\frac{1}{a} \frac{dK_0(ka)}{dk} \right] dk \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{a} \sin(kz) K_0(ka) \Big|_0^\infty + \frac{z}{a} \int_0^\infty \cos(kz) K_0(ka) dk \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z}{a} \left(\frac{2}{\pi \sqrt{a^2 + z^2}} \right) \right] \\
&= \frac{a\pi}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

luego el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty k \cos(kz) K_1(ka) dk \\
&= \frac{2\pi Ia^2}{c(a^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

De forma análoga, tomando el rotor de la expresión derivada en b) se obtiene

y, puesto que solo es de interés el campo magnético en la dirección \hat{z} , haciendo tender $\rho \rightarrow 0$ y usando el hint del enunciado, se obtiene

$$\begin{aligned}
B_\rho &= \frac{\pi Ia}{c} \int_0^\infty k^2 e^{-k|z|} J_1(ka) \operatorname{sgn}(z) dk \\
B_\phi &= 0 \\
B_z &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty k e^{-k|z|} J_1(ka) dk
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_\rho &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \\
&= \frac{2\pi I a}{\rho c} \int_0^\infty k \operatorname{sgn}(kz) e^{-k|z|} J_1(k\rho) J_1(ka) dk \\
B_\phi &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\
&= 0, \\
B_z &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \\
&= \frac{1}{\rho} \left(A_\phi + \rho \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \left[\frac{2\pi I a}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(k\rho) J_1(ka) dk + \rho \frac{2\pi I a}{c} \int_0^\infty k e^{-k|z|} J'_1(k\rho) J_1(ka) dk \right] \\
&= \frac{2\pi I a}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} \frac{J_1(k\rho)}{\rho} J_1(ka) dk + \frac{2\pi I a}{c} \int_0^\infty \left(\frac{k}{2} \right) e^{-k|z|} [J_0(k\rho) - J_2(k\rho)] J_1(ka) dk
\end{aligned}$$

Para encontrar B_z , integrando por partes y usando el hint del enunciado se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty k e^{-k|z|} J_1(ka) dk &= -\operatorname{sgn}(z) \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty e^{-ik|z|} J_1(ka) dk \\
&= -\operatorname{sgn}(z) \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty e^{-k|z|} \left[-\frac{1}{a} \frac{dJ_0(ka)}{dk} \right] dk \\
&= -\operatorname{sgn}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{a} e^{-k|z|} J_0(ka) \Big|_0^\infty - \frac{|z|}{a} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(ka) dk \right] \\
&= -\operatorname{sgn}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{a} - \frac{|z|}{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \\
&= \operatorname{sgn}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{|z|}{a} \right] \sqrt{a^2 + z^2} \\
&= \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}},
\end{aligned}$$

luego el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{2\pi I a}{c} \int_0^\infty k e^{-k|z|} J_1(ka) dk \\
&= \frac{2\pi I a^2}{c (a^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

lo cual confirma que ambas expresiones para el potencial vector son equivalentes.

13.102 Fem producida por un circuito

Calcular la fem producida por un circuito.

Un elemento de alambre de largo orientado $d\vec{l}$ se mueve con velocidad \vec{u} en un campo magnético \vec{B} . Muestre que la fem producida por el movimiento está dada por

$$d\epsilon = \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

Solución:

Si se tiene un conductor moviéndose en un campo magnético uniforme, las cargas libres dentro del conductor sienten una atracción proporcional a $\vec{u} \times \vec{B}$, en particular, sienten un campo eléctrico efectivo

$$\vec{E}_{eff} = \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}$$

La fem sobre un circuito está dada por

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ &= -\frac{1}{c} \int_S \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right) \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

y reemplazando la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_{eff} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

se obtiene la expresión

$$\epsilon = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}_{eff}) \cdot d\vec{A}$$

Ahora, del teorema de Stokes se escribe

$$\begin{aligned}\epsilon &= \oint_{\partial S} \vec{E}_{eff} \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{\partial S} \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

y puesto que no hay campo eléctrico externo, se concluye que

$$\epsilon = \oint_{\partial S} \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

Finalmente, tomando una diferencia infinitesimal, se llega a la expresión deseada

$$d\epsilon = \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

13.103 Fem producida por cascarón esférico

Un cascarón esférico conductor de radio a rota con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$ en un campo magnético uniforme descrito por $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Calcule la fem producida entre un polo y un punto en el círculo ecuatorial.

Solución:

En la superficie de la esfera, la velocidad de un elemento con carga dq está dada por

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \omega_0 \hat{z} \times a[\sin(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{y} + \cos(\theta) \hat{z}] \\ &= a\omega_0 [\sin(\theta) \cos(\phi) \hat{y} - \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{x}]\end{aligned}$$

y usando la expresión para la fem

$$\epsilon = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

con la curva parametrizada sobre la superficie

$$l(\theta) = a\hat{r} = a[\sin(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{y} + \cos(\theta) \hat{z}]$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \oint_0^{\pi/2} \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d[l(\theta)] \\
&= \oint_0^{\pi/2} \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot l'(\theta) d\theta \\
&= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} (\vec{e}_{\vec{u}} \times \hat{z}) \cdot [\cos(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + \cos(\theta) \sin(\phi) \hat{y} - \sin(\theta) \hat{z}] d\theta \\
&= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} [\sin(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{y}] \cdot [\cos(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + \cos(\theta) \sin(\phi) \hat{y}] d\theta \\
&= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} [\sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\phi) + \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^2(\phi)] d\theta \\
&= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \\
&= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{2c},
\end{aligned}$$

es decir, la fem producida por el cascarón esférico en rotación es

$$\epsilon = \frac{a^2 \omega_0 B_0}{2c}$$

13.104 Conservación de la carga

Demuestre que $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ si se cumple con la conservación de carga. ¿Qué condición debe cumplir k_α para que la onda plana $F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$ sea solución de esta ecuación? Demuestre ahora que la transformación de la frecuencia entre dos sistemas inerciales es

$$\omega' = \gamma \omega [1 - \beta \cos(\theta)]$$

donde θ es el ángulo entre la velocidad \vec{v} de la onda y k . Demuestre por último que

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[\cos(\theta) - \beta]}$$

donde θ' es el ángulo entre \vec{v} y k' . ¿Cómo pueden usarse estas expresiones para medir la velocidad (incluyendo dirección) de un objeto?

Solución:

Sea la métrica de Minkowski definida por

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tal que el producto punto entre dos cuadrvectores sea

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3.$$

El tensor electromagnético $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ permite resumir las ecuaciones de Maxwell en la expresión

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

donde, por definición,

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t \quad -\vec{\nabla} \right) \quad J^\nu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

Derivando la expresión original se escribe

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu J^\nu,$$

donde es inmediato que

$$\partial_\nu J^\nu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} c\rho - (-\partial_1 J^1) - (-\partial_2 J^2) - (-\partial_3 J^3) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

y reemplazando en la ecuación se tiene

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right)$$

Debido a que la carga se conserva, se tiene la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

luego se concluye que

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

De la definición para ∂_ν , es directo que

$$\partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t - \partial_1 \partial^1 - \partial_2 \partial^2 - \partial_3 \partial^3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

por lo que en realidad se tiene una ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial t^2} - \nabla^2 F^{\mu\nu} = 0$$

esto implica que k_α debe ser tal que $k_\alpha x^\alpha$ sea la fase de la onda. Esto es inmediato considerando que ambos son cuadrvectores de la forma

$$k_\alpha = \begin{pmatrix} \omega & -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix} \quad x^\alpha = (ct \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3)$$

luego se escribe

$$\begin{aligned} k_\alpha x^\alpha &= \omega t - (-k_1 x^1) - (-k_2 x^2) - (-k_3 x^3) \\ &= \vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t \end{aligned}$$

Para demostrar las relaciones del efecto Doppler relativista, sea el sistema de referencia S solidario a la onda electromagnética, donde $\vec{B} = 0$, luego se tiene

$$\vec{E} = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \hat{x}$$

donde el signo de la fase no tiene relevancia, puesto que solo indica la dirección de propagación de la onda. De igual manera (ver Figura 1), se tiene el número de onda

$$\vec{k} = (k_1, k_2, k_3) = \left[\frac{\omega}{c} \cos(\theta), \frac{\omega}{c} \sin(\theta), 0 \right]$$

por lo que la fase será

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \frac{\omega}{c} [x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] - \omega t$$

y usando las transformaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right), \\ x &= \gamma (x' + c\beta t'), \\ y &= y' \end{aligned}$$

se deduce que

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{\omega}{c} [x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] - \omega t \\
&= \frac{\omega}{c} [\gamma (x' + c\beta t') \cos(\theta) + y' \sin(\theta)] - \gamma \omega \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right) \\
&= \gamma \frac{\omega}{c} x' \cos(\theta) + \gamma \beta \omega t' \cos(\theta) + \frac{\omega}{c} y' \sin(\theta) - \gamma \omega t' - \gamma \beta \frac{\omega}{c} x' \\
&= \gamma \omega [\beta \cos(\theta) - 1] t' + \gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta] x' + \frac{\omega}{c} \sin(\theta) y'
\end{aligned}$$

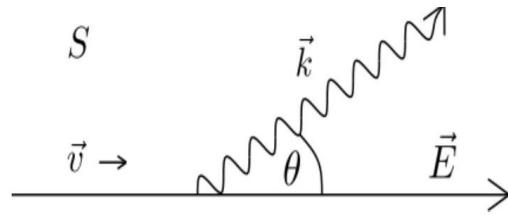


Figure 93: Esquema de la onda electromagnética en el sistema de referencia \$S\$.

Sea ahora un sistema de referencia \$S'\$, donde la fase adquiere la forma

$$\phi' = \frac{\omega'}{c} [x' \cos(\theta') + y' \sin(\theta')] - \omega' t'$$

puesto que para ser solución debe cumplirse que las fases en ambos sistemas de referencia sean la misma, es decir, \$\phi = \phi'\$, se obtiene

$\gamma \omega [\beta \cos(\theta) - 1] t' + \gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta] x' + \frac{\omega}{c} \sin(\theta) y' = \frac{\omega'}{c} [x' \cos(\theta') + y' \sin(\theta')] - \omega' t'$ Igualando por componentes se llega a las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\gamma \omega [\beta \cos(\theta) - 1] &= -\omega' \\
\gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta] &= \frac{\omega'}{c} \cos(\theta') \\
\frac{\omega}{c} \sin(\theta) &= \frac{\omega'}{c} \sin(\theta')
\end{aligned}$$

donde de la primera ecuación es directo que

$$\omega' = \gamma \omega [1 - \beta \cos(\theta)]$$

Reemplazando \$\omega'\$ en la segunda expresión se obtiene

$$\gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta] = \gamma \frac{\omega}{c} [1 - \beta \cos(\theta)] \cos(\theta')$$

luego se deduce que

$$\cos(\theta') = \frac{\cos(\theta) - \beta}{1 - \beta \cos(\theta)}.$$

De igual manera, reemplazar ω' en la tercera ecuación lleva a la relación

$$\frac{\omega}{c} \sin(\theta) = \gamma \frac{\omega}{c} [1 - \beta \cos(\theta)] \sin(\theta')$$

de lo que se deduce

$$\sin(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[1 - \beta \cos(\theta)]}$$

Usando las expresiones para $\cos(\theta')$ y $\sin(\theta')$, se concluye que

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')} = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[\cos(\theta) - \beta]}$$

Por último, de la ecuación para la frecuencia, al enviar una onda conocida y medir la onda reflejada, se obtienen los valores ω y ω' que permiten deducir la velocidad a partir del factor γ . Esta velocidad permite, reemplazando en la ecuación para los ángulos (que corresponde a la aberración del efecto Doppler relativista), obtener la dirección de la velocidad.

13.105 Lámina infinita relativista

Una lámina de carga que se extiende infinitamente tanto en los ejes x como y , tiene a una densidad de carga uniforme $\sigma > 0$, que está en reposo relativo al observador 1. La lámina está situada en $z = 0$ y se mueve en la dirección x con una rapidez v (relativista) en relación al observador 2 .

a) Transformando los campos desde el sistema de referencia del observador 1 al del 2 , encuentre los campos \vec{E} y \vec{B} en la región $z > 0$ del sistema de referencia del observador 2 .

b) Demuestre que los campos son los mismos que aquellos calculados, a partir de la transformación de la densidad de corriente desde el sistema del observador 1 al del 2, y luego utilizando las leyes de Gauss y Ampère para encontrar los campos en el sistema de referencia del observador 2.

c) Una carga $q > 0$ está inicialmente en reposo en el punto $(x, y, z) = (0, 0, d)$ en el sistema de referencia del observador 1 . Describa cualitativamente el movimiento posterior de la partícula desde el punto de vista de ambos observadores.

Solución:

a) Para el observador 1 , por simetría respecto al plano $x - y$ (ver Figura 2), el campo eléctrico debiese solo tener componente en la dirección \hat{z} , luego de la ley de Gauss se escribe

$$\int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = 4\pi \int_{\partial S} \rho dV,$$

donde se escoge un cilindro virtual de área basal A para el cálculo del flujo a través del plano y y donde la integral del lado derecho corresponde a la carga encerrada en el volumen.

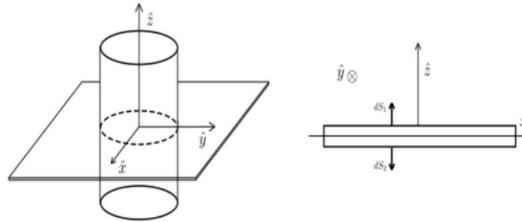


Figure 94: Cilindro virtual para calcular el flujo (izquierda) y el plano infinito visto a la misma altura del plano $x - y$ (derecha).

Puesto que el manto del cilindro no contribuye al campo eléctrico debido a que el vector normal a la superficie es perpendicular a la dirección del flujo, se escribe

$$2 \int_{\text{tapas}} \vec{E}_1 \cdot \vec{a} = 4\pi Q$$

y considerando que $\vec{E}_1 = E_1(z)\hat{z}$, $\sigma = Q/A$ y que $z > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} 2 \int E_1(z) da &= 4\pi \sigma A \\ 2AE_1(z) &= 4\pi \sigma A \\ E_1(z) &= 2\pi \sigma \end{aligned}$$

concluyéndose que en el sistema de referencia del observador 1

$$\vec{E}_1 = 2\pi \sigma \hat{z} \quad \vec{B}_1 = 0$$

La transformación de un tensor entre sistemas de referencia moviéndose con velocidad relativa v viene dada por

$$(A^{\mu\nu})' = L^{-1}(v) A^{\mu\nu} [L^{-1}(v)]^T = L(-v) A^{\mu\nu} [L(-v)]^T,$$

donde $L(v)$ es el boost relativista

$$L(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que cumple con la relación

$$L^{-1}(v) = \eta L^T \eta = L(-v).$$

Usando que el tensor $F^{\mu\nu}$ puede escribirse de la forma

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = 2\pi\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} (F^{\mu\nu})' &= L(-v) F^{\mu\nu} L^T (-v) \\ &= 2\pi\sigma \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde se usó que $\beta = v/c$ tal que

$$L(-v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo se obtiene

$$\begin{aligned}
(F^{\mu\nu})' &= 2\pi\sigma \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2\pi\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\pi\gamma\sigma \\ 0 & 0 & 0 & -2\pi\gamma\beta\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\pi\gamma\sigma & 2\pi\gamma\beta\sigma & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y, puesto que

$$(F^{\mu\nu})' = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix},$$

se identifican los campos en el sistema de referencia del observador 2

$$\vec{E}_2 = 2\pi\gamma\sigma\hat{z} \quad \vec{B}_2 = -2\pi\gamma\beta\sigma\hat{y}$$

b) La transformación de un cuadrvector para dos sistemas de referencia con velocidad relativa v está dada por la relación

$$(A^\mu)' = L(v)A^\mu$$

luego el cuadrvector de densidad de corriente

$$J^\alpha = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

transforma al sistema primado como

$$\begin{aligned}
(J^\alpha)' &= L(v)J^\alpha \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma c\rho - \gamma\beta J^1 \\ \gamma J^1 - \gamma\beta c\rho \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

esto significa que

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} J^1 \right) \quad (J^1)' = \gamma (J^1 - v\rho) \quad (J^2)' = J^2 \quad (J^3)' = J^3$$

Recordando que $\vec{J}_1 = 0$, puesto que el sistema está en reposo respecto al observador 1 , se tienen las transformaciones

$$\rho' = \gamma\rho \quad (J^1)' = -\gamma v\rho \quad (J^2)' = 0 \quad (J^3)' = 0$$

luego de la ley de Gauss se escribe

$$\begin{aligned}
2 \int_{\text{tapas}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} &= 4\pi \int_{\partial S} \rho' dV \\
2E_2 \int da &= 4\pi\gamma \int \rho dV \\
2AE_2 &= 4\pi\gamma\sigma A \\
E_2 &= 2\pi\gamma\sigma
\end{aligned}$$

y de la ley de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

donde se toma un camino rectangular tal que solo las aristas paralelas a la lámina contribuyan al campo (las laterales son perpendiculares a la lámina, luego no contribuyen al campo) y donde la integral del lado derecho representa la corriente encerrada por la curva, se obtiene

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{J}' \cdot d\vec{a}$$

$$B_2 \oint dl = -4\pi\gamma \left(\frac{v}{c}\right) \int \rho da$$

$$2LB_2 = -4\pi\gamma \left(\frac{v}{c}\right) \sigma L$$

$$B_2 = -2\pi\gamma\beta\sigma$$

concluyéndose que los campos para el observador 2 son

$$\vec{E}_2 = 2\pi\gamma\sigma\hat{z} \quad \vec{B}_2 = -2\pi\gamma\beta\sigma\hat{y}$$

c) Para una carga positiva cuya posición es solo en el eje z , en el sistema de referencia para el observador 1 (solidario a la lámina) se tiene que ésta acelerará en el eje z sin mayor complejidad a causa del campo eléctrico (no hay campo magnético en este sistema de referencia). Para el observador 2, se tiene que el campo magnético posee una componente en el eje y , la cual desviará a la partícula en dirección x (debido a la fuerza de Lorentz), al mismo tiempo que sigue acelerando en el eje z , ya que el campo eléctrico seguirá presente.

13.106 Partícula en un campo magnético

Sea una partícula de carga q y masa m que se mueve en un campo magnético uniforme B_0 . Encuentre la trayectoria de esta partícula en términos de la velocidad inicial perpendicular v_\perp al campo, la velocidad inicial paralela v_\parallel al campo, la fase inicial ϕ y la frecuencia ciclotrónica $\Omega_c = eB_0/mc$. Asumiendo que $\beta \ll 1$, encuentre los potenciales y los campos radiados en la aproximación de campo lejano para esta partícula. Si se tienen N partículas, con la misma masa y carga, encuentre $dP/d\Omega$. Asuma una distribución térmica definida por una temperatura T_\perp y T_\parallel con respecto al campo magnético tal que

$$T_\perp = \frac{1}{2} \sum_n mv_\perp^2 \quad T_\parallel = \frac{1}{2} \sum_n mv_\parallel^2$$

Hint:

$$\int \left[1 - \sin^2(\theta) \cos^2 \left(\Omega_c t + \tilde{\phi} \right) \right] d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

Solución:

El cuadrivector de momento lineal viene dado por

$$P^\mu = mv^\mu$$

donde v^μ es el cuadrivector $(\gamma c, \gamma \vec{v})$. De esta manera, considerando el tiempo propio τ , se escribe la fuerza

$$F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{d}{dt} (mv^\mu)$$

mientras que, en función del tensor electromagnético, esta fuerza adquiere la forma

$$F^\mu = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} P_\nu$$

y mezclando ambas expresiones se obtiene

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} v_\nu$$

y usando la métrica de Minkowski

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} g_{\mu\nu} v^\nu$$

Suponiendo el campo magnético $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, se escribe

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dv^0/d\tau \\ dv^1/d\tau \\ dv^2/d\tau \\ dv^3/d\tau \end{pmatrix} &= \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v^0 \\ -v^1 \\ -v^2 \\ -v^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 v^2 \\ -B_0 v^1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dv^0}{d\tau} = 0 \quad \frac{dv^1}{d\tau} = \Omega_c v^2 \quad \frac{dv^2}{d\tau} = -\Omega_c v^1 \quad \frac{dv^3}{d\tau} = 0$$

Derivando la segunda ecuación se obtiene

$$\frac{dv^2}{d\tau} = \frac{1}{\Omega_c} \frac{d^2v^1}{d\tau^2}$$

y reemplazando en la tercera ecuación

$$\frac{d^2v^1}{d\tau^2} + \Omega_c^2 v^1 = 0$$

oscilador armónico cuya solución se puede escribir de la forma

$$v^1(\tau) = A \sin(\Omega_c \tau + \phi)$$

Reemplazando v^1 en la tercera ecuación se tiene

$$\frac{dv^2}{d\tau} = -A\Omega \sin(\Omega_c \tau + \phi)$$

e integrando se llega a que

$$v^2(\tau) = A \cos(\Omega_c \tau + \phi).$$

Puesto que es directo que $v^3(\tau) = B$, de las condiciones iniciales se deduce que

$$\begin{aligned} x(\tau) &= -r_L \cos(\Omega_c \tau + \phi) \\ y(\tau) &= r_L \sin(\Omega_c \tau + \phi) \\ z(\tau) &= v_{\parallel} \tau \end{aligned}$$

donde se definió el radio de Larmor $r_L \equiv v_{\perp}/\Omega_c$. Ahora, puesto que

$$v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^{\mu}}{dt} = \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt}$$

se escriben las ecuaciones

$$\begin{aligned} x(t) &= -r_L \cos\left(\frac{\Omega_c}{\gamma} t + \phi\right) \\ y(t) &= r_L \sin\left(\frac{\Omega_c}{\gamma} t + \phi\right) \\ z(t) &= \frac{v_{\parallel}}{\gamma} t \end{aligned}$$

por lo que la trayectoria de la partícula relativista será

$$\vec{r}(t) = -r_L \cos\left(\frac{\Omega_c}{\gamma} t + \phi\right) \hat{i} + r_L \sin\left(\frac{\Omega_c}{\gamma} t + \phi\right) \hat{j} + \frac{v_{\parallel}}{\gamma} t \hat{k}$$

Considerando $\beta \ll 1$ tal que $\gamma \sim 1$, se concluye que

$$\vec{r}(t) = -r_L \cos(\Omega_c t + \phi) \hat{i} + r_L \sin(\Omega_c t + \phi) \hat{j} + v_{\parallel} t \hat{k}$$

y derivando dos veces se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= v_{\perp} \sin(\Omega_c t + \phi) \hat{i} + v_{\perp} \cos(\Omega_c t + \phi) \hat{j} + v_{\parallel} \hat{k} \\ \vec{a}(t) &= \Omega_c v_{\perp} \cos(\Omega_c t + \phi) \hat{i} - \Omega_c v_{\perp} \sin(\Omega_c t + \phi) \hat{j} = -\Omega_c^2 \vec{r}(t)\end{aligned}$$

siendo las ecuaciones de movimiento para una partícula no relativista bajo la acción de un campo magnético. La aproximación de campo lejano permite escribir

$$\rho(x, t') = \sum_n q_n \delta^{(3)}[x - r(t')] \quad \vec{J}(x, t') = \sum_n q_n v_n(t') \delta^{(3)}[x - r(t')]$$

además de los potenciales electromagnéticos

$$\phi = \frac{1}{r} \sum_n q_n \quad A(t') = \frac{1}{rc} \sum_n q_n v_n(t')$$

donde t' es el tiempo retardado

$$t' = t - \frac{r}{c}.$$

Asumiendo carga simétrica tal que $\sum q_n = 0$, se escribe el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{rc^2} \sum_n q_n a_n(t')$$

y el campo magnético

$$\vec{B} = \hat{r} \times \vec{E} = -\frac{1}{rc^2} \sum_n q_n \hat{r} \times a_n(t')$$

El vector de Poynting será entonces

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \\ &= \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times (\hat{r} \times \vec{E})] \\ &= \frac{c}{4\pi} [\hat{r}(\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E} \cdot \hat{r})]\end{aligned}$$

y, puesto que

$$\begin{aligned}
\hat{r}(\vec{E} \cdot \vec{E}) &= -\hat{r} \cdot \frac{1}{rc^2} \sum_n q_n a_n \left[-\frac{1}{rc^2} \sum_m q_m a_m \right] \\
&= \frac{q^2}{r^2 c^4} \sum_{m,n} \hat{r} (a_n \cdot a_m) \\
\vec{E}(\vec{E} \cdot \hat{r}) &= -\frac{1}{rc^2} \sum_n q_n a_n \left[-\frac{1}{rc^2} \sum_m q_m a_m \cdot \hat{r} \right] \\
&= \frac{q^2}{r^2 c^4} \sum_{m,n} a_n (a_m \cdot \hat{r})
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\vec{S} = \frac{q^2}{4\pi r^2 c^3} \sum_{m,n} [\hat{r} (a_n \cdot a_m) - a_m (a_n \cdot \hat{r})]$$

La potencia disipada por ángulo sólido viene dada por

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} \left[r^2 \hat{r} \cdot \vec{E} \times \vec{B}^* \right] \\
&= r^2 \vec{S} \cdot \hat{r} \\
&= \frac{q^2}{4\pi c^3} \sum_{m,n} [(a_n \cdot a_m) - (\hat{r} \cdot a_m) (a_n \cdot \hat{r})]
\end{aligned}$$

y escribiendo

$$\hat{r} = \sin(\theta) \cos(\phi') \hat{i} + \sin(\theta) \sin(\phi') \hat{j} + \cos(\theta) \hat{k}$$

se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}
a^2 - (\vec{a} \cdot \hat{r})^2 &= \Omega_c^2 v_\perp^2 - \Omega_c^2 v_\perp^2 \sin^2(\theta) [\cos(\phi') \cos(\Omega_c t + \phi) - \sin(\phi') \sin(\Omega_c t + \phi)]^2 \\
&= \Omega_c^2 v_\perp^2 - \Omega_c^2 v_\perp^2 \sin^2(\theta) \left[\cos(\Omega_c t + \tilde{\phi}) \right]^2 \\
&= \Omega_c^2 v_\perp^2 \left[1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi}) \right]
\end{aligned}$$

donde $\tilde{\phi} = \phi + \phi'$. La potencia disipada por ángulo sólido será entonces

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \Omega_c^2 v_\perp^2}{4\pi c^3} \left[1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi}) \right]$$

y usando el hint

$$\int \left[1 - \sin^2(\theta) \cos^2 \left(\Omega_c t + \tilde{\phi} \right) \right] d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

se obtiene la potencia radiada

$$P = \frac{q^2 \Omega_c^2 v_\perp^2}{4\pi c^3} \left(\frac{8\pi}{3} \right) = \frac{2}{3} \frac{q^2 \Omega_c^2 v_\perp^2}{c^3}$$

y reconociendo la aceleración $a_\perp = \Omega_c v_\perp$, se llega a la expresión

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 a_\perp^2}{c^3}$$

la cual corresponde a la fórmula de Larmor, expresión para la potencia disipada por una carga puntual no relativista acelerando en un campo magnético. Volviendo a la expresión

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 \Omega_c^2 v_\perp^2}{c^3}$$

usando que

$$T_\perp = \frac{1}{2} \sum_n m v_\perp^2$$

se obtiene la expresión

$$P = \frac{4}{3} \frac{q^2 \Omega_c^2 T_\perp}{mc^3}$$

13.107 Dipolo magnético oscilatorio

Considere el siguiente modelo de un dipolo magnético oscilatorio: Suponga que se tiene un anillo sin cargas, de radio b , por el cual circula una corriente alterna $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Encuentre la potencia total radiada $\langle P \rangle$ (promediado sobre un periodo), asumiendo la aproximación de campo lejano $r \gg c/\omega$, y la aproximación para un dipolo perfecto $b \ll r$ y $b \ll c/\omega$.

Solución:

Escogiendo un sistema de coordenadas esféricas con simetría azimutal, es posible escribir la expansión

$$\begin{aligned}
|\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} \\
&= \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \\
&= \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' [\sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\phi - \phi') + \cos(\theta) \cos(\theta')]}
\end{aligned}$$

gracias a que

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' [\sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\phi - \phi') + \cos(\theta) \cos(\theta')],$$

esto debido al teorema de adición de los armónicos esféricos. Usando que $r' = b$ y $\theta' = \pi/2$, la expansión se reescribe de la forma

$$\begin{aligned}
|\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \\
&= r \sqrt{1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{2b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')}
\end{aligned}$$

y recordando que $r \gg b$, de la aproximación por series de Taylor se obtiene

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \sim r \left[1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]$$

Por otro lado, la densidad de corriente del anillo viene dada por

$$\begin{aligned}
\vec{J} &= \bar{I} \frac{\delta(r' - b)}{b} \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= I_0 e^{-i\omega t'} \frac{\delta(r' - b)}{b} \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) \hat{\phi}''
\end{aligned}$$

donde se pasó la función coseno a una función exponencial por comodidad. El potencial vector asociado será entonces

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
&= \frac{I_0}{bc} \int \frac{\delta(r' - b) \delta(\theta' - \pi/2)}{r \left[1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]} e^{-i\omega t' \hat{\phi}'} dV' \\
&= \frac{I_0}{bc} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\delta(r' - b) \delta(\theta' - \pi/2)}{r \left[1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]} e^{-i\omega t'} (r')^2 \sin^2(\theta') \hat{\phi}' dr' d\theta' d\phi',
\end{aligned}$$

donde t' corresponde al tiempo retardado

$$\begin{aligned}
t' &= t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \\
&\simeq t - \frac{r}{c} \left[1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right] \\
&= t - \frac{r}{c} + \frac{b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')
\end{aligned}$$

Desarrollando las deltas de Dirac presentes en la integral y reemplazando el tiempo retardado en la misma, se llega a la expresión

$$\vec{A} = \frac{I_0 b}{rc} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \int_0^{2\pi} \frac{\exp \left[-i\frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]}{1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \hat{\phi}' d\phi'$$

y, puesto que $b \ll c/\omega$, se puede expandir

$$\exp \left[-i\frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right] \approx 1 - i\frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')$$

con lo cual el potencial vector queda

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{I_0 b}{rc} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \int_0^{2\pi} \frac{1 - i\frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')}{1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \hat{\phi}' d\phi' \\
&= A_0(t) \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right] \left[1 - i\frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right] \hat{\phi}' d\phi' \\
&= A_0(t) \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \left(1 - i\frac{\omega r}{c} \right) \right] \hat{\phi}' d\phi'
\end{aligned}$$

donde se volvió a aproximar el denominador utilizando que $r \gg b$ y se escribió

$$\vec{A}_0(t) = \frac{I_0 b}{rc} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

Puesto que

$$\hat{\phi}' = -\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}$$

la expresión para el potencial vector se reescribe como

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{I_0 b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c} \right) \sin(\theta) \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \left[\int_0^{2\pi} \cos(\phi') \cos(\phi - \phi') \hat{y} d\phi' \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{2\pi} \sin(\phi') \cos(\phi - \phi') \hat{x} d\phi' \right]
\end{aligned}$$

y recordando que

$$\cos(\phi - \phi') = \cos(\phi)\cos(\phi') + \sin(\phi)\sin(\phi')$$

se llega finalmente al potencial vector

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{I_0 b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \left[\cos(\phi)\hat{y} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi') d\phi' \right. \\ &\quad \left. - \sin(\phi)\hat{x} \int_0^{2\pi} \sin^2(\phi') d\phi' \right] \\ &= \frac{I_0 \pi b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] [-\sin(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y}] \\ &= \frac{I_0 \pi b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\phi}\end{aligned}$$

En la aproximación de campo lejano se tiene que $\Phi \sim 0$, luego el campo eléctrico será

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \frac{I_0 \pi \omega b^2}{r^2 c^2} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\phi}$$

mientras que el campo magnético vendrá dado por

$$\vec{B} = \hat{r} \times \vec{E} = -i \frac{I_0 \pi \omega b^2}{r^2 c^2} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\theta}$$

lo que permite escribir el vector de Poynting

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \\ &= -\frac{I_0^2 \pi^2 c \omega^2 b^4}{4\pi r^4 c^4} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \left(1 + i\frac{\omega r}{c}\right) \sin^2(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\phi} \times \hat{\theta} \\ &= -\frac{I_0^2 \pi \omega^2 b^4}{4r^4 c^3} \left(1 + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \sin^2(\theta) (-\hat{r}) \\ &= \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4r^2 c^5} \sin^2(\theta) \hat{r}\end{aligned}$$

donde se usó que $r \gg c/\omega$, luego $\omega r/c \gg 1$. La potencia radiada por ángulo sólido será

$$\frac{\partial P}{\partial \Omega} = r^2 \vec{S} \cdot \hat{r} = \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4c^5} \sin^2(\theta)$$

por lo que la potencia vendrá dada por la integral en el ángulo sólido de esta expresión, es decir, sobre la parte angular, concluyéndose así que la potencia radiada por el anillo es

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4c^5} \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4c^5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{I_0^2 \pi^2 \omega^4 b^4}{2c^5} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \\ &\boxed{P = \frac{2}{3} \frac{I_0^2 \pi^2 \omega^4 b^4}{c^5}}. \end{aligned}$$

13.108 Hamiltoniano de una partícula

Muestre que el hamiltoniano de una partícula moviéndose en un campo electromagnético es

$$\mathcal{H} = \sqrt{|cP - eA|^2 + m^2 c^4} + e\Phi,$$

donde $P_j = \partial_{u_j} \mathcal{L}$.

Solución:

La acción que se debe minimizar es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathcal{L}} dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \bar{\mathcal{L}} d(\gamma\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \bar{\mathcal{L}} d\tau$$

identificándose el Lagrangiano $\mathcal{L} = \gamma \bar{\mathcal{L}}$. En general, se sabe que $\mathcal{L} = T - U$, luego para una partícula libre, de las ecuaciones de Euler-Lagrange se deduce que se debe cumplir

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{x}) = 0$$

Esto indica que \mathcal{L}_T (Lagrangiano de la partícula libre) debe ser proporcional a la masa. Por otro lado, ya que el Lagrangiano debe ser invariante, la cantidad $\gamma \mathcal{L}_T$ debe ser invariante, lo cual se cumple si se elige $\gamma \mathcal{L}_T = -mc^2$. Se tiene entonces que

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{\gamma} mc^2$$

y al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \dot{x}} = 0$$

se confirma que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(-\frac{1}{\gamma} mc^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left[-mc^2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2} mc^2 \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right)^{-1/2} \left(-\frac{2\dot{x}}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} (\gamma m \dot{x}) \end{aligned}$$

luego la elección de \mathcal{L}_T cumple con todas las condiciones. Esto también se observa al recuperar la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = 0$ para velocidades no relativistas. El potencial electromagnético en el caso no relativista viene dado por

$$U = e\Phi$$

donde Φ es tal que

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi$$

con \vec{A} el potencial vector y \vec{E} el campo eléctrico. De esta manera, el potencial relativista debe ser tal que $\gamma \mathcal{L}_U$ sea invariante y se cumpla que $U = e\Phi$ en el límite no relativista. Sea entonces el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_U = -\frac{e}{\gamma c} U_\alpha A^\alpha$$

donde $U_\alpha = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ y $A^\alpha = (\Phi, \vec{A})$, es evidente que

$$\gamma \mathcal{L}_U = -\frac{e}{c} U_\alpha A^\alpha$$

es invariante, puesto que la contracción $U_\alpha A^\alpha$ genera un escalar, el cual es invariante. Por otro lado, en el límite $\dot{x} \ll c$, se recupera $\mathcal{L}_U = e\Phi$, lo cual

sugiere que la elección del Lagrangiano cumple también con las condiciones necesarias. Se escribe entonces el Lagrangiano total

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_U = -\frac{1}{\gamma}mc^2 - \frac{e}{\gamma c}U_\alpha A^\alpha$$

a partir de lo que se deduce

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(-\frac{1}{\gamma}mc^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(-\frac{e}{\gamma c}U_\alpha A^\alpha \right) \\ &= \gamma m\dot{x}_i - \frac{e}{c}A_i \end{aligned}$$

y, puesto que el Hamiltoniano viene dado por

$$\mathcal{H}(x^i, P_j, t) = P_i \dot{x}^i - \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j, t),$$

se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= P_i \dot{x}_i - \mathcal{L} \\ &= \gamma m\dot{x}_i^2 - \frac{e}{c}\dot{x}_i A_i + \frac{1}{\gamma}mc^2 + e\Phi + \frac{e}{c}\dot{x}_i A_i \\ &= \gamma m\dot{x}_i^2 + \frac{1}{\gamma}mc^2 + e\Phi \end{aligned}$$

Recordando que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\dot{x}}{c})^2}}$$

se puede reescribir

$$\begin{aligned} \gamma m\dot{x}_i^2 + \frac{1}{\gamma}mc^2 &= \frac{m\dot{x}_i^2}{\sqrt{1 - (\frac{\dot{x}}{c})^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2} \\ &= \frac{m\dot{x}_i^2}{\sqrt{1 - (\frac{\dot{x}}{c})^2}} + \frac{mc^2 \left(1 - \frac{\dot{x}_i^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - (\frac{\dot{x}}{c})^2}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{\dot{x}}{c})^2}} \end{aligned}$$

luego el Hamiltoniano queda

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} + e\Phi$$

Por último, despejando \dot{x}_i de la expresión para P_i se obtiene

$$\dot{x} = \frac{c(cP - eA)}{\sqrt{|cP - eA|^2 + m^2c^4}}$$

por lo que

$$\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{|cP - eA|^2 + m^2c^4}}$$

y reemplazando en el Hamiltoniano se concluye que

$$\mathcal{H} = \sqrt{|cP - eA|^2 + m^2c^4} + e\Phi$$

13.109 La paradoja de los gemelos

La estrella más cercana está a 4 años luz. Suponga que se desea enviar a un gemelo en un cohete que acelere con aceleración g la mitad del camino hacia esta estrella y desacelere con aceleración $-g$ la otra mitad (para evitar problemas de salud por ingrávidez). Supongamos que, para ello, contamos con una turbina del Enterprise, que convierte perfectamente materia y antimateria en energía (por lo tanto, la velocidad de expulsión de la masa es con velocidad c respecto al cohete). Sin hacer consideraciones relativistas, encuentre la masa inicial M del cohete necesaria para llegar a esta estrella (asuma que la masa del módulo más la de la tripulación es de $m_c = 100$ kg). Resuelva el problema relativista y calcule la diferencia de edad cuando los gemelos se encuentran nuevamente en la tierra, ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el cohete? Considerando efectos relativistas y una masa $m = 100$ kg, encuentre la masa inicial del cohete necesaria para llegar a la estrella.

Solución:

Si el cohete está lo suficientemente lejos como para no ser desviado por el campo gravitatorio de la Tierra y su trayectoria es una línea recta en el espacio plano (no hay curvaturas relativistas) en dirección a la estrella, la velocidad de la masa eyectada por el cohete (con dirección a la Tierra) vista desde la Tierra es $\vec{v} - \vec{u}$, donde \vec{v} es la velocidad del cohete y $\vec{u} = c\hat{x}$ es la

velocidad de expulsión de masa en la misma dirección que la velocidad $\vec{v}(\hat{x}$ sin perder generalidad). La variación en el momento lineal del cohete será entonces

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) \\ &= [(m - dm') (\vec{v} + d\vec{v}) - (\vec{v} - \vec{u})dm'] - m\vec{v} \end{aligned}$$

donde dm' corresponde a la pérdida de masa expulsada y $d\vec{v}$ es el cambio de velocidad asociado. Puesto que $dm'd\vec{v} \ll 1$, la expresión queda de la forma

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= (m\vec{v} + md\vec{v} - \vec{v}dm' + \vec{v}dm' - \vec{u}dm') - m\vec{v} \\ &= md\vec{v} - \vec{u}dm' \end{aligned}$$

y, puesto que la masa total del sistema se mantiene constante, es decir, $m + m' = cte$, se deduce que $dm + dm' = 0$, luego el cambio en la masa del cohete es $dm = -dm'$. Por otro lado, al no tenerse fuerzas externas al sistema, se tiene que $d\vec{p} = 0$, por lo que

$$d\vec{p} = 0 = md\vec{v} - \vec{u}dm'$$

a partir de lo que se deduce

$$\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{\vec{u}}{m} \frac{dm'}{dt} = \vec{a} + \frac{\vec{u}}{m} \frac{dm}{dt} = 0$$

y usando que $\vec{u} = c\hat{x}$ se reescribe

$$\vec{a} + \frac{c}{m} \frac{dm}{dt} \hat{x} = 0$$

En la primera parte de la trayectoria (hasta mitad de camino a la estrella), la aceleración es $\vec{a} = g\hat{x}$ (de manera que sea posible dejar el campo gravitatorio), luego

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{g}{c}m(t)$$

ecuación diferencial con solución

$$m(t) = (m_c + M) e^{-\frac{g}{c}t}$$

donde se usó que la masa inicial del sistema es $m_c + M$. Esta solución es válida para $t \in [0, t_0]$, con t_0 el tiempo que el cohete demora en llegar a la mitad de la distancia entre la Tierra y la estrella. Para la siguiente mitad del camino, se tiene que la estrella comienza a atraer al cohete hacia sí, por lo

que la dirección de la masa expulsada debe cambiar en 180° (de manera que el cohete no acelere más de lo que su composición se lo permita). El cambio de momento lineal pasa a ser entonces

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= [(m - dm')(\vec{v} - d\vec{v}) + (\vec{v} + \vec{u})dm'] - m\vec{v} \\ &= (m\vec{v} - md\vec{v} - \vec{v}dm + \vec{v}dm' + \vec{u}dm') - m\vec{v} \\ &= \vec{u}dm' - md\vec{v} \end{aligned}$$

y como se sigue cumpliendo que $\vec{p} = 0$, se llega a la igualdad

$$d\vec{p} = 0 = md\vec{v} - \vec{u}dm'$$

ecuación ya antes obtenida y que permite concluir que, en la segunda mitad del tramo, la variación de la masa viene dada por

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{g}{c}t}$$

con m_0 una constante. Esta solución es válida para $t \in [t_0, t_{\max}]$, donde t_{\max} corresponde al tiempo que el cohete demora en llegar a la estrella. Suponiendo que la solución para $m(t)$ es continua (es decir, el propulsor se gira 180° de forma instantánea), se deduce que en $t = t_0$

$$(m_c + M) e^{-\frac{g}{c}t_0} = m_0 e^{-\frac{g}{c}t_0}$$

luego $m_0 = m_c + M$, concluyéndose que la masa para todo tiempo viene dada por

$$m(t) = (m_c + M) e^{-\frac{g}{c}t}$$

En el primer tramo, la aceleración es g constante, por lo que la ecuación de movimiento será

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

y como $x(t_0) = D/2$, con D la distancia entre la Tierra y la estrella, se deduce que

$$t_0 = \sqrt{\frac{D}{g}}$$

Notando que 4 años luz corresponden a

$$D = 4[\text{años luz}] = 4c \cdot (3.15 \times 10^7) = 3.78 \times 10^{16} [\text{m}]$$

se deduce que

$$t_0 \approx 6.2 \times 10^7 [\text{ s}]$$

De esta manera, puesto que el tiempo que demora el cohete en llegar a la estrella es $t_{\max} = 2t_0$, se deduce que

$$m(t_{\max}) = (m_c + M) e^{-\frac{2g}{c}t_0} = m_c$$

que corresponde al momento en que el cohete pierde todo el combustible y queda solo el casquete (masa mínima para llegar a la estrella). Despejando la masa M de la expresión para la variación de la masa, se tiene

$$M = m(t_{\max}) e^{\frac{2g}{c}t_0} - m_c$$

y reemplazando los valores numéricos

$$\begin{aligned} M &= m_c \left[e^{\frac{2g}{c}t_0} - 1 \right] \\ &= 100 \cdot \left[\exp \left(\frac{2 \cdot 9.78}{2.998 \times 10^8} \cdot 6.2 \times 10^7 \right) - 1 \right] [\text{kg}] \\ &= 100 \cdot (e^{4.05} - 1) [\text{kg}] \\ &= 5740 [\text{ kg}] \end{aligned}$$

por lo que la masa inicial necesaria para llegar a la estrella será cercana a 5.7 [Tn]. Para resolver el problema de forma relativista, se sabe que la relación entre los cuadrvectores de velocidad del sistema K (en la Tierra) y K' (solidario al cohete) es

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = L_\nu^\mu(-v) \frac{dU^\nu}{d\tau}$$

por lo que en el primer tramo (desde la Tierra hasta la mitad de la distancia) se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dU^0}{d\tau} \quad \frac{dU^1}{d\tau} \quad 0 \quad 0 \right) &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta\gamma g \\ \gamma g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

siendo inmediato que

$$\frac{dU^0}{d\tau} = \gamma\beta g \quad \frac{dU^1}{d\tau} = \gamma g$$

Notando que

$$\begin{aligned}\gamma\beta &= \frac{\gamma}{c}v = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{\gamma}{c}U^1\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{U^1}{c} \\ \gamma &= \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{U^0}{c}\end{aligned}$$

las ecuaciones diferenciales se reescriben de la forma

$$\frac{dU^0}{d\tau} = \frac{g}{c}U^1 \quad \frac{dU^1}{d\tau} = \frac{g}{c}U^0$$

Derivando la segunda para reemplazar la primera se obtiene

$$\frac{d^2U^1}{d\tau^2} = \frac{g^2}{c^2}U^1$$

cuya solución es

$$\dot{x}(\tau) = A \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + B \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

y suponiendo que el cohete parte del reposo tal que $\dot{x}(\tau = 0) = 0$, se obtiene $A = 0$. Ahora, como $\ddot{x}(\tau = 0) = g$, se deduce también que

$$\ddot{x}(0) = g = \frac{g}{c}B \cosh(0),$$

obteniéndose $B = c$, luego la solución queda

$$\dot{x}(\tau) = c \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

Por otro lado, puesto que $c^2t^2 - x^2$ es un invariante relativista, es directo que

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2$$

luego se puede escribir

$$dt = d\tau \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2} = d\tau \sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

lo que permite encontrar el tiempo que transcurre para el gemelo en la Tierra

$$\begin{aligned}
t(\tau) &= \int_0^\tau \sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{c^2}} d\tau' \\
&= \int_0^\tau \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{g}{c}\tau' \right)} d\tau \\
&= \int_0^\tau \cosh \left(\frac{g}{c}\tau' \right) d\tau' \\
&= \frac{c}{g} \sinh \left(\frac{g}{c}\tau \right)
\end{aligned}$$

o, invirtiendo, el tiempo que pasa para el gemelo en el cohete

$$\tau = \frac{c}{g} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{g}{c} t \right)$$

De esta manera, el gemelo en la Tierra ve a su hermano moverse con velocidad

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(\tau) \frac{d\tau}{dt}$$

y recordando que

$$c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 + dx^2$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c} \right)^2}} \sinh \left(\frac{g}{c}\tau \right) \\
&= \frac{g}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c} \right)^2}} \left[\frac{c}{g} \sinh \left(\frac{g}{c}\tau \right) \right] \\
&= \frac{gt}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c} \right)^2}} \\
&= \left[\frac{1}{g^2 t^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2}
\end{aligned}$$

luego es posible escribir

y despejando el tiempo se obtiene

$$t_0 = \sqrt{\left(\frac{D}{2c} + \frac{c}{g} \right)^2 - \frac{c^2}{g^2}} = \sqrt{\frac{D}{g} + \frac{D^2}{4c^2}}$$

y, puesto que demora $2t_0$ en ir y $2t_0$ en volver, se concluye que para el gemelo en la Tierra

$$\begin{aligned} t &= 4\sqrt{\frac{D}{g} + \frac{D^2}{4c^2}} \\ &= 4 \cdot \sqrt{\frac{3.78 \times 10^{16}}{9.78} + \frac{14.3 \times 10^{32}}{4 \cdot 8.99 \times 10^{16}}} [\text{s}] \\ &= 3.55 \times 10^8 [\text{s}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} &= x(t_0) \\ &= \int_0^{t_0} \dot{x}(t) dt \\ &= \int_0^{t_0} \left[\frac{1}{g^2 t^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2} dt \\ &= c \int_0^{t_0} \frac{t}{\sqrt{\frac{c^2}{g^2} + t^2}} dt \\ &= \frac{c}{2} \int_{c^2/g^2}^{c^2/g^2+t^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= c \left(\sqrt{\frac{c^2}{g^2} + t^2} \right) \Big|_0^{t_0} \\ &= c \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + t_0^2} - \frac{c^2}{g} \end{aligned}$$

mientras que para el gemelo en el cohete han pasado

$$\tau = \frac{2.998 \times 10^8}{9.78} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{9.78}{2.998 \times 10^8} \cdot 3.55 \times 10^8 \right) [\text{s}] = 9.7 \times 10^7 [\text{s}]$$

por lo que la diferencia de edad al reencontrarse será de

$$\Delta T = t - \tau = (3.55 \times 10^8 - 9.7 \times 10^7) [\text{s}] = (11.26 - 3.08) [\text{y}] = 8.18 [\text{y}]$$

La velocidad máxima del cohete corresponde al tiempo $t = t_0$, puesto que la velocidad va en aumento durante la primera parte del trayecto, hasta que alcanza $D/2$ y comienza a reducir para controlar la aceleración. Esto implica que

$$v_{\max} (t = t_0) = \left[\frac{1}{g^2 t^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{Dg + \frac{D^2 g^2}{4c^2}} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2}$$

y reemplazando los valores numéricos se obtiene

$$v_{\max} = \left[\frac{1}{3.78 \times 10^{16} \cdot 9.78 + \frac{14.3 \times 10^{32.95.7}}{4.899 \times 10^{16}}} + \frac{1}{8.99 \times 10^{16}} \right]^{-1/2} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$\approx 2.8 \times 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right],$$

luego la velocidad máxima apreciada desde la Tierra es, aproximadamente, $v_{\max} = 0.934c$. Finalmente, considerando que el cuadrivector de momento se escribe $(E/c, \vec{p})$, se tendrá que el cambio de momento lineal relativista vendrá dado por

$$d(p_0, \vec{p}) = (p_0, \vec{p})(t + dt) - (p_0, \vec{p})(t)$$

$$= [(\gamma_{dv_0} mc, \gamma_{d\vec{v}} m d\vec{v}) + (E/c, \vec{p}_{dm'})] - (mc + cdm', 0)$$

$$\approx \left[\left(\left[1 + \frac{1}{2} \frac{(dv)^2}{c^2} \right] mc, \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(d\vec{v})^2}{c^2} \right] m d\vec{v} \right) + (p_f, -\vec{p}_f) \right] - (mc + cdm', 0)$$

$$= (mc + p_f, m d\vec{v} - \vec{p}_f) - (mc + cdm', 0)$$

$$= (p_f - cdm', m d\vec{v} - \vec{p}_f)$$

donde se desprecian los diferenciales de segundo orden y dm' se convierte en un fotón de energía $E = p_f/c$. Puesto que se sigue cumpliendo $d(p_0, \vec{p}) = (0, \vec{0})$ y $dm' = -dm$, es directo obtener las relaciones

$$cdm + p_f = 0 \quad mdv - p_f = 0$$

a partir de las que se deduce

$$mdv + cdm = 0$$

o, equivalentemente,

$$\frac{dv}{d\tau} + c \frac{m'(\tau)}{m(\tau)} = 0$$

donde $dv/dt = g$ en la primera parte del trayecto. Usando la regla de la cadena se escribe para la primera mitad del trayecto que

$$g + c \frac{m'(t)}{m(t)} \frac{dt}{d\tau} = 0$$

y recordando que

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}$$

se llega a la relación

$$\frac{dm}{m} = -\frac{g/c}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}} dt$$

la cual al integrar permite obtener

$$m(t) = (m_c + M) \left[\frac{gt}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2} \right]^{1/2}$$

Evaluando en $t = t_{\max}$, la masa m_c que queda en el cohete al llegar a la estrella será

$$M(t_0) = m_c \left[\frac{2gt_0 - c}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{2gt_0}{c}\right)^2} \right]$$

y reemplazando los valores numéricos se obtiene

$$\begin{aligned} M(t_0) &= 100 \cdot \left(\frac{2 \cdot 9.78 \cdot 6.2 \times 10^7 - 2.998 \times 10^8}{2.998 \times 10^8} + \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 95.6 \cdot 38.4 \times 10^{14}}{8.99 \times 10^{16}}} \right) [\text{kg}] \\ &= 705 [\text{kg}] \end{aligned}$$

luego la masa inicial del cohete necesaria para llegar a la estrella es 0.7[Tn].

13.110 Suma de velocidades paralelas

Muestre explícitamente que dos transformaciones de Lorentz sucesivas en la misma dirección son equivalentes a una sola transformación de Lorentz con una velocidad

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)}$$

Esta es una forma alternativa de derivar la ley de suma de velocidades paralelas.

Solución:

Las transformaciones de Lorentz son:

$$x'_0 = \gamma_1 (x_0 - \beta_1 x_1) \quad (139)$$

$$x'_1 = \gamma_1 (x_1 - \beta_1 x_0) \quad (140)$$

donde

$$\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - v_1^2/c^2}, \quad \beta_1 = v_1/c \quad \text{y } x_0 = ct$$

El otro sistema será K'' y lo definimos viajando a una velocidad v_2 respecto al sistema K , entonces la transformación de Lorentz entre estos dos sistemas es:

$$x''_0 = \gamma_2 (x'_0 - \beta_2 x'_1) \quad (141)$$

$$x''_1 = \gamma_2 (x'_1 - \beta_2 x'_0) \quad (142)$$

donde $\gamma_2 = 1/\sqrt{1 - v_2^2/c^2}$, y $\beta_2 = v_2/c$

Ahora reemplazando (139) en (141)

$$x''_0 = \gamma_2 (\gamma_1 (x_0 - \beta_1 x_1) - \beta_2 \gamma_1 (x_1 - \beta_1 x_0))$$

Ordenando los términos

$$x''_1 = \gamma_2 \gamma_1 ((1 + \beta_2 \beta_1) x_1 - (\beta_1 + \beta_2) x_0)$$

Similarmente (140) en (142)

$$x''_1 = \gamma_2 (\gamma_1 (x_1 - \beta_1 x_0) - \beta_2 \gamma_1 (x_0 - \beta_1 x_1))$$

$$x''_0 \gamma_2 \gamma_1 ((1 + \beta_2 \beta_1) x_0 - (\beta_1 + \beta_2) x_1)$$

Ahora si identificamos que el sistema K'' viaja a una velocidad v en relación con el sistema K' , entonces la transformación de Lorentz que relaciona a los dos sería:

$$x''_0 = \gamma (x_0 - \beta x_1)$$

$$x_1'' = \gamma (x_1 - \beta x_0)$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ y $\beta = v/c$

Comparando esto con la doble transformación, vemos que para que sean equivalentes, los coeficientes deben coincidir.

$$\gamma_2\gamma_1(1+\beta_2\beta_1) = \gamma \quad \gamma_2\gamma_1(\beta_1+\beta_2) = \beta\gamma \quad \gamma_2\gamma_1(1+\beta_2\beta_1) = \gamma \quad \gamma_2\gamma_1(\beta_1+\beta_2) = \beta\gamma$$

Tomemos el primero, expandamos y resolvamos para v .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right) \\ \frac{1}{1-v^2/c^2} &= \frac{1}{1-v_2^2/c^2} \frac{1}{1-v_1^2/c^2} \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)^2 \\ 1-v^2/c^2 &= \frac{(1-v_2^2/c^2)(1-v_1^2/c^2)}{\left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)^2} \\ v &= \sqrt{c^2 - \frac{(1-v_2^2/c^2)(1-v_1^2/c^2)c^2}{\left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)^2}} \\ v &= \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - v_1^2 - v_2^2 + v_1^2 v_2^2/c^2)}{1 + v_1^2 v_2^2/c^4 + 2v_1 v_2/c^2}} \\ v &= \boxed{\frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2/c^2)}} \end{aligned}$$

13.111 Escalares de Lorentz

(a) Exprese los escalares de Lorentz $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ en términos de **E** y **B**. ¿Existen otros invariantes cuadráticos en las intensidades de campo **E** y **B**?

(b) ¿Es posible tener un campo electromagnético que aparezca como un campo puramente eléctrico en un marco inercial y como un campo puramente magnético en algún otro marco inercial? ¿Cuáles son los criterios impuestos a **E** y **B** de modo que haya un marco inercial en el que no haya campo eléctrico?

(c) Para medios macroscópicos, **E**, **B** forman el tensor de campo $F^{\alpha\beta}$ y **D**, **H** el tensor $G^{\alpha\beta}$. ¿Qué otras invariantes se pueden formar? ¿Cuáles son sus expresiones explícitas en términos de los campos de 3 vectores?

Solución:

(a) El producto interno de dos 4-tensores debería darnos un escalar de Lorentz, es decir, un escalar que es el mismo en todos los sistemas. Sabemos que:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}$$

Los diversos productos internos son:

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu}$$

Como $g_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} F^{\alpha\beta}$$

Separando las componentes espaciales de las temporales y usando

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 :$$

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = F^{00} g_{00} g_{00} F^{00} + \sum_{\beta=1}^3 F^{0\beta} g_{00} g_{\beta\beta} F^{0\beta} + \sum_{\alpha=1}^3 F^{\alpha 0} g_{\alpha\alpha} g_{00} F^{\alpha 0} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 F^{\alpha\beta} g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = F^{00} F^{00} - \sum_{\beta=1}^3 F^{0\beta} F^{0\beta} - \sum_{\alpha=1}^3 F^{\alpha 0} F^{\alpha 0} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 F^{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2)$$

De manera similar encontramos:

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

y

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} = -2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2)$$

No hay otros invariantes cuadráticos en las intensidades de campo \mathbf{E} y \mathbf{B} porque no hay otra manera de obtener el producto interno de los tensores de intensidad de campo.

(b) El hecho de que el campo electromagnético obedezca a transformaciones de Lorentz significa que el campo eléctrico y el magnético no pueden existir por separado. Lo que parece un campo eléctrico puro en un sistema se verá como un campo eléctrico y magnético en otro sistema. Entonces, las preguntas son: si tenemos un campo puramente eléctrico en un sistema inercial, ¿podemos encontrar un sistema inercial donde aparezca un campo puramente magnético? Veamos la transformación: $F'^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta F^{\gamma\delta}$ donde el cuadro preparado se mueve a una velocidad \mathbf{v} relativa al sistema no primado. Luego los campos transformados son:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\end{aligned}$$

En el sistema no primado, tenemos un campo puramente eléctrico, $\mathbf{E}' \neq 0$ y $\mathbf{B}' = 0$. Las ecuaciones se convierten en:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma \mathbf{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= -\gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}\end{aligned}$$

El sistema especial donde el campo puramente eléctrico se ha convertido en un campo puramente magnético (si existe) requeriría $\mathbf{E}' = 0$, lo que nos lleva a:

$$\gamma \mathbf{E} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})$$

$$\hat{\mathbf{E}} \mathbf{E} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta} \hat{\boldsymbol{\beta}} ((\boldsymbol{\beta} \hat{\boldsymbol{\beta}}) \cdot (\hat{\mathbf{E}} \mathbf{E}))$$

con

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{v}} \quad \text{y} \quad 1 = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{v^2}{c^2}$$

$$\implies v = c$$

Esto nos dice que el único sistema con un campo magnético puro es el sistema que viaja a la velocidad de la luz en relación con el sistema inicial. Pero nada puede ir a la velocidad de la luz que inicialmente se encuentra a una velocidad diferente. Por lo tanto, nunca se puede alcanzar este sistema y nunca se puede obtener un campo puramente magnético a partir de uno puramente eléctrico cambiando sistemas.

Veamos otra forma de abordar el problema. Acabamos de demostrar que $|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2 = C$ es igual en todos los sistemas. En el sistema no primado,

$\mathbf{B} = 0$, de modo que $C = -|\mathbf{E}|^2$. En el sistema especial (primado) esperamos encontrar $\mathbf{E}' = 0$ de modo que $C = |\mathbf{B}'|^2$. Cualquier C constante distinta de cero no puede ser puramente positiva y puramente negativa al mismo tiempo (si C es cero, no tenemos campos en ningún sistema).

Para que no haya campo eléctrico en un sistema ($\mathbf{E}' = 0$), el campo \mathbf{E} y \mathbf{B} El campo en todos los demás sistemas debe ser:

$$0 = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})$$

$$\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} = -\mathbf{E} + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})$$

(c) Para campos en medios, tenemos:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$$

Los posibles productos internos que producen escalares invariantes de Lorentz son:

$$G^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = 2(|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{D}|^2)$$

$$G^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = -2(|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{D}|^2)$$

$$G^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = -4\mathbf{D} \cdot \mathbf{H}$$

$$F^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = 2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = -2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{H})$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = -2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

$$F^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta} = -2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{H})$$

Esto agota todas las combinaciones posibles de F, G y sus tensores duales. Debería ser obvio que muchas de las invariantes de Lorentz resultantes son

redundantes. Los invariantes de Lorentz en la parte (c) y la parte (a) se pueden condensar (omitiendo las constantes generales triviales):

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{H}, \quad |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2, \quad |\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{D}|^2, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$$

13.112 Espejo relativista

Considere un espejo de masa M y superficie S , que se mueve a una velocidad cercana a la velocidad de la luz. Como método de propulsión iluminaremos este espejo con un potente láser en forma normal a la superficie, tal que el haz de luz reflejado se propague en la dirección opuesta a la del haz incidente.

- a) Muestre que el campo que rebota del espejo es pequeño a velocidades relativistas en el sistema del laboratorio.
- b) En el sistema inercial, que está instantáneamente en reposo con el espejo, encuentre la fuerza que siente el espejo. Transforme esta fuerza al sistema del laboratorio y demuestre que para velocidades relativistas $\beta \approx 1$ obtenemos $\gamma \sim t^{1/3}$.

Solución:

- a) El sistema K' ubicado en el espejo, se mueve con velocidad $v\hat{x}$ respecto al sistema K . Los campos en el sistema K son:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, t) &= E_0 \cos(kx - wt)\hat{y} \\ \mathbf{B}(x, t) &= B_0 \cos(kx - wt)\hat{z}\end{aligned}\tag{143}$$

y si asumimos que viajan por el vacío, para satisfacer las ecuaciones de Maxwell necesitamos que $k = \omega/c$ y $B_0 = E_0$. La transformación para los campos en K' es:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\end{aligned}$$

Como el láser va en $\hat{x} \implies \boldsymbol{\beta} = \beta\hat{x}$

$$\implies \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Los campos en K' quedan:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})\end{aligned}$$

y usando la Ec. (143) nos queda:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma [(E_0 \cos(kx - \omega t) - \beta E_0 \cos(kx - \omega t))] \hat{y} \\ \mathbf{E}' &= \gamma(1 - \beta) [E_0 \cos(kx - \omega t)] \hat{y} \\ \mathbf{E}' &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \gamma (B_0 \cos(kx - \omega t) - \beta E_0 \cos(kx - \omega t)) \hat{z} \\ \mathbf{B}' &= \gamma(1 - \beta) [E_0 \cos(kx - \omega t)] \hat{z} \\ \mathbf{B}' &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{B}\end{aligned}$$

Luego, el láser rebota y por lo tanto el sentido cambia, y eso significa que cambia el signo de la velocidad $v\hat{x} \rightarrow -v\hat{x}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(1 + \beta)\mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \gamma(1 + \beta)\mathbf{B}\end{aligned}$$

Y finalmente debemos transformar los campos al sistema del laboratorio K , que se obtiene al realizar la transformación inversa con $\beta \rightarrow -\beta$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{E}' \\ \mathbf{B} &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{B}'\end{aligned}$$

Si el espejo se mueve a velocidad cercana a la velocidad de la luz entonces $\gamma \gg 1$ y $\beta \sim 1$. Y por tanto los campos que rebotan del espejo en el sistema de laboratorio a velocidades relativistas son pequeños:

$$\boxed{\mathbf{E} \ll 1 \quad \mathbf{B} \ll 1.}$$

b) La fuerza en el sistema K' es:

$$F' = \frac{dp}{dt}$$

donde el cambio de momento en el espejo está dado por el cambio de momento de los fotones. Luego la energía de los fotones es:

$$\begin{aligned}E &= \hbar\omega' = pc \\ \implies p &= \frac{\hbar\omega'}{c}\end{aligned}$$

si consideramos N fotones

$$p = \frac{N\hbar\omega'}{c}$$

La fuerza queda:

$$F' = \frac{d}{dt} \left(\frac{N\hbar\omega'}{c} \right)$$

Sea I la intensidad de partículas:

$$\begin{aligned} I &= \frac{N}{t} \\ \Rightarrow F' &= \frac{d}{dt} \left(\frac{It\hbar\omega'}{c} \right) \end{aligned}$$

y como ω' es la frecuencia Doppler, la fuerza que siente el espejo en el sistema inercial es:

$$F' = \frac{I\hbar}{c} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \omega$$

Transformando la fuerza al sistema K del laboratorio

$$F = \gamma (F' - \beta^2 F')$$

$$\begin{aligned} F &= \gamma F' (1 - \beta^2) \\ F &= \frac{\gamma I\hbar\omega}{c} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} (1 - \beta^2). \end{aligned}$$

Sabemos que el láser encontrará al espejo cuando se cumpla

$$\begin{aligned} ct &= \lambda + vt \\ \Rightarrow (c-v)t &= \lambda \\ \Rightarrow \frac{1}{f_f} &= \frac{\lambda}{(c-v)f_i} \\ \Rightarrow f_f &= \frac{c-v}{c} f_i = \frac{c-\beta c}{c} f_i \\ f_f &= (1-\beta) f_i \end{aligned}$$

Por otro lado si consideramos la variación del momento de un fotón:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &\approx \frac{p_f - p_i}{t} = \frac{-hf_f/c - (hf_i/c)}{\frac{\lambda}{c-v}} = \frac{-hf_f/c - (hf_i/c)}{\frac{c}{c-\beta c} \frac{1}{f_i}} \\ \frac{dp}{dt} &\approx \frac{-hf_f/c - (hf_i/c)}{\frac{1}{1-\beta c} \frac{1}{f_i}} = \frac{-\frac{h}{c}(1-\beta)f_i - \frac{hf_i}{c}}{\frac{1}{(\beta-1)} \frac{1}{f_i}} \\ \frac{dp}{dt} &\approx \left[-\frac{h}{c}(1-\beta)f_i - \frac{hf_i}{c} \right] (1-\beta)f_i \end{aligned}$$

$$\frac{dp}{dt} \approx \left[-\frac{h}{c}(1-\beta)^2 f_i^2 - \frac{h}{c}(1-\beta) f_i^2 \right] \quad (144)$$

Luego como $\beta \rightarrow 1$ entonces

$$(1-\beta)^2 \ll (1-\beta)$$

Nos quedamos entonces con los términos a primero orden en (144)

$$\frac{dp}{dt} \approx -\frac{h}{c}(1-\beta)f_i^2. \quad (145)$$

Por otro lado la variación del momento del espejo de masa M es:

$$\begin{aligned} \frac{dp_M}{dt} &= \frac{d}{dt}(\gamma mv) \\ \frac{dp_M}{dt} &= m \left(\gamma \frac{dv}{dt} + v \frac{d\gamma}{dt} \right) \end{aligned}$$

Vamos a considerar despreciable el término $\frac{dv}{dt} = 0$, porque como el espejo va casi a la velocidad de la luz, y esta es constante entonces

$$\frac{dp_M}{dt} = mv \frac{d\gamma}{dt}. \quad (146)$$

Por conservación del momento igualamos (146) con (145)

$$\frac{h}{c}(1-\beta)f_i^2 = mv \frac{d\gamma}{dt}.$$

Para hacer aparecer un γ^3 vamos a multiplicar por 1 el siguiente término

$$\begin{aligned} (1-\beta) &= \frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1+\beta)} = \frac{1+\beta^2}{1+\beta} = \frac{1/\gamma^2}{1+\beta} \\ (1-\beta) &= \frac{\gamma^{-2}}{1+\beta} \end{aligned}$$

Con esto no queda

$$\begin{aligned} \frac{h}{c} \frac{\gamma^{-2}}{(1+\beta)} f_i^2 &= mv \frac{d\gamma}{dt} \\ \implies \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{hf_i^2}{cmv(1+\beta)} \gamma^{-2} \end{aligned}$$

Considerando velocidades relativistas: $v \rightarrow c$ y $\beta \rightarrow 1$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{hf_i^2}{2mc^2}\gamma^{-2}$$

donde hemos encontrado una ecuación diferencial, que resolvemos

$$\begin{aligned}\gamma^2 d\gamma &= \left(\frac{hf_i}{2mc^2}\right) dt \\ \frac{\gamma^3}{3} &= \left(\frac{hf_i}{2mc^2}\right) t \\ \gamma^3 &= \left(\frac{3hf_i}{2mc^2}\right) t \\ \gamma &= \left(\frac{3hf_i}{2mc^2}\right)^{1/3} t^{1/3}\end{aligned}$$

Y hemos demostrado que para velocidades relativistas $\beta \approx 1$ se tiene $\gamma \sim t^{1/3}$

13.113 Dipolo infinito uniforme

Considere una dipolo infinito (uniforme en z)

$$\mathbf{P} = P_o \frac{\delta(\rho)}{\rho} \hat{z} e^{-i\omega t}$$

cuya dirección esta oscilando con frecuencia ω . Encuentre los campos y la potencia radiada.

No sé que pasos habrás hecho. Pero si tomas a partir de $\vec{q} = p\vec{d}$, te armas el \vec{J} , y utilizando el gauge de Lorentz, te puedes armar las Ec. de Helmholtz.
De la sol, Los J y los N los tienes que escribir como Hanckel.