

Relatividad General

Prof. Nelson Zamorano H.

Notas de clases

Eduardo Flández G.

DEPARTAMENTO DE FISICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE CHILE
Segundo semestre de 2021



Contents

1	Relatividad especial	5
2	Geometría elemental	7
2.1	Principio de equivalencia	7
2.2	Principio de la relatividad general	8
2.3	Geometría elemental	9
2.3.1	R2, el camino difícil	9
2.4	S2	11
2.5	Manifolds (variedades) y tensores	13
2.5.1	Manifolds	13
2.5.2	Tensores	13
3	El principio de equivalencia	17
3.1	Declaración del principio	17
3.2	Fuerzas gravitacionales	19
4	Topología diferencial	21
4.1	Condiciones de integrabilidad	21
4.2	Bases, componentes y leyes de transformación para vectores	22
4.3	1-Formas	23
4.4	Comutadores	24

5	Formas diferenciales	27
5.1	1-forma	27
5.2	Métrica	28
5.3	Transporte paralelo	29
6	Vectores de Killing	31
6.1	Vectores de Killing	31
6.1.1	Ejemplo: Métrica Minkowski	32
7	Desviación geodésica	35
7.1	Rotaciones	35
7.2	Desviación geodésica	36
7.3	Transporte paralelo	36
8	Derivada de Lie	39
8.1	Acción de Einstein-Hilbert	40
9	Tensor de energía impulso y proyectores	43
9.1	Coordenadas comoving normalizadas	44
9.2	Proyectores	44
10	Métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker	49
10.1	Hipótesis en Cosmología	49
10.2	La métrica de FLRW	50



1. Relatividad especial

Referencia: Cátedra 24 y 26 de agosto. (Imprimir)

Bibliografía: Schutz 2004

Todo los temas a continuación aparecen en el apunte que subió el profesor.

1. Transformación de Lorentz
2. Metriza Minkowski
3. Invariantes
4. Gráfico espacio tiempo
5. Principio de simplicidad
6. Simultaneidad
7. Simultaneidad relativa

2. Geometría elemental

Cátedra del 31 de agosto de 2021

Referencias:

1. Tensores: La gravitación en una cáscara de nuez y teoría de campos. Cap 1.4
2. Schutz

2.1 Principio de equivalencia

Theorem 2.1.1 Principio de Equivalencia: Las leyes de la física no pueden distinguir entre movimiento en un campo gravitacional y aceleración.

Si dispara un láser en un ascensor que va cayendo, de acuerdo al principio de equivalencia no puedo distinguir la aceleración del ascensor de la del campo gravitacional.

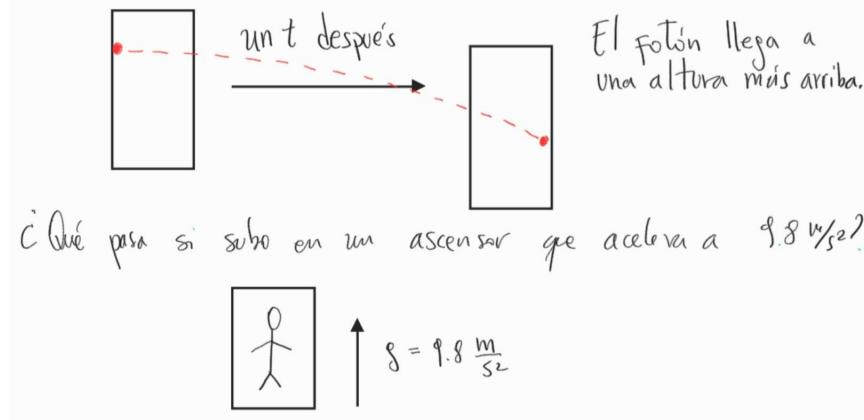


Figure 2.1: Fotón en ascensor

¿Qué pasa si subo en un ascensor que acelera a 9.8 m/s^2 ?

Con esto en mente, Einstein pensó en que la luz se curva. Lo que realmente pasa es que el rayo de luz también se deforma.

El espacio está deformado por la gravitación y los objetos siguen geodésicas.

EL principio de equivalencia está comprobado experimentalmente hasta un orden de 10^{13} .

Theorem 2.1.2 Pregunta: Supongamos un protón y un electrón, junto a un antiproton y un positrón. Los dos (hidrógeno y antihidrógeno) ¿caen igual en el ascensor? Se debe probar experimentalmente.

Matemáticamente podemos imponer estas ideas al señalar que un espacio curvo se describe mediante el concepto de variedad (*manifold*). En términos generales, una variedad es un espacio que en una vecindad de cada punto se ve como \mathbb{R}^n por unos n . Aquí tenemos $n = 4$. Para variaciones infinitesimales dx^μ la distancia propia es

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

donde $g_{\mu\nu}$ se llama métrica y determina localmente la geometría del espacio-tiempo al estar determinando las longitudes y ángulos en una vecindad infinitesimal de cada punto. Por definición $g_{\mu\nu}$ es simétrico: $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

2.2 Principio de la relatividad general

El principio de la relatividad general establece que las leyes de la física son invariantes bajo una transformación de coordenadas arbitraria, pero invertible (no solo lineal).

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\nu (\mathbf{x}^\nu)$$

bajo el cual tenemos que ds^2 es invariante. Luego

$$\begin{aligned} ds'^2 &= g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= g'_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \\ &= g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \end{aligned}$$

este es un invariante (un escalar). La transformación debe ser invertible, tal que el jacobiano

$$\Lambda_\rho^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}$$

sea una 4 matriz invertible cuya inversa es

$$\Lambda_\sigma^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}$$

ya que

$$\delta_\lambda^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \quad y \quad \delta_\lambda^\mu = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}$$

Tal cambio de variables se llama **difeomorfismo**. Vemos ahora que la invariancia de la distancia propia infinitesimal implica que

$$g'_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} g_{\mu\nu}$$

Esta es la propiedad que define un campo tensorial.

¿Qué es un tensor?

¡Dime como transformas y te diré quien eres! Un tensor es un objeto que transforma como tensor. Los tensores están relacionados con los grupos.

Ver referencias: Schutz.

Hemos generalizado la propiedad de transformación lineal $x'^\mu = \Lambda_v^\mu x^v$ de la Relatividad Especial a transformaciones arbitrarias, pero invertibles, incluyendo una métrica general $g_{\mu\nu}(x)$ en lugar de una fija $\eta_{\mu\nu}$ (esto es esencialmente lo mismo que calibrar (*gauging*) en una teoría de gauge). La teoría de la relatividad general trata la métrica $g_{\mu\nu}$ como un objeto dinámico y su evolución se obtiene a partir de la ecuación de Einstein.

2.3 Geometría elemental

2.3.1 R2, el camino difícil

Estudiemos las métricas y los espacios curvos. Empezaremos con un ejemplo donde hay una métrica no constante, aunque el espacio no es curvo: coordenadas polares para \mathbb{R}^2 . La regla euclíadiana para longitudes es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Entonces aquí la métrica es (usando notación matricial)

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, con frecuencia se desea utilizar las llamadas coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

¿Cuál es la métrica en estas coordenadas? Bueno, podemos calcular fácilmente que

$$dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta \quad dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta$$

y así vemos que

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta)^2 + (dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

Ahora tenemos (nuevamente usando notación matricial)

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

y por tanto tiene componentes no constantes. Pero claramente todavía estamos hablando de euclíadiana \mathbb{R}^2 ! Estas coordenadas sirven para algunas cosas, pero no para todo. De hecho, sufren una patología en $r = 0$. Aquí θ no está definido. En particular, el mapa inverso es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan(y/x)$$

pero y/x es ambiguo en $r = 0$ es decir, $x = y = 0$ (podría objetar a $x = 0$ pero está claro que $\theta = \pm\pi/2$ allí, dependiendo del signo de y). Por lo tanto, este sistema de coordenadas no es 'global', lo que significa que no cubre todo el espacio en el que uno está interesado. En particular, no cubre $r = 0$.

En física nos interesa resolver ecuaciones diferenciales como

$$\nabla^2 \Phi = J$$

donde Φ es un campo y J es una fuente. En coordenadas cartesianas tenemos (en \mathbb{R}^2)

$$\nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi$$

veamos qué es esto en coordenadas polares. Primero notamos que, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2} \frac{1}{1+y^2/x^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Similarmente

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

luego encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

Así encontramos

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

podemos reescribirlo, y llegamos al invariante

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Luego,

$$\nabla^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial^\nu$$

es el mismo nabla cuadrado, no tiene índices.

Los escalares transforman así:

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x)$$

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(\bar{x}) =$$

Lo segundo que hay que hacer es calcular integrales de alguna cantidad en alguna región del espacio. Supongamos que uno tiene alguna función $f(x, y)$ que queremos integrar en alguna región:

$$\int f = \iint dx dy f(x, y)$$

Pero hagámoslo ahora en coordenadas polares. Ya hemos calculado dx y dy en términos de dr y $d\theta$. De cálculo sabemos que para cambiar la medida de integración debemos introducir el factor jacobiano

$$\int f = \iint dr d\theta \left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right) \right| f(r, \theta)$$

Aquí $\partial(x, y)/\partial(r, \theta)$ es la matriz formada tomando todas las derivadas:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así vemos que

$$\det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right) = r$$

y entonces

$$\int f = \iint dr d\theta r f(r, \theta)$$

Lo que hay que notar aquí es que $r = \sqrt{\det g}$ (usando una notación matricial para la métrica).

Problema: Considere las coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

Siguiendo los mismos pasos vemos que

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

y

$$\int f = \iiint dr d\theta d\varphi \sqrt{\det g} f(r, \theta, \varphi)$$

2.4 S2

Consideremos ahora algo ligeramente menos trivial que es curvo: S^2 . Para construir S^2 de radio R comenzamos en \mathbb{R}^3 e imponemos la restricción

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Podemos resolver esto tomando

$$x = R \sin \theta \cos \varphi \quad y = R \sin \theta \sin \varphi \quad z = R \cos \theta$$

Problema: demuestre que todo el espacio está cubierto tomando $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$. Demuestre que las coordenadas se descomponen en $\theta = 0, \pi$. Comenzamos con la métrica euclíadiana normal en \mathbb{R}^3 :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Ahora sustituimos en

$$dx = R \cos \theta \cos \varphi d\theta - \sin \theta \sin \varphi d\varphi \quad dy = R \cos \theta \sin \varphi d\theta + \sin \theta \cos \varphi d\varphi \quad dz = -R \sin \theta d\theta$$

para encontrar (tenga en cuenta primero que los términos cruzados $d\theta d\varphi$ se cancelan)

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 \left(\cos^2 \theta d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 + \sin^2 \theta d\theta^2 \right) \\ &= R^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \end{aligned}$$

Esto se parece a las coordenadas polares en \mathbb{R}^2 con $r = \theta$ excepto que el coeficiente métrico de $d\varphi^2$ es $\sin^2 r$ y no r^2 . Así, en efecto, hay dos orígenes: uno en $\theta = 0$ y el otro en $\theta = \pi$.

Ambas son las llamadas singularidades de coordenadas donde φ no está bien definido.

La superficie de una esfera es una superficie intrínseca, la superficie extrínseca es en las tres dimensiones dónde hay más grados de libertad que la superficie que a nosotros nos interesa.

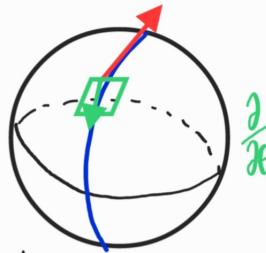


Figure 2.2: Vector tangente a la superficie de una esfera.

Un vector tangente a la esfera no existe, la flechita se sale de la esfera. En cambio la curva azul representa una circunferencia dado cierto θ y ϕ luego parametrizo la curva S y hago el dx/ds sobre la superficie y sale el vector verde.

En el límite cuando el vector es muy pequeño, uno define el $\partial/\partial\theta$ y esa es la base del vector que nunca se sale. Luego $v \cdot \partial/\partial\theta$ sí es un vector. Esto da origen a las formas diferenciales.

Supongamos que consideramos una ruta de vuelo definida por una curva $\theta = f(\varphi)$. La longitud infinitesimal de un segmento de esta curva es

$$ds = R \sqrt{f'^2 + \sin^2 f} d\varphi$$

y por lo tanto la longitud total es

$$l = R \int \sqrt{f'^2 + \sin^2 f} d\varphi$$

Deseamos minimizar esta integral. Para hacer esto, simplemente podemos usar la ecuación de Euler-Lagrange que da:

$$-\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{f'}{\sqrt{f'^2 + \sin^2 f}} \right) + \frac{\sin f \cos f}{\sqrt{f'^2 + \sin^2 f}} = 0$$

Esta es claramente una ecuación de aspecto bastante difícil. Sin embargo, podemos encontrar al menos una solución estableciendo f en una constante. Esto implica $f = 0, \pi/2, \pi$. El primer y último caso significa que no hay ninguna curva: el avión está atascado en el polo norte o sur (de hecho, las coordenadas se rompen allí y también el denominador desaparece, por lo que debemos ignorarlo). El caso del medio implica que rodea el ecuador.

De hecho, con un poco de pensamiento, esto es suficiente. Dado que la esfera tiene una simetría SO(3), siempre podemos elegir nuestras coordenadas para que Washington DC y Londres se encuentren en el 'ecuador' definido por $\theta = \pi/2$. Vemos que el camino más corto es entonces el llamado "gran círculo" entre dos puntos. Ese es un círculo cuya circunferencia es R . Ese es efectivamente el camino que toman los aviones (cuando el control del tráfico aéreo lo permite y sin volcános).

2.5 Manifolds (variedades) y tensores

2.5.1 Manifolds

Lo estudiaremos más adelante en detalle de las referencias: Wald y MTW.

Una variedad (manifold) n -dimensional es un espacio que localmente se ve como \mathbb{R}^n . Formalmente, la definición implica tomar una cubierta abierta de un espacio topológico \mathcal{M} , que es un conjunto de pares (U_i, ϕ_i) donde U_i es un conjunto abierto de \mathcal{M} y $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo en su imagen, es decir, es continuo, invertible (cuando se restringe a su imagen en \mathbb{R}^n) y su inverso es continuo.

El ejemplo clásico de una variedad es la superficie de una esfera, como la tierra. Las coordenadas comunes son longitud y latitud. Sin embargo, estos no cubren todo el espacio ya que los polos norte y sur no tienen una longitud bien definida.

Además, estamos interesados en la variedad riemanniana (o técnicamente pseudo-riemanniana), lo que significa que también tenemos una métrica $g_{\mu\nu}$ esta es una matriz invertible ubicada en cada punto que determina las longitudes y ángulos de los campos vectoriales en ese punto, a saber:

$$\|V(x)\|^2 = g_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x)$$

Por lo tanto, si pensamos en $V^\mu(x)$ como la variación infinitesimal de una curva $V^\mu = dx^\mu$ luego recuperaremos la definición anterior para la longitud de una curva infinitesimalmente pequeña que pasa por el punto x^μ

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

el ds se llama parámetro afín, y conviene usarlo para parametrizar curvas, ya que las ecuaciones se ven más simples.

2.5.2 Tensores

Ahora necesitamos desarrollar las reglas que los objetos 'buenos' (covariantes) obedecerán cuando pasemos de un sistema de coordenadas a otro. Estos objetos se denominan tensores. Un tensor

es "algo que se transforma como un vector". De hecho, es solo una generalización de un campo vectorial.

Vimos anteriormente que para que la noción de distancia propia sea invariante bajo transformaciones de coordenadas, es decir, difeomorfismos, la métrica tenía que transformarse como

$$g'_{\rho\sigma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} g_{\mu\nu}$$

Este es un ejemplo de un tensor $(0, 2)$. También podríamos considerar la métrica inversa, que es el objeto

$g^{\rho\sigma}$ que es la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma$$

Por lo tanto, podemos definir un tensor (p, q) , o un tensor de rango (p, q) , en un manifold para ser un objeto $T_{v_1 v_2 v_3 \dots v_q}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_p}$ con p índices de arriba y q índices de abajo que se transforman bajo un difeomorfismo $x^\mu \rightarrow x'^\mu (x^\nu)$ as

$$\begin{aligned} T'(x')^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_p}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots \nu_q} &= \left(\frac{\partial x'^\mu_1}{\partial x^{\rho_1}} \frac{\partial x'^\mu_2}{\partial x^{\rho_2}} \frac{\partial x'^\mu_3}{\partial x^{\rho_3}} \dots \frac{\partial x'^\mu_p}{\partial x^{\rho_p}} \right) \left(\frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\lambda_2}}{\partial x'^{\nu_2}} \frac{\partial x^{\lambda_3}}{\partial x'^{\nu_3}} \dots \frac{\partial x^{\lambda_q}}{\partial x'^{\nu_q}} \right) T(x)^{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots \rho_p} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_q \end{aligned}$$

Tenga en cuenta las posiciones de las coordenadas primadas y no primadas! Entonces, la métrica inversa es un ejemplo de un tensor $(2, 0)$. Un campo tensorial es simplemente un tensor que se define en cada punto de la variedad. Por tanto, un escalar es un tensor de $(0, 0)$;

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

un vector es un tensor $(1, 0)$;

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x)$$

y un covector es un tensor $(0, 1)$;

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x)$$

En los libros más antiguos, los índices de arriba y abajo se denominan contravariantes y covariantes, respectivamente.

Dados dos tensores podemos obtener uno nuevo de varias formas. Si tienen el mismo rango, cualquier combinación lineal de ellos también es un tensor.

Además, un tensor (p, q) se puede multiplicar por un tensor (r, s) para producir un tensor $(p+r, q+s)$.

Finalmente un (p, q) -tensor

$T(x)^{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots \rho_p} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_q$ con $p, q \geq 1$ se puede contraer para formar un $(p-1, q-1)$ -tensor:

$$T(x)^{\rho_2 \rho_3 \dots \rho_p} \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_q = T(x)^{\mu \rho_2 \rho_3 \dots \rho_p}_{\mu \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_q}$$

Claramente, esto se puede hacer en pq formas dependiendo de qué par de índices sumamos. Además, dado que tenemos una métrica $g_{\mu\nu}$ y su inversa $g^{\mu\nu}$ podemos bajar y subir índices en un tensor (esto

realmente no crea un nuevo tensor, por lo que mantiene el mismo símbolo). Por ejemplo, si V^μ es un vector, entonces

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$$

es un covector.

Contravariante \rightarrow espacio tangente

Covariante \rightarrow espacio co-tangente

3. El principio de equivalencia

Cátedra del 2 de septiembre de 2021.

Referencias: Weinberg, Cap. 3: El Principio de equivalencia.

3.1 Declaración del principio

El principio de equivalencia se basa en la igualdad de masa gravitacional e inercial $m_I = m_G$.

$$m_N \frac{d^2 \mathbf{x}_N}{dt^2} = m_N \mathbf{g} + \sum_M \mathbf{F}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M)$$

Einstein reflexionó que, como consecuencia, no se podría detectar ningún campo gravitacional homogéneo estático externo en un ascensor que cae libremente, para los observadores, sus cuerpos de prueba y el propio ascensor caen con la misma aceleración.

$\mathbf{F}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M)$: fuera entre el objeto que cae \mathbf{x}_N y "cargas externas".

Supongamos que realizamos una transformación de coordenadas de espacio-tiempo no galileana

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \quad t' = t$$

Entonces \mathbf{g} será cancelado por una "fuerza" inercial, y la ecuación de movimiento se convertirá en

$$m_N \frac{d^2 \mathbf{x}'_N}{dt'^2} = \sum_M \mathbf{F}(\mathbf{x}'_N - \mathbf{x}'_M)$$

Si uno está parado fuera del ascensor las cargas eléctricas deberían radiar. La radiación es un fenómeno de largo alcance. Luego localmente si se cae con una carga, el sujeto no siente nada.

De ahí que el observador original O quien usa coordenadas x, t , Y su amigo que cae libremente O' quien usa x', t' , sienten la misma fuerza. Salvo que O dirá que siente un campo gravitacional \mathbf{g} y O' dirá que no.

Las observaciones anteriores se refieren únicamente a un campo gravitacional estático homogéneo. Si es inhomogéneo entonces el objeto es pequeño.

Por lo tanto, formulamos el principio de equivalencia como el enunciado de que en cada punto del espacio-tiempo en un campo gravitacional arbitrario es posible elegir un "sistema de coordenadas localmente inercial" tal que, dentro de una región suficientemente pequeña del punto en cuestión, las leyes de la naturaleza toma la misma forma que en los sistemas de coordenadas cartesianos no acelerados en ausencia de gravitación.

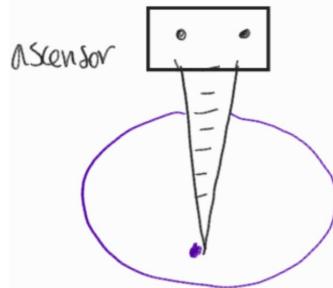


Figure 3.1: Dos pelotitas en un ascensor.

Las dos pelotitas van a caer hacia el centro y mientras eso ocurre se van a ir acercando. Y yo veo que sin que nadie mueva las pelotitas, estas comienzan a acercarse. Y entonces estamos en un campo inhomogéneo.

Luego en esta pequeña región puedo suponer que el espacio es plano, luego utilizo las ecuaciones en espacio plano como en Minkowski donde usamos las "," y pasamos a la derivada covariante en vez de "," le ponemos un ";".

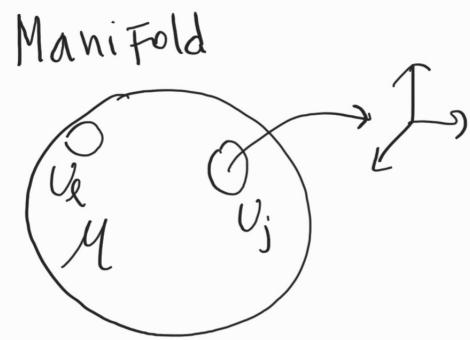


Figure 3.2: Manifold.

Cada puntito físico del Manifold M lo mapeamos, lo conectamos a un espacio plano en R^N . Esto es una transformación de coordenadas. Formalmente se dice que existe un homeomorfismo. Se puede mapear a R^N porque en RG debido al principio de equivalencia, siempre podemos encontrar un espacio chiquitito que es plano, donde la gravedad no existe (pero si existen las otras fuerzas). Es un conjunto de puntos topológicos, donde está bien definida la distancia a la que está su vecino.

En un campo gravitacional inhomogéneo, o dependiente del tiempo, podemos construir un sistema de coordenadas en el cual la materia satisface las leyes de la Relatividad General.

¿Qué tan pequeño?

En términos generales, queremos decir que la región debe ser lo suficientemente pequeña para que el campo gravitacional sea sensiblemente constante a lo largo de ella, pero no podemos ser más

precisos hasta que aprendamos a representar matemáticamente el campo gravitacional.

Principio de equivalencia fuerte: Existe un sistema inercial local para todas las fuerzas de la naturaleza.

Principio de equivalencia débil: Sólo para gravitación, leyes de movimiento para partículas en caída libre.

Cuando cae el átomo de hidrógeno lo que gravita es la energía de la partícula, hay una fuerza entre electrón y protón. Esas fuerzas negativas, de ligazón, como afectan. ¿Cae más rápido un tritio que un hidrógeno? pensando en que hay una interacción menos. No hay respuesta, lo que se ha medido es el principio de equivalencia débil.

Cada vez que encuentre un sistema donde se pueda, vamos a votar la gravitación, y usaremos el principio de covarianza.

3.2 Fuerzas gravitacionales

Considere una partícula que se mueve libremente bajo la influencia de fuerzas puramente gravitacionales. Según el principio de equivalencia, existe un sistema de coordenadas en caída libre ξ^α en el que su ecuación de movimiento es la de una línea recta en el espacio-tiempo, es decir, votamos la gravitación (fuerza gravitacional es cero) porque el ascensor cae con aceleración g y yo floto.

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (3.1)$$

con $d\tau$ el tiempo propio

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (3.2)$$

Ahora suponga que usamos cualquier otro sistema de coordenadas x^μ , que puede ser un sistema de coordenadas cartesianas en reposo en el laboratorio, pero también puede ser curvilíneo, acelerado, rotativo, o lo que queramos. Las coordenadas que caen libremente ξ^α son funciones de x^μ , y la ec. (3.1) se convierte en

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2}{d\tau^2} \xi^\mu = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \\ 0 &= \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \right) \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

Multiplicando esto por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\mu$, y usando la regla del producto

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\mu} \right) \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \right)}_{\delta_\alpha^\lambda} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \\ 0 &= \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^2 \partial x^\alpha} \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

Esto da la ecuación de movimiento

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{v\alpha}^\lambda \frac{dx^v}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

donde $\Gamma_{v\alpha}^\lambda$ es la conexión afín, definida por

$$\boxed{\Gamma_{v\alpha}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^2 \partial x^\alpha}}$$

Esta es la ecuación de la geodésica, la ecuación de movimiento generalizada en espacios curvos, general para cualquier sistema de referencia. Es lo que ve alguien fuera del ascensor.

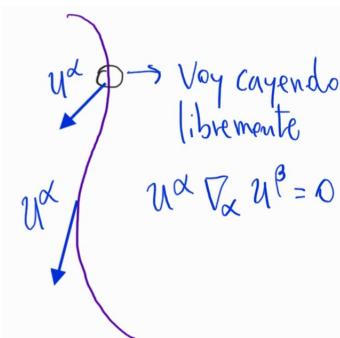


Figure 3.3: Transporte paralelo en geodesica

Este vector u^α está siendo transportado paralelamente, y esta es una geodésica.

El tiempo propio Ec. (3.2) también puede expresarse en un sistema de coordenadas arbitrario,

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

o

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, definido por

$$\boxed{g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}}$$

4. Topología diferencial

Cátedra del 7 de septiembre de 2021.

Referencias:

1. MTW pag. 230.
2. Lectures de geometría diferencial de Misner.
3. Schutz, métodos geométricos pag. 43, sección 2.13.

4.1 Condiciones de integrabilidad

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$

es la condición de integrabilidad en electromagnetismo para que exista un potencial. Cualquiera de los dos caminos sirve.

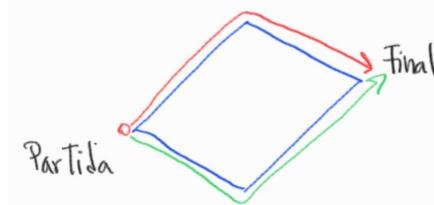


Figure 4.1: Cualquier camino sirve

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

El equivalente a esto en RG es el tensor de Riemann: $R_{\beta\gamma\sigma}^\alpha = 0 \implies$ plano.

Si $R = 0 \implies$ en cualquier espacio curvo, en cualquier sistema de referencia es cero. Si hay gravedad, hay tensor de Riemann, porque la gravedad se plasma en la curvatura del espacio-tiempo.

4.2 Bases, componentes y leyes de transformación para vectores

Agarro un espacio plano con 3 componentes cuyo parámetro es el tiempo.

Una base especialmente útil en el espacio tangente en un evento \mathcal{P}_0 es inducida por cualquier sistema de coordenadas [cuatro funciones, $x^0(\mathcal{P}), x^1(\mathcal{P}), x^2(\mathcal{P}), x^3(\mathcal{P})$] :

$$\mathbf{e}_0 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)_{x^1, x^2, x^3} = \begin{cases} \text{Derivada direccional a lo largo de la} \\ \text{curva con constante } (x^1, x^2, x^3) \\ \text{y con parámetro } \lambda = x^0 \end{cases}_{\text{en } \mathcal{P}_0}$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x^3}$$

Reemplazamos las flechitas con \mathbf{e}_i

Nos imaginamos un espacio en dos dimensiones. Consideremos geodésicas, línea verdes y azules.

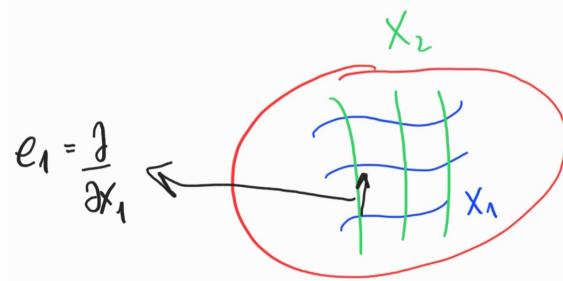


Figure 4.2: Cualquier camino sirve

Son las ganas de moverse en la dirección x_1 , manteniendo constante la ganas de moverse en x_2 constante.

Estos vectores transforman como $\mathbf{e}_{\alpha'} = \mathbf{e}_{\beta} L_{\alpha'}^{\beta}$;

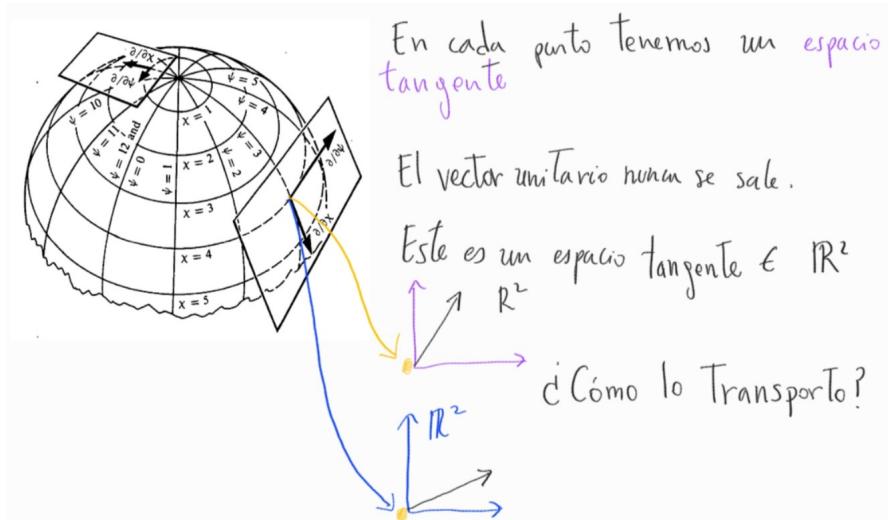


Figure 4.3: Manifold, vectores tangentes

Se hace un transporte paralelo, tengo que rotarlo, esta diferencia es el símbolo de conexión Γ , es lo que tengo que torcer el vector.

Cualquier vector \mathbf{u}

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{e}_{\alpha'} u^{\alpha'} = \left(\mathbf{e}_\gamma L_{\alpha'}^\gamma \right) \left(L_\beta^{\alpha'} u^\beta \right) = \mathbf{e}_\gamma \delta_\beta^\gamma u^\beta \\ \mathbf{u} &= \mathbf{e}_\beta u^\beta\end{aligned}$$

donde $L_{\alpha'}^\gamma$ es la matriz de Transformación. Así transforman los vectores base

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad L_{\alpha'}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}$$

4.3 1-Formas

Espacio cotangente: es el espacio de las 1-formas.

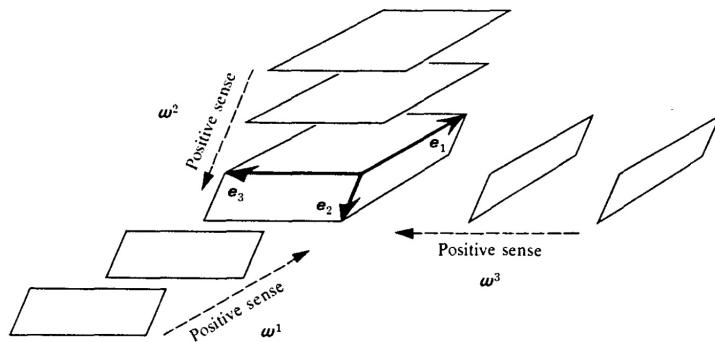


Figure 9.2.

Figure 4.4: Espacio cotangente

donde $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, son vectores unitarios cotangentes.

¿Cómo se construye el espacio cotangente?

ω_1 es perpendicular a e_2 y e_3 . Aquí ω_1 es un vector unitario cotangente, su espacio cotangente es el espacio de las 1-formas, base dual de 1-formas.

$\langle \omega^\beta e_\alpha \rangle = \delta^\beta_\alpha$ Este es el producto punto. ω^1 es colega con e_1 , no con e_2, e_3 , por eso espacio dual

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\alpha u^\alpha \quad (\text{definition of components of } \mathbf{u}), \quad (9.11a)$$

$$\sigma = \sigma_\beta \omega^\beta \quad (\text{definition of components of } \sigma), \quad (9.11b)$$

$$u^\alpha = \langle \omega^\alpha, \mathbf{u} \rangle \quad (\text{way to calculate components of } \mathbf{u}), \quad (9.11c)$$

$$\sigma_\beta = \langle \sigma, \mathbf{e}_\beta \rangle \quad (\text{way to calculate components of } \sigma), \quad (9.11d)$$

$$\langle \sigma, \mathbf{u} \rangle = \sigma_\alpha u^\alpha \quad (\text{way to calculate } \langle \sigma, \mathbf{u} \rangle \text{ using components}), \quad (9.11e)$$

$$\omega^{\alpha'} = L^{\alpha'}_\beta \omega^\beta \quad (\text{transformation law for 1-form basis, corresponding to equation 9.6}), \quad (9.11f)$$

$$\sigma_{\alpha'} = \sigma_\beta L^\beta_{\alpha'} \quad (\text{transformation law for 1-form components}). \quad (9.11g)$$

4.4 Comutadores

El Tensor de R es el comutador de 2 derivadas covariantes. Comutador actuando sobre vector = 0 ⇒ espacio plano.

Primero hagámoslo con vectores, $u[f] = \partial_u f$, donde f es un escalar

$$\partial \vec{u} = u^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

donde $u^\alpha(x)$ es la componente de u .

Las segundas derivadas

$$v\{u[f]\} = \partial_v (\partial_u f)$$

con v y u vectores tangentes.

$$[u, v][f] \equiv u\{v[f]\} - v\{u[f]\}$$

es la definición de comutador.

El ejemplo más simple $u = \partial/\partial x^\alpha, v = \partial/\partial x^\beta$ son vectores base de un sistema coordenado.

$$[\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta][f] = \partial^2 f / \partial x^\beta \partial x^\alpha - \partial^2 f / \partial x^\alpha \partial x^\beta = 0$$

Un comutador de 2 vectores construye un nuevo vector.

Pero, en general, el comutador es distinto de cero, como se ve en un cálculo basado en coordenadas:

$$\begin{aligned} [u, v]f &= u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(v^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} \right) - v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(u^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \left[\left(u^\alpha v^\beta_{,\alpha} - v^\alpha u^\beta_{,\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right] f. \end{aligned}$$

Box 9.2 THE COMMUTATOR AS A CLOSER OF QUADRILATERALS

A. Pictorial Representation in Flat Spacetime

1. For ease of visualization, consider flat spacetime, so the two vector fields $u(\mathcal{P})$ and $v(\mathcal{P})$ can be laid out in spacetime itself.
2. Choose an event \mathcal{P}_0 where the commutator $[u, v]$ is to be calculated.
3. Give the names $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ to the events pictured in the diagram.
4. Then the vector $\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3$, which measures how much the four-legged curve fails to close, can be expressed in a coordinate basis as

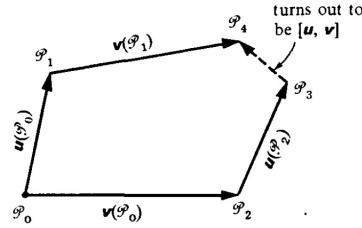


Figure 4.5: Representación geométrica de commutadores

Tomamos vectores pequeño \mathbf{u} y \mathbf{v} , los podemos dibujar como flechas.

Parte del punto \mathcal{P}_0 , tengo una vecindad \mathcal{P}_1 donde voy a través de \mathbf{u} , luego va a \mathcal{P}_4 mediante \mathbf{v} este es el conmutador de $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son base coordenados : no se cierra, como vimos arriba.

Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son coordenados \Rightarrow se cierra. $[e_\alpha, e_\beta] = [\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta] = 0$ en cualquier base de coordenadas.

Ejercicio 9.3, MTW Práctica manipulando vectores tangentes.

Sea \mathcal{P}_0 el punto con coordenadas $(x = 0, y = 1, z = 0)$ en un espacio tridimensional; y definimos una curva a través de \mathcal{P}_0 por

$$\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda, 1, \lambda)$$

(a) Calcule $(d/d\lambda)f$, para la función $f = x^2 - y^2 + z^2$ en el punto \mathcal{P}_0

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\lambda} \right) f &= \frac{dx}{d\lambda} \frac{d}{dx} - \frac{dy}{d\lambda} \frac{d}{dy} + \frac{dz}{d\lambda} \frac{d}{dz} \\ &= 1 \cdot 2x - 0 + 1 \cdot 2z \\ &= 2x + 2z. \end{aligned}$$

5. Formas diferenciales

Cátedra del 9 de septiembre de 2021 *Referencias:*

1. Schutz, métodos geométricos, pag. 49.
2. MTW.

5.1 1-forma

Definición: Una 1-forma es una función real, lineal de los vectores

$\tilde{\omega}$: 1-forma

\vec{v} : vector

$\tilde{\omega}(v)$: función

$\tilde{\omega}$ es un operador lineal

Ejemplo: Gradiente de una función f , denotemos por \tilde{df} .

A pesar que los libros de cálculo denominan el gradiente de una función f como un vector, no lo es

$$\tilde{df} \left(\frac{d}{d\lambda} \right) = \frac{df}{d\lambda}$$

esta es una uno forma actuando sobre el vector tangente (d/λ).

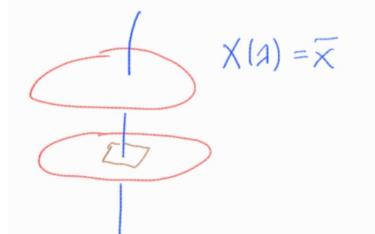


Figure 5.1: Representación geométrica de 1-forma

Por otro lado nuestro diferencial de siempre es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Formalismo: $\tilde{\omega}$ es continua si dada una variedad diferenciable μ y un campo vectorial $\bar{v}, c^\infty \tilde{\omega}(\bar{v})$ es una función continua c^∞ para cualquier \bar{v} que sea c^∞ .

Al espacio tangente, tenemos asociado el espacio cotangente. $T_p \rightarrow T_p^*$: espacio cotangente.

El valor de f es irrelevante para $\frac{df}{dx}$.

Para conocer $\frac{df}{d\lambda}$ en \mathcal{P} se requiere conocer $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ en ese punto.

dx^i es la base del espacio cotangente en el punto p , T_p^*

La derivada covariante trasladada paralelamente los vectores.

Ejemplo:

$$\hat{e}_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \tilde{\omega}^x = dx$$

donde dx es una dirección perpendicular a una superficie igual a $x = \text{constante}$.

$$df = f_{,i} \tilde{\omega}^i$$

es una 1-forma.

5.2 Métrica

Definimos un operador lineal que asocie un número real a dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in T_p$.

$$g(\vec{v}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{v}) \equiv \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Debe ser simétrico (en el espacio Euclídeo lo es).

Bilineal

$$\begin{aligned} g(\lambda \vec{u}, \vec{v}) &= \lambda g(\vec{u}, \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} \\ g(\vec{u}, \sigma \vec{v}) &= \sigma g(\vec{u}, \vec{v}) = \sigma \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Sus componentes en una base \hat{e}_i, \hat{e}_j

$$g_{\mu\nu} = g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$$

Como la métrica $S_{\mu\nu}$ es simétrica, se puede diagonalizar

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \equiv 0 \quad D$$

$0 \equiv$ matriz ortogonal

$$0T = 0^{-1}$$

$D = \text{diagonal}$

$$\begin{bmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^n \end{bmatrix} = [0D]^T g [0D]$$

$$0^\top g 0 = g_{\text{Diagonal}}$$

cambio el valor de g_{ii} (no el signo) \Rightarrow puedo transformar g_{ij} en \sim diagonal con +1 o -1. No se puede hacer global es una región en la vecindad de $p \in M$

Propiedades de $g_{\mu\nu}$: subir y bajar índices

v_i componente de \tilde{v}

$$v_i = \tilde{v}(e_i) = g(\tilde{v}, \bar{e}_i) = g(v^j \bar{e}_j, \bar{e}_i)$$

$$v_i = v^j \rho_{ji}$$

Es decir la métrica me conecta el espacio tangente con el espacio cotangente.

5.3 Transporte paralelo

$$\frac{D}{d\lambda} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = 0$$

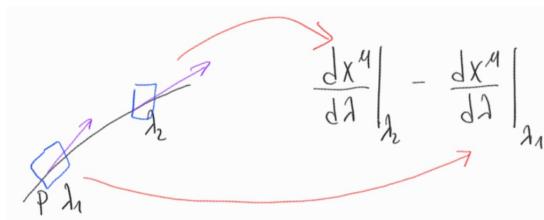


Figure 5.2: Transporte paralelo

Una geodésica es una curva a lo largo de la cual el vector tangente es transportado paralelamente
Es la curva más recta que se puede trazar en un espacio curvo.

Agarro el vector tangente y lo traslado un poquito más allá.

Luego el símbolo Γ lo rota manteniéndolo tangente a la curva

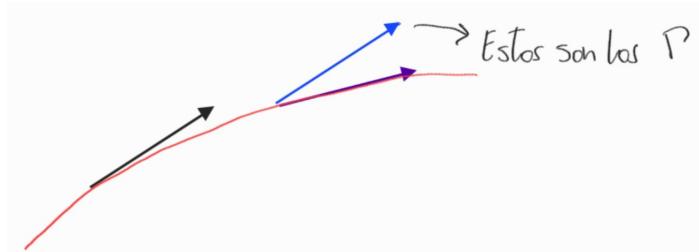


Figure 5.3: Representación geométrica de la conexión

En el caso cuando $\Gamma = 0$ entonces se mueve en un espacio plano.

6. Vectores de Killing

Cátedras del 21 y 23 de septiembre de 2021

Referencias:

1. Weinberg, Cap.13

6.1 Vectores de Killing

Son vectores de simetría.

Una métrica $g_{\mu\nu}(x)$ se dice que es invariante de forma bajo una transformación de coordenadas dada $x \rightarrow x'$, cuando la métrica transformada $g'_{\mu\nu}(x')$ es la misma función de su argumento x'^{μ} como la métrica original $g_{\mu\nu}(x)$ fue de su argumento x^{μ} , es decir,

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \quad \text{para todo } y \quad (6.1)$$

Esto es diferente de la condición de un escalar, que es que $S'(x') = S(x)$. En cualquier punto dado, la métrica transformada viene dada por la relación

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x)$$

Cuando (6.1) es válida, podemos reemplazar $g'_{\rho\sigma}(x')$ con $g_{\rho\sigma}(x')$ y así obtener el requisito fundamental para una invariancia de forma de la métrica:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x') \quad (6.2)$$

Cualquier transformación $x \rightarrow x'$ que satisfaga (6.2) se llama isometría. En general, la ec. (6.2) es una restricción muy complicada en la función $x'^{\mu}(x)$. Se puede simplificar enormemente descendiendo al caso especial de una transformación de coordenadas infinitesimal:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \zeta^\mu(x) \quad \text{con } |\varepsilon| \ll 1$$

A primer orden en ε , la ec. (6.2) da

$$0 = \frac{\partial \xi^\mu(x)}{\partial x^\rho} g_{\mu\rho}(x) + \frac{\partial \xi^\nu(x)}{\partial x^\sigma} g_{\rho\nu}(x) + \xi^\mu(x) \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^\mu}$$

Esto se puede reescribir en términos de derivadas de los componentes covariantes $\xi_\sigma \equiv g_{\mu\sigma} \xi^\mu$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x^\sigma} + \xi^\mu \left[\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma} \right] \\ &= \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x^\sigma} - 2\xi_\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \end{aligned}$$

o, de forma más compacta,

$$0 = \xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} \quad (6.3)$$

Cualquier campo de 4-vectores $\xi_\sigma(x)$ que satisface la ecuación (6.3) se dirá que forma un vector de Killing de la métrica $g_{\mu\nu}(x)$. El problema de determinar todas las isometrías infinitesimales de una métrica dada ahora se reduce al problema de determinar todos los vectores de Killing.

6.1.1 Ejemplo: Métrica Minkowski

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu$$

donde $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$

$$\xi^\mu = a^\mu \quad (\text{4-simetría})$$

$$\omega_{\mu\nu} \rightarrow \omega_{ij} = \epsilon_{ijk} x^k$$

$$\xi^i = \epsilon^{ijk} x^k x^j$$

$$= \epsilon_{ikl} x^k x^l$$

Luego

$$\begin{aligned} \xi_{i,j} &= \epsilon_{ikl} \left(\delta_j^k x^l + \delta_j^l x^k \right) \\ \xi_{j,i} &= \epsilon_{jkl} \left(\delta_i^k x^l + \delta_i^l x^k \right) \end{aligned}$$

Sumando

$$\begin{aligned} \xi_{i,j} + \xi_{j,i} &= \epsilon_{ijl} x^l + \epsilon_{ikj} x^k + \epsilon_{jil} x^l + \epsilon_{jki} x^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\omega_{01} x^1, \omega_{10}$$

$$\omega_{\mu\nu} = \left(\delta_\mu^0 \delta_\nu^k - \delta_\mu^k \delta_\nu^0 \right)$$

$$\xi_\mu = \omega_{\mu\lambda} x^\lambda = \delta_\mu^0 x^k - \delta_\mu^k x^0$$

Luego

$$\begin{aligned}\xi_{\mu,\rho} &= \delta_\rho^k \delta_\mu^0 - \delta_\mu^k \delta_\rho^0 \\ \xi_{\rho,\mu} &= \delta_\rho^0 \delta_\mu^k - \delta_\mu^0 \delta_\rho^k\end{aligned}$$

Sumando

$$\xi_{\mu,\rho} + \xi_{\rho,\mu} = 0$$

7. Desviación geodésica

7.1 Rotaciones

Vimos en la pizarra

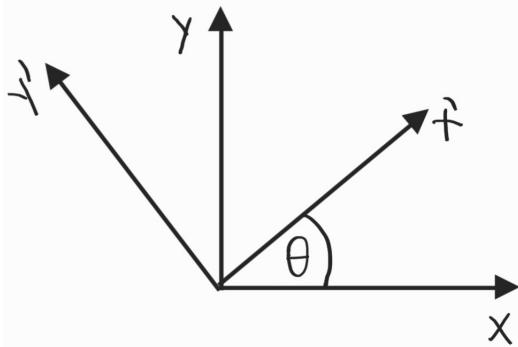


Figure 7.1: Rotación

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\delta J_z = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \delta\theta_3 \varepsilon_{123}$$

$$= 1 + \delta\theta_k \delta^k \varepsilon_{ijk}$$

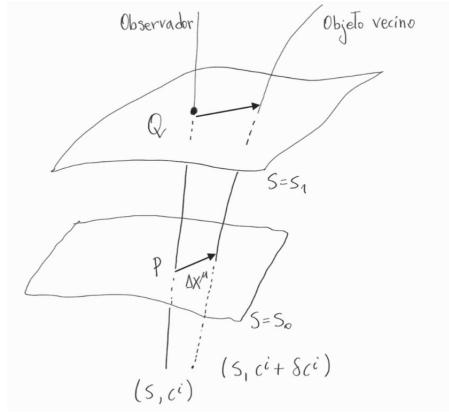


Figure 7.2: Representación de desviación geodésica

7.2 Desviación geodésica

$$u^\mu u_\mu = -1$$

$$u^\mu_{;\rho} u^\rho = 0$$

donde S es el parámetro afín.

Geodésica.

$$\Delta x^\mu u_\mu = 0, \Delta x^\mu = (0, \delta c')$$

son ortonormales

Pregunta: si $\Delta x^\mu u_\mu = 0$ en $s = 0$

$$\Delta x^\mu u_\mu = 0 \quad \forall s?$$

7.3 Transporte paralelo

$$\frac{D\Delta x^\mu}{ds} = \Delta x^\mu_{;\rho} u^\rho \quad (7.1)$$

$$\frac{D\Delta x^\mu}{ds} = \Delta x^\mu_{;\rho} u^\rho + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Delta x^\alpha u^\rho.$$

con $\Gamma^\mu_{\alpha\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\alpha}$
y como $u^\rho = \partial x^\rho / \partial s$,

$$\frac{D\Delta x^\mu}{ds} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial s} \Delta x^\mu}_{u^\rho \partial_\rho \Delta x^\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial s} \Delta x^\beta$$

$$\Delta x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial c^i} \delta c^i$$

$$\frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial s} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial s \partial c^i} \delta c^i = \frac{\partial}{\partial c^i} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial s} \right) \delta c^i$$

$$= \frac{\partial}{\partial c^i} (u^\mu) \delta c^i$$

$$\frac{D\Delta x^\mu}{ds} = \frac{\partial u^\mu}{\partial c^i} \delta c^i + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha \Delta x^\beta$$

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial c^i} \delta c^i = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial c^i} \delta c^i \right) = u_{;\rho}^\mu \Delta x^\rho$$

$$\Rightarrow \frac{D\Delta x^\mu}{ds} = u_{;\rho}^\mu \Delta x^\rho + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu u^\alpha \Delta x^\rho$$

$$\frac{D\Delta x^\mu}{ds} = u_{;\rho}^\mu \Delta x^\rho$$

(7.2)

Luego, las ecuaciones (7.1) y (7.2) indican que estamos en un sistema coordenado.

Y como es un sistema coordinado, se cumple que el conmutador de $\Delta(x)$ y u es cero. El paralelogramo de la figura se cierra.

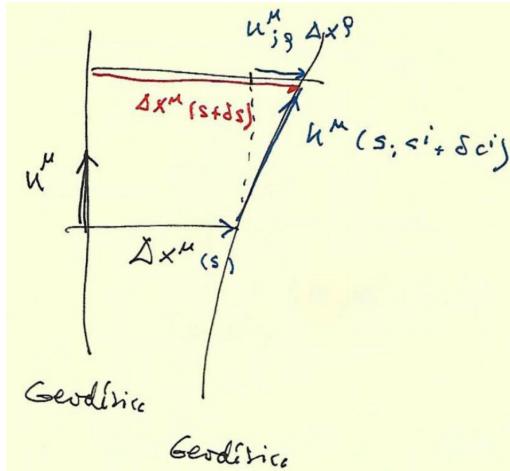


Figure 7.3: El paralelogramo se cierra.

$$\frac{D(\Delta x^\mu u_\mu)}{ds} = \frac{D\Delta x^\mu}{ds} u_\mu + \underbrace{\Delta x^\mu \frac{Du_\mu}{ds}}_{=0 \text{ (Geodesica)}}$$

$$\begin{aligned} &= u_{;\rho}^\mu \Delta x^\rho u_\mu \\ &= \underbrace{(u^\mu u_\mu)_{;\rho}}_{=0} \Delta x^\rho - u^\mu \Delta x^\rho u_{\mu;\rho} \\ &= -u_\mu \Delta x^\rho u_{;\rho}^\mu \end{aligned}$$

con (7.2)

$$\begin{aligned}\frac{D\Delta x^\mu u_\mu}{ds} &= 0 \\ \therefore S_i \Delta x^\mu u_\mu &= 0 \quad \text{para } s = 0 \\ \Rightarrow \Delta x^\mu u_\mu &= 0 \quad \forall s\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{D^2 \Delta x^\mu}{ds^2} = u_{;\rho;v}^\mu \Delta x^\rho u^v + u_{;\rho}^\mu \Delta x_{;\alpha}^\rho u^\alpha$$

como

$$\frac{D^2 \Delta x^\mu}{ds^2} = \frac{D(u_{;\rho}^\mu \Delta x^\rho)}{ds}$$

entonces, por ser un sistema coordenado

$$\begin{aligned}\frac{D(u_{;\rho}^\mu \Delta x^\rho)}{ds} &= u_{;\rho;v}^\mu \Delta x^\rho u^v + u_{;\rho}^\mu u_{;\alpha}^\rho \Delta x^\alpha \\ &= (u_{;\rho;v}^\mu u^v + u_{;v}^\mu u_{;\rho}^v) \Delta x^\rho \\ &= [u_{;\rho;v}^\mu u^v + (u_{;v}^\mu u^v)_{;\rho} - u_{;v;\rho}^\mu u^v] \Delta x^\rho\end{aligned}$$

$$\frac{D^2 \Delta x^\mu}{ds^2} = u_{;[\rho,v]}^\mu u^v \Delta x^\rho$$

$$\frac{D^2 \Delta x^\mu}{ds^2} = R_{\alpha v \rho}^\mu u^\alpha u^v \Delta x^\rho$$

$$u^\mu = [1, \vec{0}]$$

$$\Delta x^\rho = [0, \vec{\Delta x^i}]$$

$$\frac{D^2 \Delta x^\mu}{ds^2} = -R_{0k0}^i \Delta x^k$$

8. Derivada de Lie

Cátedras del 28 de septiembre de 2021

Referencias:

1. Wald, pag. 453

Transformación activa de componentes

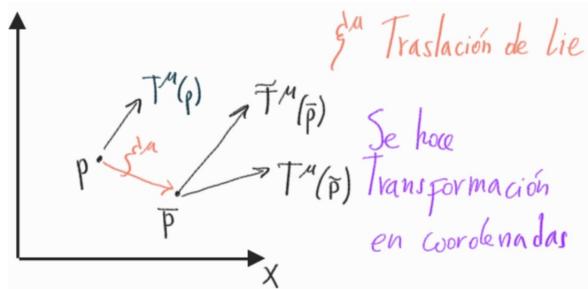


Figure 8.1: Representación geométrica de la derivada de Lie

Si consideramos el tensor $A^\mu{}_\nu(x_p) \rightarrow \tilde{A}^\mu{}_\nu(\bar{x}_p)$, aquí \bar{x}_p el nuevo punto donde se desplazó. Hay una traslación del vector que resulta en $\tilde{T}^\mu(\bar{p})$.

$\tilde{A}^\mu_\nu(\bar{x})$ es un nuevo campo tensorial definido a través de una transformación de coordenadas

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \quad , \quad x^\mu = \bar{x}^\mu - \xi^\mu(\bar{x})$$

$\xi^\mu(x)$ es el vector desplazamiento.

La transformación es

$$\bar{A}^\mu{}_\nu(\tilde{x}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} A^\alpha{}_\beta(x)$$

$$= \left(\delta^\mu{}_\alpha + \xi^\mu{}_{,\alpha} \right) \left(\delta^\beta{}_\nu - \xi^\mu{}_{,\nu} \right) \left[A^\alpha_\beta(\bar{x}) - A^\alpha_{\beta,\gamma}(\bar{x}) \xi^\gamma \right] + O(\xi^2)$$

donde $\delta^\mu{}_\alpha$ es de orden 0, y $\xi^\mu{}_{,\alpha}$ es de orden 1. Dejamos solo términos a primero orden
El término entre [] es $A^\alpha{}_\beta A^\alpha(x)$ expresado en el punto \bar{x} .

$$\bar{A}_v^\mu(\bar{x}) = A_v^\mu(\bar{x}) + \left[A_v^\alpha \xi^\mu{}_{,\alpha} - A_\beta^\mu \xi^\beta{}_{,\nu} - A_{v,\gamma}^\mu \xi^\gamma \right] + O(\xi^2)$$

Definimos la diferencial de Lie

$$\mathcal{L}_\xi A_v^\mu(x) \equiv A^\mu{}_\nu(\bar{x}) - \bar{A}_v^\mu(\bar{x}),$$

todo en el mismo punto

$$\mathcal{L}_\xi A_v^\mu(x) = -A_v^\alpha \xi^\mu{}_{,\alpha} + A_\beta^\mu \xi^\beta{}_{,\nu} + A_{v,\gamma}^\mu \xi^\gamma$$

es una derivada funcional

$$\mathcal{L}_\xi \phi = \phi_{,\mu} \xi^\mu$$

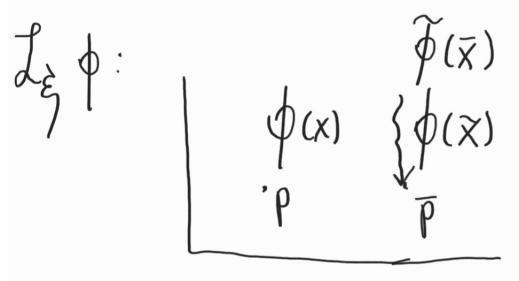


Figure 8.2: Derivada de Lie

$$\mathcal{L}_\xi \phi = \phi(\tilde{x}) - \bar{\phi}(\bar{x})$$

pero para un campo escalar

$$\phi(\bar{x}) \equiv \phi(x)$$

$$\Rightarrow \phi(\bar{x}) - \phi(x) = \phi_{,\mu} \xi^\mu$$

8.1 Acción de Einstein-Hilbert

Se define como densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} R$$

donde $-g$ es el determinante de la métrica, R es el escalar de Ricci.

$$R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &= +\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Uno quiere un \mathcal{L} que sea lineal en la segunda derivada **Acción de Hilbert**

$$S \left[g^{ab} \right] \int \mathcal{L}_{GE}$$

donde e es un invariante que representa al volumen, es una forma diferencial.

Vamos a variar la métrica $\delta S = 0$ la variamos $g^{\mu\nu}$ porque al variar la energía variaremos el espacio-tiempo. Si cambio la curvatura, cambio la densidad de energía en ese espacio.

$$\frac{d\mathcal{L}_G}{d\lambda} = \sqrt{-g}\delta R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g}R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + R\delta\sqrt{-g}$$

Es posible demostrar que

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \nabla^\alpha V_\alpha$$

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda \delta \Gamma_{v\mu}^\rho &= \partial_\lambda \left(\delta \Gamma_{v\mu}^\rho \right) + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \delta \Gamma_{v\mu}^\sigma - \Gamma_{\lambda v}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \delta \Gamma_{v\sigma}^\rho \\ \nabla_\lambda \delta \Gamma_{v\mu}^\rho &= \partial_\lambda \left(\delta \Gamma_{v\mu}^\rho \right) + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \delta \Gamma_{v\mu}^\sigma - \Gamma_{\lambda v}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \delta \Gamma_{v\sigma}^\rho\end{aligned}$$

Si $\nabla_\lambda \delta \Gamma_{v\mu}^\rho$ es un tensor, entonces siempre puedo tomar un sistema de coordenadas en que el Γ se haga cero y entonces el valor de la derivada (covariante) es el mismo en todos los sistemas de referencia. Luego entonces nos queda una expresión más sencilla que la anterior,

$$\nabla_\lambda \delta \Gamma_{v\mu}^\rho = \partial_\lambda \left(\delta \Gamma_{v\mu}^\rho \right)$$

Luego para el tensor de Riemann

$$R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma$$

Importante, cuando uno calcula que el tensor de Riemann es cero en un punto, no es cero en una región, por lo tanto la derivada no es cero. Por analogía, pensemos en una recta que pasa por el origen, en el origen, en el punto 0 vale cero, pero su pendiente es distinta de cero.

9. Tensor de energía impulso y proyectores

Cátedra del 7 de octubre de 2021

Referencias:

1. Wheeler
2. Cualquier libro en la parte de fluidos

El tensor de energía impulso se obtiene a través del lagrangiano.

Tenemos el invariante

$$\text{Energia cinetica} = \phi_{,\mu} \phi^{\mu} = g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}$$

Además se tiene la interacción

$$\text{Inter} = V(\phi)$$

Einstein postuló que los campos electricos y magnéticos viajaban en el espacio tiempo.

Para encontrar T tomamos el \mathcal{L} es un invariante y lo variamos con respecto a $g_{\mu\nu}$. Si cambio $g_{\mu\nu}$ cambia la geometría y para que la geometría cambie hay que agregar o quitar energía. Entonces el T depende de la métrica

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \sqrt{-g}$$

donde $\sqrt{-g} dx^4$ es un invariante

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{2\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (9.1)$$

Uno puede llegar a la expresión (la derivación esta en el Weinber)

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (9.2)$$

Y reemplazando (9.2) en (9.1) obtenemos

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Entonces a partir del \mathcal{L} del campo escalar, lo reemplazo en la expresión anterior y obtengo el $T^{\mu\nu}$

¿Y porqué esta operación lleva a un T?

Razón, se tiene una teoría covariante, si tengo un volumen ¿como le puedo cambiar la métrica? EL $T^{\mu\nu}$ es la variación de energía local.

Esto se relaciona con la acción de Einstein-Hilbert.

9.1 Coordenadas comoving normalizadas

$$u^\mu = \delta_0^\mu, u^i = \frac{du^i}{d\tau} = 0, \frac{ds}{d\tau} = 1$$

s ≡ Tiempo propio

En coordenadas generales (recordando lo visto en desviación geodésica)

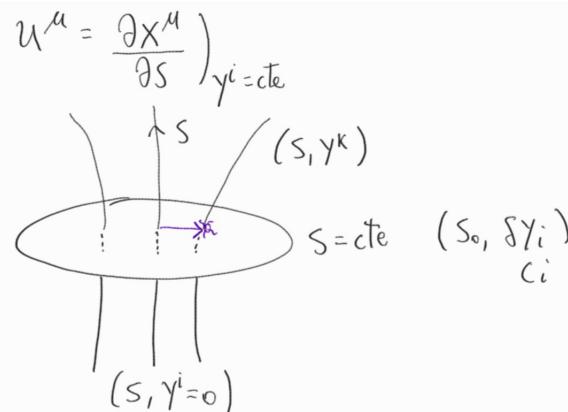


Figure 9.1: Representación de coordenadas comoving

9.2 Proyectores

$$U_v^\mu = -u^\mu u_v$$

$$U_v^\mu U_\rho^\mu = u^\mu u_v u^\nu u_\rho = -u^\mu u_\rho = U_\rho^\mu$$

$$U_v^\mu u_v = -u^\mu u_v u^\nu = u^\mu$$

La componente de cualquier vector en la dirección u^μ es

$$x_\parallel^\mu = U_\rho^\mu u^\rho = u^\mu$$

Ejemplo:

Suponga que usamos t como parámetro para un sistema de coordenadas comóviles (t, y^i) . ¿Cuánto vale u^μ y ds^2 ?

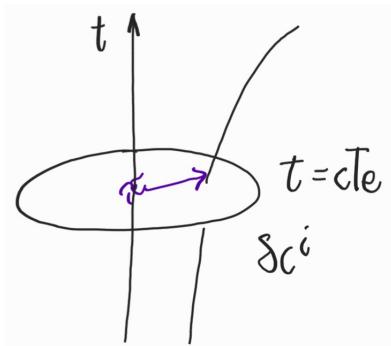


Figure 9.2: Ejemplo

$$\frac{dy^i}{dt} = 0$$

En las coordenadas fijas

$$dl^2 = -dt^2 + dx^2$$

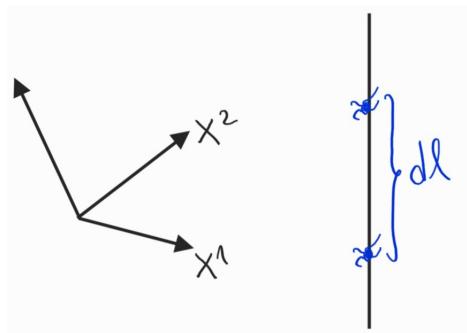


Figure 9.3: Ejemplo

$$\Rightarrow \frac{dl}{dt} = v \quad (y^i = 0)$$

$$u^\mu = \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dl} \frac{dl}{ds} = \frac{1}{v} \delta_0^\mu$$

$$u_\mu = g_{\mu\alpha} u^\alpha = g_{\mu 0} \frac{1}{v}$$

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{00} \frac{1}{v^2} = -1$$

$$u_\mu = \delta_\mu^0(-v)$$

A propósito del parámetro afín, tenemos una métrica cualquiera,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - (u_\mu dx^\mu)^2$$

donde $h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (\delta l)^2$ es la distancia entre dos objetos (poniendo t constante) y $(u_\mu dx^\mu)^2 = (\delta t)^2$, es el tiempo propio de mi sistema comóvil.

Entonces hemos descompuesto en una parte espacial perpendicular y una temporal.

Luego se tienen los operadores de proyección

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu$$

$$h_{\mu\nu}h_\rho^\nu = h_{\mu\rho}$$

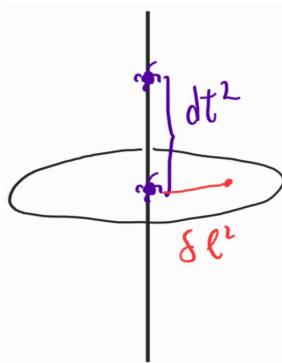


Figure 9.4: Representación de la distancia entre objetos

$$\dot{u}^\mu \equiv \frac{Du^\mu}{ds} = \frac{\partial u^\mu}{d\tau}$$

Coordenada comóvil.

$$\dot{u} = u^b \nabla_b u^a \Rightarrow \dot{u}^a u_a = 0$$

Si uno deriva en forma covariante la 4-velocidad (derivada covariante en una dirección μ) Como se va inclinando la 4-velocidad a medida que me desplazo, pero si quiero ver solamente las componentes en el plano entones proyecto cada uno de los índices β, γ con los operadores h

$$\nabla_\mu u_\alpha = h_\mu^\gamma h_\alpha^\beta \nabla_\mu u_\beta - \dot{u}_\alpha u_\mu$$

y a esto hay que quitarle la aceleración

$$\dot{u}_\alpha = a_\alpha$$

porque lo que estamos haciendo es una congruencia, un paquete de tallarines que se desparrama, no son geodésicas, son líneas continuas que no se tocan entre sí, y tienen aceleración.

$$h_\mu^\gamma u^\mu = 0$$

Se descompone el Tensor en una parte perpendicular y otra paralela a u^μ

$$\nabla_\gamma u_\beta = \frac{1}{2} (u_{\gamma;\beta} + u_{\beta;\gamma}) + \frac{1}{2} (-)$$

Veamos este término

$$\begin{aligned} h_\mu^\gamma h_\alpha^\beta \frac{1}{2} (u_{\gamma;\beta} + u_{\beta;\gamma}) &= \frac{1}{2} (\delta_\mu^\gamma + u_\mu u^\gamma) (\delta_\alpha^\beta + u_\alpha u^\beta) (u_{\gamma;\beta} + u_{\beta;\gamma}) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_\mu^\gamma + u_\mu u^\gamma) [(u_{\gamma;\alpha} + u_\alpha u^\beta u_{\gamma;\beta}) + u_{\alpha;\gamma} + u_\alpha u^\beta u_{\beta;\gamma}] \\ &= \frac{1}{2} (\delta_\mu^\gamma + u_\mu u^\gamma) (u_{\gamma;\alpha} + u_{\alpha;\gamma} + u_\alpha a_\gamma) \\ &= \frac{1}{2} [u_{\mu;\alpha} + u_{\alpha;\mu} + u_\alpha a_\mu + u_\mu (u^\gamma u_{\gamma;\alpha}) + u_\mu (u_{\alpha;\gamma} u^\gamma) + u_\alpha a_\gamma u_\mu u^\gamma] \end{aligned}$$

Así finalmente nos queda

$$h_\mu^\gamma h_\alpha^\beta \frac{1}{2} (u_{\gamma;\beta} + u_{\beta;\gamma}) = \frac{1}{2} (u_{\mu;\alpha} + u_{\alpha;\mu} + u_\mu a_\alpha + u_\alpha a_\mu)$$



10. Métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-

Cátedras del 5,7, 12 y 14 de octubre del 2021.

Nota: La cátedra del 30 de septiembre no se realizó por motivos de fuerza mayor.

Idea: Encontrar la métrica de FRWL a partir de las condiciones observadas en el flujo cósmico hoy.

Nota: es un cálculo más complejo pero conocido y con contenido físico reconocido en las variables utilizadas.

10.1 Hipótesis en Cosmología

Todos los puntos son iguales, es decir es isótropo.

Uno mira los vectores de Killing de las rotaciones, y estos deben ser vectores de Killing de la métrica.

Suponemos una cosmologíaa en que $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Una partícula puntual es una galaxia.

10.2 La métrica de FLRW

A medida que el tiempo pasa, se va expandiendo.

¿Cómo le encontramos una métrica?

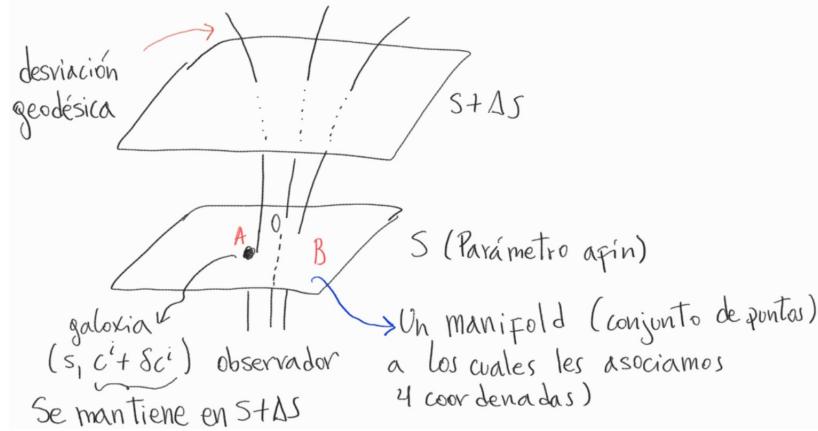


Figure 10.1: Representación de dos galaxias puntuales en un manifold que se expande con el tiempo

La galaxia cae de forma muy lenta, así que asumimos que se mueve en una geodésica.
Ponemos un sistema localmente

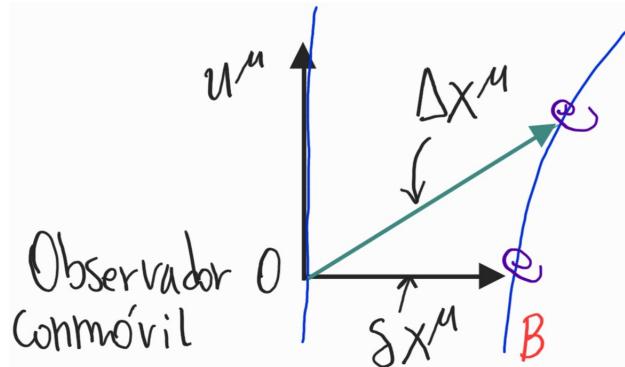


Figure 10.2: Sistema local. Trayectoria de una galaxia

La 4-velocidad la voy marcando con el tiempo de mi reloj.

$u^\mu u_\mu = -1$, es la métrica por ser pseudo Riemaniana.

$\delta x^\mu u_\mu = 0$, es decir son ortogonales (como se ve en el dibujo).

$$\delta x^\mu = a \Delta x^\mu + b u^\mu$$

multiplicando por u_μ

$$b = a u_\mu \Delta x^\mu$$

$$\boxed{\delta x^\mu = a[\Delta x^\mu + u_\rho \Delta x^\rho u^\mu]} \quad (10.1)$$

donde a es un parámetro que achico o agrando, no es importante.

$$\delta x^\mu = ah^\mu_v \Delta x^v$$

donde $h^\mu_v = (\delta^\mu_v + u^\mu u_v)$, es un proyector sobre la hipersuperficie en la dirección perpendicular a u^μ .

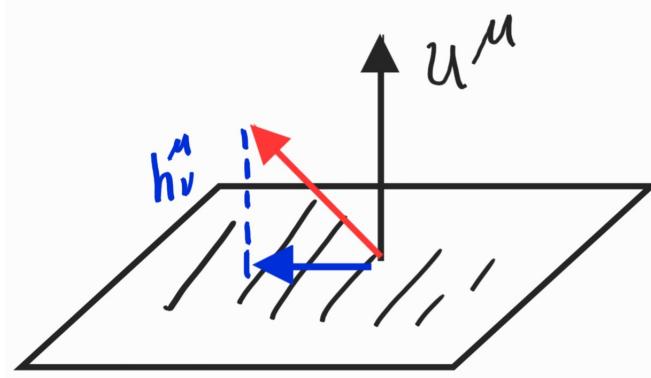


Figure 10.3: Proyector

Luego el vector Δx^μ , que es la distancia entre los puntos, se definen como:

$$\Delta x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial c^i} \delta c^i$$

Si $x^\mu = x^\mu(s, c^i)$ entonces es un sistema coordenado, si dan las 3 c^i puedo ubicar la galaxia.

$$\delta x^\mu = ah^\mu_v \Delta x^v$$

$$\Delta x^v = \frac{\partial x^v}{\partial c^j} \delta c^j$$

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial c^i} \delta c^i + \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \delta s \\ &= \Delta x^\mu + u^\mu \delta s \\ \delta s &= u^\rho \Delta x_\rho \end{aligned}$$

Como estamos en un sistema coordenado entonces el corchete de Lie es cero

$$\Rightarrow [u^\mu, \Delta x^\rho] = 0$$

$$u^\mu \Delta x_{,\mu}^\rho - \Delta x^\rho u^\mu_{;\rho} = 0 \quad (10.2)$$

Esto significa, primero traslado Δx^ρ a lo largo de u_μ y a eso le quito u_μ trasladado a lo largo de Δx^ρ . Como es un sistema covariante puedo ir de , a ;. Luego quiero conocer cuanto se está

acermando o alejando una galaxia.

Ahora vamos a calcular la Derivada covariante D, de este vector δx^μ , como varía este vector a ds (es decir a mi tiempo). Y utilizando (10.2) se obtiene:

$$\frac{D\delta x^\mu}{ds} = \left(a^\mu u_\rho + u^\mu a_\rho + u^\mu_{;\rho} \right) \Delta x^\rho. \quad (10.3)$$

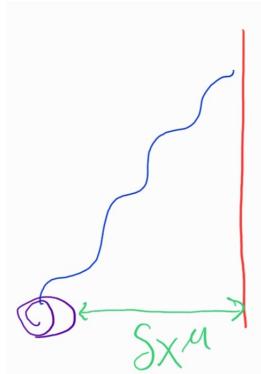


Figure 10.4: δx^μ

Estamos calculando la velocidad con que se alejan las galaxias desde el punto de vista del observador. La expresión (10.3) viene de lo que vimos anteriormente en ec. (10.1)

$$\delta x^\mu = a[\Delta x^\mu + u_\rho \Delta x^\rho u^\mu]$$

o usando el proyector

$$\delta x^\mu = a(h^\mu_v \Delta x^v)$$

y por la variación de δx^μ a lo largo de la 4-velocidad

$$\boxed{\frac{D\delta x^\mu}{ds} \equiv u^\alpha (\delta x^\mu)_{;\alpha}}$$

$$\left(\frac{D\delta x^\mu}{ds} \right) u_\mu = -a_\rho \Delta x^\rho$$

Estamos calculando la velocidad con que se alejan las galaxias desde mi punto de vista (observador), pero nadie me garantiza que a medida que se muevan sigan siendo perpendiculares a u^μ . Por lo tanto tengo que ocupar la proyección sobre el hiperplano $s = \text{cte}$ de la 4-velocidad $\frac{D\delta x^\mu}{ds}$, es decir la velocidad espacial efectiva:

$$v^\lambda \equiv h^\lambda_\mu \frac{D\delta x^\mu}{ds}$$

$$v^\lambda = \left(u^\lambda u_\mu + \delta^\lambda_\mu \right) \left(a^\mu u_\rho + u^\mu a_\rho + u^\mu_{;\rho} \right) \Delta x^\rho$$

$$v^\lambda = \left[u^\lambda u_\mu a^\mu u_\rho + u^\lambda_\mu u^\mu a_\rho + u^\lambda u_\mu u^\mu_{;\rho} + \delta^\lambda_\mu a^\mu u_\rho + \delta^\lambda_\mu u^\mu a_\rho + \delta^\lambda_\mu u^\mu_{;\rho} \right] \Delta x^\rho$$

Luego como $u^\lambda u_\mu a^\mu u_\rho = 0$,

$$u^\lambda u_\mu = -1,$$

$u^\lambda u_\mu u_{;\rho}^\mu = 0$, por que la norma es constante, si la traslado covariantemente es cero.

Con lo anterior nos queda:

$$v^\lambda = \left[-u^\mu a_\rho + a^\lambda u_\rho + u^\lambda a_\rho + u_{;\rho}^\lambda \right] \Delta x^\rho$$

$$v^\lambda = a^\lambda u_\rho \Delta x^\rho + u_{;\rho}^\lambda \Delta x^\rho$$

El primer término se reescribe como

$$a^\lambda u_\rho \Delta x^\rho = u_{;\sigma}^\lambda u^\sigma u_\rho \Delta x^\rho$$

usando la definición de δx^μ dada por (10.1)

$$\implies \frac{\delta x^\mu}{a} - \Delta x^\mu = u_\rho \Delta x^\rho u^\mu$$

y con esto nos queda

$$a^\lambda u_\rho \Delta x^\rho = u_{;\sigma}^\lambda \left[\frac{\delta x^\sigma}{a} - \Delta x^\sigma \right]$$

$$a^\lambda u_\rho \Delta x^\rho = u_{;\sigma}^\lambda \frac{\delta x^\sigma}{a} - u_{;\sigma}^\lambda \Delta x^\sigma$$

y la expresión para v^λ queda reducida a:

$$v^\lambda = a^\lambda u_\rho \Delta x^\rho + u_{;\sigma}^\lambda \Delta x^\rho$$

$$v^\lambda = u_{;\sigma}^\lambda \frac{\delta x^\sigma}{a} - u_{;\sigma}^\lambda \Delta x^\sigma + u_{;\rho}^\lambda \Delta x^\rho$$

$$v^\lambda = u_{;\sigma}^\lambda \frac{\delta x^\sigma}{a}.$$