Tareas Relatividad General

Profesor Nelson Zamorano

Ayudantes: Gabriel Marin M., Samuel Giordano M.

Eduardo Flández Guerrero

First release, August 2014

Contents

1 Geodésicas en el espacio 5

1.1 Geodésicas en el plano 5

1.2 Partícula moviéndose sobre superficie bidimensional 6

1.3 Partícula moviéndose sobre una esfera 9

2 Partícula libre en RF hiperbólico 13

3 Geodésicas en un sistema giratorio 19

4 Invariaza del intervalo 25

4.1 Schutz Problema 7.1 25

4.2 Schutz Problema 1.15 26

5 Grupo de rotación: generadores 29

6 Grupo de rotación: constantes de estructura 37

7 Geodésicas y coef. de conexión 41

8 Expansión, rotación y corte 45
8.1 Descomposición del gradiente de la 4-velocidad 46
8.2 Cizalle y rotación clásicos 50

9 Métrica de Schwarzschild 53
9.1 Semilla 53
9.2 Derivación de la métrica 54
9.3 Símbolos de Christoffel 56
9.4 Componentes del tensor de Ricci 58
9.5 Resolviendo los coeficientes 64
9.6 Anexo 67

10 Captura por un agujero negro 69

11 Deflexión de la luz 73

12 Sección eficaz para la luz de un AN 77

1. Geodésicas en el espacio

1.1 Geodésicas en el plano

En el plano euclidiano bidimensional, el elemento lineal viene dado por $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2$. Una curva $y = y(x)$ conecta dos puntos A y B en el plano. Por tanto, la distancia entre A y B a lo largo de la curva es:

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2}\right] dx \tag{1.1}$$

Si variamos ligeramente la forma de esta curva, pero manteniendo fijos los puntos finales A y B, se produciría un cambio $\delta \mathrm{S}$ de la longitud de la curva. Siempre que $\delta \mathrm{S} = 0$ para todas las pequeñas variaciones arbitrarias con respecto a una curva dada, entonces la curva es una curva geodésica. Encuentre la ecuación de Euler-Lagrange que corresponde a $\delta S = 0$ y demuestre que las curvas geodésicas en el plano son líneas rectas.

Solución:

Tenemos que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

con esto reescribimos (1.1) como

$$S = \int_A^B f\left(y, y'\right) dx$$

donde $f\left(y, y'\right) = \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}$. De acuerdo al principio variacional, buscamos la trayectoria $y(x)$ que da el valor mínimo de la integral S; es decir, que hace $\delta S = 0$. Por lo tanto, debemos hallar la ecuación de Euler-Lagrange ya que esta es que satisface esa condición,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Entonces derivamos respecto a y e y$'$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

y notamos que la ec. de E-L nos da

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0$$

esto implica entonces que

$$\frac{\mathrm{y}'}{\sqrt{1+(\mathrm{y}')^2}} = \mathrm{c} = \text{ constante}$$

elevando al cuadrado, despejamos y' obteniendo

$$\boxed{\mathrm{y}' = \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{1-\mathrm{c}^2}} \equiv \mathrm{a}},$$

y finalmente intefrando obtenemos la ecuación de la recta

$$\boxed{y = ax + b}$$

donde a y b son constantes que se pueden determinar a partir de los puntos dados A y B.

1.2 Partícula moviéndose sobre superficie bidimensional

Una partícula con masa m se mueve sin fricción sobre una superficie bidimensional incrustada en el espacio tridimensional. Escriba las expresiones para el Lagrangiano, L, y las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes para la partícula. Demuestre que L es una constante de movimiento y explique esto refiriéndose a las fuerzas que actúan sobre la partícula. Las curvas geodésicas se encuentran por variación de $S = \int_A^B ds$. Demuestre, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, que la partícula se mueve a lo largo de una curva geodésica con rapidez constante.

Solución:

Nos dicen que la partícula se mueve en una superficie bidimensional incrustada en el espacio Tridimensional. Pienso que debe existir una forma general de hacer esto, pero para resolverlo de manera sencilla (al menos para mí) es pensando en la superficie de un cilindro. En el libro de Hervik, se demuestra (y también lo hice por mi cuenta) que para sistemas físicos donde los lagrangianos dependen sólo de la energía cinética y no de la potencial, las ecuaciones de Lagrange están dadas por

$$\ddot{\mathrm{X}}^{\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\dot{\mathrm{x}}^{\mu}\dot{\mathrm{x}}^{\nu}=0$$

que corresponde a la ecuación de las geodésicas.

Tomando el vector posición

$$\vec{r}=r\cos\phi\hat{x}+r\sin\phi\hat{y}+z\hat{z}$$

Luego los vectores de la base son

$$\begin{gathered}\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}^{\mu}}\\ \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\phi}=\frac{\partial}{\partial\theta}\quad\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}}=\frac{\partial}{\partial\mathrm{z}}\end{gathered}$$

Por regla de la cadena tenemos,

$$\begin{gathered}\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\phi}=\frac{\partial}{\partial\phi}=\frac{\partial\mathrm{x}}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}}+\frac{\partial\mathrm{y}}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\mathrm{y}}+\frac{\partial\mathrm{z}}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\mathrm{z}}\\ \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\phi}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{r}}}{\partial\phi}=-r\sin\phi\hat{\mathrm{x}}+\cos\phi\hat{\mathrm{y}}\\ \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{r}}}{\partial\mathrm{z}}=\hat{\mathrm{z}}\end{gathered}$$

Ahora calculamos los símbolos de Christoffel:

Γ^{i}_{11} :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_{1}}{\partial\mathrm{u}^{1}}=&\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}_{1}}}{\partial\phi}=-r\cos\phi\hat{\mathrm{x}}-r\sin\phi\hat{\mathrm{y}}\\ &=(0)\overrightarrow{\mathrm{e}_{1}}+(0)\overrightarrow{\mathrm{e}_{2}}\\ &\Rightarrow\Gamma^{1}_{11}=\Gamma^{2}_{11}=0\end{aligned}$$

Γ^{i}_{12}

$$\begin{gathered}\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_{1}}{\partial\mathrm{u}^{2}}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}_{1}}}{\partial\mathrm{z}}=0\\ \Rightarrow\Gamma^{1}_{12}=\Gamma^{2}_{12}=\Gamma^{1}_{21}=\Gamma^{2}_{22}=0\end{gathered}$$

Γ^{i}_{22}

$$\begin{gathered}\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_{2}}{\partial\mathrm{u}^{2}}=\frac{\partial\hat{\mathrm{z}}}{\partial\mathrm{z}}=0\\ \Rightarrow\Gamma^{1}_{22}=\Gamma^{2}_{22}=0\end{gathered}$$

Notemos que, si bien $\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial\phi}$ no es nulo, los simbol os de Christoffel asociados sí son nulos, ya que $\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial\phi}$ es ortogonal a la superficie.

Luego como todos los símbolos de Christoffel son nulos, las ecuaciones de las geodésicas son

$$\ddot{\phi} = 0$$
$$\ddot{z} = 0$$

Lo anterior implica que

$$\dot{\phi} = \text{ constante } \Rightarrow \phi(\mathrm{s}) = \mathrm{m}_1 \ \mathrm{s} + \phi_0$$

$$\dot{z} = \textbf{constante} \implies z(s) = m_2 s + z_0.$$

Entonces la partícula se mueve a través de geodésicas con velocidad constante, con distintos tipos de soluciones como muestra la Fig. 1.1

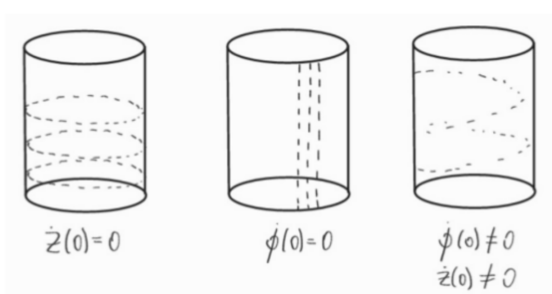


Figure 1.1: Geodésicas para una partícula que se mueve sobre la superficie de un cilindro.

1.3 Partícula moviéndose sobre una esfera

Una partícula se mueve sin fricción sobre una esfera. Exprese la función de Lagrange en términos de los ángulos polares θ y ϕ y encuentre las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes.

Los ejes de coordenadas se pueden elegir de modo que en el momento $\mathrm{t}=0, \theta=\pi/2 \mathrm{y} \dot{\theta}=0$. Muestre, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, que esto implica que θ es constante e igual a $\pi/2$ para todo t. Por lo tanto, la partícula se mueve en un círculo máximo, es decir, en una curva geodésica en la esfera.

Suponga además que en $\mathrm{t}=0, \theta=\pi/2$ y $\phi=0$, y en $\mathrm{t}=\mathrm{t}_1>0, \phi=\theta=\pi/2$. ¿A lo largo de qué tipo de curvas diferentes puede haber viajado la partícula para $0<t<t_1$ de modo que $\delta \int_0^{t_1} L dt=0$ para las diferentes curvas? Encuentre la integral de acción $S=\int_0^{t_1} L dt$ para las diferentes curvas. ¿Todas las curvas corresponden a los mínimos locales para la longitud total S?

Solución:

En una esfera, se cumple que la relación entre las coordenadas cartesianas y las polares esféricas es

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ds}^2 =& \mathrm{dx}^2+\mathrm{dy}^2+\mathrm{dz}^2 \\
=& \left[\left(\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \theta}\right)_\phi \mathrm{d}\theta+\left(\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \phi}\right)_\theta \mathrm{d}\phi\right]^2+\left[\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \theta}\right)_\phi \mathrm{d}\theta+\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \phi}\right)_\theta \mathrm{d}\phi\right]^2+\left[\left(\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}\theta}\right)\mathrm{d}\theta\right]^2 \\
=& (r\cos\theta\cos\phi\mathrm{d}\theta-r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi)^2+(r\cos\theta\sin\phi\mathrm{d}\theta+r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi)^2+(-r\sin\phi\mathrm{d}\phi)^2 \\
=& r^2\left(\cos^2\theta\cos^2\phi\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\sin^2\phi\mathrm{d}\phi^2-2\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right) \\
&+r^2\left(\cos^2\theta\sin^2\phi\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\cos^2\phi\mathrm{d}\phi^2+2\cos\theta\sin\theta\sin\phi\cos\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right) \\
&+r^2\left(\sin^2\theta\mathrm{d}\theta^2\right) \\
=& r^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \\
=& r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)
\end{aligned}
$$

Buscamos la función de Lagrange. Esta la podemos encontrar al minimizar la acción. El elemento de longitud en la superficie de una esfera de radio r es

$$
\mathrm{ds}=\mathrm{r}\sqrt{\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2}
$$

Entonces, la distancia entre dos puntos 1 y 2

$$S=\int_1^2 ds=r\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1+\sin^2\theta\phi'^2}d\theta \tag{1.2}$$

donde $\phi'=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}$. De aquí se desprende que la función de Lagrange es,

$$\boxed{L=\sqrt{1+\sin^2\theta\phi'^2}}$$

Notemos que L no depende de la coordenada generalizada θ, decimos entonces que θ es una coordenada cíclica, esto implica - de acuerdo al teorema de conservación- que existe un momento canónico conservado, en este caso, hablamos del momento angular p_θ. Decimos entonces que existe una simetría, que nos será útil en la segunda parte de este problema.

El hecho de que la integral de la ecuación (1.2) sea mínima - según el Principio variacional de Hamilton- implica las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\phi}=0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left\{\frac{\dot{\phi}\sin^2\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta\phi'^2}}\right\}=0\\
\left.\frac{\dot{\phi}\sin^2\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta\phi'^2}}\right\}=\mathrm{b}=\text{constante}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\phi}^2\sin^4\theta=\mathrm{b}^2+\mathrm{b}^2\sin^2\theta\phi'^2\\
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{b}}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta-\mathrm{b}^2}}\\
\phi=\mathrm{b}\int\frac{\csc^2\theta}{\sqrt{1-\mathrm{b}^2\csc^2\theta}}\mathrm{d}\theta+\mathrm{C}
\end{gathered}$$

para hacer esta integral usamos, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$,

$$\phi=\int\frac{\csc^2\theta}{\sqrt{\frac{\left(1-b^2\right)}{b^2}-\cot^2\theta}}\mathrm{d}\theta+\mathrm{C}$$

Sea, $d^2=\frac{\left(1-b^2\right)}{b^2}, yt=\cot\theta, dt=-\csc^2\theta d\theta$

$$\begin{gathered}
\phi=-\int\frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{\mathrm{d}^2-\mathrm{t}^2}}+\mathrm{C}\\
\phi=-\sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{d}}\right)+\mathrm{C}\\
-\mathrm{t}=\mathrm{d}\sin(\phi-\mathrm{C})\\
-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\mathrm{d}(\sin\phi\cos\mathrm{C}-\cos\phi\sin\mathrm{C})
\end{gathered}$$

$$-\cos\theta=A\sin\theta\sin\phi-B\sin\theta\cos\phi \tag{1.3}$$

Luego, $\mathrm{A}=\mathrm{d}\cos\mathrm{C}, \mathrm{B}=\mathrm{d}\sin\mathrm{C}$. Multiplicando ambos lados de la Ec. (1.3) por el radio r, podemos reconocer,

$$\begin{gathered}
r\sin\theta\sin\phi=y\\
r\sin\theta\cos\phi=x\\
r\cos\theta=z
\end{gathered}$$

obtenemos

$$\boxed{\mathrm{B}x - \mathrm{Ay} - \mathrm{z} = 0}. \tag{1.4}$$

Entonces, la curva de longitud más corta en la superficie de una esfera se encuentra en su intersección con un plano que pasa por el origen de la esfera como indica la Ec. (1.4), y esta es la definición de círculos mayores de radio r.

En primer lugar tenemos el vector posición

$$\overrightarrow{\mathrm{r}} = r\sin\theta\cos\phi\hat{\mathrm{x}} + r\sin\theta\sin\phi\hat{\mathrm{y}} + r\cos\theta\hat{\mathrm{z}}$$

Luego debido a que la partícula se mueve sobre una esfera, consideramos los vectores de la base de coordenadas definidos por

$$\overrightarrow{\mathrm{e}}_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^\mu}.$$

Luego tenemos

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} \quad \vec{e}_\phi = \frac{\partial}{\partial\phi}$$

Luego por regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{e}}_\theta = \tfrac{\partial}{\partial\theta} &= \tfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial\theta}\tfrac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \tfrac{\partial \mathrm{y}}{\partial\theta}\tfrac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + \tfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial\theta}\tfrac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\\
\overrightarrow{\mathrm{e}}_\theta = \tfrac{\partial\overrightarrow{\mathrm{r}}}{\partial\theta} &= r\cos\theta\cos\phi\hat{\mathrm{x}} + r\cos\theta\sin\phi\hat{\mathrm{y}} - r\sin\hat{\mathrm{z}}\\
\overrightarrow{\mathrm{e}}_2 = \tfrac{\partial\overrightarrow{\mathrm{r}}}{\partial \mathrm{x}^2} = \tfrac{\partial\overrightarrow{\mathrm{r}}}{\partial\phi} &= -r\sin\theta\sin\phi\hat{\mathrm{x}} + r\sin\theta\cos\phi\hat{\mathrm{y}}
\end{aligned}$$

Ahora calculamos los símbolos de Christoffel

Γ^{i}_{11} :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_1}{\partial \mathrm{u}^1} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_1}{\partial\theta} = -r\sin\theta\cos\phi\hat{\mathrm{x}} - r\sin\theta\sin\phi\hat{\mathrm{y}} - r\cos\theta\hat{\mathrm{z}}&\\
&= (0)\overrightarrow{\mathrm{e}}_\theta + (0)\overrightarrow{\mathrm{e}}_\phi\\
&\Rightarrow \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0
\end{aligned}$$

Γ^{i}_{12} :

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_1}{\partial \mathrm{u}^2} = \tfrac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_1}{\partial\phi} &= -r\cos\theta\sin\phi\hat{\mathrm{x}} + r\cos\theta\\
&= \cot\theta\,\overrightarrow{\mathrm{e}}_2\\
\Rightarrow \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \mathrm{cotan}\,\theta\\
\Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21} = 0
\end{aligned}$$

Γ^{i}_{22}

$$\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_2}{\partial \mathrm{u}^2} = \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_2}{\partial\phi} = -r\sin\theta\cos\phi\hat{\mathrm{x}} - r\sin\theta\sin\phi\hat{\mathrm{y}}$$

Luego para obtener las componentes usamos el producto

$$\Gamma^1_{22}\left(\overrightarrow{\mathrm{e}}_1\cdot\overrightarrow{\mathrm{e}}_1\right)=\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_2}{\partial \mathrm{u}^2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{e}}_1=-\mathrm{r}^2\sin\theta\cos\theta$$
$$\Rightarrow\Gamma^1_{22}=-\sin\theta\cos\theta$$
$$\Gamma^2_{22}\left(\overrightarrow{\mathrm{e}}_2\cdot\overrightarrow{\mathrm{e}}_1\right)=\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{e}}_2}{\partial \mathrm{u}^2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{e}}_2=0$$
$$\Rightarrow\Gamma^2_{22}=0$$

De lo anterior, obtenemos las ecuaciones:

$$\boxed{\frac{d^2u^1}{ds^2}+\Gamma^1_{ij}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}=\ddot{\theta}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=0},$$

$$\boxed{\frac{d^2u^2}{ds^2}+\Gamma^2_{ij}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}=\ddot{\phi}+2\,\mathrm{cotan}\,\theta\frac{d\phi}{ds}\frac{d\theta}{ds}=0}$$

Podemos notar que la esfera es invariante bajo rotaciones (Fig. 1.2, luego, para un tiempo $t=0$, podemos rotar el sistema de referencia hasta obtener $\theta(0)=\pi/2, \dot{\theta}(0)=0$, y digamos por completitud que $\dot{\phi}=\Omega$. Con estas condiciones iniciales, la solución que obtenemos es $\theta(\mathrm{s})=\pi/2, \phi(\mathrm{s})=\Omega\mathrm{s}+\phi_0$, que corresponde a los círculos mayores de la esfera de radio r.

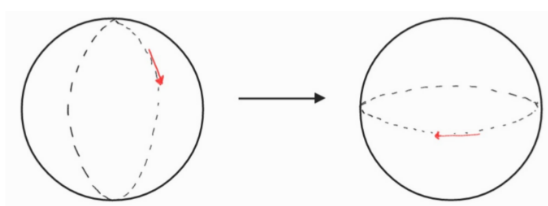


Figure 1.2: Rotación de la esfera para que la curva en $S=0$ y su velocidad estén orientadas sobre el ecuador.

2. Partícula libre en RF hiperbólico

La métrica para un espacio bidimensional viene dada por:

$$ds^2 = -V^2 dU^2 + dV^2$$

(a) Encuentre las ecuaciones de Euler-Lagrange para el movimiento de una partícula libre usando esta métrica. Demuestre que admiten las siguientes soluciones:

$$\frac{1}{\mathrm{V}} = \frac{1}{\mathrm{V}_0} \cosh\left(\mathrm{U} - \mathrm{U}_0\right)$$

¿Cuál es la interpretación física de las constantes $\mathrm{U}_0\mathbf{y}\mathrm{V}_0$?

(b) Demuestre que estas son líneas rectas en el sistema de coordenadas (t, x) dado por:

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= \mathrm{V} \cosh \mathrm{U} \\ \mathrm{t} &= \mathrm{V} \sinh \mathrm{U} \end{aligned}$$

Exprese la rapidez de la partícula en términos de U_0 y su componente x en $\mathrm{t} = 0$ en términos de $\mathrm{V}_0\mathbf{y}\mathrm{U}_0$. Encuentre el intervalo ds ^{2} expresado en términos de x y t, y demuestre que el espacio en el que se mueve la partícula es un espacio de Minkowski con una dimensión temporal y una dimensión espacial.

(c) Exprese la componente covariante p_U de la cantidad de movimiento usando $\mathrm{p}_\mathrm{t} = -\mathrm{E}$ y $\mathrm{p}_\mathrm{x} = \mathrm{p}$, y demuestre que es una constante de movimiento. ¿Cómo se puede extraer este hecho directamente de la métrica? Demuestre además que el componente contravariante p_U no es una constante de movimiento. ¿Son p_V o p_V constantes de movimiento?

Solución:

De forma general sabemos que

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{dx}^\mu \mathrm{dx}^\nu$$

De lo anterior inferimos que

$$\begin{gathered}\overrightarrow{e}_{\mathrm{U}} \cdot \overrightarrow{e}_{\mathrm{V}} = -\mathrm{V}^2 \\ \overrightarrow{e}_{\mathrm{V}} \cdot \overrightarrow{e}_{\mathrm{V}} = 1 \\ \overrightarrow{e}_{\mathrm{V}} \cdot \overrightarrow{e}_{\mathrm{V}} = \overrightarrow{e}_{\mathrm{V}} \cdot \overrightarrow{e}_{\mathrm{V}} = 0 \\ \Rightarrow g_{\mathrm{UV}} = -\mathrm{V}^2,\ \mathrm{g}_{\mathrm{VV}} = 1\end{gathered}$$

Por lo tanto la métrica es,

$$\mathrm{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\mathrm{V}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Existen sistemas de referencia hiperbólicos acelerados, donde un partícula tiene una aceleración constante g. Se parte con una velocidad u

$$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{gT}}{\left(1 + \frac{\mathrm{g}^2\ \mathrm{T}^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{1/2}} = \frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dT}}$$

Se tiene además un tiempo propio medido por un reloj solidario con la partícula,

$$\mathrm{d}\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{c}^2}\right)^{1/2} \mathrm{dT}$$

Luego integrando, se llega a

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{c}{g} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{gT}{c}\right) \\ T &= \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \\ X &= \frac{c^2}{g} \cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) + k\end{aligned}$$

En el caso de la constante k, si se considera $k = 0$, además $c = 1$, si obtienen las coordenadas de Rindler.

$$\begin{gathered}\mathrm{X} = \tfrac{1}{\mathrm{g}} \cosh(\mathrm{g}\tau) \\ \mathrm{T} = \tfrac{1}{\mathrm{g}} \sinh(\mathrm{g}\tau)\end{gathered}$$

Aquí $\mathrm{V} = \frac{1}{\mathrm{g}}$, y U está relacionado con el tiempo propio τ mediante $\mathrm{U} = \mathrm{g}\tau$. Cuando esto ocurre entonces las coordenadas hiperbólicas se denominan coordenadas de Rindler en 2 dimensiones. Hecha la comparación, voy a seguir usando la notación antigua porque sino no me sale. Con lo anterior entonces podemos escribir el Lagrangiano como

$$L = \frac{1}{2}\left(-\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)^2 \dot{t}^2 + \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)$$

ó

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{V}^2+1\right)\dot{\mathrm{x}}^{\mathrm{U}}\dot{\mathrm{x}}^{\mathrm{V}}$$

Y usando Euler-Lagrange obtenemos la ecuación:

$$\boxed{\ddot{x} + \left(1+\frac{gx}{c^2}\right)g\dot{t}^2 = 0},$$

Que en términos de las geodésicas es

$$\ddot{\mathrm{x}}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\dot{\mathrm{x}}^{\mu}\dot{\mathrm{x}}^{\nu} = 0$$

donde los $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ están definidos como,

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv \tfrac{1}{2}\,\mathrm{g}^{\alpha\beta}\left(\mathrm{g}_{\beta\mu,\nu} + \mathrm{g}_{\beta\nu,\mu} - \mathrm{g}_{\mu\nu,\beta}\right)$$
$$\mathrm{g}_{\mathrm{tt}} = -\left(1+\tfrac{\mathrm{gx}}{\mathrm{c}^2}\right)^2\mathrm{c}^2, \qquad \mathrm{g}_{\mathrm{XX}} = \mathrm{g}_{\mathrm{yy}} = \mathrm{g}_{\mathrm{zz}} = 1$$

Luego los los términos no nulos de los símbolos de Cristofeel son

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathrm{t}}_{\mathrm{xt}} = \Gamma^{\mathrm{t}}_{\mathrm{tx}} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{\mathrm{tt}}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{\mathrm{tt}}}{\partial \mathrm{x}}\right)\\
&= \frac{1}{2\,\mathrm{g}_{\mathrm{tt}}}\frac{\partial \mathrm{g}_{\mathrm{tt}}}{\partial \mathrm{x}}\\
&= \frac{2\left(1+\frac{\mathrm{gx}}{\mathrm{c}^2}\right)\mathrm{g}}{2\left(1+\frac{\mathrm{gx}}{\mathrm{c}^2}\right)^2\mathrm{c}^2}\\
&= \frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{gx}}{\mathrm{c}^2}\right)\mathrm{g}^2}\\
\Gamma^{\mathrm{x}}_{\mathrm{tt}} &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{\mathrm{xx}}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{\mathrm{tt}}}{\partial \mathrm{x}}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left\{-2\left(1+\frac{\mathrm{gx}}{\mathrm{c}^2}\right)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}^2}\mathrm{c}^2\right\}\\
&= \left(1+\frac{\mathrm{gx}}{\mathrm{c}^2}\right)\mathrm{g}
\end{aligned}$$

(b) Las coordenadas del sistema inercial son (T, X, Y,Z) y el sistema acelerado tiene coordenadas $(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$

Luego, el vector de posición de un punto P es $\overrightarrow{\mathrm{X}} = \overrightarrow{\mathrm{X}}_0 + \hat{\mathrm{X}}$, como se puede apreciar en la Fig. 2.1. La relación entre las bases de vectores en el sistema inercial y las bases ortonormales comóviles están dadas por una transformación de Lorentz en la dirección x.

$$\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\hat{\mu}} = \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mu} \frac{\partial \mathrm{x}^{\mu}}{\partial \mathrm{x}\hat{\mu}}$$

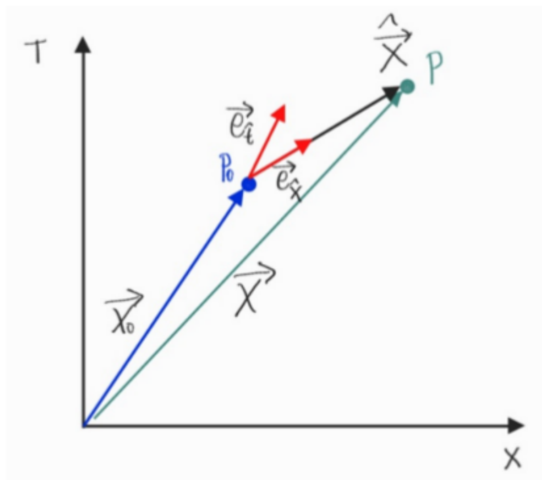


Figure 2.1: Posición de un punto *P* en un sistema de referencia hiperbólico acelerado.

$$\vec{e}_{\hat{\mu}} = (\vec{e}_{\mathrm{T}}, \overrightarrow{\mathrm{e}}_X) \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}.$$
$$\vec{e}_{\hat{t}} = \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{T}} \cosh\tfrac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} + \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{X}} \sinh\tfrac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\hat{x}} = \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{T}} \sinh\tfrac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} + \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{X}} \cosh\tfrac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}}$$

La ecuación $\vec{X} = \vec{X}_0 + \hat{X}$ la podemos descomponer en el sistema de referencia inercial,

$$\mathrm{T}\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{T}} + \mathrm{X}\mathrm{e}_{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{g}} \sinh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{g}} \left(\cosh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} - 1\right) \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{X}} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{c}} \sinh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{T}} + \mathrm{x}\cosh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} \overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{X}}$$

Con esto tenemos las transformaciones de coordenadas

$$\begin{aligned}
\mathrm{T} &= \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{g}} \sinh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{c}} \sinh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} \\
\mathrm{X} &= \frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{g}} \left(\cosh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} - 1\right) + \mathrm{x}\cosh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} \\
\mathrm{Y} &= \mathrm{y} \\
\mathrm{Z} &= \mathrm{z} \\
\frac{\mathrm{gT}}{\mathrm{c}} &= \left(1 + \frac{\mathrm{gx}}{\mathrm{c}^2}\right) \sinh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}} \\
1 + \frac{\mathrm{gX}}{\mathrm{c}^2} &= \left(1 + \frac{\mathrm{gx}}{\mathrm{c}^2}\right) \cosh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}}
\end{aligned}$$

Luego dividiendo entre las dos últimas ecuaciones, se tiene,

$$\frac{\mathrm{gT}}{\mathrm{c}} = \left(1 + \frac{\mathrm{gX}}{\mathrm{c}^2}\right) \tanh \frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}}$$

entonces las curvas coordenadas $\mathrm{t} =$ constante son líneas rectas en el sistema $\mathrm{T}, \mathrm{X}-$ que atraviesan por el punto $\mathrm{T} = 0, \mathrm{X} = -\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{g}}$. Luego usando la identidad $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ se tiene,

$$\left(1 + \frac{gX}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{gT}{c}\right)^2 = \left(1 + \frac{gX}{c^2}\right)^2$$

y vemos que las curvas de las coordenadas $x =$ constante, son hiperbolas en el diagrama $T, X-$, de la Fig. 2.2.

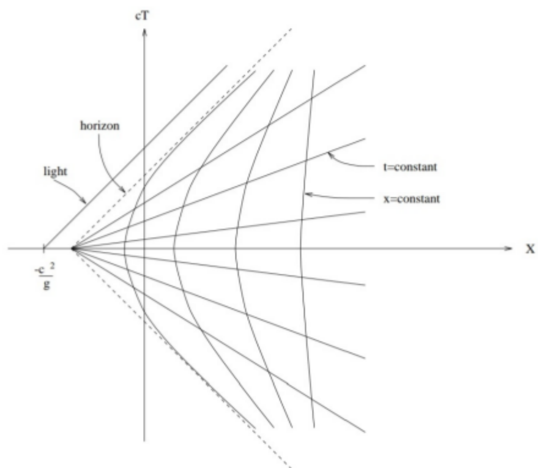


Figure 2.2: Sistema de referencia hiperbólico acelerado.

La rapidez de la partícula es

$$\mathrm{U}_0 = \frac{\mathrm{dX}_0}{\mathrm{d\ T}_0} = \mathrm{c}\tanh\frac{\mathrm{gt}}{\mathrm{c}}$$

Luego, la coordenada de la partícula en el origen es X_0

$$1 + \frac{gX_0}{c^2} = \cosh \frac{g\tau_0}{c}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= \mathrm{V} \cosh \mathrm{U} \\ \mathrm{t} &= \mathrm{V} \sinh \mathrm{U} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} x^2 - t^2 &= V^2 \cosh^2 U - V^2 \sinh U \\ x^2 - t^2 &= V^2 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{dx} &= \mathrm{dV}\cosh\mathrm{U} + \mathrm{dUV}\sinh\mathrm{U} \\
\mathrm{dt} &= \mathrm{dV}\sinh\mathrm{U} + \mathrm{dUV}\cosh\mathrm{U} \\
\Rightarrow \quad \mathrm{dV} &= \mathrm{dx}\cosh\mathrm{U} - \mathrm{dt}\sinh\mathrm{U} \\
\mathrm{dU} &= \frac{1}{\mathrm{V}}(\mathrm{dt}\cosh\mathrm{U} - \mathrm{dx}\sinh\mathrm{U})
\end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión de la métrica

$$\begin{aligned}
&ds^2 = dV^2 - V^2 du^2 \\
&ds^2 = (dx\cosh U - dt\sinh u)^2 - v^2\left[\tfrac{1}{V}(dt\cosh U - dx\sinh U)\right] \\
&= dx^2\cosh^2 U + dt^2\sinh^2 u - 2dtdx\cosh U\sinh U - V^2\left[\tfrac{1}{v^2}\left(dt^2\cos^2 U + \right.\right. \\
&\left.\left. + dx^2\sinh U^2 - 2dtdx\cosh U\sinh U\right)\right] \\
&= dx^2\left(\cosh^2 U - \sinh^2 U\right) - dt^2\left(\cosh^2 U - \sinh^2 U\right)
\end{aligned}$$

y finalmente encontramos que

$$\boxed{\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{v}^2\mathrm{du}^2 + \mathrm{dv}^2 = \mathrm{dx}^2 - \mathrm{dt}^2},$$

que corresponde al espacio de Minkowski en 1+1 dimensión.

3. Geodésicas en un sistema giratorio

Estudiamos un marco de referencia rotatorio al comienzo de este capítulo y ahora consideraremos las geodésicas espaciales en este marco de referencia. Considere la métrica espacial:

$$\mathrm{d}\ell^2 = \mathrm{dr}^2 + \frac{\mathrm{r}^2}{1-\frac{\omega^2\mathrm{r}^2}{\mathrm{c}^2}}\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{dz}^2$$

Usando el Lagrangiano $\mathrm{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2$ se calcularán las curvas de distancia más corta entre puntos. En aras de la simplicidad asumiremos que $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}\lambda} = 0$, es decir, la curva es plana.

(a) Suponga que el parámetro λ es la longitud del arco de la curva. ¿Cuál es la identidad de "tres velocidades" en este caso?

(b) El sistema posee una coordenada cíclica. ¿Qué coordenada es esa? Establezca la expresión para la constante de movimiento correspondiente.

(c) Encuentre las expresiones para $\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\lambda}$ y $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}$ en función de r. Deduzca la ecuación diferencial de la curva.

(d) Use la condición inicial $\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\lambda} = 0$ para $\mathrm{r} = \mathrm{r}_0$y muestre que:

$$\frac{\mathrm{p}_\theta}{\mathrm{r}_0} = \sqrt{1+\frac{\omega^2\mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{c}^2}}$$

(e) Muestre que la ecuación diferencial puede ser escrita como:

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}\sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{r}_0^2}} - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\frac{\mathrm{rdr}}{\sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{r}_0^2}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{r}_0}$$

Integre esta ecuación y encuentre la ecuación de la curva. Finalmente, dibuje la curva.

Solución:

Usando el Lagrangiano

$$\mathrm{L}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2$$

asumiendo que la curva es plana, es decir, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}=0$,

$$\mathrm{L}=\frac{1}{2}\mathrm{r}^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{r}^2\dot{\theta}^2}{1-\frac{\mathrm{r}^2\omega^2}{\mathrm{c}^2}}$$

Usando $\vec{u}\cdot\vec{u}=1$, la identidad de 3-velocidad es

$$\boxed{\dot{r}^2+\frac{r^2\dot{\theta}^2}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}=1}.$$

Si miramos el Lagrangiano notamos que este no depende explícitamente de θ por lo tanto

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\theta}=0$$
$$\boxed{\therefore\theta=\text{ ciclica}}$$

por lo tanto el momento conjugado es constante de movimiento,

$$\boxed{\mathrm{p}_\theta=\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\mathrm{r}^2\dot{\theta}}{1-\frac{\mathrm{r}^2\omega^2}{\mathrm{c}^2}}=\text{ constante}}$$

Ahora para encontrar $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}=\dot{\theta}$, despejamos $\dot{\theta}$ de la expresión anterior

$$\boxed{\dot{\theta}=\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)\frac{p_\theta}{r^2}},$$

luego para hallar $\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\lambda}=\dot{\mathrm{r}}$, reemplazamos $\dot{\theta}^2$ en la expresión para $\dot{\mathrm{r}}^2$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{r}}^2 &= 1-\frac{\mathrm{r}^2}{1-\frac{\mathrm{r}^2\omega^2}{\mathrm{c}^2}}\dot{\theta}^2\\
&= 1-\frac{\mathrm{r}^2}{\left(1-\frac{\mathrm{r}^2\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)}\left(1-\frac{\mathrm{r}^2\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)^2\frac{\mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{r}^4}\\
&= 1-\frac{\mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{r}^2}\left(1-\frac{\mathrm{r}^2\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)\\
\dot{\mathrm{r}}^2 &= 1+\frac{\omega^2\mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{c}^2}-\frac{\mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{r}^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{r} = \sqrt{1 + \frac{\omega^2 \mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{c}^2} - \frac{\mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{r}^2}}}.$$

La ecuación diferencial de la curva geodésica la podemos obtener al dividir las expresiones para $\dot{r}$ sobre $\dot{\theta}$

$$\boxed{\dot{\tilde{r}} = \pm \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{r}^2 \sqrt{1 + \frac{\omega^2 \mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{c}^2} - \frac{\mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{r}^2}}}{\mathrm{p}_\theta \left(1 - \frac{\mathrm{r}^2 \omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)}}.$$

Usando las condiciones iniciales $\dot{r} = 0, r = r_0$, en la expresión para $\dot{r}^2$, obtenemos

$$0 = 1 + \frac{\omega^2 \mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{c}^2} - \frac{\mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{r}_0}$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{r}_0} = 1 + \frac{\omega^2 \mathrm{p}_\theta^2}{\mathrm{c}^2}$$
$$\boxed{\frac{\mathrm{p}_\theta}{\mathrm{r}_0} = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{p}_\theta^2 \omega^2}{\mathrm{c}^2}}}$$

Notemos que la expresión a la que nos piden llegar no depende de p_θ, así que intuitivamente habría que manipular la expresión que encontramos recién para p_θ, y la elevamos al cuadrado

$$\mathrm{p}_\theta^2 = \mathrm{r}_\theta^2 \left(1 + \frac{\mathrm{p}_\theta^2 \omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)$$
$$\mathrm{p}_\theta^2 = \mathrm{r}_0^2 + \mathrm{p}_\theta^2 \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} \mathrm{r}_0^2$$
$$\Rightarrow \mathrm{p}_\theta^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} \mathrm{r}_0^2\right) = \mathrm{r}_0^2$$
$$\Rightarrow \mathrm{p}_\theta^2 = \frac{\mathrm{r}_0^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} \mathrm{r}_0^2\right)}$$

Reordenamos un poco la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r^2 \sqrt{\mathrm{p}_\theta^2 \left(\frac{1}{\mathrm{p}_\theta^2} + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} - \frac{1}{\mathrm{r}^2}\right)}}{\mathrm{p}_\theta \left(1 - \mathrm{r}^2 \omega^2\right)}$$
$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r^2 \sqrt{\frac{1}{\mathrm{p}_\theta^2} + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} - \frac{1}{\mathrm{r}^2}}}{\left(1 - \frac{\mathrm{r}^2 \omega^2}{\theta}\right)}$$

Desarrollando el $1/\mathrm{p}_\theta^2$ que aparece en el radicando,

$$\frac{1}{\mathrm{P}_\theta^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\mathrm{r}_0^2\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{r}_0^2} = \left(\frac{1}{\mathrm{r}_0^2} - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)$$

y con esto la ecuación diferencial nos queda

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{r}^2\sqrt{\frac{1}{\mathrm{r}_0^2} - \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} + \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} - \frac{1}{\mathrm{r}^2}}}{\left(1 - \mathrm{r}^2\frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)}$$

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{r}^2\sqrt{\frac{\mathrm{r}^2-\mathrm{r}_0^2}{\mathrm{r}_0^2\mathrm{r}^2}}}{1 - \frac{\mathrm{r}^2\omega^2}{\mathrm{c}^2}} = \frac{\mathrm{r}^2\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{r}_0^2}}{\mathrm{dr}_0^2\mathrm{r}^2\left(1 - \frac{\mathrm{r}^2\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right)}$$

$$\mathrm{r}^2\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{r}_0^2}\left(1 - \mathrm{r}^2\frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\right) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\mathrm{r}}r_0^2\mathrm{r}^2}$$

$$\mathrm{r}^2\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{r}_0^2}\mathrm{r}^2\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{r}_0^2} \qquad \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}\mathrm{r}^2 = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{r}_0}$$

y reescribimos la ecuación diferencial como se pedía en el enunciado:

$$\boxed{\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{r}_0^2}} - \frac{\mathrm{rdr}}{\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{r}_0^2}}\frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{r}_0}}.$$

Finalmente nos piden integrar la ecuación anterior. Para esto primero pasamos multiplicando a la izquierda el término r_0, e integramos,

$$\int \mathrm{d}\theta = \theta$$

$$\int_0^r r_0 \frac{1}{r'\sqrt{r'^2 - r_0^2}} dr' = -\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) = \arccos\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

$$\int \frac{r_0\omega^2}{c^2}\frac{r'}{\sqrt{r'^2 - r_0^2}} dr' = \frac{r_0\omega^2}{c^2}\sqrt{r^2 - r_0^2},$$

Así la ecuación de la curva es

$$\boxed{\theta = \pm\frac{r_0\omega^2}{c^2}\sqrt{r^2 - r_0^2} \mp \arccos\frac{r_0}{r}},$$

cuyo dibujo se puede ver en la siguiente página.

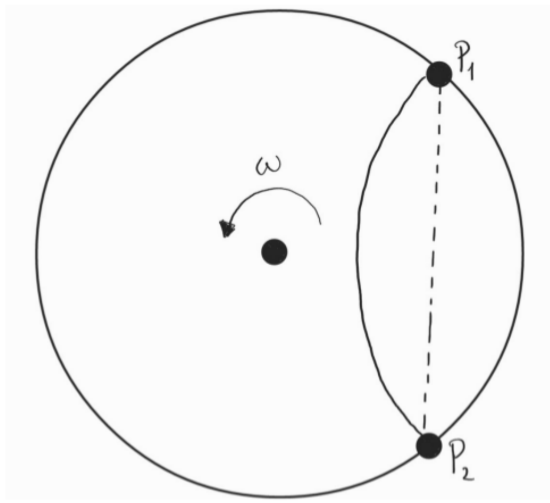


Figure 3.1: Curvas geodésicas en un disco que no gira (línea discontinua) y en un disco que gira o (línea continua).

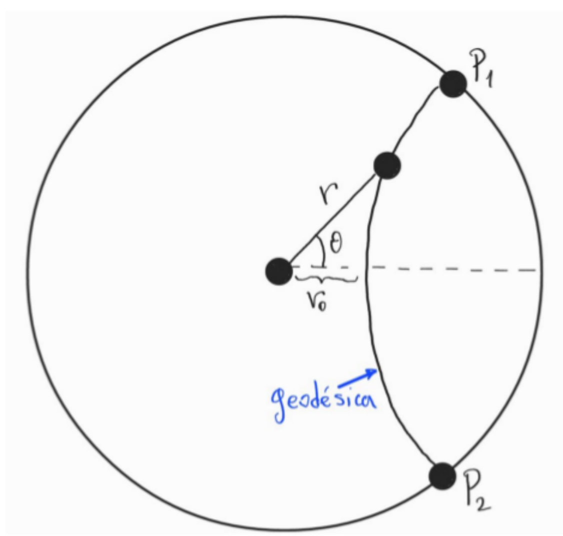


Figure 3.2: Curvas geodésica en coordenadas de un disco que gira.

4. Invariaza del intervalo

4.1 Schutz Problema 7.1

En la discusión que conduce a la Ecuación

$$\Delta \bar{\mathrm{s}}^2 = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} \mathrm{M}_{\alpha\beta}\left(\Delta \mathrm{x}^{\alpha}\right)\left(\Delta \mathrm{x}^{\beta}\right), \tag{4.1}$$

suponga que las coordenadas de $\overline{\mathscr{O}}$ se dan como las siguientes combinaciones lineales de las de $\mathscr{O}$:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{t}} &= \alpha \mathrm{t} + \beta \mathrm{x} \\
\bar{\mathrm{x}} &= \mu \mathrm{t} + v \mathrm{x} \\
\bar{\mathrm{y}} &= \mathrm{ay} \\
\bar{\mathrm{z}} &= \mathrm{bz}
\end{aligned}$$

donde α, β, μ, v, a y b pueden ser funciones de la velocidad **v** en $\overline{\mathscr{O}}$ relativa a $\mathscr{O}$, pero no dependen de las coordenadas. Encuentre los números $\left\{M_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 0, \ldots, 3\right\}$ de la Ec. 4.1 en términos de α, β, μ, v, a y b.

Solución:
Como se menciona en el Cap. 1 de Schutz, tenemos

$$\Delta \bar{\mathrm{s}}^2 = -(\Delta \bar{\mathrm{t}})^2 + (\Delta \bar{\mathrm{x}})^2 + (\Delta \bar{\mathrm{y}})^2 + (\Delta \bar{\mathrm{z}})^2$$

Luego reemplazando $\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, según el enunciado, se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{s}^2 &= -(\alpha \Delta t + \beta \Delta x)^2 + (\mu \Delta t + v \Delta x)^2 + (a \Delta y)^2 + (b \Delta z)^2 \\
&= -\left(\alpha^2 \Delta t^2 + \beta^2 \Delta x^2 + 2\alpha\beta \Delta t \Delta x\right) + \left(\mu^2 \Delta t^2 + v^2 \Delta x^2 + 2\mu v \Delta t \Delta x\right) + \left(a^2 \Delta y^2\right) + \left(b^2 \Delta z^2\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\mu^2 - \alpha^2\right)\Delta t^2 + 2(\mu v - \alpha\beta)\Delta t \Delta x + \left(v^2 - \beta^2\right)\Delta x^2 + \left(a^2 \Delta y^2\right) + \left(b^2 \Delta z^2\right)$$

Luego al comparar esta expresión con la ecuación (4.1), podemos reconocer los términos

$$\begin{aligned}
M_{00} &= \mu^2 - \alpha^2 \\
M_{01} &= M_{10} = (\mu v - \alpha\beta) \\
M_{11} &= \left(v^2 - \beta^2\right) \\
M_{22} &= a^2 \\
M_{33} &= b^2
\end{aligned}$$

y $\mathrm{M}_{02} = \mathrm{M}_{03} = \mathrm{M}_{12} = \mathrm{M}_{13} = \mathrm{M}_{20} = \mathrm{M}_{21} = \mathrm{M}_{23} = \mathrm{M}_{30} = \mathrm{M}_{31} = \mathrm{M}_{32} = 0.$

4.2 Schutz Problema 1.15

Suponga que la velocidad $\mathbf{v}$ de $\overline{\mathscr{O}}$ relativa a $\mathscr{O}$ es cercana a la de la luz, $|\mathbf{v}| = 1 - \varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$. Muestre que la fórmula del ejercicio 14 puede ser escrita como:

$$\Delta \mathrm{t} \simeq \frac{\Delta \bar{\mathrm{t}}}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

$$\Delta \mathrm{x} \simeq \frac{\Delta \bar{\mathrm{x}}}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

$$\omega' \simeq 1 - \varepsilon \frac{1-\omega}{1+\omega}$$

(a) En el Problema 14 de Schutz se tiene:

$$\Delta t \approx \left(1 + \frac{1}{2}v^2\right)\Delta \bar{t}$$

Por otro lado sabemos que

$$\Delta \mathrm{t} = \gamma \Delta \bar{\mathrm{t}}$$

entonces uno puede notar que hay una relación entre

$$\gamma \quad y \quad \left(1 + \frac{1}{2}v^2\right)$$

lo cual es fácil de demostrar expandiendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$\gamma = \left(1 - \mathrm{v}^2\right)^{-1/2} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \binom{-1/2}{\mathrm{k}} \mathrm{x}^{\mathrm{k}} = 1 + (-1/2)\left(-\mathrm{v}^2\right) + \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!}\left(-\mathrm{v}^2\right)^2 + \ldots$$

y resulta que

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}v^2$$

Entonces para demostrar lo que se pide, vamos a expandir el radicando de la γ, utilizando lo que aparece en el Schutz: $\mathrm{v} = 1 - \varepsilon$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v^2 &= (1-\varepsilon)^2 = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \\
\Rightarrow 1 - v^2 &= 1 - \left(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\right) \\
&= 2\varepsilon - \varepsilon^2 \\
1 - v^2 &= 2\varepsilon\left(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}\right)
\end{aligned}$$

Reemplazamos esto en γ

$$\begin{aligned}
\gamma &= \left[2\varepsilon\left(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right]^{-1/2} \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}\right)^{-1/2}
\end{aligned}$$

que al expandir y considerar a primer orden nos da

$$\gamma \approx \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

y con eso demostramos que

$$\Delta \mathrm{t} = \gamma \Delta \bar{\mathrm{t}} \approx \frac{\Delta \bar{\mathrm{t}}}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

(b) De manera similar al item anterior, sabemos que

$$\Delta \mathrm{x} = \frac{\Delta \overline{\mathrm{x}}}{\gamma}$$

así que mirando

$$\Delta \mathrm{x} \approx \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right)\Delta \overline{\mathrm{x}}$$

debería haber una relación con γ^{-1}, así que la expandimos

$$\gamma^{-1} = \left(1 - \mathrm{v}^2\right)^{1/2} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \binom{1/2}{\mathrm{k}} \mathrm{x}^{\mathrm{k}} = 1 + (1/2)\left(-\mathrm{v}^2\right) + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}\left(-\mathrm{v}^2\right)^2 + \ldots$$

y así,

$$\gamma^{-1} \sim 1 - \frac{1}{2}v^2.$$

Con esto demostramos que

$$\Delta x = \gamma^{-1}\Delta\bar{x} \sim \Delta\bar{x}\sqrt{2\varepsilon}.$$

(c) Y finalmente

$$\omega' = \frac{\omega + v}{1 + \omega v}$$

sea $v = 1 - \varepsilon$

$$\begin{aligned}\omega' &= (\omega + 1 - \varepsilon)(1 + \omega(1-\varepsilon))^{-1} \\ &= (\omega + 1 - \varepsilon)(1 + \omega - \omega\varepsilon)^{-1}\end{aligned}$$

Factorizando

$$= (1+\omega)\left(1 - \frac{\varepsilon}{1+\omega}\right)(1+\omega)^{-1}\left(1 - \frac{\omega\varepsilon}{1+\omega}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 - \frac{\varepsilon}{1+\omega}\right)\left(1 + \frac{\omega\varepsilon}{1+\omega}\right)$$

$$= 1 + \frac{\omega\varepsilon}{1+\omega} - \frac{\varepsilon}{1+\omega} - \frac{\omega\varepsilon^2}{(1+\omega)^2}$$

despreciamos términos de segundo orden

$$\omega' = 1 - \frac{\varepsilon(1-\omega)}{(1+\omega)}$$

5. Grupo de rotación: generadores

Let $\mathscr{H}_1$ be three 3×3 matrices whose components are $(K_1)_{mn} = \varepsilon_{Imn}$.

(a) Display the matrices $\mathscr{K}_1, (\mathscr{H}_1)^2, (\mathscr{K}_1)^3$, and $(\mathscr{H}_1)^4$.

(b) Sum the series

$$\mathscr{R}_x(\theta) \equiv \exp(\mathscr{K}_1\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} (\mathscr{H}_1)^n .$$

Show that $\mathscr{R}_x(\theta)$ is a rotation matrix and that it produces a rotation through an angle θ about the x-axis.

(c) Show similarly that $\mathscr{R}_z(\phi) = \exp(\mathscr{K}_3\phi)$ and $\mathscr{R}_v(\chi) = \exp(\mathscr{K}_2\chi)$ are rotation matrices, and that they produce rotations through angles ϕ and χ about the z - and y-axes, respectively.

(d) Explain why $\mathscr{P} = \mathscr{R}_z(\psi)\mathscr{R}_x(\theta)\mathscr{R}_z(\phi)$ defines the Euler-angle coordinates, ψ, θ, ϕ for the generic element $\mathscr{P} \in SO(3)$ of the rotation group.

(e) Let $\mathscr{C}$ be the curve $\mathscr{P} = \mathscr{R}_z(t)$ through the identity matrix, $\mathscr{C}(0) = .4 \in SO(3)$. Show that its tangent, $(d\mathscr{C}/dt)(0) \equiv \dot{\mathscr{C}}(0)$ does not vanish by computing $\dot{C}(0) f_{12}$, where f_{12} is the function $f_{12}(\mathscr{P}) = P_{12}$, whose value is the 12 matrix element of $\mathscr{P}$.

(f) Define a vector field e_3 on $SO(3)$ by letting $e_3(\mathscr{P})$ be the tangent (at $t = 0$) to the curve $\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_z(t)\mathscr{P}$ through $\mathscr{P}$. Show that $e_3(\mathscr{P})$ is nowhere zero. Note: $e_3(\mathscr{P})$ is called the "generator of rotations about the z-axis," because it points from $\mathscr{P}$ toward neighboring rotations, $\mathscr{R}_z(t)\mathscr{P}$, which differ from $\mathscr{P}$ by a rotation about the z-axis.

(g) Show that $e_3 = (\partial/\partial\psi)_{\theta\phi}$.

(h) Derive the following formulas, valid for $t \ll 1$:

$$\mathscr{R}_x(t)\mathscr{R}_z(\psi)\mathscr{R}_x(\theta)\mathscr{R}_z(\phi) = \mathscr{R}_z(\psi - t\sin\psi\cot\theta)\mathscr{R}_x(\theta + t\cos\psi)\mathscr{R}_z(\phi + t\sin\psi/\sin\theta)$$
$$\mathscr{R}_y(t)\mathscr{R}_z(\psi)\mathscr{R}_x(\theta)\mathscr{R}_z(\phi) = \mathscr{R}_z(\psi + t\cos\psi\cot\theta)\mathscr{R}_x(\theta + t\sin\psi)\mathscr{R}_z(\phi - t\cos\psi/\sin\theta)$$

(i) Define $e_1(\mathscr{P})$ and $e_2(\mathscr{P})$ to be the tangent vectors (at $t = 0$) to the curves $\mathscr{C}(t) =$

$\mathscr{R}_x(t)\mathscr{P}$ and $\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_v(t)\mathscr{P}$, respectively. Show that

$$e_1 = \cos\psi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\psi\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$
$$e_2 = \sin\psi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\psi\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

e_1 and e_2 are the "generators of rotations about the x - and y-axes."

Solución:
(a) Utilizando el símbolo de Levi Civita, se obtiene

$$\mathscr{K}_1 = \begin{pmatrix} K_{m1} & k_{112} & k_{113} \\ k_{121} & K_{22} & k_{23} \\ k_{131} & k_{132} & K_{133} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(\mathscr{K}_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$(\mathscr{K}_1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(\mathscr{K}_1)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathscr{R}_x(\theta) = \mathscr{I} + \theta(\mathscr{K}_1) + \frac{\theta^2}{2!}(\mathscr{K}_1)^2 + \frac{\theta^3}{3!}(\mathscr{K}_1)^3 + \frac{\theta^4}{4!}(\mathscr{K}_1)^4$$
$$\mathscr{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \dots$$
$$\dots + \frac{\theta^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^4}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathscr{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} & \theta - \frac{\theta^3}{3!} \\ 0 & -\theta + \frac{\theta^3}{3!} & 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \end{bmatrix}$$
$$\mathscr{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Para demostrar que esta es una rotación en el eje x, debemos de mostrar que la componante en X no variá. Como

$$\mathscr{R}_x(\theta) = \exp\left[\phi\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

consideremos una rotación infinitesimal alrededor del eje x en un ángulo pequeño ε,

$$\mathscr{R}_x(\varepsilon) \approx \mathscr{I} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego si aplicamos esta matriz de rotación sobre un punto $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ cualquiera

$$\mathscr{R}_x(\varepsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - \varepsilon y \\ z + \varepsilon z \end{pmatrix}$$

Y notamos entonces que la x queda igual, por lo tanto queda demostrado que es una matriz de rotación en el eje X.
(c) Considerando K_{3lm}

$$\mathscr{K}_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{311} & \varepsilon_{312} & \varepsilon_{313} \\ \varepsilon_{321} & \varepsilon_{322} & \varepsilon_{323} \\ \varepsilon_{331} & \varepsilon_{332} & \varepsilon_{333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathscr{K}_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathscr{K}_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathscr{K}_3)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\mathscr{R}_z(\phi) = 1] + \phi\,(\mathscr{K}_3) + \tfrac{\phi^2}{2!}\,(x_3)^2 + \tfrac{\phi^3}{3!}\,(\mathscr{K}_3)^3 + \tfrac{\phi^4}{4!}\,(\mathscr{K}_3)^4$$

$$\mathscr{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{\phi^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\dots + \tfrac{\phi^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{\phi^4}{4!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{R}_z(\phi) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} & \phi - \frac{\phi^3}{3!} & 0 \\ -\phi + \frac{\phi^3}{3!} & 1 - \frac{\phi^2}{21} + \frac{\phi^4}{4!} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que esta es una rotación en el eje z, debemos de mostrar que la componente en z no varíe,

$$\mathscr{R}_z(\phi) = \exp\left[\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

, Consideremos una rotación infinitesimal alrededor del eje z en un ángulo pequeño ε,

$$\mathscr{R}_z(\varepsilon) \approx \mathscr{I} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego si aplicamos esta matriz de rotación sobre un ponto $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ cualquiera

$$\mathscr{R}_z(\varepsilon) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\varepsilon y \\ y-\varepsilon x \\ z \end{pmatrix}$$

Y notamos entonces que la z queda igual, por lo tanto queda demostrado.

Luego para K_{2lm}

$$\mathscr{K}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{211} & \varepsilon_{212} & \varepsilon_{213} \\ \varepsilon_{221} & \varepsilon_{222} & \varepsilon_{233} \\ \varepsilon_{231} & \varepsilon_{232} & \varepsilon_{233} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathscr{K}_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathscr{K}_2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathscr{K}_2)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{R}_y(\chi) = \mathscr{I} + \chi\,(\mathscr{K}_2) + \frac{\chi^2}{2!}(\mathscr{K}_2)^2 + \frac{\chi^3}{3!}(\mathscr{K}_2)^3 + \frac{x^4}{4!}(\mathscr{K}_2)^4$$

$$\mathscr{R}_y(\chi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \chi \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\chi^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \ldots$$

$$+\frac{\chi^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\frac{\chi^4}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{R}_y(\chi)=\begin{bmatrix} 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!} & 0 & -x+\frac{x^3}{3!} \\ 0 & 1 & 0 \\ x-\frac{x^3}{3!} & 0 & 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{R}_y(\chi)=\begin{pmatrix} \cos\chi & 0 & -\sin\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\chi & 0 & \cos\chi \end{pmatrix}$$

Para demostrar que esta es una rotación en el eje y, debemos de mostrar que la componente y no varía,

$$\mathscr{R}_y(\chi)=\exp\left[\chi\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Consideremos una rotación infinitesimal alrededor del eje y en un ángulo pequeño ε,

$$\mathscr{R}_y(\varepsilon)\approx 1+\varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego si aplicamos esta matriz de rotación sobre un punto $A=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ cualquiera

$$\mathscr{R}_y(\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+\varepsilon x \\ y \\ z-\varepsilon z \end{pmatrix}$$

Y notamos entonces que la componente y queda igual.
(d) $\mathscr{P}=\mathscr{R}_z(\psi)\mathscr{R}_x(\theta)\mathscr{R}_z(\phi)$

$$\mathscr{R}=\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{P}=\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{P}=\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi-\sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi+\sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi-\cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Que corresponde precisamente a las rotaciones que definen los ángulos de Euler θ,ϕ,ψ

Luego θ,ϕ,ψ especifican totalmente la orientación de un sistema rotado x',y',z' respecto a un sistema fijo x,y,z. Luego $\mathscr{P}$ representa una matriz ortogonal propia. Estas matrices ortogonales propias reales, Tienen la propiedad de grupo, en especifico, grupo de Lie. Sabemos que el determinante de una matriz ortogonal cuyo determinante sea -1 no puede representar el desplazamiento físico de un cuerpo rigido. El valor del determinante -1 no es físico ya que representa una reflexión, lo cual no se puede realizar a través de un cuerpo rígido (en lenguaje topológico una reflexión no es continua mente de formable a la identidad).

Por lo Tanto las transformaciones que representan el movimiento de un cuerpo rigido deberán limitarse a matrices cuyo determimante sea $+1$.

Estas transformaciones se llaman ortogonales propias. Con esto se define el grupo $SO(3)$

$$SO(3)=\left\{A:R^3\to R^3 lineal \mid \det A=+1, A^\top A=1\right\}$$

que corresponde a un grupo de matrices ortogonales propias reales de 3×3 cuyo determinante es $+1$.

(e) Tenemos la curva $\mathscr{C}$ dada por $\mathscr{P}=\mathscr{R}_z(t)$

$$\mathscr{R}_z(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0\\ -\sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Así

$$\left(\frac{d\mathscr{C}}{dt}\right)=\begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & 0\\ -\cos t & -\sin t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

entonces

$$\left(\frac{d\mathscr{C}}{dt}\right)(0)\equiv\dot{\mathscr{C}}(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por otro lado $f_{12}(\mathscr{P})=\mathscr{P}_{12}$, cuyo valor es el elemento 12 de la matriz $\mathscr{P}$

$$\mathscr{P}=\left(\begin{array}{c|c|c} \cos\psi\cos\phi-\sin\psi\cos\theta\sin\phi & -\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\\ -\sin\psi\cos\phi-\cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\end{array}\right)$$

entonces $f_{12}(\mathscr{P})=\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\cos\theta\cos\phi$, de esta forma calculamos $\dot{\mathscr{C}}(0)f_{12}$:

$$\dot{\mathscr{C}}(0)f_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}(\cos\psi\sin\phi+\sin\psi\cos\theta\cos\phi)$$

$$\mathscr{C}(0)f_{12}==\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \cos\psi\sin\phi+\sin\psi\cos\theta & 0\\ -\cos\psi\sin\phi-\sin\psi\cos\theta\cos\phi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\psi\sin\phi+\sin\psi\cos\theta\cos\phi\end{array}\right)$$

y vemos que no desaparece.
(f) Bueno, aquí se habla de dos cosas: $\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_z(t)\mathscr{P}$ es la curva $\mathbf{e}_3(\mathscr{P})$ es el generador de rotaciones sobre el eje z.

Según entiendo en el grupo $SO(3)$ los generadores de rotación son:

$$\mathscr{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathscr{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathscr{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y entonces en este caso $\mathbf{e}_3(Y) = \mathscr{R}_3$, lo que me hace sentido por lo que demostré al final de los ítem c y d.

Por otro lado $\mathscr{R}_z(t)\mathscr{P}$, se obtendría al multiplicar

$$\mathscr{R}_z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left[t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

por la matriz ρ,

$$\mathscr{P} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Entonces los elementos de $\mathscr{C} = \mathscr{R}_z(t)\mathscr{P}$, serian

$$C_{1n} : (\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi)\cos t - (\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi)\sin t$$

$$C_{12} : (\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi)\sin t + (\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi)\cos t$$

$$C_{13} : \sin\psi\sin\theta$$

$$C_{21} : (-\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi)\cos t - (-\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi)\sin t$$

$$C_{22} : (-\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi)\sin t + (-\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi)\cos t$$

$$C_{23} : \cos 4\sin\theta$$

$$C_{31} : \sin\theta\sin\phi\cos t + \sin\theta\cos\phi\sin t$$

$$C_{32} : \sin\theta\sin\phi\sin t - \sin\theta\cos\phi\cos t$$

$$C_{33} : \cos\theta$$

Ahora, si miramos P y decimos que $\mathbf{e}_3(P)$

$$\mathscr{P} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

es decir $e_3(\mathscr{P}) \equiv (\sin\theta\sin\phi, -\sin\theta\cos\phi, \cos\theta)$ similarmente

$C_3^*(\mathscr{R}_2(t)\mathscr{P}) \equiv (\sin\theta\sin\phi\cos t + \sin\theta\cos\phi\sin t, \sin\theta\sin\phi\sin t - \sin\theta\cos\phi\cos t, \cos\theta)$

$$\Rightarrow \frac{de_3^*}{dt} = \left(-\sin\theta\sin\phi\sin t + \sin\theta\cos\phi\cos t, \sin\theta\sin\phi\cos t + \sin\theta\cos\phi\sin 1, 0 \right)$$

en $t = 0$:

$$(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, 0)$$

Y efectivamente difiere de $\mathscr{P}$ por una rotación en z.
(g) Consideremos la curva del ítem (f)

$$\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_z(t)\mathscr{P} = \mathscr{R}_z(t)\mathscr{R}_z(\psi)\mathscr{R}_x(\theta)\mathscr{R}_z(\phi)$$

Consideremos $\mathscr{R}_z(t)\mathscr{R}_z(\psi)$

$$\mathscr{R}_z(t)\mathscr{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t\cos\psi - \sin t\sin\psi & \cos t\sin\psi + \sin t\cos\psi & 0 \\ -\sin t\cos\psi - \cos t\sin\psi & -\sin t\sin\psi + \cos t\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y usando las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin(a\pm b) &= \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b) \\ \cos(a\pm b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\mathscr{R}_z(t)\mathscr{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(t+\psi) & \sin(t+\psi) & 0 \\ -\sin(t+\psi) & \cos(t+\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{R}_z(t)\mathscr{R}_z(\psi) = \mathscr{R}_z(t+\psi)$$

Luego la curva $\mathscr{C}$ es dada por

$$\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_z(t+\psi)\mathscr{R}_x(\theta)\mathscr{R}_z(\phi),$$

y el vector tangente es

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial t}(t+\psi)\cdot\frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{\partial}{\partial t}(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial t}(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\boxed{\mathbf{e}_3 = \left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)_{\theta\phi}}.$$

6. Grupo de rotación: constantes de es

Use the three vector fields constructed in the last exercise,

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \cos\psi \frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\psi \left(\cot\theta \frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\
e_2 &= \sin\psi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\psi \left(\cot\theta \frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\
e_3 &= \frac{\partial}{\partial\psi}
\end{aligned}
$$

as basis vectors for the manifold of the rotation group. The above equations express this "basis of generators" in terms of the Euler-angle basis. Show that the commutation coefficients for this basis are

$$c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma},$$

independently of location φ in the rotation group. These coefficients are also called the structure constants of the rotation group.

Solución:
En teoría de grupos de Lie, el conmutador es

$$\left[\mathscr{K}_\alpha, \mathscr{K}_\beta\right] = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathscr{K}_\gamma$$

donde $C_{\alpha\beta}\gamma^{\gamma}$ se conoce como constante de estructura de grupo.

Tenemos

$$\mathscr{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y las rotaciones $\mathscr{R}(\hat{n}, \alpha) = exp[\alpha\hat{n}\cdot\vec{G}]$

Por simplicidad consideremos

$$\mathscr{R}_1 = e^A \text{ y } \mathscr{R}_2 = e^B, \text{ con } A \neq B$$

¿ Importará el orden de las rotaciones?

$$\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2 \stackrel{?}{=} \mathscr{R}_2\mathscr{R}_1$$

Como ya hemos hecho expandamos las rotaciones infinitesimales para $\alpha \ll 1$,

$$\mathscr{R}_1 \approx 1 + A$$

y

$$\mathscr{R}_2 \approx 1 + B$$

entonces

$$\mathscr{R}_1\mathscr{R}_2 = (1+A)(1+B) \simeq 1 + A + B + AB + \underbrace{O\left(A^2B\right)}_{\text{despeciamos}}$$
$$\mathscr{R}_2\mathscr{R}_1 = (1+B)(1+A) \simeq 1 + B + A + BA + \ldots$$

Luego restando (i)-(ii),

$$\Rightarrow \mathscr{R}_1\mathscr{R}_2 - \mathscr{R}_2\mathscr{R}_1 = AB - BA + O(3)$$

Luego el conmutador se define como

$$[A, B] = AB - BA,$$

que corresponde al primer término que aparece en (iii), sin embargo aparecen términos de orden superior $\mathscr{O}(3)$, que recordamos de cuántica las propiedades de los conmutadores

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$$
$$[A + B, C + D] = [A, C] + [A, D] + [B, C] + [B, D]$$

Con esto en mente calculemos los conmutadores llamemos $n^x = n_1$

$$[\alpha_1(n_1\mathscr{K}_1 + n_1\mathscr{K}_2 + n_1\mathscr{K}_3), \alpha_2(n_1'\mathscr{K}_1 + n_2'\mathscr{K}_2 + n_3'\mathscr{K}_3]$$

Luego utilizando la propiedad, con k_1 y k_2 constantes

$$[b_1A_1k_2B] = k_1k_2\,[A_1B]\,,$$

$$\Rightarrow \alpha_1\alpha_2\left(n_1n_1'\,[x_1, x_1] + n_1n_2'\,[x_1, \alpha_2] + \ldots\right)$$

y podemos escribir de forma compacta

$$\Rightarrow \alpha_1\alpha_2 \sum_{i,j=1}^{3} n_in_j'\left[\mathscr{K}_i, \mathscr{K}_j\right].$$

Ahora bien nuestras matrices $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2, \mathscr{K}_3$ son antisimétricas, es decir,

$$\begin{aligned} &A^\top = -A, B^\top = -B, \text{ Luego} \\ &[A,B] = C \end{aligned}$$

$AB - BA = C$, y trasponemos esta ecuación,

$$\begin{aligned} (AB-BA)^\top &= (AB)^\top - (BA)^\top = C^\top \\ &= B^\top A^\top - A^\top B^\top = C^\top \\ &= (-B)(-A) - (-A)(-B) = C^\top \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= BA - AB = C^T \\ &= -[A,B] = C^T \\ &= -C = C^T \end{aligned}$$

Por lo tanto C es también antisimétrica.

Entonces ya que el conmutador es también antisimétrico, y que toda matriz antisimétrica se puede escribir como combinación lineal de $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2 y \mathscr{K}_3$, entonces

$$\begin{aligned} [\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2] &= c_{121}\mathscr{K}_1 + c_{12}\mathscr{K}_2 + c_{123}\mathscr{K}_3 \\ &= \sum_{j=1}^{3} c_{12j}\mathscr{K}_j = c_{12}^{j}\mathscr{K}_j \end{aligned}$$

de forma general

$$\left[\mathscr{K}_\alpha, \mathscr{K}_\beta\right] = C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\mathscr{K}_\gamma$$

Consideremos algunos casos

$$\begin{aligned} &[\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_1] = [\mathscr{K}_2, \mathscr{K}_2] = [\mathscr{K}_3, \mathscr{K}_3] = 0 \\ &[\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &[\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &[\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2] = -\mathscr{K}_3, [\mathscr{K}_2, \mathscr{K}_1] = \mathscr{K}_3 \end{aligned}$$

Siguiendo la misma idea obtenemos

$$\begin{aligned} &[\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_3] = \mathscr{K}_2, [\mathscr{K}_3, \mathscr{K}_1] = -\mathscr{K}_2 \\ &[\mathscr{K}_2, \mathscr{K}_3] = -\mathscr{K}_1, [\mathscr{K}_3, \mathscr{K}_2] = \mathscr{K}_1 \end{aligned}$$

$\therefore$ Comparando lo obtenido, lo generalizamos $\left[\mathscr{K}_{\alpha_1}\mathscr{K}_\beta\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathscr{K}_\gamma$ y comparando con lo obtenido anteriormente $\left[\mathscr{K}_\alpha, \mathscr{K}_\beta\right] = C_{\alpha\beta}\gamma\mathscr{K}_\gamma$ Por lo tanto hemos de mostrado que las constantes de estructura son:

$$\boxed{C_{\alpha\beta}^{\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}.$$

7. Geodésicas y coef. de conexión

[Continuation of exercises 9.13 and 9.14.] In discussing the rotation group, one must make a clear distinction between the Euclidean space (coordinates x, y, z; basis vectors $\partial/\partial x, \partial/\partial y$, $\partial/\partial z$) in which the rotation matrices act. and the group manifold $SO(3)$ (coordinates ψ, θ, ϕ : coordinate basis $\partial/\hat{\psi}\rangle, \partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi$; basis of "generators" e_1, e_2, e_3), whose points φ are rotation matrices. (a) Pick a vector

$$n = n^x\partial/\partial x + n^\mathrm{v}\partial/\partial y + n^z\partial/\partial z$$

in Euclidean space. Show that

$$\Re_n(t) \equiv \exp\left[\left(n^2 \cdot h_1 + n^v \cdot h_2 + n^z \cdot h_3\right)t\right]$$

is a rotation matrix that rotates the axes of Euclidean space by an angle

$$t|m| = t\left(\left(n^2\right)^2 + \left(n^v\right)^2 + \left(n^2\right)^2\right]^{1/2}$$

about the direction n. (h_j are matrices defined in exercise 9.13.)

(b) In the group manifold $SO(3)$, pick a point (rotation matrix) P, and pick a tangent vector $u = u^\alpha e_\alpha$ at $\mathscr{P}$. Let u be a vector in Euclidean space with the same components as u has in $SO(3)$:

$$u = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3; \quad u = u^1\partial/\partial x + u^2\partial/\partial y + u^3\partial/\partial z$$

Show that u is the tangent vector (at $t = 0$) to the curve

$$\mathscr{C}(t) = \mathscr{R}_u(t)\mathscr{P}.$$

The curve $\mathscr{C}(t)$ through the arbitrary point $\mathscr{P}$ with arbitrary tangent vector $u = (d\mathscr{C}/dt)_{t=0}$ is a very special curve: every point on it differs from $\mathscr{P}$ by a rotation $\mathscr{R}_u(t)$ about one and the same direction u. No other curve in $SO(3)$ with "starting conditions" $\{\mathscr{P}, u\}$ has such beautiful simplicity. Hence it is natural to decree that each such $C(t)$ is a geodesic of the group manifold $SO(3)$. This decree adds new geometric structure to $SO(3)$; it converts $SO(3)$ from a differentiable manifold into something more special: an affine manifold.

Solución:

De manera general consideremos

$$\mathscr{R}(t) = \exp[tB]$$

donde B es una combinación lineal de $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2 y \mathscr{K}_3$, ya que una matriz de rotación debe ser antisimétrica, digamos

$$B = n^x \mathscr{K}_1 + n^y \mathscr{K}_2 + n^z \mathscr{K}_3$$

$$\mathscr{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿ Pero qué son n^x, n^y, n^z ?

Supongamos que al igual que en el problema 5 (9.13 del Misner) realizamos una rotación infinitesimal de un cierto $t \ll 1$

$$\mathscr{R}(t) \approx 1 + t\,(n^n \mathscr{K}_1 + n^y \mathscr{K}_2 + n^z \mathscr{K}_3)$$

$$= 1 + t \begin{pmatrix} 0 & n^z & -n^y \\ -n^z & 0 & n^x \\ n^y & -n^x & 0 \end{pmatrix}$$

Luego si rotamos infinitesimal mente un vector $\vec{x}$

$$\mathscr{R}(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & nz & -ny \\ -n^z & 0 & n^x \\ n^y & -n^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Recordemos que, el producto vectorial es antisimétrico

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad \text{y } \vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}$$

Luego

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j}\,(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

entonces

$$\vec{n} \times \vec{x} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{k} & \hat{k} \\ n^x & n^y & n^z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}\,(n^y z - n^z y) - \hat{j}\left(n^x z - n^2 x\right) + \hat{k}\,(n^x y - n^y x)$$

Por lo tanto

$$-\left(n^z y - n^y z, -n^z x + n^x z, n^y x - n^x y\right) = \vec{x} \times \vec{n}$$

De esta manera la ec (1) nos queda

$$\mathscr{R}(t)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} n^z y - nyz \\ -n^z x + n^x z \\ n^y x - n^x y \end{pmatrix} \approx \vec{x} + t(\vec{x} \times \vec{n})$$

Entonces miremos lo que pesaría si efectuamos una rotación infinitesimal solo en $\mathscr{R}_x$, es decir

$$\mathscr{R}_x(t) \simeq \vec{x} + t(\vec{x} \times \vec{n})$$

$$\begin{pmatrix} h^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{u} & \\ x & y & z \\ h^x & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, h^x z, -n^x y)$$

$$\mathscr{R}_x(t) \simeq \vec{x} + t n_x(0, z, -y),$$

y por otro lado tenemos que

$$\sum_x (t) = 1 + tK_1$$

Esto significa que en este último caso $\vec{n} = (n^x, 0, 0)$, para las rotaciones

$$\mathscr{R}_y(t) \to \vec{n} = (0, n^y, 0)$$

$$\mathscr{R}_z(t) \to \vec{n} = (0, 0, n^z)$$

Entonces de manera general si queremos hacer una rotación en torno a una" dirección cualquiera", donde $\vec{n}$ puede tener combinaciones de n_x, n_y, n_z, entonces hacemos una rotación en torno al "eje" cuya dirección marca el vector $\vec{n}$, mejor que eje, es decir líneal nodal. El vector $\vec{n}$ va en la misma dirección en la cual queremos girar en un ángulo t.

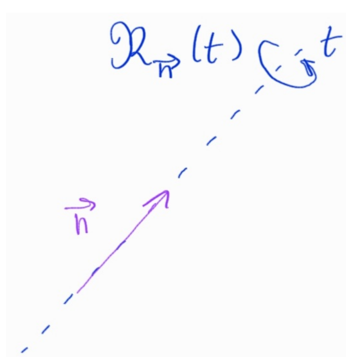


Figure 7.1: Pro.

Entonces teníamos la expresión general y la aplicada a un vector $\vec{x}$:

$$\mathscr{R}_x(t) \simeq \nVdash + t\mathscr{K}_1$$

$$\mathscr{R}_x(t) \simeq \vec{x} + tn^x(0, z, -y),$$

entonces vemos que $n^x = 1$, para la rotación infinitesimal en x, y para la rotación en $y : n_y = 1$, y para $\mathscr{R}_z(t) : n^z = 1$. Esto no significa que $\underbrace{\vec{n} = (1,1,1)}_{i=n+1,1}$, significa que $|\vec{n}| = 1 = \hat{n}$.

Por lo tanto podemos escribir de manera general

$$\mathscr{R}_{\vec{n}}(t) = \exp[t\hat{n} \cdot \overrightarrow{\mathscr{K}}] \quad , \overrightarrow{\mathscr{K}} = (\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2, \mathscr{K}_3)$$

Luego si expandimos la $\mathscr{R}_n(t)$ como en el problema 5 $(9.13MTW)$ obtenemos:

$$\mathscr{R}_n(t)\vec{x} = 1 + t\hat{n} \cdot \overrightarrow{\mathscr{K}} + \frac{1}{2!}(t\hat{n} \cdot \overrightarrow{\mathscr{K}})^2 + \ldots$$

Pero hay una manera geométrica más sencilla de obtener la expresión. Si queremos rotar un vector $\vec{x}$ en torno a la dirección dada por $\vec{n}$ en cierto ángulo t.

Luego entonces, un esquema general de lo que se ha hecho es

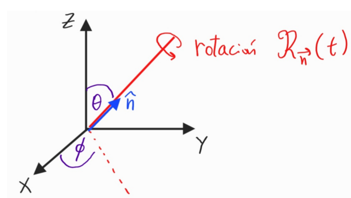


Figure 7.2: Pro.

$$\vec{n} = (n^x, n^y, n^z) = (\sin\theta\cos\theta, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

donde

$$|\vec{n}| = \vec{n} = 1$$

Un comentario sobre el grupo $SO(3)$, teníamos

$$\mathscr{R}_n(t) = exp[t\vec{n} \cdot \vec{G}]$$

Estos 3 parámetros dan origen al nombre, y no el hecho de que sean matrices de 3×3.

8. Expansión, rotación y corte

Sea $\mathbf{u}(\mathscr{P})$ un campo de 4-velocidades de fluido.

(a) Muestre que ∇u se puede descomponer de la siguiente manera:

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta} - a_\alpha u_\beta$$

donde a es la 4 aceleración del fluido

$$a_\alpha \equiv u_{\alpha;\beta} u^\beta$$

θ es la "expansión" de las líneas fluidas del mundo

$$\theta \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^\alpha_{;\alpha}$$

$P_{\alpha\beta}$ es el tensor de proyección

$$P_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$$

$\sigma_{\alpha\beta}$ es el tensor de corte del fluido

$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(u_{\alpha;\mu} P^\mu_\beta + u_{\beta;\mu} P^\mu_\alpha\right) - \frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta}$$

y $\omega_{\alpha\beta}$ es la 2-forma de rotación del fluido

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(u_{\alpha;\mu} P^\mu_\beta - u_{\beta;\mu} P^\mu_\alpha\right)$$

(b) Cada uno de los componentes de esta descomposición tiene una interpretación física simple en los marcos de reposo locales del fluido. La interpretación de la 4-aceleración

a en términos de lecturas del acelerómetro debería resultar familiar. El ejercicio 22.1 **mostró que la expansión** $\theta = \nabla \cdot u$ **describe la tasa de aumento del volumen de un elemento fluido,**

$$\theta = (1/\mathrm{V})(\mathrm{dV}/\mathrm{d}\tau)$$

El Ejercicio 22.4 **exploró el significado y el uso del tensor de proyección** P**. Verifique que en un marco Lorentz local** $\left(g_{\hat{\alpha}\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \Gamma^{\hat{\alpha}}{}_{\beta\hat{\gamma}} = 0\right)$ **moviéndose momentáneamente con el fluido** $\left(u^{\hat{\alpha}} = \delta^{\alpha}{}_{0}\right), \sigma_{\dot{\alpha}\beta}$ **y** $\omega_{\hat{\alpha}\beta}$ **se reducen al cizallamiento y rotación clásicos (no relativistas) del fluido. [Ver, por ejemplo,** §§2.4 **and** 2.5 **de Ellis (1971) para descripciones clásicas y relativistas de cizallamiento y rotación.]**

8.1 Descomposición del gradiente de la 4-velocidad

Lo primero que debemos utilizar para esta demostración, son las coordenadas comóviles.
¿Qué son las coordenadas comóviles?

Son coordenadas adaptadas a las líneas de mundo que se usan para describir la geometría del espacio-tiempo.

1. Consideremos una superficie S atravesada por las lineas de mundo (solo pueden cruzar una vez). Luego en la intersección entre la linea de mundo con la superficie, se pone una etiqueta, y^i con $i = 1,2,3$ para la superfice 3-D.
2. Luego esta etiqueta la mantenemos fuera de la superficie S, para tiempos pasados y futuros. De allí el nombre de si coordenadas comóviles, por que la etiqueta o el valor de la coordenada se mantiene a lo largo de cada linea de mundo. El profesor lo explica como el rut que identifica a las galaxias.
3. El tiempo t se define a lo largo de las lineas de flujo del fluido.

Luego se define un tiempo normalizado $s = s_0 + \tau$, con τ el tiempo propio medido a lo largo de las líneas de mundo. Luego las coordenadas comóviles normalizadas son

$$x^\mu = x^\mu(s, y^i), \quad \mu = 0, \ldots, 3, \quad i = 1, \ldots, 3. \tag{8.1}$$

La 4-velocidad se puede representar como una "flecha" que apunta a lo largo de la línea de mundo, en términos de coordenadas locales $x^\mu = x^\mu(\tau)$ 4-velocidad es:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \implies u^\mu u_\mu = -1 \tag{8.2}$$

y en coordenadas comóviles normalizadas $x^\mu = (s, y^i)$ es:

$$u^\mu = \delta^\mu_0 \Leftrightarrow \frac{ds}{d\tau} = 1, \frac{dy^i}{d\tau} = 0 \tag{8.3}$$

el parámetro de la curva es el tiempo propio y el vector u^μ es tangente a la dirección de todos los y^i constantes. En coordenadas generales x^μ el 4-vector es

$$u^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial s}\right)_{y^i = cte}. \tag{8.4}$$

La derivada de la 4-velocidad en su propia dirección, da el vector de aceleración:

$$\dot{u}^a = u^b \nabla_b u^a \Rightarrow \dot{u}^a u_a = 0 \tag{8.5}$$

que se hace cero si y solo si las lineas de flujo son geodésicas. Es el caso de movimiento bajo gravedad e inercia, sin acción de otras fuerzas. De esta definición

$$\nabla_b u_a = h_a^c h_b^d \nabla_d u_c - \dot{u}_a u_b \tag{8.6}$$

donde el primer Término de la derecha es ortogonal a u^a.

La componente de cualquier vector X^a paralela a u^a es:

$$X_\parallel^a = U_b^a X^b, \quad U_b^a := -u^a u_b \tag{8.7}$$

donde U_b^a es un tensor de proyección $\left(U_b^a U_c^b = U_c^a\right)$ en la linea tangente unidimensional $\left(U_a^a = 1\right)$ paralelo a u^a $\left(U_b^a u^b = u^a\right)$. Para la métrica FLRW la 4-velocidad viene dada por $u^\mu = \delta_0^\mu$, $u_\mu = -\delta_\mu^0$. Asi en este caso $U_\nu^\mu = \delta_0^\mu \delta_\nu^0$.

Por otro lado el tensor de proyección perpendicular es: (en el MTW lo llama P_{ab})

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \tag{8.8}$$

y junto con (8.2) $\quad u^\mu u_\mu = -1$

$$h_b^a h_c^b = h_c^a, \quad h_a^a = 3, \quad h_b^a u^b = 0 \tag{8.9}$$

así h_b^a es un tensor de proyección que se proyecta en el plano tangente (3-D) ortogonal a u^a.

Cualquier vector X^a puede proyectarse mediante h_b^a en su parte ortogonal a u^a, $X_\perp^a$ (es decir, su componente en el espacio de reposo instantáneo de un observador que se mueve con 4-velocidad u^a)

$$X_\perp^a = h_b^a X^b \Rightarrow X_\perp^a u_a = 0, \quad (X_\perp^a)_\perp = X_\perp^a \tag{8.10}$$

donde X^a y Y^b son vectores ortogonales a u^a $\left(X^a u_a = 0 = Y^b u_b\right) \Rightarrow X \cdot Y = X^a g_{ab} Y^b = X^a h_{ab} Y^b$.

Luego U_{ab} y h_{ab} permite la proyección de cualquier tensor en partes paralelas y perpendiculares a u^a. Considerando la métrica:

$$\begin{aligned} g_{\perp ab} &= h_a^d h_b^e g_{de} = h_{ab} \\ g_{\perp ab} &= U_a^d U_b^e g_{de} = U_{ab}, \end{aligned}$$

así podemos dividir en sus partes paralelas y perpendiculares

$$g_{ab} = h_{ab} + U_{ab} = h_{ab} - u_a u_b \tag{8.11}$$

Luego el intervalo ds^2 asociado a un desplazamiento $x^\mu \to x^\mu + dx^\mu$ se puede descomponer como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \left(u_\mu dx^\mu\right)^2 = (\delta l)^2 - (\delta t)^2 \tag{8.12}$$

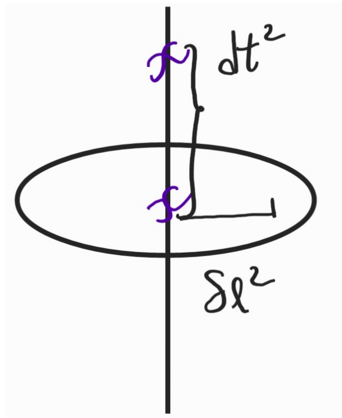


Figure 8.1: Proyección perpendicular y paralela de la métrica.

en un diferencial de tiempo $\delta t = \left(U_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}\right)^{1/2} = \left(-u_{\mu}dx^{\mu}\right)$ y una distancia espacial δl medido por un o observador que se mueve con 4-velocidad u^{μ} (Ver Fig. 8.1.)

Luego se pueden proyectar vectores ortogonales a u^a, y tomar las partes sin traza, ortogonales a u^{μ}, de tensores simétricos de rango dos, es decir, las partes sin trazas simétricas proyectadas o PSTF (projected symmetric Trace free). Para cualquier V_a y tensor S_{ab} las PSTF son:

$$V_{\langle a\rangle} = h_a^b V_b, \quad S_{\langle ab\rangle} = \left\{h^c_{(a}h^d_{b)} - \frac{1}{3}h_{ab}h^{cd}\right\} S_{cd} \tag{8.13}$$

Para la proyección de derivadas de tiempo usamos la notación

$$\dot{V}^{\langle a\rangle} = h^a_b \dot{V}^b \tag{8.14}$$

Ahora volviendo a lo anterior, consideremos una curva $y^i = y^i(v)$, que son líneas de mundo de galaxias. El vector de conexión en coordenadas generales X^{μ} es

$$\beta^{\mu} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^i}\right)_{s=\text{ constante}} \delta y^i \tag{8.15}$$

Un observador en O encontraría en todo momento que la posición del espacio-tiempo definida por β^{μ} se encuentra en la línea del mundo de la galaxia G.

Ahora tomemos la derivada temporal del vector posición relativa, y lo proyectamos ortogonal a u^a

$$v^a = v^{\langle a\rangle} = h^a_b u^d \nabla_d \left(h^b_c \beta^c\right) = \dot{\beta}^{\langle a\rangle} \tag{8.16}$$

Luego por su definición como vector de conexión, la derivada de Lie de β^a respecto a u^a se hace cero:

$$[u_1\beta]^a = u^a_{,b}\beta^b - \beta^a_{,b}u^b = \beta^b\nabla_b u^a - u^b\nabla_b\beta^a = 0 \tag{8.17}$$

debido a (8.4) y (8.15). Y se obtiene

$$v^a = v^a_b \beta^{\langle\beta\rangle}, \quad V_{ab} := h^c_a h^d_b \nabla_d u_c = \bar{\nabla}_b u_a \tag{8.18}$$

Sustituyendo la descomposición de $\beta^{\langle a\rangle}$ en Términos de distancia relativa y dirección en la ec. (8.18), y podemos descomponer V_{ab} en:

$$V_{ab} = V_{(ab)} + V_{[ab]} = \Theta_{ab} + \omega_{ab} \tag{8.19}$$

donde $\Theta_{ab} = \Theta_{(ab)} = \bar{\nabla}_{(a}u_{b)}$ es el Tensor de expansión, y $\omega_{ab} = \omega_{[ab]} = \bar{\nabla}_{[bu_a]}$, es el tensor de vorticidad o de rotación, que son las partes simétricas y antisimétricas del tensor proyectado V_{ab}.

Además

$$\Theta_{ab} = \Theta_{\langle ab\rangle} + \frac{1}{3}\Theta^c_c h_{ab} \equiv \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\Theta h_{ab}, \tag{8.20}$$

donde σ_{ab} es el tensor de corte, es la parte PSTF de Θ_{ab}, (así $\sigma_{ab} = \bar{\nabla}_{\langle au_b\rangle}$) y Θ la expansión de volumen, es parte de la Traza $\Theta = \bar{\nabla}_a u^a$ que es invariante.

El término que nos piden demostrar es $u_{a;b} = \nabla_b u^a$, luego derivando y proyectando sobre el plano cada índice $\gamma\,\beta$

$$\nabla_\mu u_\alpha = h^\gamma_\mu h^\beta_\alpha \nabla_\gamma u_\beta - \dot{u}_\alpha u_\mu$$

con $\dot{u}_\alpha = a_\alpha$ la aceleración, la cual es perpendicular a la 4-velocidad.

Vamos a descomponer el tensor en una parte perpendicular y otra paralela a u^μ,

$$\nabla_\gamma u_\beta = \frac{1}{2}\underbrace{\left(u_{\gamma_j\beta} + u_{\beta;\gamma}\right)}_{\text{parte simétrica}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(u_{\gamma_{j\beta}} - u_{\beta;\gamma}\right)}_{\text{parte antisimétrica}}$$

Hay que asumir que de la parte antisimétrica va a salir una rotación, mientras que de la parte simétrica va a salir el cizalle. Así que vamos a proyectar la parte simétrica γ y β.

$$h^\gamma_\mu h^\beta_\alpha \frac{1}{2}\left(u_{\gamma;\beta} + u_{\beta;\gamma}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta^\gamma_\mu + u_\mu u^\gamma\right)\left(\delta^\beta_\alpha + u_\alpha u^\beta\right)\left(u_{\gamma;\beta} + u_{\beta;\gamma}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta^\gamma_\mu + u_\mu u^\gamma\right)[(u_{\gamma;\alpha} + u_\alpha \underbrace{u^\beta u_{\gamma;\beta}}_{a_\gamma}) + u_{\alpha;\gamma} + \underbrace{u_\alpha u^\beta u_{\beta;\gamma}}_{0}]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta^\gamma_\mu + u_\mu u^\gamma\right)\left(u_{\gamma;\alpha} + u_{\alpha;\gamma} + u_\alpha a_\gamma\right)$$

$$= \frac{1}{2}[u_{\mu;\alpha} + u_{\alpha;\mu} + u_\alpha \alpha_\mu + u_\mu \underbrace{\left(u^\gamma u_{\gamma;\alpha}\right)}_{0} + u_\mu \underbrace{\left(u_{\alpha;\gamma}u^\gamma\right)}_{a_\alpha} + u_\alpha a_\gamma u_\mu u^\gamma]$$

$$h^\gamma_\mu h^\beta_\alpha \frac{1}{2}\left(u_{\gamma;\beta} + u_{\beta;\gamma}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{\mu;\alpha} + u_{\alpha;\mu} + u_\mu a_\alpha + u_\alpha a_\mu\right)$$

Ahora, a esta parte simétrica uno le descuenta $1/3$ de la traza, porque la traza también es una invariante, y nos conviene tener los invariantes a la vista.

$$v_{(\mu\nu)} \equiv \sigma_{(\mu\nu)} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}$$

se define σ como uno que no tenga traza, y por eso se suma la traza, además σ es simétrico. Luego $\theta = u^{\alpha}_{;\alpha}$ es la compresibilidad o expansión.

Ahora proyectamos la parte antisimétrica,

$$\begin{aligned}\omega_{\lambda\rho} &= u_{\lambda;\nu}\left(\delta^{\nu}_{\rho} - u^{\nu}u_{\rho}\right) - u_{\rho;\nu}\left(\delta^{\nu}_{\lambda} - u^{\nu}u_{\lambda}\right) \\ &= \left(u_{\lambda;\rho} - u_{\rho;\lambda}\right) - a_{\lambda}u_{\rho} + a_{\rho}u_{\lambda}\end{aligned}$$

De esta forma las cantidades tensoriales: aceleración, expansión, cizallamiento y vorticidad se denominan cantidades cinemáticas porque caracterizan el flujo del fluido. Se definen a partir de la primera derivada covariante de la 4-velocidad u^a, se obtiene de lo anterior junto con (8.5) y (8.18)-(8.20) que

$$\boxed{\nabla_b u_a = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} - \dot{u}_a u_b}. \tag{8.21}$$

Lo que demuestra que esta derivada esta completamente determinada por las cantidades cinemáticas.

8.2 Cizalle y rotación clásicos

(1) En el caso de la expansión pura tenemos $\omega_{ab} = \sigma_{ab} = 0$, por lo tanto la tasa de cambio de la distancia relativa se convierte en $\frac{\delta l}{Sl} = \frac{\theta}{3}$ y la tasa de cambio de la posición relativa se convierte en $\dot{e}^{\langle a\rangle} = 0$. Si consideramos una esfera de galaxias de radio δl alrededor de nosotros a un tiempo t, en el tiempo $t+\delta t$, las distancias a todas las galaxias han aumentado en $dl = \theta\delta l\delta t/3$, y sus direcciones no han cambiado entonces se forma una esfera más grande $(\theta > 0)$ con cada galaxia en la misma dirección que antes, entonces se obtiene expansión sin distorsión ni rotación.

(2) En el caso de corte puro, $\omega_{ab} = \theta = 0$, así la tasa de distancia es $\frac{\delta l}{Sl} = \sigma_{ab}e^a e^b$y la tasa de cambio $\dot{e}_{\langle a\rangle} = \sigma_{ab}e^b - \left(\tau_{cd}e^c e^d\right)e_a$. $\sigma_{ab} = \mathrm{diag}\,(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, donde $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = O$ (porque este tensor no tiene traza). Si hay una expansión en la dirección 1 $(\sigma_1 > 0)$, debe haber una contracción en otra dirección, como $\Sigma_2 < 0$. Así la esfera de galaxias al tiempo $t+dt$ en la dirección del eje j habrá cambiado en $dl = \sigma_j\delta l\delta t$ y sus direcciones, no cambian. Las galaxias forman un elipsoide, expandiéndose en la dirección 1 pero contrayéndose en la dirección 2. El cambio de dirección promedio será cero, los movimientos se compensan. Tenemos distorsión pura, sin rotación ni cambio de volumen.

(3) Caso de vorticidad pura, $\sigma_{ab} = \theta = 0 : \frac{\delta l}{Sl} = 0$ y $\dot{e}_{\langle a\rangle} = \omega_{ab}e^b$. Por definición una rotación conserva todas las distancias. Se define el vector vorticidad

$$\omega_a = -\frac{1}{2}cur \mid u_a = \frac{1}{2}\eta_{abc}\omega^{bc} \Leftrightarrow \omega_{ab} = \eta_{abc}\omega^c \qquad (34)$$

donde ω^a es ortogonal a u^b, que es vector propio de ω_{ab} Pero en un flujo de fluido general estas cantidades serán distintas de cero.

Se define una longitud de escala representativa $\ell(\tau)$

$$\frac{\dot{l}}{\ell} = \frac{1}{3}\theta$$

ℓ corresponde al factor de escala "a" en la métrica FLRW. El parámetro de Hubble para el flujo es

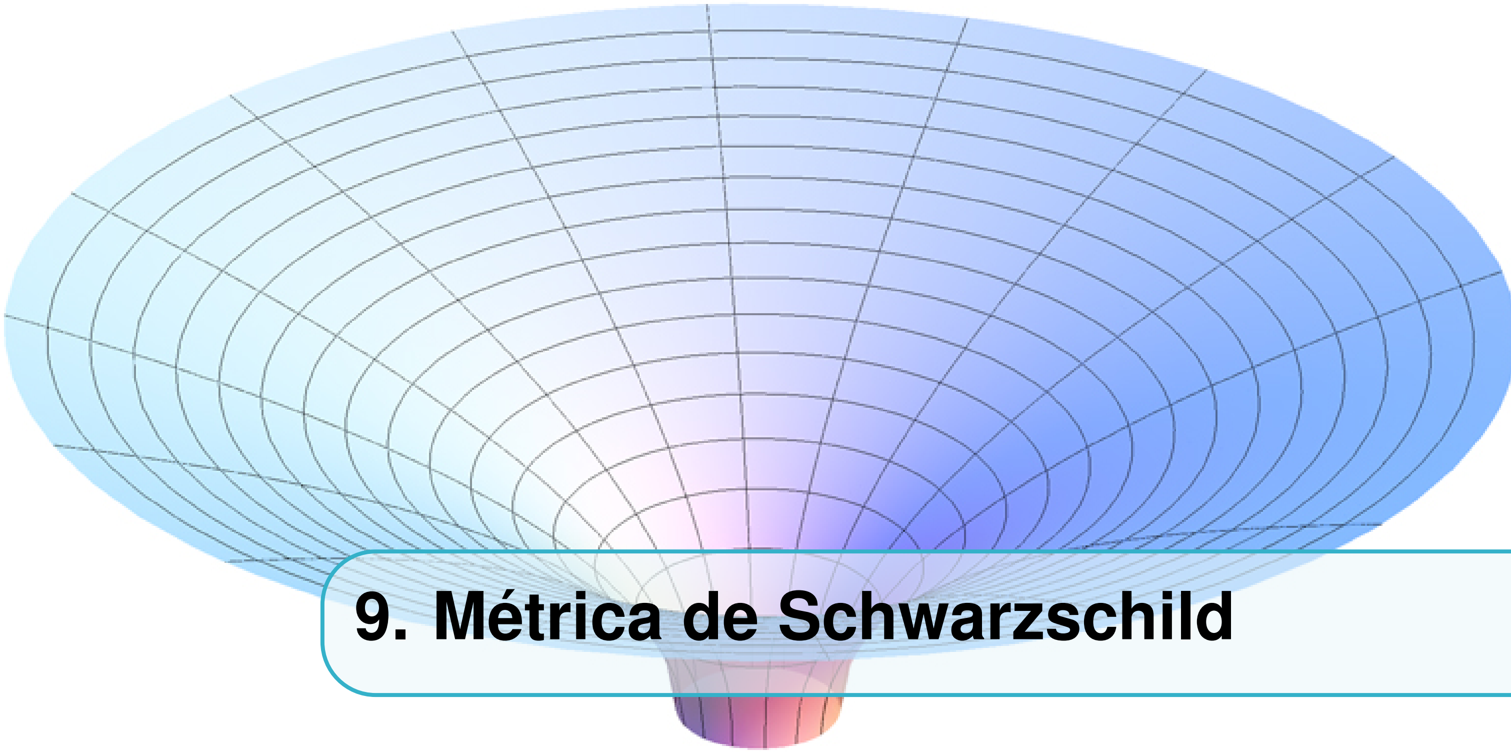
$$H := \frac{\dot{e}}{l} = \frac{1}{3}\theta$$

.

Su valor actual

$$H_0 = \left(\frac{\dot{l}}{\ell}\right)_0$$

es la constante de Hubble.



9. Métrica de Schwarzschild

Obtener la métrica de Schwarzschild en su forma canónica a partir de un métrica semilla. Puede guiarse por el MTW, pág.360, cap.14, donde usa formas diferenciales o el R. Wald, Cap 6, pág. 120, que también usa formas diferenciales o el Weinberg, Cap. 8, que usa un sistema coordenado para obtener la solución. Le conviene guardar sus resultados ordenadamente para poder usarlos posteriormente. Si calcula el símbolo de Christoffel, NO lo calcule para un valor dado de los índices. En general se trabaja menos si calcula Γ^0_{ij}, de aquí puede extraer las 6 componentes.

9.1 Semilla

¿Qué es una semilla?

Son suposiciones que se utilizan para la descripción del espacio tiempo bajo la influencia de un objeto con una masa muy grande que tiene simetría esférica y es irrotacional. Estas suposiciones son

1. El espacio-tiempo es esféricamente simétrico
2. El espacio-tiempo es estático. Y el Teorema de Birkhoff:

$$T_{\mu\nu} = 0$$

3. El espacio tiempo es asintóticamente plano

La tarea entonces es encontrar una solución a las ecuaciones de campo de Einstein que describa un campo gravitacional externo a un objeto aislado, de masa M muy grande, y que está en reposo.

9.2 Derivación de la métrica

Dada la simetría del problema, escogemos el origen en el centro de la esfera de masa M, usaremos coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi . \end{aligned}$$

Entonces partiendo la métrica del espacio-tiempo de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

y escribiéndola en coordenadas esféricas, tenemos

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + \rho^2 \sin^2\phi d\theta^2. \tag{9.1}$$

Entonces si consideramos que el espacio tiempo es simétrico, esto significaría que ρ y t son constantes,

$$dl^2 = \rho^2 \left(d\phi^2 + \sin^2\phi d\theta^2\right)$$

que corresponde a la geometría de una 2-esfera. Luego un espacio-tiempo es esféricamente simétrico si cada punto del espacio-tiempo se encuentra en una superficie bidimensional (que es una 2-esfera). Usando las coordenadas del espacio-tiempo (ρ, t, θ, ϕ), entonces el intervalo es

$$dl^2 = f(\rho, t)\left[d\phi^2 + \sin^2\phi d\theta^2\right]$$

donde $\sqrt{f(\rho,t)}$ es el radio de curvatura de la 2-esfera.

Pero ρ, en el espacio-tiempo curvo no siempre existe una relación tan simple entre las coordenadas angulares de la esfera 2-D y las dos coordenadas restantes para cada punto en el espacio-tiempo. Sin embargo, siempre podemos definir una nueva coordenada radial, r, que satisface $r^2 = f(\rho, t)$. Tenemos $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, luego sea $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = \theta$ entonces

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\phi} & g_{t\theta} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\phi} & g_{r\theta} \\ g_{\phi t} & g_{\phi r} & g_{\phi\phi} & g_{\phi\theta} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\phi} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

Ahora consideremos la condición (2), que sea estático, es decir, el campo gravitacional no cambia con el tiempo y es independiente de ϕ y θ, así

$$g_{r\theta} = g_{\theta r} = g_{r\phi} = g_{\phi r} = g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} = 0$$

De manera similar, para evitar una dirección preferida en el espacio-tiempo, podemos restringir aún más los coeficientes

$$g_{t\theta} = g_{t\phi} = g_{\theta t} = g_{\phi t} = 0$$

Además, con un campo gravitacional estático e invariable, todos los coeficientes métricos deben ser independientes de t y la métrica debe permanecer sin cambios si tuviéramos que invertir el tiempo, es decir, aplicar la transformación $t \to -t$. Con esa restricción, solo dt^2 deja ds^2 sin cambios y por lo tanto implica $g_{tr} = g_{rt} = 0$. Así nos queda

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2$$

Luego como vimos en ayudantía podemos hacer una generalización del espacio-tiempo plano de (9.1)

$$ds^2 = -U(\rho)dt^2 + V(\rho)d\rho^2 + W(\rho)\left(\rho^2 d\phi^2 + \rho^2 \sin^2\phi d\theta^2\right)$$

donde U, V, W son funciones de ρ solamente. Por lo mencionado antes, dejemos $r = \rho\sqrt{W(\rho)}$, reescalamos,

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2\phi d\theta^2 \tag{9.2}$$

y definimos $A(r)$ y $B(r)$ como exponenciales ya que estas deben ser estrictamente positivas, y además ya se sabe que con estas funciones llegamos al resultado conocido de esta métrica,

$$A(r) = e^{2m(r)} = e^{2m} \text{ y } B(r) = e^{2n(r)} = e^{2n}$$

Luego, sustituyendo en la ecuación (9.2) tenemos

$$ds^2 = -e^{2m}dt^2 + e^{2n}dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2\phi d\theta^2 \tag{9.3}$$

Con $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, y $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = \theta$ tenemos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\phi \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

Como $g_{\mu\nu}$ es una matriz diagonal, $g = \det\left(g_{ij}\right) = -e^{2m+2n}r^4\sin^2\phi$. Para encontrar una solución estática, esféricamente simétrica, debemos encontrar $m(r)$ y $n(r)$, y, para resolverlos debemos usar el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\beta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\beta\lambda} = 0$$

donde Γ es:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right) \tag{9.5}$$

De la ecuación (9.4), vemos que $g_{\mu\nu} = 0$ for $\mu \neq \nu$, y entonces $g^{\mu\mu} = 1/g_{\mu\mu}$ y $g^{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$. Por tanto los coeficientes $g^{\lambda\beta}$ son 0 a menos que $\beta = \lambda$ y sustituyendo esto en la ec.(9.5) anterior tenemos

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right)$$

9.3 Símbolos de Christoffel

En la ecuación (9.5) $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ entonces tenemos tres casos: $\lambda = \nu, \mu = \nu \neq \lambda$, y μ, ν, λ distinto. Recordemos que $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$, con esto se simplicarán varios términos.
Caso 1. Para $\lambda = \nu$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\nu}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2g_{\nu\nu}} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} \right) \\ &= \frac{1}{2g_{\nu\nu}} \left(\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[\ln |g_{\nu\nu}| \right] \end{aligned} \tag{9.6}$$

donde en la última línea se ha usado la propiedad demostrada en la ec. (9.27) del anexo.
Caso 2. Para $\mu = \nu \neq \lambda$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} &= \frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\lambda}} \right) \\ &= -\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\lambda}} \right) \end{aligned} \tag{9.7}$$

Caso 3. Para μ, ν, λ distinto (todos los elementos fuera de la diagonal):

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2g_{\lambda\lambda}} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{9.8}$$

Usando los valores para $g_{\mu\nu}$ a partir de la ecuación (9.4) podemos calcular los símbolos de Christoffel distintos de cero (en términos de m, n, r y ϕ)

$$\Gamma^{0}_{10} = \Gamma^{0}_{01} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{1}} \left[\ln |g_{00}| \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[\ln \left| e^{2m} \right| \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} 2m$$

$$\boxed{\Gamma^{0}_{10} = \Gamma^{0}_{01} = m'}$$

donde $' \equiv d/dr$

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{1}} \left[\ln |g_{11}| \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[\ln e^{2n} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} 2n$$

$$\boxed{\Gamma^1_{11} = n'}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\ln|g_{22}|\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\ln r^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\ln r$$

$$\boxed{\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}.}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\ln|g_{33}|\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\ln r^2 + \ln\sin^2\phi\right)$$

$$\boxed{\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}.}$$

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2g_{11}}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2e^{2n}}\left(-\frac{de^{2m}}{dr}\right) = \frac{1}{2}2m'\frac{e^{2m}}{e^{2n}}.$$

$$\boxed{\Gamma^1_{00} = m'e^{2m-2n}}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2e^{2n}}\left(\frac{d}{dr}r^2\right)$$

$$\boxed{\Gamma^1_{22} = -re^{-2n}}.$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2g_{11}}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2e^{2n}}\left(\frac{d}{dr}r^2\sin^2\phi\right) = -\frac{1}{2e^{2n}}2r\sin^2\phi$$

$$\boxed{\Gamma^1_{33} = -re^{-2n}\sin^2\phi}.$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\ln|g_{33}|\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{d\phi}\left(\ln r^2\sin^2\phi\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\phi}\left(\ln r^2 + \ln\sin^2\phi\right) = \frac{1}{2}2\cot\phi.$$

$$\boxed{\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\phi.}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2g_{22}}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2r^2}\left(\frac{d}{d\phi}r^2\sin^2\phi\right) = -\frac{1}{2r^2}r^2 2\sin\phi\cos\phi,$$

$$\boxed{\Gamma^2_{33} = -\sin\phi\cos\phi.}$$

Así que en resumen los símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\begin{array}{ll}
\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = m' & \Gamma^1_{00} = m'e^{2m-2n} \\
\Gamma^1_{11} = n' & \Gamma^1_{22} = -re^{-2n} \\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} & \Gamma^1_{33} = -re^{-2n}\sin^2\phi \\
\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} & \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\phi \\
 & \Gamma^2_{33} = -\sin\phi\cos\phi
\end{array}$$

9.4 Componentes del tensor de Ricci

Notemos que

$$\ln|g|^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2m+2n}r^4\sin^2\phi\right| = m+n+2\ln|r|+\ln|\sin\phi| \tag{9.9}$$

y por ec. (9.27):

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}[\ln|g|] = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^\mu} = g^{\lambda\beta}\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\mu}$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\beta}[\ln|g|] = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\beta},$$

y como que $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$,

$$\implies \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] = \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^\beta}.$$

Luego teníamos que

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right)$$

entonces digamos que $\mu = \beta, \nu = \lambda$ y δ sea la variable ficticia (que antes era β) y vemos

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{\beta\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\delta}\left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\delta}\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\lambda}\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^\beta}\right)
\end{aligned}$$

La segunda igualdad proviene del hecho de que $g^{\lambda\beta} = 0$ para $\lambda \neq \beta$ y los términos son cero si δ es algo diferente a λ. De lo anterior tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] = \frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^\beta}\right) = \Gamma^\lambda_{\beta\lambda}$$

Similarmente

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}.$$

Luego las ecuaciones de campo son:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\beta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\beta\lambda} = 0$$

y por lo tanto tenemos que las ecuaciones de campo implican

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\beta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] = 0.} \tag{9.10}$$

Sin embargo, $R_{\mu\nu}$ para algunos valores de μ y ν estarán en términos de m,n,r y ϕ que debemos establecer en cero. Con $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = \theta$, ecuación (9.9) y los valores distintos de cero de los símbolos de Christoffel, se tiene

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{00}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\beta_{0\lambda}\Gamma^\lambda_{0\beta} - \Gamma^\beta_{00}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(m+n+2\ln|r|+\ln|\sin\phi|) - \frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial r} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{00}\frac{\partial}{\partial r}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial r}m' e^{2m-2n} + 2m'^2 e^{2m-2n} - m' e^{2m-2n}\frac{\partial}{\partial r}(m+n+2\ln|r|+\ln|\sin\phi|) \\
&= -m'' e^{2m-2n} - m'\left(2m'-2n'\right)e^{2m-2n} + 2m'^2 e^{2m-2n} - m' e^{2m-2n}\left(m'+n'+\frac{2}{r}\right) \\
&= e^{2m-2n}\left(-m'' - 2m'^2 + 2m'n' + 2m'^2 - m'^2 - m'n' - \frac{2m'}{r}\right) \\
&= e^{2m-2n}\left(-m'' + m'n' - m'^2 - \frac{2m'}{r}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial r} + \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13} - \Gamma^1_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] \\
&= m'' + n'' - \frac{2}{r^2} - n'' + m'^2 + n'^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 - n'\left(m'+n'+\frac{2}{r}\right) \\
&= m'' + m'^2 - m'n' - \frac{2n'}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] - \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial r} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23} - \Gamma^1_{22}\frac{\partial}{\partial r}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}[\ln|\sin\phi|] + \left(e^{-2n} - 2n're^{-2n}\right) - \frac{re^{-2n}}{r} - \frac{re^{-2n}}{r} + \cot^2\phi + re^{-2n}\left(m'+n'+\frac{2}{r}\right) \\
&= -1 - \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} + e^{-2n} - 2n're^{-2n} - 2e^{-2n} + \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} + m're^{-2n} + n're^{-2n} + 2e^{-2n} \\
&= -1 + e^{-2n} - 2n're^{-2n} + m're^{-2n} + n're^{-2n} \\
&= e^{-2n}\left(1 + m'r - n'r\right) - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} = \tfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] - \tfrac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial r} - \tfrac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial \phi} + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{31} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{32} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} \\
-\Gamma^1_{33}\tfrac{\partial}{\partial r}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] - \Gamma^2_{33}\tfrac{\partial}{\partial \phi}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]
\end{aligned}$$

$$= 0 + \tfrac{\partial}{\partial r}\left(re^{-2n}\sin^2\phi\right) + \tfrac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\cos\phi) - \tfrac{re^{-2n}\sin^2\phi}{r} - \tfrac{re^{-2n}\sin^2\phi}{r} - (\sin\phi\cos\phi)\cot\phi$$
$$-(\sin\phi\cos\phi)\cot\phi + re^{-2n}\sin^2\phi\left(m' + n' + \tfrac{2}{r}\right) + \sin\phi\cos\phi\left(\tfrac{\cos\phi}{\sin\phi}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(e^{-2n}\sin^2\phi - 2n're^{-2n}\sin^2\phi\right) + \left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) - 2e^{-2n}\sin^2\phi - 2\cos^2\phi \\
&\quad + \sin^2\phi\left(m're^{-2n} + n're^{-2n} + 2e^{-2n}\right) + \cos^2\phi \\
&= \sin^2\phi\left(e^{-2n} - n're^{-2n} - 1 + m're^{-2n}\right) \\
&= \left[e^{-2n}(1 - n'r + m'r) - 1\right]\sin^2\phi = R_{22}\sin^2\phi
\end{aligned}$$

Los términos anteriores corresponden a todos los valores distintos de cero de $R_{\mu\nu}$. Los términos restantes son cero. Teníamos la ec. (9.10)

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\beta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] = 0$$

Hay que ver el caso $\mu \neq \nu$ para todos los μ y ν término a término. Notemos que el primer término va a ser cero, por la ec. (9.9):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(m + n + 2\ln|r| + \ln|\sin\phi|) = 0,$$

ya que cada término es una función de una sola variable, pero estamos tomando la derivada con respecto a dos variables distintas $\mu \neq \nu$. Por tanto, el primer término es cero para todos $R_{\mu\nu}$ con $\mu \neq \nu$. Ahora, veamos el segundo término:

$$-\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^\mu_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\mu\nu}$$

Los términos del lado derecho pueden parecer idénticos, pero son términos que involucran cuatro variables específicas, mientras que el lado izquierdo suma una sola variable ficticia. No es necesario calcular todos los símbolos de Christoffel usando la ec. (9.5) (la mayoría de los términos son cero), simplemente nos remitiremos a los cálculos de los tres casos enumerados anteriormente en las ecuaciones (9.6), (9.7) y (9.8). Los dos primeros símbolos de Christoffel se incluyen en el Caso 3, ya que λ, μ y ν son todos casos distintos. Por tanto, ambos son cero. Los dos últimos símbolos de Christoffel son ambos Caso 1, por lo que se reducen y tenemos

$$-\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{1}{2g_{\mu\mu}}\left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\nu}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{1}{2g_{\nu\nu}}\left(\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^\mu}\right)\right]$$

Por regla de la cadena tenemos

$$-\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{1}{2g_{\mu\mu}}\right)\left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\nu}\right) - \frac{1}{2g_{\mu\mu}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(g_{\mu\mu})\right] - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{2g_{\nu\nu}}\right)\left(\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^\mu}\right) - \frac{1}{2g_{\nu\nu}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu}(g$$

Recuerdando la ec. (9.4), notemos que $g_{\beta\beta}$ para β de 0,1, o 2 solo pueden ser funciones de una variable. Por lo tanto, el segundo y cuarto términos anteriores son cero si μ o ν es 0,1 o 2. Al igual que antes, esto se debe a que tenemos funciones de una sola variable y estamos tomando derivadas con respecto a dos variables distintas. Ahora veamos el caso de que μ o ν sea 3. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mu = 3$. En este caso, $g_{\mu\mu} = g_{33} = g_{\theta\theta} = r^2 \sin\phi$ que es una función de dos variables, r y ϕ. Sin embargo, tomando la derivada parcial con respecto a μ y como $\mu = 3$ tenemos $x^{\mu} = x^3 = \theta$, por lo que el segundo y el cuarto términos seguirían siendo cero. Por lo tanto, nos quedan el primer y tercer término,

$$-\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{1}{2g_{\mu\mu}}\right)\left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{1}{2g_{\nu\nu}}\right)\left(\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

Notemos que en los dos términos restantes μ y ν no son variables específicas, por lo que si cambiamos μ por ν y ν por μ, entonces el dos términos serían equivalentes. Por tanto, si mostramos que uno de los términos va a cero, el otro irá de forma equivalente a cero. Sin pérdida de generalidad, consideremos el primer término. Notemos que consiste en una derivada de $g_{\nu\nu}$ con respecto a x^{μ} y una derivada de $g_{\mu\mu}$ con respecto a x^{ν}. Si μ es igual a 0,1, o 2 entonces $g_{\mu\mu}$ es una función de una sola variable, r. Dado que tenemos derivadas con respecto a dos variables distintas, entonces la que no es r nos da un valor de cero y el término completo se convierte en cero. Si μ es 3, entonces $g_{\mu\mu}$ es una función de r y ϕ. Sin embargo, una derivada es con respecto a $x^{\mu} = x^3 = \theta$ y entonces el término sería cero. En resumen el segundo término de $R_{\mu\nu}$ siempre es cero para $\mu \neq \nu$.

$$-\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = 0$$

Así la ecuación (9.10)

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] = 0$$

se convierte en

$$R_{\mu\nu} = 0 - 0 + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right] = 0$$

Veamos ahora el tercer término. Usando notación de Einstein, parece ser solo un producto de dos símbolos de Christoffel; sin embargo, en realidad suma más de λ y β, cada una de las cuales podría ser cuatro variables específicas, lo que nos da un total de 16 términos. Al igual que con el segundo término $R_{\mu\nu}$, mientras el lado izquierdo es una suma con variables ficticias β y λ, el lado derecho está expandido y no contiene más sumas, independientemente de lo similares que puedan parecer,

$$\begin{aligned}\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} = {} & \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} \\ & + \Gamma^{\beta}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\beta} + \Gamma^{\mu}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} + \Gamma^{\nu}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\nu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\nu\beta} + \Gamma^{\mu}_{\mu\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\nu} \\ & + \Gamma^{\mu}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\nu\nu},\end{aligned}$$

ya que los símbolos de Christoffel conmutan, reunimos los términos que son simétricos,

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} + 2\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} + 2\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} + 2\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\nu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\beta} + 2\Gamma^{\mu}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} + 2\Gamma^{\nu}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} + 2\Gamma^{\nu}_{\mu\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\nu\nu}$$

En lugar de escribir todo para cada símbolo de Christoffel, usemos los casos que derivamos antes en las ecuaciones (9.6), (9.7), (9.8). Al usarlos, primero notemos que los símbolos de Christoffel que tienen tres variables distintas (las del Caso 3) se reducen a cero. A continuación escribimos solo los términos que quedan:

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\beta}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\beta} + \Gamma^{\mu}_{\mu\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\nu\nu} + 2\Gamma^{\nu}_{\mu\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\nu}.$$

Aquí, los primeros cuatro términos son cada uno producto de dos símbolos de Christoffel del Caso 1 y el último término es un producto de dos símbolos de Christoffel del Caso 2. Usando esas ecuaciones, ahora podemos escribir el tercer término $R_{\mu\nu}$ explícitamente.

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} = \frac{1}{2g_{\lambda\lambda}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(g_{\lambda\lambda})\right]\frac{1}{2g_{\lambda\lambda}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(g_{\lambda\lambda})\right] + \frac{1}{2g_{\beta\beta}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(g_{\beta\beta})\right]\frac{1}{2g_{\beta\beta}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(g_{\beta\beta})\right] + \frac{1}{2g_{\mu\mu}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(g_{\mu\mu})\right]\frac{1}{2g_{\mu\mu}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(g_{\mu\mu})\right] + \frac{1}{2g_{\nu\nu}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(g_{\nu\nu})\right]\frac{1}{2g_{\nu\nu}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(g_{\nu\nu})\right] + 2\left(\frac{-1}{2g_{\nu\nu}}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(g_{\mu\mu})\right]\left(\frac{-1}{2g_{\mu\mu}}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(g_{\nu\nu})\right]$$

Al observar detenidamente los términos anteriores, vemos que todos contienen un producto de una derivada de un $g_{\alpha\alpha}$ con $\alpha = \{\lambda, \beta, \mu, \nu\}$, con respecto a x^{μ} y x^{ν}. Antes vimos que los términos $g_{\alpha\alpha}$ son funciones de solo r o r y ϕ, por lo que para evitar que ambas derivadas sean cero, μ y ν no pueden ser 0 o 3. Si lo fueran, entonces las derivadas se tomarían con respecto a $x^0 = t$ o $x^3 = \theta$, ambos serían cero para cualquier término $g_{\alpha\alpha}$, forzando todo el lado derecho a cero. Por tanto, μ debe ser 1 o 2 y ν debe ser 1 o 2. Notemos que para cada término, podríamos intercambiar μ y ν y cada término permanecería sin cambios.

Es decir, cada término para $\mu = 1$ y $\nu = 2$ es equivalente al de $\mu = 2$ y $\nu = 1$. Por lo tanto, podemos intercambiar μ y ν y todo el lado derecho permanecerá sin cambios. Además, los dos primeros términos son los únicos que contienen λ y β que también podríamos intercambiar. Dado que podemos intercambiar estas variables sin afectar el valor de la ecuación, podemos encontrar un valor para un solo caso y saber que es equivalente a los demás. Así, sin pérdida de generalidad, sea $\mu = 1 \Rightarrow x^{\mu} = r, \nu = 2 \Rightarrow x^{\nu} = \phi, \lambda = 3 \Rightarrow x^{\lambda} = \theta$, y $\beta = 0 \Rightarrow x^{\beta} = t$. Entonces tenemos

$$\Gamma^{\beta}_{1\lambda}\Gamma^{\lambda}_{2\beta} = \frac{1}{2g_{\theta\theta}}\left[\frac{\partial}{\partial r}(g_{\theta\theta})\right]\frac{1}{2g_{\theta\theta}}\left[\frac{\partial}{\partial \phi}(g_{\theta\theta})\right] + \frac{1}{2g_{tt}}\left[\frac{\partial}{\partial r}(g_{tt})\right]\frac{1}{2g_{tt}}\left[\frac{\partial}{\partial \phi}(g_{tt})\right] + \frac{1}{2g_{rr}}\left[\frac{\partial}{\partial r}(g_{rr})\right]\frac{1}{2g_{rr}}\left[\frac{\partial}{\partial \phi}(g_{rr})\right] + \frac{1}{2g_{\phi\phi}}\left[\frac{\partial}{\partial r}(g_{\phi\phi})\right]\frac{1}{2g_{\phi\phi}}\left[\frac{\partial}{\partial \phi}(g_{\phi\phi})\right] + 2\left(\frac{-1}{2g_{\phi\phi}}\right)\left[\frac{\partial}{\partial \phi}(g_{rr})\right]\left(\frac{-1}{2g_{rr}}\right)\left[\frac{\partial}{\partial r}(g_{\phi\phi})\right]$$

Sustituyendo los valores de la ecuación (9.4) y tomando derivadas, vemos que lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned}\Gamma^{\beta}_{1\lambda}\Gamma^{\lambda}_{2\beta} &= \frac{1}{2r^2\sin^2\phi}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin^2\phi\right)\frac{1}{2r^2\sin^2\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(r^2\sin^2\phi\right)+0+0+0+0\\&=\frac{1}{4r^4\sin^4\phi}\left(2r\sin^2\phi\right)\left(r^2 2\sin\phi\cos\phi\right)\\&=\frac{\cos\phi}{r\sin\phi}=\frac{\cot\phi}{r}\end{aligned}$$

Al derivar esto, también mostramos que el tercer término de $R_{\mu\nu}$ es trivialmente cero para todas las demás $\mu\neq\nu$. Ahora tenemos sólo que calcular el cuarto término de $R_{\mu\nu}$. Expandiendo el cuarto término, esto suma más de β, por lo que esperamos cuatro términos.

$$-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]=-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]-\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]-\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]$$

Luego, los dos primeros términos, que tienen símbolos de Christoffel de tres variables distintas, se reducen a cero dejando

$$-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]=-\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]-\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right],$$

y Usando la ec. (9.6) (Caso 1), tenemos

$$-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]=\frac{-1}{2g_{\mu\mu}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(g_{\mu\mu}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]+\frac{-1}{2g_{\nu\nu}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(g_{\nu\nu}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]$$

Como antes, estamos tomando derivados con respecto a x^{μ} y x^{ν} de $g_{\mu\mu}$ y $g_{\nu\nu}$, pero ahora además estamos tomando derivadas de $\ln\left|g^{1/2}\right|$. Sin embargo, esto también es una función solo de r y ϕ. Por lo tanto, para que las derivadas sean trivialmente distintas de cero, μ y ν deben ser 1 o 2. Podemos intercambiar μ y ν por los dos términos restantes y así, sin pérdida de generalidad, sea $\mu=1\Rightarrow x^{\mu}=r$ y $\nu=2\Rightarrow x^{\nu}=\phi$

$$\begin{aligned}-\Gamma^{\beta}_{12}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]&=\frac{-1}{2g_{rr}}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}\left(g_{rr}\right)\right]\frac{\partial}{\partial r}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]+\frac{-1}{2g_{\phi\phi}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(g_{\phi\phi}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\ln\left|g^{1/2}\right|\right]\\&=0+\frac{-1}{2r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial\phi}[\ln|\sin\phi|]\\&=\frac{-1}{2r^2}(2r)\left(\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right)=\frac{-\cos\phi}{r\sin\phi}=\frac{-\cot\phi}{r}\end{aligned}$$

Sustituimos los valores de la ecuación (9.4) y tomamos derivadas para ver que el cuarto término para $R_{12}=R_{21}=\frac{-\cot\phi}{r}$. Además, sabemos que $R_{\mu\nu}$ para todas las demás $\mu\neq\nu$ es cero porque las derivadas son trivialmente cero. Ahora hemos calculado los cuatro términos de $R_{\mu\nu}$ para $\mu \neq \nu$.

$$R_{\mu\nu} = \begin{cases} 0+0+\frac{\cot\phi}{r}-\frac{\cot\phi}{r}=0 & \text{para } \mu,\nu=\{1,2\} \\ 0+0+0+0 & \text{para todos los demás } \mu\neq\nu \end{cases}$$

Y los términos para $\mu = \nu$

$$R_{00} = e^{2m-2n}\left(-m''+m'n'-m'^2-\frac{2m'}{r}\right) \tag{9.11}$$

$$R_{11} = m''+m'^2-m'n'-\frac{2n'}{r} \tag{9.12}$$

$$R_{22} = e^{-2n}\left(1+m'r-n'r\right)-1 \tag{9.13}$$

$$R_{33} = \left[e^{-2n}\left(1-n'r+m'r\right)-1\right]\sin^2\phi = R_{22}\sin^2\phi \tag{9.14}$$

9.5 Resolviendo los coeficientes

Como buscamos la solución para una esfera aislada de masa, M, las ecuaciones de campo (9.10) implican que fuera de esta masa, todos los componentes del tensor de Ricci son cero. Luego, podemos considerar las ecuaciones anteriores iguales a cero y resolver el sistema para m y n para que podamos encontrar la métrica,

$$-m''+m'n'-m'^2-\frac{2m'}{r}=0 \tag{9.15}$$

$$m''+m'^2-m'n'-\frac{2n'}{r}=0 \tag{9.16}$$

$$e^{-2n}\left(1+m'r-n'r\right)-1=0 \tag{9.17}$$

$$R_{22}\sin^2\phi=0 \tag{9.18}$$

Sumando las ecuaciones (9.15) y (9.16) tenemos

$$\frac{-2\left(m'+n'\right)}{r}=0$$

lo que implica

$$m+n= \text{ constante}$$

Sin embargo, a grandes distancias de la masa, la métrica debe reducirse al espacio-tiempo plano de Minkowski de la relatividad especial. Por lo tanto, tenemos las siguientes condiciones de borde

$$\text{como} \quad r\to\infty, \quad e^{2m}\to 1 \quad \text{y} \quad e^{2n}\to 1$$

y entonces

$$\text{como} \quad r \to \infty, \quad m \to 0 \quad \text{y} \quad n \to 0$$

Así, $m+n=0$ y $n=-m$ entonces podemos eliminar n y reescribir la ecuación (9.17) como

$$1 = \left(1+2rm'\right)e^{2m} = e^{2m} + 2rm'e^{2m}$$

Ahora notemos que

$$\frac{d}{dr}\left(re^{2m}\right) = e^{2m} + 2rm'e^{2m} = 1$$

Integrando respecto a r nos da

$$\begin{aligned} re^{2m} &= r+\alpha \\ e^{2m} &= 1+\frac{\alpha}{r} \end{aligned} \tag{9.19}$$

con α una constante. Tenemos que resolver α para encontrar la métrica exacta. Con esto en mente, supongamos que liberamos una partícula de "prueba" con tan poca masa que no perturba la métrica del espacio-tiempo. Además, supongamos que la liberamos del reposo para que inicialmente

$$dx^\mu = 0 \text{ para } \mu = 1,2,3$$

Entonces, podemos reescribir la ecuación (9.3) como

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2m}dt^2 + e^{2n}dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2\sin^2\phi\, d\theta^2 \\ &= -e^{2m}dt^2 + 0 + 0 + 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, para intervalos de tiempo, podemos relacionar el tiempo propio τ entre dos eventos como

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} = -ds^2 \tag{9.20}$$

La segunda igualdad se deriva de nuestro uso de unidades geometrizadas; establecemos $c=1$ en la formulación del espacio-tiempo de Minkowski. Entonces tenemos

$$d\tau^2 = -ds^2 = e^{2m}dt^2$$

$$\implies \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{e^{2m}}$$

$$\implies \frac{dt}{d\tau} = e^{-2m/2} = e^{-m}. \tag{9.21}$$

Por otro lado tenemos la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Notemos que aparece $\frac{dx^\mu}{d\tau}$, lo que motiva el cambio anterior de ds a $d\tau$. Como queremos resolver α y queremos que nuestra métrica se reduzca a la gravitación newtoniana en el límite de campo débil. Encontremos la ecuación geodésica para $x^\lambda = x^1 = r$ en el instante en que liberamos nuestra partícula de prueba. Como estamos lanzando esta partícula del reposo: $\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$ para $\lambda \neq 0$ y así nos quedamos solo con:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma^1_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Ahora vemos más motivación para cambiar al tiempo propio τ, ya que podemos sustituir fácilmente desde la ecuación (9.21) y mover el término de la derecha al otro lado, sustituimos usando nuestro valor por el símbolo y la ecuación de Christoffel (9.21), y obtenemos

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\left(m'e^{2m-2n}\right)e^{-2m}$$

cancelamos un término exponencial y luego reescribimos m' recordando que $' \equiv d/dr$.

$$= -m'e^{-2n} = -\frac{dm}{dr}e^{-2n}$$

luego como $m = -n$,

$$= -\frac{dm}{dr}e^{2m} = -\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2}e^{2m}\right]$$

Luego usamos la ecuación (9.19) para llegar a

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{d}{dr}\frac{1}{2}\left[1+\frac{\alpha}{r}\right]$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\left(0-\frac{\alpha}{r^2}\right) = \frac{\alpha}{2r^2} \tag{9.22}$$

Y tenemos una ecuación que relaciona α con la aceleración a lo largo de r. Sabemos que esto debe reducirse a Newton en el límite de campo débil:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{GM}{r^2} \tag{9.23}$$

donde M es la masa del objeto alrededor del cual intentamos determinar la métrica. Igualando (9.22) con (9.23), y usando $G = 1$ tenemos

$$\frac{\alpha}{2r^2} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\alpha = -2M$$

con esto podemos obtener una solución exacta para la ecuación (9.3)

$$ds^2 = -e^{2m}dt^2 + e^{2n}dr^2 + r^2d\phi^2 + r^2\sin^2\phi\, d\theta^2$$

recordando que $m = -n$ y que según (9.19)

$$e^{2m} = 1 + \frac{\alpha}{r} = 1 - \frac{2M}{r^2}$$

obtenemos la Métrica de Schwarzschild que define la forma en que medimos los intervalos invariantes alrededor de una masa M en un espacio-tiempo estático esféricamente simétrico.

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2\phi \, d\theta^2.} \tag{9.24}$$

9.6 Anexo

Prueba de que por cada μ

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}[\ln|g|] = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^\mu} = g^{\lambda\beta}\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\mu}$$

Sabemos que g es el determinante de una matriz diagonal y, por lo tanto, es simplemente el producto de los elementos diagonales. Sin pérdida de generalidad, suponga que estos elementos son a, b, c y d de modo que $g = abcd$. Entonces podemos reescribir $\ln|g|$ como $\ln|a| + \ln|b| + \ln|c| + \ln|d|$. Notemos que para una función $u(x) = u$

$$\frac{\partial \ln|u|}{\partial x} = \frac{u'}{u} \tag{9.25}$$

Usando esto, podemos ver que

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}[\ln|g|] = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} \tag{9.26}$$

Luego dividimos $g = abcd$ para obtener

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} = \frac{1}{abcd}\left(a'bcd + ab'cd + abc'd + abcd'\right)$$

Sin embargo, la mitad derecha de la ecuación anterior es una regla de producto de cuatro elementos dividida por los cuatro elementos que nos dan

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}[\ln|g|] = \frac{1}{abcd}\left(a'bcd + ab'cd + abc'd + abcd'\right) = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^\mu}$$

Ahora, usando la ecuación (9.26) y recordando que $g^{\lambda\beta} = 1/g_{\lambda\beta}$ vemos

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}[\ln|g|] = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x^\mu} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x^\mu} + \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x^\mu} + \frac{1}{d}\frac{\partial d}{\partial x^\mu} = g^{\lambda\beta}\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\mu}$$

Así,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu}[\ln|g|] = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^\mu} = g^{\lambda\beta}\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\mu}}. \tag{9.27}$$

queda demostrado.

10. Captura por un agujero negro

Más allá de la dispersión de partículas por un agujero negro, existe una captura directa en el agujero negro.

(a) Demuestre que la sección transversal para la captura es πb_{crit}^2 , con el parámetro de impacto crítico dado por $b_{\text{critico}} = L_{\text{critico}} / \left(E^2 - \mu^2\right)^{1/2}$.

(b) De las fórmulas en el título de la figura 25.2 o de otro modo, demuestre que para partículas de alta energía esta sección transversal varía con la energía como

$$\sigma_{\text{capt}} = 27\pi M^2 \left(1 + \frac{2}{3\bar{E}^2} + \cdots\right)$$

(para límite de fotones $\widetilde{E} \longrightarrow \infty$)

(c) y para bajas energías como

$$\sigma_{\text{capt}} = 16\pi M^2/\beta^2$$

donde β es la velocidad relativa a la velocidad de la luz [Bogorodsky (1962)].

Solución:

La ecuación de movimiento es:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \widetilde{E}^2 - g\left(1 + \frac{\mathscr{L}^2}{r^2}\right) \tag{10.1}$$

donde la energía por unidad de masa (energía específica) es:

$$\widetilde{E} = \frac{E}{\mu}$$

y definimos el potencial efectivo como

$$U = g\left(1 + \frac{\mathscr{L}^2}{r^2}\right)$$

el cual también se denota como V^2, ya que el movimiento de la partícula ocurre solo en la región donde $\widetilde{E} \geq V = \sqrt{U}$.
Se tiene la cantidad ℓ que es el parámetro de impacto adimensional, dado por:

$$\ell = \frac{\mathscr{L}}{r},$$

luego para un ℓ dado la captura gravitacional ocurre cuando $\widetilde{E} > U_+$.

Para una partícula que tiene una velocidad en el infinito igual a v, su momentum es

$$p = mv/\sqrt{1 - v^2} \tag{10.2}$$

y el momento angular es

$$L = mr\ell$$

La relación $E^2 = p^2 + \mu^2$ y la condición umbral de captura $\widetilde{E} = U_+$ implica

$$p = m\sqrt{U_+ - 1}, \tag{10.3}$$

Igualando (10.2) con (10.3) elevando al cuadrado

$$\frac{v^2}{(1 - v^2)} = U_+ - 1$$

$$\implies U_+ = \frac{v^2 + 1 - v^2}{1 - v^2}$$

$$U_+ = \frac{1}{1 - v^2}.$$

Luego el parámetro de impacto se define como

$$b = \frac{L}{p}$$

tenemos que

$$p = \sqrt{E^2 - \mu^2}$$

y entonces se tiene

$$b = r_S \frac{\ell}{\sqrt{U_+ - 1}} = r_S \ell \frac{\sqrt{1 - v^2}}{v}.$$

con esto obtenemos la sección eficaz

$$\sigma(v) = \pi r_{\mathrm{S}}^2 \frac{\ell^2(v)\left(1-v^2\right)}{v^2}$$

Luego para el movimiento clásico $v \ll 1$, se tiene $U_+ \sim 1$ y $\ell \sim 2$. Así

$$b \sim \frac{2r}{v}, \quad \sigma \sim \frac{4\pi r^2}{v^2}$$

así la sección eficaz de captura es

$$\boxed{\sigma = \pi b^2}. \tag{10.4}$$

(b) Como el enunciado lo pide, consideremos las ecuaciones del caption de la figura 25.2 del MTW. Tenemos en términos de la masa en reposo,

La energía:

$$\widetilde{E} = \frac{E}{\mu}$$

y el momento angular:

$$\widetilde{L} = \frac{L}{\mu}$$

y r es la coordenada de Schwarzschild. Nos dan la ecuación

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \widetilde{V}^2(r) = \widetilde{E}^2 \tag{10.5}$$

donde

$$\widetilde{V} = \left[(1-2M/r)\left(1+\widetilde{L}^2/r^2\right)\right]^{1/2} \tag{10.6}$$

Se tiene el momento angular reducido:

$$L^{\dagger} = \frac{\widetilde{L}}{M} = \frac{L}{M\mu}$$

y entonces se pueden encontrar las raíces de

$$\partial\widetilde{V}/\partial r$$

$$r = \frac{6M}{1+\left(1-12/L^{+2}\right)^{1/2}},$$

$$\widetilde{E}^{\dagger 2} = \frac{\left(L^2+36\right)+\left(L^{2\dagger}-12\right)\left(1-12/L^{\dagger 2}\right)^{1/2}}{54} \tag{10.7}$$

Si una partícula tiene

$$\widetilde{E} > V_{\max},$$

es capturada. Por lo tanto el límite L para la captura se encuentra igualando

$$\tilde{E}^2 = V_{\max}^2$$

Para el límite de fotones $\widetilde{E} \to \infty$ la Ec. (10.7) se reduce a:

$$V_{\max}^2 \approx \frac{L^{\dagger 2} + 36 + \left(L^{\dagger 2} - 12\right)\left(1 - 6/L^{\dagger 2}\right)}{54} = \frac{L^{\dagger 2} + 9}{27},$$

y la ec. (10.7) se convierte en:

$$L_{\text{crit}}^{\dagger 2} = 27\widetilde{E}^2 - 9 \tag{10.8}$$

donde L_{crit} se relaciona con el momento lineal a través del parámetro de impacto crítico

$$b_{\text{crit}} = \frac{L_{\text{crit}}}{p} = \frac{L_{\text{crit}}}{\left(E^2 - \mu^2\right)^{1/2}},$$

Va a ocurrir captura cuando $b < b_{\text{crit}}$, así la sección eficaz de captura es:

$$\sigma_{cap} = \pi b_{\text{crit}}^2 = \frac{\pi L_{\text{crit}}^2}{(E^2 - \mu^2)} = \frac{\pi M^2 L_{crit}^{\dagger 2}}{\left(\tilde{E}^2 - 1\right)}$$

y por Ec. (10.8)

$$\approx \frac{\pi M^2}{\widetilde{E}^2}\left(1 + \frac{1}{\tilde{E}^2}\left(27\widetilde{E}^2 - 9\right)\right)$$

$$\boxed{\sigma_{\text{capt}} = 27\pi M^2\left(1 + \frac{2}{3\widetilde{E}^2}\right)} \tag{10.9}$$

Y para bajas energías $\tilde{E} \approx 1, (\beta$ pequeño) tenemos

$$\tilde{E}^2 \approx 1 + \beta^2$$

y la ec. (10.7) puede ser aproximada por

$$18 + 54\beta^2 \approx L^{\dagger 2} + \left(L^{\dagger 2} - 12\right)^{3/2}/L^{\dagger}$$

Podemos resolver para L^2 a primer orden en β^2 para encontrar

$$\begin{aligned} {L^{2\dagger}}_{\text{crit}} &= 16\left(1 + 2\beta^2\right) + \mathscr{O}\left(\beta^4\right) \\ \sigma_{\text{capt}} &= \pi b_{\text{crit}} = \tfrac{\pi M^2 L^{2\dagger}}{(\tilde{E} - 1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_{\text{capt}} \approx \frac{16\pi M^2}{\beta^2}}, \tag{10.10}$$

donde β es la velocidad relativa a la velocidad de la luz

11. Deflexión de la luz

Usando la variable adimensional $u = M/r$ en lugar de r, y $u_b = M/b$ en lugar del parámetro de impacto, transforme

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1-2M/r}{r^2} = \frac{1}{b^2} \tag{11.1}$$

en la ecuación de primer orden

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + (1-2u)u^2 = u_b^2 \tag{11.2}$$

y de ahí, por diferenciación, en

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2 \tag{11.3}$$

(a) En la aproximación del parámetro de impacto grande o de u pequeño, en la que se desprecia el término de la derecha, demuestre que la solución de (11.3) produce un movimiento rectilíneo elemental (deflexión cero).
(b) Inserte esta solución de orden cero en el término de perturbación $3u^2$ en el lado derecho de (11.3), y resuelva de nuevo para u ("movimiento rectilíneo más corrección de primer orden"). De esta forma, verifique la fórmula para la curvatura de la luz por el sol dada poniendo $\beta = 1$ en la ecuación

$$\theta = \frac{2M}{b\beta^2}\left(1+\beta^2\right). \tag{11.4}$$

Solución: Partiendo de

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2+\frac{1-2M/r}{r^2}=\frac{1}{b^2} \tag{11.5}$$

Trabajando el primer término del lado izquierdo, dentro del paréntesis.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi} &= \frac{1}{r^2}\frac{dr}{du}\frac{du}{d\phi}\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{d}{du}\left(\frac{M}{u}\right)\frac{du}{d\phi}\\
&= -\frac{1}{r^2}\frac{M}{u^2}\frac{du}{d\phi}\\
&= -\frac{M}{r^2}\left(\frac{r^2}{M^2}\right)\frac{du}{d\phi}\\
\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi} &= -\frac{1}{M}\frac{du}{d\phi}
\end{aligned}$$

con esto reescribimos (11.5) y como $u=M/r$

$$\left(-\frac{1}{M}\right)^2\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+\frac{1-2u}{r^2}=\frac{1}{b^2}$$

multiplicando todo por M^2 y considerando que $u_b=M/b$

$$\boxed{\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+(1-2u)u^2=u_b^2}$$

Si llamamos a $d/d\phi = \prime$,

$$\left(u'\right)^2+u^2-2u^3=u_b^2$$

y derivando la ecuación anterior, obtenemos

$$2u''+2u-6u^2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=3u^2} \tag{11.6}$$

que se llama la ecuación de Binet. Luego aproximando para $u\ll 1$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u\approx 0$$

cuya solución es

$$u_0=K\sin\left(\phi-\phi_0\right)$$

$$\boxed{u_0 = \frac{M}{b}\sin(\phi - \phi_0)} \tag{11.7}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = r\sin(\phi - \phi_0)}$$

Ahora escribimos $u = u_0 + u_1 + \dots$ con $u_1 \ll 1$ la ecuación (11.6) es aproximadamente

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 \approx 3u_0^2 &= 3\left(\frac{M}{b}\right)^2 \sin^2\phi \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 (1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

Esto se puede resolver mediante inspección, y obtenemos

$$u \approx \left(\frac{M}{b}\right)\sin\phi + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 (3 + \cos 2\phi)$$

Ahora podemos encontrar el ángulo de deflexión total calculando los dos ángulos en los que $r = \infty (u = 0)$. Estos ángulos deben satisfacer:

$$\begin{aligned} &\sin\phi \approx -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{M}{b}\right)(3 + \cos 2\phi) \\ &\phi \approx -2\left(\tfrac{M}{b}\right) \text{ y } \phi \approx \pi + 2\left(\tfrac{M}{b}\right) \end{aligned}$$

Así el ángulo de deflexión total $\theta = \frac{4M}{b}$, porque

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \pi + 2\left(\frac{M}{b}\right) - \left[-2\left(\frac{M}{b}\right)\right] \\ \Delta\phi &= \pi + \frac{4M}{b} \end{aligned}$$

Que coincide con lo que pide el enunciado, que en la ecuación

$$\theta = \frac{2M}{b\beta^2}\left(1 + \beta^2\right)$$

ponemos $\beta = 1$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2M}{b}(2)$$

$$\boxed{\theta = \frac{4M}{b}}$$

que es la fórmula para la curvatura de la luz debido al Sol.

12. Sección eficaz para la luz de un AN

Demuestre que un agujero negro de Schwarzschild presenta una sección transversal $\sigma_{\mathbf{capt}} = 27\pi M^2$ para capturar la luz.

Solución:

Consideremos una partícula de prueba moviéndose en Schwarzschild,

$$ds^2 = -(1-2M/r)dt^2 + \frac{dr^2}{(1-2M/r)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{12.1}$$

Como la métrica de Schwarzschild es invariante bajo rotaciones rígidas la esfera. Usando esta libertad siempre podemos elegir el punto inicial en el plano ecuatorial, de modo que tenga las coordenadas $(t_0, r_0, \theta_0 = \pi/2, \phi_0 = 0)$

Todavía queda la posibilidad de realizar una rotación sólida que preserve la posición del punto p. Usamos esta libertad para poner $u^\theta(\tau_0)' = 0$. La partícula inicialmente está en el plano ecuatorial y su velocidad es tangente a este plano.

Notemos que la geometría no se ve afectada por las traslaciones, $t \to t + \Delta t, \phi \to \phi + \Delta t$, por lo tanto t y ϕ son cíclicas, por lo tanto los momentos conjugados

$$p_0 = -E \quad y \quad P_\phi = \pm L \quad \text{se conservan.}$$

La magnitud del 4-vector de energía-momento es dada por la masa en reposo de la partícula

$$\frac{g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta + \mu^2}{2} = g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + \mu^2 = 0. \tag{12.2}$$

o

$$-\frac{E^2}{(1-2M/r)}+\frac{1}{(1-2M/r)}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}+\mu^2=0. \tag{12.3}$$

Luego por el principio de equivalencia, las partículas de prueba siguen la misma línea del mundo independiente de la masa, así que lo que importa son las cantidades por unidad de masa

$$\widetilde{E}=\frac{E}{\mu},\quad \widetilde{L}=\frac{L}{\mu}\quad,\quad \lambda=\frac{\tau}{\mu}$$

con τ el tiempo propio. Con esto se puede escribir (12.1) como

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=\widetilde{E}^2-\underbrace{(1-2M/r)\left(1+\widetilde{L}^2/r^2\right)}_{V_{ef}^2}$$

Luego asumiendo una "órbita directa":

$$\frac{d\phi}{d\tau}>0\quad y\quad p_\phi=+L$$

$$\frac{d\phi}{d\tau}=\frac{1}{\mu}\frac{d\phi}{d\lambda}=\frac{p^\phi}{\mu}=\frac{g^{\phi\phi}L}{\mu}=\frac{\tilde{L}}{r^2}$$

y

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\mu}\frac{dt}{d\lambda}=\frac{p^\circ}{\mu}=-\frac{\rho^{00}E}{\mu}=\frac{\tilde{E}}{1-2M/r}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{d\tau}=\frac{\widetilde{L}}{r^2}} \tag{12.4}$$

$$\boxed{\frac{dt}{d\tau}=\frac{\widetilde{E}}{1-2M/r}=E}. \tag{12.5}$$

A partir de la métrica de Schwarzschild con $\theta=\frac{\pi}{2}$ nos queda

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{1}{1-2M/r}dr^2+r^2d\phi^2$$

Considerando un parámetro afín λ que parametriza la línea de mundo de la particula y por (12.2) nos queda

$$-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2+\frac{1}{1-24/r}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2+\mu^2=0 \tag{12.6}$$

reemplazando (12.4) y (12.5) en (12.6)

$$\frac{E^2}{(1-2M/r)}+\frac{1}{1-2M/r}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}+\mu^2=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2=E^2-\left(\frac{L^2}{r^2}+\mu^2\right)\left(\frac{1-2M}{r}\right) \tag{12.7}$$

Usando nuevamente $\frac{L}{r^2}=\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)$, multiplicamos cada lado de (12.7)

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\phi}\right)^2=\frac{r^4}{L^2}\left[E^2-\left(\frac{L^2}{r^2}+\mu^2\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]$$
$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2=r^4\frac{E^2-\mu^2}{L^2}\left(\frac{E^2}{E^2-\mu^2}-\left(\frac{1-\frac{2M}{r}}{r}\right)\left(\frac{1}{r^2}\left(\frac{L^2}{E^2-\mu^2}\right)+\frac{\mu^2}{E^2-\mu^2}\right)\right)$$

aquí utilizamos lo dado por el enunciado

$$b_{crit}=\frac{L_{crit}t}{\sqrt{E^2-\mu^2}}$$

es el parámetro de impacto, dado como la relación entre el momento angular y el lineal.

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2=\frac{r^4}{b^2}\left(\frac{E^2}{E^2-\mu^2}-\left(\frac{1-2M}{r}\right)\left(\frac{b^2}{r^2}+\frac{\mu^2}{E^2-\mu^2}\right)\right)$$

Como estamos interesados en fotones, tomamos el límite $\mu\to 0$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2=\frac{r^4}{b^2}\left[1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{b^2}{r^2}\right)\right]$$

haciendo la aproximación al radio más cercano $r=r_{\min,}$ para el cual $dr/d\phi=0$,

$$0=\frac{r^4_{\min}}{b^2}\left[1-\frac{b^2}{r^2_{\min}}\left(1-\frac{2M}{r_{\min}}\right)\right]$$
$$\Rightarrow\frac{b^2}{r^2_{\min}}\left(1-\frac{2M}{r_{\min}}\right)=1;$$
$$\Rightarrow b^2\left(r_{\min}-2M\right)=r^3_{\min}$$

Como en este punto de la trayectoria la velocidad del fotón está completamente en la dirección tangencial, ¿ qué tan cerca puede un fotón tener una órbita circular? La respuesta aparece en Frolov pag. 48

$$r_{min}=3M$$

Así b_{max} el parámetro de impacto máximo para capturar un fotón, es

$$b^2_{\max}(3M-2M)=27M^3$$
$$\Rightarrow b^2_{\max}=27M^2$$

Luego reemplazando en la sección eficaz

$$\boxed{\sigma=\pi b^2_{max}=27\pi M^2}.$$