

# **Problemas Resueltos de Electrodinámica.**

Profesor: Alejandro Valdivia.  
Eduardo Flández, Alejandro Zamorano

& Nicolás Dünkler

DFC, Universidad de Chile 2022

PROBLEMAS DEL CURSO DE ELECTRODINÁMICA, DICTADO POR EL DR. ALEJANDRO VALDIVIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE CHILE, SANTIAGO.  
*Versión 2022*



## Contents

<b>1</b>	<b>Electroestática</b>	<b>7</b>
1.1	<b>Método de la carga imágen</b>	7
1.1.1	Ejemplos	7
1.1.2	Problemas resueltos	8
1.2	<b>Ecuación de Laplace en cartesianas.</b>	9
1.2.1	Problemas resueltos	9
1.3	<b>Ecuación de Laplace en polares</b>	9
1.3.1	Problemas resueltos	9
1.4	<b>Ecuación de Laplace en esféricas</b>	9
1.4.1	Problemas resueltos	9
1.5	<b>El método de la función de Green</b>	10
1.5.1	Ejemplos	10
1.5.2	Problemas resueltos	16
<b>2</b>	<b>Expansión multipolar y medios</b>	<b>19</b>
2.1	<b>Expansión multipolar y dieléctricos</b>	19
2.1.1	Ejemplos	19
2.1.2	Problemas resueltos	24
2.2	<b>Magnetostática</b>	<b>26</b>
2.2.1	Ejemplos	26
2.2.2	Problemas resueltos	32

<b>3</b>	<b>Ecuaciones de Maxwell</b>	<b>33</b>
3.1	Problemas resueltos	33
<b>4</b>	<b>Principio de la relatividad</b>	<b>37</b>
4.1	Ejemplos	37
4.2	Problemas resueltos	40
<b>5</b>	<b>Radiación y antenas</b>	<b>43</b>
5.1	Problemas resueltos	43
<b>6</b>	<b>Ondas, óptica y plasmas</b>	<b>45</b>
6.1	Plasmas	45
6.1.1	Problemas resueltos	45
<b>7</b>	<b>Guías de ondas, cavidades resonantes y conductores</b>	<b>47</b>
7.1	Guías de onda	47
7.1.1	Problemas resueltos	47
<b>8</b>	<b>Problemas resueltos</b>	<b>49</b>
8.1	Disco dentro de una esfera	49
8.2	Dos placas de metal conectadas a tierra	54
8.3	Cuartos de un cilindro	57
8.4	Esferas concéntricas	59
8.5	Potencial de una carga dentro de una esfera hueca	63
8.6	Potencial de una pizza con un objeto dentro	65
8.7	Línea cargada entre planos conductores que se intersectan	67
8.8	Función de Green entre dos planos	70
8.9	Esferas concéntricas con dieléctrico	73
8.10	Momentos multipolares de cuadrupolo	77
8.11	Esfera cargada que gira	78
8.12	Semiesfera dipolar en un plano	82
8.13	Cilindro magnetizado	83
8.14	Esfera de material magnetizado	84
8.15	Sábana infinita	88
8.16	Campos electromagnéticos de un cascarón esférico	90

8.17	Condensador de placas circulares	91
8.18	Potencia irradiada por un cascarón esférico	93
8.19	Anillo que cae en un campo magnético	100
8.20	Círculo de corriente circular	103
8.21	Fem producida por un circuito	108
8.22	Fem producida por cascarón esférico	109
8.23	Línea de transmisión	110
8.24	Suma de velocidades paralelas	113
8.25	Escalares de Lorentz	115
8.26	Espejo relativista	118
8.27	Conservación de la carga	122
8.28	Lámina infinita relativista	125
8.29	Partícula en un campo magnético	129
8.30	Dipolo magnético oscilatorio	133
8.31	Hamiltoniano de una partícula	136
8.32	La paradoja de los gemelos	139
8.33	Cascarón esférico con línea cargada	146
8.34	Capacitor de placas paralelas con anillo	152
8.35	Funciones de Green	156
8.36	Plano con semiesfera dieléctrica	161
8.37	Plasma	164
8.38	Semiesfera dipolar	168
8.39	Campos radiados por mitades de una esfera	171
8.40	Dinámica del plasma	173
8.41	Propagación oblicua	179
8.42	Rayo hacia la ionósfera	182
8.43	Plasma no magnetizado	183
8.44	Guía dieléctrica	191



# 1. Electroestática

## 1.1 Método de la carga imágen

### 1.1.1 Ejemplos

#### 1. El problema clásico de la carga imagen

Supongamos que una carga puntual  $q$  se mantiene a una distancia  $d$  sobre un plano conductor infinito conectado a tierra (figura 1.1).

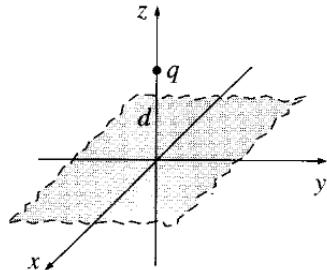


Figure 1.1: Superficie plana.

¿Cuál es el potencial en la región por encima del plano?

**Solución:**

Lo que va a pasar es que  $q$  inducirá una cierta cantidad de carga negativa en la superficie cercana del conductor; el potencial total se debe en parte a  $q$  directamente y en parte a esta carga inducida. Pero, ¿cómo podemos calcular el potencial si no sabemos cuánta carga se induce o cómo se distribuye?

Desde un punto de vista matemático, nuestro problema es [resolver la ecuación de Poisson en la región  \$z > 0\$](#) , con una carga puntual  $q$  en  $(0, 0, d)$ , sujeto a las condiciones de contorno:

(a)  $\Phi = 0$  cuando  $z = 0$  ([dado que el plano conductor está conectado a tierra](#)), y

(b)  $\Phi = 0$  lejos de la carga (es decir, para  $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$ ).

Luego debemos [hallar una función que cumpla con estos requisitos](#).

**Truco:** Olvidemos el problema real; vamos a estudiar otro problema diferente. Este [nuevo problema consta de dos cargas puntuales](#),  $+q$  en  $(0, 0, d)$  y  $-q$  en  $(0, 0, -d)$ , y ningún plano conductor como se muestra en la Figura 1.2.

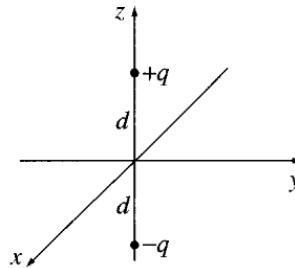


Figure 1.2: Un nuevo problema

Para esta configuración, considerando las distancias desde  $(x, y, z)$  a las cargas  $+q$  y  $-q$ , respectivamente, encontramos el potencial:

$$\Phi = q \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$

(a)  $\Phi = 0$  cuando  $z = 0$  y

(b)  $\Phi \rightarrow 0$   $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$

y la única carga en la región  $z > 0$  es la carga puntual  $+q$  en  $(0, 0, d)$ .

[¡Pero estas son precisamente las condiciones del problema original!](#)

Evidentemente, la segunda configuración produce exactamente el mismo potencial que la primera configuración, en la región “superior”  $z > 0$ . (La región “inferior”,  $z < 0$ , es completamente diferente, pero no nos interesa, la parte superior es todo lo que necesitamos.)

Conclusión: El potencial de una carga puntual por encima de un conductor infinito puesto a tierra está dado por la ecuación encontrada anteriormente, para  $z > 0$ .

El método que se acaba de describir no se limita a una sola carga puntual; [cualquier distribución de carga estacionaria cerca de un plano conductor conectado a tierra se puede tratar de la misma manera](#), introduciendo su imagen especular, de ahí el nombre de método de imágenes. (Recuerde que las cargas de la imagen tienen el signo opuesto; esto es lo que garantiza que el plano xy estará en el potencial cero).

### 1.1.2 Problemas resueltos

#### 1. Potencial de una carga dentro de una esfera hueca (Solución: 8.5)

Encuentre el potencial de una carga puntual que está en cualquier lugar, dentro de una esfera de radio  $a$  conductora, hueca y conectada a tierra. Además encuentre la densidad de carga inducida en la superficie y en qué dirección.

## 1.2 Ecuación de Laplace en cartesianas.

### 1.2.1 Problemas resueltos

#### 1. Dos placas de metal a tierra (Solución: 8.2)

Dos placas infinitas de metal conectadas a tierra se encuentran paralelas al plano  $xz$ , una en  $y = 0$  y la otra en  $y = a$ . El extremo izquierdo, en  $x = 0$ , se cierra con una tira infinita aislada de las dos placas y mantenida a un potencial específico  $V_0(y)$ . Encuentre el potencial dentro de esta ranura.

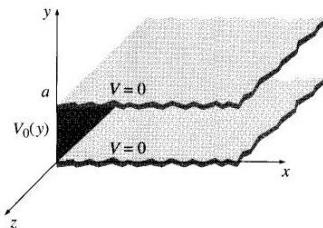


Figure 1.3: La ranura.

## 1.3 Ecuación de Laplace en polares

### 1.3.1 Problemas resueltos

#### 1. Cuartos de un cilindro (Solución: 8.3)

Una variante del problema bidimensional anterior es un cilindro conductor largo y hueco de radio  $b$  que se divide en cuartos iguales, los segmentos alternos se mantienen en potencial  $+V$  y  $-V$ .

(a) Resuelva mediante la solución en serie y demuestre que el potencial dentro del cilindro es

$$\phi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{4n+2} \frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}$$

(b) Sume la serie y demuestre que

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{2\rho^2 b^2 \sin 2\phi}{b^4 - \rho^4} \right)$$

(c) Grafique las líneas de campo y las equipotenciales

## 1.4 Ecuación de Laplace en esféricas

### 1.4.1 Problemas resueltos

#### 1. Esferas concéntricas (Solución: 8.4)

Dos esferas concéntricas tienen radios  $a, b$  ( $b > a$ ) y cada una está dividida en dos hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interior y el hemisferio inferior de la esfera exterior se mantienen en potencial  $V$ . Los otros hemisferios están a potencial cero. Determine el potencial en la región  $a \leq r \leq b$  como una serie en polinomios de Legendre. Incluya términos por lo menos hasta  $l = 4$ . Verifique su solución con los resultados conocidos en el caso límite  $b \rightarrow \infty$  y  $a \rightarrow 0$ .

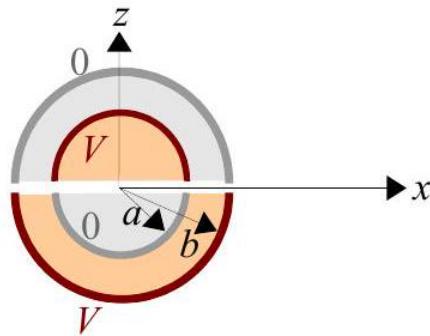


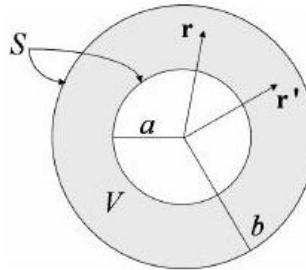
Figure 1.4: Dos esferas concéntricas.

## 1.5 El método de la función de Green

### 1.5.1 Ejemplos

#### 1. Expansión de la función de Green en armónicos esféricos.

Consideremos un volumen  $V$  limitado por dos esferas concéntricas que constituyen la superficie  $S$ . Sean  $a$  el radio de la esfera interior y  $b$  el radio de la esfera exterior. Entonces, la magnitud de  $\mathbf{r}$  en la región de interés para la solución es tal que  $a \leq r \leq b$ .



Llegue a la siguiente expansión de la función de Green:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{\left(r'_< - \frac{a^{2l+1}}{r'_<} \right) \left(\frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>}{b^{2l+1}} \right)}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).$$

donde  $r_>$  es el mayor entre  $r$  y  $r'$ , y  $r_<$  es el menor entre  $r$  y  $r'$ .

#### Solución:

- Queremos expandir la función de Green en armónicos esféricos, ya que esta satisface la Ec. de Poisson
- La función  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  satisface Poisson:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

donde el subíndice del Laplaciano indica derivadas con respecto a las coordenadas de  $\mathbf{r}$ , con condición de frontera  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_S = 0$ , para  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  en  $r = a$  y en  $r = b$ .

- Expandimos la delta de Dirac  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  se puede expresar en coordenadas esféricas como

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$$

y usamos la [relación de completitud de los armónicos esféricos](#)

$$\boxed{\delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}$$

y así nos queda

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Y así se llega a escribir la Ec. de Poisson en términos de armónicos esféricos:

$$\boxed{\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).} \quad (1.1)$$

- Supongamos una solución  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , como función de  $\mathbf{r}(r, \theta, \phi)$ , en forma de expansión en armónicos esféricos:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(r, r', \theta, \theta', \phi, \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm}(r, r', \theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.2)$$

Para determinar los coeficientes  $A_{lm}$ , debemos sustituir esta expansión en la Ec.(1.1) y comparar ambos lados de la relación resultante.

Aplicando el Laplaciano en coordenadas esféricas al izquierdo de la Ec. (1.1) se obtiene:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rG) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}$$

reemplazando (1.2)

$$\begin{aligned} \nabla_r^2 G &= \sum_l \sum_m \left\{ \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA_{lm}(r, r', \theta', \phi')) + \frac{(r, r', \theta', \phi')}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y_{lm}(\theta, \phi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Como los  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  satisfacen la ecuación angular

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \right) + l(l+1)Y_{lm} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y_{lm}(\theta, \phi) = 0.$$

y si reemplazamos esta Ec. angular en (1.3) da:

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \left[ \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA_{lm}(r, r', \theta', \phi')) - \frac{A_{lm}(r, r', \theta', \phi')}{r^2} l(l+1)Y_{lm}(\theta, \phi) \right]$$

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_{lm}(r, r', \theta', \phi')) - \frac{l(l+1) A_{lm}(r, r', \theta', \phi')}{r^2} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.4)$$

Si comparamos (1.4) con (1.1), encontramos la siguiente relación entre los coeficientes de  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ ,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_{lm}(r, r', \theta', \phi')) - \frac{l(l+1) A_{lm}(r, r', \theta', \phi')}{r^2} = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') Y_{lm}^*(\theta', \phi'). \quad (1.5)$$

La Ec. (1.5) es una ecuación en derivadas parciales para  $A_{lm}(r, r', \theta', \phi')$ . Su forma sugiere buscar una solución por separación de variables, tal como

$$A_{lm}(r, r', \theta', \phi') = g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi').$$

Sustituyendo en la Ec. (1.5) da la siguiente ecuación para  $g_l(r, r')$ :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_l(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r'). \quad (1.6)$$

Consideremos primero la Ec. (1.6) para el caso  $r \neq r'$ ,

$$(rg)^{\prime\prime} - \frac{l(l+1)}{r} g = 0.$$

Digamos que  $U = rg$ , se obtiene la ecuación

$$U'' - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0,$$

que tiene solución de la forma:

$$U = Ar^{l+1} + Br^{-l};$$

por lo tanto,

$$g(r, r') = Ar^l + Br^{-(l+1)}. \quad (1.7)$$

**La función  $g(r, r')$  corresponde a la parte radial de la función de Green en la Ec. (1.2),** y por lo tanto debe satisfacer las condiciones de frontera

$$G|_S = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(a, r') = 0, & r = a \\ g(b, r') = 0, & r = b. \end{cases}$$

Evaluando la función  $g(r, r')$  de la Ec. (1.7) en  $r = a$ , obtenemos

$$Aa^l + Ba^{-(l+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -Aa^{2l+1},$$

luego,

$$g(r, r') = A \left( r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right), \quad \text{válida para } r < r'.$$

Similarmente, en  $r = b$  obtenemos

$$A = -Bb^{-(2l+1)}$$

luego,

$$g(r, r') = B \left( \frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right), \quad \text{válida para } r > r'.$$

Puesto que la función de Green debe tener simetría ante el intercambio  $r \leftrightarrow r'$ , la función  $g(r, r')$  se puede expresar en general como

$$g(r, r') = C \left( r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right), \quad (1.8)$$

donde  $r_{>}$  es el mayor entre  $r$  y  $r'$ , y  $r_{<}$  es el menor entre  $r$  y  $r'$ .

- **Para determinar la constante  $C$ ,** consideramos la Ec. (1.6) para  $g(r, r')$ , en el caso  $r \rightarrow r'$  tal que  $\delta(r - r') \neq 0$ ,

$$\frac{d^2}{dr^2} rg(r, r') - \frac{l(l+1)}{r} g(r, r') = -\frac{4\pi}{r} \delta(r - r').$$

Integraremos todos los términos de esta ecuación desde  $r = r' - \varepsilon$  hasta  $r = r' + \varepsilon$ ,

$$\int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{d^2}{dr^2} (rg(r, r')) dr - l(l+1) \int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{g(r, r')}{r} dr = -4\pi \int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{\delta(r - r')}{r} dr$$

y tomamos el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\frac{d}{dr} [rg(r, r')] \Big|_{r=r'+\varepsilon} - \frac{d}{dr} [rg(r, r')] \Big|_{r=r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'}. \quad (1.9)$$

Existe una discontinuidad en la derivada de  $rg(r, r')$  en  $r = r'$ .

Debemos evaluar las derivadas  $(rg)'|_{r=r'+\varepsilon}$  y  $(rg)'|_{r=r'-\varepsilon}$ , y tomar el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

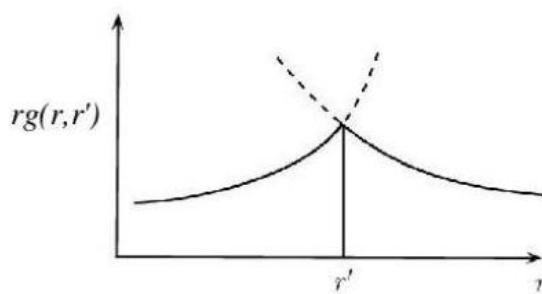


Figure 1.5: Discontinuidad en la derivada de la parte radial de la función de Green en  $r = r'$ .

i) Para  $r = r' + \varepsilon$ , tenemos  $r > r'$ , y por lo tanto,  $r_{<} = r', r_{>} = r$ . Luego, utilizando la Ec. (1.8),

$$rg(r, r') = C \left( r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}} \right).$$

Evaluamos la derivada en  $r = r' + \varepsilon$ , y hacemos  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'+\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} &= -C \left( r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[ \frac{l}{r'^{l+1}} + \frac{(l+1)r'^l}{b^{2l+1}} \right] \Big|_{r=r'} \\ &= -C \left( r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[ \frac{l}{r'^{l+1}} + \frac{(l+1)r'^l}{b^{2l+1}} \right] \\ &= -Cr'^l \left( 1 - \frac{a^{2l+1}}{r'^{2l+1}} \right) \frac{1}{r'^{l+1}} \left[ l + (l+1) \frac{r'^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'+\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} = -\frac{C}{r'} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[ l + (l+1) \left( \frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \quad (1.10)$$

ii) Para  $r = r' - \varepsilon$ , tenemos  $r < r'$ , y por lo tanto  $r_< = r, r_> = r'$ . Luego, utilizando la Ec. (1.8),

$$rg(r, r') = C \left( r^{l+1} - \frac{a^{2l+1}}{r^l} \right) \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right).$$

Evaluamos la derivada en  $r = r' - \varepsilon$ , y hacemos  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'-\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} &= C \left[ (l+1)r^l + \frac{la^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) \Big|_{r=r'} \\ &= C \frac{r'^l}{r'^{l+1}} \left[ (l+1) + \frac{la^{2l+1}}{r'^{2l+1}} \right] \left( 1 - \frac{r'^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr}(rg) \Big|_{\substack{r=r'-\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}} = \frac{C}{r'} \left[ (l+1) + l \left( \frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[ 1 - \left( \frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \quad (1.11)$$

Sustituyendo (1.10) y (1.11) en la Ec. (1.9), tenemos:

$$-\frac{C}{r'} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[ l + (l+1) \left( \frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] - \frac{C}{r'} \left[ (l+1) + l \left( \frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[ 1 - \left( \frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] = -\frac{4\pi}{r'}$$

de donde podemos obtener  $C$ ,

$$\begin{aligned}
 & C \left[ l + (l+1) \left( \frac{r'}{b} \right)^{2l+1} - l \left( \frac{a}{r'} \right)^{2l+1} - (l+1) \left( \frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \left( \frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right. \\
 & \quad \left. + (l+1) - (l+1) \left( \frac{r'}{b} \right)^{2l+1} + l \left( \frac{a}{r'} \right)^{2l+1} - l \left( \frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \left( \frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] = \frac{4\pi}{r'}, \\
 & C \left[ l - (l+1) \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} + (l+1) - l \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right] = \frac{4\pi}{r'}, \\
 & C(2l+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right] = \frac{4\pi}{r'} \\
 \Rightarrow & \boxed{C = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]}}
 \end{aligned}$$

Luego, la función  $g(r, r')$  en la Ec. (1.8) es:

$$g(r, r') = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left( r'_< - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>}{b^{2l+1}} \right)$$

Entonces, la función de Green en la Ec. (1.2)

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(r, r', \theta, \theta', \phi, \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi),
 \end{aligned}$$

se puede expresar, sustituyendo  $g(r, r')$ , como

$$\boxed{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\left( r'_< - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>}{b^{2l+1}} \right)}{(2l+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).} \quad (1.12)$$

La Ec. (1.12) constituye la expansión de la función de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  en coordenadas esféricas, donde  $r_>$  es el mayor entre  $r$  y  $r'$ , y  $r_<$  es el menor entre  $r$  y  $r'$ .

Algunos casos particulares de interés son:

- (a) **Potencial de una carga puntual en el espacio libre**, que corresponde al caso  $a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty$ ,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \frac{r'_<}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- (b) **Problema interior de la esfera**, que corresponde a  $a \rightarrow 0, b$  finito, igual al radio de la esfera.

- (c) **Problema exterior de la esfera**, que corresponde a  $a$  finito, igual al radio de la esfera, y  $b \rightarrow \infty$ .

### 1.5.2 Problemas resueltos

#### 1. Funciones de Green (Solución: 8.35)

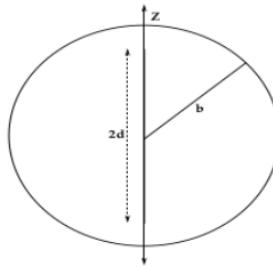
Encuentre la función de Green en los siguientes casos.

- Esfera en el vacío (condición de borde en infinito).
- Cascarón esférico conductor de radio  $b$ .
- Esferas conductoras concéntricas de radios  $a < b$ .
- Utilice el resultado del cascarón esférico de radio  $b$  para encontrar el potencial al interior de la esfera cuando se posiciona un anillo de radio  $a$  y carga  $Q$  concéntrica a la esfera.

#### 2. Cascarón esférico con línea cargada (Solución: 8.33)

Una línea cargada de largo  $2d$  con carga total  $Q$  tiene una densidad lineal de carga que varía como  $(d^2 - z^2)$ , donde  $z$  es la distancia medida desde el punto medio. Un cascarón esférico conductor (a tierra) de radio  $b > d$  está centrado en el punto medio de la línea cargada.

- Encuentre el potencial en el espacio como una expansión de polinomios de Legendre.
- Calcule la densidad superficial de carga inducida sobre el cascarón.
- Calcule el límite  $d \ll b$  y compare con el caso correspondiente.



#### 3. Disco dentro de una esfera (Solución: 8.1)

Considere una esfera conductora de radio  $R$ , conectada a tierra. En su interior, se encuentra un disco  $b < R$ . Su carga  $Q$  se encuentra distribuida uniformemente en la superficie. El centro del disco y la esfera son coincidentes. Encuentre la función de Green dentro de la esfera. A continuación, describa la densidad de carga y encuentre el potencial dentro de esta.

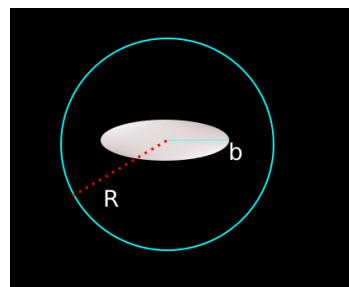


Figure 1.6: Disco dentro de una esfera

#### 4. Green Dirichlet planos (Solución: 8.8)

La función de Green de Dirichlet para el espacio entre dos planos  $z = 0$  y  $z = L$  permite la discusión de una carga puntual o distribución de carga entre los dos planos conductores a

potencial cero

- (a) Usando coordenadas cilíndricas demuestre que una forma de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi\rho_-}{L}\right) K_m\left(\frac{n\pi\rho_+}{L}\right),$$

- (b) Muestre que una forma alternativa de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') \frac{\sinh(kz_-) \sinh(k(L-z_+))}{\sinh(kL)},$$

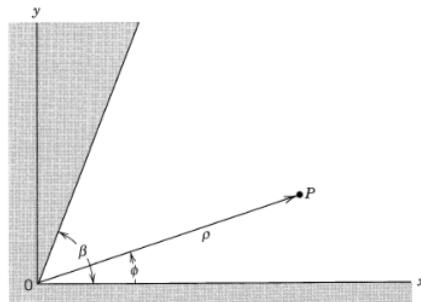
### 5. Capacitor de placas paralelas con anillo (Solución: 8.34)

Considere un capacitor formado por dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia  $L$  y mantenidas a una diferencia de potencial  $V_0$ . Además, dentro de este capacitor tenemos un anillo de radio  $a$ , con una densidad de carga lineal  $\lambda$  constante, puesto en un plano paralelo a las placas, y a la mitad de distancia entre ellas. Construya una función de Green para este problema y resuelva el potencial entre las placas, ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie de los conductores?

### 6. Línea cargada entre planos conductores que se intersectan (Solución: 8.7)

Dos planos conductores con potencial cero se encuentran a lo largo del eje  $z$ , formando un ángulo  $\beta$  entre ellos, como en la figura 8.8. Una línea de carga unitaria paralela al eje  $z$  está ubicada entre los planos en la posición  $(\rho', \phi')$ .

Encuentre el potencial, y a partir de este la función de Green.



### 7. Potencial de una pizza con un objeto dentro (Solución: 8.6)

Considere que en el DFC se ha realizado una comida para algún evento tipo puerta de honor. En el cual, un trozo de pizza ha sido conectado a un potencial  $\phi(r=a, \phi) = V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha)$  para corroborar experimentalmente un problema que se estudió en métodos de la física matemática II, la pizza utilizada posee ciertas propiedades, definida por los bordes  $\phi = 0$  y  $\phi = \alpha$ , y también el borde  $r = a$ . Además, una persona ha puesto por error un plano cargado sobre la pizza en  $r = b$ , y  $0 \leq \phi \leq \beta$ , de densidad uniforme  $\lambda$ . Calcule el potencial  $\phi(r, \phi)$ , y salve la pizza.

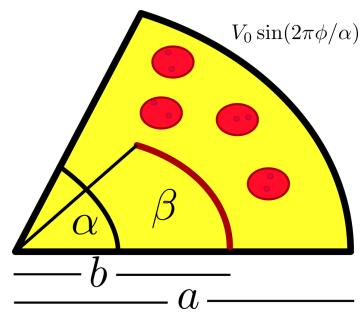


Figure 1.7: Pizza del problema, los puntos rojos sólo son decorativos para el problema.

## 2. Expansión multipolar y medios

### 2.1 Expansión multipolar y dieléctricos

#### 2.1.1 Ejemplos

##### 1. Dos dieléctricos semi-infinitos

Para ilustrar el método de imágenes para dieléctricos, consideramos una carga puntual  $q$  incrustada en un dieléctrico semi-infinito  $\epsilon_1$  a una distancia  $d$  de una interfaz plana que separa el primer medio de otro dieléctrico semi-infinito  $\epsilon_2$ . La superficie puede tomarse como el plano  $z = 0$ , como se muestra en la Fig. 2.1. Debemos encontrar la solución adecuada a las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad z > 0 \\ \epsilon_2 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad z < 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \text{En todas partes} \end{array} \right\}$$

sujetas a las condiciones de borde en  $z = 0$ :

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{Bmatrix} \epsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Dado que  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  en todas partes,  $\mathbf{E}$  es derivable de la forma habitual a partir de un potencial  $\Phi$ . Al intentar usar el método de la imagen, es natural ubicar una carga de imagen  $q'$  en la posición simétrica  $A'$  que se muestra en la Fig. 2.2. Entonces para  $z > 0$  el potencial en un punto  $P$  descrito en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  será

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_1} \left( \frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right), \quad z > 0$$

donde  $R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}$ ,  $R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}$ . Hasta ahora, el procedimiento es completamente análogo al problema con un material conductor en lugar del dieléctrico  $\epsilon_2$  para  $z < 0$ . Pero ahora debemos especificar el potencial para  $z < 0$ . Como no hay cargas en la región  $z < 0$ ,

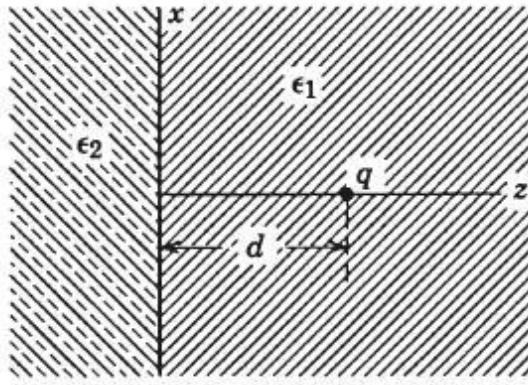


Figure 2.1: Dos dieléctricos semi-infinitos

debe ser una solución de la ecuación de Laplace sin singularidades en esa región. Claramente, la suposición más simple es que para  $z < 0$  el potencial es equivalente al de una carga  $q''$  en la posición  $A$  de la carga actual  $q$ :

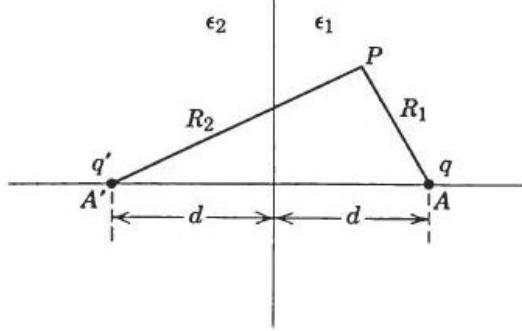


Figure 2.2: Esquema de carga imagen

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{q''}{R_1}, \quad z < 0$$

Ya que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

mientras

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

las condiciones de contorno (2.1) conducen a:

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2} q'' \end{aligned}$$

Estos se pueden resolver para obtener las cargas de imagen  $q'$  y  $q''$ :

$$\left. \begin{array}{l} q' = -\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) q \\ q'' = \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) q \end{array} \right\}$$

Para los dos casos  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  y  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  las líneas de fuerza (en realidad líneas de  $\mathbf{D}$ ) se muestran en la Fig 2.3

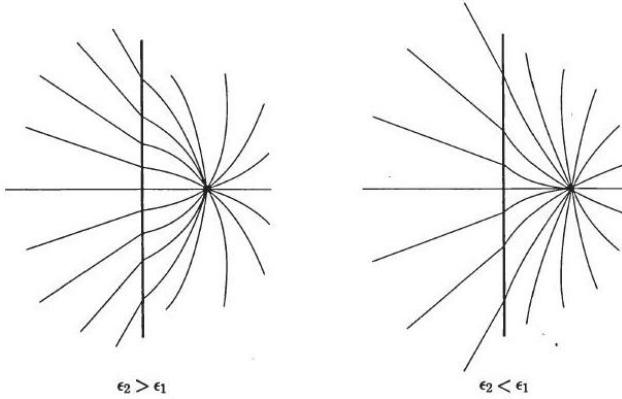


Figure 2.3: Líneas de desplazamiento eléctrico para una carga puntual incrustada en un  $\epsilon_1$  dieléctrico cerca de una losa semi-infinita de  $\epsilon_2$  dieléctrico.

La densidad de carga de polarización está dada por  $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ . Dentro de cada dieléctrico,  $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ , de modo que  $-\nabla \cdot \mathbf{P} = -\chi_e \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , excepto en el punto de carga  $q$ . En la superficie, sin embargo,  $\chi_e$  da un salto discontinuo,  $\Delta\chi_e = (1/4\pi)(\epsilon_1 - \epsilon_2)$  cuando  $z$  pasa por  $z = 0$ . Esto implica que hay una densidad de carga superficial de polarización en el plano  $z = 0$ :

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_{21}$$

donde  $\mathbf{n}_{21}$  es la unidad normal del dieléctrico 1 al dieléctrico 2 y  $\mathbf{P}_i$  es la polarización en el dieléctrico  $i$  en  $z = 0$ . Ya que

$$\mathbf{P}_i = \left(\frac{\epsilon_i - 1}{4\pi}\right) \mathbf{E} = -\left(\frac{\epsilon_i - 1}{4\pi}\right) \nabla \Phi$$

es una cuestión simple demostrar que la densidad de carga de polarización es

$$\sigma_{\text{pol}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \quad (2.2)$$

En el límite  $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$  el dieléctrico  $\epsilon_2$  se comporta como un conductor en el sentido de que el campo eléctrico en su interior se vuelve muy pequeño y la densidad de carga superficial (2.2) se acerca al valor apropiado para una superficie conductora.

## 2. Esfera dieléctrica en un campo eléctrico uniforme

Una esfera dieléctrica de radio  $a$  con constante dieléctrica  $\epsilon$  colocada en un campo eléctrico inicialmente uniforme que a grandes distancias de la esfera está dirigido a lo largo del eje  $z$  y tiene magnitud  $E_0$ , como se indica en la Fig 2.4

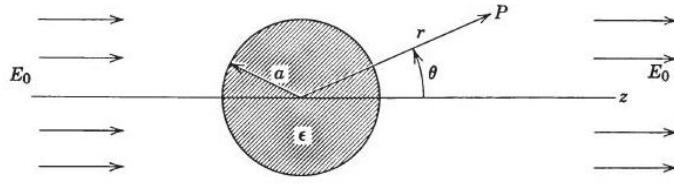


Figure 2.4: Esfera dieléctrica

Tanto dentro como fuera de la esfera no hay cargas libres. En consecuencia, el problema consiste en resolver la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno apropiadas en  $r = a$ . De la simetría axial de la geometría podemos tomar la solución de la forma:

$$\text{Dentro: } \Phi_{\text{in}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (2.3)$$

$$\text{Fuera: } \Phi_{\text{out}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ B_l r^l + C_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \theta) \quad (2.4)$$

A partir de la condición de contorno en el infinito ( $\Phi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ ) encontramos que el único  $B_1$  que no desaparece es  $B_1 = -E_0$ . Los otros coeficientes se determinan a partir de las condiciones de contorno en  $r = a$ :

$$\begin{aligned} \text{Tangencial } E : & \quad -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \\ \text{Normal } D : & \quad -\epsilon \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cuando se sustituyen las series (2.3) y (2.4), resultan dos series de polinomios de Legendre iguales a cero. Dado que estos deben desaparecer para todo  $\theta$ , el coeficiente de cada polinomio de Legendre debe desaparecer por separado. Para la primera condición de frontera esto conduce a las relaciones:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \\ A_l &= \frac{C_l}{a^{2l+1}}, \quad \text{para } l \neq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

mientras que el segundo da:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon A_1 &= -E_0 - 2 \frac{C_1}{a^3} \\ \epsilon l A_1 &= -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}}, \quad \text{para } l \neq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Las segundas ecuaciones en (2.6) y (2.7) pueden satisfacerse simultáneamente solo con  $A_l = C_l = 0$  para todo  $l \neq 1$ . Los coeficientes restantes se dan en términos del campo eléctrico aplicado  $E_0$ :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\left(\frac{3}{2+\epsilon}\right) E_0 \\ C_1 &= \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) a^3 E_0 \end{aligned} \right\}$$

El potencial es por lo tanto

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &= -\left(\frac{3}{\epsilon+2}\right)E_0r\cos\theta \\ \Phi_{\text{out}} &= -E_0r\cos\theta + \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta \end{aligned} \right\}$$

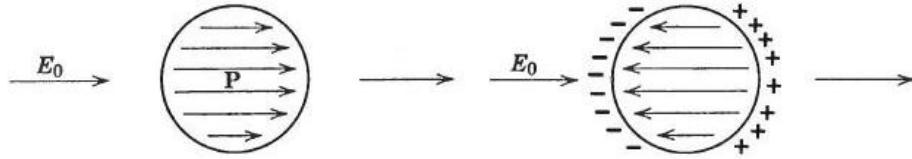


Figure 2.5: Esfera dieléctrica en un campo uniforme  $E_0$ , que muestra la polarización a la izquierda y la carga de polarización con su campo eléctrico opuesto asociado a la derecha.

El potencial dentro de la esfera describe un campo eléctrico constante paralelo al campo aplicado con magnitud

$$E_{\text{en}} = \frac{3}{\epsilon+2}E_0 < E_0 \quad \text{si} \quad \epsilon > 1 \quad (2.8)$$

Fuera de la esfera el potencial es equivalente al campo aplicado  $E_0$  más el campo de un dipolo eléctrico en el origen con momento dipolar:

$$p = \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)a^3E_0 \quad (2.9)$$

orientado en la dirección del campo aplicado. El momento dipolar se puede interpretar como la integral de volumen de la polarización  $\mathbf{P}$ . La polarización es

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\epsilon-1}{4\pi}\right)\mathbf{E} = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)\mathbf{E}_0$$

Es constante en todo el volumen de la esfera y tiene una integral de volumen dada por (2.9). La densidad de carga superficial de polarización es,  $\sigma_{\text{pol}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r$ :

$$\sigma_{\text{pol}} = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)E_0\cos\theta$$

Se puede pensar que esto produce un campo interno dirigido en dirección opuesta al campo aplicado, reduciendo así el campo dentro de la esfera a su valor (2.8), como se muestra en la figura 2.5.

### 3. Cavidad esférica en un medio dieléctrico

El problema de una cavidad esférica de radio  $a$  en un medio dieléctrico con constante dieléctrica  $\epsilon$  y con un campo eléctrico aplicado  $E_0$  paralelo al eje  $z$ , como se muestra en la Fig. 2.6, puede manipularse exactamente de la misma manera que la esfera dieléctrica. De hecho, la inspección de las condiciones de contorno (2.5) muestra que los resultados para la cavidad se pueden obtener a partir de los de la esfera reemplazando  $\epsilon \rightarrow (1/\epsilon)$ . Así, por ejemplo, el campo dentro de la cavidad es uniforme, paralelo a  $\mathbf{E}_0$ , y de magnitud:

$$E_{\text{in}} = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1}E_0 > E_0 \quad \text{si} \quad \epsilon > 1$$

De manera similar, el campo exterior es el campo aplicado más el de un dipolo en el origen orientado en sentido opuesto al campo aplicado y con momento dipolar:

$$p = \left( \frac{\epsilon - 1}{2\epsilon + 1} \right) a^3 E_0$$

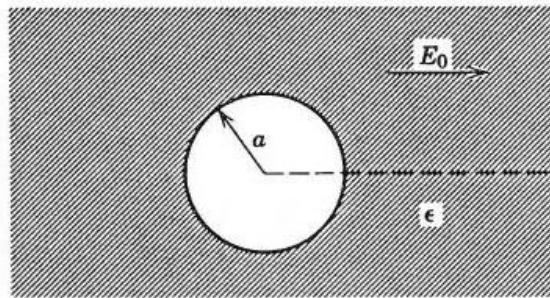


Figure 2.6: Cavidad esférica en un dieléctrico con un campo uniforme aplicado.

### 2.1.2 Problemas resueltos

#### 1. Momentos multipolares de cuadrupolo (Solución: 8.10)

Considere un sistema como un cuadrupolo, es decir, cuatro partículas puntuales cargadas ubicadas en los vértices de un cuadrado de arista  $d$ . Las partículas tienen alternadamente, carga  $Q$  y  $-Q$ . Encuentre los momentos multipolares no nulos.

#### 2. Esferas concéntricas con dieléctrico (Solución: 8.9)

Dos esferas concéntricas de radio  $a$  y  $b$ , respectivamente tienen carga  $\pm Q$ . El espacio vacío entre las esferas está a la mitad llenado con dieléctrico, por la parte del hemisfera con constante dieléctrica  $\epsilon$ , como se ve en la figura 2.7

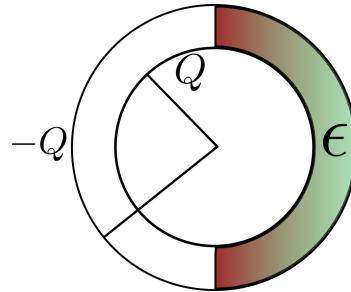


Figure 2.7: Figura del problema.

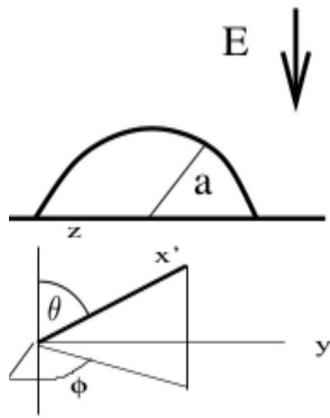
Encuentre el campo eléctrico entre las dos esferas utilizando dos formas distintas, note que una es más sencilla que la otra.

#### 3. Plano con semiesfera dieléctrica (Solución: 8.36)

Suponga un plano infinito conductor a tierra ( $\psi = 0$ ) con una semiesfera dieléctrica de radio  $r < a$  en el origen del plano conductor.

a) Asuma un campo eléctrico asintótico uniforme  $E_0$  en la dirección  $-\hat{z}$  para  $r \rightarrow \infty$ . Encuentre el potencial en todo el espacio.

b) Encuentre la función de Green para  $r > a$ .



#### 4. Semiesfera dipolar en un plano (Solución: 8.12 y 8.38)

Sea una semiesfera de radio  $r = a$  hecha de material dipolar eléctrico permanente y puesto sobre un conductor plano infinito. La dirección de  $\vec{P}$  es perpendicular a la superficie del conductor. Calcule el campo eléctrico  $\vec{E}$  producido por esta configuración.



Figure 2.8: (a) Semiesfera con  $\vec{P}$  constante

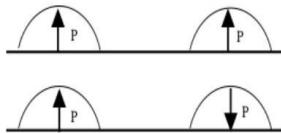


Figure 2.9: (b) Posibles configuraciones

#### 5. Plasma (Solución: 8.37)

Un medio dieléctrico consistente en cargas libres positivas y negativas (un plasma) responde a los campos eléctricos suavemente variables en el espacio, manteniendo el equilibrio térmico, de manera que

$$n_i(z) \approx n_{i0} \exp \left[ -\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right]$$

donde  $\Phi(z)$  es el potencial electrostático,  $T$  es la temperatura,  $q_i$  es la carga de la partícula  $i$  y  $n_{i0}$  es la densidad de la partícula  $i$  cuando  $\Phi(z) = 0$ , expresada en cantidad de partículas por unidad de volumen.

a) Demuestre que si el potencial es pequeño, la densidad de carga neta está dada por

$$\rho(z) = -\frac{\Phi(z)}{4\pi\lambda^2} \quad \frac{1}{\lambda^2} = 4\pi \sum_i \frac{n_{i0} q_i^2}{k_B T}$$

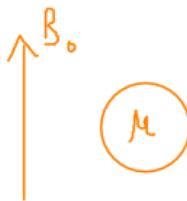
- b) Suponga que un electrodo con forma de plano infinito con densidad de carga  $\sigma$  se inserta en el plasma en  $z = 0$ . Calcule el potencial  $\Phi(z)$  en ambos lados del electrodo.  
 c) ¿Qué condición debe cumplir  $\sigma$  tal que la solución sea válida?  
 d) Encuentre la densidad de polarización  $\vec{P}$  para este plasma.

## 2.2 Magnetostática

### 2.2.1 Ejemplos

#### 1. Esfera en presencia de un campo magnético

Una esfera de radio  $a$  y  $\mu = \text{constante}$ , en un campo  $\mathbf{B}$  asintótico  $B = B_o \hat{z}$ . Encuentre el campo magnético adentro y fuera de la esfera.



No hay corrientes  $J = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{H} = -\nabla \phi \\ &\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ &\Rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \end{aligned}$$

Adentro y afuera se satisface Laplace. Uno podría hacer esto:

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mu H) = 0 \quad \rightarrow \quad \mu \nabla^2 \Phi + \nabla \mu \cdot \nabla \Phi = 0$$

pero es complicado. Esto garantiza que  $\Phi$  es continuo cruzando la interfase. Además, en las dos regiones (no en el borde) tenemos  $\mu = \text{const}$ , por lo tanto la ecuación de Maxwell satisface

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Dado que  $\mathbf{H}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{B}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = \mathbf{B}_0$  tenemos  $\Phi(r \rightarrow \infty) = -B_o z = -B_o r \cos \theta$ , y la expansión

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \\ \Phi_{\text{out}} &= -B_o r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \end{aligned}$$

Notemos que  $\mu$  no aparece todavía. Solo aparece en las condiciones de borde, para  $B_r$  y  $H_{\theta}$ . Tenemos que aplicar las condiciones de borde de Maxwell.

$$(H_2 - H_1) \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} K$$

$$(B_2 - B_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \\ -\mu \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} \end{aligned} \right\} \mu = 1 \quad \text{afuera}$$

En vez de la continuidad del componente tangencial de  $\mathbf{H}$ , dado por las ecuaciones de Maxwell, es mas fácil usar la continuidad del potencial, lo cual usamos para resolver este set de ecuaciones.

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \theta) \left[ A_{\ell} a^{\ell} - \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+1}} + B_o a \delta_{\ell,1} \right] = 0$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(\cos \theta) \left[ -\mu \ell A_{\ell} a^{\ell-1} + (\ell+1) \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+2}} + B_o \delta_{\ell,1} \right] = 0$$

Solo si  $A_{\ell} = B_{\ell} = 0 \quad \ell \neq 1$ . Luego se evaluando  $A_{\ell}$  y  $B_{\ell}$ , se resuelve y se encuentra

$$\Phi_{\text{in}} = -\left[\frac{3}{\mu+2}\right] B_o r \cos \theta$$

$$\Phi_{\text{out}} = -\left[1 + \frac{1-\mu}{\mu+2} \frac{a^3}{r^3}\right] B_o r \cos \theta$$

Si evaluamos en  $\mu = 1$ , es decir, la esfera polarizada ya no está, se recupera

$$\Phi_{\text{in}} = -B_0 r \cos \theta$$

Con esto se pueden calcular las líneas de campo. En términos de los campos tenemos

$$\mathbf{H}_{\text{in}} = \left[\frac{3}{\mu+2}\right] \mathbf{B}_o$$

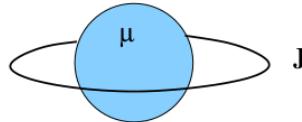
$$\mathbf{H}_{\text{out}} = B_o + \frac{1-\mu}{\mu+2} \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{B}_o - 3(\mathbf{B}_o \cdot \hat{x}) \hat{x}]$$

El campo dentro de la esfera es un campo magnético constante proporcional a  $\mathbf{B}_o$ , mientras que el campo de afuera tiene también una contribución de un campo de dipolo magnético con momento

$$\mathbf{m} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 \mathbf{B}_o \rightarrow \quad \mathbf{M} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu-1}{\mu+2} \mathbf{B}_o$$

## 2. Esfera polarizable rodeada de un anillo con corriente

Considere una esfera de radio  $a$  de material polarizable con constante  $\mu$ . En el plano ecuatorial alrededor de esta esfera tenemos un anillo de radio  $b > a$  en la cual fluye una corriente constante  $\mathbf{J} = J_o \hat{\phi}$ . Encuentre el campo magnético en todo el espacio.



### Solución:

Primero escribamos el potencial vector  $\mathbf{A} = A_o \hat{\phi}$  para el anillo en todo el espacio, con

$$A_{\phi} = \frac{4\pi I a}{c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} |C_{\ell}^1|^2 P_{\ell}^1(0) P_{\ell}^1(\cos \theta)$$

donde ahora  $r_> = \text{Max}[r, b]$  y  $r_< = \text{Min}[r, b]$ . Dado que

$$P_\ell^1(0) = \begin{cases} (-1)^{(\ell-1)/2} \frac{(\ell+1)!}{2\ell(\frac{\ell-1}{2})!(\frac{\ell+1}{2})!} & \ell \text{ impar} \\ 0 & \ell \text{ par} \end{cases}$$

Por lo tanto supongamos  $\mathbf{A} = A_\phi(r, \theta)\hat{\phi}$  y para  $r \neq b$  tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\phi = 0$$

Con lo cual podemos plantear la solución

$$A_\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} |C_{\ell,1}|^2 P_\ell^1(0) P_\ell^1(\cos \theta) \begin{cases} C_\ell r^\ell & r < a \\ \frac{r_\ell^{\ell}}{r_\ell^{\ell+1}} + \frac{a^\ell D_\ell}{r^{\ell+1}} & r > a \end{cases}$$

Ahora hay que garantizar las condiciones de Maxwell en la superficie de la esfera

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 \cdot \hat{n} = 0$$

Utilizando las condiciones de borde de continuidad, la primera condición nos da

$$C_\ell a^\ell = \frac{a^\ell}{b^{\ell+1}} + \frac{a^\ell D_\ell}{a^{\ell+1}} \quad (2.10)$$

Es mas fácil usar la continuidad del potencial que la condición de Maxwell para el componente radial del campo magnético.

Usando

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ r \frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} \hat{r} - r \sin \theta \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{\theta} \right],$$

necesitamos asegurar que el campo magnético tangencial  $\mathbf{H}$  sea continuo y también el campo magnético normal, con  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  y dado que no hay corriente superficiales, tenemos (adentro = afuera)

$$\mu \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \Big|_{r=a^-} = \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \Big|_{r=a^+}$$

que es equivalente a (derivando (2.10) )

$$\mu C_\ell (\ell+1) a^\ell = (\ell+1) \frac{a^\ell}{b^{\ell+1}} - \ell \frac{a^\ell D_\ell}{a^{\ell+1}}$$

De estas relaciones podemos resolver  $C_\ell$  y  $D_\ell$ , y también calcular el campo magnético

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

### 3. Esfera con magnetización

Una esfera de radio  $a$  con magnetización  $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$  constante. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.

Notemos que en general  $\mu$  depende de la posición. En particular en la interfase tenemos

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

Esto garantiza que  $\Phi$  es continuo cruzando la interfase. Además, en las dos regiones (no en el borde) tenemos  $\mu = \text{const}$ , por lo tanto la ecuación de Maxwell satisface

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Con

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{in}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \\ \Phi_{\text{out}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)\end{aligned}$$

Notemos que  $M$  no aparece todavía. Solo aparece en las condiciones de borde, para  $B_r$  y  $H_\theta$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= 0 \\ -\frac{\partial \Phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \left[ -\frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} + 4\pi \mathbf{M} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} \right] &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Phi_{\text{in}} = \frac{4\pi}{3} M_o r \cos \theta \quad \Phi_{\text{out}} = \frac{4\pi}{3} M_o \frac{a^3}{r^3} r \cos \theta$$

Es mejor usar continuidad del potencial que la condición de Maxwell para  $\mathbf{H}$  tangencial. Notemos el signo positivo en la expresión del componente radial de  $\mathbf{B}$  ya que la normal en  $r < a$  apunta hacia adentro de la caja. En vez de la continuidad de los campos tangenciales hemos utilizado la continuidad de  $\Phi$ . En términos de los campos tenemos

$$\mathbf{H}_{\text{in}} = 4\pi \mathbf{M} \quad \mathbf{H}_{\text{out}} = 4\pi \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{M} - 3(\mathbf{M} \cdot \hat{x}) \hat{x}],$$

y el campo magnético es

$$\mathbf{B}_{\text{in}} = 8\pi \mathbf{M} \quad \mathbf{B}_{\text{out}} = 4\pi \frac{a^3}{r^3} [\mathbf{M} - 3(\mathbf{M} \cdot \hat{x}) \hat{x}]$$

Es interesante notar que hay otras formas de resolver este mismo problema. Por ejemplo dado que tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot [\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}] = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$$

podemos escribir el potencial como

$$\Phi = - \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 y$$

donde la integral es en todo el espacio. Notemos que para la esfera tenemos

$$\mathbf{M} = M_o \hat{z} \theta(a - r)$$

con

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = M_o \frac{\partial}{\partial z} \theta(a - r) = -M_o \delta(a - r) \frac{z}{r} = \mathbf{M} \cdot \hat{n} \delta(a - r)$$

Esto implica que obtenemos el mismo resultado anterior

$$\Phi = M_o \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \int_0^{\infty} r_y^2 dr_y \delta(r_y - a) \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{2\pi} d\phi_y \cos \theta_y Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y) = \frac{4\pi}{3} M_o a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta$$

ya que

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi)$$

Si  $\mathbf{M}$  es suave y localizado, podemos usar

$$\nabla_x \cdot \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

y

$$0 = \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = - \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \cdot \nabla_y \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

para escribir

$$\Phi = -\nabla_x \cdot \int_{\bar{\Omega}} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

donde  $\bar{\Omega}$  corresponde a la región donde  $\mathbf{M} \neq 0$ .

Si la magnetización puede ser considerada como discontinua en la superficie podemos escribir también

$$\Phi = - \int_{\bar{\Omega}} \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \oint_{\bar{\Omega}\Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y}) \cdot \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_y$$

ya que la expresión anterior para el caso de una esfera se puede re-escribir como

$$\nabla_y \cdot \mathbf{M} = -M \cdot \hat{n} \delta(a - \xi)$$

con  $\xi$  como la variable que parametriza el borde de magneto. Para el caso de la esfera tenemos el mismo resultado anterior

$$\Phi = M_o \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) a^2 \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta_y d\theta_y \int_0^{2\pi} d\phi_y (\hat{z}_y \cdot \hat{r}_y) Y_{\ell,m}^*(\theta_y, \phi_y) = \frac{4\pi}{3} M_o a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta.$$

Este problema también se puede resolver en términos del vector potencial  $\mathbf{A}$  ya que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times [\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}] = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \nabla \times \mathbf{M}$$

lo que tiene como solución

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \times \mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 y$$

en el Gauge de Coulomb. Donde la integral es sobre todo el espacio  $\Omega$ . Si  $\mathbf{M}$  es suave y localizado, entonces podemos escribir

$$\mathbf{A} = \nabla_x \times \int_{\bar{\Omega}} \frac{\mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 y$$

Si hay una discontinuidad podemos escribir

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\nabla_y \times \mathbf{M}(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 y + \oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{M}(y) \times \hat{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS$$

por la misma razón anterior.

#### 4. Magneto permanente

Calcular el campo magnético producido por un magneto permanente dentro de una cavidad conductora.

Las condiciones de borde en el conductor son

$$(\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \cdot \hat{n} = 0 \quad (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

Si en el conductor perfecto podemos asumir que las cargas se moverán libremente para forzar que no hayan campos dentro de este, podemos entonces decir que

$$\mathbf{B} \cdot \hat{n} = 0 \quad \mathbf{B} \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

Por lo tanto el campo magnético normal  $\mathbf{B}_{\perp} = 0$  en el borde. Ahora la segunda condición no es muy satisfactoria, ya que sabemos que si la conductividad es alta, pero finita, entonces la corriente superficial eventualmente se debería disipar tal que  $\mathbf{K} \rightarrow 0$ . Por lo tanto, la condición

$$\mathbf{B} \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$$

se da por lo general en una situación tiempo dependiente, donde tenemos un forzamiento que mantiene  $\mathbf{K} \neq 0$ .

Osea, esta condición de borde depende de la historia del proceso que crea la configuración final. De la misma manera, si la conductividad es grande, pero finita, entonces

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

y por lo tanto tenemos que resolver el problema como un problema tiempo dependiente, ya que vamos a necesitar otra ecuación que relacione  $\mathbf{E}$  con  $\mathbf{B}$  (la ecuación de Faraday).

Notemos que el campo magnético terrestre tiene un campo magnético estático, aproximadamente dipolar, sobre su superficie, y por lo tanto el campo magnético no es cero dentro de la tierra, a pesar de que la conductividad es bastante alta. En este caso las condiciones de borde son, dado que no tenemos corriente en la superficie,

$$(\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \cdot \hat{n} = 0 \quad (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) \times \hat{n} = \mathbf{0}$$

### 2.2.2 Problemas resueltos

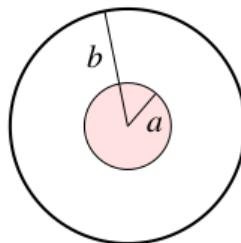
#### 1. Esfera cargada que gira (Solución: 8.11)

Una esfera de radio  $a$  tiene una densidad de carga  $\rho$ . La esfera es rotada sobre su diámetro a una frecuencia  $\omega$ . Encuentre el campo magnético dentro y fuera de la esfera.

#### 2. Esfera de material magnetizado (Solución: 8.14)

Tomemos una esfera de radio  $a$  hecha de un material magnético con magnetización permanente  $M$  constante. Esta esfera es puesta en forma concéntrica dentro de una esfera conductora de radio  $b > a$ . Encuentre el campo magnético en todo el espacio y la corriente superficial en el conductor. Demuestre que la integral de la corriente es cero.

**Ayuda:** Asuma que los campos dentro del conductor son cero.



Esfera con  $\mathbf{M}$  constante dentro de un conductor

#### 3. Cilindro magnetizado (Solución: 8.13)

Considere un cilindro de largo  $L$  y radio  $a$  con un material de magnetización permanente, y uniforme  $M_0$ , a lo largo del eje del cilindro. Construya una ecuación para  $H$ .

## 3. Ecuaciones de Maxwell

### 3.1 Problemas resueltos

#### 1. Sábana infinita (Solución: 8.15)

Supongamos que tenemos una sábana infinita que está en el espacio, la cual tiene densidad de carga  $\sigma$  y está en el plano  $z = 0$ .

- ¿Cuál es el campo eléctrico para el caso electrostático?
- Suponga que la sábana se mueve como  $x = \Delta e^{i\omega t}$ , ¿Qué campos se espera que se generen? En qué dirección?
- Demuestre que el campo eléctrico cumple

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \alpha E = b\delta(z) ,$$

encuentre  $a$  y  $b$ .

- ¿Cuáles son las soluciones para  $z > 0$  y  $z < 0$ ? ¿Cuál es la solución final para los campos?
- Calcule el vector de Poynting ¿Qué causa el input de energía? Demuestre que la energía radiada es la misma que el input de energía.

#### 2. Campos electromagnéticos de un cascarón esférico (Sol: 8.16)

Considere un cascarón esférico conductor sobre el cual hay una carga  $Q$  que tiene un radio que cambia como  $R = R_0 + \Delta R \cos(\omega t)$ . Encuentre los campos electromagnéticos.

#### 3. Condensador de placas circulares (Sol: 8.17)

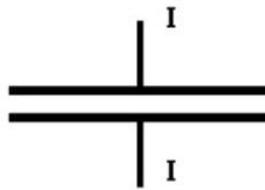
Un condensador ideal consiste de dos placas circulares de radio  $a$  (ver figura) y separadas por una distancia  $d \ll a$ , el cual esta conectado a una fuente de corriente dada por  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ .

- Calcule los campos magnéticos entre las placas a segundo orden en la frecuencia (no considere efectos de borde)

- Calcule los volúmenes de integrales  $w_e y^m$ , que entran en la definición de  $X$ , usando  $I_i = -i\omega Q_i$

- Encuentre además que el circuito equivalente en serie tiene satisfactorio  $C \simeq a^2/4d, L \simeq d/2c^2$ .

- Resuelva los campos en forma exacta. Encuentre  $C$  y  $L$  nuevamente.

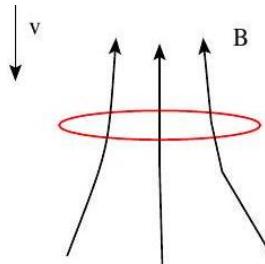


**4. Potencia irradiada por un cascarón esférico (Sol: 8.18)**

Considere un cascarón esférico de radio  $R$  y densidad de carga superficial  $\sigma$  que rota sobre su eje de simetría con frecuencia angular  $\Omega = \Omega_0 e^{-i\omega t}$ . Encuentre el potencial vector y muestre que la potencia irradiada cae como  $\frac{1}{r^2}$  para  $r \gg R$ .

**5. Anillo que cae en un campo magnético (Sol: 8.19)**

Considere un alambre de radio  $a$  y resistencia  $R$  que cae en forma horizontal en un campo magnético vertical que varía con la altura  $\mathbf{B} = B(z)\hat{z}$ . Encuentre la ecuación de movimiento del anillo y su velocidad terminal. Si imponemos una corriente continua en el anillo a través de una batería, puede este flotar?



**6. Circuito de corriente circular (Sol: 8.20)**

Un circuito de corriente circular de radio  $a$  acarrea una corriente  $I$ . Este es colocado en el plano  $x - y$  con su centro en el origen.

a) Muestre que la única componente del potencial vector distinta de cero es la componente  $\phi$ .

Demuestre que  $A_\phi$  se puede escribir de la siguiente forma

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk$$

donde  $\rho_< = \min(\rho, a)$  y  $\rho_> = \max(\rho, a)$ .

b) Muestre que una forma alternativa de escribir  $A_\phi$  es

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk$$

c) Encuentre expresiones integrales para las componentes de la inducción magnética, utilizando los resultados obtenidos en a) y b). Calcule explícitamente las componentes de  $B$  en el eje  $\hat{z}$ , desarrollando las integrales necesarias. Hint: use que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{I_1(k\rho)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J_1(k\rho)}{\rho} = \frac{k}{2} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(kz) K_0(k\rho) dk = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

**7. Fem producida por un circuito (Sol: 8.21)**

Un elemento de alambre de largo orientado  $d\vec{\ell}$  se mueve con velocidad  $\vec{u}$  en un campo magnético  $\vec{B}$ . Muestre que la fem producida por el movimiento del alambre está dada por

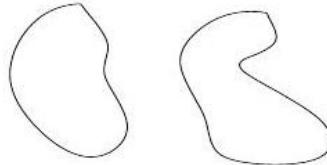
$$d\varepsilon = \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

**8. Fem producida por un cascarón esférico (Sol: 8.22)**

Un cascarón esférico conductor de radio a rota con velocidad angular  $\omega = \omega_0 \hat{z}$ , en un campo magnético uniforme descrito por  $\hat{B} = B_0 \hat{z}$ . Calcule la fem producida entre un polo y un punto en el círculo ecuatorial.

**9. Línea de transmisión (Sol: 8.23)**

Tenemos una linea de trasmisión, al cual consiste en dos conductores perfectos de forma arbitraria, pero de sección constante (la misma forma en z), ver figura. Demuestre que la inductancia por unidad de largo L y la capacitancia por unidad de largo esta dada por  $LC = \mu\varepsilon/c^2$ . (Es importante acordarse de la discusión sobre campos magnéticos cerca de conductores perfectos).





## 4. Principio de la relatividad

### 4.1 Ejemplos

- Calcular los campos producidos por una partícula en movimiento con velocidad uniforme  $\mathbf{v}_o$  en la dirección  $\hat{\mathbf{x}}$ . En el sistema en reposo de la partícula con espacio-tiempo  $(ct, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  tenemos

$$\bar{\mathbf{E}} = -\frac{q}{r^3} \{ \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \} \quad \bar{\mathbf{B}} = 0$$

Mientras que en el sistema del laboratorio con espacio tiempo  $(ct, x, y, z)$  la partícula se mueve con velocidad  $v = v_o \hat{\mathbf{x}}$ , por lo tanto

$$\begin{pmatrix} ct \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = L(v_o \hat{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\beta_o \gamma_0 & 0 & 0 \\ -\beta_o \gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ct \gamma_0 - \beta_o \gamma_0 x \\ -ct \beta_o \gamma_0 + \gamma_0 x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = \gamma_o^2 (x - v_o t)^2 + y^2 + z^2$$

con los campos transformados como

$$\mathbf{E} = \gamma_o \bar{\mathbf{E}} - \frac{\gamma_o^2}{\gamma_o + 1} \hat{\mathbf{x}} \beta_o^2 \bar{E}_x = \{ \bar{E}_x, \gamma_o \bar{E}_y, \gamma_o \bar{E}_z \}$$

$$\mathbf{B} = \gamma_o \beta_o \hat{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{E}} = \gamma_o \beta_o \{ 0, -\bar{E}_z, \bar{E}_x \}$$

por lo tanto, los campos en término de las variables del laboratorio están dados por

$$\mathbf{E} = \{ \bar{E}_x, \gamma_o \bar{E}_y, \gamma_o \bar{E}_z \} = \frac{q \gamma_o}{(\gamma_o^2 (x - v_o t)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \{ x - v_o t, y, z \}$$

$$\mathbf{B} = \gamma_o \beta_o \{ 0, -\bar{E}_z, \bar{E}_x \} = \frac{q \gamma_o \beta_o}{(\gamma_o^2 (x - v_o t)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \{ 0, -z, y \}$$

Los campos se puede escribir en forma mas estandard como

$$\mathbf{E} = \frac{q(1 - \beta_o^2)}{R^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{\mathbf{R}}$$

$$\mathbf{B} = \beta \times \mathbf{E}$$

donde  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$ , y  $\cos \theta = \hat{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}$ . Vemos que el campo eléctrico es en la dirección radial instantánea, como si no hubiera retardo.

2. Supongamos que tenemos un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  que es perpendicular a un campo magnético  $\mathbf{B}$ , ambos constantes en el tiempo y espacio. Que condiciones deben satisfacer estos campos para producir una ganancia ilimitada de energía en las partículas cargadas?
- Primero encontraremos un sistema de referencia donde los campos son paralelos. Existe una multitud de sistemas en los cuales  $\bar{\mathbf{E}}$  y  $\bar{\mathbf{B}}$  son paralelos. Utilizaremos el sistema que simplifica la transformación de los campos. Buscaremos una solución

$$\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}} = 0$$

con

$$\bar{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta (\beta \cdot \mathbf{E})$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta (\beta \cdot \mathbf{B})$$

Dado que tenemos la restricción,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , y también

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{B}}$$

podemos ver que  $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$  o  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$ . Esta claro que podemos simplificar si asumimos que

$$\beta = \alpha \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rightarrow \beta \cdot \mathbf{E} = \beta \cdot \mathbf{B} = 0$$

con lo cual

$$\bar{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) = \gamma(\mathbf{E}(1 - \alpha B^2) + \alpha(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B})$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) = \gamma(\mathbf{B}(1 - \alpha E^2) + \alpha(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{E})$$

Para el caso particular de  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , tenemos que

$$\bar{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) = \gamma \mathbf{E}(1 - \alpha B^2)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) = \gamma \mathbf{B}(1 - \alpha E^2)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{0} = (\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) [1 - \alpha B^2] [1 - \alpha E^2]$$

con lo cual tenemos dos soluciones

$$\alpha_1 = \frac{1}{E^2} \quad \alpha_2 = \frac{1}{B^2}$$

Por lo tanto si  $B > E$ , dado que  $\beta \leq 1$ , tenemos que  $= \frac{1}{B^2} \rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{E}{B} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \\ \gamma = \frac{|B|}{\sqrt{B^2 - E^2}} \end{cases}$

con

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= 0 \\ \bar{\mathbf{B}} &= \hat{\mathbf{B}}\sqrt{B^2 - E^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto no hay ganancia de energía.

Mientras que si  $E > B$  tenemos

$$\alpha = \frac{1}{E^2} \rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{B}{E}\hat{\mathbf{e}}_{\perp} \\ \gamma = \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - B^2}} \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= \hat{\mathbf{E}}\sqrt{E^2 - B^2} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos ganancia de energía.

Otra posibilidad, es mirar las ecuaciones de movimiento. Si normalizamos el tiempo propio con la girofrecuencia  $\Omega = eB/mc$  y los campos con  $\alpha = E/B$ , podemos escribir

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos buscar soluciones del tipo  $\mathbf{U}_o \exp[\lambda t]$ , con lo cual tenemos que calcular los valores propios de la matriz A de arriba. La ecuación a resolver es

$$\lambda [\lambda^2 - (\alpha^2 - 1)] = 0$$

con lo cual vemos que

$$\lambda_0 = 0 \quad \lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

Si  $\alpha > 1$ , lo que implica que  $E > B$ , tenemos soluciones reales, y por lo tanto la energía puede aumentar ilimitadamente. En el caso contrario, no es así. Los vectores propios son

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_{\pm} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mp\sqrt{\alpha^2 - 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solución completa

$$\mathbf{U}(\tau) = \sum_n^3 a_n \mathbf{V}_n e^{\lambda_n \tau} = \mathbf{V} e^{\Lambda \tau} \mathbf{a}$$

se puede construir con estos vectores y valores propios, donde construimos la matriz  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_+, \mathbf{V}_-]$ , la lista de coeficientes  $\mathbf{a} = [a_0, a_+, a_-]$ , y la matriz  $\Lambda$  diagonal con los valores propios. Usando las condiciones iniciales

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{V}\mathbf{a}$$

vemos que

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{U}(0)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{V} e^{\Lambda \tau} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{U}(0)$$

Esto es lo mismo que obtendríamos exponenciando la matriz  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{U}(\tau) = e^{(\mathbf{A}\tau)} \mathbf{U}(0)$$

## 4.2 Problemas resueltos

### 1. Suma de velocidades paralelas (Solución: 8.24)

Muestre explícitamente que dos transformaciones de Lorentz sucesivas en la misma dirección son equivalentes a una sola transformación de Lorentz con una velocidad

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)}$$

Esta es una forma alternativa de derivar la ley de suma de velocidades paralelas.

### 2. Escalares de Lorentz (Solución: 8.25)

(a) Exprese los escalares de Lorentz  $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ ,  $\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$  y  $\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}$  en términos de **E** y **B**.

¿Existen otros invariantes cuadráticos en las intensidades de campo **E** y **B**?

(b) ¿Es posible tener un campo electromagnético que aparezca como un campo puramente eléctrico en un sistema inercial y como un campo puramente magnético en algún otro sistema inercial? ¿Cuáles son los criterios impuestos a **E** y **B** de modo que haya un sistema inercial en el que no haya campo eléctrico?

(c) Para medios macroscópicos, **E**, **B** forman el tensor de campo  $F^{\alpha\beta}$  y **D**, **H** el tensor  $G^{\alpha\beta}$ . ¿Qué otras invariantes se pueden formar? ¿Cuáles son sus expresiones explícitas en términos de los campos de 3-vectores?

### 3. Espejo relativista (Solución: 8.26)

Considere un espejo de masa  $M$  y superficie  $S$ , que se mueve a una velocidad cercana a la velocidad de la luz. Como método de propulsión iluminaremos este espejo con un potente láser en forma normal a la superficie, tal que el haz de luz reflejado se propague en la dirección opuesta a la del haz incidente.

a) Muestre que el campo que rebota del espejo es pequeño a velocidades relativistas en el sistema del laboratorio.

b) En el sistema inercial, que esta instantáneamente en reposo con el espejo, encuentre la fuerza que siente el espejo. Transforme esta fuerza al sistema del laboratorio y demuestre que para velocidades relativistas  $\beta \approx 1$  obtenemos  $\gamma \sim t^{1/3}$ .

### 4. La paradoja de los gemelos (Solución: 8.32)

La estrella más cercana está a 4 años luz. Suponga que se desea enviar a un gemelo en un cohete que acelere con aceleración  $g$  la mitad del camino hacia esta estrella y desacelere con aceleración  $-g$  la otra mitad (para evitar problemas de salud por ingrávidez). Supongamos que, para ello, contamos con una turbina del Enterprise, que convierte perfectamente materia y antimateria en energía (por lo tanto, la velocidad de expulsión de la masa es con velocidad  $c$  respecto al cohete). Sin hacer consideraciones relativistas, encuentre la masa inicial  $M$  del cohete necesaria para llegar a esta estrella (asuma que la masa del módulo más la de la tripulación es de  $m_c = 100$  kg). Resuelva el problema relativista y calcule la diferencia de edad cuando los gemelos se encuentran nuevamente en la tierra, ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el cohete? Considerando efectos relativistas y una masa  $m = 100$  kg, encuentre la masa inicial del cohete necesaria para llegar a la estrella.

### 5. Conservación de la carga (Solución: 8.27)

Demuestre que  $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$  si se cumple con la conservación de carga. ¿Qué condición debe cumplir  $k_\alpha$  para que la onda plana  $F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$  sea solución de esta ecuación? Demuestre ahora que la transformación de la frecuencia entre dos sistemas inerciales es

$$\omega' = \gamma \omega [1 - \beta \cos(\theta)]$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la velocidad  $\vec{v}$  de la onda y  $k$ . Demuestre por último que

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[\cos(\theta) - \beta]}$$

donde  $\theta'$  es el ángulo entre  $\vec{v}$  y  $k'$ . ¿Cómo pueden usarse estas expresiones para medir la velocidad (incluyendo dirección) de un objeto?

**6. Lámina infinita relativista (Solución: 8.28)**

Una lámina de carga que se extiende infinitamente tanto en los ejes  $x$  como  $y$ , tiene a una densidad de carga uniforme  $\sigma > 0$ , que está en reposo relativo al observador 1. La lámina está situada en  $z = 0$  y se mueve en la dirección  $x$  con una rapidez  $v$  (relativista) en relación al observador 2.

- a) Transformando los campos desde el sistema de referencia del observador 1 al del 2, encuentre los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en la región  $z > 0$  del sistema de referencia del observador 2.
- b) Demuestre que los campos son los mismos que aquellos calculados, a partir de la transformación de la densidad de corriente desde el sistema del observador 1 al del 2, y luego utilizando las leyes de Gauss y Ampère para encontrar los campos en el sistema de referencia del observador 2.
- c) Una carga  $q > 0$  está inicialmente en reposo en el punto  $(x, y, z) = (0, 0, d)$  en el sistema de referencia del observador 1. Describa cualitativamente el movimiento posterior de la partícula desde el punto de vista de ambos observadores.

**7. Hamiltoniano de una partícula (Solución: 8.31)**

Muestre que el hamiltoniano de una partícula moviéndose en un campo electromagnético es

$$\mathcal{H} = \sqrt{|cP - eA|^2 + m^2c^4} + e\Phi,$$

donde  $P_j = \partial_{u_j}\mathcal{L}$ .





## 5. Radiación y antenas

### 5.1 Problemas resueltos

#### 1. Partícula en un campo magnético (Solución: 8.29)

Sea una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  que se mueve en un campo magnético uniforme  $B_0$ . Encuentre la trayectoria de esta partícula en términos de la velocidad inicial perpendicular  $v_\perp$  al campo, la velocidad inicial paralela  $v_\parallel$  al campo, la fase inicial  $\phi$  y la frecuencia ciclotrónica  $\Omega_c = eB_0/mc$ . Asumiendo que  $\beta \ll 1$ , encuentre los potenciales y los campos radiados en la aproximación de campo lejano para esta partícula. Si se tienen  $N$  partículas, con la misma masa y carga, encuentre  $dP/d\Omega$ . Asuma una distribución térmica definida por una temperatura  $T_\perp$  y  $T_\parallel$  con respecto al campo magnético tal que

$$T_\perp = \frac{1}{2} \sum_n m v_\perp^2 \quad T_\parallel = \frac{1}{2} \sum_n m v_\parallel^2$$

Hint:

$$\int [1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi})] d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

#### 2. Dipolo magnético oscilatorio (Solución: 8.30)

Considere el siguiente modelo de un dipolo magnético oscilatorio: Suponga que se tiene un anillo sin cargas, de radio  $b$ , por el cual circula una corriente alterna  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . Encuentre la potencia total radiada  $\langle P \rangle$  (promediado sobre un periodo), asumiendo la aproximación de campo lejano  $r \gg c/\omega$ , y la aproximación para un dipolo perfecto  $b \ll r$  y  $b \ll c/\omega$ .

#### 3. Campos radiados por mitades de una esfera (Solución: 8.39)

Dos mitades de una esfera de radio  $R$  tienen un voltaje opuesto  $V(t) = \pm V_0 \cos(\omega t)$ . En el límite de grandes longitudes de onda, encuentre los campos radiados, la distribución angular de poder radiado y todo el poder radiado por la esfera.

#### 4. Potencia radiada por una partícula relativista

Usando la fórmula de Larmor para la potencia radiada para una partícula no relativista (la cual es aplicable en el sistema  $K'$  que está instantáneamente en reposo con la partícula),

encuentre la fórmula de potencia radiada en términos de los campos locales  $E$  y  $B$  que produce la radiación.

5. **Átomo de Rutherford** Considere un núcleo de masa  $M$ , carga  $q$ , en torno el cual orbita un electrón con masa  $m_e$ . Estime cuánto tardaría el electrón en caer al núcleo por pérdidas radiativas.



## 6. Ondas, óptica y plasmas

### 6.1 Plasmas

#### 6.1.1 Problemas resueltos

##### 1. Rayo hacia la ionósfera (Solución: 8.42)

Resuelva el problema de un rayo que parte de la tierra hacia la ionosfera en forma oblicua, asumiendo una densidad de electrones  $n_e(z) = n_0 z e^{-(z-10)^2/4}$ . ¿Qué frecuencias escapan?

##### 2. Dinámica del plasma (Solución: 8.40)

Considere un plasma estacionario de electrones y protones de densidad  $n_0$  en un campo magnético  $B_0$  en dirección  $x$  entre dos conductores perfectos. Así, dado un campo eléctrico y magnético, se tiene la ecuación de movimiento para electrones y protones

$$mn \frac{d\vec{v}}{dt} = qn \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

a) Demuestre que la evolución para la velocidad del centro de masas  $\vec{U}$  está dada por

$$\nu \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$$

con  $\nu$  la densidad de masa,  $\rho$  la densidad de carga y  $\vec{J}$  la densidad de corriente. Use que en un plasma  $n_e = n_p = n_0 \sim \text{cte}$ , luego  $\rho = \text{cte}$ .

b) Dado que para velocidades no relativistas la corriente de desplazamiento no contribuye a la ecuación de Ampère, es decir,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

se encuentra la expresión para la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \left( \vec{E} + \frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \right)$$

con  $\sigma$  la conductividad eléctrica del plasma, ¿Bajo qué condiciones tiene esto sentido? Recordando que en el sistema de referencia de las partículas  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , Cuál es la ecuación para  $\vec{E}$ , dado que la conductividad es extremadamente alta en un plasma?

- c) Utilice la ecuación de Faraday para encontrar las ecuaciones acopladas de  $\vec{U}$  y  $\vec{B}$ .
- d) Asuma una pequeña perturbación de la forma  $\vec{B} = B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y}$  y  $\vec{U} = \vec{U}_1 = (U_{1x}, U_{1y}, U_{1z})$ . Tome  $\vec{U}_1$  y  $\vec{B}_1$  muy pequeños. Linealice las ecuaciones (términos cuadráticos son irrelevantes) y encuentre la ecuación de onda que satisface  $\vec{B}_1$ . Relacione  $\vec{U}_1$  con  $\vec{B}_1$ . Exprese su resultado en términos de la velocidad de Alfvén

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi mn}$$

- e) Tomemos una distancia  $L$  en  $x$ , ¿Qué modos son posibles en  $x$ , considerando las condiciones de borde? Encuentre la relación de dispersión y las soluciones para  $\omega$ .

### 3. Propagación oblicua (Solución: 8.41)

Considere un plasma neutral compuesto de partículas cargadas, donde solo las partículas de carga negativa se mueven en un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ . Para el caso de propagación oblicua  $\vec{k} = k[\sin(\theta), 0, \cos(\theta)]$ , encuentre la matriz  $A$  que satisface  $A\vec{E} = 0$ .

### 4. Plasma no magnetizado (Solución: 8.43)

Agregaremos el efecto de la temperatura en la relación de dispersión de ondas propagándose en un plasma no magnetizado. Por simplicidad supondremos que los iones del plasma no se mueven, y que toda la dinámica está concentrada en los electrones. Además supondremos que la presión de los electrones,  $P_e$ , está relacionada con su densidad,  $n_e$ , a través de la siguiente ecuación de estado:

$$P_e = P_{e,0} \left( \frac{n_e}{n_{e,0}} \right)^\gamma$$

donde el subíndice 0 indica "valor inicial" y  $\gamma$  es el índice politrópico de los electrones.

- a) Muestre que las transformadas de Fourier del campo eléctrico y de la velocidad promedio de los electrones  $\tilde{\vec{E}}$  y  $\tilde{\vec{U}}_e$  así como de las perturbaciones a la densidad y presión de los electrones ( $\tilde{n}_e$  y  $\tilde{P}_e$ ) satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \omega \tilde{n}_e &= n_{e,0} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e, \\ i m_e n_{e,0} \omega \tilde{\vec{U}}_e &= n_{e,0} |e| \tilde{\vec{E}} + i \vec{k} \tilde{P}_e, \\ \tilde{P}_e &= m_e c_e^2 \gamma \tilde{n}_e, \end{aligned}$$

donde  $\omega \vec{k}$  son la frecuencia y vector de onda de los modos de Fourier,  $m_e |e|$  son la masa y módulo de la carga de los electrones, y  $c_e^2$  es el cuadrado de la "velocidad del sonido" de los electrones, definida por  $c_e^2 = k_B T_{e,0} / m_e$  ( $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $T_{e,0}$  es la temperatura inicial de los electrones).

- b) Demuestre que la relación de dispersión de las ondas transversales que se propagan en el plasma no se modifica debido a la temperatura de los electrones. ¿Por qué esto tiene sentido?
- c) Demuestre que la relación de dispersión de las ondas longitudinales sí se modifica. Bosqueje  $\omega(k)$  para estas ondas y describa la diferencia con el caso en que los electrones están "fríos" ( $T_{e,0} = 0$ ).

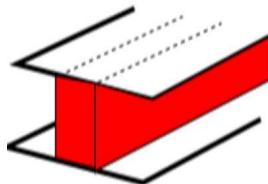
## 7. Guías de ondas, cavidades resonantes y c

### 7.1 Guías de onda

#### 7.1.1 Problemas resueltos

##### 1. Guía dieléctrica (Solución: 8.44)

Una guía dieléctrica rectangular  $|x| \leq \Delta$  está entre dos planos infinitos conductores  $y = \pm L$ , ¿Cuál es la frecuencia mínima de esta guía?





## 8. Problemas resueltos

### 8.1 Disco dentro de una esfera

Considere una esfera conductora de radio  $R$ , conectada a tierra. En su interior, se encuentra un disco  $b < R$ . Su carga  $Q$  se encuentra distribuida uniformemente en la superficie. El centro del disco y la esfera son coincidentes. Encuentre la función de Green dentro de la esfera. A continuación, describa la densidad de carga y encuentre el potencial dentro de esta.

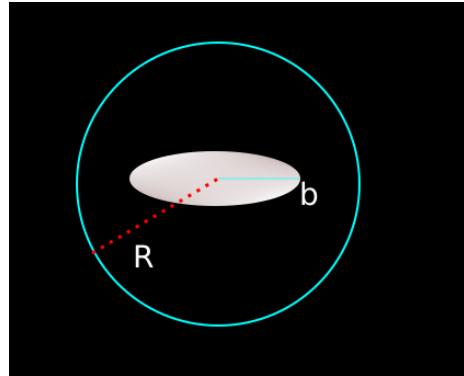


Figure 8.1: Disco dentro de una esfera

**Respuesta:** Para buscar la función de Green, resolveremos un problema de Poisson

$$\nabla^2 \Psi(r, \theta, \phi) = -4\pi\rho(r),$$

pasándose al espacio de Schwarz, nos quedaría

$$\nabla^2 G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = -4\pi\delta^{(3)}(r - r'),$$

donde, hay que tener en cuenta que

$$\delta^{(3)}(r - r') = \frac{F(r_1)F(r_2)F(r_3)}{h_1 h_2 h_3},$$

con  $h_i$  los factores de escala correspondiente a la función  $F_i$  de la geometría del sistema. Entonces, para este caso, que son coordenadas esféricas, se tiene

$$\delta^{(3)}(r - r') = \frac{\delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi')}{r'^2 \sin(\theta)},$$

ahora bien, notemos que las deltas, se pueden expresar en términos de funciones ortonormales, en particular tomaremos dos clásicas

$$\frac{\delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi')}{\sin(\theta)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'),$$

de este modo definiendo  $\delta(r - r') / (r'^2 \sin(\theta)) = R_{lm}$ , la función de Green es

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'),$$

recordemos la identidad de los armónicos esféricos

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{-l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \phi),$$

Reescribimos la ecuación de Poisson en función de la función de Green y nos queda

$$\nabla^2 G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r^2} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi'),$$

ahora, considerando  $r \neq r'$ , y aplicando ortonormalidad, nos queda

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - l(l+1) R_{lm} = 0, \quad (8.1)$$

dado el tipo de ecuación, podemos sugerir una solución del tipo

$$R_{lm} = r^s,$$

entonces evaluamos en la ecuación (8.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (s r^{s+1}) - l(l+1) r^s &= 0, \\ s(s+1) r^s - l(l+1) r^s &= 0, \\ s(s+1) - l(l+1) &= 0, \\ s^2 + s - l^2 - l &= 0, \end{aligned}$$

evaluamos para  $s = l$ ,

$$l^2 + l - l^2 - l = 0 ,$$

luego, evaluamos para  $s = -l - 1$ , tal que

$$(l-1)^2 - l - 1 - l^2 - l = 0 ,$$

$$(l-1)^2 - 2l - 1 - l^2 = 0 ,$$

$$(l-1)^2 - (l-1)^2 = 0 ,$$

por tanto  $s = -l - 1$  también satisface la ecuación. De este modo, nos quedaría que la solución es

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)} & \text{Si } r < r' , \\ C_{lm}r^l + D_{lm}r^{-(l+1)} & \text{Si } r > r' , \end{cases}$$

ahora, debemos notar cosas, por ejemplo, si  $r = 0$ , el término de  $B_{lm}$  diverge, de este modo haremos que  $B_{lm} = 0$ . Por otro lado  $\Psi(r = b) = 0$  por ser una esfera conductora, de este modo

$$C_{lm}r^l = -D_{lm}r^{-(l+1)} \implies D_{lm} = -C_{lm}b^{2l+1} ,$$

entonces, la función radial, nos quedará

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm}r^l & \text{Si } r < r' , \\ C_{lm}(r^l - b^{2l+1}r^{-(l+1)}) & \text{Si } r > r' , \end{cases}$$

ahora, trabajamos en el punto donde  $r = r'$ , de este modo, podemos unir ambas soluciones tal que

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm}r'_< \left( r'_> - b^{2l+1}r'^{-(l+1)} \right) .$$

Con  $E_{lm} = A_{lm}C_{lm}$ , y  $r'_< = \min(r, r')$  y  $r'_> = \max(r, r')$ . Ahora, queremos encontrar  $E_{lm}$  estudiando en la discontinuidad la ecuación de Green

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_{lm}}{dr} \right) - l(l+1)R_{lm} = -4\pi\delta(r - r') ,$$

entonces integramos para  $r'_> = r' + \varepsilon$  y  $r'_< = r' - \varepsilon$ , tal que

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_{lm}}{dr} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} l(l+1)R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r - r') dr ,$$

donde la segunda integral es cero por continuidad, mientras que la delta es 1, entonces, nos quedaría

$$r^2 \frac{dR_{lm}}{dr} \Big|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} = -4\pi ,$$

devolvemos los valores de  $r' \pm \varepsilon$  a los valores de  $r'_<$  y  $r'_>$ , de este modo nos queda

$$E_{lm}r'^2 r'_< \left( lr'^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{r'^{(l+2)}} \right) - lE_{lm}r'^{l+1} \left( r'_> - b^{2l+1}r'^{-(l+1)} \right) = -4\pi ,$$

escribimos todo en función de  $r'$  cuando  $r = r'$  y despejamos  $E_{lm}$

$$E_{lm} = -\frac{4\pi}{(2l+1)b^{2l+1}},$$

de este modo, la función radial es

$$R_{lm}(r, r') = -\frac{4\pi r_{<}^l}{(2l+1)b^{2l+1}} \left( r_{>}^l - \frac{b^{2l+1}}{r_{>}^{l+1}} \right) = \frac{4\pi r_{<}^l}{2l+1} \left( \frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right),$$

de este modo, la función de Green es

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{r_{<}^l}{2l+1} \left( \frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right),$$

Ahora, buscamos la densidad. La cual es necesaria para poder convolucionar con la función de Green, entonces, definimos la densidad en el espacio de Schwarz como

$$\rho(r', \theta', \phi') = \frac{\rho_0 H(r' - b) \delta(\theta' - \frac{\pi}{2})}{r' \sin(\theta')},$$

donde  $H$  es la función de Heaviside, ya que estamos con un disco, tal que nos permita describir el salto en el campo eléctrico en el origen.

Por otro lado, tenemos

$$Q = \int \rho dV,$$

de este modo, nos queda

$$Q = \rho_0 \int_0^\pi \frac{\delta(\theta' - \pi/2) \sin(\theta')}{\sin(\theta)} d\theta' \int_0^b \frac{H(r' - b) r'^2}{r'} dr,$$

lo cual nos da

$$\rho_0 = \frac{Q}{2\pi b^2},$$

entonces, con esta valor de  $\rho_0$ , podemos evaluar en  $\rho$  y nos queda

$$\rho(r', \theta', \phi') = \frac{Q}{2\pi b^2} \frac{H(r' - b) \delta(\theta' - \frac{\pi}{2})}{r' \sin(\theta')},$$

Ahora, el potencial es

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \int \rho(r', \theta', \phi') G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') d^3 r - \frac{1}{4\pi} \oint_s \Psi(r', \theta', \phi') \frac{\partial G}{\partial n'} da',$$

dada que la esfera es conductora, la condición de borde de Neumann es cero. De este modo, nos quedaría

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \int \rho(r', \theta', \phi') G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') d^3 r,$$

que escribiendo nos queda

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \int \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Q}{2\pi b^2} \frac{H(r' - b)}{r' \sin(\theta)} Y_{lm} Y_{lm}^* \frac{r'_<^l}{2l+1} \left( \frac{1}{r'_>^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dV ,$$

recordamos de métodos de la física matemática II la forma de los armónicos esféricos

$$Y_{lm}^*(\theta', \phi') = N_l^m e^{-im\phi'} P_l^m(\cos(\theta')) ,$$

ya con esto entonces, nos quedaría

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{Q}{2\pi b^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm} \frac{r'_<^l}{2l+1} \left( \frac{1}{r'_>^{l+1}} - \frac{r'_<^l}{b^{2l+1}} \right) \int_b^R H(r' - b) r' dr' \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-im\phi} \\ & \int_0^\pi d\theta' \delta(\theta - \pi/2) P_l^m(\cos(\theta')) N_l^m , \end{aligned}$$

resolvemos las integrales

$$\int_0^{2\pi} d\phi' e^{-im\phi'} = 0 \quad \forall m \neq 0 \implies m = 0 .$$

, entonces

$$\begin{aligned} P_l^0(\cos(\pi/2)) &= P_l^0(0) , \\ N_l^0 &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} . \end{aligned}$$

de este modo, el potencial nos queda

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{Q(R-b)^2}{b^2} \sum_{l=0}^{\infty} Y_{l0} \frac{r'_<^l}{2l+1} \left( \frac{1}{r'_>^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(0) .$$

## 8.2 Dos placas de metal conectadas a tierra

Dos placas infinitas de metal conectadas a tierra se encuentran paralelas al plano  $xz$ , una en  $y = 0$  y la otra en  $y = a$ . El extremo izquierdo, en  $x = 0$ , se cierra con una tira infinita aislada de las dos placas y mantenida a un potencial específico  $V_0(y)$ . Encuentre el potencial dentro de esta ranura.

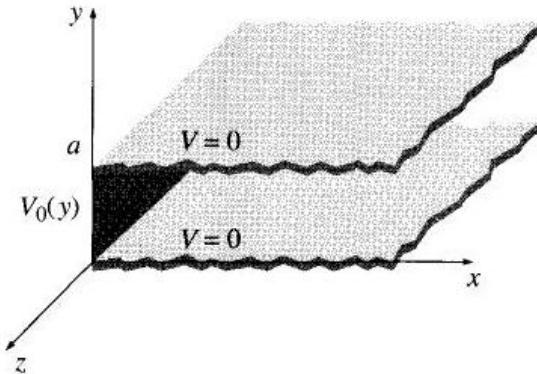


Figure 8.2: La ranura.

### Solución:

Primero como no hay cargas externas, debemos resolver la Ec. de Laplace.

La configuración es independiente de  $z$ , por lo que este es realmente un problema de dos dimensiones.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (8.2)$$

*¿Qué condiciones de frontera hay?*

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \Phi = 0 \text{ cuando } y = 0, \\ \text{(ii)} & \Phi = 0 \text{ cuando } y = a, \\ \text{(iii)} & \Phi = V_0(y) \text{ cuando } x = 0, \\ \text{(iv)} & \Phi \rightarrow 0 \text{ como } x \rightarrow \infty. \end{array} \right\} \quad (8.3)$$

El primer paso es buscar soluciones en forma de productos:

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (8.4)$$

Poniendo la Ec. (8.4) en la ecuación (8.2), obtenemos

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0.$$

Ahora vamos a “separar las variables” (es decir, reunir todas las dependencias  $x$  en un término y todas las dependencias  $y$  en otro). Por lo general, esto se logra dividiendo entre  $\Phi$ :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = 0. \quad (8.5)$$

Aquí el primer término depende solo de  $x$  y el segundo solo de  $y$ ; en otras palabras, tenemos una ecuación de la forma

$$f(x) + g(y) = 0 \quad (8.6)$$

Ahora, solo hay una forma en que esto podría ser cierto:  $f$  y  $g$  deben ser constantes. Se sigue de la ecuación (8.6), entonces, que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = C_1 \text{ y } \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = C_2, \quad \text{con } C_1 + C_2 = 0. \quad (8.7)$$

Una de estas constantes es positiva, la otra negativa, en nuestro problema particular necesitamos  $C_1$  positivo y  $C_2$  negativo, por razones que aparecerán en un momento. Por lo tanto

$$\frac{d^2X}{dx^2} = k^2 X, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 Y. \quad (8.8)$$

Tenemos:

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad Y(y) = C \sin ky + D \cos ky,$$

así que

$$\Phi(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C \sin ky + D \cos ky) \quad (8.9)$$

Ahora vamos a imponer la condición (iv) requiere que  $A$  sea igual a cero. Absorbiendo  $B$  en  $C$  y  $D$ , nos queda

$$\Phi(x, y) = e^{-kx}(C \sin ky + D \cos ky).$$

Por la condición (i) entonces  $D$  debe ser igual a cero, por lo que

$$\Phi(x, y) = Ce^{-kx} \sin ky. \quad (8.10)$$

Y de la condición (ii)  $\sin ka = 0$ , es decir:

$$k = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Por eso elegimos  $C_1$  positivo y  $C_2$  negativo: si  $X$  fuera sinusoidal, nunca podríamos hacer que llegara a cero en el infinito, y si  $Y$  fueran exponenciales, no podríamos hacer que se desvaneciera tanto en 0 como en  $a$ .

Podemos juntar las soluciones separables (8.10) para construir una solución mucho más general:

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a).} \quad (8.11)$$

Esto todavía satisface las primeras tres condiciones de contorno; la pregunta es, ¿podemos (mediante una elección astuta de los coeficientes  $C_n$ ) ajustarnos a la última condición de contorno?

$$\Phi(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi y/a) = V_0(y). \quad (8.12)$$

*¿Reconocen esta suma? ¿Qué es?*

Es una serie de seno de Fourier. Y el [teorema de Dirichlet](#) garantiza que cualquier función  $V_0(y)$  (incluso si tiene un número finito de discontinuidades) puede expandirse en tal serie.

*Pero, ¿cómo determinamos realmente los coeficientes  $C_n$ , metidos como están en esa suma infinita?*

Para lograr esto usamos [el truco de Fourier](#) (o también llamado proyector): Multiplicamos la Ec. (8.12) por  $\sin(n'\pi y/a)$  (donde  $n'$  es un entero positivo), e integramos de 0 hasta  $a$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \int_0^a V_0(y) \sin(n'\pi y/a) dy. \quad (8.13)$$

La integral nos da

$$\int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \begin{cases} 0, & \text{si } n' \neq n, \\ \frac{a}{2}, & \text{si } n' = n. \end{cases}$$

Por lo tanto, todos los términos de la serie desaparecen, excepto el que tiene  $n' = n$ , y el lado izquierdo de la ecuación (8.13), se reduce a  $(a/2)C_n$ . Despejando tenemos:

$$\boxed{C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin(n\pi y/a) dy.} \quad (8.14)$$

La Ec. (8.11) es la solución, con coeficientes dados por la (8.14). Hasta aquí se terminó el ejercicio.

*Ahora les propongo un ejemplo...*

Suponga que la tira en  $x = 0$  es una placa de metal con potencial constante  $V_0$  (recuerde, está aislada de las placas conectadas a tierra en  $y = 0$  y  $y = a$ ). Luego

$$C_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin(n\pi y/a) dy = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Y así obtenemos:

$$\boxed{\Phi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{impar}} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a)} \quad (8.15)$$

o dicho de otra manera  $n = 2k + 1$  con  $k = 0, 1, 2, \dots$

### 8.3 Cuartos de un cilindro

Una variante del problema bidimensional anterior es un cilindro conductor largo y hueco de radio  $b$  que se divide en cuartos iguales, los segmentos alternos se mantienen en potencial  $+V$  y  $-V$ .

(a) Resuelva mediante la solución en serie y demuestre que el potencial dentro del cilindro es

$$\phi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{4n+2} \frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}$$

(b) Sume la serie y demuestre que

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{2\rho^2 b^2 \sin 2\phi}{b^4 - \rho^4} \right)$$

(c) Grafique las líneas de campo y las equipotenciales

**Solución:**

(a) Primero bosquejemos el problema (Fig. 8.3) y definamos nuestro sistema de coordenadas:

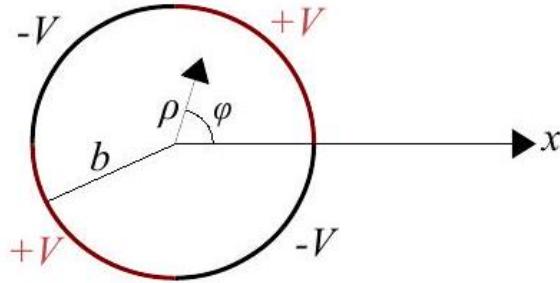


Figure 8.3: Tubo. Note que en el dibujo aparece  $\phi$  pero en el desarrollo usaré  $\phi$  en minúscula.

La ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0}$$

Solución de la forma  $\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$  conduce a:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = v^2 R(\rho) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \Psi(\phi)}{\partial \phi^2} = -v^2 \Psi(\phi)$$

que cuando se resuelve conduce a la solución general en serie:

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho)(A_0 + B_0 \phi) + \sum_{v,v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi})}$$

La ecuación de Laplace contiene dos derivadas para cada una de las dos coordenadas, por lo que necesitaremos cuatro condiciones de contorno para determinar de manera única las cuatro constantes de integración. Las cuatro condiciones de contorno son:

$$\Phi(\phi = 0) = \Phi(\phi = 2\pi)$$

$$\Phi(\rho = 0) = \text{finito}$$

$$\Phi(\rho = b) = \begin{cases} V \text{ si } 0 < \phi < \pi/2 \text{ o } \pi < \phi < 3\pi/2 \\ -V \text{ si } \pi/2 < \phi < \pi \text{ o } 3\pi/2 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

La aplicación de la primera condición de contorno obliga a que  $v$  sea un número entero que volvemos a etiquetar como  $m$  y  $B_0 = 0$ .

La aplicación de la segunda condición de contorno conduce a  $b_v = 0$  y  $b_0 = 0$ . Los términos anteriores ahora pueden combinarse en una sola constante y unirse en la suma como el caso  $m = 0$ . Nuestra solución será:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi})$$

Podemos combinar los términos positivos y negativos de  $m$

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \rho^{|m|} e^{im\phi}$$

Ahora aplicamos la última condición de contorno, que por ahora expresamos como  $V(\phi)$ , no se preocupen de los límites de  $\phi$  por ahora, eso se va a resolver cuando evaluemos la integral más adelante,

$$V(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m b^{|m|} e^{im\phi}$$

Aplicamos el proyector: multiplicamos ambos lados por una exponencial compleja e integramos de 0 a  $2\pi$

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im'\phi} d\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m b^{|m|} \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi$$

y entonces podemos aplicar la ortogonalidad para exponentiales complejas:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mm'}$$

$$\int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im'\phi} d\phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m b^{|m|} 2\pi \delta_{mm'}$$

dejemos  $A_m$ :

$$A_m = \frac{1}{2\pi b^{|m|}} \int_0^{2\pi} V(\phi) e^{-im\phi} d\phi$$

Ahora si que para integrar vamos a considerar los límites de  $\phi$

$$A_m = \frac{1}{2\pi b^{|m|}} \left[ V \int_0^{\pi/2} e^{-im\phi} d\phi - V \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-im\phi} d\phi + V \int_{\pi}^{3\pi/2} e^{-im\phi} d\phi - V \int_{3\pi/2}^{2\pi} e^{-im\phi} d\phi \right]$$

Al resolver la integral, tendremos dos casos: si  $m$  es impar,  $A_m$  siempre es cero, y si  $m$  es par tenemos:

$$A_m = \frac{2V}{(-im)\pi b^{|m|}} \left[ (-1)^{m/2} - 1 \right]$$

De modo que la solución final es:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty, \text{ par}}^{\infty} \frac{2V}{im\pi} \left[ 1 - (-1)^{m/2} \right] \left( \frac{\rho}{b} \right)^{|m|} e^{im\phi}$$

Separaremos los  $m$  positivos y negativos (mire las exponentiales)

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \phi) &= \sum_{m=0, \text{ par}}^{\infty} \frac{2V}{im\pi} \left( \frac{\rho}{b} \right)^m \left[ 1 - (-1)^{m/2} \right] [e^{im\phi} - e^{-im\phi}] \\ \Phi(\rho, \phi) &= \sum_{m=0, \text{ par}}^{\infty} \frac{4V}{m\pi} \left( \frac{\rho}{b} \right)^m \left[ 1 - (-1)^{m/2} \right] \sin(m\phi) \end{aligned}$$

Para  $m = 0, 4, 8, \dots$  se hacen cero, por lo que solo quedan los términos para  $m = 2, 6, 10, 14, \dots$  así la solución nos queda:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{m=2,6,10,\dots}^{\infty} \frac{8V}{m\pi} \left( \frac{\rho}{b} \right)^m \sin(m\phi)$$

Ahora hacemos un cambio para las variables  $m = 4n + 2$  donde  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{b} \right)^{4n+2} \frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}}$$

## 8.4 Esferas concéntricas

Dos esferas concéntricas tienen radios  $a, b$  ( $b > a$ ) y cada una está dividida en dos hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interior y el hemisferio inferior de la esfera exterior se mantienen en potencial  $V$ . Los otros hemisferios están a potencial cero. Determine el potencial en la región  $a \leq r \leq b$  como una serie en polinomios de Legendre. Incluya términos por lo menos hasta  $l = 4$ . Verifique su solución con los resultados conocidos en el caso límite  $b \rightarrow \infty$  y  $a \rightarrow 0$ .

### Solución:

El esquema de este problema es:

Debido a la geometría esférica del problema y la ausencia de carga, debemos resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0}$$

Utilizando el método de separación de variables se llega a la solución general:

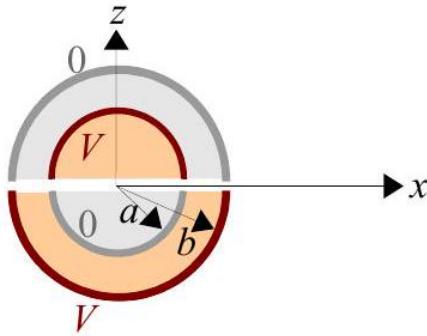


Figure 8.4: Dos esferas concéntricas.

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, \phi) = & \sum_l \left( A_l r^l + B_l r^{-l-1} \right) (A_{m=0} + B_{m=0} \phi) P_l^{m=0}(\cos \theta) \\ & + \sum_{m \neq 0, l} \left( A_l r^l + B_l r^{-l-1} \right) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}) P_l^m(\cos \theta)\end{aligned}$$

Vemos que hay **simetría azimutal**, por lo que la solución para el potencial no será una función de  $\phi$ . La única forma de hacer que la solución general sea independiente de  $\phi$  es para el caso  $m = 0$  y  $B_{m=0} = 0$ :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_l \left( A_l r^l + B_l r^{-l-1} \right) P_l^{m=0}(\cos \theta)$$

En otros problemas donde debemos tener una solución válida en el origen,  $B_l$  debe ser cero para evitar que la solución explote en el origen. **Pero en este problema no buscamos una solución válida en el origen**, por lo que no podemos usar esta restricción.

Si Aplicamos la condición de borde:  $\Phi(r = a) = V_1$  donde  $V_1 = V$  si  $\theta < \pi/2$  y  $V_1 = 0$  si  $\theta > \pi/2$

$$V_1 = \sum_l \left( A_l a^l + B_l a^{-l-1} \right) P_l(\cos \theta)$$

(no se compliquen con los límites de  $\theta$  todavía, eso va a salir cuando fijemos los límites de integración).

Ahora multiplicamos ambos lados por  $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$  e integramos (es decir aplicamos proyector)

$$\int_0^\pi V_1 P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_l \left( A_l a^l + B_l a^{-l-1} \right) \int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Usando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}$$

$$\int_0^\pi V_1 P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_l \left( A_l a^l + B_l a^{-l-1} \right) \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}$$

$$\int_0^\pi V_1 P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \left( A_l a^l + B_l a^{-l-1} \right) \frac{2}{2l+1}$$

Despejamos y reemplazamos la forma explícita de  $V_1$

$$A_l a^l + B_l a^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Hacemos un cambio de variable:  $x = \cos \theta, dx = -\sin \theta d\theta$

$$A_l a^l + B_l a^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_0^1 P_l(x) dx$$

(8.16)

Ahora aplicamos la otra condición de contorno:  $\Phi(r=b) = V_2$  donde  $V_2 = 0$  si  $\theta < \pi/2$  y  $V_2 = V$  si  $\theta > \pi/2$

$$V_2 = \sum_l \left( A_l b^l + B_l b^{-l-1} \right) P_l(\cos \theta)$$

Multiplicando ambos lados por  $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$  e integrando

$$\begin{aligned} \int_0^\pi V_2 P'_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \sum_l \left( A_l b^l + B_l b^{-l-1} \right) \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &\implies A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi V_2 P'_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Introduzcamos la forma explícita de  $V_2$

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_{\pi/2}^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Haciendo el cambio de variable:  $x = \cos \theta, dx = -\sin \theta d\theta$

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V \int_{-1}^0 P_l(x) dx$$

Hacemos otro cambio de variable  $x \rightarrow -x$  y usando la identidad:

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} V (-1)^l \int_0^1 P_l(x) dx$$

(8.17)

Las Ec. (8.16) y (8.17) forman un sistema de ecuaciones, que al resolver nos dan  $A_l$  y  $B_l$  respectivamente:

$$A_l = \frac{(-a^{l+1} + (-1)^l b^{l+1})}{(-a^{2l+1} + b^{2l+1})} \left( \frac{2l+1}{2} \right) V \int_0^1 P_l(x) dx$$

$$B_l = \frac{a^{l+1}b^{2l+1} - (-1)^l a^{2l+1}b^{l+1}}{-a^{2l+1} + b^{2l+1}} \left( \frac{2l+1}{2} \right) V \int_0^1 P_l(x) dx$$

La solución final es entonces:

$$\Phi = \frac{V}{2} \sum_l (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx \frac{[(a^{l+1} - (-1)^l b^{l+1}) r^l - ab(a^l b^{2l} - (-1)^l a^{2l} b^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Podemos hacer la integral, pero debemos tener cuidado de hacer los casos  $l = 0$  y  $l > 0$  por separado:

$$l = 0 : \quad \int_0^1 P_0(x) dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$l > 0 : \quad \int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} \int_0^1 \frac{d}{dx} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)] dx$$

$$\int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]_0^1$$

$$\int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(1) - P_{l-1}(1) - P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)]$$

$$\int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)]$$

La solución final se convierte en:

$$\Phi = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[(a^{l+1} - (-1)^l b^{l+1}) r^l - ab(a^l b^{2l} - (-1)^l a^{2l} b^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Cabe señalar que  $[P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] = 0$  cuando  $l$  es par, por lo que todos los términos pares desaparecen. Como  $l$  solo es impar, entonces  $(-1)^l = -1$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[(a^{l+1} + b^{l+1}) r^l - a^{l+1} b^{l+1} (b^l + a^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Expresándolo como una suma expandida hasta el término  $l = 4$ :

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi) = & \frac{V}{2} \left[ 1 + \left( \frac{3}{2} \right) \frac{[(a^2 + b^2) r - a^2 b^2 (b + a) r^{-2}]}{a^3 - b^3} \cos \theta \right. \\ & \left. + \left( \frac{-7}{16} \right) \frac{[(a^4 + b^4) r^3 - a^4 b^4 (b^3 + a^3) r^{-4}]}{a^7 - b^7} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right] \end{aligned}$$

Para ver el comportamiento de la solución cuando  $b \rightarrow \infty$ , dejamos  $b$  siempre es el denominador de una fracción:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[((a/b)^{l+1} + 1)(r/b)^l - (1 + (a/b)^l)(a/r)^{l+1}]}{(a/b)^{2l+1} - 1} P_l(\cos \theta)$$

Entonces cuando  $b \rightarrow \infty$ ,  $(a/b) \rightarrow 0$ , y  $(r/b) \rightarrow 0$  de modo que:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta)$$

Esto se puede expresar explícitamente como una suma expandida (se muestra hasta el término  $l = 4$ ):

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} \left[ 1 + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos \theta + \left(\frac{-7}{16}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^4 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]$$

El comportamiento de la solución cuando  $a \rightarrow 0$  es:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{[(a^{l+1} + b^{l+1}) r^l - a^{l+1} b^{l+1} (b^l + a^l) r^{-l-1}]}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} - \frac{V}{2} \sum_{l=1, \text{impar}}^{\infty} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \left(\frac{r}{b}\right)^l P_l(\cos \theta)$$

Esto se puede expresar explícitamente como una suma expandida hasta el término  $l = 4$ :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{V}{2} \left[ 1 - \left(\frac{3}{2}\right) \frac{r}{b} \cos \theta - \left(\frac{-7}{16}\right) \left(\frac{r}{b}\right)^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + \dots \right]$$

## 8.5 Potencial de una carga dentro de una esfera hueca

Encuentre el potencial de una carga puntual que está en cualquier lugar, dentro de una esfera de radio  $a$  conductora, hueca y conectada a tierra. Además encuentre la densidad de carga inducida en la superficie y en qué dirección.

Respuesta:

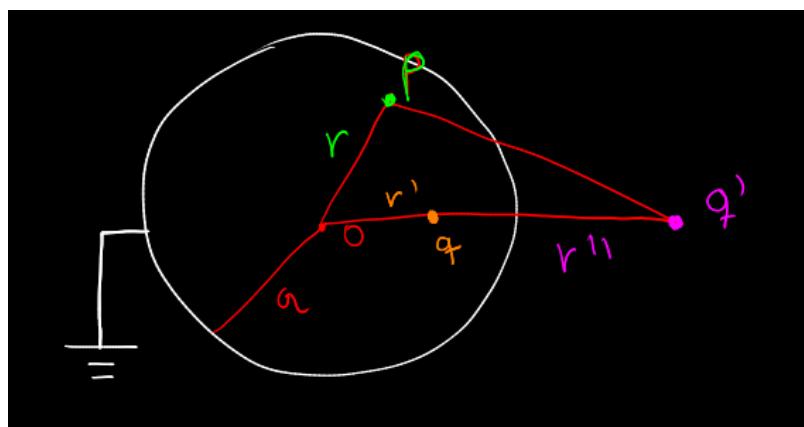


Figure 8.5: Sistema a utilizar.

Respuesta: Nos interesa saber cuánto es el potencial, de electromagnetismo sabemos que este

potencial debe ser

$$\phi(r) = \frac{kq}{|r-r'|} + \frac{kq'}{|r-r''|},$$

de este modo, buscamos determinar  $r''$  y  $q'$  tal que se satisfaga el problema de Poisson, es decir que se cumplan los bordes del problema, de este modo, evaluamos en  $r = a$  y nos queda

$$\phi(r=a) = \frac{kq}{|a-r'|} + \frac{kq'}{|a-r''|} = 0,$$

ahora, reescribimos la ecuación, para no tener que suponer  $r' = r''$  pues esto no tendría sentido, Entonces, nos quedaría

$$\phi(r=a) = \frac{kq}{a\left|1-\frac{r'}{a}\right|} + \frac{kq'}{r''\left|1-\frac{a}{r''}\right|} = 0,$$

entonces, suponemos que

$$\frac{r'}{a} = \frac{a}{r''} \implies \boxed{r'' = \frac{a^2}{r'}},$$

con esto, entonces resolvemos para  $q'$  y nos queda

$$\boxed{q' = -\frac{aq}{r'}},$$

ahora bien, evaluamos y el potencial nos queda

### Potencial del problema

$$\phi(r) = kq \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta)}} - \frac{a/r'}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{a^2}{r'}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{r'}\cos(\theta)}} \right],$$

ahora, para encontrar la carga superficial, usamos la definición

$$-4\pi\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{r=n},$$

de este modo, al derivar nos queda

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = kq \left[ \frac{r'-a}{\left((a-r')^2\right)^{3/2}} - \frac{a}{r'} \frac{a-a^2/r'}{\left[(a-a^2/r^2)^2\right]^{3/2}} \right] = -4\pi\sigma,$$

esto implica

$$\sigma = \frac{kq}{4\pi} \left[ \frac{a-r'}{\left((a-r')^2\right)^{3/2}} + \frac{a}{r'} \frac{a-a^2/r'}{\left[(a-a^2/r^2)^2\right]^{3/2}} \right],$$

entonces está apuntando hacia afuera.

### 8.6 Potencial de una pizza con un objeto dentro

Considere que en el DFC se ha realizado una comida para algún evento tipo puerta de honor. En el cual, un trozo de pizza ha sido conectado a un potencial  $\phi(r = a, \phi) = V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha)$  para corroborar experimentalmente un problema que se estudió en métodos de la física matemática II, la pizza utilizada posee ciertas propiedades, definida por los bordes  $\phi = 0$  y  $\phi = \alpha$ , y también el borde  $r = a$ . Además, una persona ha puesto por error un plano cargado sobre la pizza en  $r = b$ , y  $0 \leq \phi \leq \beta$ , de densidad uniforme  $\lambda$ . Calcule el potencial  $\phi(r, \phi)$ , y salve la pizza.

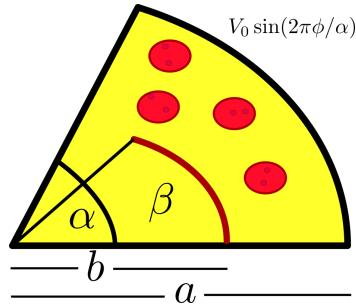


Figure 8.6: Pizza del problema, los puntos rojos sólo son decorativos para el problema.

**Respuesta:** Descomponemos el problema vía superposición

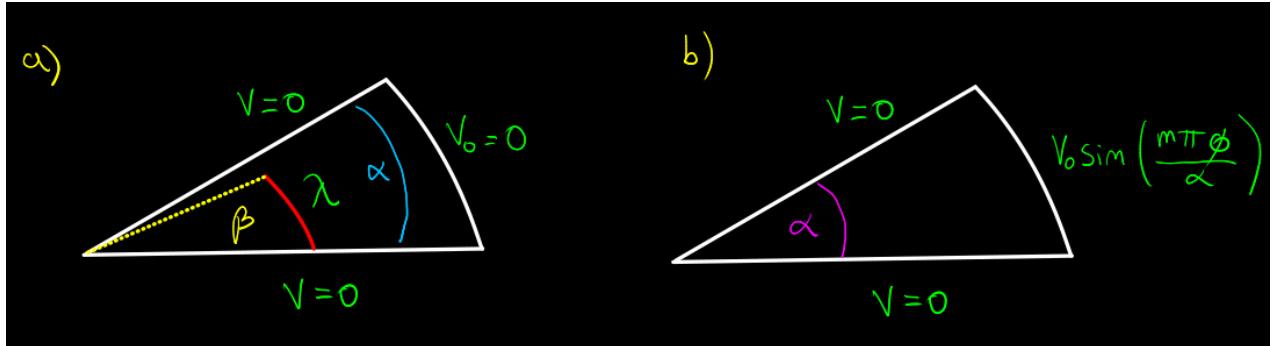


Figure 8.7: Caso a) la pizza sin potencial en el borde, pero con densidad de carga del plano cargado (en rojo), Caso b) la pizza sin el plano cargado, pero con potencial en el borde.

Para este caso, expresamos la delta en función de las coordenadas y sus respectivos factores de escala

$$\delta^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}) = \frac{\delta(r' - r)\delta(\theta' - \theta)}{1 * r},$$

ahora, expresamos delta en función de funciones ortonormales, dada las condiciones de borde, usaremos

$$\delta(\theta' - \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\alpha}\right),$$

con  $k_m$  una constante de normalización (esta se puede omitir, ya que el sistema sigue siendo ortogonal, pero si se quisiera trabajar con formas integrales, entonces es necesaria para normalizar).

De este modo, la función de Green es

## Función de Green

$$G(r, \phi, r', \phi') = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(r, r') \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\alpha}\right),$$

con  $R_m(r, r')$  a determinar.

Evaluando en la ecuación de Poisson, y evaluando para  $r \neq r'$ , nos queda

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} R \right) - \frac{1}{r^2} n^2 R_m = 0,$$

con  $n = \frac{m\pi}{\alpha}$ . Resolviendo la ecuación diferencial, tenemos la solución ya conocida

$$R_n = \begin{cases} A_n^{(1)} r^n + B_n^{(1)} r^{-n} & \text{Si } r < r' , \\ A_n^{(2)} r^n + B_n^{(2)} r^{-n} & \text{Si } r > r' . \end{cases}$$

usamos que  $B_m^{(1)} = 0$  para que no diverja en el origen. Y utilizando las condiciones  $r = a \implies R = 0$ , ya que debe cumplir las mismas condiciones de borde que la función de Green y por ende que el potencial, entonces, despejamos y obtenemos que  $A_n^{(2)}$  es

$$A_n^{(2)} = -\frac{B_n^{(2)}}{a^{2n}},$$

evaluamos en  $R_n$  y acoplamos las ecuaciones para  $r_> = \max(r, r')$  y  $r_< = \min(r, r')$ , de este modo

$$R_n = C_n r_< \left( r_>^{-n} - \frac{r_>^n}{a^{2n}} \right),$$

con  $C_n$  otra constante a determinar. Integraremos la ecuación para  $R$ , teniendo

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} dr \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} R \right) - \frac{1}{r} n R \right] = \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} 4\pi k_m \delta(r - r') ,$$

resolvemos y nos queda

$$C_m = \frac{4\pi k_m}{n \left[ \left( \frac{r_<}{r_>} \right)^n + \left( \frac{r_>}{r_<} \right)^n \right]},$$

de este modo, la función de Green para este problema será

## Función de Green final v1.102 no borrar este si que si

$$G(r, \phi, r', \phi') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi k_m \left[ r_<^{-n} - \frac{r_>^n}{a^{2n}} \right]}{n \left[ \left( \frac{r_<}{r_>} \right)^n + \left( \frac{r_>}{r_<} \right)^n \right]} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\alpha}\right).$$

Ya con la función de Green, notamos que la densidad de carga producto del plano en el sistema primado, es

$$\rho(r', \phi') = \frac{\lambda \delta(r' - b) \delta(\phi' - \beta_0)}{r'} ,$$

con  $\beta_0 \in [0, \beta]$ . Para fines prácticos se puede utilizar  $\beta$ .

Entonces, calculamos el potencial para el caso a) y es

potencial caso a)

$$\psi_1(r, \phi) = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi k_m \left[ r_-^{-n} - \frac{r_+^m}{a^{2n}} \right]}{n \left[ \left( \frac{r_-}{r_+} \right)^n + \left( \frac{r_+}{r_-} \right)^n \right]} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{m\pi\beta_0}{\alpha}\right) ,$$

con las respectivas integrales siendo

$$\int_0^a \frac{1}{r} r \delta(r' - b) dr' = 1 , \quad \int_0^\alpha \delta(\phi - \beta) \sin(\theta n) d\phi' = \sin(\beta n) .$$

Por otro lado, para el caso b), mediante separación de variables, y eliminando algunos términos, nos queda el potencial general

$$\psi_2(r, \phi) = (A_m r^m) [C_m \cos(m\phi) + D_m \sin(m\phi)] ,$$

evaluamos para cualquier  $\phi = 0$  y  $r = a, b$ , de este modo, podemos obtener que  $C_m = 0$ , ya con esto, evaluamos para algún  $a$  y  $\phi$  y despejamos la única constante que queda, obteniendo

$$A_m = \sum \frac{V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha)}{\sin(m\phi)} \frac{r^m}{a^m} ,$$

de este modo, el nuevo potencial es

$$\psi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha) \frac{r^m}{a^m} ,$$

y de este modo, el potencial final es

Potencial de la pizza

$$\psi_{\text{total}}(r, \phi) = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi k_m \left[ r_-^{-n} - \frac{r_+^m}{a^{2n}} \right]}{n \left[ \left( \frac{r_-}{r_+} \right)^n + \left( \frac{r_+}{r_-} \right)^n \right]} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{m\pi\beta_0}{\alpha}\right) + V_0 \sin(2\pi\phi/\alpha) \frac{r^m}{a^m} ,$$

## 8.7 Línea cargada entre planos conductores que se intersectan

Dos planos conductores con potencial cero se encuentran a lo largo del eje  $z$ , formando un ángulo  $\beta$  entre ellos, como en la figura 8.8. Una línea de carga unitaria paralela al eje  $z$  está ubicada entre los planos en la posición  $(\rho', \phi')$ .

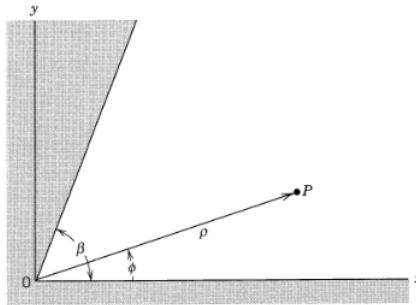


Figure 8.8: Intersección de dos planos conductores que definen una esquina en dos dimensiones con ángulo de apertura  $\beta$ .

Encuentre el potencial, y a partir de este la función de Green.

**Solución:**

(a) Dividamos el espacio entre los planos en dos regiones, la región I donde  $\rho < \rho'$  y la región II donde  $\rho > \rho'$ .

1- Cada región está libre de carga, por lo que podemos resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones en coordenadas polares. La carga lineal entrará en juego cuando apliquemos las condiciones de contorno que unen las dos regiones.

- La solución general es:

$$\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho)(A_0 + B_0 \phi) + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(A_v e^{iv\phi} + B_v e^{-iv\phi})$$

2 - Primero aplicamos la condición de contorno en el plano inferior:

$$\begin{aligned}\Phi(\rho, \phi = 0) &= 0 \\ 0 &= (a_0 + b_0 \ln \rho)(A_0) + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v})(A_v + B_v)\end{aligned}$$

$$A_0 = 0 \text{ y } B_v = -A_v$$

La solución se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = (a_0 + b_0 \ln \rho)\phi + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v}) \sin(v\phi)$$

3- Ahora aplicamos la condición de contorno en el otro plano

$$\begin{aligned}\Phi(\rho, \phi = \beta) &= 0 \\ 0 &= (a_0 + b_0 \ln \rho)\beta + \sum_{v \neq 0} (a_v \rho^v + b_v \rho^{-v}) \sin(v\beta)\end{aligned}$$

para que esto se cumpla entonces  $a_0 = 0$  y  $b_0 = 0$  y  $0 = \sin(v\beta)$  lo cual lleva a  $v = \frac{m\pi}{\beta}$  donde  $m = 1, 2, \dots$

La solución se convierte en:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_m \left( a_m \rho^{m\pi/\beta} + b_m \rho^{-m\pi/\beta} \right) \sin(m\pi\phi/\beta) \text{ donde } m = 1, 2, \dots$$

4- La solución en ambas regiones debe tener esta forma. Ahora debemos mirar cada región por separado. En la región (I) cercana al origen, debemos tener una solución válida en el origen, de manera que  $b_m = 0$ , dando lugar a:

$$\boxed{\Phi_I(\rho, \phi) = \sum_m a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta)}$$

En la región (II) alejada del origen, debemos tener una solución válida en el infinito, de modo que  $a_m = 0$ , dando lugar a:

$$\boxed{\Phi_{II}(\rho, \phi) = \sum_m b_m \rho^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta)}$$

5- Ahora aplicamos condiciones de contorno para unir las dos regiones, recordando que hay una línea de carga presente en el límite:

$$\boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma C} \quad (8.18)$$

donde  $C = 4\pi$  ó  $C = \frac{1}{\epsilon_0}$  (en c.g.s. o S.I respectivamente)

$$\left[ -\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial \rho} + \frac{\partial \Phi_I}{\partial \rho} \right]_{\text{en } \rho = \rho'} = \frac{\lambda \delta(\phi - \phi')}{\rho'} C$$

$$\sum_m m \sin(m\pi\phi/\beta) \left[ b_m \rho'^{-m\pi/\beta} + a_m \rho'^{m\pi/\beta} \right] = \frac{\beta}{\pi} \lambda \delta(\phi - \phi') C$$

6- Multiplicamos a ambos lados por un seno e integrando con respecto al ángulo polar:

$$\sum_m m \int_0^\beta \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(n\pi\phi/\beta) d\phi \left[ b_m \rho'^{-m\pi/\beta} + a_m \rho'^{m\pi/\beta} \right] = \frac{\beta}{\pi} \lambda \sin(n\pi\phi'/\beta) C$$

$$\left[ b_m \rho'^{-m\pi/\beta} + a_m \rho'^{m\pi/\beta} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{m} \sin(n\pi\phi'/\beta) C \quad (8.19)$$

7- La otra condición de contorno es:

$$\boxed{\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1}$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi_I}{\partial \phi} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial \phi} \right]_{\text{en } \rho = \rho'}$$

$$\boxed{a_m \rho'^{m\pi/\beta} = b_m \rho'^{-m\pi/\beta}} \quad (8.20)$$

8- Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones con las dos variables independientes de las ecuaciones (8.19) y (8.20), y llegamos a:

$$b_m = \rho'^{m\pi/\beta} \frac{1}{\pi m} \lambda \sin(m\pi\phi'/\beta) C \quad y \quad a_m = \rho'^{-m\pi/\beta} \frac{1}{\pi m} \lambda \sin(m\pi\phi/\beta) C$$

La solución final se convierte en:

$$\boxed{\Phi(\rho, \phi) = C \frac{\lambda}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \rho_<^{m\pi/\beta} \rho_>^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(m\pi\phi'/\beta)}$$

Luego nos piden encontrar la función de Green en para esta configuración. Consideremos S.I, para hallar la Gren, sólo debemos decir que  $\lambda = 4\pi\varepsilon_0$  este potencial se convierte en la función de Green:

$$\boxed{G(\rho, \phi, \rho', \phi') = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \rho_<^{m\pi/\beta} \rho_>^{-m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta) \sin(m\pi\phi'/\beta)}$$

¿y en c.g.s cuánto debería valer  $\lambda \dots ?$

## 8.8 Función de Green entre dos planos

La función de Green de Dirichlet para el espacio ilimitado entre los planos en  $z = 0$  y  $z = L$  permite discutir una carga puntual o una distribución de carga entre planos conductores paralelos mantenidos a potencial cero.

a) Utilizando coordenadas cilíndricas, demuestre que una forma de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi}{L} \rho_<\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L} \rho_>\right)$$

b) Demuestre que una forma alternativa de la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') \frac{\sinh(kz_<) \sinh[k(L-z_>)]}{\sinh(kL)}$$

### Solución:

*¿Qué coordenadas utilizamos?*

- Bueno, como tenemos planos y necesitamos abarcarlos a ambos nos conviene utilizar coordenadas cilíndricas (la idea es similar al uso del cilindro para el Teorema de Gauss) Luego en coordenadas cilíndricas,  $\phi$  es periódica con período  $2\pi$ . Por lo tanto podemos expandir la función de Green como una serie de Fourier en forma exponencial,  $e^{im\phi}$ .

- Ahora, si miramos las condiciones de contorno en entre los planos  $z = 0$  y  $z = L$ , entonces debemos usar la serie de senos de Fourier  $\sin(n\pi z/L)$  en la coordenada  $z$ .

Luego la ecuación de Poisson

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

en coordenadas cilíndricas es:

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \quad (8.21)$$

donde el  $\rho$  en el denominador no lleva prima.

Usando las relaciones de completitud

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} = 2\pi \delta(\phi - \phi') \quad (8.22)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) = \frac{L}{2} \delta(z - z') \quad (8.23)$$

el lado derecho (8.21) nos queda

$$-\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') = -\frac{4\pi}{\rho} \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L} \delta(\rho - \rho') \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right)$$

y la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(\rho, \rho') e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) \quad (8.24)$$

De esta manera la Ec. (8.21) nos queda:

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right] g(\rho, \rho') = -\frac{4}{L\rho} \delta(\rho - \rho')$$

Haciendo el cambio de variable

$$x = \frac{n\pi \rho}{L}$$

convierte la parte homogénea de esto en una [ecuación de Bessel modificada](#)

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \left( 1 + \frac{m^2}{x^2} \right) \right] g(x, x') &= -\frac{4}{Lx} \delta(x - x') \\ g(x, x') &= \begin{cases} A_{mn} I_m(x) + B_{mn} K_m(x) & x < x' \\ C_{mn} I_m(x) + D_{mn} K_m(x) & x > x' \end{cases} \end{aligned}$$

Para hallar la solución notemos que la función de Bessel modificada  $I_m(x)$  diverge cuando  $x \rightarrow \infty$  y la función  $K_m(x)$  diverge cuando  $x \rightarrow 0$ , así:

$$g(x, x') = \begin{cases} A_{mn} I_m(x) & x < x' \\ D_{mn} K_m(x) & x > x' \end{cases}$$

donde los coeficientes  $A_{mn}$  y  $D_{mn}$  están determinados por las condiciones de contorno en  $x = x'$

$$g_< = g_>, \quad \frac{d}{dx} g_< - \frac{d}{dx} g_> = \frac{4}{Lx'}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$A_{mn}I_m(x') = D_{mn}K_m(x') \quad (i)$$

$$A_{mn}I'_m(x') - D_{mn}K'_m(x') = \frac{4}{Lx'} \quad (ii)$$

de (i):

$$\implies A_{mn} = \frac{D_{mn}K_m(x')}{I_m(x')}$$

y sustituyendo  $A_{mn}$  en (i),

$$D_{mn} \frac{K_m(x')}{I_m(x')} I'_m(x') - D_{mn} K'_m(x') = \frac{4}{Lx'}$$

$$\implies D_{mn} = \frac{4}{Lx'} \frac{I_m(x')}{I'_m(x') K_m(x') - I_m(x') K'_m(x')}$$

y similarmente obtenemos:

$$A_{mn} = \frac{4}{Lx'} \frac{K_m(x')}{I'_m(x') K_m(x') - I_m(x') K'_m(x')}$$

Aquí viene lo interesante, resulta que las [funciones de Bessel modificadas satisfacen la fórmula de Wronskiano](#)

$$I_m(x)K'_m(x) - I'_m(x)K_m(x) = -\frac{1}{x}$$

finalmente nos da

$$g(x, x') = \frac{4}{L} \begin{cases} I_m(x)K_m(x') & x < x' \\ I_m(x')K_m(x) & x > x' \end{cases}$$

$$g(x, x') = \frac{4}{L} I_m(x_<)K_m(x_>) \quad (8.25)$$

donde

$$x_< = \min(x, x'), \quad x_> = \max(x, x')$$

Entonces sustituimos (8.25) en (8.24), y como  $x = \frac{n\pi\rho}{L}$  la función de Green nos queda:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi\rho_<}{L}\right) K_m\left(\frac{n\pi\rho_>}{L}\right)$$

La parte (b) queda como ejercicio propuesto.

### 8.9 Esferas concéntricas con dieléctrico

Dos esferas concéntricas de radio  $a$  y  $b$ , respectivamente tienen carga  $\pm Q$ . El espacio vacío entre las esferas está a la mitad llenado con dieléctrico, por la parte del hemisferio con constante dieléctrica  $\epsilon$ , como se ve en la figura 8.9

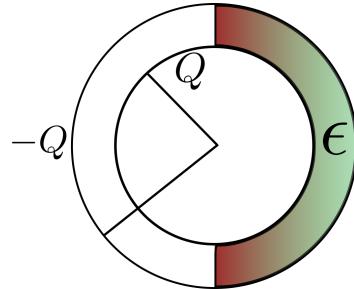


Figure 8.9: Figura del problema.

1. Encuentre el campo eléctrico entre las dos esferas utilizando dos formas distintas, note que una es más sencilla que la otra.

**Respuesta:** **Forma 1:** No recuerdo si resolvimos la ecuación de Laplace para una esfera, pero no importa. La calcularé ahora.

Consideremos el problema de Laplace

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) = 0 ,$$

Entonces, separaremos el problema en dos partes, la izquierda y la derecha (las partes separadas de la esfera), entonces, podemos por superposición resolver para la izquierda y la derecha por separado.

Así que, como no hay cargas entre  $a$  y  $b$ , resolvemos la ecuación de Laplace, mediante separación de variables se tiene

$$\psi(r, \theta, \phi) \sim R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) ,$$

entonces, aplicamos el Laplaciano en coordenadas esféricas y nos queda

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) \Phi \Theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) R \Phi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \Theta R ,$$

ahora, separando en tres ecuaciones por las dependencias y multiplicando por  $r^2 \sin^2(\theta) / (R \Theta \Phi)$ , nos quedan las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d \phi^2} = -m^2 , \quad (8.26)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d \theta} \left( \sin(\theta) \frac{d \Theta}{d \theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 , \quad (8.27)$$

$$\frac{d^2 R}{d r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0 . \quad (8.28)$$

Donde para las ecuaciones sus soluciones son conocidas, siendo, para 8.26

$$\Phi(\phi) = e^{\pm im\phi} ,$$

para 8.27

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l ,$$

y finalmente para 8.28

$$R(r) = Ar^l + Br^{-l-1} ,$$

ahora, haremos trampa y giraremos la esfera, así que el lado derecho ahora lo llamaremos "parte de arriba" y el lado izquierdo "parte de abajo". De este modo, tenemos simetría azimutal, y nos queda que el potencial es

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos(\theta)) ,$$

de este modo, definimos  $\psi_{Ar}$  como el potencial de arriba y  $\psi_{Ab}$  como el potencial de abajo, entonces, como la parte de arriba no tiene ni dieléctrico ni cargas, nos quedamos con una solución tipo Laplace, del mismo modo para la parte de abajo no tiene cargas libres, cargas polarizadas en la zona donde se está examinando, entonces también podemos usar la ecuación de Laplace, de este modo, nos quedan los potenciales

$$\begin{aligned} \psi_{Ar} &= \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos(\theta)) , \\ \psi_{Ab} &= \sum_{l=0}^{\infty} [C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos(\theta)) . \end{aligned}$$

ya con esto, ahora tendríamos que aplicar las condiciones de borde para encontrar las constantes, para ello, notemos que para el potencial de arriba, en el borde superior, se tiene

$$\psi_{Ar}^{(1)} = k_1 ,$$

mientras que en el mismo potencial de arriba, en el borde inferior, también se tiene que es esfera conductora, entonces el potencial será

$$\psi_{Ar}^{(2)} = k_2 .$$

entonces, por un lado nos quedará

$$k_1 = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l a^l + B_l a^{-(l+1)}) P_l \cos(\theta) ,$$

pero, aplicamos la regla de ortonormalidad de los polinomios de Legendre y el resultado utilizado en el problema de la pizza, podemos expresar

$$k_2 = A_0 + B_0/a , \quad B_l = -A_l a^{2l+1} ,$$

con esto, nos permite expresar el término para  $l > 0$  y  $l = 0$

$$\psi_{Ar} = A_0 + \frac{B_0}{r} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^l - \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right] P_l(\cos(\theta))$$

ahora evaluamos en el borde interior para la parte de arriba y nos queda

$$k_2 = \psi_{Ar} = A_0 + \frac{B_0}{b} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left[ \left(\frac{b}{a}\right)^l - \left(\frac{a}{b}\right)^{l+1} \right] P_l(\cos(\theta)),$$

nuevamente, necesitamos que sea constante, entonces como los términos de los polinomios de Legendre contribuyen a la parte angular y el potencial  $k_2$  es independiente del ángulo, nos queda que  $A_l = 0$ , de este modo, el potencial es

$$\psi_{Ar} = A_0 + \frac{B_0}{r},$$

haciendo el mismo análisis con la parte con dieléctrico (la parte de abajo), nos queda

$$\psi_{Ab} = C_0 + \frac{D_0}{r},$$

ahora, es fácil encontrar que el campo eléctrico es  $E = -\nabla \cdot \psi$ , de este modo

$$\vec{E}_{Ar} = \frac{B_0}{r^2} \hat{r},$$

y

$$\vec{E}_{Ab} = \frac{D_0}{r^2} \hat{r}.$$

ahora, si aplicamos condiciones de borde en el punto donde está el vacío con el dieléctrico, se debe cumplir por continuidad

$$\vec{E}_{Ar} \times \hat{\theta} = \vec{E}_{Ab} \times \hat{\theta}, \quad \vec{E}_{Ar} \cdot \hat{r} \Big|_{\theta=\pi/2} = \vec{E}_{Ab} \cdot \hat{r} \Big|_{\theta=\pi/2}$$

entonces, pasa que

$$B_0 = D_0.$$

de este modo, el campo es

$$\vec{E} = \frac{B_0}{r^2} \hat{r},$$

como conocemos el campo, podemos aplicar la Ley de Gauss sobre el dieléctrico (igual que en la forma 2, pero acá es distinto),

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\vec{D}_{Ar} \cdot \hat{r}) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\vec{D}_{Ab} \cdot \hat{r}) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi Q_{\text{encerrada}} = 4Q,$$

resolviendo nos queda

$$B_0 = \frac{2Q}{(1+\epsilon)},$$

entonces el campo es

$$\vec{E} = \frac{2Q}{(1+\epsilon)r^2}\hat{r}$$

en la zona con dieléctrico tendremos

$$\vec{D} = \frac{2\epsilon Q}{(1+\epsilon)r^2}\hat{r}.$$

**Respuesta: Forma 2:** De la Ley de Gauss, como hay una carga libre, podemos expresar

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = 4\pi Q,$$

como hay simetría radial por ser esfera y todo eso, nos aparecerá el ángulo de sólido a la mitad, porque tomamos la mitad de la esfera, y se cancelará con el  $4\pi$  de la carga, entonces, nos quedaría la suma

$$E_r r^2 + \epsilon E_r r^2 = 2Q,$$

esto implica que el campo eléctrico es

$$\vec{E}_r = \frac{2Q}{(1+\epsilon)r^2}\hat{r},$$

en la zona con dieléctrico tendremos

$$\vec{D} = \frac{2\epsilon Q}{(1+\epsilon)r^2}\hat{r}.$$

- Calcule la densidad de carga superficial de la esfera interior.

**Respuesta:** Para calcular la densidad de carga superficial, usamos

$$(D_2 - D_1)|_{r=a} = 4\pi\sigma,$$

como dentro del conductor no hay campos  $D_1 = 0$ , mientras que fuera está el clásico, así que nos queda

$$\sigma_{Ar} = \frac{Q}{(1+\epsilon)2\pi a^2}\hat{r},$$

mientras que para la parte de abajo hay que añadir el dieléctrico

$$\sigma_{Ab} = \frac{\epsilon Q}{(1+\epsilon)2\pi a^2}\hat{r},$$

- Calcule la carga de polarización de densidad inducida por el dieléctrico en  $r = a$ . Si pensamos esto como un cajita de Gauss, podemos expresar la condición de borde

$$(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = -4\pi\sigma_{\text{polarizado}}|_{r=a},$$

nuevamente como no hay campo dentro  $P_2 = 0$ , y que la normal apunta en  $-r$ , nos quedaría

$$(\vec{P}_1) \cdot \vec{n} = -4\pi\sigma_{\text{polarizado}}|_{r=a},$$

ahora, si el polarizado es lineal, se tiene

$$\vec{P} = (\epsilon - 1) \vec{E},$$

de este modo

$$\sigma_{\text{polarizado}} = \frac{(1 - \epsilon)Q}{2\pi(1 + \epsilon)a^2}.$$

## 8.10 Momentos multipolares de cuadrupolo

Considere un sistema como un cuadrupolo, es decir, cuatro partículas puntuales cargadas ubicadas en los vértices de un cuadrado de arista  $a$ . Las partículas tienen alternadamente, carga  $Q$  y  $-Q$ . Encuentre los momentos multipolares no nulos.

**Respuesta:** Definimos el eje en el centro del cuadrado

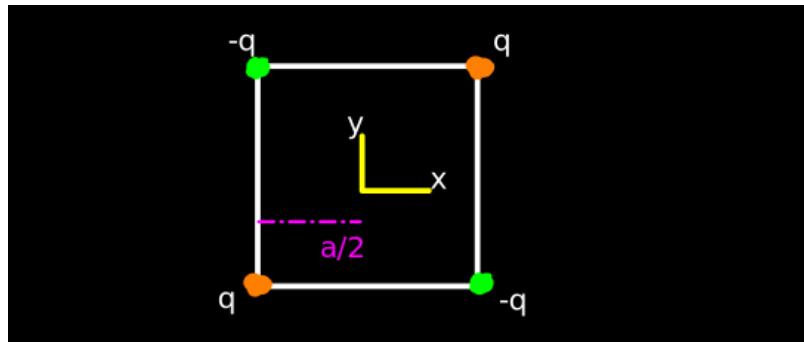


Figure 8.10: Eje de coordenadas a utilizar en el problema.

Entonces, escribimos la densidad de carga total del sistema, siendo

$$\rho(r, \theta, \phi) = \frac{4q}{a^2} \delta\left(r - \frac{a}{2}\right) \delta(\cos(\theta)) \left( \delta\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) - \delta\left(\phi - \frac{3\pi}{4}\right) + \delta\left(\phi - \frac{5\pi}{4}\right) - \delta\left(\phi - \frac{7\pi}{4}\right) \right),$$

utilizaremos esta densidad de carga para obtener momento multipolar está dado por

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta, \phi) r^l \rho(\mathbf{r}) d^3x.$$

Entonces, calculamos esta integral, donde los armónicos esféricos son

$$Y_{lm}^*(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{-im\phi}$$

entonces, separando la integral en la parte radial, angulares nos queda

$$I_1 = \int \delta\left(r - \frac{a}{2}\right) r^{l+2} d\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^{l+2},$$

$$I_2 = \int P_l^m(\cos(\theta)) \delta(\cos(\theta)) d\theta = P_l^m(0),$$

$$I_3 = \int e^{-im\phi} \left( \delta\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) - \delta\left(\phi - \frac{3\pi}{4}\right) + \delta\left(\phi - \frac{5\pi}{4}\right) - \delta\left(\phi - \frac{7\pi}{4}\right) \right).$$

donde para  $I_3$ , se tiene

$$I_3 = e^{\frac{-im\pi}{4}} - e^{\frac{-3im\pi}{4}} + e^{\frac{-5im\pi}{4}} - e^{\frac{-7im\pi}{4}},$$

Y reescritos como fracción

$$I_3 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^m - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^m + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^m - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^m,$$

Definimos  $I_3^m$  como el término de la integral anterior, tal que

$$I_3^m = \begin{cases} 4i & \text{Si } m = 4n - 2 \text{ con } n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{Si } m \neq 4n - 2 \text{ con } n \in \mathbb{Z}. \\ i & \text{Si } m = 0.5, 3.5, 4.5, 7.5, 8.5, \dots. \end{cases}$$

Sabiendo esto, podemos despreciar los términos que son 0, y definir sólo  $I_3 = 4i \quad \forall 4n - 2$ , entonces

$$q_{l,4n-2} = 4i \left( \frac{a}{2} \right)^{l+2} P_l^{4n-2}(0) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-4n+2)!}{(l+4n-2)!}},$$

o bien

$$q_{l,m} = i \left( \frac{a}{2} \right)^{l+2} P_l^m(0) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}, \quad \text{Para los valores de } I_3 \neq 0 \neq 4i.$$

En otras palabras, también podemos decir que sobreviven los términos pares además porque el polinomio de Legendre evaluado en 0, es distinto de cero si  $l = \text{par}$ .

## 8.11 Esfera cargada que gira

Una esfera de radio  $a$  tiene una densidad de carga  $\rho$  (y tiene una densidad de carga superficial  $\sigma$ ). La esfera es rotada sobre su diámetro a una frecuencia  $\omega$ . Encuentre el campo magnético dentro y fuera de la esfera.

**Solución:**

Para encontrar el campo magnético  $\mathbf{B}$  dentro y fuera de la esfera, calcularemos primero el potencial vector  $\mathbf{A}$ , ya que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

y

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

Luego lo primero que hay que hacer es encontrar la densidad de corriente que se define como

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

Dado que la esfera gira con velocidad angular constante  $\omega$ , la velocidad en cualquier punto de la esfera está dada por

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = \omega r \sin \theta \hat{\phi}.$$

La densidad de carga para una esfera uniformemente cargada de radio  $a$  es

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma \delta(\mathbf{r} - a)$$

de esta manera la densidad de corriente y el potencial vector son

$$\mathbf{J} = \sigma \omega a \sin \theta \delta(r' - a) \hat{\phi} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\sigma \omega a \sin \theta' \delta(r' - a) \hat{\phi}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'$$

Podemos expandir el denominador del potencial vector en armónicos esféricos, de acuerdo con

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \sigma \omega \delta(r' - a) \hat{\phi}' 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'_<^l}{r'_>^{l+1}} \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) r'^2 \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

Debemos tener cuidado y darnos cuenta de que  $\hat{\phi}' \neq \hat{\phi}$  porque las variables primadas se están integrando. La mejor manera de manejar esto es usar la expansión:  $\hat{\phi}' = -\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}$ . Luego dentro de la esfera (para  $r < r'$ , es decir el mayor es  $r'$ ),

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \omega a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \delta(r' - a) (-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r'^{l+1}} \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

y para fuera de la esfera (para  $r > r'$ , es decir el mayor ahora es  $r$ ),

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \omega a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \delta(r' - a) (-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^{l+2}}{r'^{l+1}} \times \\ &\quad \times Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

Ahora evaluamos las deltas y reorganizamos:

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \sigma \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{a^{l-2}} Y_{lm}(\theta, \phi) I_{l,m} \text{ (dentro)} \quad (8.29)$$

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \sigma \omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{a^{l+3}}{r'^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) I_{l,m} \quad (\text{fuera}) \quad (8.30)$$

$$\text{donde } I_{l,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \sin^2 \theta' d\theta' d\phi'$$

Escribamos explícitamente la expresión para los armónicos esféricos

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

$$I_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \int_0^{2\pi} (-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}) e^{-im\phi'} d\phi' \int_0^\pi P_l^m(\cos \theta') \sin^2 \theta' d\theta'$$

Resolvemos la primera integral en  $\phi'$ , la exponencial la escribimos en términos de senos y cosenos, y aplicamos la condición de ortogonalidad de Fourier. Debido a la ortogonalidad en la primera integral, todos los términos desaparecen excepto  $m = 1$  y  $m = -1$ . Recordar que  $\sin(-x) = -\sin(x)$ , y que si el intervalo es  $a$  entonces la condición de ortogonalidad es  $a/2$ , en este caso será igual a  $\pi$ . La primera integral nos da entonces:

$$I_{l,\pm 1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l \mp 1)!}{(l \pm 1)!}} \pi(\pm \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \int_0^\pi P_l^{\pm 1}(\cos \theta') \sin^2 \theta' d\theta'$$

Ahora seguimos buscando usar la ortogonalidad, pero para los Polinomios asociados de Legendre.

Haciendo la sustitución  $x = \cos \theta, dx = -\sin \theta d\theta$ :

$$\sin \theta = \sqrt{1-x^2} = P_1^1(x) = -2P_1^{-1}(x)$$

Luego, consideremos los casos  $+1$  y  $-1$  por separado

$$I_{l,1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-1)!}{(l+1)!}} \pi(i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \int_{-1}^1 P_l^1(x) P_1^1(x) dx \quad (8.31)$$

$$I_{l,-1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!}} \pi(-i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})(-2) \int_{-1}^1 P_l^{-1}(x) P_1^{-1}(x) dx \quad (8.32)$$

Calculemos explícitamente (8.31). Debido a la condición de ortogonalidad, solo el término  $l=1$  será distinto de cero. Luego utilizando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l'l}$$

la Ec. (8.31) nos queda:

$$I_{1,1} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-1)!}{(l+1)!}} \pi(i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \int_{-1}^1 P_1^1(x) P_1^1(x) dx$$

$$I_{1,1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{1}{2}} \pi(i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \frac{2}{3} 2$$

$$I_{1,1} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (i\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$$

y haciendo lo mismo con Ec. (8.32) (donde  $m = -1$ ), podemos escribir,

$$I_{1,\pm 1} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}(i\hat{\mathbf{i}} \pm \hat{\mathbf{j}}) \quad (8.33)$$

La solución ahora es solo la suma del término  $l = 1, m = -1$  y el término  $l = 1, m = 1$ . Con esto (8.29) y (8.30) no quedan:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi \sigma \omega}{c} \frac{a}{3} ar [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,-1}(\theta, \phi) I_{1,-1}] \text{ (dentro)} \\ \mathbf{A} &= \frac{4\pi \sigma \omega a^4}{c} \frac{1}{r^2} [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,-1}(\theta, \phi) I_{1,-1}] \text{ (fuera)} \end{aligned}$$

Según propiedad  $Y_{1,-1} = -Y_{1,1}^*$  y  $I_{1,-1} = -I_{1,1}^*$  así que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{4\pi \sigma \omega}{c} \frac{a}{3} ar [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,1}^*(\theta, \phi) I_{1,1}^*] \text{ (dentro)} \\ \mathbf{A} &= \frac{4\pi \sigma \omega a^4}{c} \frac{1}{r^2} [Y_{1,1}(\theta, \phi) I_{1,1} + Y_{1,1}^*(\theta, \phi) I_{1,1}^*] \text{ (fuera)} \end{aligned}$$

Recordemos que para números complejos en general  $z + z^* = 2\Re(z)$ , usando en las expresiones anteriores nos queda

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi \sigma \omega}{c} \frac{a}{3} ar \sin \theta \hat{\phi} \quad \text{dentro}$$

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi \sigma \omega a^4}{c} \frac{1}{r^2} \sin \theta \hat{\phi} \quad \text{fuera}$$

El campo magnético se obtiene de:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Calculamos el rotor en coordenadas esféricas, conservando solo los términos distintos de cero para este caso:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{q}_1 & h_2 \hat{q}_2 & h_3 \hat{q}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r \hat{\theta} & \hat{\phi} r \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r A_\phi \sin \theta \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Pero como  $\mathbf{A} = A \hat{\phi}$ , las componentes  $A_r$  y  $A_\theta$  son cero y entonces

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)$$

Dentro:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) = \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma \omega a r}{3r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) = \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma \omega a r}{3r \sin \theta} 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = \frac{1}{r} \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma \omega a}{3} \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{4\pi}{c} \frac{2}{3} a \sigma \omega \sin \theta$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{2}{3} a \sigma \omega [\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta}]}$$

$$\implies \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{2}{3} a \sigma \omega \hat{\mathbf{z}}$$

Fuera:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma \omega a^4}{3} \frac{1}{r^3} [2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\theta}]}$$

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma \omega a^4}{3} \frac{1}{r^3} [3 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}]$$

Como discutimos en ayudantía, hay otra manera de resolver el problema, les sugiero mirar el Ejemplo 5.11 del libro *Introduction to Electrodynamics* de Griffiths (1999).

## 8.12 Semiesfera dipolar en un plano

Sea una semiesfera de radio  $r = a$  hecha de material dipolar eléctrico permanente y puesto sobre un conductor plano infinito. La dirección de  $\vec{P}$  es perpendicular a la superficie del conductor plano infinito. Calcule el campo eléctrico producido por esta configuración.

**Respuesta:** Para una semiesfera tenemos los armónicos

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_l \sum_{m=-l}^{\infty} \Omega_l^m \left[ A_{l,m} r^l + B_{l,m} r^{-l-1} \right],$$

podemos separar el potencial en  $r < a$  y  $r > a$ , a su vez, consideramos  $r = 0 \implies B = 0$ , con  $B$  la constante en  $r < a$  y  $r \rightarrow \infty \implies \bar{A} = 0$ , con  $\bar{A}$  la constante que acompaña cuando  $r > a$ , de este modo el potencial queda

$$\psi = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_{l,m} (A_{lm} r^l) & r < a, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_{l,m} (\bar{B}_{lm} r^{-(l+1)}) & r > a. \end{cases}$$

con continuidad en  $r = a$  se tiene

$$\bar{B}_{lm} = A_{lm} a^{2l+1},$$

hay que tener ojo que en realidad la polarización va fija en ese eje. En la ayudantía me traspapelé, por tanto los ángulos de esta también son fijas. Podemos tomar entonces la polarización como

$$\vec{P} = P \sin(\phi_0) \sin(\theta_0) \hat{y},$$

En los bordes podemos tener

$$(D_{out} - D_{in})_{r=a} \cdot \hat{r} = 4\pi \vec{p} \cdot \hat{r},$$

Y nos quedaría algo del tipo

$$\sum_l \sum_m \Omega_l^m(\theta, \phi) [A_{lm} l a^{l-1} + (l+1) A_{lm} a^{l-1}] = 4\pi P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \sin(\phi) \cos(\theta).$$

Usamos linealidad tal que

$$Y_l^m(\theta, \phi) = k \cos(\theta)$$

esto ocurre en particular para  $l = 1, m = 0$ , entonces nos queda

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta).$$

despejamos para  $A_{1,0}$  y nos queda

$$A_{1,0} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0).$$

Con esto podemos evaluar en el potencial y tener el potencial en todo el espacio. Para los campos, calculamos  $\nabla \psi$  y nos queda

$$\begin{aligned} \vec{E}_> &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) [2 \sin(\phi) \cos(\theta) \hat{r} + \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{\theta} - \cot(\theta) \cos(\phi) \hat{\phi}], \\ \vec{E}_< &= -\frac{4\pi}{3} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) [\sin(\phi) \cos(\theta) \hat{r} + \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{\theta} - \cot(\theta) \cos(\phi) \hat{\phi}]. \end{aligned}$$

## 8.13 Cilindro magnetizado

Considere un cilindro de largo L y radio  $a$  con un material de magnetización permanente, y uniforme  $M_0$ , a lo largo del eje del cilindro. Construya una ecuación para  $H$ .

**Respuesta:** Se resuelve el potencial escalar magnético

$$\psi_M = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{M}}{|r - r'|} d^3 r - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\hat{n} \cdot \vec{M}}{|r - r'|} dr'$$

El primer término es cero por la magnetización uniforme, entonces, integramos

$$\psi(z) = \frac{M_0}{4\pi} \int \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - L/2)^2}} \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + L/2)^2}} \right) r dr d\phi,$$

usando el truco de Feynman, definimos  $r dr = dr^2/2$ , de este modo, nos queda

$$\psi = \frac{M_0}{8} \int \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - L/2)^2}} \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + L/2)^2}} \right) dr^2,$$

integrando, nos quedaría

$$\psi(z) = \frac{M_0}{4} \left( \sqrt{a^2 + (z - L/2)^2} - \sqrt{a^2 + (z + L/2)^2} - |z - L/2| + |z + L/2| \right),$$

ahora, para obtener  $H$ , usamos la definición

$$H = \frac{\partial}{\partial z} \psi_M,$$

lo cual nos da

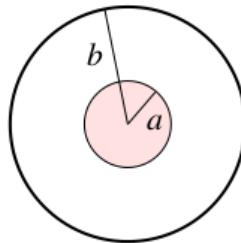
$$H = -\frac{M_0}{4} \left[ \frac{z - L/2}{(a^2 - (z - L/2)^2)^{1/2}} - \frac{z + L/2}{(a^2 - (z + L/2)^2)^{1/2}} \right],$$

y 'a mano' insertamos la dirección que va en  $\hat{z}$ , esto es por la dirección del  $M_0$ .

### 8.14 Esfera de material magnetizado

Tomemos una esfera de radio  $a$  hecha de un material magnético con magnetización permanente  $M$  constante. Esta esfera es puesta en forma concéntrica dentro de una esfera conductora de radio  $b > a$ . Encuentre el campo magnético en todo el espacio y la corriente superficial en el conductor. Demuestre que la integral de la corriente es cero.

**Ayuda:** Asuma que los campos dentro del conductor son cero.



Esférica con  $\mathbf{M}$  constante dentro de un conductor

#### Solución:

Sea un sistema rectangular tal que  $\vec{M} = M\hat{z}$ , luego

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$$

y al aplicar la divergencia se obtiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{H} + 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

pero de la ley de monopolos magnéticos se tiene que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , por lo que

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

Puesto que no hay campo eléctrico ni cargas en movimiento (no hay densidad de corriente), de la ley de Ampère en medios materiales se escribe

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

lo que implica que  $\vec{H}$  puede escribirse como el gradiente de un potencial, ya que se sabe por identidades vectoriales que  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = 0$ , así  $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_m$  y se tiene

$$\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \Phi_m) = 0$$

de la misma manera que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  implica  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , puesto que  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ . Ahora, recordando que  $-\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ , se escribe

$$-\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi_m) = \nabla^2 \Phi_m = 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 4\pi \vec{\nabla} \cdot (M \hat{z}) = 0,$$

es decir, el potencial magnético cumple con la ecuación de Laplace  $\nabla^2 \Phi_m = 0$ . Considerando la simetría azimutal, la solución del potencial en el espacio será

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n[\cos(\theta)] & \text{si } r < a \\ \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n[\cos(\theta)] & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y como la solución no puede diverger en  $r = 0$ , se deduce que  $B_n = 0$ , luego

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n[\cos(\theta)] & \text{si } r < a \\ \sum_{n=0}^{\infty} [C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}] P_n[\cos(\theta)] & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

Para la esfera interna se tienen las condiciones de borde

$$(\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}}) \cdot \hat{n}_{21} = 0 \quad \hat{n}_{21} \times (\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}}) = 0$$

donde  $\hat{n}_{21} = \hat{r}$ , por lo que se reescribe

$$\vec{B}_{\text{out}} \cdot \hat{r} = \vec{B}_{\text{in}} \cdot \hat{r} \quad \vec{H}_{\text{out}} \times \hat{r} = \vec{H}_{\text{in}} \times \hat{r}$$

Recordando que  $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$ , la primera condición queda de la forma

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{out}} \cdot \hat{r} &= (\vec{H}_{\text{in}} + 4\pi \vec{M}) \cdot \hat{r} \\ - \frac{\partial \Phi_m^>}{\partial r} \Big|_{r=a} &= - \frac{\partial \Phi_m^<}{\partial r} \Big|_{r=a} + 4\pi M \hat{z} \cdot \hat{r} \\ - \frac{\partial \Phi_m^>}{\partial r} \Big|_{r=a} &= - \frac{\partial \Phi_m^<}{\partial r} \Big|_{r=a} + 4\pi M \cos(\theta) \end{aligned}$$

puesto que  $\hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$ , mientras que para la segunda condición se escribe

$$- \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_m^>}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_m^<}{\partial \theta} \Big|_{r=a}$$

y reemplazando la solución del potencial se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} -\left[nC_n a^{n-1} - (n+1)D_n a^{-(n+2)}\right] P_n[\cos(\theta)] &= -nA_n a^{n-1} P_n[\cos(\theta)] + 4\pi M \cos(\theta) \\ \left[C_n a^n + D_n a^{-(n+1)}\right] \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] &= A_n a^n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] \end{aligned}$$

Notando que  $P_1[\cos(\theta)] = \cos(\theta)$ , se reescribe

$$\begin{aligned} \left[nC_n a^{n-1} - (n+1)D_n a^{-(n+2)}\right] P_n[\cos(\theta)] &= nA_n a^{n-1} P_n[\cos(\theta)] - 4\pi M P_1[\cos(\theta)] \\ \left[C_n a^n + D_n a^{-(n+1)}\right] \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] &= A_n a^n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n[\cos(\theta)] \end{aligned}$$

luego se deduce que  $n = 1$  y las condiciones de borde quedan

$$\begin{aligned} C_1 - 2D_1 a^{-3} &= A_1 - 4\pi M \\ C_1 a + D_1 a^{-2} &= A_1 a \end{aligned}$$

sistema del cual se obtiene

$$D_1 = \frac{4\pi}{3} a^3 M \quad C_1 = A_1 - \frac{4\pi}{3} M$$

La solución del potencial queda

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} A_1 r \cos(\theta) & \text{si } r < a \\ \left[A_1 r - \frac{4\pi}{3} r M + \frac{4\pi}{3} \frac{a^3}{r^2} M\right] \cos(\theta) & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y usando que sobre la esfera conductora

$$(\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}}) \cdot \hat{r} = 0$$

ya que sigue cumpliéndose que  $\hat{n}_{12} = \hat{r}$ , se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi_m^>}{\partial r} \Big|_{r=b} &= -\frac{\partial \Phi_m^<}{\partial r} \Big|_{r=b} \\ 0 &= \left[A_1 - \frac{4\pi}{3} M - \frac{8\pi}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^3 M\right] \cos(\theta), \end{aligned}$$

siendo inmediato que

$$A_1 = \frac{4\pi}{3} M \left[1 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3\right]$$

luego el potencial en el espacio es

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} M \left[1 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3\right] r \cos(\theta) & \text{si } r < a \\ \frac{4\pi}{3} M \left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^3\right] r \cos(\theta) & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y como  $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_m$ , se obtiene el campo magnético

$$\vec{H} = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3}M \left[ 1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] [\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}] & \text{si } r < a \\ \frac{4\pi}{3}M \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \cos(\theta)\hat{r} + \frac{4\pi}{3}M \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sin(\theta)\hat{\theta} & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

y ya que solo hay magnetización en  $r < a$ , luego usando que  $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$ , se obtiene

$$\vec{B} = \begin{cases} 4\pi M [\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}] - \frac{4\pi}{3}M \left[ 1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] [\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}] & \text{si } r < a \\ \frac{4\pi}{3}M \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \cos(\theta)\hat{r} + \frac{4\pi}{3}M \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sin(\theta)\hat{\theta} & \text{si } a < r < b \end{cases}$$

Por último, usando la condición sobre la superficie de la esfera conductora

$$\hat{r} \times (\vec{H}_{\text{out}} - \vec{H}_{\text{in}}) = \frac{4\pi}{c} \vec{K}$$

y, puesto que  $\vec{H}_{\text{out}} = 0$  para  $r > b$ , se escribe

$$-\hat{r} \times \left( \frac{4\pi}{3}M \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \cos(\theta)\hat{r} + \frac{4\pi}{3}M \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sin(\theta)\hat{\theta} \right) \Big|_{r=b} = \frac{4\pi}{c} \vec{K}$$

y desarrollando se obtiene

Para evaluar la corriente total producida se tiene en  $x$  que

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{\Omega} [K(x) \cdot \hat{x}] d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^b Mc \sin(\theta) \left(\frac{a}{b}\right)^3 \sin(\phi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{3} M c a^3 \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi \\ &= \frac{\pi}{6} M c a^3 \int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

y, de manera análoga,

$$I_y = \int_{\Omega} [K(y) \cdot \hat{y}] d\Omega = -\frac{\pi}{6} M c a^3 \int_0^{2\pi} \cos(\phi) d\phi = 0$$

luego  $I_x = I_y = 0$ , como se quería demostrar.

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3}M \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sin(\theta)\hat{\phi} &= \frac{4\pi}{c} \vec{K} \\ -Mc \sin(\theta) \left(\frac{a}{b}\right)^3 \hat{\phi} &= \vec{K}. \end{aligned}$$

### 8.15 Sábana infinita

Supongamos que tenemos una sábana infinita que está en el espacio, la cual tiene densidad de carga  $\sigma$  y está en el plano  $z = 0$ .

1. ¿Cuál es el campo eléctrico para el caso electroestático?
2. Suponga que la sábana se mueve como  $x = \Delta e^{i\omega t}$ , ¿Qué campos se espera que se generen? En qué dirección?
3. Demuestre que el campo eléctrico cumple

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \alpha E = b\delta(z) ,$$

encuentre  $a$  y  $b$ .

4. ¿Cuáles son las soluciones para  $z > 0$  y  $z < 0$ ? ¿Cuál es la solución final para los campos?
5. Calcule el vector de Poynting ¿Qué causa el input de energía? Demuestre que la energía radiada es la misma que el input de energía.

**Respuesta:**

- (a) Usamos ley de Gauss como en electromagnetismo

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int \rho dV ,$$

resolviendo nos queda

$$\vec{E}(z) = 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z)\hat{z} ,$$

esto porque solo contribuyen las tapas.

- (b) La oscilación es  $x = \Delta e^{i\omega t}$ , generando los campos

$$\vec{E}(z, t) = E(z)e^{i\omega t}\hat{x} , \quad \vec{B}(z, t) = B(z)e^{i\omega t}\hat{y} ,$$

usando la ley de Faraday se llega

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} e^{i\omega t} \hat{y} .$$

Esto implica que

$$\vec{E}(z, t) = E(z)e^{i\omega t}\hat{x} , \quad \vec{B}(z, t) = \frac{i}{k} \frac{\partial E}{\partial z} e^{i\omega t}\hat{y} ,$$

Con  $k = \omega/c$ .

- (c) Escribimos

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) .$$

Mezclamos con la ley de Ampère

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] ,$$

se usa la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} .$$

la densidad de corriente es

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \sigma \delta(x) i \omega \Delta e^{i \omega t} \hat{x}.$$

desarrollando llegamos a

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k^2 \vec{E} = -4\pi k^2 \sigma \Delta \delta(z).$$

con  $k^2 = a, b = -4\pi k^2 \sigma \Delta$ .

(d) Hay que resolver la ecuación de Helmholtz homogénea, con solución

$$E(z, t) = \begin{cases} Ae^{-ikz} + Be^{ikz}, & z < 0 \\ Ce^{-ikz} + De^{ikz}. & z > 0 \end{cases}$$

la sábana debe propagarse hacia afuera, por tanto  $D = A = 0$  y por continuidad  $B = C$ . Entonces

$$E(z, t) = Be^{-ik|z|}.$$

integraremos en la discontinuidad para  $-\varepsilon/2, \varepsilon/2$ . Entonces nos quedará

$$\left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=0} = -4\pi k^2 \sigma \Delta.$$

evaluamos y obtenemos el valor de la constante

$$B = -2\pi i \sigma \Delta k.$$

De este modo, los campos son

$$\vec{E} = -2\pi i k \sigma \Delta e^{i(\omega t - k|z|)} \hat{x}, \quad \vec{B} = -2\pi \sigma \Delta \frac{\partial}{\partial z} e^{-ik|z|} e^{i\omega t} \hat{y}.$$

(e) Teorema de Poynting sin polarización

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V (U_e - U_m) dV = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A} + \int \vec{J}^* \cdot \vec{E} dV,$$

donde las energías eléctricas y magnéticas  $U_e, U_m$ , tenemos

$$U_e = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}|^2, \quad U_m = \frac{1}{8\pi} |\vec{B}|^2,$$

y el vector de Poynting es

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}^*.$$

Los campos al cuadrado los obtenemos de d)

$$|E|^2 = 4\pi^2 k^2 \sigma^2 \Delta^2 = |B|^2.$$

de acá

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int (U_e - U_m) dV = 0,$$

mientras que para el vector de Poynting, se tiene

$$\vec{S} = \pi c k^2 \sigma^2 \Delta^2 \operatorname{sgn}(z) \hat{z}.$$

Y por otro lado

$$\int_v \vec{J}^* \cdot \vec{E} dV = -2\pi c k^2 \sigma^2 \Delta^2,$$

luego sumamos y nos queda

$$\oint \vec{S} \cdot d\vec{A} + \int_v \vec{J}^* \cdot \vec{E} = 0.$$

La energía irradiada es igual al imput.

### 8.16 Campos electromagnéticos de un cascarón esférico

Considere un cascarón esférico conductor sobre el cual hay una carga  $Q$  que tiene un radio que cambia como  $R = R_0 + \Delta R \cos(\omega t)$ . Encuentre los campos electromagnéticos.

**Respuesta:** Para este sistema, definimos la densidad de carga del cascarón

$$\rho = \frac{Q}{4\pi [R_0 + \Delta R \cos(\omega t)]^2} \delta(R(t)).$$

La densidad de corriente será

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \frac{Q}{4\pi [R_0 + \Delta R \cos(\omega t)]} \delta(R(t)) \dot{R}(t) \hat{r}.$$

entonces, calculamos el potencial vector

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}}{|r - r'|} d^3 r' = \frac{\omega \sin(\omega t)}{c} \hat{r} \int \frac{\rho}{|r - r'|} d^3 r',$$

notamos que este es el potencial clásico, entonces

$$\vec{A} = \frac{\omega \sin(\omega t)}{c} \phi(r) \hat{r}.$$

Como es una esfera, sabemos que el potencial fuera tendrá que ser

$$\phi(r) = \frac{Q}{r},$$

entonces

$$\vec{A} = \frac{Q \omega \sin(\omega t)}{rc} \hat{r}.$$

Así, podemos calcular el campo eléctrico como

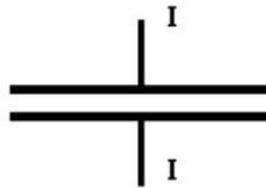
$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \left[ \frac{Q}{r^2} - \frac{Q \omega^2}{rc^2} \cos(\omega t) \right] \hat{r}.$$

Por otro lado  $\vec{B} = \vec{0}$ .

## 8.17 Condensador de placas circulares

Un condensador ideal consiste de dos placas circulares de radio  $a$  (ver figura) y separadas por una distancia  $d \ll a$ , el cual esta conectado a una fuente de corriente dada por  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ .

- Calcule los campos magnéticos entre las placas a segundo orden en la frecuencia (no considere efectos de borde)
- Calcule los volúmenes de integrales  $w_e y^m$ , que entran en la definición de  $X$ , usando  $I_i = -i\omega Q_i$
- Encuentre además que el circuito equivalente en serie tiene satisface  $C \simeq a^2/4d, L \simeq d/2c^2$ .
- Resuelva los campos en forma exacta. Encuentre  $C$  y  $L$  nuevamente.



### Solución:

La solución completa, escrita a mano, está en el documento “ayudantía9.pdf”.

- Utilizando las ecuaciones de Maxwell, con  $\rho = 0$  y  $J = 0$ , desacoplamos las EDOs acopladas para el campo magnético y eléctrico, y llegamos a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{4I_0 i}{a^2 \omega} \left( 1 - \frac{r^2 \omega^2}{4c^2} \right) e^{-i\omega r} \hat{z} \quad (8.34)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2I_0 r}{a^2 c} \left( 1 - \frac{r^2}{8c^2} \omega^2 \right) e^{-i\omega r} \hat{\phi} \quad (8.35)$$

- Utilizando lo obtenido en a) junto con las densidades de energía eléctrica y magnética

$$w_e = \frac{1}{16\pi} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (8.36)$$

$$w_m = \frac{1}{16\pi} \vec{B} \cdot \vec{B}^* \quad (8.37)$$

lo reemplazamos respectivamente en

$$W_e = \int w_e dV \quad (8.38)$$

$$W_m = \int w_m dV \quad (8.39)$$

y obtenemos

$$W_e = -\frac{Qd}{a^2} + \frac{Q^2\omega^2 d}{4c^2} - \frac{Q^2\omega^4 da^2}{48c^4} \quad (8.40)$$

$$W_m = -\frac{Q^2\omega^2 d}{8c^2} + \frac{Q^2\omega^4 a^2 d}{48c^4} - \frac{Q^2 a^4 \omega^6 d}{1024c^6} \quad (8.41)$$

c) La relación entre reactancia e inductancia es dada por

$$X = \omega L = \frac{4\omega}{I_0^2} W_m \quad (8.42)$$

así se obtiene a primer orden

$$L \approx \frac{d}{2c^2} \quad (8.43)$$

Lugo la reactancia y la capacitancia están dadas por

$$X = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{4\omega}{I_0^2} W_e \quad (8.44)$$

y obtenemos

$$C \approx \frac{a^2}{4d} \quad (8.45)$$

d) Partimos de las ecuaciones obtenidas durante el desarrollo del item a):

$$\frac{\partial E(r)}{\partial r} = -\frac{i\omega}{c} B(r) \quad (8.46)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = -\frac{i\omega}{c} E(r) \quad (8.47)$$

derivamos una ecuación, reemplazamos en la otra, agrupamos términos y armamos la ecuación:

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} B(r) + r \frac{d}{dr} B(r) + (k^2 r^2 - 1) B(r) = 0 \quad (8.48)$$

que corresponde a la Ec. de Bessel, cuya solución es del tipo

$$\vec{B}(r) = aJ_1(kr)\hat{\phi} \quad (8.49)$$

usamos que

$$J_1(kr) = -J'_0(kr)$$

junto con aproximación para bajas frecuencias. Recordamos que

$$J_0(z) = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(\nu!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{1!} \frac{z^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2} \frac{z^4}{2^4} \dots \quad (8.50)$$

y los campos serán:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{4I_0 i}{a^2 \omega} J_0(kr) e^{-i\omega t} \hat{z} \quad (8.51)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{4I_0}{a^2 \omega} J_1(kr) e^{-i\omega t} \hat{\phi} \quad (8.52)$$

Calculamos la capacitancia

$$C = \frac{a^2}{d} \quad (8.53)$$

y la inductancia

$$L \approx \frac{k^2 d}{2\omega^2} \quad (8.54)$$

## 8.18 Potencia irradiada por un cascarón esférico

Considere un cascarón esférico de radio  $R$  y densidad de carga superficial  $\sigma$  que rota sobre su eje de simetría con frecuencia angular  $\Omega = \Omega_0 e^{-i\omega t}$ . Encuentre el potencial vector y muestre que la potencia irradiada cae como  $\frac{1}{r^2}$  para  $r \gg R$ .

**Solución:**

El potencial vector cumple con la ecuación

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

donde la densidad de corriente viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \rho \vec{v} \\ &= [\sigma \delta(r-R)] R \sin(\theta) \vec{\Omega} \\ &= \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \hat{\phi} \end{aligned}$$

Suponiendo  $\vec{A} = A(r, \theta) e^{-i\omega t} \hat{\phi}$ , se escribe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} A(r, \theta) \hat{\phi} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [-i\omega A(r, \theta) e^{-i\omega t} \hat{\phi}] \\ &= -\omega^2 A(r, \theta) e^{-i\omega t} \hat{\phi} \\ &= -\omega^2 \vec{A}(r, \theta) \end{aligned}$$

obteniéndose la ecuación de Helmholtz inhomogénea

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \hat{\phi}$$

donde  $k = \omega/c$ . Desarrollando el Laplaciano en coordenadas esféricas se tiene que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] + \left[ k^2 - \frac{\omega^2}{r^2 \sin^2(\theta)} \right] A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

o, factorizando,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] - \frac{\omega^2}{\sin^2(\theta)} A \right) + k^2 A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

Ahora, la ecuación diferencial de Legendre modificada es

$$(1-x^2) \frac{d^2 A}{dx^2} - 2x \frac{dA}{dx} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] A = 0$$

donde el cambio de variable  $x = \cos(\theta)$  permite escribir

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} &= \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \left( \frac{dx}{d\theta} \right)^{-1} \frac{dA}{d\theta} = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \\ \frac{d^2 A}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dA}{dx} \right) = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{dx} \left( \frac{dA}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{dA}{dx} \right) = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] \end{aligned}$$

luego se obtiene la ecuación

$$\frac{[1-\cos^2(\theta)]}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] + \frac{2\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} + l(l+1)A - \frac{m^2}{1-\cos^2(\theta)} A = 0$$

o, lo que es equivalente,

$$\sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] + \frac{2\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A = -l(l+1)A$$

Desarrollando esta expresión se escribe

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(\theta)} \left( \sin^2(\theta) \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{dA}{d\theta} \right] + 2\cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A &= -l(l+1)A \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \left[ -\cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} + \sin(\theta) \frac{d^2 A}{d\theta^2} + 2\cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A &= -l(l+1)A \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \left[ \sin(\theta) \frac{d^2 A}{d\theta^2} + \cos(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A &= -l(l+1)A \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin(\theta) \frac{dA}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} A &= -l(l+1)A \end{aligned}$$

ecuación que es igual al término entre paréntesis en la ecuación de Helmholtz inhomogénea (con  $m^2 = \omega^2$ ), así

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} A + k^2 A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

pero escribiendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ A + r \frac{\partial A}{\partial r} \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) \\ &= \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[ 2r \frac{\partial A}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

la ecuación queda

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) - \frac{l(l+1)}{r^2} A + k^2 A = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

Puesto que  $\vec{A}$  cumple con la ecuación de Legendre asociada, se propone

$$\vec{A}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f(r) P_l^m[\cos(\theta)] \hat{\phi}$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{P_l^m[\cos(\theta)]}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) - \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] f(r) P_l^m[\cos(\theta)] = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

deduciéndose que  $l = m = 1$ , luego  $P_1^1[\cos(\theta)] = -\sin(\theta)$  y se escribe

$$-\frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{2f}{r^2} \sin(\theta) - k^2 f \sin(\theta) = -\frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0 \sin(\theta)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) - \frac{2f}{r^2} + k^2 f = \frac{4\pi}{c} \delta(r-R) R \sigma \Omega_0$$

En  $r \neq R$ , la ecuación queda

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) - \frac{2f}{r^2} + k^2 f = 0$$

y haciendo el cambio de variable  $f(r) = F(r)/\sqrt{r}$  se obtiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sqrt{r} F) + \left( k^2 - \frac{2}{r^2} \right) \frac{F}{\sqrt{r}} = 0$$

Desarrollando, se escribe

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} F) \right] + \sqrt{r} \left( k^2 - \frac{2}{r^2} \right) F \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{F}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right] + \sqrt{r} \left( k^2 - \frac{2}{r^2} \right) F \\ &= -\frac{F}{4r^{3/2}} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \sqrt{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \sqrt{r} k^2 F - \frac{2F}{r^{3/2}} \\ &= \sqrt{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial F}{\partial r} + \left( \sqrt{r} k^2 - \frac{9}{4r^{3/2}} \right) F \\ &= r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + r \frac{\partial F}{\partial r} + \left[ r^2 k^2 - \left( \frac{3}{2} \right)^2 \right] F \end{aligned}$$

la cual corresponde a una función de Hankel esférica con solución

$$F(r) = \begin{cases} A_0 \left[ h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr) \right] & \text{si } r < R \\ B_0 h_{3/2}^{(1)}(kr) & \text{si } r > R \end{cases}$$

escribiéndose el potencial vector

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = -\frac{F(r)}{\sqrt{r}} \sin(\theta) \hat{\phi}$$

Las funciones de Hankel esféricas tienen la forma

$$h_{3/2}^{(1)}(kr) = j_{3/2}^{(1)}(kr) + iy_{3/2}^{(1)}(kr) \quad h_{3/2}^{(2)}(kr) = j_{3/2}^{(2)}(kr) - iy_{3/2}^{(2)}(kr)$$

luego es importante destacar que la solución en el interior  $r < R$  es una suma de funciones de Hankel esféricas de manera que se cumpla

$$\left[ iy_{3/2}^{(1)}(kr) - iy_{3/2}^{(2)}(kr) \right] \sim 0,$$

puesto que las funciones de Neumann esféricas o  $y_{3/2}^{(2)}(kr)$ , divergen en el origen  $r = 0$  (no puede hacerse directamente cero la función de Neumann esférica, puesto que implica anular  $A_0 = 0$  y no existiría solución en  $r < R$ , lo cual no es cierto). La elección de  $h_{3/2}^{(1)}(kr)$  en el exterior  $r > R$  no es arbitraria, puesto que implica una radiación hacia el infinito, aunque el cálculo sí es el mismo para cualquiera de las dos funciones de Hankel esféricas, en caso de haberse escogido  $h_{3/2}^{(2)}(kr)$  para  $r > R$  (lo cual no es problema en la matemática, pero sí en la interpretación física). De la condición de continuidad en el campo  $\vec{B}$  se tiene que

$$\left( \vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}} \right) \cdot \hat{n} = 0,$$

pero  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , luego se escribe (usando que  $\vec{A}$  solo tiene dirección en  $\hat{\phi}$  )

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
&= \frac{1}{r \sin(\theta)} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\phi \sin(\theta)] - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} [r A_\phi] \right) \hat{\theta} \\
&= \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\phi \sin(\theta)] \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_\phi] \hat{\theta}
\end{aligned}$$

y, puesto que solo sobrevive la componente paralela, se obtiene por lo que la constante  $B_0$  será

$$B_0 = A_0 \left[ \frac{h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \right]$$

y la solución queda

$$F(r) = \begin{cases} A_0 \left[ h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr) \right] & \text{si } r < R \\ A_0 \left[ h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] \frac{h_{3/2}^{(1)}(kr)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} & \text{si } r > R \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$F(r) = A_0 \left[ h_{3/2}^{(1)}(kr_<) + h_{3/2}^{(2)}(kr_<) \right] \frac{h_{3/2}^{(1)}(kr_>)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)}$$

donde  $r_< = \min(r, R)$  y  $r_> = \max(r, R)$ . De la discontinuidad del campo en  $r = R$  (notar que desaparece la delta de Dirac en la densidad de corriente),

$$(\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}}) \times \hat{n} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

y usando que

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_\phi \sin(\theta)] \Big|_{r=R} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r A_\phi] \Big|_{r=R} \hat{\theta}$$

se obtiene el campo externo

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{\text{out}} &= -\frac{F_{\text{out}}}{r^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2(\theta)] \Big|_{r=R} \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} F_{\text{out}}) \Big|_{r=R} \hat{\theta} \\
&= -\frac{2A_0}{R^{3/2}} \cos(\theta) \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0}{R} \sin(\theta) \left[ \frac{\bar{H}_{3/2}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{r} h_{3/2}^{(1)}(kr) \right] \Big|_{r=R} \hat{\theta},
\end{aligned}$$

donde, por simplicidad, se usa

$$\bar{H}_{3/2}(kR) = \left[ h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial [r^{-1/2} F_{\text{in}} \sin^2(\theta)]}{\partial \theta} \Big|_{r=R} - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial [r^{-1/2} F_{\text{out}} \sin^2(\theta)]}{\partial \theta} \Big|_{r=R} &= 0 \\ \frac{F_{\text{in}}}{R^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial [\sin^2(\theta)]}{\partial \theta} - \frac{F_{\text{out}}}{R^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial [\sin^2(\theta)]}{\partial \theta} &= 0 \\ F_{\text{in}} - F_{\text{out}} &= 0 \\ A_0 \left[ h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] - B_0 h_{3/2}^{(1)}(kR) &= 0 \end{aligned}$$

Desarrollando la derivada se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{out}} &= -\frac{2A_0 \cos(\theta)}{R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0 \sin(\theta)}{2R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R}} \frac{\bar{H}_{3/2}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \left[ h_{3/2}^{(1)}(kR) \right]' \hat{\theta} \\ &= \frac{A_0}{R^{3/2}} \left( -2 \cos(\theta) \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{2} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + kR \sin(\theta) \frac{\bar{H}_{3/2}(kR)}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \left[ h_{3/2}^{(1)}(kR) \right]' \hat{\theta} \right) \end{aligned}$$

Análogamente, para el campo interno se tiene

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{in}} &= -\frac{F_{\text{in}}}{r^{3/2} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2(\theta)] \Big|_{r=R} \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} F_{\text{in}}) \Big|_{r=R} \hat{\theta} \\ &= -\frac{2A_0 \cos(\theta)}{R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0 \sin(\theta)}{R} \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{r} \bar{H}_{3/2}(kR)] \Big|_{r=R} \hat{\theta} \\ &= -\frac{2A_0 \cos(\theta)}{R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{A_0 \sin(\theta)}{2R^{3/2}} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R}} \bar{H}_{3/2}'(kR) \hat{\theta} \\ &= \frac{A_0}{R^{3/2}} \left[ -2 \cos(\theta) \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{r} + \frac{\sin(\theta)}{2} \bar{H}_{3/2}(kR) \hat{\theta} + kR \sin(\theta) \bar{H}_{3/2}'(kR) \hat{\theta} \right] \end{aligned}$$

y reemplazando ambos campos en la condición de discontinuidad se obtiene

$$\begin{aligned} (\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}}) \times \hat{n} &= \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R}} \left[ \left( \left[ h_{3/2}^{(1)}(kR) \right]' + \left[ h_{3/2}^{(2)}(kR) \right]' \right) - \frac{\left[ h_{3/2}^{(1)}(kR) \right]'}{h_{3/2}^{(1)}(kR)} \right. \\ &\quad \left. = \frac{\left( h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR) \right)'}{\sqrt{R} h_{3/2}^{(1)}(kR)} \left[ h_{3/2}^{(1)}(kR) h_{3/2}^{(2)}(kR)' - h_{3/2}^{(1)}(kR)' h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] \right] \\ &= \frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R} h_{3/2}^{(1)}(kR)} W \left[ h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] \end{aligned}$$

con  $W$  el Wronskiano de las funciones de Hankel esféricas. Se tiene entonces que

$$\frac{kA_0 \sin(\theta)}{\sqrt{R} h_{3/2}^{(1)}(kR)} W \left[ h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR) \right] = -\frac{4\pi}{c} R \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta)$$

por lo que la constante será

$$A_0 = -\frac{4\pi R^{3/2} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} h_{3/2}^{(1)}(kR)}{\omega W[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]}$$

luego la función queda

$$F_<(r) = -\frac{4\pi R^{3/2} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} h_{3/2}^{(1)}(kR)}{\omega W[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]} [h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr)],$$

$$F_>(r) = -\frac{4\pi R^{3/2} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} h_{3/2}^{(1)}(kr)}{\omega W[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]} [h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR)]$$

y el potencial vector será

$$\vec{A}_<(r) = -\frac{4\pi}{\omega} \sqrt{\frac{R^3}{r}} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \left( \frac{h_{3/2}^{(1)}(kR) [h_{3/2}^{(1)}(kr) + h_{3/2}^{(2)}(kr)]}{W[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]} \right),$$

$$\vec{A}_>(r) = -\frac{4\pi}{\omega} \sqrt{\frac{R^3}{r}} \sigma \Omega_0 e^{-i\omega t} \sin(\theta) \left( \frac{h_{3/2}^{(1)}(kr) [h_{3/2}^{(1)}(kR) + h_{3/2}^{(2)}(kR)]}{W[h_{3/2}^{(1)}(kR), h_{3/2}^{(2)}(kR)]} \right)$$

Puesto que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , si  $r \gg R$ , el término que domina el campo es

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial [\sin(\theta) A]}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A)}{\partial r} \hat{\theta} \sim r^{-3/2}$$

y usando el gauge de Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  tal que  $\Psi = 0$ , el campo eléctrico queda

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Psi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \sim r^{-1/2}$$

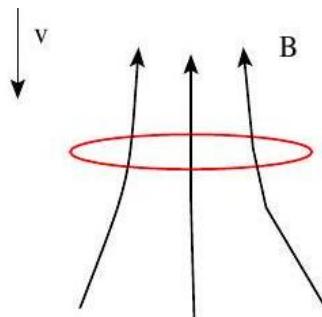
Ahora, la potencia radiada viene dada por la expresión

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$$

y centrándose en la magnitud,

$$S \simeq \frac{1}{r^{1/2}} \frac{1}{r^{3/2}} = \frac{1}{r^2}$$

luego la potencia cae como  $r^{-2}$  para  $r \gg R$ .



### 8.19 Anillo que cae en un campo magnético

Considere un anillo de radio  $a$  y resistencia  $R$  que cae en forma horizontal en un campo magnético vertical que varía con la altura  $\mathbf{B} = B(z)\hat{z}$ . Encuentre la ecuación de movimiento del anillo y su velocidad terminal. Si imponemos una corriente continua en el anillo a través de una batería, ¿puede este flotar?

**Solución:**

El flujo magnético a través del alambre viene dado por

$$\Phi(z) = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B(z)dA$$

luego su variación en el tiempo es

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d}{dt} \int B(z)dA \\ &= \frac{d}{dt} B(z) \int dA \\ &= \pi a^2 \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

y la fuerza electromotriz sobre el alambre al dejarlo caer en el campo será

$$\begin{aligned}\epsilon &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

Analizando la energía cinética y potencial gravitatorio, se obtiene el Lagrangiano

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{z})^2 - mgz$$

y aplicando la ecuación de Euler-Lagrange sobre la variable  $z$  se obtiene

$$L_z - \frac{d}{dt} L_{\dot{z}} = -mg - m\ddot{z} = 0$$

es decir,  $\ddot{z} + g = 0$ . Pero el sistema posee una resistencia que disipa energía debido al flujo que atraviesa el centro del alambre en forma de anillo, esto implica que el oscilador armónico contiene un término más (relacionado a la disipación), luego

$$\ddot{z} - \gamma \dot{z} + g = 0, \quad (8.55)$$

para algún coeficiente de fricción  $\gamma$ . Por otro lado, la variación temporal de la energía es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m(\dot{z})^2 + mgz \right] = m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z}$$

de manera que, si se reestructura la Ec. (8.55), se llega a que

$$\begin{aligned} 0 &= m\dot{z}\ddot{z} - \gamma m(\dot{z})^2 + mg\dot{z} \\ &= [m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z}] - \gamma m(\dot{z})^2 \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m(\dot{z})^2 + mgz \right] - \gamma m(\dot{z})^2 \end{aligned}$$

$$0 = P - \gamma m(\dot{z})^2 \quad (8.56)$$

donde  $P$  es la potencia radiada por el sistema. Por otro lado, es también cierto que

$$P = IV = \left( \frac{\epsilon}{R} \right) \epsilon = \frac{\epsilon^2}{R}$$

y, puesto que

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2}{c} \frac{dB}{dz} \dot{z} \end{aligned}$$

la potencia disipada será

$$P = \frac{\epsilon^2}{R} = \frac{\pi^2 a^4}{R c^2} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2$$

Reemplazando en la Ec. (8.56) se obtiene

$$\frac{\pi^2 a^4}{R c^2} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2 - \gamma m(\dot{z})^2 = 0$$

luego el coeficiente de fricción es

$$\gamma = \frac{\pi^2 a^4}{R m c^2} \left( \frac{dB}{dz} \right)^2$$

De esta manera, reemplazando en la Ec. (8.55), se obtiene la ecuación de movimiento del anillo

$$\ddot{z} + \frac{\pi^2 a^4}{R m c^2} \left( \frac{dB}{dz} \right)^2 \dot{z} + g = 0.$$

Para la velocidad terminal, se tiene que  $\ddot{z} = 0$ , luego

$$\frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left( \frac{dB}{dz} \right)^2 \dot{z} + g = 0$$

y despejando  $\dot{z}$  se concluye

$$\dot{z} = -\frac{Rmgc^2}{\pi^2 a^4} \left( \frac{dB}{dz} \right)^{-2}.$$

Al añadir una corriente debido a una batería, la nueva potencia radiada por el alambre será

$$\begin{aligned} P &= I\varepsilon \\ &= \frac{(\varepsilon + \varepsilon_0)}{R} \varepsilon, \end{aligned}$$

con  $\varepsilon_0$  el voltaje añadido por la batería al circuito. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P &= \frac{\varepsilon^2}{R} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{R} \\ &= \frac{\pi^2 a^4}{Rc^2} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2 - \frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{Rc} \frac{dB}{dz} \dot{z} \end{aligned}$$

luego la Ec. (8.56) queda

$$\frac{\pi^2 a^4}{Rc^2} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 (\dot{z})^2 - \frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{Rc} \frac{dB}{dz} \dot{z} - \gamma m(\dot{z})^2 = 0$$

obteniéndose el coeficiente de fricción

$$\gamma = \frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{Rmc \dot{z}} \frac{dB}{dz} - \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2$$

y reemplazando en la Ec. (8.55) se llega a la ecuación de movimiento del alambre

$$\ddot{z} - \left[ \frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{Rmc \dot{z}} \frac{dB}{dz} - \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \right] \dot{z} + g = 0$$

o, lo que es equivalente,

$$\ddot{z} - \frac{\pi a^2}{Rmc} \frac{dB}{dz} \varepsilon_0 + \frac{\pi^2 a^4}{Rmc^2} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \dot{z} + g = 0$$

Para que el anillo levite debe cumplirse que  $\ddot{z} = \dot{z} = 0$ , así

$$-\frac{\pi a^2}{Rmc} \frac{dB}{dz} \varepsilon_0 + g = 0$$

por lo que la condición sobre el voltaje entregado por la batería al circuito, tal que el anillo levite, vendrá dada por

$$\varepsilon_0 = \frac{Rmgc}{\pi a^2} \left( \frac{dB}{dz} \right)^{-1}$$

## 8.20 Circuito de corriente circular

Un circuito de corriente circular de radio a acarrea una corriente  $I$ . Este es colocado en el plano  $x - y$  con su centro en el origen.

- a) Muestre que la única componente del potencial vector distinta de cero es la componente  $\phi$ . Demuestre que  $A_\phi$  se puede escribir de la siguiente forma

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) dk$$

donde  $\rho_< = \min(\rho, a)$  y  $\rho_> = \max(\rho, a)$ .

- b) Muestre que una forma alternativa de escribir  $A_\phi$  es

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk$$

- c) Encuentre expresiones integrales para las componentes de la inducción magnética, utilizando los resultados obtenidos en a) y b). Calcule explícitamente las componentes de  $B$  en el eje  $\hat{z}$ , desarrollando las integrales necesarias. Hint: use que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{I_1(k\rho)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J_1(k\rho)}{\rho} = \frac{k}{2} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(kz) K_0(k\rho) dk = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

### Solución:

- a) De las series de Fourier se escribe la expansión en coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \cos[k(z - z')] \left[ \frac{I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) \right] dk$$

y usando que la densidad de corriente es

$$\begin{aligned} \vec{J} &= I\delta(z')\delta(\rho' - a)\phi' \\ &= I\delta(z')\delta(\rho' - a)[- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \end{aligned}$$

se obtiene el potencial vector

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}}{|r - r'|} d^3 \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{I\delta(z')\delta(\rho' - a)}{|r - r'|} [- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \rho' dz' d\phi' d\rho' \\ &= \frac{4I}{\pi c} \int_0^\infty \rho' \delta(\rho' - a) d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \left[ \int_0^\infty \cos[k(z - z')] \left\{ \frac{I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>)}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) dk \right\} [- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \delta(z') dz' \right. \\ &= \frac{4I}{\pi c} \int_0^\infty \rho' \delta(\rho' - a) d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \left[ \int_0^\infty \cos[k(z - z')] \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) \right. \\ &\quad \left. K_m(k\rho_>) dk \right] [- \sin(\phi')\hat{x} + \cos(\phi')\hat{y}] \delta(z') dz', \end{aligned}$$

donde pasó a omitirse la suma de índice  $m$  y se usó que

$$\int_0^{2\pi} \cos[k(z-z')] I_0(k\rho_{<}) K_0(k\rho_{>}) \sin(\phi') d\phi' = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos[k(z-z')] I_0(k\rho_{<}) K_0(k\rho_{>}) \cos(\phi') d\phi' = 0$$

es decir, la integral sobre el ángulo  $\phi'$  del término  $m=0$  en la expansión por series de Fourier es siempre cero. Se tiene entonces para la componente  $\hat{x}$  que

$$A_x = -\frac{4Ia\hat{x}}{\pi c} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos[k(z-z')] \cos[m(\phi-\phi')] I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) dk \sin(\phi') \delta(z') dz'$$

$$= -\frac{4Ia\hat{x}}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) \sin(\phi) \delta_{m,1} I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) dk$$

donde se usa que

$$\int_0^{2\pi} \cos[m(\phi-\phi')] \sin(\phi') d\phi' = \pi \sin(\phi) \delta_{m,1}$$

luego  $A_x \neq 0$  solo para  $m=1$ , por lo que se escribe

$$A_x(\rho, \phi, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>}) dk [-\sin(\phi) \hat{x}]$$

De forma análoga se deduce que

$$A_y(\rho, \phi, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>}) dk [\cos(\phi) \hat{y}],$$

pudiendo derivarse así la expresión para el potencial vector

$$\vec{A}(\rho, \phi, z) = A_x(\rho, \phi, z) + A_y(\rho, \phi, z)$$

$$= \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>}) dk [-\sin(\phi) \hat{x} + \cos(\phi) \hat{y}]$$

$$= \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>}) dk \hat{\phi}$$

es decir, la única componente que sobrevive es en la dirección  $\hat{\phi}$ , dada por

$$A_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{4Ia}{c} \int_0^{\infty} \cos(kz) I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>}) dk$$

b) Otra forma válida de expandir la función de Green en coordenadas cilíndricas (ver Problema 3.14 Jackson) es

$$\frac{1}{|r-r'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k(z_{>} - z_{<)}}$$

y usando que la densidad de corriente es

$$\vec{J} = I \delta(z') \delta(\rho' - a) \phi'$$

$$= I \delta(z') \delta(\rho' - a) [-\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}]$$

se obtiene el potencial vector

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}}{|r - r'|} d^3 \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{I \delta(z') \delta(\rho' - a)}{|r - r'|} [-\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}] \rho' dz' d\phi' d\rho' \\ &= \frac{I}{c} \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \left[ \int_0^\infty e^{im(\phi - \phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k(z>-z<)} \right] \delta(z') \delta(\rho' - a) \\ &\quad [-\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}] dz'\end{aligned}$$

donde pasó a omitirse la suma de índice  $m$ . Se tiene entonces para la componente  $\hat{x}$  que

$$\begin{aligned}A_x &= -\frac{Ia\hat{x}}{c} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{im(\phi - \phi')} J_m(k\rho) J_m(ka) e^{-k(z>-z<)} dk \sin(\phi') \delta(z') dz' \\ &= -\frac{Ia\hat{x}}{c} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\infty \left[ J_0(k\rho) J_0(ka) + 2 \sum_{m=1}^\infty \cos[m(\phi - \phi')] J_m(ka) J_m(k\rho) \right] \sin(\phi') e^{-k|z|} dk \\ &= -\frac{2\pi Ia\hat{x}}{c} \int_0^\infty \sin(\phi) \delta_{m,1} J_m(ka) J_m(k, \rho) e^{-k|z|} dk \\ &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(ka) dk [-\sin(\phi) \hat{x}]\end{aligned}$$

en la cual se usó que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-k|z|} J_0(k\rho) J_0(ka) \sin(\phi') d\phi' &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos[m(\phi - \phi')] \sin(\phi') d\phi' &= \pi \sin(\phi) \delta_{m,1}\end{aligned}$$

y los resultados para  $z > 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{-k(z>-z<)} \delta(z') dz' &= \int_{-\infty}^z e^{-k(z-z')} \delta(z') dz' + \int_z^\infty e^{-k(z'-z)} \delta(z') dz' \\ &= e^{-k(z-0)} + 0 \\ &= e^{-kz}\end{aligned}$$

y para  $z < 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{-k(z>-z<)} \delta(z') dz' &= \int_{-\infty}^z e^{-k(z-z')} \delta(z') dz' + \int_z^\infty e^{-k(z'-z)} \delta(z') dz' \\ &= 0 + e^{-k(0-z)} \\ &= e^{kz}\end{aligned}$$

De forma análoga y mediante el resultado

$$\int_0^{2\pi} e^{-k|z|} J_0(k\rho) J_0(ka) \cos(\phi') d\phi' = 0$$

se llega, para la componente  $\hat{y}$  del potencial vector, a que

$$A_y(\rho, \phi, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk [\cos(\phi) \hat{y}]$$

pudiendo derivarse así la expresión para el potencial vector

$$\begin{aligned} \vec{A}(\rho, \phi, z) &= A_x(\rho, \phi, z) + A_y(\rho, \phi, z) \\ &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk [-\sin(\phi) \hat{x} + \cos(\phi) \hat{y}] \\ &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk \hat{\phi} \end{aligned}$$

es decir, la única componente que sobrevive es en la dirección  $\hat{\phi}$ , dada por

$$A_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho) dk$$

c) Tomando el rotor para la expresión derivada en a) con  $\rho < a$  se obtiene  
y, puesto que solo es de interés el campo magnético en la dirección  $\hat{z}$ , haciendo tender  $\rho \rightarrow 0$  y  
usando el hint del enunciado, se obtiene

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{2Ia}{c} \int_0^\infty k^2 \sin(kz) K_1(ka) dk, \\ B_\phi &= 0, \\ B_z &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty k \cos(kz) K_1(ka) dk. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_\rho &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{4Ia}{\rho c} \int_0^\infty k \sin(kz) I_1(k\rho) K_1(ka) dk, \\ B_\phi &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ &= 0, \\ B_z &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left( A_\phi + \rho \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I_1(k\rho) K_1(ka) dk + \rho \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) I'_1(k\rho) K_1(ka) dk \right] \\ &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \cos(kz) \frac{I_1(k\rho)}{\rho} K_1(ka) dk + \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty \left( \frac{k}{2} \right) \cos(kz) [I_0(k\rho) + I_2(k\rho)] K_1(ka) dk \end{aligned}$$

Para encontrar  $B_z$ , integrando por partes y usando el hint del enunciado se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty k \cos(kz) K_1(ka) dk &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \sin(kz) K_1(ka) dk \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \sin(kz) \left[ -\frac{1}{a} \frac{dK_0(ka)}{dk} \right] dk \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{1}{a} \sin(kz) K_0(ka) \Big|_0^\infty + \frac{z}{a} \int_0^\infty \cos(kz) K_0(ka) dk \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{z}{a} \left( \frac{2}{\pi \sqrt{a^2 + z^2}} \right) \right] \\
&= \frac{a\pi}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

luego el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{4Ia}{c} \int_0^\infty k \cos(kz) K_1(ka) dk \\
&= \frac{2\pi Ia^2}{c(a^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

De forma análoga, tomando el rotor de la expresión derivada en b) se obtiene y, puesto que solo es de interés el campo magnético en la dirección  $\hat{z}$ , haciendo tender  $\rho \rightarrow 0$  y usando el hint del enunciado, se obtiene

$$\begin{aligned}
B_\rho &= \frac{\pi Ia}{c} \int_0^\infty k^2 e^{-k|z|} J_1(ka) \operatorname{sgn}(z) dk \\
B_\phi &= 0 \\
B_z &= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty k e^{-k|z|} J_1(ka) dk \\
B_\rho &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \\
&= \frac{2\pi Ia}{\rho c} \int_0^\infty k \operatorname{sgn}(kz) e^{-k|z|} J_1(k\rho) J_1(ka) dk \\
B_\phi &= \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\
&= 0, \\
B_z &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \\
&= \frac{1}{\rho} \left( A_\phi + \rho \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(k\rho) J_1(ka) dk + \rho \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty k e^{-k|z|} J'_1(k\rho) J_1(ka) dk \right] \\
&= \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty e^{-k|z|} \frac{J_1(k\rho)}{\rho} J_1(ka) dk + \frac{2\pi Ia}{c} \int_0^\infty \left( \frac{k}{2} \right) e^{-k|z|} [J_0(k\rho) - J_2(k\rho)] J_1(ka) dk
\end{aligned}$$

Para encontrar  $B_z$ , integrando por partes y usando el hint del enunciado se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty ke^{-k|z|}J_1(ka)dk &= -\operatorname{sgn}(z)\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty e^{-ik|z|}J_1(ka)dk \\
&= -\operatorname{sgn}(z)\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty e^{-k|z|}\left[-\frac{1}{a}\frac{dJ_0(ka)}{dk}\right]dk \\
&= -\operatorname{sgn}(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{1}{a}e^{-k|z|}J_0(ka)\Big|_0^\infty - \frac{|z|}{a}\int_0^\infty e^{-k|z|}J_0(ka)dk\right] \\
&= -\operatorname{sgn}(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{a} - \frac{|z|}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right] \\
&= \operatorname{sgn}(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{|z|}{a}\right]\sqrt{a^2+z^2} \\
&= \frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}},
\end{aligned}$$

luego el campo magnético es

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{2\pi Ia}{c}\int_0^\infty ke^{-k|z|}J_1(ka)dk \\
&= \frac{2\pi Ia^2}{c(a^2+z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

lo cual confirma que ambas expresiones para el potencial vector son equivalentes.

## 8.21 Fem producida por un circuito

Calcular la fem producida por un circuito.

Un elemento de alambre de largo orientado  $d\vec{l}$  se mueve con velocidad  $\vec{u}$  en un campo magnético  $\vec{B}$ . Muestre que la fem producida por el movimiento está dada por

$$d\varepsilon = \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

### Solución:

Si se tiene un conductor moviéndose en un campo magnético uniforme, las cargas libres dentro del conductor sienten una atracción proporcional a  $\vec{u} \times \vec{B}$ , en particular, sienten un campo eléctrico efectivo

$$\vec{E}_{eff} = \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}$$

La fem sobre un circuito está dada por

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ &= -\frac{1}{c} \int_S \left( \frac{d\vec{B}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

y reemplazando la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_{eff} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

se obtiene la expresión

$$\varepsilon = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}_{eff}) \cdot d\vec{A}$$

Ahora, del teorema de Stokes se escribe

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \oint_{\partial S} \vec{E}_{eff} \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{\partial S} \left( \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

y puesto que no hay campo eléctrico externo, se concluye que

$$\varepsilon = \oint_{\partial S} \left( \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

Finalmente, tomando una diferencia infinitesimal, se llega a la expresión deseada

$$d\varepsilon = \left( \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

## 8.22 Fem producida por cascarón esférico

Un cascarón esférico conductor de radio a rota con velocidad angular  $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$  en un campo magnético uniforme descrito por  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ . Calcule la fem producida entre un polo y un punto en el círculo ecuatorial.

**Solución:**

En la superficie de la esfera, la velocidad de un elemento con carga  $dq$  está dada por

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \omega_0 \hat{z} \times a [\sin(\theta) \cos(\phi) \hat{x} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{y} + \cos(\theta) \hat{z}] \\ &= a \omega_0 [\sin(\theta) \cos(\phi) \hat{y} - \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{x}]\end{aligned}$$

y usando la expresión para la fem

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \left( \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

con la curva parametrizada sobre la superficie

$$l(\theta) = a\hat{r} = a[\sin(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z}]$$

se obtiene

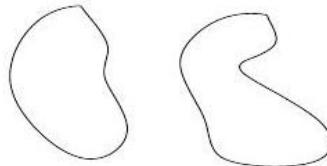
$$\begin{aligned} \varepsilon &= \oint_0^{\pi/2} \left( \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot d[l(\theta)] \\ &= \oint_0^{\pi/2} \left( \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot l'(\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} (\vec{e}_{\vec{u}} \times \hat{z}) \cdot [\cos(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \cos(\theta)\sin(\phi)\hat{y} - \sin(\theta)\hat{z}] d\theta \\ &= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} [\sin(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{y}] \cdot [\cos(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \cos(\theta)\sin(\phi)\hat{y}] d\theta \\ &= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} [\sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\phi) + \sin(\theta)\cos(\theta)\sin^2(\phi)] d\theta \\ &= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{c} \oint_0^{\pi/2} \sin(\theta)\cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2 \omega_0 B_0}{2c}, \end{aligned}$$

es decir, la fem producida por el cascarón esférico en rotación es

$$\boxed{\varepsilon = \frac{a^2 \omega_0 B_0}{2c}}$$

### 8.23 Línea de transmisión

Tenemos una linea de trasmisión, al cual consiste en dos conductores perfectos de forma arbitraria, pero de sección constante (la misma forma en z), ver figura. Demuestre que la inductancia por unidad de largo L y la capacitancia por unidad de largo esta dada por  $LC = \mu\varepsilon/c^2$ . (Es importante acordarse de la discusión sobre campos magnéticos cerca de conductores perfectos).



**Solución:**

Puesto que las inductancias están asociadas a campos magnéticos, la energía almacenada debido a una inductancia en un campo magnético viene dada por

$$W_B = \frac{1}{2}LI^2$$

de igual manera, los capacitadores están asociados a campos eléctricos, luego la energía almacenada debido a un capacitor será

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Por otro lado, considerando las densidades de corriente

$$\vec{J}_1 = \sigma_1(x') \vec{v}_1 \quad \vec{J}_2 = \sigma_2(x') \vec{v}_2$$

se obtiene el potencial vector

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{J(x')}{|x-x'|} d^3x' \\ &= \frac{1}{c} \int_{S_1} \frac{J(x')}{|x-x'|} d^3x' + \frac{1}{c} \int_{S_2} \frac{J(x')}{|x-x'|} d^3x' \end{aligned}$$

Ahora, el hecho de que ambos conductores sean perfectos, permite afirmar que  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$ , pero al ser paralelos, se deduce que  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v} = v\hat{z}$ , llegándose a la expresión

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\hat{z}}{c} \int_{S_1} \frac{\sigma_1(x') v}{|x-x'|} d^3x' + \frac{\hat{z}}{c} \int_{S_2} \frac{\sigma_2(x') v}{|x-x'|} d^3x' \\ &= \frac{v\hat{z}}{c} \int_{S_1} \frac{\sigma_1(x')}{|x-x'|} d^3x' + \frac{v\hat{z}}{c} \int_{S_2} \frac{\sigma_2(x')}{|x-x'|} d^3x' \\ &= \frac{v}{c} (\Phi_1 + \Phi_2) \hat{z} \\ &= \frac{v}{c} \Phi \hat{z} \end{aligned}$$

con  $\Phi$  el potencial eléctrico. Así se obtiene el campo magnético

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \frac{v}{c} (\partial_y \Phi \hat{x} - \partial_x \Phi \hat{y}) \end{aligned}$$

y, puesto que hay simetría en el eje  $z$  para el potencial, se obtiene el campo eléctrico

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi \\ &= -(\partial_x \Phi \hat{x} + \partial_y \Phi \hat{y}) \end{aligned}$$

Con esto, es inmediato que para el campo magnético

$$\begin{aligned}
|\vec{B}|^2 &= \vec{B} \cdot \vec{B} \\
&= \frac{v}{c} (\partial_y \Phi \hat{x} - \partial_x \Phi \hat{y}) \cdot \frac{v}{c} (\partial_y \Phi \hat{x} - \partial_x \Phi \hat{y}) \\
&= \frac{v^2}{c^2} \left[ (\partial_y \Phi)^2 \hat{x} \cdot \hat{x} - 2(\partial_x \Phi)(\partial_y \Phi) \hat{x} \cdot \hat{y} + (\partial_x \Phi)^2 \hat{y} \cdot \hat{y} \right] \\
&= \frac{v^2}{c^2} \left[ (\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2 \right]
\end{aligned}$$

y para el campo eléctrico

$$\begin{aligned}
|\vec{E}|^2 &= \vec{E} \cdot \vec{E} \\
&= (\partial_x \Phi \hat{x} + \partial_y \Phi \hat{y}) \cdot (\partial_x \Phi \hat{x} + \partial_y \Phi \hat{y}) \\
&= (\partial_x \Phi)^2 \hat{x} \cdot \hat{x} + 2(\partial_x \Phi)(\partial_y \Phi) \hat{x} \cdot \hat{y} + (\partial_y \Phi)^2 \hat{y} \cdot \hat{y} \\
&= (\partial_x \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2
\end{aligned}$$

concluyéndose que

$$|\vec{B}|^2 = \frac{v^2}{c^2} |\vec{E}|^2$$

Ahora, la energía almacenada en el campo magnético es concluyéndose la relación

$$\frac{W_B}{W_E} = \frac{1}{\mu \epsilon} \frac{v^2}{c^2}.$$

$$\begin{aligned}
W_B &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{H}^* d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \int \vec{B} \cdot (\mu \vec{H}^*) d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \int \vec{B} \cdot \vec{B}^* d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \int |\vec{B}|^2 d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{v^2}{c^2} \int |\vec{E}|^2 d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{v^2}{c^2} \int \vec{E} \cdot \vec{E}^* d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2} \int \vec{E} \cdot (\epsilon \vec{E}^*) d^3x \\
&= \frac{1}{8\pi\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2} \int \vec{E} \cdot \vec{D}^* d^3x \\
&= \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{v^2}{c^2} W_E,
\end{aligned}$$

Reemplazando los valores de  $W_B$  y  $W_E$  se obtiene

$$\frac{2LI^2C}{2Q^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon} \frac{v^2}{c^2}$$

e identificándose  $I/Q = v$ , se sigue

$$LC = \frac{1}{\mu\varepsilon} \frac{1}{c^2},$$

pero esta velocidad  $c$  fue siempre la velocidad de la luz en el material, es decir,

$$\bar{c} = \frac{c}{\mu\varepsilon},$$

concluyéndose que

$$LC = \frac{1}{\mu\varepsilon} \left( \frac{\mu\varepsilon}{c} \right)^2$$

$$LC = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}$$

que es lo que se deseaba demostrar.

## 8.24 Suma de velocidades paralelas

Muestre explícitamente que dos transformaciones de Lorentz sucesivas en la misma dirección son equivalentes a una sola transformación de Lorentz con una velocidad

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)}$$

Esta es una forma alternativa de derivar la ley de suma de velocidades paralelas.

### Solución:

Las transformaciones de Lorentz son:

$$x'_0 = \gamma_1 (x_0 - \beta_1 x_1) \quad (8.57)$$

$$x'_1 = \gamma_1 (x_1 - \beta_1 x_0) \quad (8.58)$$

donde

$$\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - v_1^2/c^2}, \quad \beta_1 = v_1/c \quad \text{y } x_0 = ct$$

El otro sistema será  $K''$  y lo definimos viajando a una velocidad  $v_2$  respecto al sistema  $K$ , entonces la transformación de Lorentz entre estos dos sistemas es:

$$x''_0 = \gamma_2 (x'_0 - \beta_2 x'_1) \quad (8.59)$$

$$x_1'' = \gamma_2 (x_1' - \beta_2 x_0') \quad (8.60)$$

donde  $\gamma_2 = 1/\sqrt{1-v_2^2/c^2}$ , y  $\beta_2 = v_2/c$

Ahora reemplazando (8.57) en (8.59)

$$x_0'' = \gamma_2 (\gamma_1 (x_0 - \beta_1 x_1) - \beta_2 \gamma_1 (x_1 - \beta_1 x_0))$$

Ordenando los términos

$$x_1'' = \gamma_2 \gamma_1 ((1 + \beta_2 \beta_1) x_1 - (\beta_1 + \beta_2) x_0)$$

Similarmente (8.58) en (8.60)

$$x_1'' = \gamma_2 (\gamma_1 (x_1 - \beta_1 x_0) - \beta_2 \gamma_1 (x_0 - \beta_1 x_1))$$

$$x_0'' \gamma_2 \gamma_1 ((1 + \beta_2 \beta_1) x_0 - (\beta_1 + \beta_2) x_1)$$

Ahora si identificamos que el sistema  $K''$  viaja a una velocidad  $v$  en relación con el sistema  $K'$ , entonces la transformación de Lorentz que relaciona a los dos sería:

$$x_0'' = \gamma (x_0 - \beta x_1)$$

$$x_1'' = \gamma (x_1 - \beta x_0)$$

donde  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  y  $\beta = v/c$

Comparando esto con la doble transformación, vemos que para que sean equivalentes, los coeficientes deben coincidir.

$$\gamma_2 \gamma_1 (1 + \beta_2 \beta_1) = \gamma \quad \gamma_2 \gamma_1 (\beta_1 + \beta_2) = \beta \gamma \quad \gamma_2 \gamma_1 (1 + \beta_2 \beta_1) = \gamma \quad \gamma_2 \gamma_1 (\beta_1 + \beta_2) = \beta \gamma$$

Tomemos el primero, expandamos y resolvamos para  $v$ .

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)$$

$$\frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{1}{1-v_2^2/c^2} \frac{1}{1-v_1^2/c^2} \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)^2$$

$$1-v^2/c^2 = \frac{(1-v_2^2/c^2)(1-v_1^2/c^2)}{\left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)^2}$$

$$v = \sqrt{c^2 - \frac{(1-v_2^2/c^2)(1-v_1^2/c^2)c^2}{\left(1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}\right)^2}}$$

$$v = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - v_1^2 - v_2^2 + v_1^2 v_2^2/c^2)}{1 + v_1^2 v_2^2/c^4 + 2v_1 v_2/c^2}}$$

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2/c^2)}$$

## 8.25 Escalares de Lorentz

- (a) Exprese los escalares de Lorentz  $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ ,  $\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$  y  $\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}$  en términos de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . ¿Existen otros invariantes cuadráticos en las intensidades de campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ ?
- (b) ¿Es posible tener un campo electromagnético que aparezca como un campo puramente eléctrico en un sistema inercial y como un campo puramente magnético en algún otro sistema inercial? ¿Cuáles son los criterios impuestos a  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  de modo que haya un sistema inercial en el que no haya campo eléctrico?
- (c) Para medios macroscópicos,  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  forman el tensor de campo  $F^{\alpha\beta}$  y  $\mathbf{D}, \mathbf{H}$  el tensor  $G^{\alpha\beta}$ . ¿Qué otras invariantes se pueden formar? ¿Cuáles son sus expresiones explícitas en términos de los campos de 3-vectores?

**Solución:**

(a) El producto interno de dos 4-tensores debería darnos un escalar de Lorentz, es decir, un escalar que es el mismo en todos los sistemas. Sabemos que:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (8.61)$$

y

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix} \quad (8.62)$$

Los diversos productos internos son:

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}F^{\mu\nu}$$

Como  $g_{\alpha\beta} = 0$  para  $\alpha \neq \beta$

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}F^{\alpha\beta}$$

Separando las componentes espaciales de las temporales y usando

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 :$$

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F^{00}g_{00}g_{00}F^{00} + \sum_{\beta=1}^3 F^{0\beta}g_{00}g_{\beta\beta}F^{0\beta} + \sum_{\alpha=1}^3 F^{\alpha 0}g_{\alpha\alpha}g_{00}F^{\alpha 0} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 F^{\alpha\beta}g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F^{00}F^{00} - \sum_{\beta=1}^3 F^{0\beta}F^{0\beta} - \sum_{\alpha=1}^3 F^{\alpha 0}F^{\alpha 0} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 F^{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

reemplazando cada componente según (8.61) y agrupando los términos se obtiene:

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2)$$

De manera similar utilizando (8.62) encontramos:

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

y

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} = -2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2)$$

No hay otros invariantes cuadráticos en las intensidades de campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  porque no hay otra manera de obtener el producto interno de los tensores de intensidad de campo.

(b) El hecho de que el campo electromagnético obedezca a transformaciones de Lorentz significa que el campo eléctrico y el magnético no pueden existir por separado. Lo que parece un campo eléctrico puro en un sistema se verá como un campo eléctrico y magnético en otro sistema. Entonces, las preguntas son: si tenemos un campo puramente eléctrico en un sistema inercial, ¿podemos encontrar un sistema inercial donde aparezca un campo puramente magnético? Veamos la transformación:  $F'^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta F^{\gamma\delta}$  donde el cuadro preparado se mueve a una velocidad  $\mathbf{v}$  relativa al sistema no primado. Luego los campos transformados según Jackson Ec. (11.149)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{B})\end{aligned}$$

En el sistema no primado, tenemos un campo puramente eléctrico,  $\mathbf{E} \neq 0$  y  $\mathbf{B} = 0$ . Las ecuaciones se convierten en:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma\mathbf{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= -\gamma\beta \times \mathbf{E}\end{aligned}$$

El sistema especial donde el campo puramente eléctrico se ha convertido en un campo puramente magnético (si existe) requeriría  $\mathbf{E}' = 0$ , lo que nos lleva a:

$$\gamma\mathbf{E} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E})$$

$$\hat{\mathbf{E}}\mathbf{E} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \beta\hat{\beta}((\beta\hat{\beta}) \cdot (\hat{\mathbf{E}}\mathbf{E}))$$

con

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{v}} \quad y \quad 1 = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{v^2}{c^2}$$

$$\implies v = c$$

Esto nos dice que el único sistema con un campo magnético puro es el sistema que viaja a la velocidad de la luz en relación con el sistema inicial. Pero nada puede ir a la velocidad de la luz que inicialmente se encuentra a una velocidad diferente. Por lo tanto, nunca se puede alcanzar este sistema y nunca se puede obtener un campo puramente magnético a partir de uno puramente eléctrico cambiando sistemas.

Veamos otra forma de abordar el problema. Acabamos de demostrar que  $|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2 = C$  es igual en todos los sistemas. En el sistema no primado,  $\mathbf{B} = 0$ , de modo que  $C = -|\mathbf{E}|^2$ . En el sistema especial (primado) esperamos encontrar  $\mathbf{E}' = 0$  de modo que  $C = |\mathbf{B}'|^2$ . Cualquier  $C$  constante distinta de cero no puede ser puramente positiva y puramente negativa al mismo tiempo (si  $C$  es cero, no tenemos campos en ningún sistema).

Para que no haya campo eléctrico en un sistema ( $\mathbf{E}' = 0$ ), el campo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  El campo en todos los demás sistemas debe ser:

$$0 = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E})$$

$$\beta \times \mathbf{B} = -\mathbf{E} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E})$$

(c) Para campos en medios, tenemos:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \text{ y } G^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$$

Los posibles productos internos que producen escalares invariantes de Lorentz son:

$$G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = 2(|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{D}|^2)$$

$$G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = -2(|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{D}|^2)$$

$$G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = -4\mathbf{D} \cdot \mathbf{H}$$

$$F^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = 2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = -2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{H})$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = -2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

$$F^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = -2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{H})$$

Esto agota todas las combinaciones posibles de  $F, G$  y sus tensores duales. Debería ser obvio que muchas de las invariantes de Lorentz resultantes son redundantes. Los invariantes de Lorentz en la parte (c) y la parte (a) se pueden condensar (omitiendo las constantes generales triviales):

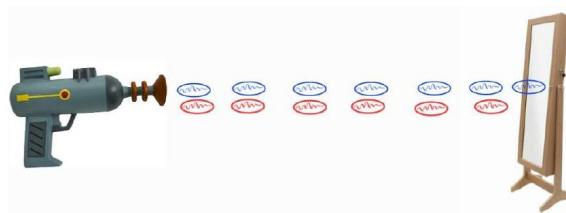
$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{H}, \quad |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2, \quad |\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{D}|^2, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$$

### 8.26 Espejo relativista

Considere un espejo de masa  $M$  y superficie  $S$ , que se mueve a una velocidad cercana a la velocidad de la luz. Como método de propulsión iluminaremos este espejo con un potente láser en forma normal a la superficie, tal que el haz de luz reflejado se propague en la dirección opuesta a la del haz incidente.

- Muestre que el campo que rebota del espejo es pequeño a velocidades relativistas en el sistema del laboratorio.
- En el sistema inercial, que está instantáneamente en reposo con el espejo, encuentre la fuerza que siente el espejo. Transforme esta fuerza al sistema del laboratorio y demuestre que para velocidades relativistas  $\beta \approx 1$  obtenemos  $\gamma \sim t^{1/3}$ .

**Solución:**



- El sistema  $K'$  ubicado en el espejo, se mueve con velocidad  $v\hat{x}$  respecto al sistema  $K$ . Los campos en el sistema  $K$  son:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, t) &= E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{y} \\ \mathbf{B}(x, t) &= B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z}\end{aligned}\tag{8.63}$$

y si asumimos que viajan por el vacío, para satisfacer las ecuaciones de Maxwell necesitamos que  $k = \omega/c$  y  $B_0 = E_0$ . La transformación para los campos en  $K'$  es:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \beta(\beta \cdot \mathbf{B})\end{aligned}$$

Como el láser va en  $\hat{x} \implies \beta = \beta\hat{x}$

$$\implies \beta \cdot \mathbf{E} = \beta \cdot \mathbf{B} = 0$$

Los campos en  $K'$  quedan:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E})\end{aligned}$$

y usando la Ec. (8.63) nos queda:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \gamma[(E_0 \cos(kx - \omega t) - \beta E_0 \cos(kx - \omega t))] \hat{y} \\
\mathbf{E}' &= \gamma(1 - \beta)[E_0 \cos(kx - \omega t)] \hat{y} \\
\mathbf{E}' &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{E} \\
\mathbf{B}' &= \gamma(B_0 \cos(kx - \omega t) - \beta E_0 \cos(kx - \omega t)) \hat{z} \\
\mathbf{B}' &= \gamma(1 - \beta)[E_0 \cos(kx - \omega t)] \hat{z} \\
\mathbf{B}' &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{B}
\end{aligned}$$

Luego, el láser rebota y por lo tanto el sentido cambia, y eso significa que cambia el signo de la velocidad  $v\hat{x} \rightarrow -v\hat{x}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \gamma(1 + \beta)\mathbf{E} \\
\mathbf{B}' &= \gamma(1 + \beta)\mathbf{B}
\end{aligned}$$

Y finalmente debemos transformar los campos al sistema del laboratorio  $K$ , que se obtiene al realizar la transformación inversa con  $\beta \rightarrow -\beta$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{E}' \\
\mathbf{B} &= \gamma(1 - \beta)\mathbf{B}' 
\end{aligned}$$

Si el espejo se mueve a velocidad cercana a la velocidad de la luz entonces  $\gamma \gg 1$  y  $\beta \sim 1$ . Y por tanto los campos que rebotan del espejo en el sistema de laboratorio a velocidades relativistas son pequeños:

$$\boxed{\mathbf{E} \ll 1 \quad \mathbf{B} \ll 1.}$$

b) La fuerza en el sistema  $K'$  es:

$$F' = \frac{dp}{dt}$$

donde el cambio de momento en el espejo está dado por el cambio de momento de los fotones. Luego la energía de los fotones es:

$$\begin{aligned}
E &= \omega' = pc \\
\implies p &= \frac{\omega'}{c}
\end{aligned}$$

si consideramos  $N$  fotones

$$p = \frac{N\omega'}{c}$$

La fuerza queda:

$$F' = \frac{d}{dt} \left( \frac{N\omega'}{c} \right)$$

Sea  $I$  la intensidad de partículas:

$$I = \frac{N}{t}$$

$$\Rightarrow F' = \frac{d}{dt} \left( \frac{It\omega'}{c} \right)$$

y como  $\omega'$  es la frecuencia Doppler, la fuerza que siente el espejo en el sistema inercial es:

$$F' = \frac{I}{c} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \omega$$

Transformando la fuerza al sistema  $K$  del laboratorio

$$F = \gamma (F' - \beta^2 F')$$

$$F = \gamma F' (1 - \beta^2)$$

$$F = \frac{\gamma I \omega}{c} \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} (1 - \beta^2).$$

Sabemos que el láser encontrará al espejo cuando se cumpla

$$ct = \lambda + vt$$

$$\Rightarrow (c-v)t = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_f} = \frac{\lambda}{(c-v)f_i}$$

$$\Rightarrow f_f = \frac{c-v}{c} f_i = \frac{c-\beta c}{c} f_i$$

$$f_f = (1-\beta) f_i$$

Por otro lado si consideramos la variación del momento de un fotón:

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{p_f - p_i}{t} = \frac{-hf_f/c - (hf_i/c)}{\frac{\lambda}{c-v}} = \frac{-hf_f/c - (hf_i/c)}{\frac{c}{c-\beta c} \frac{1}{f_i}}$$

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{-hf_f/c - (hf_i/c)}{\frac{1}{1-\beta c} \frac{1}{f_i}} = \frac{-\frac{h}{c}(1-\beta)f_i - \frac{hf_i}{c}}{\frac{1}{(\beta-1)} \frac{1}{f_i}}$$

$$\frac{dp}{dt} \approx \left[ -\frac{h}{c}(1-\beta)f_i - \frac{hf_i}{c} \right] (1-\beta)f_i$$

$$\frac{dp}{dt} \approx \left[ -\frac{h}{c}(1-\beta)^2 f_i^2 - \frac{h}{c}(1-\beta)f_i^2 \right] \quad (8.64)$$

Luego como  $\beta \rightarrow 1$  entonces

$$(1-\beta)^2 \ll (1-\beta)$$

Nos quedamos entonces con los términos a primer orden en (8.64)

$$\frac{dp}{dt} \approx -\frac{h}{c}(1-\beta)f_i^2. \quad (8.65)$$

Por otro lado la variación del momento del espejo de masa  $M$  es:

$$\begin{aligned}\frac{dp_M}{dt} &= \frac{d}{dt}(\gamma mv) \\ \frac{dp_M}{dt} &= m\left(\gamma \frac{dv}{dt} + v \frac{d\gamma}{dt}\right)\end{aligned}$$

Vamos a considerar despreciable el término  $\frac{dv}{dt} = 0$ , porque como el espejo va casi a la velocidad de la luz, y esta es constante entonces

$$\frac{dp_M}{dt} = mv \frac{d\gamma}{dt}. \quad (8.66)$$

Por conservación del momento igualamos (8.66) con (8.65)

$$\frac{h}{c}(1-\beta)f_i^2 = mv \frac{d\gamma}{dt}.$$

Para hacer aparecer un  $\gamma^3$  vamos a multiplicar por 1 el siguiente término

$$\begin{aligned}(1-\beta) &= \frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1+\beta)} = \frac{1+\beta^2}{1+\beta} = \frac{1/\gamma^2}{1+\beta} \\ (1-\beta) &= \frac{\gamma^{-2}}{1+\beta}\end{aligned}$$

Con esto no queda

$$\begin{aligned}\frac{h}{c} \frac{\gamma^{-2}}{(1+\beta)} f_i^2 &= mv \frac{d\gamma}{dt} \\ \implies \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{hf_i^2}{cmv(1+\beta)} \gamma^{-2}\end{aligned}$$

Considerando velocidades relativistas:  $v \rightarrow c$  y  $\beta \rightarrow 1$ :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{hf_i^2}{2mc^2} \gamma^{-2}$$

donde hemos encontrado una ecuación diferencial, que resolvemos

$$\begin{aligned}\gamma^2 d\gamma &= \left(\frac{hf_i}{2mc^2}\right) dt \\ \frac{\gamma^3}{3} &= \left(\frac{hf_i}{2mc^2}\right) t \\ \gamma^3 &= \left(\frac{3hf_i}{2mc^2}\right) t \\ \gamma &= \left(\frac{3hf_i}{2mc^2}\right)^{1/3} t^{1/3}\end{aligned}$$

Y hemos demostrado que para velocidades relativistas  $\beta \approx 1$  se tiene  $\gamma \sim t^{1/3}$

### 8.27 Conservación de la carga

Demuestre que  $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$  si se cumple con la conservación de carga. ¿Qué condición debe cumplir  $k_\alpha$  para que la onda plana  $F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$  sea solución de esta ecuación? Demuestre ahora que la transformación de la frecuencia entre dos sistemas inerciales es

$$\omega' = \gamma\omega[1 - \beta \cos(\theta)]$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la velocidad  $\vec{v}$  de la onda y  $k$ . Demuestre por último que

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[\cos(\theta) - \beta]}$$

donde  $\theta'$  es el ángulo entre  $\vec{v}$  y  $k'$ . ¿Cómo pueden usarse estas expresiones para medir la velocidad (incluyendo dirección) de un objeto?

#### Solución:

Sea la métrica de Minkowski definida por

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tal que el producto punto entre dos cuadrivectores sea

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3.$$

El tensor electromagnético  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  permite resumir las ecuaciones de Maxwell en la expresión

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

donde, por definición,

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t & -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad J^\nu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

Derivando la expresión original se escribe

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu J^\nu,$$

donde es inmediato que

$$\partial_\nu J^\nu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} c\rho - (-\partial_1 J^1) - (-\partial_2 J^2) - (-\partial_3 J^3) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

y reemplazando en la ecuación se tiene

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right)$$

Debido a que la carga se conserva, se tiene la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

luego se concluye que

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

De la definición para  $\partial_\nu$ , es directo que

$$\partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t - \partial_1 \partial^1 - \partial_2 \partial^2 - \partial_3 \partial^3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

por lo que en realidad se tiene una ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial t^2} - \nabla^2 F^{\mu\nu} = 0$$

esto implica que  $k_\alpha$  debe ser tal que  $k_\alpha x^\alpha$  sea la fase de la onda. Esto es inmediato considerando que ambos son cuadrvectores de la forma

$$k_\alpha = \left( \frac{\omega}{c} \quad -k_1 \quad -k_2 \quad -k_3 \right) \quad x^\alpha = (ct \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3)$$

luego se escribe

$$\begin{aligned} k_\alpha x^\alpha &= \omega t - (-k_1 x^1) - (-k_2 x^2) - (-k_3 x^3) \\ &= \vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t \end{aligned}$$

Para demostrar las relaciones del efecto Doppler relativista, sea el sistema de referencia  $S$  solidario a la onda electromagnética, donde  $\vec{B} = 0$ , luego se tiene

$$\vec{E} = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \hat{x}$$

donde el signo de la fase no tiene relevancia, puesto que solo indica la dirección de propagación de la onda. De igual manera (ver Figura 1), se tiene el número de onda

$$\vec{k} = (k_1, k_2, k_3) = \left[ \frac{\omega}{c} \cos(\theta), \frac{\omega}{c} \sin(\theta), 0 \right]$$

por lo que la fase será

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \frac{\omega}{c} [x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] - \omega t$$

y usando las transformaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left( t' + \frac{\beta}{c} x' \right), \\ x &= \gamma (x' + c\beta t'), \\ y &= y' \end{aligned}$$

se deduce que

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{\omega}{c} [x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] - \omega t \\
&= \frac{\omega}{c} [\gamma(x' + c\beta t') \cos(\theta) + y' \sin(\theta)] - \gamma\omega \left( t' + \frac{\beta}{c} x' \right) \\
&= \gamma \frac{\omega}{c} x' \cos(\theta) + \gamma\beta \omega t' \cos(\theta) + \frac{\omega}{c} y' \sin(\theta) - \gamma\omega t' - \gamma\beta \frac{\omega}{c} x' \\
&= \gamma\omega[\beta \cos(\theta) - 1]t' + \gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta]x' + \frac{\omega}{c} \sin(\theta)y'
\end{aligned}$$

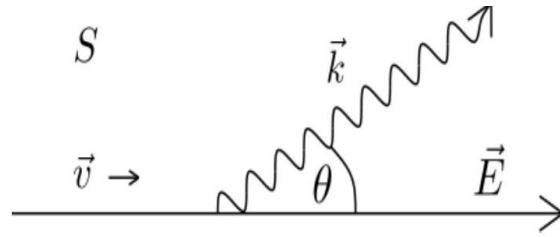


Figure 8.11: Esquema de la onda electromagnética en el sistema de referencia  $S$ .

Sea ahora un sistema de referencia  $S'$ , donde la fase adquiere la forma

$$\phi' = \frac{\omega'}{c} [x' \cos(\theta') + y' \sin(\theta')] - \omega' t'$$

puesto que para ser solución debe cumplirse que las fases en ambos sistemas de referencia sean la misma, es decir,  $\phi = \phi'$ , se obtiene

$\gamma\omega[\beta \cos(\theta) - 1]t' + \gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta]x' + \frac{\omega}{c} \sin(\theta)y' = \frac{\omega'}{c} [x' \cos(\theta') + y' \sin(\theta')] - \omega' t'$  Igualando por componentes se llega a las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\gamma\omega[\beta \cos(\theta) - 1] &= -\omega' \\
\gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta] &= \frac{\omega'}{c} \cos(\theta') \\
\frac{\omega}{c} \sin(\theta) &= \frac{\omega'}{c} \sin(\theta')
\end{aligned}$$

donde de la primera ecuación es directo que

$$\omega' = \gamma\omega[1 - \beta \cos(\theta)]$$

Reemplazando  $\omega'$  en la segunda expresión se obtiene

$$\gamma \frac{\omega}{c} [\cos(\theta) - \beta] = \gamma \frac{\omega}{c} [1 - \beta \cos(\theta)] \cos(\theta')$$

luego se deduce que

$$\cos(\theta') = \frac{\cos(\theta) - \beta}{1 - \beta \cos(\theta)}.$$

De igual manera, reemplazar  $\omega'$  en la tercera ecuación lleva a la relación

$$\frac{\omega}{c} \sin(\theta) = \gamma \frac{\omega}{c} [1 - \beta \cos(\theta)] \sin(\theta')$$

de lo que se deduce

$$\sin(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[1 - \beta \cos(\theta)]}$$

Usando las expresiones para  $\cos(\theta')$  y  $\sin(\theta')$ , se concluye que

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')} = \frac{\sin(\theta)}{\gamma[\cos(\theta) - \beta]}$$

Por último, de la ecuación para la frecuencia, al enviar una onda conocida y medir la onda reflejada, se obtienen los valores  $\omega$  y  $\omega'$  que permiten deducir la velocidad a partir del factor  $\gamma$ . Esta velocidad permite, reemplazando en la ecuación para los ángulos (que corresponde a la aberración del efecto Doppler relativista), obtener la dirección de la velocidad.

## 8.28 Lámina infinita relativista

Una lámina de carga que se extiende infinitamente tanto en los ejes  $x$  como  $y$ , tiene a una densidad de carga uniforme  $\sigma > 0$ , que está en reposo relativo al observador 1. La lámina está situada en  $z = 0$  y se mueve en la dirección  $x$  con una rapidez  $v$  (relativista) en relación al observador 2 .

a) Transformando los campos desde el sistema de referencia del observador 1 al del 2 , encuentre los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en la región  $z > 0$  del sistema de referencia del observador 2 .

b) Demuestre que los campos son los mismos que aquellos calculados, a partir de la transformación de la densidad de corriente desde el sistema del observador 1 al del 2 , y luego utilizando las leyes de Gauss y Ampère para encontrar los campos en el sistema de referencia del observador 2 .

c) Una carga  $q > 0$  está inicialmente en reposo en el punto  $(x,y,z) = (0,0,d)$  en el sistema de referencia del observador 1 . Describa cualitativamente el movimiento posterior de la partícula desde el punto de vista de ambos observadores.

**Solución:**

a) Para el observador 1 , por simetría respecto al plano  $x - y$  (ver Figura 2), el campo eléctrico debiese solo tener componente en la dirección  $\hat{z}$ , luego de la ley de Gauss se escribe

$$\int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = 4\pi \int_{\partial S} \rho dV,$$

donde se escoge un cilindro virtual de área basal  $A$  para el cálculo del flujo a través del plano y donde la integral del lado derecho corresponde a la carga encerrada en el volumen.

Puesto que el manto del cilindro no contribuye al campo eléctrico debido a que el vector normal a la superficie es perpendicular a la dirección del flujo, se escribe

$$2 \int_{\text{tapas}} \vec{E}_1 \cdot \vec{a} = 4\pi Q$$

y considerando que  $\vec{E}_1 = E_1(z)\hat{z}$ ,  $\sigma = Q/A$  y que  $z > 0$ , se obtiene

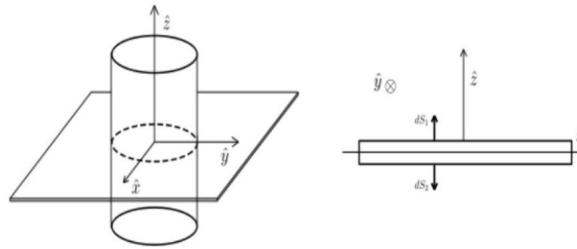


Figure 8.12: Cilindro virtual para calcular el flujo (izquierda) y el plano infinito visto a la misma altura del plano  $x - y$  (derecha).

$$\begin{aligned} 2 \int E_1(z) da &= 4\pi\sigma A \\ 2AE_1(z) &= 4\pi\sigma A \\ E_1(z) &= 2\pi\sigma \end{aligned}$$

concluyéndose que en el sistema de referencia del observador 1

$$\vec{E}_1 = 2\pi\sigma \hat{z} \quad \vec{B}_1 = 0$$

La transformación de un tensor entre sistemas de referencia moviéndose con velocidad relativa  $v$  viene dada por

$$(A^{\mu\nu})' = L^{-1}(v)A^{\mu\nu}[L^{-1}(v)]^T = L(-v)A^{\mu\nu}[L(-v)]^T,$$

donde  $L(v)$  es el boost relativista

$$L(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que cumple con la relación

$$L^{-1}(v) = \eta L^T \eta = L(-v).$$

Usando que el tensor  $F^{\mu\nu}$  puede escribirse de la forma

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = 2\pi\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} (F^{\mu\nu})' &= L(-v)F^{\mu\nu}L^T(-v) \\ &= 2\pi\sigma \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde se usó que  $\beta = v/c$  tal que

$$L(-v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo se obtiene

$$\begin{aligned} (F^{\mu\nu})' &= 2\pi\sigma \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\pi\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\pi\gamma\sigma \\ 0 & 0 & 0 & -2\pi\gamma\beta\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\pi\gamma\sigma & 2\pi\gamma\beta\sigma & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y, puesto que

$$(F^{\mu\nu})' = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix},$$

se identifican los campos en el sistema de referencia del observador 2

$$\vec{E}_2 = 2\pi\gamma\sigma\hat{z} \quad \vec{B}_2 = -2\pi\gamma\beta\sigma\hat{y}$$

- b) La transformación de un cuadrivector para dos sistemas de referencia con velocidad relativa  $v$  está dada por la relación

$$(A^\mu)' = L(v)A^\mu$$

luego el cuadrivector de densidad de corriente

$$J^\alpha = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

transforma al sistema primado como

$$\begin{aligned}
 (J^\alpha)' &= L(v)J^\alpha \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma c\rho - \gamma\beta J^1 \\ \gamma J^1 - \gamma\beta c\rho \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

esto significa que

$$\rho' = \gamma \left( \rho - \frac{v}{c^2} J^1 \right) \quad (J^1)' = \gamma (J^1 - v\rho) \quad (J^2)' = J^2 \quad (J^3)' = J^3$$

Recordando que  $\vec{J}_1 = 0$ , puesto que el sistema está en reposo respecto al observador 1, se tienen las transformaciones

$$\rho' = \gamma\rho \quad (J^1)' = -\gamma v\rho \quad (J^2)' = 0 \quad (J^3)' = 0$$

luego de la ley de Gauss se escribe

$$\begin{aligned}
 2 \int_{\text{tapas}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} &= 4\pi \int_{\partial S} \rho' dV \\
 2E_2 \int da &= 4\pi\gamma \int \rho dV \\
 2AE_2 &= 4\pi\gamma\sigma A \\
 E_2 &= 2\pi\gamma\sigma
 \end{aligned}$$

y de la ley de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

donde se toma un camino rectangular tal que solo las aristas paralelas a la lámina contribuyan al campo (las laterales son perpendiculares a la lámina, luego no contribuyen al campo) y donde la integral del lado derecho representa la corriente encerrada por la curva, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} &= \frac{4\pi}{c} \int \vec{J} \cdot d\vec{a} \\
 B_2 \oint dl &= -4\pi\gamma \left( \frac{v}{c} \right) \int \rho da \\
 2LB_2 &= -4\pi\gamma \left( \frac{v}{c} \right) \sigma L \\
 B_2 &= -2\pi\gamma\beta\sigma
 \end{aligned}$$

concluyéndose que los campos para el observador 2 son

$$\vec{E}_2 = 2\pi\gamma\sigma\hat{z} \quad \vec{B}_2 = -2\pi\gamma\beta\sigma\hat{y}$$

c) Para una carga positiva cuya posición es solo en el eje  $z$ , en el sistema de referencia para el observador 1 (solidario a la lámina) se tiene que ésta acelerará en el eje  $z$  sin mayor complejidad a causa del campo eléctrico (no hay campo magnético en este sistema de referencia). Para el observador 2 , se tiene que el campo magnético posee una componente en el eje  $y$ , la cual desviará a la partícula en dirección  $x$  (debido a la fuerza de Lorentz), al mismo tiempo que sigue acelerando en el eje  $z$ , ya que el campo eléctrico seguirá presente.

## 8.29 Partícula en un campo magnético

Sea una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  que se mueve en un campo magnético uniforme  $B_0$ . Encuentre la trayectoria de esta partícula en términos de la velocidad inicial perpendicular  $v_{\perp}$  al campo, la velocidad inicial paralela  $v_{\parallel}$  al campo, la fase inicial  $\phi$  y la frecuencia ciclotrónica  $\Omega_c = eB_0/mc$ . Asumiendo que  $\beta \ll 1$ , encuentre los potenciales y los campos radiados en la aproximación de campo lejano para esta partícula. Si se tienen  $N$  partículas, con la misma masa y carga, encuentre  $dP/d\Omega$ . Asuma una distribución térmica definida por una temperatura  $T_{\perp}$  y  $T_{\parallel}$  con respecto al campo magnético tal que

$$T_{\perp} = \frac{1}{2} \sum_n m v_{\perp}^2 \quad T_{\parallel} = \frac{1}{2} \sum_n m v_{\parallel}^2$$

Hint:

$$\int [1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi})] d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

### Solución:

El cuadrvector de momento lineal viene dado por

$$P^{\mu} = mv^{\mu}$$

donde  $v^{\mu}$  es el cuadrvector  $(\gamma c, \vec{\gamma v})$ . De esta manera, considerando el tiempo propio  $\tau$ , se escribe la fuerza

$$F^{\mu} = \frac{dP^{\mu}}{d\tau} = \frac{d}{dt} (mv^{\mu})$$

mientras que, en función del tensor electromagnético, esta fuerza adquiere la forma

$$F^{\mu} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} P_{\nu}$$

y mezclando ambas expresiones se obtiene

$$\frac{dv^{\mu}}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} v_{\nu}$$

y usando la métrica de Minkowski

$$\frac{dv^{\mu}}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} g_{\mu\nu} v^{\nu}$$

Suponiendo el campo magnético  $\vec{B} = B_0 \hat{k}$ , se escribe

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dv^0/d\tau \\ dv^1/d\tau \\ dv^2/d\tau \\ dv^3/d\tau \end{pmatrix} &= \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v^0 \\ -v^1 \\ -v^2 \\ -v^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 v^2 \\ -B_0 v^1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dv^0}{d\tau} = 0 \quad \frac{dv^1}{d\tau} = \Omega_c v^2 \quad \frac{dv^2}{d\tau} = -\Omega_c v^1 \quad \frac{dv^3}{d\tau} = 0$$

Derivando la segunda ecuación se obtiene

$$\frac{dv^2}{d\tau} = \frac{1}{\Omega_c} \frac{d^2 v^1}{d\tau^2}$$

y reemplazando en la tercera ecuación

$$\frac{d^2 v^1}{d\tau^2} + \Omega_c^2 v^1 = 0$$

oscilador armónico cuya solución se puede escribir de la forma

$$v^1(\tau) = A \sin(\Omega_c \tau + \phi)$$

Reemplazando  $v^1$  en la tercera ecuación se tiene

$$\frac{dv^2}{d\tau} = -A\Omega_c \sin(\Omega_c \tau + \phi)$$

e integrando se llega a que

$$v^2(\tau) = A \cos(\Omega_c \tau + \phi).$$

Puesto que es directo que  $v^3(\tau) = B$ , de las condiciones iniciales se deduce que

$$\begin{aligned} x(\tau) &= -r_L \cos(\Omega_c \tau + \phi) \\ y(\tau) &= r_L \sin(\Omega_c \tau + \phi) \\ z(\tau) &= v_{\parallel} \tau \end{aligned}$$

donde se definió el radio de Larmor  $r_L \equiv v_{\perp}/\Omega_c$ . Ahora, puesto que

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}$$

se escriben las ecuaciones

$$x(t) = -r_L \cos\left(\frac{\Omega_c}{\gamma}t + \phi\right)$$

$$y(t) = r_L \sin\left(\frac{\Omega_c}{\gamma}t + \phi\right)$$

$$z(t) = \frac{v_{||}}{\gamma}t$$

por lo que la trayectoria de la partícula relativista será

$$\vec{r}(t) = -r_L \cos\left(\frac{\Omega_c}{\gamma}t + \phi\right)\hat{i} + r_L \sin\left(\frac{\Omega_c}{\gamma}t + \phi\right)\hat{j} + \frac{v_{||}}{\gamma}t\hat{k}$$

Considerando  $\beta \ll 1$  tal que  $\gamma \sim 1$ , se concluye que

$$\vec{r}(t) = -r_L \cos(\Omega_c t + \phi)\hat{i} + r_L \sin(\Omega_c t + \phi)\hat{j} + v_{||}t\hat{k}$$

y derivando dos veces se obtiene

$$\vec{v}(t) = v_\perp \sin(\Omega_c t + \phi)\hat{i} + v_\perp \cos(\Omega_c t + \phi)\hat{j} + v_{||}\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \Omega_c v_\perp \cos(\Omega_c t + \phi)\hat{i} - \Omega_c v_\perp \sin(\Omega_c t + \phi)\hat{j} = -\Omega_c^2 \vec{r}(t)$$

siendo las ecuaciones de movimiento para una partícula no relativista bajo la acción de un campo magnético. La aproximación de campo lejano permite escribir

$$\rho(x, t') = \sum_n q_n \delta^{(3)}[x - r(t')] \quad \vec{J}(x, t') = \sum_n q_n v_n(t') \delta^{(3)}[x - r(t')]$$

además de los potenciales electromagnéticos

$$\phi = \frac{1}{r} \sum_n q_n \quad A(t') = \frac{1}{rc} \sum_n q_n v_n(t')$$

donde  $t'$  es el tiempo retardado

$$t' = t - \frac{r}{c}.$$

Asumiendo carga simétrica tal que  $\sum q_n = 0$ , se escribe el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{rc^2} \sum_n q_n a_n(t')$$

y el campo magnético

$$\vec{B} = \hat{r} \times \vec{E} = -\frac{1}{rc^2} \sum_n q_n \hat{r} \times a_n(t')$$

El vector de Poynting será entonces

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \\ &= \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times (\hat{r} \times \vec{E})] \\ &= \frac{c}{4\pi} [\hat{r}(\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E} \cdot \hat{r})]\end{aligned}$$

y, puesto que

$$\begin{aligned}\hat{r}(\vec{E} \cdot \vec{E}) &= -\hat{r} \cdot \frac{1}{rc^2} \sum_n q_n a_n \left[ -\frac{1}{rc^2} \sum_m q_m a_m \right] \\ &= \frac{q^2}{r^2 c^4} \sum_{m,n} \hat{r}(a_n \cdot a_m) \\ \vec{E}(\vec{E} \cdot \hat{r}) &= -\frac{1}{rc^2} \sum_n q_n a_n \left[ -\frac{1}{rc^2} \sum_m q_m a_m \cdot \hat{r} \right] \\ &= \frac{q^2}{r^2 c^4} \sum_{m,n} a_n (a_m \cdot \hat{r})\end{aligned}$$

se obtiene

$$\vec{S} = \frac{q^2}{4\pi r^2 c^3} \sum_{m,n} [\hat{r}(a_n \cdot a_m) - a_m (a_n \cdot \hat{r})]$$

La potencia disipada por ángulo sólido viene dada por

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [r^2 \hat{r} \cdot \vec{E} \times \vec{B}^*] \\ &= r^2 \vec{S} \cdot \hat{r} \\ &= \frac{q^2}{4\pi c^3} \sum_{m,n} [(a_n \cdot a_m) - (\hat{r} \cdot a_m)(a_n \cdot \hat{r})]\end{aligned}$$

y escribiendo

$$\hat{r} = \sin(\theta) \cos(\phi') \hat{i} + \sin(\theta) \sin(\phi') \hat{j} + \cos(\theta) \hat{k}$$

se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}a^2 - (\vec{a} \cdot \hat{r})^2 &= \Omega_c^2 v_\perp^2 - \Omega_c^2 v_\perp^2 \sin^2(\theta) [\cos(\phi') \cos(\Omega_c t + \phi) - \sin(\phi') \sin(\Omega_c t + \phi)]^2 \\ &= \Omega_c^2 v_\perp^2 - \Omega_c^2 v_\perp^2 \sin^2(\theta) [\cos(\Omega_c t + \tilde{\phi})]^2 \\ &= \Omega_c^2 v_\perp^2 [1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi})]\end{aligned}$$

donde  $\tilde{\phi} = \phi + \phi'$ . La potencia disipada por ángulo sólido será entonces

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \Omega_c^2 v_\perp^2}{4\pi c^3} [1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi})]$$

y usando el hynt

$$\int [1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\Omega_c t + \tilde{\phi})] d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

se obtiene la potencia radiada

$$P = \frac{q^2 \Omega_c^2 v_{\perp}^2}{4\pi c^3} \left( \frac{8\pi}{3} \right) = \frac{2}{3} \frac{q^2 \Omega_c^2 v_{\perp}^2}{c^3}$$

y reconociendo la aceleración  $a_{\perp} = \Omega_c v_{\perp}$ , se llega a la expresión

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 a_{\perp}^2}{c^3}$$

la cual corresponde a la fórmula de Larmor, expresión para la potencia disipada por una carga puntual no relativista acelerando en un campo magnético. Volviendo a la expresión

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 \Omega_c^2 v_{\perp}^2}{c^3}$$

usando que

$$T_{\perp} = \frac{1}{2} \sum_n m v_{\perp}^2$$

se obtiene la expresión

$$P = \frac{4}{3} \frac{q^2 \Omega_c^2 T_{\perp}}{mc^3}$$

## 8.30 Dipolo magnético oscilatorio

Considere el siguiente modelo de un dipolo magnético oscilatorio: Suponga que se tiene un anillo sin cargas, de radio  $b$ , por el cual circula una corriente alterna  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . Encuentre la potencia total radiada  $\langle P \rangle$  (promediado sobre un periodo), asumiendo la aproximación de campo lejano  $r \gg c/\omega$ , y la aproximación para un dipolo perfecto  $b \ll r$  y  $b \ll c/\omega$ .

**Solución:**

Escogiendo un sistema de coordenadas esféricas con simetría azimutal, es posible escribir la expansión

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} \\ &= \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \\ &= \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' [\sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\phi - \phi') + \cos(\theta) \cos(\theta')]} \end{aligned}$$

gracias a que

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' [\sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\phi - \phi') + \cos(\theta) \cos(\theta')],$$

esto debido al teorema de adición de los armónicos esféricos. Usando que  $r' = b$  y  $\theta' = \pi/2$ , la expansión se reescribe de la forma

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \\ &= r \sqrt{1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{2b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \end{aligned}$$

y recordando que  $r \gg b$ , de la aproximación por series de Taylor se obtiene

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \sim r \left[ 1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]$$

Por otro lado, la densidad de corriente viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{I} \frac{\delta(r' - b)}{b} \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= I_0 e^{-i\omega t'} \frac{\delta(r' - b)}{b} \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) \hat{\phi}' \end{aligned}$$

donde se pasó la función coseno a una función exponencial por comodidad. El potencial vector asociado será entonces

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{I_0}{bc} \int \frac{\delta(r' - b) \delta(\theta' - \pi/2)}{r \left[ 1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]} e^{-i\omega t' \hat{\phi}' dV'} \\ &= \frac{I_0}{bc} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\delta(r' - b) \delta(\theta' - \pi/2)}{r \left[ 1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]} e^{-i\omega t' (r')^2 \sin^2(\theta') \hat{\phi}' dr' d\theta' d\phi'}, \end{aligned}$$

donde  $t'$  corresponde al tiempo retardado

$$\begin{aligned} t' &= t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \\ &\simeq t - \frac{r}{c} \left[ 1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right] \\ &= t - \frac{r}{c} + \frac{b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \end{aligned}$$

Desarrollando las deltas de Dirac presentes en la integral y reemplazando el tiempo retardado en la misma, se llega a la expresión

$$\vec{A} = \frac{I_0 b}{rc} \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \int_0^{2\pi} \frac{\exp \left[ -i \frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right]}{1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \hat{\phi}' d\phi'$$

y, puesto que  $b \ll c/\omega$ , se puede expandir

$$\exp \left[ -i \frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \right] \approx 1 - i \frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')$$

con lo cual el potencial vector queda

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{I_0 b}{rc} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \int_0^{2\pi} \frac{1 - i\frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')}{1 - \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')} \hat{\phi}' d\phi' \\ &= A_0(t) \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')\right] \left[1 - i\frac{\omega b}{c} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi')\right] \hat{\phi}' d\phi' \\ &= A_0(t) \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{b}{r} \sin(\theta) \cos(\phi - \phi') \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right)\right] \hat{\phi}' d\phi'\end{aligned}$$

donde se volvió a aproximar el denominador utilizando que  $r \gg b$  y se escribió

$$\vec{A}_0(t) = \frac{I_0 b}{rc} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

Puesto que

$$\hat{\phi}' = -\sin(\phi') \hat{x} + \cos(\phi') \hat{y}$$

la expresión para el potencial vector se reescribe como

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{I_0 b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \left[\int_0^{2\pi} \cos(\phi') \cos(\phi - \phi') \hat{y} d\phi'\right. \\ &\quad \left.- \int_0^{2\pi} \sin(\phi') \cos(\phi - \phi') \hat{x} d\phi'\right]\end{aligned}$$

y recordando que

$$\cos(\phi - \phi') = \cos(\phi) \cos(\phi') + \sin(\phi) \sin(\phi')$$

se llega finalmente al potencial vector

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{I_0 b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \left[\cos(\phi) \hat{y} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi') d\phi'\right. \\ &\quad \left.- \sin(\phi) \hat{x} \int_0^{2\pi} \sin^2(\phi') d\phi'\right] \\ &= \frac{I_0 \pi b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] [-\sin(\phi) \hat{x} + \cos(\phi) \hat{y}] \\ &= \frac{I_0 \pi b^2}{r^2 c} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\phi}\end{aligned}$$

En la aproximación de campo lejano se tiene que  $\Phi \sim 0$ , luego el campo eléctrico será

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \frac{I_0 \pi \omega b^2}{r^2 c^2} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\phi}$$

mientras que el campo magnético vendrá dado por

$$\vec{B} = \hat{r} \times \vec{E} = -i \frac{I_0 \pi \omega b^2}{r^2 c^2} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \sin(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\theta}$$

lo que permite escribir el vector de Poynting

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \\
&= -\frac{I_0^2 \pi^2 c \omega^2 b^4}{4\pi r^4 c^4} \left(1 - i\frac{\omega r}{c}\right) \left(1 + i\frac{\omega r}{c}\right) \sin^2(\theta) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\phi} \times \hat{\theta} \\
&= -\frac{I_0^2 \pi \omega^2 b^4}{4r^4 c^3} \left(1 + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \sin^2(\theta) (-\hat{r}) \\
&= \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4r^2 c^5} \sin^2(\theta) \hat{r}
\end{aligned}$$

donde se usó que  $r \gg c/\omega$ , luego  $\omega r/c \gg 1$ . La potencia radiada por ángulo sólido será

$$\frac{\partial P}{\partial \Omega} = r^2 \vec{S} \cdot \hat{r} = \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4c^5} \sin^2(\theta)$$

por lo que la potencia vendrá dada por la integral en el ángulo sólido de esta expresión, es decir, sobre la parte angular, concluyéndose así que la potencia radiada por el anillo es

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4c^5} \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \\
&= \frac{I_0^2 \pi \omega^4 b^4}{4c^5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta d\phi \\
&= \frac{I_0^2 \pi^2 \omega^4 b^4}{2c^5} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \\
&\boxed{P = \frac{2}{3} \frac{I_0^2 \pi^2 \omega^4 b^4}{c^5}}.
\end{aligned}$$

### 8.31 Hamiltoniano de una partícula

Muestre que el hamiltoniano de una partícula moviéndose en un campo electromagnético es

$$\mathcal{H} = \sqrt{|cP - eA|^2 + m^2 c^4} + e\Phi,$$

donde  $P_j = \partial_{u_j} \mathcal{L}$ .

**Solución:**

La acción que se debe minimizar es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L} d(\gamma\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \mathcal{L} d\tau$$

identificándose el Lagrangiano  $\mathcal{L} = \gamma \mathcal{L}$ . En general, se sabe que  $\mathcal{L} = T - U$ , luego para una partícula libre, de las ecuaciones de Euler-Lagrange se deduce que se debe cumplir

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{x}) = 0$$

Esto indica que  $\mathcal{L}_T$  (Lagrangiano de la partícula libre) debe ser proporcional a la masa. Por otro lado, ya que el Lagrangiano debe ser invariante, la cantidad  $\gamma\mathcal{L}_T$  debe ser invariante, lo cual se cumple si se elige  $\gamma\mathcal{L}_T = -mc^2$ . Se tiene entonces que

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{\gamma}mc^2$$

y al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial \dot{x}} = 0$$

se confirma que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( -\frac{1}{\gamma}mc^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left[ -mc^2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ -\frac{1}{2}mc^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right)^{-1/2} \left( -\frac{2\dot{x}}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} (\gamma m \dot{x}) \end{aligned}$$

Luego la elección de  $\mathcal{L}_T$  cumple con todas las condiciones. Esto también se observa al recuperar la ecuación de movimiento  $m\ddot{x} = 0$  para velocidades no relativistas. El potencial electromagnético en el caso no relativista viene dado por

$$U = e\Phi$$

donde  $\Phi$  es tal que

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi$$

con  $\vec{A}$  el potencial vector y  $\vec{E}$  el campo eléctrico. De esta manera, el potencial relativista debe ser tal que  $\gamma\mathcal{L}_U$  sea invariante y se cumpla que  $U = e\Phi$  en el límite no relativista. Sea entonces el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_U = -\frac{e}{\gamma c} U_\alpha A^\alpha$$

donde  $U_\alpha = (\gamma c, \vec{\nabla}\Phi)$  y  $A^\alpha = (\Phi, \vec{A})$ , es evidente que

$$\gamma\mathcal{L}_U = -\frac{e}{c} U_\alpha A^\alpha$$

es invariante, puesto que la contracción  $U_\alpha A^\alpha$  genera un escalar, el cual es invariante. Por otro lado, en el límite  $\dot{x} \ll c$ , se recupera  $\mathcal{L}_U = e\Phi$ , lo cual sugiere que la elección del Lagrangiano cumple también con las condiciones necesarias. Se escribe entonces el Lagrangiano total

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_U = -\frac{1}{\gamma}mc^2 - \frac{e}{\gamma c} U_\alpha A^\alpha$$

a partir de lo que se deduce

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( -\frac{1}{\gamma} mc^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( -\frac{e}{\gamma c} U_\alpha A^\alpha \right) \\ &= \gamma m \dot{x}_i - \frac{e}{c} A_i \end{aligned}$$

y, puesto que el Hamiltoniano viene dado por

$$\mathcal{H}(x^i, P_j, t) = P_i \dot{x}^i - \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j, t),$$

se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= P_i \dot{x}_i - \mathcal{L} \\ &= \gamma m \dot{x}_i^2 - \frac{e}{c} \dot{x}_i A_i + \frac{1}{\gamma} mc^2 + e\Phi + \frac{e}{c} \dot{x}_i A_i \\ &= \gamma m \dot{x}_i^2 + \frac{1}{\gamma} mc^2 + e\Phi \end{aligned}$$

Recordando que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}}$$

se puede reescribir

$$\begin{aligned} \gamma m \dot{x}_i^2 + \frac{1}{\gamma} mc^2 &= \frac{m \dot{x}_i^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2} \\ &= \frac{m \dot{x}_i^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} + \frac{mc^2 \left(1 - \frac{\dot{x}_i^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

luego el Hamiltoniano queda

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} + e\Phi$$

Por último, despejando  $\dot{x}_i$  de la expresión para  $P_i$  se obtiene

$$\dot{x} = \frac{c(cP - eA)}{\sqrt{|cP - eA|^2 + m^2 c^4}}$$

por lo que

$$\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{|cP - eA|^2 + m^2c^4}}$$

y reemplazando en el Hamiltoniano se concluye que

$$\mathcal{H} = \sqrt{|cP - eA|^2 + m^2c^4} + e\Phi$$

### 8.32 La paradoja de los gemelos

La estrella más cercana está a 4 años luz. Suponga que se desea enviar a un gemelo en un cohete que acelere con aceleración  $g$  la mitad del camino hacia esta estrella y desacelere con aceleración  $-g$  la otra mitad (para evitar problemas de salud por ingrávitez). Supongamos que, para ello, contamos con una turbina del Enterprise, que convierte perfectamente materia y antimateria en energía (por lo tanto, la velocidad de expulsión de la masa es con velocidad  $c$  respecto al cohete). Sin hacer consideraciones relativistas, encuentre la masa inicial  $M$  del cohete necesaria para llegar a esta estrella (asuma que la masa del módulo más la de la tripulación es de  $m_c = 100$  kg). Resuelva el problema relativista y calcule la diferencia de edad cuando los gemelos se encuentran nuevamente en la tierra, ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el cohete? Considerando efectos relativistas y una masa  $m = 100$  kg, encuentre la masa inicial del cohete necesaria para llegar a la estrella.

#### Solución:

Si el cohete está lo suficientemente lejos como para no ser desviado por el campo gravitatorio de la Tierra y su trayectoria es una línea recta en el espacio plano (no hay curvaturas relativistas) en dirección a la estrella, la velocidad de la masa eyectada por el cohete (con dirección a la Tierra) vista desde la Tierra es  $\vec{v} - \vec{u}$ , donde  $\vec{v}$  es la velocidad del cohete y  $\vec{u} = c\hat{x}$  es la velocidad de expulsión de masa en la misma dirección que la velocidad  $\vec{v}$  ( $\hat{x}$  sin perder generalidad). La variación en el momento lineal del cohete será entonces

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) \\ &= [(m - dm')(\vec{v} + d\vec{v}) - (\vec{v} - \vec{u})dm'] - m\vec{v} \end{aligned}$$

donde  $dm'$  corresponde a la pérdida de masa expulsada y  $d\vec{v}$  es el cambio de velocidad asociado. Puesto que  $dm'd\vec{v} \ll 1$ , la expresión queda de la forma

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= (m\vec{v} + md\vec{v} - \vec{v}dm' + \vec{v}dm' - \vec{u}dm') - m\vec{v} \\ &= md\vec{v} - \vec{u}dm' \end{aligned}$$

y, puesto que la masa total del sistema se mantiene constante, es decir,  $m + m' = cte$ , se deduce que  $dm + dm' = 0$ , luego el cambio en la masa del cohete es  $dm = -dm'$ . Por otro lado, al no tenerse fuerzas externas al sistema, se tiene que  $d\vec{p} = 0$ , por lo que

$$d\vec{p} = 0 = md\vec{v} - \vec{u}dm'$$

a partir de lo que se deduce

$$\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{\vec{u}}{m} \frac{dm'}{dt} = \vec{a} + \frac{\vec{u}}{m} \frac{dm}{dt} = 0$$

y usando que  $\vec{u} = c\hat{x}$  se reescribe

$$\vec{a} + \frac{c}{m} \frac{dm}{dt} \hat{x} = 0$$

En la primera parte de la trayectoria (hasta mitad de camino a la estrella), la aceleración es  $\vec{a} = g\hat{x}$  (de manera que sea posible dejar el campo gravitatorio), luego

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{g}{c} m(t)$$

ecuación diferencial con solución

$$m(t) = (m_c + M) e^{-\frac{g}{c}t}$$

donde se usó que la masa inicial del sistema es  $m_c + M$ . Esta solución es válida para  $t \in [0, t_0]$ , con  $t_0$  el tiempo que el cohete demora en llegar a la mitad de la distancia entre la Tierra y la estrella. Para la siguiente mitad del camino, se tiene que la estrella comienza a atraer al cohete hacia sí, por lo que la dirección de la masa expulsada debe cambiar en  $180^\circ$  (de manera que el cohete no acelere más de lo que su composición se lo permita). El cambio de momento lineal pasa a ser entonces

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= [(m - dm')(\vec{v} - d\vec{v}) + (\vec{v} + \vec{u})dm'] - m\vec{v} \\ &= (m\vec{v} - md\vec{v} - \vec{v}dm + \vec{v}dm' + \vec{u}dm') - m\vec{v} \\ &= \vec{u}dm' - md\vec{v} \end{aligned}$$

y como se sigue cumpliendo que  $\vec{p} = 0$ , se llega a la igualdad

$$d\vec{p} = 0 = md\vec{v} - \vec{u}dm'$$

ecuación ya antes obtenida y que permite concluir que, en la segunda mitad del tramo, la variación de la masa viene dada por

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{g}{c}t}$$

con  $m_0$  una constante. Esta solución es válida para  $t \in [t_0, t_{\max}]$ , donde  $t_{\max}$  corresponde al tiempo que el cohete demora en llegar a la estrella. Suponiendo que la solución para  $m(t)$  es continua (es decir, el propulsor se gira  $180^\circ$  de forma instantánea), se deduce que en  $t = t_0$

$$(m_c + M) e^{-\frac{g}{c}t_0} = m_0 e^{-\frac{g}{c}t_0}$$

luego  $m_0 = m_c + M$ , concluyéndose que la masa para todo tiempo viene dada por

$$m(t) = (m_c + M) e^{-\frac{g}{c}t}$$

En el primer tramo, la aceleración es  $g$  constante, por lo que la ecuación de movimiento será

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

y como  $x(t_0) = D/2$ , con  $D$  la distancia entre la Tierra y la estrella, se deduce que

$$t_0 = \sqrt{\frac{D}{g}}$$

Notando que 4 años luz corresponden a

$$D = 4[\text{años luz}] = 4c \cdot (3.15 \times 10^7) = 3.78 \times 10^{16}[\text{m}]$$

se deduce que

$$t_0 \approx 6.2 \times 10^7[\text{s}]$$

De esta manera, puesto que el tiempo que demora el cohete en llegar a la estrella es  $t_{\max} = 2t_0$ , se deduce que

$$m(t_{\max}) = (m_c + M) e^{-\frac{2g}{c}t_0} = m_c$$

que corresponde al momento en que el cohete pierde todo el combustible y queda solo el casquete (masa mínima para llegar a la estrella). Despejando la masa  $M$  de la expresión para la variación de la masa, se tiene

$$M = m(t_{\max}) e^{\frac{2g}{c}t_0} - m_c$$

y reemplazando los valores numéricos

$$\begin{aligned} M &= m_c \left[ e^{\frac{2g}{c}t_0} - 1 \right] \\ &= 100 \cdot \left[ \exp \left( \frac{2 \cdot 9.78}{2.998 \times 10^8} \cdot 6.2 \times 10^7 \right) - 1 \right] [\text{kg}] \\ &= 100 \cdot (e^{4.05} - 1) [\text{kg}] \\ &= 5740 [\text{kg}] \end{aligned}$$

por lo que la masa inicial necesaria para llegar a la estrella será cercana a 5.7 [Tn]. Para resolver el problema de forma relativista, se sabe que la relación entre los cuadrivectores de velocidad del sistema  $K$  (en la Tierra) y  $K'$  (solidario al cohete) es

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = L_v^\mu(-v) \frac{dU^\nu}{d\tau}$$

por lo que en el primer tramo (desde la Tierra hasta la mitad de la distancia) se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dU^0}{d\tau} & \frac{dU^1}{d\tau} & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta\gamma g \\ \gamma g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

siendo inmediato que

$$\frac{dU^0}{d\tau} = \gamma\beta g \quad \frac{dU^1}{d\tau} = \gamma g$$

Notando que

$$\begin{aligned}\gamma\beta &= \frac{\gamma}{c}v = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{\gamma}{c}U^1\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{U^1}{c} \\ \gamma &= \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{U^0}{c}\end{aligned}$$

las ecuaciones diferenciales se reescriben de la forma

$$\frac{dU^0}{d\tau} = \frac{g}{c}U^1 \quad \frac{dU^1}{d\tau} = \frac{g}{c}U^0$$

Derivando la segunda para reemplazar la primera se obtiene

$$\frac{d^2U^1}{d\tau^2} = \frac{g^2}{c^2}U^1$$

cuya solución es

$$\dot{x}(\tau) = A \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + B \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

y suponiendo que el cohete parte del reposo tal que  $\dot{x}(\tau = 0) = 0$ , se obtiene  $A = 0$ . Ahora, como  $\ddot{x}(\tau = 0) = g$ , se deduce también que

$$\ddot{x}(0) = g = \frac{g}{c}B \cosh(0),$$

obteniéndose  $B = c$ , luego la solución queda

$$\dot{x}(\tau) = c \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

Por otro lado, puesto que  $c^2t^2 - x^2$  es un invariante relativista, es directo que

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2$$

luego se puede escribir

$$dt = d\tau \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2} = d\tau \sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

lo que permite encontrar el tiempo que transcurre para el gemelo en la Tierra

$$\begin{aligned}t(\tau) &= \int_0^\tau \sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{c^2}} d\tau' \\ &= \int_0^\tau \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{g}{c}\tau'\right)} d\tau' \\ &= \int_0^\tau \cosh\left(\frac{g}{c}\tau'\right) d\tau' \\ &= \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right)\end{aligned}$$

o, invirtiendo, el tiempo que pasa para el gemelo en el cohete

$$\tau = \frac{c}{g} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{g}{c} t \right)$$

De esta manera, el gemelo en la Tierra ve a su hermano moverse con velocidad

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(\tau) \frac{d\tau}{dt}$$

y recordando que

$$c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 + dx^2$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \sinh \left( \frac{g}{c} \tau \right) \\ &= \frac{g}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \left[ \frac{c}{g} \sinh \left( \frac{g}{c} \tau \right) \right] \\ &= \frac{gt}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \\ &= \left[ \frac{1}{g^2 t^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2}\end{aligned}$$

luego es posible escribir

y despejando el tiempo se obtiene

$$t_0 = \sqrt{\left( \frac{D}{2c} + \frac{c}{g} \right)^2 - \frac{c^2}{g^2}} = \sqrt{\frac{D}{g} + \frac{D^2}{4c^2}}$$

y, puesto que demora  $2t_0$  en ir y  $2t_0$  en volver, se concluye que para el gemelo en la Tierra

$$\begin{aligned}t &= 4 \sqrt{\frac{D}{g} + \frac{D^2}{4c^2}} \\ &= 4 \cdot \sqrt{\frac{3.78 \times 10^{16}}{9.78} + \frac{14.3 \times 10^{32}}{4 \cdot 8.99 \times 10^{16}}} [ \text{s}] \\ &= 3.55 \times 10^8 [ \text{s}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{2} &= x(t_0) \\
&= \int_0^{t_0} \dot{x}(t) dt \\
&= \int_0^{t_0} \left[ \frac{1}{g^2 t^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2} dt \\
&= c \int_0^{t_0} \frac{t}{\sqrt{\frac{c^2}{g^2} + t^2}} dt \\
&= \frac{c}{2} \int_{c^2/g^2}^{c^2/g^2+t^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\
&= c \left( \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + t^2} \right) \Big|_0^{t_0} \\
&= c \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + t_0^2} - \frac{c^2}{g}
\end{aligned}$$

mientras que para el gemelo en el cohete han pasado

$$\tau = \frac{2.998 \times 10^8}{9.78} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{9.78}{2.998 \times 10^8} \cdot 3.55 \times 10^8 \right) [\text{s}] = 9.7 \times 10^7 [\text{s}]$$

por lo que la diferencia de edad al reencontrarse será de

$$\Delta T = t - \tau = (3.55 \times 10^8 - 9.7 \times 10^7) [\text{s}] = (11.26 - 3.08) [\text{y}] = 8.18 [\text{y}]$$

La velocidad máxima del cohete corresponde al tiempo  $t = t_0$ , puesto que la velocidad va en aumento durante la primera parte del trayecto, hasta que alcanza  $D/2$  y comienza a reducir para controlar la aceleración. Esto implica que

$$\begin{aligned}
v_{\max}(t = t_0) &= \left[ \frac{1}{g^2 t^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2} \\
&= \left[ \frac{1}{Dg + \frac{D^2 g^2}{4c^2}} + \frac{1}{c^2} \right]^{-1/2}
\end{aligned}$$

y reemplazando los valores numéricos se obtiene

$$\begin{aligned}
v_{\max} &= \left[ \frac{1}{3.78 \times 10^{16} \cdot 9.78 + \frac{14.3 \times 10^{32.95.7}}{4.899 \times 10^{16}}} + \frac{1}{8.99 \times 10^{16}} \right]^{-1/2} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \\
&\approx 2.8 \times 10^8 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right],
\end{aligned}$$

Luego la velocidad máxima apreciada desde la Tierra es, aproximadamente,  $v_{\max} = 0.934c$ . Finalmente, considerando que el cuadrivector de momento se escribe  $(E/c, \vec{p})$ , se tendrá que el cambio de momento lineal relativista vendrá dado por

$$\begin{aligned}
d(p_0, \vec{p}) &= (p_0, \vec{p})(t+dt) - (p_0, \vec{p})(t) \\
&= [(\gamma_{dv_0} mc, \gamma_{d\vec{v}} m d\vec{v}) + (E/c, \vec{p}_{dm'})] - (mc + cdm', 0) \\
&\approx \left[ \left( \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{(dv)^2}{c^2} \right] mc, \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{(dv)^2}{c^2} \right] m d\vec{v} \right) + (p_f, -\vec{p}_f) \right] - (mc + cdm', 0) \\
&= (mc + p_f, md\vec{v} - \vec{p}_f) - (mc + cdm', 0) \\
&= (p_f - cdm', md\vec{v} - \vec{p}_f)
\end{aligned}$$

donde se desprecian los diferenciales de segundo orden y  $dm'$  se convierte en un fotón de energía  $E = p_f/c$ . Puesto que se sigue cumpliendo  $d(p_0, \vec{p}) = (0, \vec{0})$  y  $dm' = -dm$ , es directo obtener las relaciones

$$cdm + p_f = 0 \quad mdv - p_f = 0$$

a partir de las que se deduce

$$mdv + cdm = 0$$

o, equivalentemente,

$$\frac{dv}{d\tau} + c \frac{m'(\tau)}{m(\tau)} = 0$$

donde  $dv/dt = g$  en la primera parte del trayecto. Usando la regla de la cadena se escribe para la primera mitad del trayecto que

$$g + c \frac{m'(t)}{m(t)} \frac{dt}{d\tau} = 0$$

y recordando que

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 + \left( \frac{gt}{c} \right)^2}$$

se llega a la relación

$$\frac{dm}{m} = - \frac{g/c}{\sqrt{1 + \left( \frac{gt}{c} \right)^2}} dt$$

la cual al integrar permite obtener

$$m(t) = (m_c + M) \left[ \frac{gt}{c} + \sqrt{1 + \left( \frac{gt}{c} \right)^2} \right]^{1/2}$$

Evaluando en  $t = t_{\max}$ , la masa  $m_c$  que queda en el cohete al llegar a la estrella será

$$M(t_0) = m_c \left[ \frac{2gt_0 - c}{c} + \sqrt{1 + \left( \frac{2gt_0}{c} \right)^2} \right]$$

y reemplazando los valores numéricos se obtiene

$$\begin{aligned} M(t_0) &= 100 \cdot \left( \frac{2 \cdot 9.78 \cdot 6.2 \times 10^7 - 2.998 \times 10^8}{2.998 \times 10^8} + \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 95.6 \cdot 38.4 \times 10^{14}}{8.99 \times 10^{16}}} \right) [\text{kg}] \\ &= 705 [\text{kg}] \end{aligned}$$

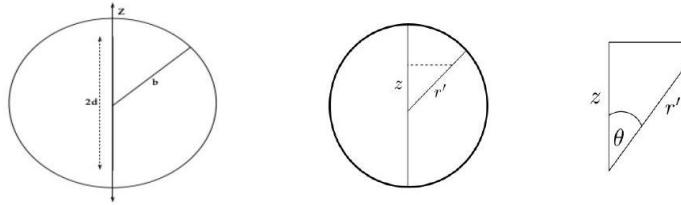
luego la masa inicial del cohete necesaria para llegar a la estrella es 0.7[Tn].

### 8.33 Cascarón esférico con línea cargada

Una línea cargada de largo  $2d$  con carga total  $Q$  tiene una densidad lineal de carga que varía como  $(d^2 - z^2)$ , donde  $z$  es la distancia medida desde el punto medio. Un cascarón esférico conductor (a tierra) de radio  $b > d$  está centrado en el punto medio de la línea cargada.

- a) Encuentre el potencial en el espacio como una expansión de polinomios de Legendre.
- b) Calcule la densidad superficial de carga inducida sobre el cascarón.
- c) Calcule el límite  $d \ll b$  y compare con el caso correspondiente.

**Solución:**



a) Se debe resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) = -4\pi\rho(r, \theta, \phi)$$

para lo cual se calculará primero la función de Green del sistema, la cual cumple con

$$\nabla^2 G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (8.67)$$

En coordenadas esféricas, la delta de Dirac puede expandirse de la forma

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r - r')}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi')$$

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r - r')}{(r')^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (8.68)$$

por lo que se propone la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r, r') Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

Usando la identidad para los esféricos armónicos

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

se deduce que

$$\nabla^2 G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (8.69)$$

Reemplazando la Ec. (8.68) y la Ec. (8.69) en la Ec. (8.67) se llega a la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} = -4\pi \frac{\delta(r-r')}{(r')^2}, \quad (8.70)$$

la cual para  $r \neq r'$  corresponde a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - l(l+1) R_{lm} = 0$$

con solución

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r < r' \\ C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > r' \end{cases}$$

Como la solución no puede diverger en  $r = 0$ , se deduce que  $B_{lm} = 0$ , mientras que de la condición de borde

$$\psi(r=b) = 0$$

se obtiene

$$D_{lm} = -C_{lm} b^{2l+1}$$

y la solución queda

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < r' \\ C_{lm} [r^l - b^{2l+1} r^{-(l+1)}] & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} r_<^l \left[ r_>^l - b^{2l+1} r_>^{-(l+1)} \right]$$

donde  $r_< = \min(r, r')$  y  $r_> = \max(r, r')$ . Para encontrar la constante  $E_{lm}$  se debe integrar la discontinuidad  $r = r'$  en la Ec. (8.70), esto se hace pensando en una lámina de grosor  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que  $r_> = r' + \varepsilon$  y  $r_< = r' - \varepsilon$ , luego

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} l(l+1) R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r-r') dr$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \Big|_{r' - \epsilon}^{r' + \epsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para  $R_{lm}(r, r')$  se obtiene

$$E_{lm} r_>^2 r_<^l \left[ l r_>^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+2}} \right] - l E_{lm} r_<^{l+1} \left[ r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = -4\pi.$$

Considerando  $\epsilon \rightarrow 0$  tal que  $r_> = r_< = r'$  se reescribe

$$E_{lm} (r')^{l+2} \left[ l (r')^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+2}} \right] - l E_{lm} (r')^{l+1} \left[ (r')^l - \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+1}} \right] = -4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = -\frac{4\pi}{(2l+1)b^{2l+1}}$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = -\frac{4\pi r_<^l}{(2l+1)b^{2l+1}} \left[ r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = \frac{4\pi r_<^l}{(2l+1)} \left[ \frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right]$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{r_<^l}{(2l+1)} \left[ \frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right].$$

La densidad de carga es proporcional a  $d^2 - z^2$ , pero

$$z = r' \cos(\theta'),$$

luego se tiene que

$$d^2 - z^2 = d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta')$$

y la densidad de carga del sistema será

$$\rho(r', \theta', \phi') = \rho_0 \frac{\left[ d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)],$$

donde la delta angular considera ambos lados del alambre. Como la carga encerrada en la esfera es  $Q$ , se escribe

$$\begin{aligned}
Q &= \int \rho dV \\
&= \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^d \frac{\left[ d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] (r')^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi' \\
&= 2\pi\rho_0 \int_0^{\pi} \int_0^d \left[ d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] dr' d\theta' \\
&= 4\pi\rho_0 \int_0^d \left[ d^2 - (r')^2 \right] dr' \\
&= 4\pi\rho_0 \left[ d^2 (r') - \frac{(r')^3}{3} \right] \Big|_0^d \\
&= \frac{8\pi\rho_0 d^3}{3},
\end{aligned}$$

luego la constante es

$$\rho_0 = \frac{3Q}{8\pi d^3}$$

y la densidad de carga es

$$\rho(r', \theta', \phi') = \frac{3Q}{8\pi d^3} \frac{\left[ d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)]$$

El potencial eléctrico viene dado por la expresión

$$\psi(r, \theta, \phi) = \int \rho(r', \theta', \phi') G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') dV - \frac{1}{4\pi} \oint \psi(r, \theta, \phi) \frac{\partial G}{\partial n_y} dy,$$

donde la primera integral considera la contribución al potencial por densidades de carga y la segunda integral considera las condiciones de borde sobre el problema. Como la esfera está conectada a tierra, la segunda integral es nula, luego el potencial eléctrico será

$$\begin{aligned}
\psi(r, \theta, \phi) &= \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{\left[ d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right]}{(r')^2 \sin(\theta')} [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] \\
&\quad r'_< \left[ \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right] (r')^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi'
\end{aligned}$$

y usando que

$$Y_{lm}^*(\theta', \phi') = N_l^m e^{-im\phi'} P_l^m [\cos(\theta')]$$

el potencial se reescribe como

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, \phi) &= \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{N_l^m Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} \int e^{-im\phi'} P_l^m [\cos(\theta')] \left[ d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] \\ &\quad [\delta(\theta') + \delta(\theta' - \pi)] r'_< \left[ \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right] dr' d\theta' d\phi'\end{aligned}$$

Notar ahora que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-im\phi'} d\phi' &= \frac{i}{m} \int_0^{-2im\pi} e^u du \\ &= \frac{i}{m} [e^{-2im\pi} - 1] \\ &= \frac{i}{m} [\cos(2m\pi) - i\sin(2m\pi) - 1] \\ &= 0 \quad \forall m \neq 0\end{aligned}$$

luego  $m = 0$  tal que  $\psi(r, \theta, \phi) \neq 0$  y se tiene

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, \phi) &= \frac{3Q\pi}{d^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{N_l^0 Y_l^0(\theta, \phi)}{(2l+1)} \int P_l^0 [\cos(\theta')] \left[ d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] [\delta(\theta') + \delta(\theta' - \pi)] \\ &\quad r'_< \left[ \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right] dr' d\theta'\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$Y_l^0(\theta, \phi) = N_l^0 P_l^0[\cos(\theta)] \quad N_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

y el potencial queda

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta, \phi) &= \frac{3Q}{4d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] \int P_l^0 [\cos(\theta')] \left[ d^2 - (r')^2 \cos^2(\theta') \right] [\delta(\theta') + \delta(\theta' - \pi)] \\ &\quad r'_< \left[ \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right] dr' d\theta' \\ &= \frac{3Q}{4d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] [P_l^0(1) + P_l^0(-1)] \int \left[ d^2 - (r')^2 \right] r'_< \left[ \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right] dr'\end{aligned}$$

Como  $P_l^0(1) = 1$  y  $P_l^0(-1) = (-1)^l P_l^0(1) = (-1)^l$ , se tienen las opciones

$$P_l^0(1) + P_l^0(-1) = \begin{cases} 2 & \text{si } l \text{ es par} \\ 0 & \text{si } l \text{ es impar} \end{cases}$$

luego se concluye que

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] \int r'_< \left[ d^2 - (r')^2 \right] \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr'$$

La integral dependerá del tramo, luego para  $r < r' < d$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^r r'_< \left[ d^2 - (r')^2 \right] \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr' &= \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^r (r')^l \left[ d^2 - (r')^2 \right] dr' \\ &= \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[ d^2 \int_0^r (r')^l dr' - \int_0^r (r')^{l+2} dr' \right] \\ &= \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[ \frac{d^2}{(l+1)} (r')^{l+1} \Big|_0^r - \frac{(r')^{l+3}}{(l+3)} \Big|_0^r \right] \\ &= \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[ d^2 \frac{r'^{l+1}}{(l+1)} - \frac{r'^{l+3}}{(l+3)} \right] \end{aligned}$$

y el potencial queda

$$\psi_1(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[ d^2 \frac{r'^{l+1}}{(l+1)} - \frac{r'^{l+3}}{(l+3)} \right]$$

Para el caso  $r' < r < d$  se tendrá

$$\begin{aligned} \int_r^d r'_< \left[ d^2 - (r')^2 \right] \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr' &= r'_< \int_r^d \left[ d^2 - (r')^2 \right] \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr' \\ &= r'_< \left[ d^2 \int_r^d \frac{dr'}{(r')^{l+1}} - \frac{d^2}{b^{2l+1}} \int_r^d (r')^l dr' + \frac{1}{b^{2l+1}} \int_r^d (r')^{l+2} dr' - \int_r^d \frac{dr'}{(r')^{l-1}} \right] \\ &= r'_< \left[ \frac{(r')^{l+3}}{(l+3)b^{2l+1}} \Big|_r^d - \frac{d^2 (r')^{l+1}}{(l+1)b^{2l+1}} \Big|_r^d - \frac{d^2}{l(r')^l} \Big|_r^d + \frac{1}{(l-2)(r')^{l-2}} \Big|_r^d \right] \\ &= r'_< \left[ \frac{(l+3)d^2 r'^{l+1} - (l+1)r'^{l+3} - 2d^{l+3}}{(l+1)(l+3)b^{2l+1}} + \frac{(l-2)r^{-l}d^2 - r^{2-l} + 2d^{2-l}}{l(l-2)} \right] \end{aligned}$$

y el potencial queda

$$\psi_2(r, \theta, \phi) = \frac{3Q}{2d^3} \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[\cos(\theta)] r'_< \left[ \frac{(l+3)d^2 r'^{l+1} - (l+1)r'^{l+3} - 2d^{l+3}}{(l+1)(l+3)b^{2l+1}} + \frac{(l-2)r^{-l}d^2 - r^{2-l} + 2d^{2-l}}{l(l-2)} \right]$$

Por último, para el caso  $r' < d < r$  se escribe

$$\begin{aligned} \int_0^d r'_< \left[ d^2 - (r')^2 \right] \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) dr' &= \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^d (r')^l \left[ d^2 - (r')^2 \right] dr' \\ &= \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[ d^2 \int_0^d (r')^l dr' - \int_0^d (r')^{l+2} dr' \right] \\ &= \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \left[ \frac{d^2}{(l+1)} (r')^{l+1} \Big|_0^d - \frac{(r')^{l+3}}{(l+3)} \Big|_0^d \right] \\ &= \frac{2d^{l+3}}{(l+1)(l+3)} \left( \frac{1}{r'_>} - \frac{r'_>^l}{b^{2l+1}} \right) \end{aligned}$$

y el potencial queda

$$\psi_3(r, \theta, \phi) = 3Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)} \left( \frac{1}{r_>} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

b) La discontinuidad en el campo eléctrico se relaciona con la densidad de carga superficial a través de la relación

$$\left. \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right|_{r=b} = -4\pi\sigma$$

deduciéndose entonces que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right|_{r=b} &= -3Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)} \left[ \frac{l+1}{r_>} + \frac{lr_>^{l-1}}{b^{2l+1}} \right]_{r=b} \\ &= -3Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l (2l+1) P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)b^{l+2}} \end{aligned}$$

por lo que la densidad de carga superficial es

$$\sigma = \frac{3Q}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l (2l+1) P_l^0[\cos(\theta)]}{(l+1)(l+3)b^{l+2}}$$

c) En el límite  $d \ll b$  se puede aproximar la expresión con  $l = 0$ , luego el potencial queda

$$\psi_3(r, \theta, \phi) \approx Q \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

y la densidad de carga queda

$$\sigma \approx \frac{Q}{4\pi b^2}$$

### 8.34 Capacitor de placas paralelas con anillo

Considere un capacitor formado por dos placas paralelas infinitas separadas por una distancia  $L$  y mantenidas a una diferencia de potencial  $V_0$ . Además, dentro de este capacitor tenemos un anillo de radio  $a$ , con una densidad de carga lineal  $\lambda$  constante, puesto en un plano paralelo a las placas, y a la mitad de distancia entre ellas. Construya una función de Green para este problema y resuelva el potencial entre las placas, ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie de los conductores?

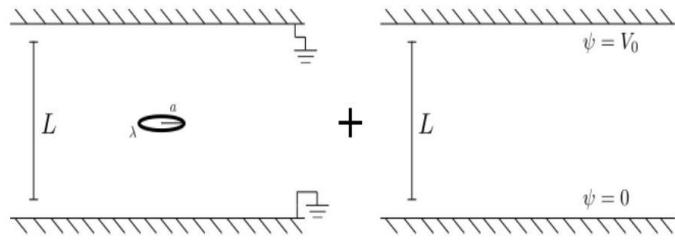
**Solución:**

Se debe resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi(r, \phi, z) = -4\pi\rho(r, \phi, z)$$

para lo cual se calculará la función de Green del sistema, la que cumple con la igualdad

$$\nabla^2 G(r, \phi, z; r', \phi', z') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$



y, puesto que en coordenadas cilíndricas la delta de Dirac se expande de la forma

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) &= \frac{\delta(r - r')}{r'} \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \\ &= \frac{\delta(r - r')}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right)\end{aligned}$$

se propone la función de Green

$$G(r, \phi, z; r', \phi', z') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mn}(r, r') e^{im(\phi - \phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right)$$

Desarrollando el Laplaciano en coordenadas cilíndricas se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla^2 G &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} A_{mn} + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 A_{mn} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) - \left( \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) A_{mn} \right]\end{aligned}$$

e igualando a la delta se llega a la expresión

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) - \left( \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) A_{mn} = -4\pi \frac{\delta(r - r')}{r'},$$

donde al tomar  $r \neq r'$  se obtiene la ecuación de Bessel modificada con solución

$$A_{mn}(r, r') = \begin{cases} B_{mn} I_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) + C_{mn} K_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) & \text{si } r < r' \\ D_{mn} I_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) + E_{mn} K_m\left(\frac{n\pi}{L}r\right) & \text{si } r > r' \end{cases}$$

La función  $K_m(r)$  diverge en  $r = 0$ , mientras que  $I_m(r)$  diverge en  $r \rightarrow \infty$ , luego se deduce que  $C_{mn} = D_{mn} = 0$  y se escribe

$$A_{mn}(r, r') = \begin{cases} B_{mn} I_m(kr) & \text{si } r < r' \\ E_{mn} K_m(kr) & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando las soluciones,

$$A_{mn}(r, r') = F_{mn} I_m(kr_<) K_m(kr_>),$$

donde  $r_< = \min(r, r')$  y  $r_> = \max(r, r')$ . Integrando la discontinuidad en  $r = r'$ , se escribe

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} A_{mn} \left[ \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right] r dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r - r') dr$$

donde la segunda integral es cero por continuidad de la función  $A_{mn}$  y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega entonces a la igualdad

$$\left. \left( r \frac{\partial A_{mn}}{\partial r} \right) \right|_{r'=\varepsilon}^{r'+\varepsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para  $A_{mn}$  y haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que  $r_> = r <= r'$ , se obtiene

$$\begin{aligned} -4\pi &= F_{mn} r_> I_m(kr_<) K'_m(kr_>) - F_{mn} r_< I'_m(kr_<) K_m(kr_>) \\ &= F_{mn} [r' I_m(kr') K'_m(kr') - r' I'_m(kr') K_m(kr')] \\ &= F_{mn} r' \left[ I_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) K'_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) - I'_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) \right] \end{aligned}$$

por lo que la constante será

$$F_{mn} = -\frac{4\pi}{r' \left[ I_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) K'_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) - I'_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L} r'\right) \right]}$$

y la función de Green queda

$$G(r, \phi, z; r', \phi', z') = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im(\phi-\phi')} \sin(kz) \sin(kz') I_m(kr_<) K_m(kr_>)}{r' \left[ I_m(kr') K'_m(kr') - I'_m(kr') K_m(kr') \right]}.$$

El anillo tiene densidad lineal  $\lambda$ , radio  $a$  y se ubica a una distancia  $L/2$  de las placas, por lo que la densidad de carga vendrá dada por

$$\rho(r', \phi', z') = \lambda \delta(r' - a) \delta\left(z' - \frac{L}{2}\right)$$

Para resolver el problema (notar que la segunda integral en la expresión general para el potencial no es cero debido a que las superficies están sometidas a una diferencia de potencial distinta de cero), se utiliza el principio de superposición para dividir el sistema en un caso donde se tiene la densidad de carga (anillo) ubicada entre las dos placas a potencial cero (a tierra) y otro donde no se tiene densidad de carga y las superficies están sometidas al potencial distinto de cero. En el primer caso se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \phi, z) &= \int \rho(r', \phi', z') G(r, \phi, z; r', \phi', z') dV - \frac{1}{4\pi} \oint \psi(r, \phi, z) \frac{\partial G}{\partial n_y} dy \\ &= -4\pi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{e^{im(\phi-\phi')} \sin(kz) \sin(kz') I_m(kr_<) K_m(kr_>)}{r' \left[ I_m(kr') K'_m(kr') - I'_m(kr') K_m(kr') \right]} \delta(r' - a) \\ &\quad \delta\left(z' - \frac{L}{2}\right) r' dr' d\phi' dz' \\ &= -4\pi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(kz) I_m(kr_<) K_m(kr_>) e^{im\phi}}{\left[ I_m(ka) K'_m(ka) - I'_m(ka) K_m(ka) \right]} \int_0^{2\pi} e^{-im\phi'} d\phi', \end{aligned}$$

pero la integral solo es distinta de cero para  $m = 0$ , por lo que

$$\psi_1(r, \phi, z) = -8\pi^2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(kz) I_0(kr_<) K_0(kr_>)}{[I_0(ka)K'_0(ka) - I'_0(ka)K_0(ka)]}.$$

Ahora, usando que

$$I_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right)K'_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) - I'_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right)K_0\left(\frac{n\pi}{L}a\right) = \frac{L}{n\pi a},$$

se obtiene el potencial eléctrico

$$\psi_1(r, \phi, z) = -\frac{8\pi^3\lambda a}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right).$$

El segundo caso debe cumplir con la ecuación de Laplace (puesto que ya no hay una densidad de carga entre las placas) y las condiciones de borde

$$\psi_2(z = L) = V_0 \quad \psi_2(z = 0) = 0$$

y notando que

$$\psi_2(r, \phi, z) = \frac{V_0}{L}z$$

cumple con las condiciones de borde y con que

$$\nabla^2 \psi_2 = \nabla \cdot \nabla \psi_2 = \nabla \cdot \left(0, 0, \frac{V_0}{L}\right) = 0$$

se concluye que  $\psi_2(r, \phi, z)$  es el potencial eléctrico para el segundo caso. De esta manera, el potencial eléctrico total es

$$\psi(r, \phi, z) = \frac{V_0}{L}z - \frac{8\pi^3\lambda a}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right)$$

y el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\nabla \psi = \left[ \frac{8\pi^4\lambda a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right) - \frac{V_0}{L} \right] \hat{z} = E_z \hat{z}$$

Ahora, se tiene que el campo eléctrico externo no es influenciado por el anillo, luego los potenciales son constantes, con  $\psi_{inf} = 0$  y  $\psi_{sup} = V_0$ , deduciéndose que el campo externo es nulo, por lo que tomando  $\hat{n} = \pm \hat{z}$  se obtiene

$$E_z \hat{z} \cdot \hat{z} = 4\pi\sigma_{sup} \quad E_z \hat{z} \cdot (-\hat{z}) = 4\pi\sigma_{inf}$$

y las densidades de carga (evaluando  $z = 0$  y  $z = L$ ) son

$$\sigma_{sup} = \frac{2\pi^3\lambda a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right) - \frac{V_0}{4\pi L}$$

$$\sigma_{inf} = \frac{V_0}{4\pi L} - \frac{2\pi^3\lambda a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) I_0\left(\frac{n\pi}{L}r_<\right) K_0\left(\frac{n\pi}{L}r_>\right)$$

### 8.35 Funciones de Green

Encuentre la función de Green en los siguientes casos.

- Esférica en el vacío (condición de borde en infinito).
- Cascarón esférico conductor de radio  $b$ .
- Esféricas conductoras concéntricas de radios  $a < b$ .
- Utilice el resultado del cascarón esférico de radio  $b$  para encontrar el potencial interior de la esfera cuando se posiciona un anillo de radio  $a$  y carga  $Q$  concéntrica a la esfera.

**Solución:**

Se debe resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) = -4\pi\rho(r, \theta, \phi)$$

para lo cual se calculará primero la función de Green del sistema, la cual cumple con

$$\nabla^2 G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (8.71)$$

En coordenadas esféricas, la delta de Dirac puede expandirse de la forma

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{\delta(r - r')}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \\ \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{\delta(r - r')}{(r')^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \end{aligned} \quad (8.72)$$

por lo que se propone la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r, r') Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

Usando la identidad para los esféricos armónicos

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

se deduce que

$$\nabla^2 G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (8.73)$$

Reemplazando la Ec. (8.72) y la Ec. (8.73) en la Ec. (8.71) se llega a la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{lm} = -4\pi \frac{\delta(r - r')}{(r')^2}, \quad (8.74)$$

la cual para  $r \neq r'$  corresponde a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) - l(l+1)R_{lm} = 0$$

con solución

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r < r' \\ C_{lm}r^l + D_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r > r' \end{cases}$$

a) Como la solución no puede diverger en  $r = 0$ , se deduce que  $B_{lm} = 0$ . De igual manera,  $C_{lm} = 0$  debido a que la solución no puede diverger para  $r \rightarrow \infty$ , ya que se debe cumplir que  $\psi(r \rightarrow \infty) = 0$ . Se escribe entonces

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm}r^l & \text{si } r < r' \\ D_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}},$$

donde  $r_< = \min(r, r')$  y  $r_> = \max(r, r')$ . Para encontrar la constante  $E_{lm}$  se debe integrar la discontinuidad  $r = r'$  en la Ec. (8.74), esto se hace pensando en una lámina de grosor  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que  $r_> = r' + \varepsilon$  y  $r_< = r' - \varepsilon$ , luego

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} l(l+1)R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r - r') dr$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left. \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para  $R_{lm}(r, r')$  se obtiene

$$E_{lm} \left[ (l+1) \frac{r_<^l}{r_>} + l \frac{r_<^{l+1}}{r_>} \right] = 4\pi$$

Considerando  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que  $r_> = r_< = r'$  se reescribe

$$E_{lm}[(l+1) + l] = 4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = \frac{4\pi}{(2l+1)}$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = \frac{4\pi}{(2l+1)} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

b) Como la solución no puede diverger en  $r = 0$ , se deduce que  $B_{lm} = 0$ , mientras que de la condición de borde

$$\psi(r = b) = 0$$

se obtiene

$$D_{lm} = -C_{lm} b^{2l+1}$$

y la solución queda

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < r' \\ C_{lm} [r^l - b^{2l+1} r^{-(l+1)}] & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} r_<^l \left[ r_>^l - b^{2l+1} r_>^{-(l+1)} \right],$$

donde  $r_< = \min(r, r')$  y  $r_> = \max(r, r')$ . Para encontrar la constante  $E_{lm}$  se debe integrar la discontinuidad  $r = r'$  en la Ec. (8.74), esto se hace pensando en una lámina de grosor  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que  $r_> = r' + \varepsilon$  y  $r_< = r' - \varepsilon$ , luego

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} l(l+1) R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \delta(r - r') dr$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left. \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para  $R_{lm}(r, r')$  se obtiene

$$E_{lm} r_>^2 r_<^l \left[ l r_>^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+2}} \right] - l E_{lm} r_<^{l+1} \left[ r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = -4\pi$$

Considerando  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que  $r_> = r_< = r'$  se reescribe

$$E_{lm}(r')^{l+2} \left[ l (r')^{l-1} + (l+1) \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+2}} \right] - l E_{lm}(r')^{l+1} \left[ (r')^l - \frac{b^{2l+1}}{(r')^{l+1}} \right] = -4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = -\frac{4\pi}{(2l+1)b^{2l+1}}$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = -\frac{4\pi r_<^l}{(2l+1)b^{2l+1}} \left[ r_>^l - \frac{b^{2l+1}}{r_>^{l+1}} \right] = \frac{4\pi}{(2l+1)} \left[ \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{1}{b} \left( \frac{r_<r_>}{b^2} \right)^l \right]$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \left[ \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{r_<^l r_>^l}{b^{2l+1}} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

la cual para  $b \rightarrow \infty$ , coincide con la expresión de la esfera posicionada en el vacío con condiciones de borde solo en infinito.

c) Puesto que ambas superficies son conductoras, para la esfera interior de radio  $a$  se tiene que  $\psi(r=a)=0$ , luego

$$A_{lm}a^l + B_{lm}a^{-(l+1)} = 0,$$

mientras que para la esfera de radio  $b$  se cumple

$$C_{lm}b^l + D_{lm}b^{-(l+1)} = 0.$$

En la primera condición se despeja  $B_{lm}$  en función de  $A_{lm}$  (puesto que no se quiere divergencia en  $r=0$ ) y para la segunda se despeja  $C_{lm}$  en función de  $D_{lm}$  (puesto que no se quiere divergencia en  $r \rightarrow \infty$ ), así

$$B_{lm} = -A_{lm}a^{2l+1} \quad C_{lm} = -D_{lm}b^{-(2l+1)}$$

y la solución queda

$$R_{lm}(r, r') = \begin{cases} A_{lm} \left( r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) & \text{si } r < r' \\ D_{lm} \left( \frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) & \text{si } r > r' \end{cases}$$

o, pegando ambas expresiones,

$$R_{lm}(r, r') = E_{lm} \left( r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

donde  $r_< = \min(r, r')$  y  $r_> = \max(r, r')$ . Para encontrar la constante  $E_{lm}$  se debe integrar la discontinuidad  $r=r'$  en la Ec. (8.74)), esto se hace pensando en una lámina de grosor  $\epsilon \rightarrow 0$  tal que  $r_> = r' + \epsilon$  y  $r_< = r' - \epsilon$ , luego

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) dr - \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} l(l+1) R_{lm} dr = -4\pi \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \delta(r - r') dr$$

donde la segunda integral es cero por continuidad y la tercera es uno por propiedad de la delta de Dirac. Integrando se llega a la igualdad

$$\left. \left( r^2 \frac{\partial R_{lm}}{\partial r} \right) \right|_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} = -4\pi$$

y reemplazando la solución para  $R_{lm}(r, r')$  se obtiene

$$-E_{lm}r_>^2 \left( r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left( \frac{l+1}{r_>^{l+2}} + \frac{lr_>^{l-1}}{b^{2l+1}} \right) - E_{lm}r_<^2 \left( lr_<^{l-1} + \frac{(l+1)a^{2l+1}}{r_<^{l+2}} \right) \left( \frac{1}{r_>^{l+1}} + \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) = -4\pi$$

Considerando  $\varepsilon \rightarrow 0$  tal que  $r_> = r_< = r'$  se reescribe

$$E_{lm} \left[ (2l+1) - (2l+1) \frac{a^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right] = 4\pi$$

y despejando la constante se obtiene

$$E_{lm} = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]},$$

lo que permite escribir la función radial

$$R_{lm}(r, r') = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left( r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right)$$

y la función de Green

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1) \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left( r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right),$$

la cual para  $a = 0$  y  $b \rightarrow \infty$ , coincide con la expresión de la esfera posicionada en el vacío con condiciones de borde solo en infinito. d) La densidad de carga del anillo viene dada por la expresión

$$\rho(r', \theta', \phi') = \rho_0 \frac{\delta(r' - a)}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta' - \pi/2)$$

donde se debe resolver

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho(r', \theta', \phi') dV \\ &= \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^b \frac{\delta(r' - a)}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta' - \pi/2) (r')^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi' \\ &= 2\pi \rho_0 \int_0^\pi \int_0^b \delta(r' - a) \delta(\theta' - \pi/2) dr' d\theta' \\ &= 2\pi \rho_0 \end{aligned}$$

luego la densidad de carga se escribe

$$\rho(r', \theta', \phi') = \frac{Q}{2\pi} \frac{\delta(r' - a)}{(r')^2 \sin(\theta')} \delta(\theta' - \pi/2)$$

De esta manera, el potencial eléctrico será (la segunda integral es cero debido a que la esfera es conductora)

y usando que

$$Y_{lm}^*(\theta', \phi') = N_l^m e^{im\phi'} P_l^m [\cos(\theta')]$$

se deduce que  $\psi(r, \theta, \phi) \neq 0$  solo para  $m = 0$ , luego

$$\psi(r, \theta, \phi) = 4\pi Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(N_l^0)^2 P_l^0[\cos(\theta)]}{(2l+1)} \left[ \frac{r'_<}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left( \frac{r'_<r'_>}{a^2} \right)^l \right] \int_0^\pi P_l^0[\cos(\theta')] \delta(\theta' - \pi/2) d\theta'$$

Para armónicos esféricos se tiene que

$$N_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

concluyéndose el potencial eléctrico

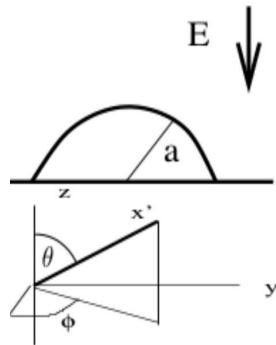
$$\psi(r, \theta, \phi) = Q \sum_{l=0}^{\infty} P_l^0[0] r'_< \left( \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'_>^l}{a^{2l+1}} \right) P_l^0[\cos(\theta)]$$

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) &= \int \rho(r', \theta', \phi') G(r, \theta, \phi) dV - \frac{1}{4\pi} \oint \psi(r, \theta, \phi) \frac{\partial G}{\partial n_y} dy \\ &= 2Q \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)} \left[ \frac{r'_<^l}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left( \frac{r'_<r'_>}{a^2} \right)^l \right] \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^b \delta(r' - a) \delta(\theta' - \pi/2) \\ &\quad Y_{lm}^*(\theta', \phi') dr' d\theta' d\phi' \end{aligned}$$

### 8.36 Plano con semiesfera dieléctrica

Suponga un plano infinito conductor a tierra ( $\psi = 0$ ) con una semiesfera dieléctrica de radio  $r < a$  en el origen del plano conductor.

- Asuma un campo eléctrico asintótico uniforme  $E_0$  en la dirección  $-\hat{z}$  para  $r \rightarrow \infty$ . Encuentre el potencial en todo el espacio.
- Encuentre la función de Green para  $r > a$ .



#### Solución:

- Puesto que  $m = 0$  por simetría azimutal, el potencial eléctrico tiene la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] Y_l^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ \sum_{l=0}^{\infty} [C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}] Y_l^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

deduciéndose que  $B_l = 0$  tal que el potencial no diverge en  $r = 0$ . Por otro lado, se tiene un campo eléctrico constante asintótico  $E_0$  en la dirección  $z$  (ver Figura), por lo que al usar la relación  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\psi$ , se obtiene

$$\psi_{r \rightarrow \infty}(r, \theta, \phi) = - \int_z^0 E_0(-\hat{z}) \cdot dz' \hat{z} = -E_0 z = -E_0 r \cos(\theta)$$

Ahora, evaluando  $r \rightarrow \infty$  en el potencial propuesto,

$$\psi_{r \rightarrow \infty}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l Y_l^0(\theta, \phi)$$

e igualando ambas expresiones

$$-E_0 r \cos(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l Y_l^0(\theta, \phi)$$

deduciéndose que  $l = 1$  (de manera que calcen los exponentes de  $r$ ), luego se escribe

$$r C_1 Y_1^0(\theta, \phi) = -r E_0 \cos(\theta)$$

Usando que

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta),$$

se concluye el valor de la constante

$$C_1 = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_0$$

Reescribiendo el potencial para  $l = 1$  se obtiene

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} r A_1 Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ [r C_1 + r^{-2} D_1] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

y por continuidad en  $r = a$ ,

$$A_1 = C_1 + a^{-3} D_1$$

con lo que se vuelve a reescribir

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} [r C_1 + a^{-3} r D_1] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ [r C_1 + r^{-2} D_1] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

Puesto que en dieléctricos la componente paralela de la corriente de desplazamiento  $\vec{D}$  es continua, es decir

$$\left( \vec{D}_{out} \Big|_{r=a} - \vec{D}_{in} \Big|_{r=a} \right) \cdot \hat{r} = 0$$

y usando que  $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = -\epsilon \vec{\nabla} \psi$ , con  $\epsilon$  la constante dieléctrica, se tiene que solo sobreviven las componentes del gradiente paralelas a  $\hat{r}$  (las derivadas respecto a  $r$ ), así

$$\begin{aligned} 0 &= (C_1 - 2D_1 a^{-3}) Y_1^0(\theta, \phi) - \epsilon (C_1 + D_1 a^{-3}) Y_1^0(\theta, \phi) \\ &= C_1 - \epsilon C_1 - 2D_1 a^{-3} - \epsilon D_1 a^{-3} \\ &= -C_1(\epsilon - 1) - D_1 a^{-3}(\epsilon + 2) \end{aligned}$$

y despejando la constante  $D_1$  se concluye

$$D_1 = -C_1 a^3 \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)$$

y el potencial eléctrico queda

$$\psi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} rC_1 \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r < a \\ rC_1 \left[ 1 - \frac{a^3}{r^3} \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right] Y_1^0(\theta, \phi) & \text{si } r > a \end{cases}$$

o, pegando las soluciones,

$$\psi(r, \theta, \phi) = rC_1 \left[ 1 - \frac{a^3}{r^3} \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right] Y_1^0(\theta, \phi)$$

Usando los valores de  $C_1$  e  $Y_1^0(\theta, \phi)$  se obtiene

$$\psi(r, \theta, \phi) = -rE_0 \cos(\theta) \left[ 1 - \frac{a^3}{r^3} \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \right]$$

b) La función de Green para una esfera en el vacío es

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(2l+1)} \left( \frac{r'_<}{r'_>} \right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi)$$

pero al tenerse dos espacios separados por el dieléctrico, se escribe

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi) \Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1)} \begin{cases} \frac{A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}}{r'_>} & \text{si } r < a \\ \frac{r'_< + C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-(l+1)}}{r'_>} & \text{si } r > a \end{cases}$$

donde el término  $r'_< r'^{-(l+1)}$  aparece solo fuera del dieléctrico puesto que dentro se tienen cargas libres que cumplen con la ecuación de Laplace (la densidad de carga se considera por fuera de la superficie). También es importante mencionar que, al ser una semiesfera, los armónicos esféricos deben cumplir con las condiciones angulares  $\psi(\theta = 0) = \psi(\theta = \pi) = 0$ , lo que obliga a redefinir los armónicos esféricos modificados

$$\Omega_{lm}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi) \sin(\theta) \quad \Omega_{lm}^*(\theta', \phi') = Y_{lm}^*(\theta', \phi') \sin(\theta')$$

que cumplen las condiciones de borde angulares. Nuevamente, es inmediato que  $B_{lm} = 0$  tal que no diverge en  $r = 0$  y  $C_{lm} = 0$  tal que no diverge en  $r \rightarrow \infty$ , así

$$G(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi)\Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1)} \begin{cases} A_{lm}r^l & \text{si } r < a \\ \frac{r'_<}{r'^{l+1}} + D_{lm}r^{-(l+1)} & \text{si } r > a \end{cases}$$

Por continuidad en  $r = a$  se escribe

$$A_{lm} = \frac{1}{r'^{l+1}} + \frac{D_l}{a^{2l+1}}, \quad (8.75)$$

mientras que de la continuidad en la componente paralela de la corriente de desplazamiento  $\vec{D}$  se deduce la relación

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \left( -\frac{\partial G_{\text{out}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} - \left( -\frac{\partial G_{\text{in}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \right] \cdot \hat{r} \\ &= \left( \frac{\partial G_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \frac{\partial G_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a} \right) \cdot \hat{r} \\ &= l\varepsilon A_{lm}a^{l-1} - \left[ \frac{la^{l-1}}{r'^{l+1}} - (l+1)\frac{D_{lm}}{a^{l+2}} \right] \end{aligned}$$

o, reescribiéndolo,

$$\varepsilon A_{lm} = \frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{(l+1)D_{lm}}{la^{2l+1}}. \quad (8.76)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones compuesto por la Ec. (8.75) y la Ec. (8.76) se obtiene

$$\begin{aligned} A_{lm} &= \frac{2l+1}{r'^{l+1}[l(\varepsilon+1)+1]}, \\ D_{lm} &= -\frac{la^{2l+1}(\varepsilon-1)}{r'^{l+1}[l(\varepsilon+1)+1]}, \end{aligned}$$

luego la función de Green para  $r < a$  será

$$G_{r<a}(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi)\Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{[l(\varepsilon+1)+1]} \left( \frac{r'^l}{r'^{l+1}} \right)$$

y para  $r > a$  será

$$G_{r>a}(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Omega_{lm}(\theta, \phi)\Omega_{lm}^*(\theta', \phi')}{(2l+1)} \left[ \frac{r'_<}{r'^{l+1}} - \left( \frac{1}{r'^{l+1}} \right) \frac{la^{2l+1}(\varepsilon-1)}{r'^{l+1}[l(\varepsilon+1)+1]} \right]$$

### 8.37 Plasma

Un medio dieléctrico consistente en cargas libres positivas y negativas (un plasma) responde a los campos eléctricos suavemente variables en el espacio, manteniendo el equilibrio térmico, de manera que

$$n_i(z) \approx n_{i0} \exp \left[ -\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right]$$

donde  $\Phi(z)$  es el potencial electrostático,  $T$  es la temperatura,  $q_i$  es la carga de la partícula  $i$  y  $n_{i0}$  es la densidad de la partícula  $i$  cuando  $\Phi(z) = 0$ , expresada en cantidad de partículas por unidad de volumen.

a) Demuestre que si el potencial es pequeño, la densidad de carga neta está dada por

$$\rho(z) = -\frac{\Phi(z)}{4\pi\lambda^2} \quad \frac{1}{\lambda^2} = 4\pi \sum_i \frac{n_{i0} q_i^2}{k_B T}$$

b) Suponga que un electrodo con forma de plano infinito con densidad de carga  $\sigma$  se inserta en el plasma en  $z = 0$ . Calcule el potencial  $\Phi(z)$  en ambos lados del electrodo.

c) ¿Qué condición debe cumplir  $\sigma$  tal que la solución sea válida?

d) Encuentre la densidad de polarización  $\vec{P}$  para este plasma.

### Solución:

a) La densidad de carga de un material viene dada, en general, por la expresión

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

con  $Q$  la carga encerrada en un volumen  $V$ . Esto implica que se puede escribir

$$\rho(z) = \sum_i q_i n_i(z)$$

donde  $n_i$  se define como la cantidad de partículas por unidad de volumen. De la aproximación en el enunciado se deduce que

$$\rho(z) \approx \sum_i q_i n_{i0} \exp \left[ -\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right]$$

y expandiendo en series de Taylor en torno a  $z = 0$  se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(z) &\approx \sum_i q_i n_{i0} \left[ 1 - \frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right] \\ &= \sum_i q_i n_{i0} - \sum_i \frac{q_i^2 n_{i0} \Phi(z)}{k_B T} \end{aligned}$$

Ahora, el primer término corresponde a la densidad de carga del plasma cuando  $\Phi(z) = 0$ , ya que  $n_{i0}$  es la densidad de la partícula  $i$  cuando  $\Phi(z) = 0$ , pero al ser cargas libres (no interactúan entre sí, por lo que no hay un potencial interno), la densidad de carga se anula y el primer término es cero. Otra forma de convencerse de que  $n_{i0}$  es la densidad de partículas cuando  $\Phi(z) = 0$  es que el primer término corresponde a  $\rho(z)$  cuando el argumento de la exponencial es cero (tal que su valor sea uno), luego

$$\exp \left[ -\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \right] = 1$$

y aplicando el logaritmo natural,

$$-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} = 0$$

pero  $q_i \neq 0$  (puesto que solo hay cargas positivas y negativas),  $T \neq 0$  (puesto que no se puede alcanzar el cero absoluto) y  $k_B \neq 0$  (puesto que es la constante de Boltzmann con valor aproximado  $\sim 1.38 \times 10^{-23} [\text{J K}^{-1}]$ ), luego cuando la cantidad de partículas por unidad de volumen del plasma es  $n_{i0}$ , se cumple que  $\Phi(z) = 0$  y como son cargas libres (no interactúan entre sí, por lo que no hay un potencial interno), se concluye nuevamente que

$$\sum_i q_i n_{i0} = 0$$

escribiéndose la densidad de carga

$$\begin{aligned} \rho(z) &= -\sum_i \frac{q_i^2 n_{i0} \Phi(z)}{k_B T} \\ &= -\frac{\Phi(z)}{4\pi\lambda^2} \end{aligned}$$

b) La introducción del electrodo (conductor eléctrico utilizado para hacer contacto con la parte no metálica de un circuito, por ejemplo, los electrodos en las baterías), divide el potencial en dos regiones, luego de la ecuación de Poisson en coordenadas rectangulares

$$\nabla^2 \Phi(z) = -4\pi\rho(z)$$

se deduce que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\Phi(z)}{\lambda^2}$$

ecuación diferencial con soluciones exponenciales de la forma

$$\Phi(z) = \begin{cases} Ae^{z/\lambda} + Be^{-z/\lambda} & \text{si } z < 0 \\ Ce^{z/\lambda} + De^{-z/\lambda} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

Puesto que el potencial (en ambas direcciones) debe cumplir que en  $z \rightarrow \infty$  ( $z \rightarrow -\infty$ ) sea cero, se tiene que  $B = 0$  (tal que la expresión no diverge en infinito) y  $C = 0$  (mismo argumento), luego se escribe

$$\Phi(z) = \begin{cases} Ae^{z/\lambda} & \text{si } z < 0 \\ De^{-z/\lambda} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

De la continuidad en  $z = 0$  se deduce que  $A = D$ , escribiéndose

$$\Phi(z) = \begin{cases} Ae^{z/\lambda} & \text{si } z < 0 \\ Ae^{-z/\lambda} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

De la discontinuidad en el campo se tiene que

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial \Phi_>}{\partial z} \right|_{z=0} = 4\pi\sigma$$

y reemplazando la solución del potencial se obtiene

$$\frac{2A}{\lambda} = 4\pi\sigma,$$

luego el potencial queda

$$\Phi(z) = \begin{cases} 2\pi\lambda\sigma e^{z/\lambda} & \text{si } z < 0 \\ 2\pi\lambda\sigma e^{-z/\lambda} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

c) La solución fue obtenida bajo la premisa de que la expansión

$$e^x \approx 1 + x + \dots$$

es válida, lo cual solo ocurre para  $x \ll 1$ , luego

$$-\frac{q_i \Phi(z)}{k_B T} \ll 1$$

y reemplazando el potencial (considerando  $z = 0$ , donde se hizo la expansión)

$$2\pi\lambda\sigma \gg \frac{k_B T}{q_i},$$

por lo que la condición tal que la solución sea válida es

$$\sigma \gg \frac{k_B T}{2\pi\lambda q_i}$$

d) El plasma siente la contribución del campo eléctrico producto del electrodo, que debido al comportamiento dieléctrico del plasma (con  $\epsilon \sim 1$  debido a que, esencialmente, se tiene solo vacío y con la gran suposición de que la constante dieléctrica del plasma no depende del tiempo ni la temperatura), viene dado por la expresión

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ &= 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) \hat{z} \end{aligned}$$

mientras que el campo eléctrico debido al potencial aplicado sobre el plasma es

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) e^{z/\lambda} & \text{si } z < 0 \\ 2\pi\sigma \operatorname{sgn}(z) e^{-z/\lambda} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

por lo que la polarización del plasma será

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi} [\vec{D} - \vec{E}]$$

y separando por regiones, para  $z > 0$  se tiene

$$\vec{P}_> = \frac{\operatorname{sgn}(z)}{4\pi} [2\pi\sigma - 2\pi\sigma e^{-z/\lambda}] \hat{z} = \frac{\sigma}{2} (1 - e^{-z/\lambda}) \hat{z}$$

y para  $z < 0$  se tiene

$$\vec{P}_< = \frac{\text{sgn}(z)}{4\pi} \left[ 2\pi\sigma - 2\pi\sigma e^{z/\lambda} \right] \hat{z} = -\frac{\sigma}{2} \left( 1 - e^{z/\lambda} \right) \hat{z}$$

es decir,

$$\vec{P} = \text{sgn}(z) \frac{\sigma}{2} \left[ 1 - e^{-\text{sgn}(z)z/\lambda} \right] \hat{z}$$

### 8.38 Semiesfera dipolar

Sea una semiesfera de radio  $r = a$  hecha de material dipolar eléctrico permanente y puesto sobre un conductor plano infinito. La dirección de  $\vec{P}$  es perpendicular a la superficie del conductor. Calcule el campo eléctrico  $\vec{E}$  producido por esta configuración.



Figure 8.13: (a) Semiesfera con  $\vec{P}$  constante

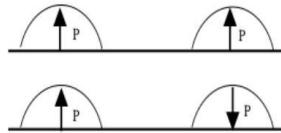


Figure 8.14: (b) Posibles configuraciones

#### Solución:

El potencial general para una configuración esférica tiene la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \left[ A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right]$$

donde  $\Omega_l^m(\theta, \phi)$  es el armónico esférico modificado dado por

$$\Omega_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) \sin(\phi)$$

tal que se cumplan las condiciones angulares  $\psi(\phi = 0) = \psi(\phi = \pi) = 0$  (que es donde la semiesfera hace contacto con el plano conductor). Notar que se piensa la semiesfera como si estuviese posicionada en el plano  $x - z$ , luego tanto  $\theta$  como  $\phi$  quedan en el intervalo  $[0, \pi]$ . Dividiendo el potencial en ambas regiones (dentro y fuera de la semiesfera)

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r < a \\ C_{lm} r^l + D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > a \end{cases}$$

donde  $B_{lm} = 0$  tal que el potencial no diverge en  $r = 0$  y  $C_{lm} = 0$  tal que el potencial no diverge en  $r \rightarrow \infty$ , escribiéndose entonces

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < a \\ D_{lm} r^{-(l+1)} & \text{si } r > a \end{cases}$$

De la continuidad del potencial en  $r = a$  se deduce que

$$D_{lm} = A_{lm} a^{2l+1}$$

y reemplazando en la solución se tiene

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Omega_l^m(\theta, \phi) \begin{cases} A_{lm} r^l & \text{si } r < a \\ A_{lm} \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} & \text{si } r > a \end{cases}$$

La condición de material dipolar establece que existe una discontinuidad en la componente paralela de la corriente de desplazamiento  $\vec{D}$  igual a  $4\pi$  veces el vector de densidad de polarización  $\vec{P}$ , luego

$$\left( \vec{D}_{out} \Big|_{r=a} - \vec{D}_{in} \Big|_{r=a} \right) \cdot \hat{r} = 4\pi \vec{P} \cdot \hat{r}$$

Puesto que en este caso  $\vec{D} = -\vec{\nabla} \psi$ , se escribe

$$\frac{\partial \psi_{in}}{\partial r} \Big|_{r=a} - \frac{\partial \psi_{out}}{\partial r} \Big|_{r=a} = 4\pi \vec{P} \cdot \hat{r}$$

luego, como el vector unitario  $\hat{r}$  de la configuración esférica es

$$\hat{r} = \sin(\phi) \cos(\theta) \hat{x} + \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{y} + \cos(\phi) \hat{z}$$

y el vector de densidad de polarización es perpendicular a la superficie tal que

$$\vec{P} = P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \hat{y}$$

donde  $P$  es la magnitud de la polarización y las cantidades  $\phi_0$  y  $\theta_0$  son los ángulos de la polarización del material (notar que las tres cantidades son constantes, puesto que la polarización del material dipolar es permanente), la condición dipolar queda

$$\Omega_l^m(\theta, \phi) \left[ A_{lm} l a^{l-1} + (l+1) A_{lm} a^{l-1} \right] = 4\pi P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \sin(\phi) \cos(\theta)$$

Usando que

$$\Omega_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) \sin(\phi)$$

se deduce que  $l = 1$  y  $m = 0$  tal que se pueda escribir

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$$

obteniéndose la igualdad

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} [A_1^0 + 2A_1^0] = 4\pi P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0)$$

luego la constante es

$$A_1^0 = \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0)$$

y el potencial eléctrico queda

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta) \sin(\phi) \begin{cases} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) r & \text{si } r < a \\ \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{3/2} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \frac{a^3}{r^2} & \text{si } r > a \end{cases}$$

o, pegando ambas soluciones,

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{4\pi}{3} P \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) \left( \frac{r_-^3}{r^2} \right)$$

con  $r_- = \min(r, a)$ . Finalmente, puesto que en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{\phi} = 0$$

para el campo eléctrico exterior se obtiene

$$\vec{E}_> = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{a}{r} \right)^3 P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) [2 \sin(\phi) \cos(\theta) \hat{r} + \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{\theta} - \cot(\theta) \cos(\phi) \hat{\phi}],$$

mientras que para el campo interior se escribe

$$\vec{E}_< = -\frac{4\pi}{3} P \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) [\sin(\phi) \cos(\theta) \hat{r} - \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{\theta} + \cot(\theta) \cos(\phi) \hat{\phi}].$$

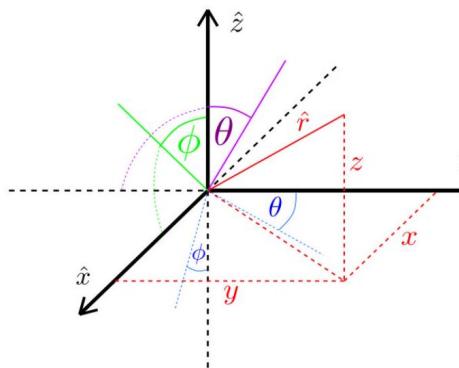


Figure 8.15: Nueva configuración esférica tras “posicionar” la semiesfera en el plano  $x - z$  (azul para los ejes originales tras pasar al plano  $x - z$ , verde para el nuevo eje  $\phi$  ) y morado para el eje  $\theta$ .

### 8.39 Campos radiados por mitades de una esfera

Dos mitades de una esfera de radio  $R$  tienen un voltaje opuesto  $V(t) = \pm V_0 \cos(\omega t)$ . En el límite de grandes longitudes de onda, encuentre los campos radiados, la distribución angular de poder radiado y todo el poder radiado por la esfera.

**Solución:**

Puesto que se tiene simetría azimutal, el potencial eléctrico puede escribirse de la forma

$$\Phi(r, \theta) = e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l[\cos(\theta)] H_l^{(1)}(kr)$$

donde  $A_l$  es una constante,  $P_l$  son los polinomios de Legendre y  $H_l$  las funciones de Hankel de primer tipo. Notar que se escribe la dependencia temporal como una exponencial por simplicidad, la dependencia angular (que debiese corresponder a armónicos esféricos) se reduce al polinomio de Legendre por una constante debido a que  $m = 0$  por simetría azimutal y la dependencia radial corresponde a la función de Hankel, que denota el hecho de que la esfera está radiando hacia el infinito en dirección radial. Debido a este análisis, las condiciones de borde pasan a ser

$$\begin{aligned}\Phi(r = R, \theta < \pi/2) &= V_0 e^{-i\omega t} \\ \Phi(r = R, \theta > \pi/2) &= -V_0 e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

Puesto que  $\cos(\theta) > 0$  si  $\theta < \pi/2$  y  $\cos(\theta) < 0$  si  $\theta > \pi/2$ , es irrelevante dónde se evalúan estas condiciones, puesto que los signos se anularán de todas formas (recordar que por la paridad de los polinomios de Legendre, se puede sacar el signo). De esta manera, usando la condición de ortogonalidad de los polinomios asociados de Legendre

$$\int_0^\pi P_l[\cos(\theta)] P_{l'}[\cos(\theta)] \sin(\theta) d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

se llega a que

$$\begin{aligned}V_0 e^{-i\omega t} \int_0^\pi P_l[\cos(\theta)] \sin(\theta) d\theta &= e^{-i\omega t} A_l H_l^{(1)}(kR) \int_0^\pi P_l[\cos(\theta)] P_l[\cos(\theta)] \sin(\theta) d\theta \\ V_0 e^{-i\omega t} \int_0^1 P_l(x) dx &= e^{-i\omega t} \left( \frac{2}{2l+1} \right) A_l H_l^{(1)}(kR) \\ V_0 \left[ \frac{P_{l-1}(x)}{l+1} \right] &= \left( \frac{2}{2l+1} \right) A_l H_l^{(1)}(kR)\end{aligned}$$

concluyéndose que

$$A_l = \frac{V_0}{H_l^{(1)}(kR)} \left[ \frac{(2l+1)P_{l-1}(x)}{2(l+1)} \right].$$

Con esto, el potencial queda de la forma

$$\Phi(r, \theta) = V_0 e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} P_l[\cos(\theta)] \frac{H_l^{(1)}(kr)}{H_l^{(1)}(kR)} \left[ \frac{(2l+1)P_{l-1}(x)}{2(l+1)} \right]$$

y como en la aproximación para grandes longitudes de onda, se tiene que  $r \ll \lambda$ , luego  $kr \ll 1$ , se puede escribir

$$H_l^{(1)}(kr \ll 1) \sim \frac{1}{(kr)^{l+1}}$$

con lo cual el potencial se reescribe como

$$\Phi(r, \theta) = V_0 e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} P_l[\cos(\theta)] \frac{R^{l+1}}{r^{l+1}} \left[ \frac{(2l+1)P_{l-1}(x)}{2(l+1)} \right]$$

Para simplificar el problema, se busca la potencia radiada a distancias cercanas dada por  $l = 1$ , luego se llega a que

$$\Phi(r, \theta) = V_0 \frac{3R^2}{4r^2} e^{-i\omega t} \cos(\theta)$$

y por analogía con el potencial para un dipolo eléctrico (escogiendo  $\vec{r}$  en la dirección  $\hat{z}$ , sin perder generalidad), dado por la expresión

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{p}{r^2} \cos(\theta)$$

se deduce que el momento dipolar del sistema es

$$\vec{p} = V_0 \frac{3R^2}{4} e^{-i\omega t} \hat{z}.$$

Ahora, considerando que en coordenadas esféricas

$$\hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta},$$

el campo magnético vendrá dado por

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{k^2}{r} e^{ikr} (\hat{r} \times \vec{p}) \\ &= V_0 k^2 \frac{3R^2}{4r} e^{i(kr - \omega t)} (\hat{r} \times [\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}]) \\ &= -V_0 k^2 \frac{3R^2}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \sin(\theta) \hat{\phi} \end{aligned}$$

mientras que el campo eléctrico será

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{B} \times \hat{r} \\ &= -V_0 k^2 \frac{3R^2}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \sin(\theta) \hat{\phi} \times \hat{r} \\ &= -V_0 k^2 \frac{3R^2}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \sin(\theta) \hat{\theta}. \end{aligned}$$

Conociendo el campo electromagnético, el vector de Poynting queda de la forma

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi r^2} \sin^2(\theta) e^{i(kx - \omega t)} \cdot e^{-i(kr - \omega t)} \hat{\theta} \times \hat{\phi} \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi r^2} \sin^2(\theta) \hat{r}
\end{aligned}$$

por lo que la distribución angular de poder radiado será

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial \Omega} &= r^2 \vec{S} \cdot \hat{r} \\
&= r^2 \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi r^2} \sin^2(\theta) \hat{r} \cdot \hat{r} \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi} \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

Finalmente, integrando respecto al ángulo sólido se obtiene el poder radiado por la esfera

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi} \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{64\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta d\phi \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{32} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \\
&= \frac{9V_0^2 k^4 R^4 c}{32} \left( \frac{4}{3} \right) \\
&= \frac{3V_0^2 k^4 R^4 c}{8} \\
&= \frac{3V_0^2 \omega^4 R^4}{8c^3}
\end{aligned}$$

## 8.40 Dinámica del plasma

Considere un plasma estacionario de electrones y protones de densidad  $n_0$  en un campo magnético  $B_0$  en dirección  $x$  entre dos conductores perfectos. Así, dado un campo eléctrico y magnético, se tiene la ecuación de movimiento para electrones y protones

$$mn \frac{d\vec{v}}{dt} = qn \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

a) Demuestre que la evolución para la velocidad del centro de masas  $\vec{U}$  está dada por

$$v \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$$

con  $v$  la densidad de masa,  $\rho$  la densidad de carga y  $\vec{J}$  la densidad de corriente. Use que en un plasma  $n_e = n_p = n_0 \sim \text{cte}$ , luego  $\rho = \text{cte}$ .

b) Dado que para velocidades no relativistas la corriente de desplazamiento no contribuye a la ecuación de Ampère, es decir,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

se encuentra la expresión para la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \left( \vec{E} + \frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \right)$$

con  $\sigma$  la conductividad eléctrica del plasma, ¿Bajo qué condiciones tiene esto sentido? Recorriendo que en el sistema de referencia de las partículas  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , Cuál es la ecuación para  $\vec{E}$ , dado que la conductividad es extremadamente alta en un plasma?

c) Utilice la ecuación de Faraday para encontrar las ecuaciones acopladas de  $\vec{U}$  y  $\vec{B}$ . d) Asuma una pequeña perturbación de la forma  $\vec{B} = B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y}$  y  $\vec{U} = \vec{U}_1 = (U_{1x}, U_{1y}, U_{1z})$ . Tome  $\vec{U}_1$  y  $\vec{B}_1$  muy pequeños. Linealice las ecuaciones (términos cuadráticos son irrelevantes) y encuentre la ecuación de onda que satisface  $\vec{B}_1$ . Relacione  $\vec{U}_1$  con  $\vec{B}_1$ . Exprese su resultado en términos de la velocidad de Alfvén

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi mn}$$

e) Tomemos una distancia  $L$  en  $x$ , ¿Qué modos son posibles en  $x$ , considerando las condiciones de borde? Encuentre la relación de dispersión y las soluciones para  $\omega$ .

### Solución:

a) Por definición, el centro de masas viene dado por la expresión

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i (m_{e_i} \vec{r}_{e_i} + m_{p_i} \vec{r}_{p_i})}{\sum_i (m_{e_i} + m_{p_i})}$$

de manera que la velocidad del centro de masas es

$$\vec{U} = \frac{\sum_i (m_{e_i} \vec{v}_{e_i} + m_{p_i} \vec{v}_{p_i})}{\sum_i (m_{e_i} + m_{p_i})}.$$

Por otro lado, puesto que para este plasma  $n_i = n_e = n_0 \sim \text{cte}$ , la densidad de masa será

$$v = n_0 \sum_i (m_{e_i} + m_{p_i}),$$

mientras que la densidad de carga será

$$\rho = n_0 \sum_i (q_{e_i} + q_{p_i})$$

y la densidad de corriente queda

$$\vec{J} = n_0 \sum_i (q_{e_i} \vec{v}_{e_i} + q_{p_i} \vec{v}_{p_i})$$

La ecuación de movimiento para los electrones es

$$m_{e_i} n_0 \frac{d\vec{v}_{e_i}}{dt} = q_{e_i} n_0 \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}_{e_i}}{c} \times \vec{B} \right)$$

mientras que para los iones se tiene

$$m_{p_i} n_0 \frac{d\vec{v}_{p_i}}{dt} = q_{p_i} n_0 \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}_{p_i}}{c} \times \vec{B} \right)$$

luego la ecuación de movimiento del plasma será

$$n_0 \sum_i \left( m_{e_i} \frac{d\vec{v}_{e_i}}{dt} + m_{p_i} \frac{d\vec{v}_{p_i}}{dt} \right) = n_0 \sum_i (q_{e_i} + q_{p_i}) \vec{E} + \frac{n_0}{c} \sum_i (q_{e_i} \vec{v}_{e_i} + q_{p_i} \vec{v}_{p_i}) \times \vec{B}$$

Multiplicando el uno conveniente  $\sum_i (m_{e_i} + m_{p_i})$  en el primer término y reemplazando las correspondientes densidades, se llega a la expresión

$$\nu \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$$

b) En el sistema solidario al plasma  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  debido a que  $\vec{U} = 0$ , pero al pasar al laboratorio, la densidad de corriente sufre una corrección relativista de manera que

$$\vec{J} = \sigma \left( \vec{E} + \frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \right)$$

Si la conductividad del plasma es extremadamente alta, tal que  $\sigma \rightarrow \infty$ , entonces  $\vec{J} \rightarrow \infty$ , pero esto no puede suceder, puesto que la condición implica que las cargas en el plasma viajan a velocidades infinitas, lo cual obviamente no es cierto. De esta manera, la expresión que multiplica a la conductividad debe compensar volviéndose cercana a cero, es decir,

$$\vec{E} + \frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \approx 0$$

obteniéndose la relación para el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B}$$

c) De la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

y usando que

$$\vec{E} = -\frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \quad (8.77)$$

tal que (aplicando el rotor)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B})$$

se obtiene la relación

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B}), \quad (8.78)$$

que corresponde a la primera ecuación acoplada. Por otro lado, de la ley de Ampère

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

al reemplazar, junto a la Ec. (8.77), en la ecuación de movimiento se llega a que

$$\nu \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{\rho}{c} \vec{U} \times \vec{B} \quad (8.79)$$

la cual corresponde a la segunda ecuación acoplada.

d) Se tienen las perturbaciones

$$\vec{B} = B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y} \quad \vec{U}_1 = U_{1x} \hat{x} + U_{1y} \hat{y} + U_{1z} \hat{z}$$

y reemplazando en la Ec. (8.78) se obtiene

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} \hat{y} = \vec{\nabla} \times (\vec{U}_1 \times \vec{B}_0 \hat{x}), \quad (8.80)$$

puesto que

$$\frac{\partial B_0}{\partial t} \hat{x} = 0 \quad \vec{\nabla} \times (\vec{U}_1 \times B_1 \hat{y}) \sim 0$$

De igual manera, para la segunda relación se tiene

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\nu} [\vec{\nabla} \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y})] \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y}) - \frac{\rho}{\nu c} \vec{U}_1 \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y})$$

y, debido a que  $B_1 \ll 1$ , se approxima

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\nu} [\vec{\nabla} \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y})] \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y}) &\approx \frac{1}{4\pi\nu} (\vec{\nabla} \times B_1 \hat{y}) \times B_0 \hat{x} \\ \frac{\rho}{\nu c} \vec{U}_1 \times (B_0 \hat{x} + B_1 \hat{y}) &\approx \frac{\rho}{\nu c} \vec{U}_1 \times B_0 \hat{x} \end{aligned}$$

con lo que la ecuación queda

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\nu} (\vec{\nabla} \times B_1 \hat{y}) \times B_0 \hat{x} - \frac{\rho}{\nu c} \vec{U}_1 \times B_0 \hat{x}$$

Considerando un plasma neutro, se tiene que  $\rho \sim 0$ , luego

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\nu} (\vec{\nabla} \times B_1 \hat{y}) \times B_0 \hat{x}$$

y notando que

$$\vec{\nabla} \times B_1 \hat{y} = \frac{\partial B_1}{\partial x} \hat{z} - \frac{\partial B_1}{\partial z} \hat{x}$$

la ecuación adquiere la forma

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi v} \frac{\partial B_1}{\partial x} \hat{y}. \quad (8.81)$$

Derivando respecto al tiempo la Ec. (8.80), se llega a que

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2} \hat{y} = B_0 \vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} \times \hat{x} \right)$$

y reemplazando la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2} \hat{y} &= -\frac{B_0^2}{4\pi v} \vec{\nabla} \times \frac{\partial B_1}{\partial x} \hat{z} \\ &= -v_A^2 \vec{\nabla} \times \frac{\partial B_1}{\partial x} \hat{z} \end{aligned}$$

pero es inmediato que

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial B_1}{\partial x} \hat{z} = \frac{\partial^2 B_1}{\partial y \partial x} \hat{x} - \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} \hat{y}$$

luego la expresión queda

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2} \hat{y} = v_A^2 \left( \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} \hat{y} - \frac{\partial^2 B_1}{\partial y \partial x} \hat{x} \right)$$

identificándose la ecuación de onda para la componente transversal

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} = 0.$$

Puesto que  $B_1$  cumple con la ecuación de onda, se tiene que

$$\vec{\nabla} \rightarrow ik \quad \partial_t \rightarrow -i\omega$$

luego la ecuación de onda queda

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2) B_1 e^{i(kx - \omega t)} = 0$$

deduciéndose la relación de dispersión

$$\omega^2(k) = k^2 v_A^2$$

Para resolver la ecuación de onda, se supone

$$B_1(x, t) = X(x) T(t)$$

tal que al reemplazar se tiene

$$X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - v_A^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0$$

lo cual puede reordenarse para obtener

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = v_A^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

de manera que es evidente

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0 \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0$$

Ambas expresiones son osciladores armónicos simples con solución

$$T(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$$

$$X(x) = \gamma \cos(kx) + \delta \sin(kx)$$

de manera que la solución a la ecuación de onda es

$$B_1(x, t) = [\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)][\gamma \cos(kx) + \delta \sin(kx)]$$

Reemplazando esto en la Ec. (8.81) se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} &= \frac{B_0}{4\pi\nu} \frac{\partial}{\partial x} ([\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)][\gamma \cos(kx) + \delta \sin(kx)]) \hat{y} \\ &= \frac{kB_0}{4\pi\nu} ([\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)][\delta \cos(kx) - \gamma \sin(kx)]) \hat{y} \end{aligned}$$

e integrando respecto al tiempo se obtiene

$$\vec{U}_1 = \left( \frac{k}{\omega} \right) \frac{B_0}{4\pi\nu} ([\alpha \sin(\omega t) - \beta \cos(\omega t)][\delta \cos(kx) - \gamma \sin(kx)]) \hat{y}$$

lo que permite deducir la relación

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \frac{B_0}{4\pi\nu} \hat{y} \int \frac{\partial B_1}{\partial x} dt \\ &= \frac{v_A^2}{B_0} \hat{y} \int \frac{\partial B_1}{\partial x} dt \end{aligned}$$

e) Volviendo a la solución

$$B_1(x, t) = [\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)][\gamma \cos(kx) + \delta \sin(kx)]$$

si se desea estudiar los modos de oscilación, se tiene que la onda debe satisfacer las condiciones de borde para una onda estacionaria en una cavidad, es decir,

$$B_1(x = 0, t) = 0 \quad B_1(x = L, t) = 0$$

De la condición  $x = 0$  se llega a la expresión

$$B_1(x = 0, t) = \gamma[\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)] = 0$$

siendo inmediato que  $\gamma = 0$ . De igual manera, para  $x = L$  se obtiene

$$B_1(x = L, t) = \delta \sin(kL)[\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)] = 0,$$

siendo directo que  $k = n\pi/L$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . La solución será entonces

$$B_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)]$$

obteniéndose los modos de oscilación del plasma

$$\omega_n(k) = kv_A = \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{B_0}{\sqrt{4\pi v}} = \frac{nB_0}{2L} \sqrt{\frac{\pi}{v}}$$

## 8.41 Propagación oblicua

Considere un plasma neutral compuesto de partículas cargadas, donde solo las partículas de carga negativa se mueven en un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B_0\hat{z}$ . Para el caso de propagación oblicua  $\vec{k} = k[\sin(\theta), 0, \cos(\theta)]$ , encuentre la matriz  $A$  que satisface  $A\vec{E} = 0$ .

**Solución:**

Sean perturbaciones de la forma

$$\begin{aligned}\vec{B} &= B_0\hat{z} + \vec{B}_1 e^{i(kr - \omega t)} \\ \vec{E} &= \vec{E}_1 e^{i(kr - \omega t)} \\ \vec{v} &= \vec{v}_1 e^{i(kr - \omega t)}\end{aligned}$$

al reemplazar en la ecuación de movimiento del plasma se obtiene

$$m \frac{d}{dt} \left[ \vec{v}_1 e^{i(kr - \omega t)} \right] = q \vec{E}_1 e^{i(kr - \omega t)} + \frac{q}{c} \left[ \vec{v}_1 e^{i(kr - \omega t)} \right] \times \left[ B_0\hat{z} + \vec{B}_1 e^{i(kr - \omega t)} \right]$$

y linealizando la ecuación

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + \frac{qB_0}{c} \vec{v} \times \hat{z}$$

Puesto que

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} \quad \vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$$

al separar por componentes se escribe

$$\begin{aligned}-i\omega v_x &= \frac{q}{m} E_x + \Omega_e v_y \\ -i\omega v_y &= \frac{q}{m} E_y - \Omega_e v_x \\ -i\omega v_z &= \frac{q}{m} E_z\end{aligned}$$

o, escrito en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\frac{m}{q} \begin{pmatrix} i\omega & \Omega_e & 0 \\ -\Omega_e & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Ya que  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ , se debe despejar la velocidad, luego se tiene la matriz inversa

$$\begin{pmatrix} i\omega & \Omega_e & 0 \\ -\Omega_e & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & -\frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/i\omega \end{pmatrix}$$

con lo que se escribe

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\frac{q}{m} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & -\frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

luego la densidad de corriente queda

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = -\frac{nq^2}{m} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & -\frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Recordando que  $\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}$ , se deduce

$$\overleftrightarrow{\sigma} = -\frac{nq^2}{m} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & -\frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/i\omega \end{pmatrix}$$

y usando que  $q = -e$  y  $\omega_p^2 = 4\pi n e^2 / m$ , se obtiene

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \begin{pmatrix} -\frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ -\frac{\Omega_e}{\Omega_e^2 - \omega^2} & -\frac{i\omega}{\Omega_e^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/i\omega \end{pmatrix}$$

Para perturbaciones armónicas se tiene que

$$\vec{\nabla} \rightarrow ik \quad \partial_t \rightarrow -i\omega$$

luego de la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

se llega a la expresión

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B}$$

y aplicando el producto cruz

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{\omega}{c} \vec{k} \times \vec{B}$$

Por otro lado, de la ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

se escribe

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{4\pi i}{c} \vec{J} - \frac{\omega}{c} \vec{E},$$

por lo que al reemplazar en la ecuación anterior se llega a

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \vec{J} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

y usando la identidad vectorial y que  $\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}$ ,

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \vec{\sigma} \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

Como  $\vec{k} = k[\sin(\theta), 0, \cos(\theta)]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) &= k^2 [E_x \sin^2(\theta) + E_z \cos(\theta) \sin(\theta), 0, E_x \cos(\theta) \sin(\theta) + E_z \cos^2(\theta)] \\ k^2 \vec{E} &= k^2 (E_x, E_y, E_z) \end{aligned}$$

deduciéndose así

$$\begin{aligned} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) &= \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} \\ &= k^2 [E_x \sin^2(\theta) + E_z \cos(\theta) \sin(\theta) - E_x, 0, E_x \cos(\theta) \sin(\theta) + E_z \cos^2(\theta) - E_z] \\ &\quad + k^2 [E_x \cos(\theta) \sin(\theta) + E_z \cos^2(\theta) - E_z] \hat{z} \end{aligned}$$

o, de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} k_x \times (\vec{k} \times \vec{E})_x \\ k_y \times (\vec{k} \times \vec{E})_y \\ k_z \times (\vec{k} \times \vec{E})_z \end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) - 1 & 0 & \cos(\theta) \sin(\theta) \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos(\theta) \sin(\theta) & 0 & \cos^2(\theta) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix},$$

concluyéndose que

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = k^2 M \vec{E}$$

con  $M$  la matriz de senos y cosenos. Recordando que la expresión para el campo eléctrico es

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

se escribe la igualdad

$$(k^2 c^2 M + 4\pi i \omega \overleftrightarrow{\sigma} + \omega^2) \vec{E} = 0$$

obteniéndose finalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2 \omega_p^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} + \omega^2 - k^2 c^2 \cos^2(\theta) & i \frac{\Omega_e \omega \omega_p^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} & k^2 c^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ -i \frac{\Omega_e \omega \omega_p^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} & \frac{\omega^2 \omega_p^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} + \omega^2 - k^2 c^2 & 0 \\ k^2 c^2 \cos(\theta) \sin(\theta) & 0 & \omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

tal que se satisface  $A\vec{E} = 0$ .

### 8.42 Rayo hacia la ionósfera

Resuelva el problema de un rayo que parte de la tierra hacia la ionósfera en forma oblicua, asumiendo una densidad de electrones  $n_e(z) = n_0 z e^{-\frac{(z-10)^2}{4}}$ . ¿Qué frecuencias se escapan?

**Solución:**

Sea

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)] \quad (8.82)$$

que va ejercer una fuerza sobre las cargas de la ionósfera según:

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -e \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -e \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)]$$

integrando respecto a  $t$ ,

$$m_e \frac{d \mathbf{x}}{dt} = -\frac{e}{\omega} i \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)],$$

$$\implies \mathbf{v} = -\frac{ie}{m_e \omega} \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)]$$

Conociendo la velocidad de las cargas, podemos encontrar la corriente que genera este campo,

$$\mathbf{J} = -n_e(z) e \mathbf{v}$$

$$\mathbf{J} = \frac{ie^2 n_e(z)}{m_e \omega} \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)] \quad (8.83)$$

Tenemos la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (8.84)$$

Por lo tanto, reemplazando (8.82) y (8.83) en Ec. (8.84)

$$(ik)^2 \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)] - \frac{(i\omega)^2}{c^2} \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)] = \frac{4\pi}{c^2} (-i\omega) \frac{ie^2 n_e(z)}{m_e \omega} \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)].$$

haciendo el producto punto con  $\mathbf{E}_0 \exp[-i(kz - \omega t)]$ , nos queda

$$\begin{aligned} -k^2 E_0^2 + \frac{\omega^2}{c^2} E_0^2 &= \frac{4\pi}{c^2} \frac{e^2 n_e(z)}{m_e} E_0^2, \\ \implies k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$\omega_p^2 \equiv \frac{4\pi e^2}{m_e} n_e(z)$$

como la frecuencia del plasma.

Luego  $k = n\omega/c$ , donde  $n$  es el índice de refracción, vemos que el índice de refracción de un plasma está dado por

$$\begin{aligned} n^2 \frac{\omega^2}{c^2} &= \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \\ n^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Notamos que, si  $n$  es imaginario, la exponencial que compone el campo eléctrico quedaría real decreciente, lo que identifica que el campo no se propagaría. Las frecuencias que se propagan entonces, son las que dejan a  $n$  como número real, esto es

$$\boxed{\omega > \omega_p.}$$

### 8.43 Plasma no magnetizado

Agregaremos el efecto de la temperatura en la relación de dispersión de ondas propagándose en un plasma no magnetizado. Por simplicidad supondremos que los iones del plasma no se mueven, y que toda la dinámica está concentrada en los electrones. Además supondremos que la presión de los electrones,  $P_e$ , está relacionada con su densidad,  $n_e$ , a través de la siguiente ecuación de estado:

$$P_e = P_{e,0} \left( \frac{n_e}{n_{e,0}} \right)^\gamma$$

donde el subíndice 0 indica "valor inicial" y  $\gamma$  es el índice politrópico de los electrones.

- a) Muestre que las transformadas de Fourier del campo eléctrico y de la velocidad promedio de los electrones  $\tilde{\vec{E}}$  y  $\tilde{\vec{U}_e}$  así como de las perturbaciones a la densidad y presión de los electrones ( $\tilde{n}_e$  y  $\tilde{p}_e$ ) satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\omega \tilde{n}_e &= n_{e,0} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e, \\ im_e n_{e,0} \omega \tilde{\vec{U}}_e &= n_{e,0} |e| \tilde{\vec{E}} + i \vec{k} \tilde{P}_e, \\ \tilde{P}_e &= m_e c_e^2 \gamma \tilde{n}_e,\end{aligned}$$

donde  $\omega$  y  $\vec{k}$  son la frecuencia y vector de onda de los modos de Fourier,  $m_e$  y  $|e|$  son la masa y módulo de la carga de los electrones, y  $c_e^2$  es el cuadrado de la “velocidad del sonido” de los electrones, definida por  $c_e^2 = k_B T_{e,0} / m_e$  ( $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $T_{e,0}$  es la temperatura inicial de los electrones).

### Solución:

De la mecánica estadística es bien sabido que  $\gamma$  está determinado por el número de grados de libertad,  $f$ , y viene dado por

$$\gamma = \frac{f+2}{f}$$

En la literatura de dinámica de fluidos y astrofísica, el parámetro  $\gamma$  a veces se denomina índice politrópico.

Para una onda de amplitud pequeña, asumimos que estas cantidades consisten en un término de orden cero espacialmente uniforme más una pequeña perturbación de primer orden. Las ecuaciones relevantes son entonces

$$P_e = P_{e,0} + P_{e,1}$$

$$n_e = n_{e,0} + n_{e,1}$$

$$\vec{U}_e = \vec{U}_{e,1}$$

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{e,1}$$

donde se asume que la velocidad y el campo eléctrico de orden cero, son cero. Las ecuaciones que se deben resolver son:

*Ecuación de continuidad:*

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{U}_e) = 0 \quad (8.85)$$

*Ecuación de momento:*

$$m_e n_e \left[ \frac{\partial \vec{U}_e}{\partial t} + (\vec{U}_e \cdot \nabla) U_e \right] = n_e e \vec{E} - \nabla P_e \quad (8.86)$$

*Ecuación de estado adiabática:*

$$P_e = P_{e,0} \left( \frac{n_e}{n_{e,0}} \right)^\gamma \quad (8.87)$$

Para las transformadas de Fourier utilizamos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \rightarrow -i\omega \tilde{f}$$

$$\nabla f \rightarrow i\vec{k}\tilde{f}$$

Luego linealizando y haciendo transformada de Fourier:

Para la ecuación (8.85):

$$-i\omega \tilde{n}_e + i\vec{k}((n_{e,0} + n_{e,1})\tilde{\vec{U}}_{e,1}) = 0$$

aquí  $n_{e,1}\tilde{\vec{U}}_{e,1}$  es cero, porque es un término de segundo orden al ser producto de dos de primer orden. Finalmente nos queda:

$$\boxed{\omega \tilde{n}_e = n_{e,0}\vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e} \quad (8.88)$$

Para la ecuación (8.86):

$$m_e(n_{e,0} + n_{e,1}) \left[ \frac{\partial \vec{U}_{e,1}}{\partial t} + (\vec{U}_{e,1} \cdot \nabla) U_{e,1} \right] = (n_{e,0} + n_{e,1}) e \vec{E}_1 - \nabla P_e$$

nuevamente, los términos de segundo orden serán despreciados. Así nos queda

$$m_e n_{e,0} (-i\omega) \tilde{\vec{U}}_e = n_{e,0} e |\vec{E}| \tilde{\vec{U}}_e - (-i\vec{k} \tilde{P}_e)$$

$$\boxed{i m_e n_{e,0} \omega \tilde{\vec{U}}_e = n_{e,0} |e| \vec{E} + i \vec{k} \tilde{P}_e} \quad (8.89)$$

Para la ecuación (8.87):

$$\tilde{P}_e = P_{e,0} \gamma \frac{\tilde{n}_e}{n_{e,0}}$$

multiplicando y dividiendo por la masa del electrón  $m_e$

$$\tilde{P}_e = P_{e,0} \gamma \frac{\tilde{n}_e}{n_{e,0}} \frac{m_e}{m_e} \quad (8.90)$$

Luego como

$$C_e^2 = \frac{P_{e,0}}{m_e n_{e,0}} \quad (8.91)$$

Sustituyendo ec. (8.91) en (8.90)

$$\tilde{P}_e = m_e C_e^2 \gamma \tilde{n}_e \quad (8.92)$$

b) Demuestre que la relación de dispersión de las ondas transversales que se propagan en el plasma no se modifica debido a la temperatura de los electrones. ¿Por qué esto tiene sentido?

**Solución:**

Reescribimos la ecuación (8.89) como:

$$(-i\omega)m_e n_{e,0} \tilde{\vec{U}}_e = n_{e,0} e \tilde{\vec{E}} - i\vec{k} \tilde{P}_e \quad (8.93)$$

sustituyendo ec. (8.92) en (8.93)

$$(-i\omega)m_e n_{e,0} \tilde{\vec{U}}_e = n_{e,0} e \tilde{\vec{E}} - i\vec{k} m_e C_e^2 \gamma \tilde{n}_e \quad (8.94)$$

Luego despejamos  $\tilde{n}_e$  de la ecuación (8.88)

$$\tilde{n}_e = \frac{n_{e,0} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e}{\omega} \quad (8.95)$$

y reemplazamos ec. (8.95) en (8.94)

$$(-i\omega)m_e n_{e,0} \tilde{\vec{U}}_e = n_{e,0} e \tilde{\vec{E}} - i\vec{k} m_e C_e^2 \gamma \frac{n_{e,0} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e}{\omega} \quad (8.96)$$

cancelamos  $n_{e,0}$  y reescribimos,

$$(-i\omega)m_e \tilde{\vec{U}}_e + i\vec{k} m_e C_e^2 \gamma \frac{\vec{k} \cdot \tilde{\vec{U}}_e}{\omega} = e \tilde{\vec{E}}$$

Factorizamos por  $\tilde{\vec{U}}_e$ , dividimos por  $(-i\omega)m_e$  y reescribimos en forma matricial,

$$\left( \mathbf{1} - \gamma C_e^2 \frac{\vec{k} \vec{k}}{\omega^2} \right) \cdot \tilde{\vec{U}}_e = \frac{e}{(-i\omega)m_e} \tilde{\vec{E}} \quad (8.97)$$

Como el plasma es isotrópico, podemos suponer  $\vec{k}/\hat{z}$ . La ecuación anterior se puede escribir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ex} \\ \tilde{U}_{ey} \\ \tilde{U}_{ez} \end{bmatrix} = \frac{e}{(-i\omega)m_e} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} \quad (8.98)$$

Debemos despejar  $\tilde{U}_e$  para hallar la densidad de corriente. Esto se puede hacer invirtiendo la matriz del lado izquierdo, donde la matriz inversa  $\mathbf{A}^{-1}$  es dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{Adj}(\mathbf{A}^t) \quad (8.99)$$

Es sencillo ver que el determinante de la matriz  $\mathbf{A}$  es:

$$|\mathbf{A}| = 1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega^2}$$

También se obtiene fácilmente la traspuesta  $\mathbf{A}^t$

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_{ex} \\ \tilde{U}_{ey} \\ \tilde{U}_{ez} \end{bmatrix} = \frac{e}{(-i\omega)m_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} \quad (8.100)$$

Para simplificar la notación, voy a llamar a

$$1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega^2} = \beta$$

Luego la adjunta de la traspuesta es

$$\text{Adj}(\mathbf{A}^t) = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la matriz inversa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega}} \end{bmatrix}$$

así nos queda

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_{ex} \\ \tilde{U}_{ey} \\ \tilde{U}_{ez} \end{bmatrix} = \frac{e}{-i\omega m_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \gamma C_e^2 \frac{k^2}{\omega}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} \quad (8.101)$$

Sabemos que la densidad de corriente es dada por:

$$\tilde{\vec{J}} = \sum_e n_{e,0} e \tilde{U}_e \quad (8.102)$$

usando (8.101) en (8.102)

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \\ \tilde{J}_z \end{bmatrix} = \sum_e \frac{n_{e,0} e^2}{-i\omega m_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\gamma C_s^2 \frac{k^2}{\omega}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\vec{J}} = \sigma \cdot \tilde{\vec{E}} \quad (8.103)$$

identificamos que el tensor de conductividad  $\sigma$  es

$$\sigma = \sum_e \frac{n_{e,0} e^2}{-i\omega m_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\gamma C_s^2 \frac{k^2}{\omega}} \end{bmatrix}$$

luego el tensor dieléctrico  $\mathbf{K}$  es dado por

$$\mathbf{K} = \mathbf{1} - \frac{\sigma}{i\omega \epsilon_0} \quad (8.104)$$

$$K_{\perp} = 1 - \frac{1}{i\omega \epsilon_0} \sum_e \frac{n_{s,0} e^2}{(-i\omega) m_e}$$

y con

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_{e,0} e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (8.105)$$

$$K_{\perp} = 1 - \frac{1}{\omega^2} \sum_e \omega_{pe}^2$$

con

$$\sum_e \omega_{pe}^2 = \omega_p^2$$

$$K_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

hay que sustituir  $\mathbf{K}$  en la ecuación homogénea para el campo eléctrico

$$c^2 \vec{k} \times \vec{k} \times \tilde{\vec{E}} + \omega^2 \mathbf{K} \cdot \tilde{\vec{E}} = 0 \quad (8.106)$$

Como el plasma es isotrópico, podemos escoger  $\vec{k} = k\hat{z}$ , para  $E$  perpendicular a  $\hat{z}$

$$c^2 \vec{k} \times \vec{k} \times \tilde{\vec{E}} = -c^2 k^2 \tilde{E}_{\perp}$$

$$-c^2 k^2 \tilde{E}_{\perp} + (\omega^2 - \omega_p^2) \tilde{E}_{\perp} = 0$$

luego para  $\mathbf{E}$  paralelo a  $\hat{z}$

$$K_{\parallel} = 1 - \frac{1}{-(i\omega)^2} \sum_e \omega_{pe}^2 \frac{1}{1 - \frac{\gamma C_e^2 k^2}{\omega}}$$

$$K_{\parallel} = 1 - \frac{1}{\omega^2} \sum_e \omega_{pe}^2 \frac{1}{1 - \frac{\gamma C_e^2 k^2}{\omega}}$$

sustituyendo en la ecuación homogénea

$$K_{\parallel} = \omega^2 - \sum_e \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \frac{\gamma C_e^2 k^2}{\omega}} \tilde{E}_{\parallel} = 0$$

juntando todo en una matriz

$$\begin{bmatrix} -c^2 k^2 + \omega^2 - \omega_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & -c^2 k^2 + \omega^2 - \omega_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \sum_e \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \frac{\gamma C_e^2 k^2}{\omega^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = 0 \quad (8.107)$$

Luego para hallar la relación de dispersión, debemos calcular el determinante de la matriz (8.107), el cual queda

$$(-c^2 k^2 + \omega^2 - \omega_p^2)^2 \left( \omega^2 - \sum_e \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \frac{\gamma C_e^2 k^2}{\omega^2}} \right) = 0 \quad (8.108)$$

Se obtienen así dos raíces distintas. La de la izquierda corresponde a ondas electromagnéticas transversales. Note que no cambia respecto a plasmas fríos. Esto tiene sentido porque el campo eléctrico,  $\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, 0)$ , y la velocidad de las partículas,  $\tilde{\mathbf{U}}_s = (\tilde{U}_x, \tilde{U}_y, 0)$ , para el modo electromagnético transversal son perpendiculares a  $k$ , luego no hay perturbación en la densidad de número y por lo tanto no se ve afectado por la presión.

La ecuación de dispersión tiene una raíz asociada con cada especie en el plasma. **La raíz asociada con los electrones es una modificación de la oscilación del plasma de electrones que se encuentra en la teoría del plasma frío y con frecuencia se denomina modo de Langmuir**, después de que Tonks y Langmuir, quienes primero estudiaron este modo de propagación. La relación de dispersión de los electrones se conoce como “dispersión de Bohm y Grass”

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \gamma C_e^2 k^2 \quad (8.109)$$

Las ondas de Langmuir están muy fuertemente amortiguadas cuando  $k\lambda_{De} \geq 1$ , debido a un proceso de amortiguación sin colisión llamado **amortiguación de Landau**. Este es uno de los inconvenientes de las ecuaciones de momento, estas dan una buena descripción para  $k\lambda_{De} \leq 1$ , pero fallan cuando  $k\lambda_{De} \geq 1$ .

De esta manera si los electrónes están fríos, ( $T_{e,0} = 0$ ), tal que  $C_e = 0$ , la frecuencia de oscilación se reduce al resultado del plasma frío,

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2.$$

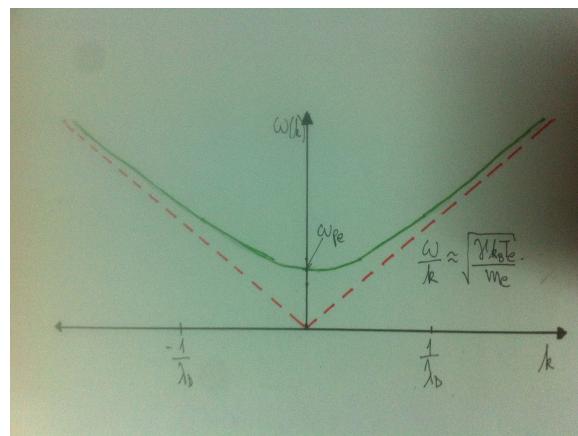


Figure 8.16: Relación de dispersión para las oscilaciones de plasma de electrones, incluidos los efectos de la presión de electrones.

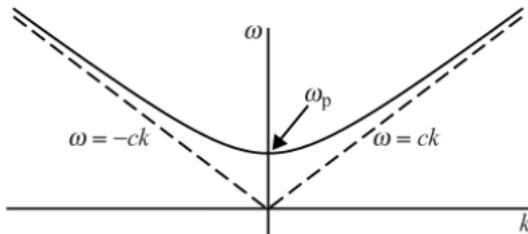


Figure 8.17: Relación de dispersión para el modo electromagnético transversal, en ondas de plasma frío no magnetizado.

Podemos ver esto si comparamos las Figuras 8.16 y 8.17.

- c) Demuestre que la relación de dispersión de las ondas longitudinales sí se modifica. Bosqueje  $\omega(k)$  para estas ondas y describa la diferencia con el caso en que los electrones están “frios” ( $T_{e,0} = 0$ ).

### Solución:

La raíz de la derecha de (8.108), corresponde a ondas electrostáticas longitudinales, cuya relación de dispersión, si se factoriza por  $\omega^2$  es

$$D_l(k, \omega) = 1 - \sum_e \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma C_e^2 k^2} \quad (8.110)$$

La velocidad de fase involucra la temperatura del electrón y la masa de iones. Esta combinación de parámetros se interpreta como una indicación de que los electrones proporcionan la presión, mientras que los iones proporcionan la inercia. A medida que aumenta el número de onda, la frecuencia comienza a disminuir en relación con la relación lineal dada por la ecuación y asintóticamente se

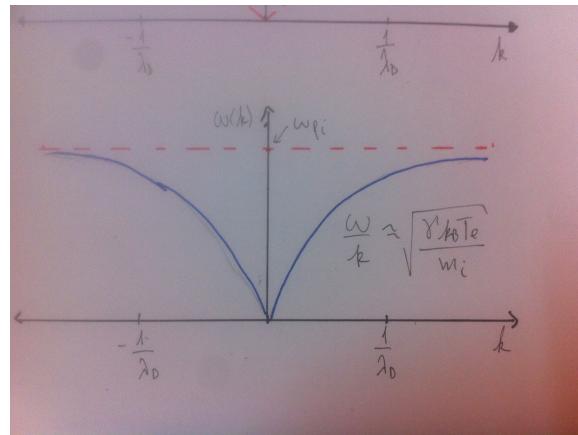


Figure 8.18: Relación de dispersión de las ondas longitudinales.

aproxima a la frecuencia de plasma iónico,  $\omega_{pi}$ , para  $k\lambda_d \gg 1$ . Se puede verificar fácilmente que la velocidad de fase del modo acústico de iones es siempre mucho menor que la velocidad térmica del electrón si la temperatura del ión es cero.

#### 8.44 Guía dieléctrica

Una guía dieléctrica rectangular  $|x| \leq \Delta$  está entre dos planos infinitos conductores  $y = \pm L$ . ¿Cuál es la frecuencia mínima de esta guía?

**Solución:**

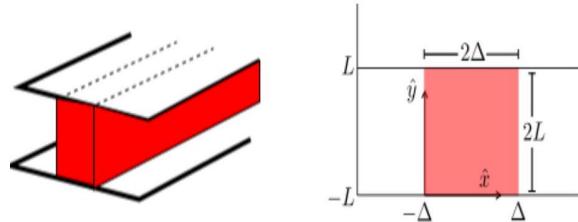


Figure 8.19: Esquema del problema.

Para encontrar los modos transversales, se debe resolver la ecuación

$$\nabla_t^2 F_v - k^2 F_v + n^2 k_0^2 F_v = 0$$

donde  $F_v$  es la componente  $v$  del campo  $\vec{F}$  y  $\nabla_t^2$  es el Laplaciano aplicado solo a las componentes transversales a la componente  $v$ . Definiendo

$$\gamma^2 \equiv n^2 k_0^2 - k^2$$

la ecuación adquiere la forma

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) F_v = 0$$

donde en este problema particular, los modos se propagan en el eje  $\hat{z}$ .

### Modo transversal magnético (TM)

En este caso se tiene que  $B_z = 0$ , luego se debe resolver

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) E_z = 0$$

con la condición de borde  $E_z|_{\partial\Omega} = 0$ . Dentro del dieléctrico esta ecuación queda

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_{zin} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_{zin} + \gamma^2 E_{zin} = 0$$

donde la condición de borde (ver Figura 8.19) pasa a ser

$$E_{zin}|_{x=0,2\Delta} = E_{zin}|_{y=0,2L} = 0.$$

Se propone entonces la solución

$$E_{zin} = A \sin(mx) \sin(ny)$$

con  $A$  alguna constante y  $m$  y  $n$  por determinar, notar que el valor de  $A$  es irrelevante para el cálculo de las frecuencias. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_{zin} &= -Am^2 \sin(mx) \sin(ny), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_{zin} &= -An^2 \sin(mx) \sin(ny) \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene

$$-Am^2 \sin(mx) \sin(ny) - An^2 \sin(mx) \sin(ny) + A\gamma^2 \sin(mx) \sin(ny) = 0$$

deduciéndose que  $\gamma^2 = m^2 + n^2$ . Para determinar el valor de  $m$  y  $n$ , se debe notar que la solución ya cumple con

$$E_{zin}|_{x=0} = E_{zin}|_{y=0} = 0$$

por lo que, de la condición  $x = 2\Delta$  reemplazada en la solución propuesta, se obtiene

$$A \sin(ny) \sin(2\Delta m) = 0$$

y ya que  $A$  y  $\sin(ny)$  son, en principio, distintos de cero (podría existir un valor de la función seno que fuese cero, pero no será cero para todos los valores), se llega a que

$$\sin(2\Delta m) = 0$$

luego se deduce que

$$m = \frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}$$

con  $\bar{m} = 0, 1, 2, 3, \dots$ . De forma análoga, al usar la condición  $y = 2L$ , se tiene

$$A \sin(mx) \sin(2Ln) = 0$$

y ya que  $A$  y  $\sin(mx)$  son distintos de cero, se llega a que

$$\sin(2Ln) = 0$$

luego se deduce que

$$n = \frac{\bar{n}\pi}{2L}$$

con  $\bar{n} = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Así, la solución general toma la forma

$$E_{z_{in}} = A \sin\left(\frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}x\right) \sin\left(\frac{\bar{n}\pi}{2L}y\right)$$

donde los modos de propagación TM serán

$$k^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}\right)^2 - \left(\frac{\bar{n}\pi}{2L}\right)^2$$

### Modo transversal eléctrico (TE)

En este caso se tiene que  $E_z = 0$ , luego se debe resolver

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) B_z = 0$$

con la condición de borde  $\partial_n B_z|_{\partial\Omega} = 0$ . Dentro del dieléctrico esta ecuación queda

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_{z_{in}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} B_{z_{in}} + \gamma^2 B_{z_{in}} = 0$$

donde la condición de borde (ver Figura 8.19) pasa a ser

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} B_{z_{in}} \right|_{x=0,2\Delta} = \left. \frac{\partial}{\partial y} B_{z_{in}} \right|_{y=0,2L} = 0$$

La solución será ahora

$$B_{z_{in}} = A \cos(mx) \cos(ny),$$

con  $A$  alguna constante y  $m$  y  $n$  por determinar. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_{z_{in}} &= -Am^2 \cos(mx) \cos(ny) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} B_{z_{in}} &= -An^2 \cos(mx) \cos(ny) \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene

$$-Am^2 \cos(mx) \cos(ny) - An^2 \cos(mx) \cos(ny) + A\gamma^2 \cos(mx) \cos(ny) = 0$$

deduciéndose nuevamente que  $\gamma^2 = m^2 + n^2$ . Para determinar el valor de  $m$  y  $n$ , se debe notar que la ecuación ya cumple con

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{zin} \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial y} B_{zin} \Big|_{y=0} = 0$$

por lo que, de la condición  $x = 2\Delta$ , al reemplazar en la solución derivada se obtiene

$$-Am \cos(ny) \sin(2\Delta m) = 0$$

y ya que  $A$  y  $\cos(ny)$  son distintos de cero y no se quiere una solución trivial, se llega a que

$$\sin(2\Delta m) = 0$$

luego se deduce que

$$m = \frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}$$

con  $\bar{m} = 0, 1, 2, 3, \dots$  De forma análoga, al usar la condición  $y = 2L$ , la solución queda

$$-An \cos(mx) \sin(2Ln) = 0$$

y ya que  $A$  y  $\cos(mx)$  son distintos de cero y no se quiere una solución trivial, se llega a que

$$\sin(2Ln) = 0$$

luego se deduce que

$$n = \frac{\bar{n}\pi}{2L}$$

con  $\bar{n} = 0, 1, 2, 3, \dots$  Así, la solución general toma la forma

$$B_{zin} = A \cos\left(\frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}x\right) \cos\left(\frac{\bar{n}\pi}{2L}y\right)$$

donde los modos de propagación TE serán

$$k^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}\right)^2 - \left(\frac{\bar{n}\pi}{2L}\right)^2$$

Se tiene entonces que los modos de propagación magnéticos y eléctricos vienen dados por

$$k^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\bar{m}\pi}{2\Delta}\right)^2 - \left(\frac{\bar{n}\pi}{2L}\right)^2$$

donde  $\bar{m}, \bar{n} = 0, 1, 2, 3, \dots$  Es importante recordar ahora que los modos TEM cumplen con

$$\vec{\nabla}_t \times E_t = 0 \quad \vec{\nabla}_t \cdot E_t = 0$$

lo cual lleva a la relación de dispersión  $k^2 = n^2 k_0^2$  o, equivalentemente,

$$\omega(k) = \frac{kc}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

la cual corresponde a la relación de dispersión para campos electroestáticos, luego se deduce que no existe solución para los modos TEM dentro de conductores (como, por ejemplo, las placas de este problema). Puesto que  $\bar{m} = \bar{n} = 0$  lleva, en ambos casos, a tal relación de dispersión, es evidente que la frecuencia mínima de los modos TM y TE no se da para estos valores. Ahora, si  $\bar{m} = 0$  o  $\bar{n} = 0$ , se tiene que  $E_z = 0$  en los modos TM, lo cual no es cierto y llevaría nuevamente al caso de modos TEM, por lo que  $\bar{m} \neq 0$  y  $\bar{n} \neq 0$  para los modos TM. Uniendo todas estas deducciones, se tendrá que la frecuencia mínima para los modos TM será en  $\bar{m} = \bar{n} = 1$  tal que

$$k_{11}^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\pi}{2\Delta}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$$

mientras que para los modos TE la frecuencia mínima se dará cuando  $\bar{m} = 0$  y  $\bar{n} = 1$  o  $\bar{m} = 1$  y  $\bar{n} = 0$  tal que, respectivamente,

$$k_{01}^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \quad k_{10}^2 = n^2 k_0^2 - \left(\frac{\pi}{2\Delta}\right)^2$$