TAREAS CON PLAZO Y BENEFICIO

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

ALBERTO VERDEJO

Tareas con plazo y beneficio

- Tenemos n tareas, cada una requiriendo una unidad de tiempo en ejecutarse, y con un plazo p_i y un beneficio b_i.
- Si la tarea se realiza no después de su plazo, se obtiene el beneficio.
- No todas las tareas tienen por qué realizarse. Solamente las que puedan hacerse antes de que venza el plazo.
- El objetivo es planificar las tareas de forma que se *maximice el beneficio total obtenido*.

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	2	30
2	1	35
3	2	25
4	1	40

Planificación	Beneficio total
[1, 3]	30 + 25 = 55
[2, 1]	35 + 30 = 65
[2, 3]	35 + 25 = 60
[3, 1]	25 + 30 = 55
[4, 1]	40 + 30 = 70
[4, 3]	40 + 25 = 65

Estrategia voraz

- Un conjunto de tareas es *factible* si existe alguna secuencia de ejecución admisible, que permita realizar todas las tareas dentro de sus plazos.
- Una permutación $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ es *admisible* si

$$\forall j : 1 \leq j \leq k : p_{i_j} \geq j$$

- La estrategia voraz considera las tareas *de mayor a menor beneficio*, y cada tarea se selecciona si al añadirla al conjunto de tareas seleccionadas, este sigue siendo factible.

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$

$S = \{ 1 \}$ $[1]$ 40

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$		
$S = \{ 1 \}$	[1]	40
$S = \{ 1, 2 \}$	[2, 1]	75

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$

$S = \{ 1 \}$ $[1]$ 40

$S = \{ 1, 2 \}$ $[2, 1]$ 75

$S = \{ 1, 2, 3 \}$

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$		
$S = \{ 1 \}$	[1]	40
$S = \{ 1, 2 \}$	[2, 1]	75
$S = \{ 1, 2, 3 \}$	3 rechazada	

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$		
$S = \{ 1 \}$	[1]	40
$S = \{ 1, 2 \}$	[2, 1]	75
$S = \{ 1, 2, 3 \}$	3 rechazada	
$S = \{ 1, 2, 4 \}$	[2, 1, 4]	100

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$		
$S = \{ 1 \}$	[1]	40
$S = \{ 1, 2 \}$	[2, 1]	75
$S = \{ 1, 2, 3 \}$	3 rechazada	
$S = \{ 1, 2, 4 \}$	[2, 1, 4]	100
$S = \{ 1, 2, 4, 5 \}$		

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$		
$S = \{ 1 \}$	[1]	40
$S = \{ 1, 2 \}$	[2, 1]	75
$S = \{ 1, 2, 3 \}$	3 rechazada	
$S = \{ 1, 2, 4 \}$	[2, 1, 4]	100
$S = \{ 1, 2, 4, 5 \}$	5 rechazada	

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$		
$S = \{ 1 \}$	[1]	40
$S = \{ 1, 2 \}$	[2, 1]	75
$S = \{ 1, 2, 3 \}$	3 rechazada	
$S = \{ 1, 2, 4 \}$	[2, 1, 4]	100
$S = \{ 1, 2, 4, 5 \}$	5 rechazada	
$S = \{ 1, 2, 4, 6 \}$	[2, 4, 6, 1]	115

Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$

$S = \{ 1 \}$ [1] 40

$S = \{ 1, 2 \}$ [2, 1] 75

$S = \{ 1, 2, 3 \}$ 3 rechazada

$S = \{ 1, 2, 4 \}$ [2, 1, 4] 100

$S = \{ 1, 2, 4, 5 \}$ 5 rechazada

$S = \{ 1, 2, 4, 6 \}$ [2, 4, 6, 1] 115

$S = \{ 1, 2, 4, 6, 7 \}$

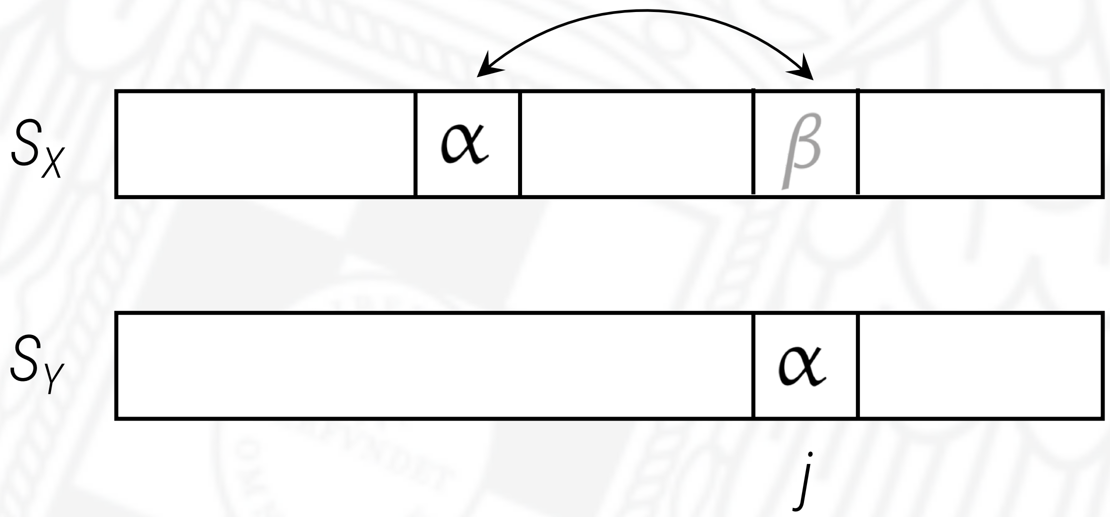
Ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

$S = \emptyset$		
$S = \{ 1 \}$	[1]	40
$S = \{ 1, 2 \}$	[2, 1]	75
$S = \{ 1, 2, 3 \}$	3 rechazada	
$S = \{ 1, 2, 4 \}$	[2, 1, 4]	100
$S = \{ 1, 2, 4, 5 \}$	5 rechazada	
$S = \{ 1, 2, 4, 6 \}$	[2, 4, 6, 1]	115
$S = \{ 1, 2, 4, 6, 7 \}$	7 rechazada	

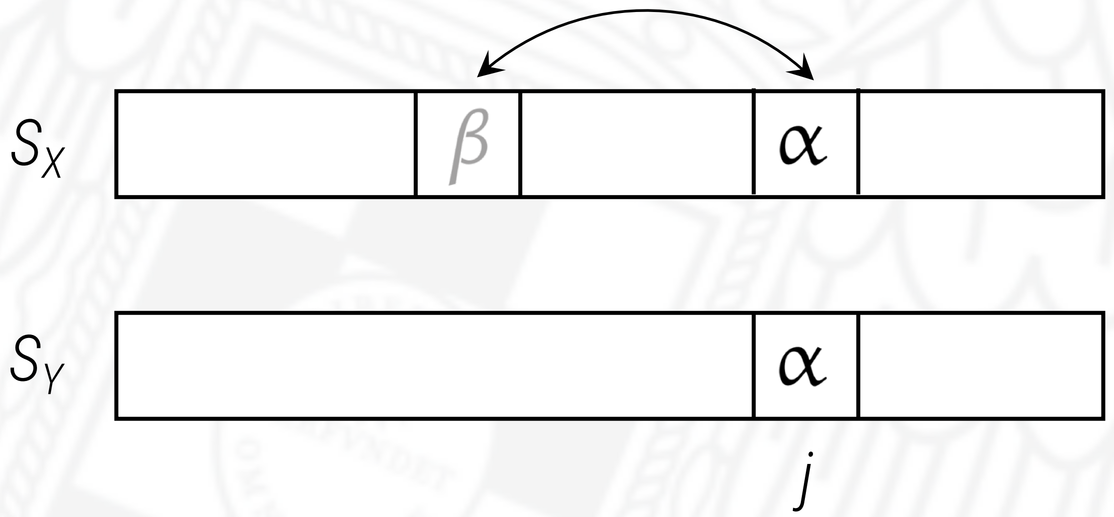
Demostración de optimalidad

- Llamamos X a la solución voraz, e Y a una solución óptima cualquiera.
- Sean S_X y S_Y secuencias admisibles de las tareas de X e Y.
- Primero se transforman las secuencias de forma que las tareas comunes se realicen en el mismo momento.



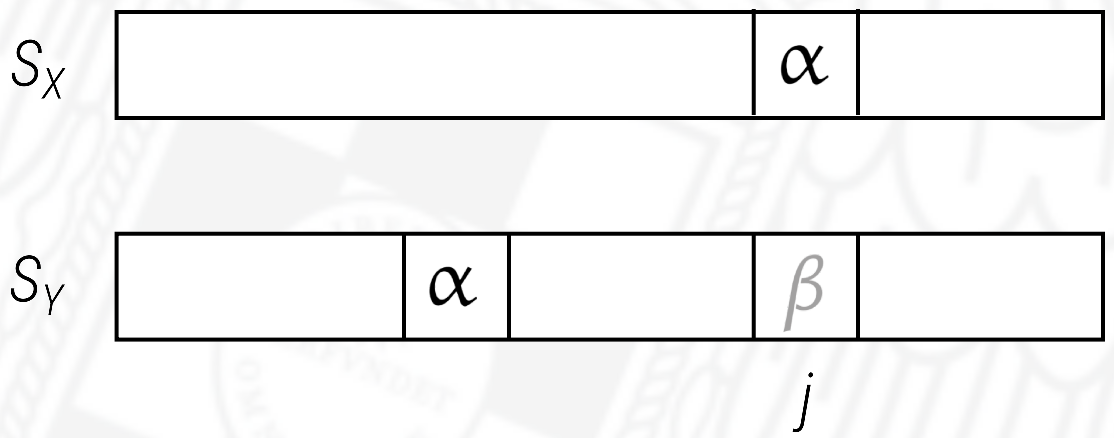
Demostración de optimalidad

- Llamamos X a la solución voraz, e Y a una solución óptima cualquiera.
- Sean S_X y S_Y secuencias admisibles de las tareas de X e Y.
- Primero se transforman las secuencias de forma que las tareas comunes se realicen en el mismo momento.



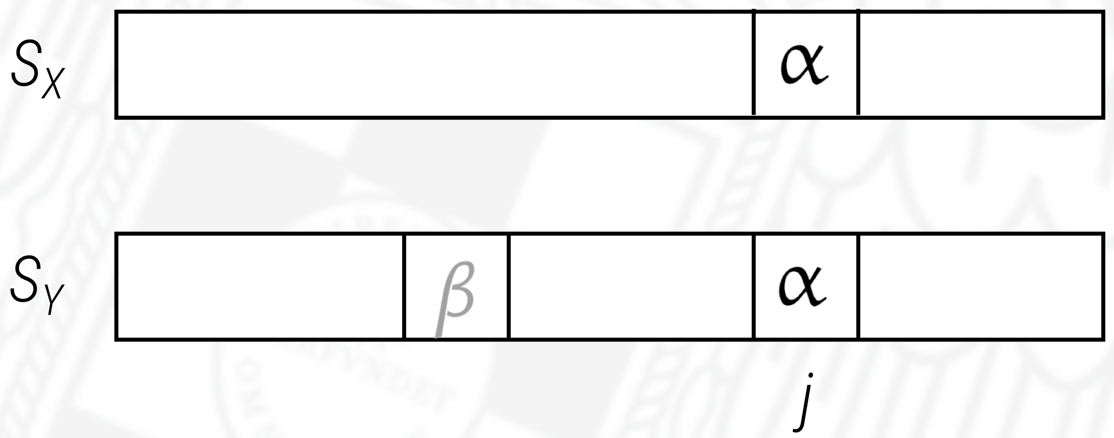
Demostración de optimalidad

- Llamamos X a la solución voraz, e Y a una solución óptima cualquiera.
- Sean S_X y S_Y secuencias admisibles de las tareas de X e Y.
- Primero se transforman las secuencias de forma que las tareas comunes se realicen en el mismo momento.



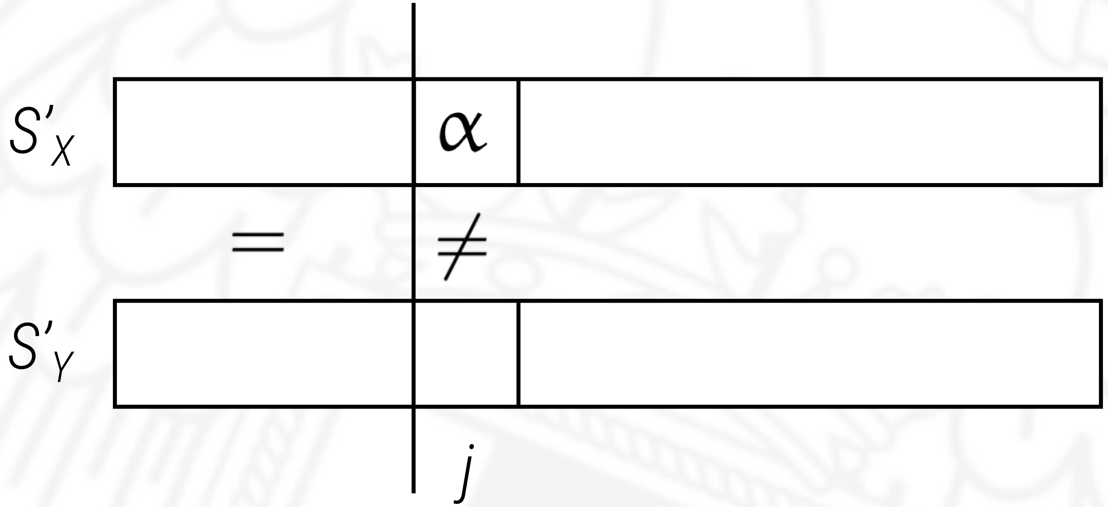
Demostración de optimalidad

- Llamamos X a la solución voraz, e Y a una solución óptima cualquiera.
- Sean S_X y S_Y secuencias admisibles de las tareas de X e Y.
- Primero se transforman las secuencias de forma que las tareas comunes se realicen en el mismo momento.



Demostración de optimalidad

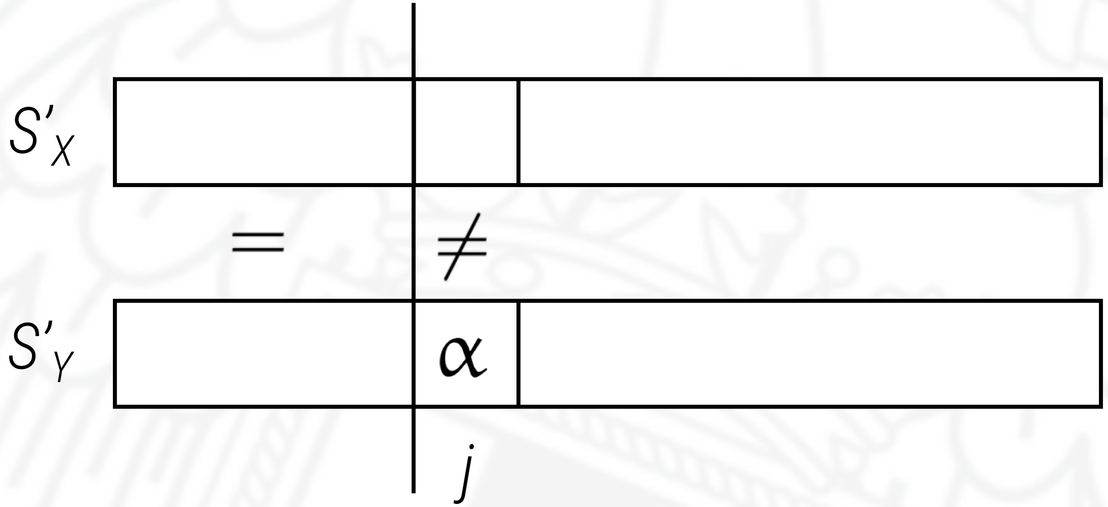
- Comparamos ahora las secuencias transformadas S'_X y S'_Y.



- Este tipo de diferencia no puede darse.

Demostración de optimalidad

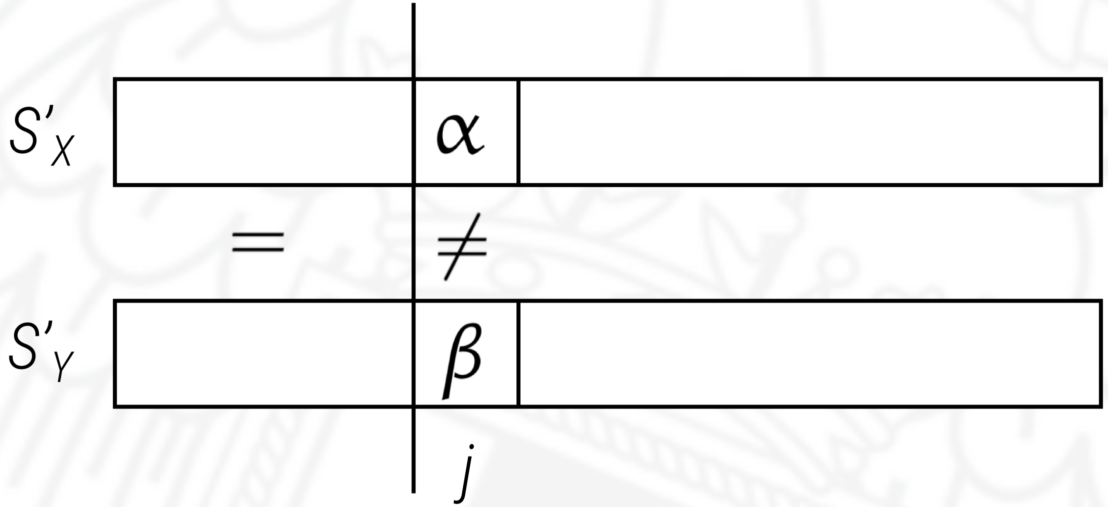
- Comparamos ahora las secuencias transformadas S'_X y S'_Y.



- Este tipo de diferencia tampoco puede darse.

Demostración de optimalidad

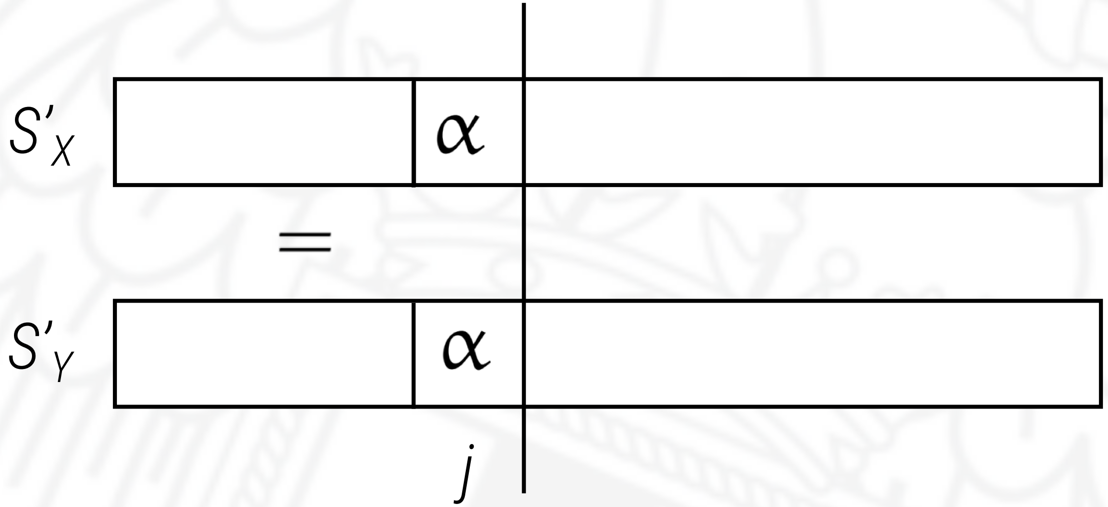
- Comparamos ahora las secuencias transformadas S'_X y S'_Y.



  - $b_\alpha > b_\beta$
  - $b_\alpha < b_\beta$
  - $b_\alpha = b_\beta$

Demostración de optimalidad

- Comparamos ahora las secuencias transformadas S'_X y S'_Y.



  - $b_\alpha > b_\beta$
  - $b_\alpha < b_\beta$
  - $b_\alpha = b_\beta$

Test de factibilidad 1

- Un conjunto de tareas T es factible si y solo si la secuencia que ordena las tareas por orden creciente de plazos es admisible.
- Sea $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ con $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$.
- Si la secuencia $t_1, t_2, \ldots, t_k$ no es admisible, existe alguna tarea t_r tal que $p_r < r$. Pero entonces se cumple

$$p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_{r-1} \leq p_r \leq r - 1$$

- T no es factible.

Test de factibilidad 1, ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

1	2	3	4	5	6	7

Test de factibilidad 1, ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

1	2	3	4	5	6	7
1						

Test de factibilidad 1, ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

1	2	3	4	5	6	7
2	1					

Test de factibilidad 1, ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

1	2	3	4	5	6	7
2	4	1				

Test de factibilidad 1, ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	1			

Test de factibilidad 1, ejemplo que requiere el máximo trabajo

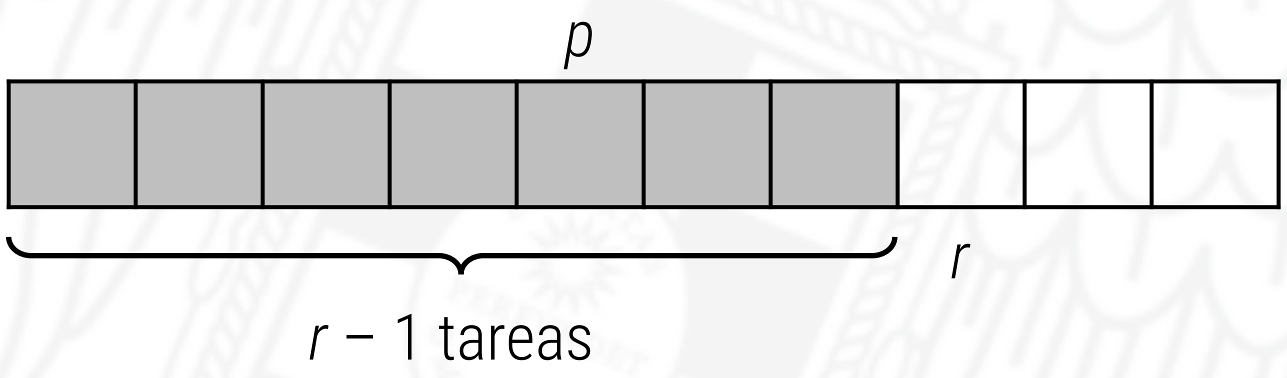
i	p_i	b_i
1	9	40
2	8	35
3	6	30
4	5	25
5	4	20
6	2	15
7	1	10

Test de factibilidad 2

- Un conjunto de tareas T es factible si y solo si la secuencia que planifica las tareas *lo más tarde posible* es admisible.

$$d(i) = \text{máx}\{d \mid 1 \leq d \leq \text{mín}(n, p_i) \ \wedge \ (\forall j : 1 \leq j < i : d \neq d(j))\}$$

- Tarea en T con plazo p, que al ir a planificarla no “cabe”:



Test de factibilidad 2, ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

1	2	3	4	5	6	7

Test de factibilidad 2, ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

1	2	3	4	5	6	7
			1			

Test de factibilidad 2, ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

1	2	3	4	5	6	7
2			1			

Test de factibilidad 2, ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

1	2	3	4	5	6	7
2		4	1			

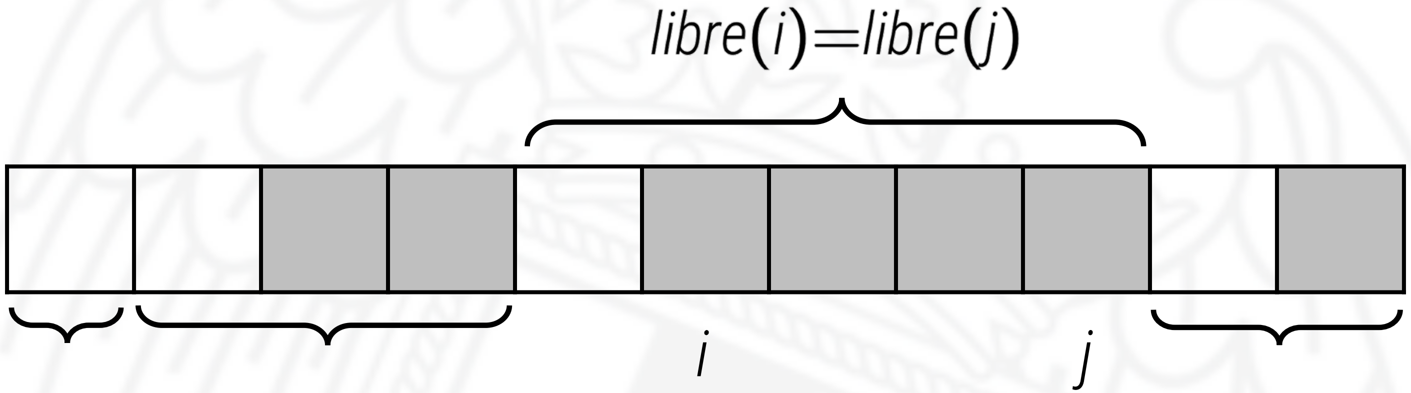
Test de factibilidad 2, ejemplo

i	p_i	b_i
1	4	40
2	1	35
3	1	30
4	3	25
5	1	20
6	3	15
7	2	10

1	2	3	4	5	6	7
2	6	4	1			

Test de factibilidad 2

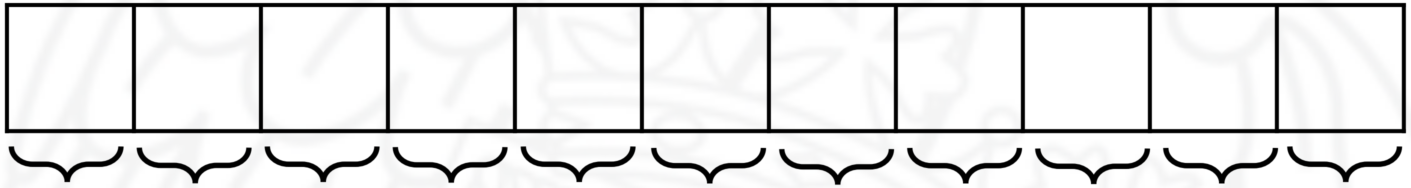
$$libre(i) = \text{máx}\,\{\,d \leq i \mid d \text{ libre}\,\}$$



- Cada tarea t_i debería realizarse en el día libre(p_i), que representa el último día libre que respeta su plazo.

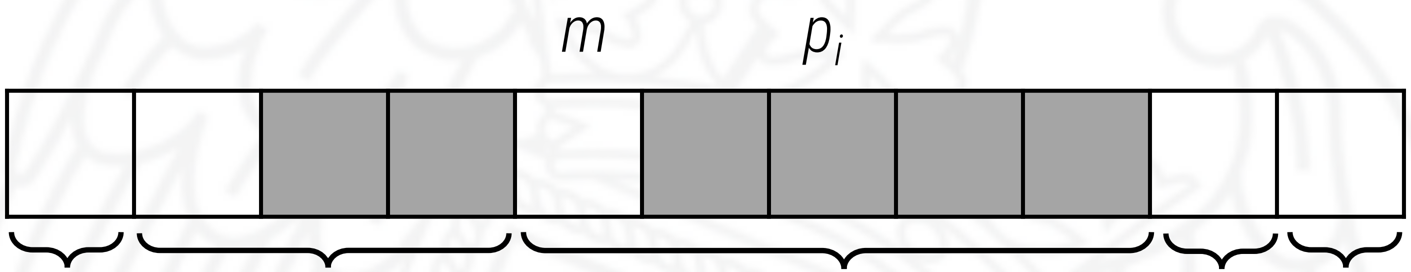
Test de factibilidad 2

- Inicialmente $\forall i : 0 \leq i \leq n : libre(i) = i$



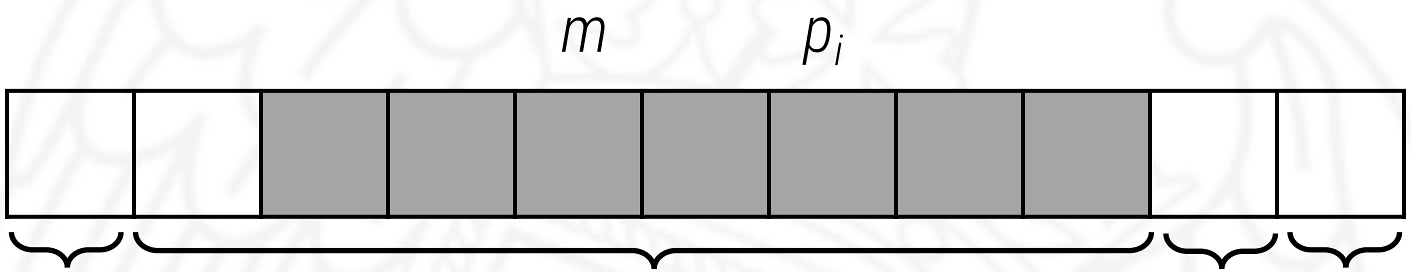
Test de factibilidad 2

- Si se planifica la tarea t_i el día $libre(p_i) = m$, hay que unir su clase de equivalencia con el del día anterior.



Test de factibilidad 2

- Si se planifica la tarea t_i el día $libre(p_i) = m$, hay que unir su clase de equivalencia con el del día anterior.



Implementación

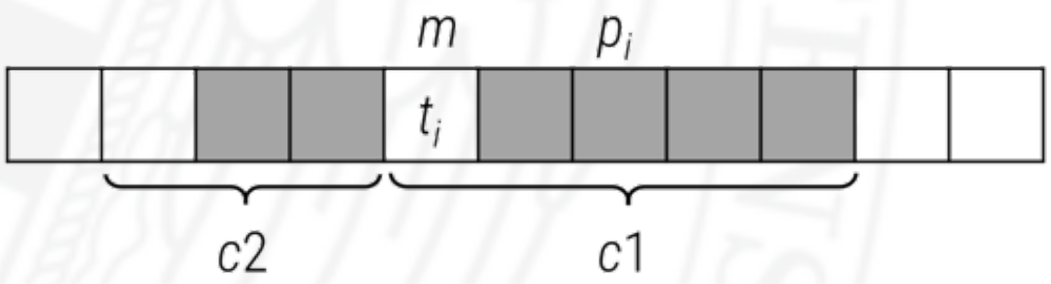
```
struct Tarea {
   int plazo;
   int beneficio;
   int id;
};


bool operator>(Tarea a, Tarea b) {
   return a.beneficio > b.beneficio;
}
```

Implementación

```
// las tareas están ordenadas de mayor a menor beneficio
int resolver(vector<Tarea> const& tareas, vector<int> & sol) {
   int N = tareas.size(); // número de tareas

   vector<int> libre(N + 1, 0);
   for (int i = 0; i <= N; ++i)
      libre[i] = i;

   vector<int> plan(N + 1); // 0 es que no está usado

   ConjuntosDisjuntos particion(N + 1);

   int beneficio = 0;
```

Implementación

```
// recorrer las tareas de mayor a menor beneficio
for (int i = 0; i < N; ++i) {
    int c1 = particion.buscar(min(N, tareas[i].plazo));
    int m = libre[c1];
    if (m != 0) { // podemos colocar la tarea i
        plan[m] = tareas[i].id;
        beneficio += tareas[i].beneficio;
        int c2 = particion.buscar(m-1);
        particion.unir(c1, c2);
        libre[c1] = libre[c2];
    }
}
```



Implementación

```
    // compactamos la solución
    for (int i = 1; i <= N; ++i) {
        if (plan[i] > 0)
            sol.push_back(plan[i]);
    }
    return beneficio;
}
```