Artificial Intelligence
人工智能

第2章 知识表示和推理

谓词逻辑、归结推理

知识表示和推理

1　概述

2　命题逻辑

3　谓词逻辑

4　归结推理

谓词逻辑

- ✓" Robot A is to the right of robot B"
- ✓$\forall u\ \forall v$ is_further_right$(u, v) \Leftrightarrow$

$$\exists x_u\ \exists y_u\ \exists x_v\ \exists y_v\ \text{Position}(u, x_u, y_u) \wedge \text{Position}(v, x_v, y_v) \wedge \text{Larger}(x_u, x_v)$$

- Typically, $\Rightarrow$ is the main connective with $\forall$; $\wedge$ is the main connective with $\exists$
  - $\forall x$ At(x, SYSU) $\Rightarrow$ Smart (x)
  - $\exists x$ At(x, SYSU) $\wedge$ Smart (x)
- **Morgan's law**
  - $\forall x\ L \equiv \neg\ \exists x\ \neg L$
  - $\neg(\forall x\ L) \equiv \exists x\ \neg L$

"Not everyone likes cat"

$\neg(\forall x,\ \text{Likes}(x, \text{cat}))$

$\exists x, \neg\text{Likes}(x, \text{cat})$

字母表

Logical symbols (fixed meaning and use):

- Punctuation: (,),,,.
- Connectives and quantifiers: $=, \neg, \wedge, \vee, \forall, \exists$
- Variables: $x, x_1, x_2, \ldots, x', x'', \ldots, y, \ldots, z, \ldots$

Non-logical symbols (domain-dependent meaning and use):

- Predicate symbols
    - arity: number of arguments
    - arity 0 predicates: propositional symbols
- Function symbols
    - arity 0 functions: constant symbols

项和公式

- Every variable is a term
- If $t_1, \ldots, t_n$ are terms and f is a function symbol of arity n, then $f(t_1, \ldots, t_n)$ is a term
- If $t_1, \ldots, t_n$ are terms and P is a predicate symbol of arity n, then $P(t_1, \ldots, t_n)$ is an atomic formula
- If t_1 and t_2 are terms, then $(t_1 = t_2)$ is an atomic formula
- If α and β are formulas, and v is a variable, then $\neg\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), \exists v.\alpha, \forall v.\alpha$ are formulas

谓词逻辑的应用

例1 “某些患者喜欢所有医生。没有患者喜欢庸医。所以没有医生是庸医。”

解：P(x)表示“x是患者”，

D(x)表示“x是医生”，

Q(x)表示“x是庸医”，

L(x, y)表示“x喜欢y”。

目的是证明G是F1和F2的逻辑结论。

谓词逻辑的应用

例1 “某些患者喜欢所有医生。没有患者喜欢庸医。所以没有医生是庸医。”

解：P(x)表示“x是患者”，

D(x)表示“x是医生”，

Q(x)表示“x是庸医”，

L(x, y)表示“x喜欢y”。

F_1 $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x,y)))$

$F_2 : (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$

$G : (\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$

目的是证明G是F1和F2的逻辑结论。

记法

- Occasionally add or omit (,)
- Use [,] and {, }
- Abbreviation: $(\alpha \rightarrow \beta)$ for $(\neg\alpha \vee \beta)$
- Abbreviation: $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ for $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
- Predicates: mixed case capitalized, *e.g.*, Person, OlderThan
- Functions (and constants): mixed case uncapitalized, *e.g.*, john, father,

变量范围

- Free and bound occurrences of variables
- *e.g.*, $P(x) \wedge \exists x[P(x) \vee Q(x)]$
- A sentence: formula with no free variables
- Substitution: $\alpha[v/t]$ means α with all free occurrences of the v replaced by term t
- In general, $\alpha[v_1/t_1, \ldots, v_n/t_n]$

解释

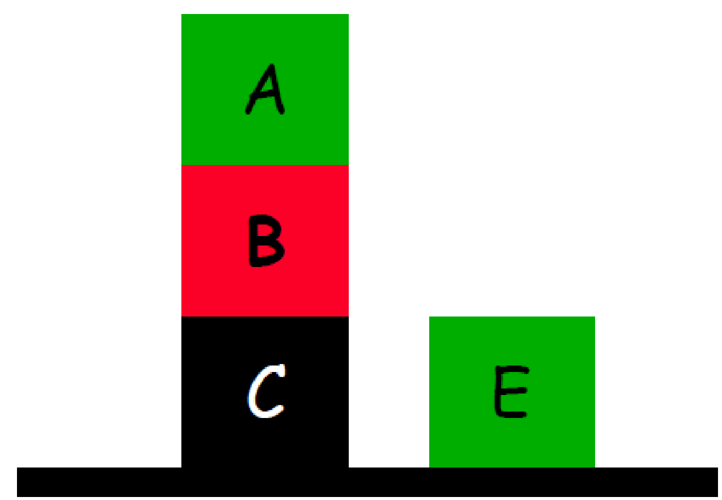
An interpretation is a pair $\Im = \langle D, I \rangle$

- D is the domain, can be any non-empty set
- I is a mapping from the set of predicate and function symbols
- If P is a predicate symbol of arity n, $I(P)$ is an n-ary relation over D, *i.e.*, $I(P) \subseteq D^n$
    - If p is a 0-ary predicate symbol, *i.e.*, a propositional symbol, $I(p) \in \{true, false\}$
- If f is a function symbol of arity n, $I(f)$ is an n-ary function over D, *i.e.*, $I(f) : D^n \to D$
    - If c is a 0-ary function symbol, *i.e.*, a constant symbol, $I(c) \in D$

积木世界例子

- Constants: a,b,c,e
- Functions:
  - No function
- Predicates:
  - on: binary
  - above: binary
  - clear: unary
  - ontable: unary

- $D = \{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{E}\}$
- $\Phi(a) = \underline{A}$, $\Phi(b) = \underline{B}$, $\Phi(c) = \underline{C}$, $\Phi(e) = \underline{E}$.
- $\Psi(on) = \{(\underline{A},\underline{B}),(\underline{B},\underline{C})\}$
- $\Psi(above) = \{(\underline{A},\underline{B}),(\underline{B},\underline{C}),(\underline{A},\underline{C})\}$
- $\Psi(clear)=\{\underline{A},\underline{E}\}$
- $\Psi(ontable)=\{\underline{C},\underline{E}\}$



项的指称（指派）

- Terms denote elements of the domain
- A variable assignment μ is a mapping from the set of variables to the domain D
- $\|v\|_{\Im,\mu} = \mu(v)$
- $\|f(t_1, \ldots, t_n)\|_{\Im,\mu} = I(f)(\|t_1\|_{\Im,\mu}, \ldots, \|t_n\|_{\Im,\mu})$

满足：原子公式

$\Im, \mu \models \alpha$ is read "$\Im, \mu$ satisfies α"

- $\Im, \mu \models P(t_1, \ldots, t_n)$ iff $\langle \|t_1\|_{\Im,\mu}, \ldots, \|t_n\|_{\Im,\mu} \rangle \in I(P)$
- $\Im, \mu \models (t_1 = t_2)$ iff $\|t_1\|_{\Im,\mu} = \|t_2\|_{\Im,\mu}$

满足：联结词

- $\Im, \mu \models \neg\alpha$ iff $\Im, \mu \not\models \alpha$
- $\Im, \mu \models (\alpha \wedge \beta)$ iff $\Im, \mu \models \alpha$ and $\Im, \mu \models \beta$
- $\Im, \mu \models (\alpha \vee \beta)$ iff $\Im, \mu \models \alpha$ or $\Im, \mu \models \beta$

满足：量词

$\mu\{d;v\}$ denotes a variable assignment just like μ, except that it maps v to d

- $\Im,\mu \models \exists v.\alpha$ iff for some $d \in D$, $\Im,\mu\{d;v\} \models \alpha$
- $\Im,\mu \models \forall v.\alpha$ iff for all $d \in D$, $\Im,\mu\{d;v\} \models \alpha$

Let α be a sentence. Then whether $\Im,\mu \models \alpha$ is independent of μ. Thus we simply write $\Im \models \alpha$

积木世界例子

- $D = \{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{E}\}$
- $\Phi(a) = \underline{A}$, $\Phi(b) = \underline{B}$, $\Phi(c) = \underline{C}$, $\Phi(e) = \underline{E}$.
- $\Psi(on) = \{(\underline{A},\underline{B}),(\underline{B},\underline{C})\}$
- $\Psi(above) = \{(\underline{A},\underline{B}),(\underline{B},\underline{C}),(\underline{A},\underline{C})\}$
- $\Psi(clear)=\{\underline{A},\underline{E}\}$
- $\Psi(ontable)=\{\underline{C},\underline{E}\}$

$\forall X,Y.\ on(X,Y) \rightarrow above(X,Y)$

✓ $X=\underline{A}$, $Y=\underline{B}$

✓ $X=\underline{C}$, $Y=\underline{A}$

✓ …

$\forall X,Y.\ above(X,Y) \rightarrow on(X,Y)$

✓ $X=\underline{A}$, $Y=\underline{B}$

× $X=\underline{A}$, $Y=\underline{C}$

积木世界例子

- $D = \{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{E}\}$
- $\Phi(a) = \underline{A}$, $\Phi(b) = \underline{B}$, $\Phi(c) = \underline{C}$, $\Phi(e) = \underline{E}$.
- $\Psi(on) = \{(\underline{A},\underline{B}),(\underline{B},\underline{C})\}$
- $\Psi(above) = \{(\underline{A},\underline{B}),(\underline{B},\underline{C}),(\underline{A},\underline{C})\}$
- $\Psi(clear)=\{\underline{A},\underline{E}\}$
- $\Psi(ontable)=\{\underline{C},\underline{E}\}$

$\forall X \exists Y.\ (clear(X) \vee on(Y,X))$

- ✓ $X=\underline{A}$
- ✓ $X=\underline{C}$, $Y=\underline{B}$
- ✓ …

$\exists Y \forall X.(clear(X) \vee on(Y,X))$

- × $Y=\underline{A}$? No! ($X=\underline{C}$)
- × $Y=\underline{C}$? No! ($X=\underline{B}$)
- × $Y=\underline{E}$? No! ($X=\underline{B}$)
- × $Y=\underline{B}$? No! ($X=\underline{B}$)

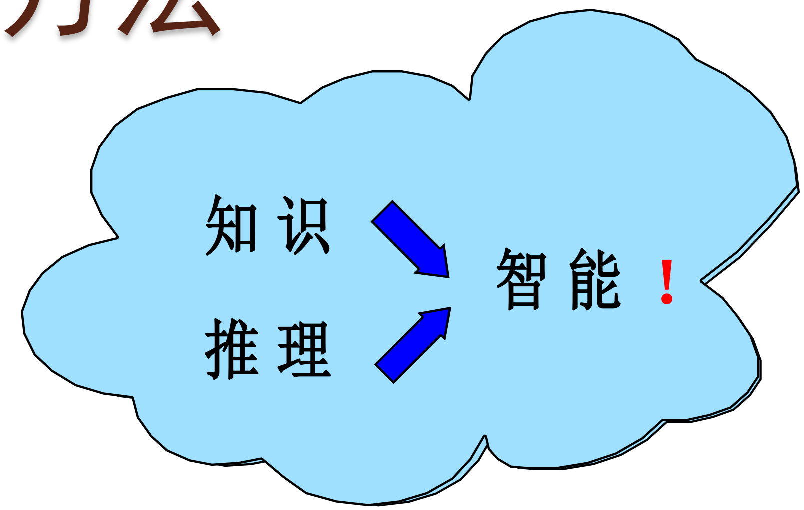
可满足性

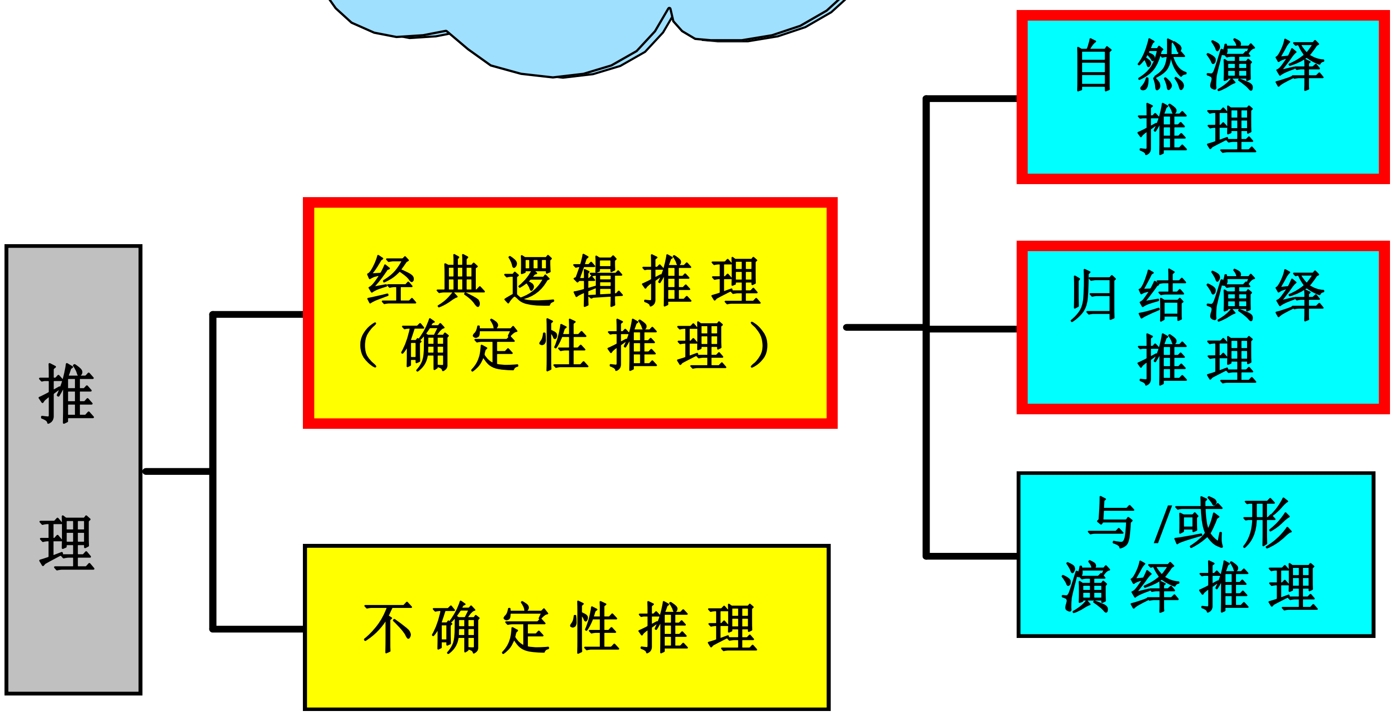
- Let S be a set of sentences
- $\Im \models S$, read $\Im$ satisfies S, if for every $\alpha \in \Im$, $\Im \models \alpha$
- If $\Im \models S$, we say $\Im$ is a model of S
- We say that S is satisfiable if there is $\Im$ s.t. $\Im \models S$, and
- *e.g.*, is $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), P(a), \neg Q(a)\}$ satisfiable?

推理方法

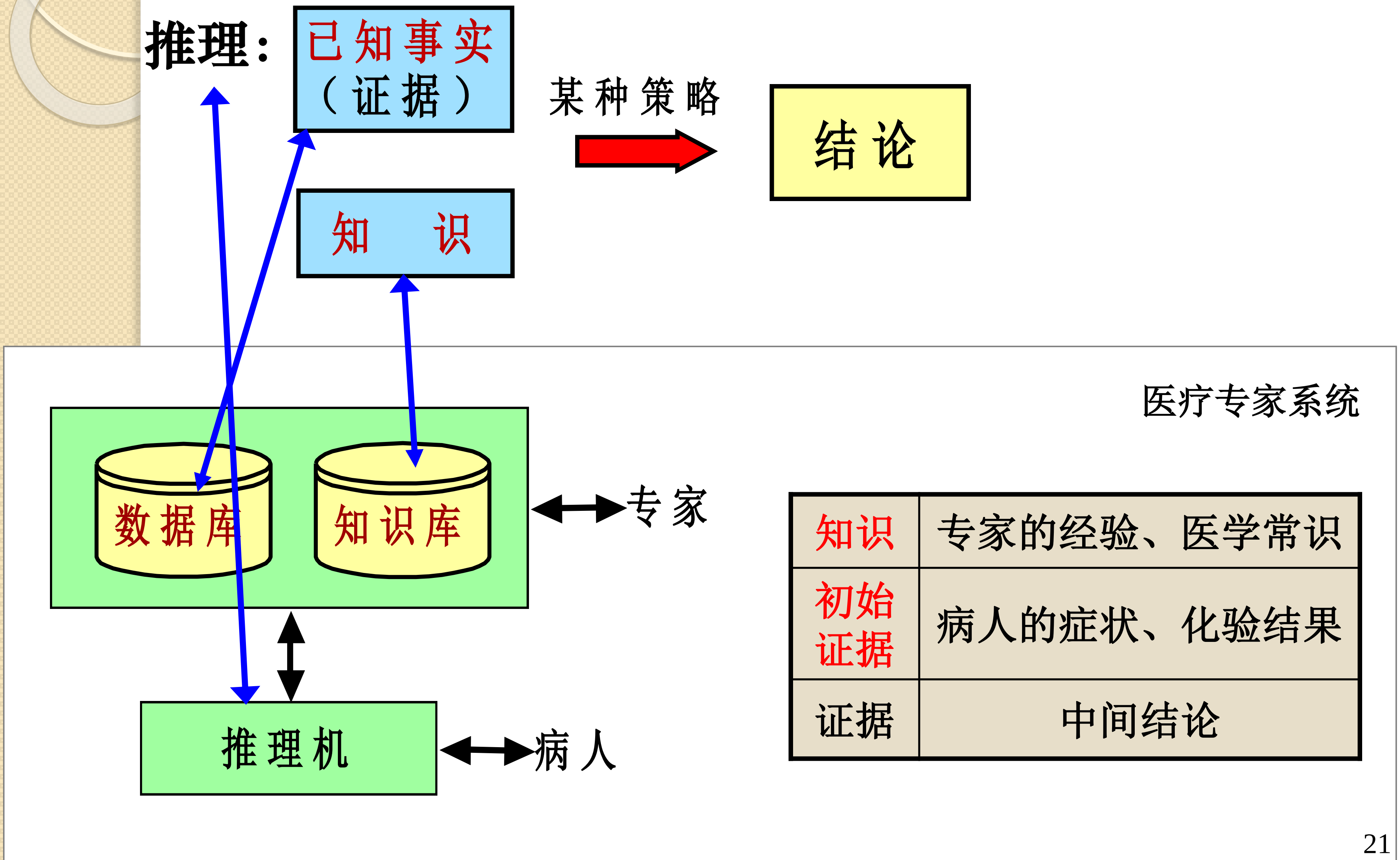
- 前面讨论了把知识用某种模式表示出来存储到计算机中去。但是，为使计算机具有智能，还必须使它具有思维能力。推理是求解问题的一种重要方法。因此，推理方法成为人工智能的一个重要研究课题。
- 下面首先讨论关于推理的基本概念，然后介绍鲁宾逊归结原理及其在机器定理证明和问题求解中的应用。鲁宾逊归结原理使定理证明能够在计算机上实现。

推理方法





推理的定义



知识	专家的经验、医学常识
初始证据	病人的症状、化验结果
证据	中间结论

推理方式及其分类

1. 演绎推理、归纳推理、默认推理

（1）演绎推理 **(deductive reasoning) :** 一般 ⟶ 个别

- 三段论式（三段论法）

① 足球运动员的身体都是强壮的； （ 大前提 ）

② 高波是一名足球运动员； （ 小前提 ）

③ 所以，高波的身体是强壮的。 （ 结 论 ）

推理方式及其分类

1. 演绎推理、归纳推理、默认推理

（2）归纳推理 **(inductive reasoning):** 个别 → 一般

- 完全归纳推理（必然性推理）
- 不完全归纳推理（非必然性推理）

检查全部产品合格 $\xrightarrow{\text{完全归纳推理}}$ 该厂产品合格

检查全部样品合格 $\xrightarrow{\text{不完全归纳推理}}$ 该厂产品合格

推理方式及其分类

1. 演绎推理、归纳推理、默认推理

（3）**默认推理**（**default reasoning，缺省推理**）

- 知识不完全的情况下假设某些条件已经具备所进行的推理。

A 成立

B 成立？ → 结 论

（默认***B***成立）

制造鸟笼

鸟会飞？ → 鸟笼要有盖子

（默认成立）

推理方式及其分类

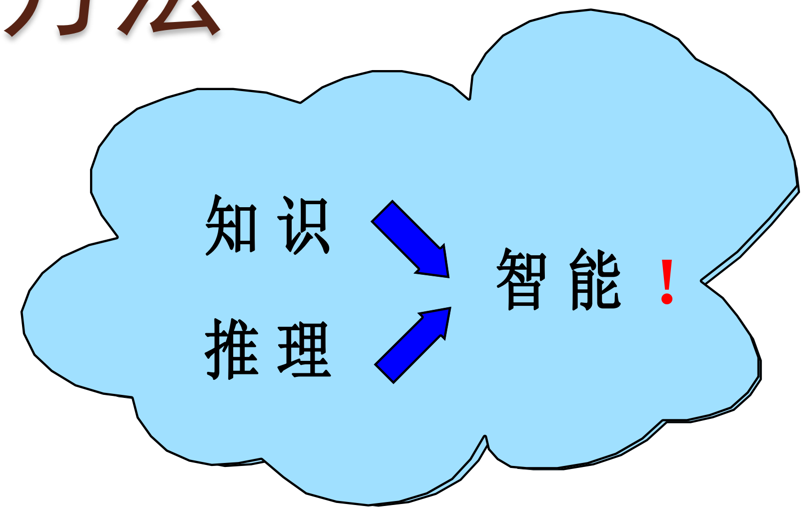
2. 确定性推理、不确定性推理

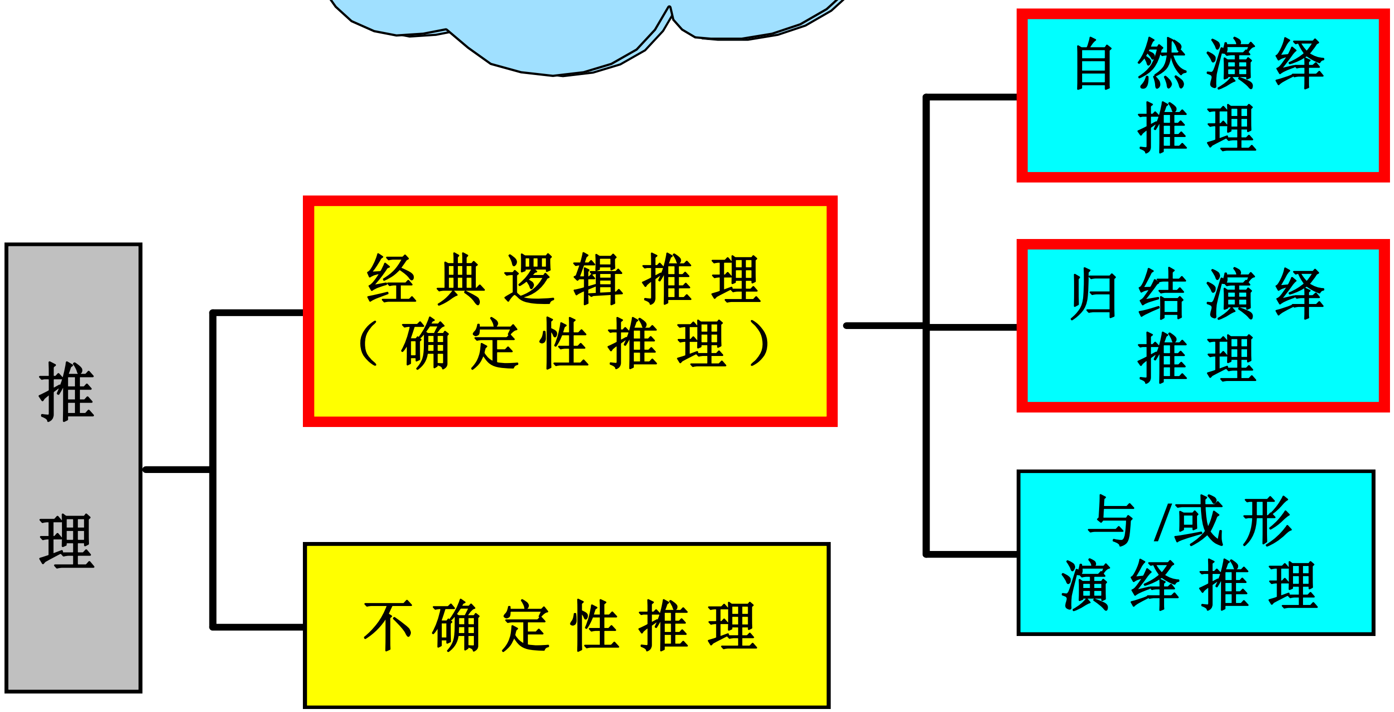
（1）**确定性推理**：推理时所用的知识与证据都是确定的，推出的结论也是确定的，其真值或者为真或者为假。

（2）**不确定性推理**：推理时所用的知识与证据不都是确定的，推出的结论也是不确定的。

- 不确定性推理
  - 似然推理（概率论）
  - 近似推理或模糊推理（模糊逻辑）

推理方法





自然演绎推理

- **自然演绎推理：从一组已知为真的事实出发，运用经典逻辑的推理规则推出结论的过程。**
- **推理规则：*P*规则、*T*规则、假言推理、拒取式推理**

  (p54. 55.)

- 假言推理： $P,\ P\rightarrow Q\ \Rightarrow Q$
- “如果x是金属，则x能导电”，“铜是金属” 推出 “铜能导电”

- 拒取式推理： $P\rightarrow Q,\ \neg Q\ \Rightarrow\ \neg P$
- “如果下雨，则地下就湿”，“地上不湿” 推出 “没有下雨”

自然演绎推理

错误1——否定前件：$P \rightarrow Q, \quad \neg P \quad \not\Rightarrow \quad \neg Q$

（1） 如果下雨，则地上是湿的（ $P \rightarrow Q$ ）；
（2）没有下雨（ $\neg P$ ）；
（3）所以，地上不湿（ $\neg Q$ ）。

错误2——肯定后件：$P \rightarrow Q, \quad Q \quad \not\Rightarrow \quad P$

（1）如果行星系统是以太阳为中心的，则金星会显示出位相变化（ $P \rightarrow Q$ ）；
（2）金星显示出位相变化（ Q ）；
（3） 所以，行星系统是以太阳为中心（ P ）。

自然演绎推理

- **例1 已知事实：**
  - **（1）凡是容易的课程小王(Wang)都喜欢；**
  - **（2）C 班的课程都是容易的；**
  - **（3）AI 是 C 班的一门课程。**
- **求证：小王喜欢 AI 这门课程。**

自然演绎推理

- **证明：**
- **定义谓词：**

  $EASY(x)$： x 是容易的

  $LIKE(x, y)$： x 喜欢 y

  $C(x)$： x 是 C 班的一门课程

- 已知事实和结论用谓词公式表示：

  $(\forall x)(EASY(x) \to LIKE(Wang, x))$

  $(\forall x)(C(x) \to EASY(x))$

  $C(AI)$

  $LIKE(Wang, AI)$

自然演绎推理

- **应用推理规则进行推理：**

$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(Wang, x))$

$EASY(z) \rightarrow LIKE(Wang, z)$ 全称固化

$(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$

$C(y) \rightarrow EASY(y)$ 全称固化

所以 $C(AI), C(y) \rightarrow EASY(y)$

$\Rightarrow EASY(AI)$ **P**规则及假言推理

所以 $EASY(AI), EASY(z) \rightarrow LIKE(Wang, z)$

$\Rightarrow LIKE(Wang, AI)$ **T**规则及假言推理

谓词逻辑的应用

例2 每个去临潼游览的人或者参观秦始皇兵马俑，或者参观华清池，或者洗温泉澡。凡去临潼游览的人，如果爬骊山就不能参观秦始皇兵马俑，有的游览者既不参观华清池，也不洗温泉澡。因而有的游览者不爬骊山。

解：定义G（x）表示“x去临潼游览”；

A（x）表示“x参观秦始皇兵马俑”；

B（x）表示“x参观华清池”；

C（x）表示“x洗温泉澡”；

D（x）表示“x爬骊山”。

谓词逻辑的应用

例2 每个去临潼游览的人或者参观秦始皇兵马俑，或者参观华清池，或者洗温泉澡。凡去临潼游览的人，如果爬骊山就不能参观秦始皇兵马俑，有的游览者既不参观华清池，也不洗温泉澡。因而有的游览者不爬骊山。

解：定义G（x）表示“x去临潼游览”；

A（x）表示“x参观秦始皇兵马俑”；

B（x）表示“x参观华清池”；

C（x）表示“x洗温泉澡”；

D（x）表示“x爬骊山”。

前提：$\forall x(G(x)\rightarrow A(x)\vee B(x)\vee C(x))$　（1）

$\forall x(G(x)\wedge D(x)\rightarrow\neg A(x))$　（2）

$\exists x(G(x)\wedge\neg B(x)\wedge\neg C(x))$　（3）

结论：$\exists x(G(x)\wedge\neg D(x))$

谓词逻辑的应用

前提：$\forall x(G(x)\rightarrow A(x)\lor B(x)\lor C(x))$　(1)

$\forall x(G(x)\land D(x)\rightarrow\neg A(x))$　(2)

$\exists x(G(x)\land\neg B(x)\land\neg C(x))$　(3)

结论：$\exists x(G(x)\land\neg D(x))$

证明：（4）$G(a)\land\neg B(a)\land\neg C(a)$　由(3)

（5）$G(a)\rightarrow A(a)\lor B(a)\lor C(a)$　由(1)

（6）$G(a)\land D(a)\rightarrow\neg A(a)$　由(2)

(7)　$A(a)\rightarrow\neg G(a)\lor\neg D(a)$　由(6)

（8）$G(a)$　由（4）

（9）$A(a)\lor B(a)\lor C(a)$　由（5）（8）

（10）$\neg B(a)$，$\neg C(a)$　由（4）

（11）$A(a)$　由（9）（10）

（12）$\neg D(a)$　由（7）（8）（11）

（13）$\exists x(G(x)\land\neg D(x))$　由（8）（12）

自然演绎推理

- **优点**：
- 表达定理证明过程自然，易理解。
- 拥有丰富的推理规则，推理过程灵活。
- 便于嵌入领域启发式知识。

- **缺点**：易产生组合爆炸，得到的中间结论一般呈指数形式递增。

归结演绎推理

- 反证法： $P \Rightarrow Q$ ，当且仅当 $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow F$ ，

  即 Q为 P 的逻辑推论，当且仅当 $P \wedge \neg Q$ 是不可满足的。

- **定理：Q 为 P_1, P_2 ，…， P_n的逻辑推论，当且仅当**

  $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \wedge \neg Q$ **是不可满足的。**

归结演绎推理

- 思路：定理 $P \Rightarrow Q$ ⟶ $P \wedge \neg Q$ 不可满足

⟶ 子句集不可满足 ⟶ **海伯伦定理**

↓

鲁宾逊归结原理

知识表示和推理

1　概述
2　命题逻辑
3　谓词逻辑
4　归结推理

逻辑蕴涵和基于知识的系统

- Start with KB representing explicit beliefs, usually what the agent has been told or has learned
- Implicit beliefs: $\{\alpha \mid KB \models \alpha\}$
- Actions depend on implicit beliefs, rather than explicit beliefs

推理程序

- 我们希望找到一种自动的推理程序来判断“*KB*逻辑上蕴涵α”是否成立。
- 对于一个推理程序:
- 它是合理的（Sound）是指：如果该推理程序认为答案为yes，那么“*KB*逻辑上蕴涵α”是成立的;
- 它是完备的（Complete）是指：如果“*KB*逻辑上蕴涵α”，那么该推理程序会认为答案为yes。

归结推理

- 1965年，由Robinson (鲁宾逊)提出归结法
- 归结法的基本思想
- 命题逻辑归结原理和过程
- 谓词逻辑归结原理和过程
- 应用归结原理求解问题
- 归结反演

什么是归结原理

- 在定理证明系统中，已知一个公式集F_1，F_2，…，F_n，要证明一个公式W (定理)是否成立，即要证明W是公式集的逻辑推论时，一种证明法就是要证明$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow W$为永真式。
- 反证法：证明$F = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg W$为永假，这等价于证明$F$对应的子句集$S = \{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg W\}$为不可满足的。

子句集

- **文字（literal）**：原子公式及其否定。例如，
P：正文字， ¬ P：负文字。
- **子句（clause）**：任何文字的析取。某个文字本身也都是子句。

$$P \vee Q \vee \neg R,\ \text{记作}(P, Q, \neg R)$$

- **空子句（NIL）**：不包含任何文字的子句。

空子句是永假的，不可满足的。

- **子句集**：由子句构成的集合（子句的合取）。

归结式的定义及性质

- 对于任意两个子句C_1和C_2，若C_1中有一个文字L，而C_2中有一个与L成互补的文字$\neg L$，则分别从C_1和C_2中删去L和$\neg L$，并将其剩余部分组成新的析取式。这个新的子句被称为C_1和C_2关于L的归结式，C_1和C_2则是该归结式的亲本子句

- 例如，P和$\neg P$的归结式为空子句，记作()、□或NIL；(W, R, Q)和$(W, S, \neg R)$关于R的归结式为(W, Q, S)

- 定理：两个子句的归结式是这两个子句的逻辑推论，如$\{(P, C_1), (\neg P, C_2)\} \models (C_1, C_2)$

鲁宾逊归结原理

- 子句集中子句之间是合取关系，只要有一个子句不可满足，则子句集就不可满足。

- **鲁宾逊归结原理（消解原理）的基本思想：**
  - **检查子句集 *S* 中是否包含空子句，若包含，则 *S* 不可满足。**
  - **若不包含，在 *S* 中选择合适的子句进行归结，一旦归结出空子句，就说明 *S* 是不可满足的。**

推导

- 从一个子句集S（如KB）推导出一个子句C的过程中会产生一系列子句C_1, C_2, …, C_n，其中$C_n = C$，且对于C_i ($i = 1, 2, \ldots, n$-1)均有：
  - $C_i \in S$
  - 或者C_i是推导过程中产生的某两个子句的归结式
- 从S推导出C记为：$S \vdash C$

推导的合理性

- 定理：如果$S \vdash C$，那么$S \models C$
- 证明：
  - 令S推导出C产生的子句序列为$C_1, C_2, \ldots, C_n$
  - 通过数学归纳法证明对于$i \in [1, n]$，$S \models C_i$均成立
- 反之，若$S \models C$，则从S中不一定能够推导出C。例如，$P \models (P, Q)$，但是P不能推导出(P, Q)

归结法的合理性和完备性

- 定理：$S \vdash ()$，当且仅当$S \models ()$，当且仅当S不可满足
- 由前文可知，$KB \models \alpha$，当且仅当$KB \wedge \neg \alpha$不可满足。结合上述定理，我们通过下述过程来判断$KB \models \alpha$是否成立：
  - 记$KB \wedge \neg \alpha$的子句集为S
  - 判断$S \vdash ()$是否成立，即从S中能否推导出空子句
- 归结法的过程比较单纯，只涉及归结推理规则的应用问题，因而便于实现机器证明。

命题逻辑的归结原理和过程

命题逻辑中，若给定前提集F和命题P，则归结证明过程可归纳如下：

(1)把F转化成子句集表示，得到子句集S_0;

(2)把命题P的否定式$\neg P$也转化成子句集表示，并将其加到S_0中，得$S = S_0 \cup S_{\neg P}$，

(3)对子句集S反复应用归结推理规则（推导），直至导出含有空子句的扩大子句集为止。即出现归结式为空子句时，表明已找到矛盾，证明过程结束。

命题逻辑的归结原理和过程

例1：设已知前提集为

P…………….(1)　　$(P\wedge Q)\to R$……(2)

$(S\vee T)\to Q$…(3)　　T………………..(4)

求证R。

证明：化成子句集

$S=\{P,\ \neg P\vee\neg Q\vee R,$

$\neg S\vee Q,\ \ \neg T\vee Q,\ T,$

$\neg R\}$

- 归结可用图的演绎树表示，
  由于根部出现空子句，因此
  命题R得证。

命题逻辑的归结原理和过程

例1：设已知前提集为

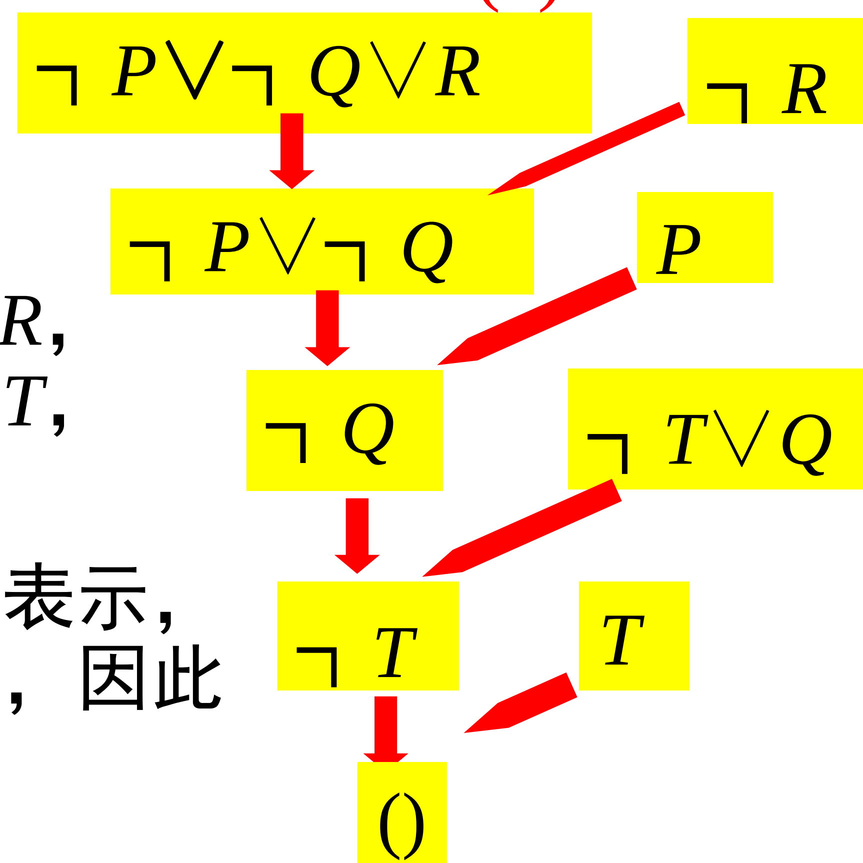
P……………(1)　　$(P \wedge Q) \to R$……(2)

$(S \vee T) \to Q$…(3)　　T………………(4)

求证R。

证明：化成子句集

$S = \{P,\ \neg P \vee \neg Q \vee R,\ \neg S \vee Q,\ \neg T \vee Q,\ T,\ \neg R\}$



- 归结可用图的演绎树表示，由于根部出现空子句，因此命题R得证。

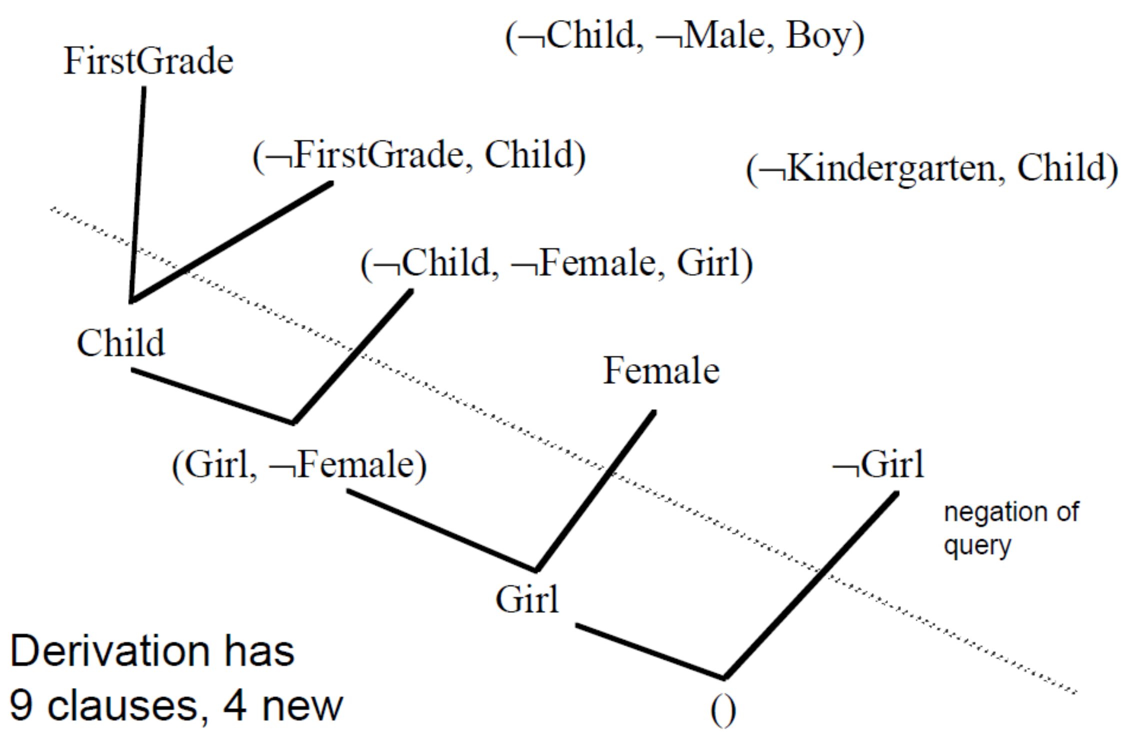
命题逻辑的归结原理和过程

例2：

KB

FirstGrade
FirstGrade -> Child
Child $\wedge$ Male -> Boy
Kindergarten -> Child
Child $\wedge$ Female -> Girl
Female

Show that KB $\models$ Girl



谓词逻辑的归结原理和过程

在谓词逻辑中应用归结法时，首先需要：

（1）将所有谓词公式（包括知识库KB和查询α）化为子句集

（2）通过合一，对含有变量的子句进行归结

$$C_1 = P(x) \vee Q(x)$$

$$C_2 = \neg P(\mathrm{a}) \vee R(y)$$

?

谓词逻辑的归结原理和过程

$$\forall x(\forall y P(x,y) \to \neg \forall y(Q(x,y) \to R(x,y)))$$

谓词公式化为子句集的步骤：

(1) 消去蕴涵和等价符号（→和↔联结词）。

$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q,\quad P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg \forall y P(x,y) \vee \neg \forall y(\neg Q(x,y) \vee R(x,y)))$$

(2) 内移否定符号¬，将其移到紧靠谓词的位置上。

双重否定律 $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

德.摩根律 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q,\quad \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

量词转换律 $\neg \exists x P \Leftrightarrow \forall x \neg P,\quad \neg \forall x P \Leftrightarrow \exists x \neg P$

$$\Longleftrightarrow \forall x(\exists y \neg P(x,y) \vee \exists y(Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$$

谓词逻辑的归结原理和过程

$$\forall x(\exists y \neg P(x,y) \vee \exists y(Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$$

谓词公式化为子句集的步骤：

(3) 变量标准化。对变量作必要的换名，使每一量词只约束一个唯一的变量名。

$$\exists x P(x) \equiv \exists y P(y), \qquad \forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x(\exists y \neg P(x,y) \vee \exists z(Q(x,z) \wedge \neg R(x,z)))$$

(4) 消去存在量词（Skolemize）。对于待消去的存在量词，若不在任何全称量词辖域之内，则用Skolem常量替代公式中存在量词约束的变量；若受全称量词约束，则要用Skolem函数替代存在量词约束的变量，然后就可消去存在量词。

谓词逻辑的归结原理和过程

$$\forall x(\exists y \neg P(x,y) \vee \exists z(Q(x,z) \wedge \neg R(x,z)))$$

Skolemize：

对于一般情况

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \exists y P(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$$

存在量词y 的Skolem函数为$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Skolem化：用Skolem函数替代存在量词约束的变量的过程。

$y = f(x)$,
$z = g(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall x(\neg P(x, f(x)) \vee (Q(x, g(x)) \wedge \neg R(x, g(x))))$

(5) 化为前束型。前束型=（前缀）{母式}。其中，前缀为全称量词串，母式为不含量词的谓词公式。

谓词逻辑的归结原理和过程

$$\forall x(\neg P(x, f(x)) \vee (Q(x, g(x)) \wedge \neg R(x, g(x))))$$

谓词公式化为子句集的步骤：

(6) 把母式化成合取范式。反复使用结合律和分配律，将母式表达成合取范式的Skolem标准形。

Skolem 标准形：$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n M$

M：子句的合取式，称为Skolem标准形的母式。

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x((\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x))))$$

(7) 略去全称量词。由于母式的变量均受全称量词的约束，因此可省略掉全称量词。

$$\Longleftrightarrow \quad (\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x)))$$

谓词逻辑的归结原理和过程

$$(\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x)))$$

谓词公式化为子句集的步骤：

(8) 把母式用子句集表示。把母式中每一个合取元称为一个子句，省去合取联结词，这样就可把母式写成集合的形式表示，每一个元素就是一个子句。

$$\Longleftrightarrow \{(\neg P(x, f(x)), Q(x, g(x))),\quad (\neg P(x, f(x)), \neg R(x, g(x)))\}$$

(9) 子句变量标准化。对某些变量重新命名，使任意两个子句不会有相同的变量出现。这是因为在使用子句集进行证明推理的过程中，有时需要例化某一个全称量词约束的变量，该步骤可以使公式尽量保持其一般化形式，增加了应用过程的灵活性。

$$\Longleftrightarrow \{(\neg P(x, f(x)), Q(x, g(x))),\quad (\neg P(y, f(y)), \neg R(y, g(y)))\}$$

谓词逻辑的归结原理和过程

- 例1 将下列谓词公式化为子句集。

$$\forall x\{[\neg P(x)\vee\neg Q(x)]\rightarrow\exists y[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge\forall x[P(x)\vee B(x)]$$

- （1）消去蕴涵符号

$$\forall x\{\neg[\neg P(x)\vee\neg Q(x)]\vee\exists y[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge\forall x[P(x)\vee B(x)]$$

- （2）把否定符号移到每个谓词前面

$$\forall x\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee\exists y[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge\forall x[P(x)\vee B(x)]$$

- （3）变量标准化

$$\forall x\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee\exists y[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge\forall w[P(w)\vee B(w)]$$

- （4）消去存在量词，设**y的Skolem函数是$f(x)$，则**

$$\forall x\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee[S(x,f(x))\wedge Q(x)]\}\wedge\forall w[P(w)\vee B(w)]$$

谓词逻辑的归结原理和过程

- 例1 将下列谓词公式化为子句集（续）。

（5）化为前束型

$$\forall x \forall w\{\{[P(x) \wedge Q(x)] \vee [S(x, f(x)) \wedge Q(x)]\} \wedge [P(w) \vee B(w)]\}$$

（6）化为标准形

$$\forall x \forall w\{\{[Q(x) \wedge P(x)] \vee [Q(x) \wedge S(x, f(x))]\} \wedge [P(w) \vee B(w)]\}$$

$$\forall x \forall w\{Q(x) \wedge [P(x) \vee S(x, f(x))] \wedge [P(w) \vee B(w)]\}$$

（7）略去全称量词

$$Q(x) \wedge [P(x) \vee S(x, f(x))] \wedge [P(w) \vee B(w)]$$

（8）消去合取词，把母式用子句集表示

$$\{Q(x),\ (P(x), S(x, f(x))),\ (P(w), B(w))\}$$

（9）子句变量标准化 $\{Q(x), (P(y), S(y, f(y))), (P(w), B(w))\}$

谓词逻辑的归结原理和过程

- **例2** 将下列谓词公式化为不含存在量词的前束型。

$$\exists x \forall y(\forall z(P(z) \land \neg Q(x,z)) \to R(x,y,f(a)))$$

- **（1）消去存在量词**

$$\forall y(\forall z(P(z) \land \neg Q(b,z)) \to R(b,y,f(a)))$$

- **（2）消去蕴涵符号**

$$\forall y(\neg \forall z(P(z) \land \neg Q(b,z)) \lor R(b,y,f(a)))$$

$$\forall y(\exists z(\neg P(z) \lor Q(b,z)) \lor R(b,y,f(a)))$$

- **（3）设z的Skolem函数是*g*(*y*)，则**

$$\forall y(\neg P(g(y)) \lor Q(b,g(y)) \lor R(b,y,f(a)))$$

谓词逻辑的归结原理和过程

- 在证明定理的演绎过程中，经常要对量化的表达式进行匹配操作，因而需要对项作变量置换使表达式一致起来。

归结过程：

◆若S中两个子句间有相同互补文字的谓词，但它们的项不同，则必须找出对应的不一致项；

◆进行变量置换，使它们的对应项一致；

◆求归结式看能否推导出空子句。

谓词逻辑的归结原理和过程

合一（Unify）：

在谓词逻辑的归结过程中，寻找项之间合适的变量置换使表达式一致，这个过程称为合一。

- 一个表达式的项可以是常量符号、变量符号或函数式。
- 表达式的例（instance）是指在表达式中用置换项置换变量后而得到的一个特定的表达式。
- 用$\sigma = \{v_1/t_1, v_2/t_2, \ldots, v_n/t_n\}$来表示任一置换（教材表示相反）。$v_i/t_i$是指表达式中的变量$v_i$以项$t_i$来替换，且不允许$v_i$用与$v_i$有关的项$t_i$（但是$t_i$中可以包含其它变量）作置换。为了便于理解，后续记$\sigma = \{v_1 = t_1, v_2 = t_2, \ldots, v_n = t_n\}$。
- 用σ对表达式E作置换后的例简记为$E\sigma$。

谓词逻辑的归结原理和过程

合一（Unify）：

- 例如，$P(x,\ g(y,z))\{x=y,\ y=f(\mathrm{a})\} \Rightarrow P(y,\ g(f(\mathrm{a}),z))$
- 注意：置换是同时进行的，而不是先后进行的。
- 可以对表达式多次置换，如用θ和σ依次对E进行置换，记为$(E\theta)\sigma$ 。其结果等价于先将这两个置换合成（组合）为一个置换，即$\theta\sigma$，再用合成置换对E进行置换，即$E(\theta\sigma)$。

谓词逻辑的归结原理和过程

合一（Unify）：

$$\theta=\{x_1=s_1,x_2=s_2,\ldots,x_m=s_m\},\ \sigma=\{y_1=t_1,y_2=t_2,\ldots,y_k=t_k\}$$

- 合成置换$\theta\sigma$的组成：1) θ的置换对，只是θ的项被σ作了置换；2) σ中与θ变量不同的那些变量对。
- 合成置换$\theta\sigma$的步骤：
  - 1. Get $S=\{x_1=s_1\sigma,x_2=s_2\sigma,\ldots,x_m=s_m\sigma,y_1=t_1,y_2=t_2,\ldots,y_k=t_k\}$
  - 2. Delete any equation $y_i = s_i$ where y_i is equal to one of the x_j in θ
  - 3. Delete any identities, i.e., equations of the form $v = v$

谓词逻辑的归结原理和过程

合一（Unify）：

- 令 $\theta = \{x = f(y), y = z\}$, $\sigma = \{x = \mathrm{a}, y = \mathrm{b}, z = y\}$
  - 1. Get $S = \{x = f(\mathrm{b}), y = y, x = \mathrm{a}, y = \mathrm{b}, z = y\}$
  - 2. Delete x = a; Delete y = b
  - 3. Delete $y = y$

$\theta\sigma = S = \{x = f(\mathrm{b}), z = y\}$

这样的合成法可使$(E\theta)\sigma = E(\theta\sigma)$，即可结合。
但置换是不可交换的，即$\theta\sigma \neq \sigma\theta$ 。
空置换$\epsilon = \{\}$也是一个置换，且$\theta\epsilon = \theta$。

谓词逻辑的归结原理和过程

合一项（Unifier）：

- A unifier (合一项) of two formulas f and g is a substitution σ that makes f and g syntactically identical.
- Note that not all formulas can be unified – substitutions only affect variables.
- e.g., $P(f(x), a)$ and $P(y, f(w))$ cannot be unified, as there is no way of making $a = f(w)$ with a substitution.

谓词逻辑的归结原理和过程

最一般的合一项（Most General Unifier）：

A substitution σ of two formulas f and g is a Most General Unifier (MGU) if

- σ is a unifier.
- For every other unifier θ of f and g there must exist a third substitution λ such that $\theta = \sigma\lambda$.

This says that every other unifier is "more specialized" than σ.

The MGU of a pair of formulas f and g is unique up to renaming.

谓词逻辑的归结原理和过程

MGU示例：

- $P(f(x), z)$ and $P(y, a)$
- $\sigma = \{y = f(a), x = a, z = a\}$ is a unifier, but not an MGU
- $\theta = \{y = f(x), z = a\}$ is an MGU
- $\sigma = \theta\lambda$, where $\lambda = \{x = a\}$

谓词逻辑的归结原理和过程

计算MGU：

- The MGU is the "least specialized" way of making atomic formulas with variables match.
- We can compute MGUs.
- Intuitively we line up the two formulas and find the first sub-expression where they disagree.
- The pair of subexpressions where they first disagree is called the disagreement set. 差异集
- The algorithm works by successively fixing disagreement sets until the two formulas become syntactically identical.

谓词逻辑的归结原理和过程

计算MGU：

Given two atomic formulas f and g

1. $\sigma = \{\}$; $S = \{f, g\}$
2. If S contains an identical pair of formulas, stop and return σ as the MGU of f and g.
3. Else find the disagreement set $D = \{e_1, e_2\}$ of S
4. If $e_1 = V$ a variable, and $e_2 = t$ a term not containing V (or vice-versa) then let $\sigma = \sigma\{V = t\}$; $S = S\{V = t\}$; Goto 2
5. Else stop, f and g cannot be unified.

Note: to update σ, we must compose σ with $\{V = t\}$.
A common error is to just add $V = t$ to σ.

谓词逻辑的归结原理和过程

计算MGU：

示例：（P. 67 例2. 18）

练习：

1. $P(f(a), g(x))$ and $P(y, y)$
2. $P(a, x, h(g(z)))$ and $P(z, h(y), h(y))$
3. $P(x, x)$ and $P(y, f(y))$

谓词逻辑的归结原理和过程

归结原理和过程：

From the two clauses $\{\rho_1\} \cup c_1$ and $\{\neg\rho_2\} \cup c_2$, where there exists a MGU σ for ρ_1 and ρ_2, infer the clause $(c_1 \cup c_2)\sigma$

Theorem. $S \vdash ()$ iff S is unsatisfiable

1. $(P(x), Q(g(x)))$
2. $(R(a), Q(z), \neg P(a))$
3. R[1a,2c]{X=a} $(Q(g(a)), R(a), Q(z))$

- "R" means resolution step.
- "1a" means the 1st (a-th) literal in the first clause: $P(x)$.
- "2c" means the 3rd (c-th) literal in the second clause: $\neg P(a)$.
- 1a and 2c are the "clashing" literals.
- $\{X = a\}$ is the MGU applied.

示例1

已知：

（1） 会朗读的人是识字的，

（2） 海豚都不识字，

（3） 有些海豚是很机灵的。

证明：有些很机灵的东西不会朗读。

解：把问题用谓词逻辑描述如下，

已知：

(1) $\forall x(R(x) \rightarrow L(x))$

(2) $\forall x(D(x) \rightarrow \neg L(x))$

(3) $\exists x(D(x) \wedge I(x))$

求证： $\exists x(I(x) \wedge \neg R(x))$

示例1

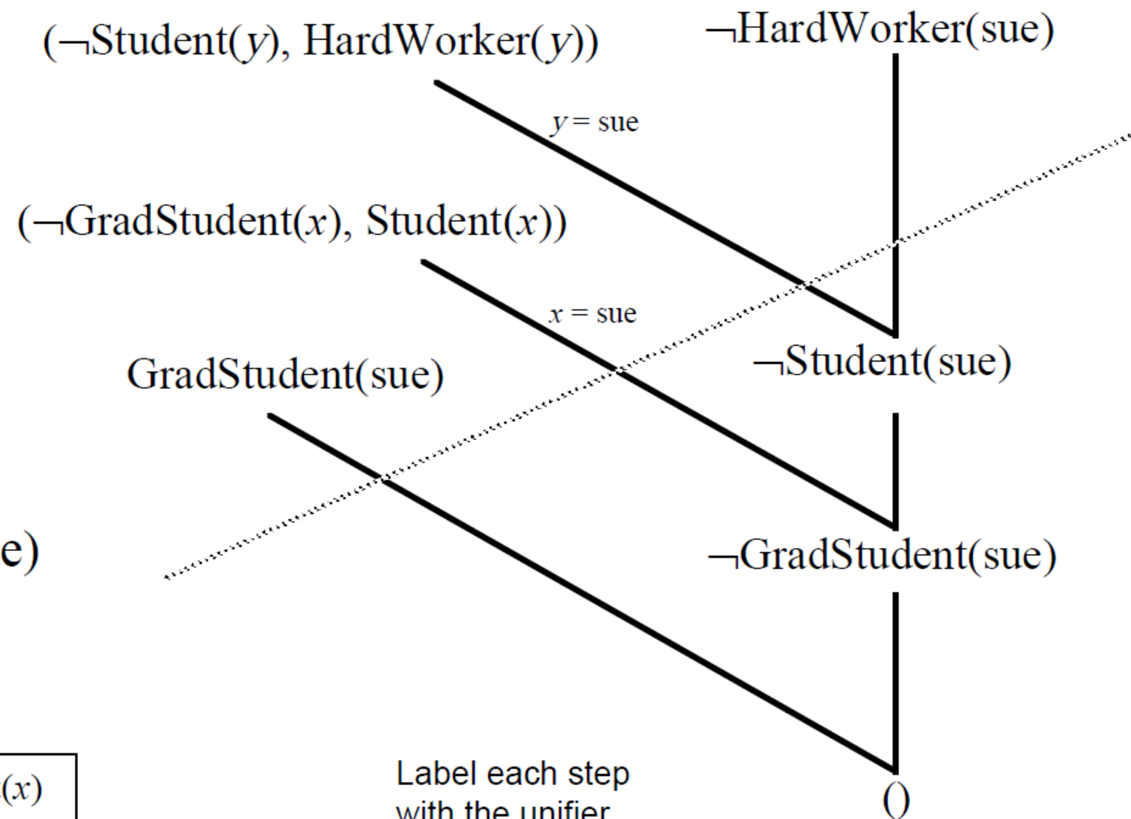
- 前提化简，待证结论取反并化成子句形，求得子句集：

  1. $(\neg R(x), L(x))$
  2. $(\neg D(y), \neg L(y))$
  3. $D(a)$
  4. $I(a)$
  5. $(\neg I(z), R(z))$

一个可行的证明过程：

6. $R[4, 5]\ \{z = a\}\ \ R(a)$
7. $R[1, 6]\ \{x = a\}\ \ L(a)$
8. $R[2, 7]\ \{y = a\}\ \ \neg D(a)$
9. $R[3, 8]\ \ ()$

示例2



KB $\overset{?}{\models}$ HardWorker(sue)

KB

$\forall x$ GradStudent(x) -> Student(x)
$\forall x$ Student(x) -> HardWorker(x)
GradStudent(sue)

Label each step with the unifier

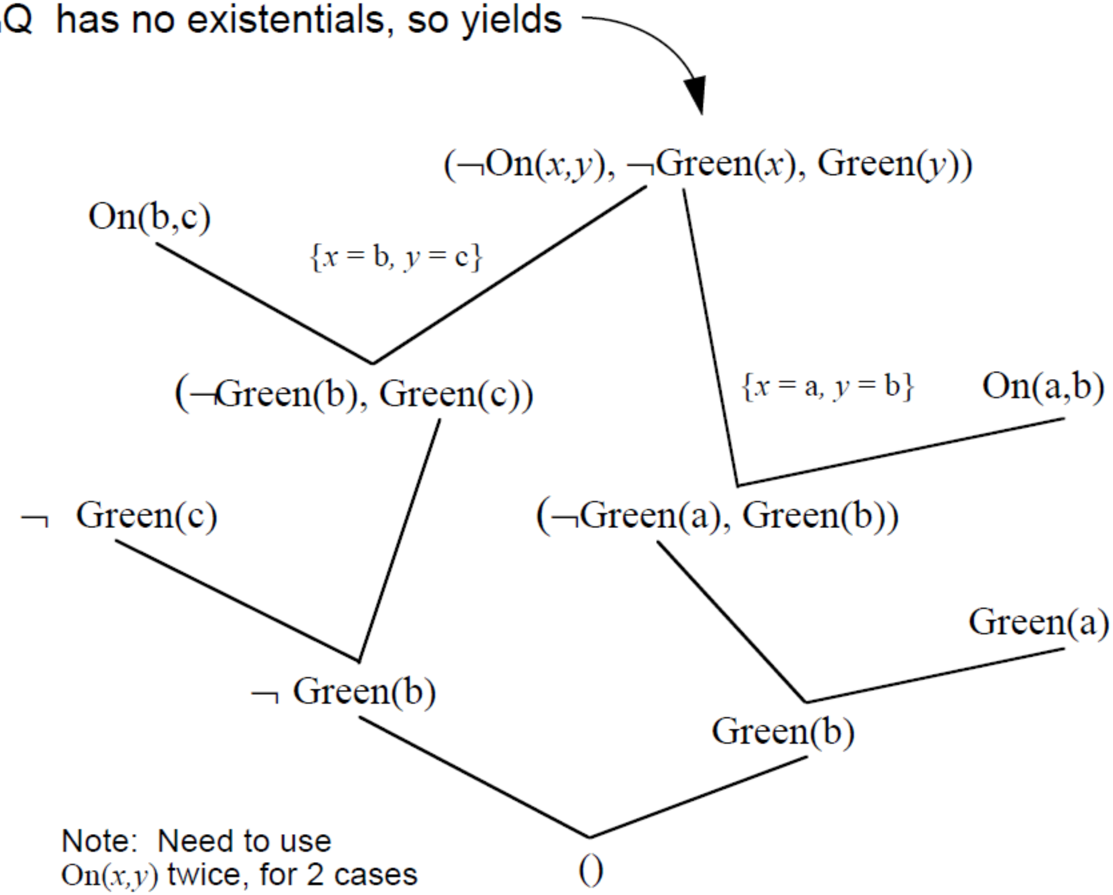
Point to relevant literals in clauses

示例3

KB = {On(a,b), On(b,c), Green(a), ¬Green(c)}   already in CNF

Query = $\exists x \exists y[\mathrm{On}(x,y) \wedge \mathrm{Green}(x) \wedge \neg\mathrm{Green}(y)]$

Note: ¬Q has no existentials, so yields



练习

Prove that $\exists y \forall x P(x,y) \models \forall x \exists y P(x,y)$

- $\exists y \forall x P(x,y) \Rightarrow 1.P(x,a)$
- $\neg \forall x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists x \forall y \neg P(x,y) \Rightarrow 2.\neg P(b,y)$
- R[1,2]$\{x=b, y=a\}()$

Exercises: Prove

- $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

不可判定问题

We use 1 for succ(0), 2 for succ(succ(0)), . . .

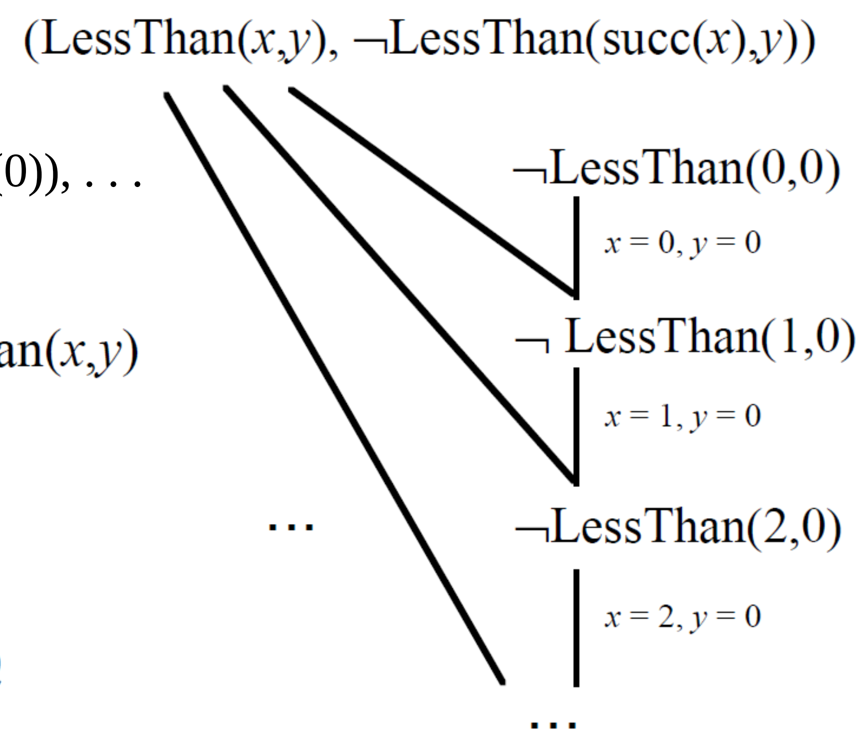
KB:

LessThan(succ(x),y) -> LessThan(x,y)

Query:

LessThan(0,0)

Should fail since KB $\not\models$ Q



Infinite branch of resolvents

对于谓词逻辑，若子句集不可满足，则必存在一个从该子句集到空子句的推导；若从子句集存在一个到空子句的推导，则该子句集是不可满足的。如果没有归结出空子句，则既不能说 S 不可满足，也不能说 S 是可满足的。

不可判定问题

- 可判定的问题：如果存在一个算法或过程，该算法用于求解该类问题时，可在有限步内停止，并给出正确的解答。
- 如果不存在这样的算法或过程则称这类问题是不可判定的。例如，There can be no procedure to decide if a set of clauses is satisfiable.

Theorem. $S \vdash ()$ iff S is unsatisfiable

However, there is no procedure to check if $S \vdash ()$, because

When S is satisfiable, the search for $()$ may not terminate

应用归结原理求解问题

- Replace query $\exists x P(x)$ by $\exists x[P(x) \wedge \neg answer(x)]$
- Instead of deriving (), derive any clause containing just the answer predicate
- 应用归结原理求解问题的步骤：

（1）已知前提 F 用谓词公式表示，并化为子句集 S；

（2）把待求解的问题 P 用谓词公式表示，并否定P，再与 *answer* 构成析取式（$\neg P \vee answer$）；

（3）把（$\neg P \vee$ answer）化为子句集，并入到子句集 S中，得到子句集S'；

（4）对 S' 应用归结原理进行归结；

（5）若得到归结式*answer*，则答案就在*answer*中。

示例1

KB: Student(john)
Student(jane)
Happy(john)

Q: $\exists x[\text{Student}(x) \wedge \text{Happy}(x)]$

Happy(john) $\quad$ $(\neg\text{Student}(x), \neg\text{Happy}(x), A(x))$

$\{x = \text{john}\}$

Student(john) $\quad$ $(\neg\text{Student}(\text{john}), A(\text{john}))$

$A(\text{john})$ $\quad$ An answer is: John

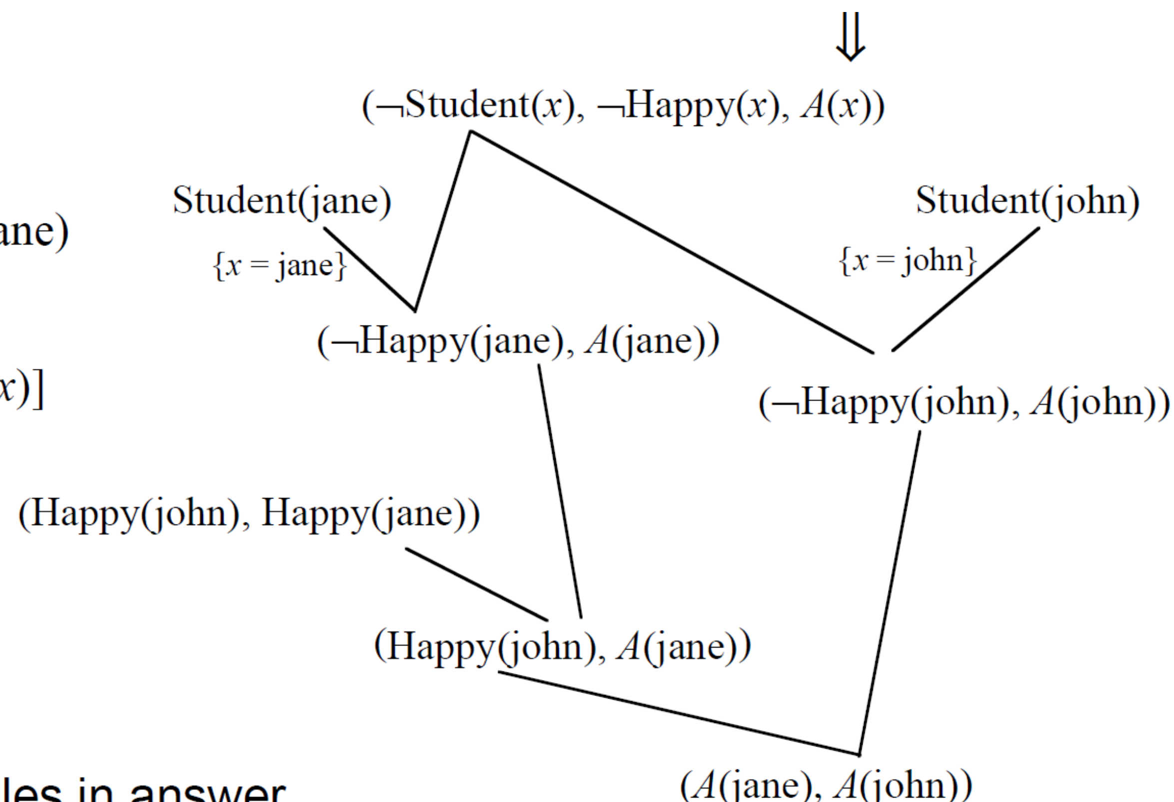
示例2

KB:

Student(john)
Student(jane)
Happy(john) $\vee$ Happy(jane)

Query:

$\exists x[\text{Student}(x) \wedge \text{Happy}(x)]$



An answer is: either Jane or John

Note: can have variables in answer

练习

- Whoever can read is literate.
- Dolphins are not literate.
- Flipper is an intelligent dolphin.
- Who is intelligent but cannot read.

Use predicates: $R(x), L(x), D(x), I(x)$

归结反演

- 应用归结原理证明定理的过程称为归结反演。
- 用归结反演证明的步骤是：

（1）将已知前提表示为谓词公式F。

（2）将待证明的结论表示为谓词公式Q，并否定得到$\neg Q$。

（3）把谓词公式集$\{F, \neg Q\}$化为子句集S。

（4）应用归结原理对子句集S中的子句进行归结，并把每次归结得到的归结式都并入到S中。如此反复进行，若出现了空子句，则停止归结，此时就证明了Q为真。