

线性代数B 期末考试
一月三日2:00PM-4:00PM

请在另外提供的答题本上答题. 务必在答题本封面清楚的标注您的姓名, 院系和学号. 本试卷考试结束后不用回收. 请写出解答过程. 考试期间不可以使用计算器手机等电子设备, 不可以参考任何电子或纸质材料, 不可以从其他人那里获得任何帮助. 本试卷共100分.

(1) (15分) 设矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- 写出 A 的特征值和特征向量. A 可不可以对角化? (8分)
- 考察线性变换 $\mathcal{A}: M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, 定义为 $\mathcal{A}(U) = A^{-1}UA$, 这里 $U \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ 是一个2阶复数方阵. 写出这个线性变换的特征值和特征向量, 并且判断 \mathcal{A} 是不是可以对角化并说明理由. (7分)

(2) (15分) 在 \mathbb{R}^4 中(\mathbb{R} 为实数域), 求空间

$$V_1 = \langle (-1, 5, 3, 2), (4, 1, -2, 9) \rangle$$

和

$$V_2 = \langle (2, 0, -1, 4), (0, 3, 4, -5) \rangle$$

的交空间 $V_1 \cap V_2$ 的一组基(7分); 求 $V_1 + V_2$ 的一组基(8分).

(3) (15分) 定义空间 $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ (实数域上的 n 阶方阵全体构成的线性空间) 上的内积为

$$(A, B) = \text{tr}(AB^t).$$

其中 $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, B^t 是矩阵 B 的转置, tr 表示矩阵的迹.

- 请验证如此定义的双线性函数确实是内积, 这样 $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ 构成了一个欧几里德空间. (5分)
- 设 $U \subset M_{n \times n}(\mathbb{R})$ 为所有反对称矩阵的全体, 它是一个子空间(不用证明). 对任何的方阵 $A = (a_{ij})$, 试用 a_{ij} 写出 $P_U A$, 即 A 在子空间 U 上的正交投影. (10分)

(4) (15分) 实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

是否存在实矩阵 B 使得 $B^2 = A$; 若没有, 是否存在复矩阵 B 使得 $B^2 = A$? 请说明你这么判断的理由.

(5) (15分) 设 K 是一个数域, 考察下述 K^{2n} 上的非退化反对称双线性函数

$$f(\alpha, \beta) = x_1 y'_1 - y_1 x'_1 + x_2 y'_2 - y_2 x'_2 + \cdots + x_n y'_n - y_n x'_n,$$

其中

$$\alpha = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n), \quad \beta = (x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, \dots, x'_n, y'_n).$$

对于 K^{2n} 的一个 k 维子空间 U ($k \leq 2n$), 类似于实内积空间, 定义正交补空间

$$U^\perp = \{\alpha \in K^{2n} | f(\alpha, \beta) = 0, \text{对任意的} \beta \in U\}.$$

- 正交补空间 U^\perp 的维数是多少? (8分)
 - 若非零子空间 U 里的任何两个向量 α, β 满足 $f(\alpha, \beta) = 0$, 这样的子空间是否存在(2分), 可能的最大维数是多少(5分)?
- (6) (15分) 设 V 是复数域 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间.
- 如果把 V 视为实数域 \mathbb{R} 上的线性空间, 就是说作为线性空间的加法不变, 对任何实数 k 和 $\alpha \in V$, 其数乘就是把 k 视为复数在原来复数域线性空间中的数乘 $k\alpha$. 那么作为实数域上的线性空间, V 的维数是多少? 为什么? (5分)
 - (10分) 设 V 是一个酉空间, 那么 V 上的 Hermitian 内积有实部和虚部. 对任何 V 中的向量 α, β , 其内积

$$(\alpha, \beta) = \Re(\alpha, \beta) + \Im(\alpha, \beta)i,$$

其中 $\Re(\alpha, \beta)$ 表示 (α, β) 的实部, $\Im(\alpha, \beta)$ 表示 (α, β) 的虚部, i 是虚数单位. 若把 V 视为实数域 \mathbb{R} 上的线性空间,

- 证明 $\Re(\alpha, \beta)$ 是一个实对称非退化双线性函数(意即 V 作为实数域上线性空间在这个对称双线性函数下构成欧几里德空间);
 - 证明 $\Im(\alpha, \beta)$ 是一个非退化的实反对称双线性函数(意即 V 作为实数域上线性空间在此反对称双线性函数下构成一个非退化的辛空间).
- (7) (10分) 定义数域 K 上的线性空间 V 的对偶空间 V^* 为从 V 到 K 的所有线性映射构成的集合 $\text{Hom}(V, K)$. 我们知道, 做为这种线性映射的全体, V^* 是线性空间.

- 若 V 的一组基是 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, 定义 $\epsilon_i^\vee \in V^*$ 使得 $\forall j$,

$$\epsilon_i^\vee(\epsilon_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

试证明 $\epsilon_1^\vee, \dots, \epsilon_n^\vee$ 是 V^* 的一组基. (3分)

- 现在令 $V = \mathbb{Q}^3$, 这里 \mathbb{Q} 是有理数域. 设

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

若 η_1, \dots, η_n 是另外一组基

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

任何一个向量 $\alpha \in V$ 都可以唯一分解为

$$\alpha = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3.$$

对 $l = 1, 2, 3$, 定义映射 $f_l: V \rightarrow \mathbb{Q}$ 为取一个向量的在 η_1, η_2, η_3 下的第 l 个坐标: 对任何 $\alpha \in V$, 定义为 $f_l(\alpha) = k_l$. 这是一个线性映射(你不用证明), 于是 $f_l \in V^*$. 对 $l = 1, 2, 3$, 把每个 f_l 写成 $\epsilon_1^\vee, \epsilon_2^\vee, \epsilon_3^\vee$ 的线性组合. (7分)