

数学物理方法（上）前四章综合练习（2018-11-16）

姓名_____ 学号_____

（本次练习共 2 页，总计 4 道大题，合计 100 分，完成时间 120 分钟）

一、选择与填空（50 分）

1. (6 分) 复数 $\frac{(\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi)^3}$ 的

(1) 指数表示式=()；

(2) 三角表示式=()。

2. (6 分) 对数函数 $w = \ln(1+z)$ 是多值函数，其原因来自：

(A) $\arg z$ 的多值性；

(B) $\arg(1+z)$ 的多值性；

(C) z 数值的不确定性；

(D) $(1+z)$ 数值的不确定性。

3. (6 分) 设函数 $f(z)$ 在复连通区域 G 内解析， C 为 G 内的分段光滑曲线，端

点为 A 和 B ，则积分 $\int_C f(z) dz$

(A) 与积分路径无关，但与端点坐标有关；

(B) 与积分路径有关，但与端点坐标无关；

(C) 与积分路径和端点坐标均无关；

(D) 与积分路径和端点坐标均有关。

4. (6 分) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(in)}{\sin(i\sqrt{n})}$ 的收敛性为：

(A) 通项不趋于 0；

(B) 通项趋于 0，发散；

(C) 条件收敛；

(D) 绝对收敛。

5. (7 分) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-i)^n z^n$ 的收敛半径为

(A) 1； (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ； (C) $\sqrt{2}$ ； (D) $\frac{1}{2}$ 。

6. (7分) 现有复数 $e^{i\phi(x)}$, 其中 $\phi(x)$ 是实变数 x 的实函数, 则 $e^{i\phi(x)}$ 的

(1) 实部 = ();

(2) 虚部 = ();

(3) 模 = ();

(4) 辐角 = ()。

7. (7分) 已知 $f(z) = \int_{|\zeta|=2} \frac{e^{\frac{\pi}{4}\zeta}}{\zeta - z} d\zeta$, 则有

(1) $f(i) = ()$;

(2) $f(3-4i) = ()$ 。

8. (5分) 请判断 $\sin(i \ln z)$ 是

(A) 多值函数;

(B) 单值函数。

二、(20分) 请计算

(1) (12分) 积分 $f(n) = \oint_{|z|=2} \frac{(z^*)^n}{z-5} dz$, 其中 n 是整数, z^* 是复数 z 的复共轭。

(2) (8分) 积分 $I = \oint_C \frac{\cos z}{z(z-\pi/2)^3} dz$, C 为曲线 $|z| = \frac{1}{4}$ 。

三、(15分) 请问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ 在 $|z| \neq 1$ 是否收敛? 若收敛, 则求其和。

四、已知函数 $f(z) = \sqrt{1-z^2} + \ln \frac{1-z}{1+z}$, 规定

$f(0) = 1 - i$, 求 $f(3)$ 。要求 (1) z 沿路径 C_1 从原点到达 $z=3$ 的点; (2) z 沿路径 C_2 从原点到达 $z=3$

的点。(15分)

