2018 秋线性代数期末(回忆版)

教师：方博汉

(1)(20 分) V 为实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间，若正交线性映射 $f: V \to V$ 特征值为 1 的特征子空间 W 维数为 $n-1$ 。证明 $f = \mathrm{id}_V - 2P$ ，其中 id_V 为 V 上恒同映射， P 为向 W 的正交补空间 $W^\perp$ 的正交投影映射。

(2)(20 分) 复数和四元数的矩阵表示

- 设 V 为实数域上 2 阶实矩阵空间 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 的子空间，试找到一组基 $\{1, i\}$ ，使得
$$1 \cdot 1 = 1, \qquad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \qquad i \cdot i = -1$$

- 设 V 为实数域上 2 阶复矩阵空间 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 的子空间（所以共有 8 维），试找到一组基 $\{1, i, j, k\}$ 使得
$$1 \cdot 1 = 1, \qquad 1 \cdot i = i \cdot 1 = 1, \qquad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \qquad 1 \cdot k = k \cdot 1 = 1$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$$

(3)(20 分) 设矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

若将 A 视为实数域上正交矩阵，求一组正交基，使得 A 化为标准的分块对角化的形式(10 分)；若将 A 视为酉矩阵，求酉空间中一组正交基，使得 A 对角化。(10 分)

(4)(20 分) 若 A 为复数域上 n 阶方阵，定义
$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

可以用 Jordan 标准形证明，对于任意矩阵，右边的式子是收敛的(你不用证明)。

- (10 分)证明：
$$\exp\big(\mathrm{tr}(A)\big) = \det\left(\exp\left(A\right)\right)$$

- (10 分)证明：若 A 是反对称矩阵，则 $\exp(A)$ 是正交矩阵。(提示：先证明 若 AB=BA，则 $\exp(A+B)=\exp(A)\cdot\exp(B)$ 可以直接用这个结论证明，得 5 分)

(5)(20 分) 设 V 为复数域上 n 维线性空间。我们知道 $V\otimes V$ 上有同构

$$\sigma(\alpha\otimes\beta)=\beta\otimes\alpha$$

(a) (2 分) 设 $S=\{v\in V\otimes V\,|\,\sigma(v)=v\}$，S 是 $V\otimes V$ 的子空间(你不用证明这个事实)，求 S 的维数，设 V 的一组基为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$。

(b) (10 分) 证明：对于任意的 $v\in S$，存在 V 中一组基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 使得

$$v=\alpha_1\otimes\alpha_1+\alpha_2\otimes\alpha_2+\cdots+\alpha_k\otimes\alpha_k$$

非负整数 k 依赖于 v，且 $k<n$。

(c) (4 分) 证明：对于任意的 $w\in\Lambda^2V$，存在 V 中一组基 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 使得

$$w=\beta_1\wedge\beta_2+\beta_3\wedge\beta_4+\cdots+\beta_{2k-1}\wedge\beta_{2k}$$

非负整数 k 依赖于 v，且 $2k<n$ 。

(d) (4 分) 若 V 是任意数域 K 上线性空间，(b) 和 (c) 是否还一定成立?