

线性代数B 期中考试
十一月一日1:00PM-2:50PM, 理教402

请在另外提供的答题本上答题。务必在答题本封面清楚的标注您的姓名、院系和学号。本试卷考试结束后不用回收。请写出解答过程。考试期间不可以使用计算器手机等电子设备, 不可以参考任何电子或纸质材料, 不可以从其他人那里获得任何帮助。本试卷共100分。

- (1) (20分) 下面齐次线性方程组有没有非零解? 若有, 请找出一个基础解系。(请注意角标, 比如第一个方程没有 x_1 项, 第二个方程没有 x_2 项)

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

- (2) (20分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

- (3) (20分) 求下列向量组的秩和它的一个极大无关组

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (6, 4, 1, -1, 2), \\ \alpha_2 &= (1, 0, 2, 3, -4), \\ \alpha_3 &= (1, 4, -9, -16, 22), \\ \alpha_4 &= (7, 1, 0, -1, 3). \end{aligned}$$

- (4) (20分) 若

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

试计算 AB , $AB - BA$, $(AB)^t$.

- (5) (10分) 如果 n 是偶数, 试找一个 n 阶实数方阵 A 使得

$$A^2 = -I.$$

- (6) (10分) 若

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相等。找出所有和 A 交换的矩阵(即矩阵 B , 使得 $AB = BA$)。