线性代数B 期中考试

十月三十日1:00PM-2:50PM

请在另外提供的答题本上答题。务必在答题本封面清楚的标注您的姓名、院系和学号。本试卷考试结束后不用回收。请写出解答过程。考试期间不可以使用计算器手机等电子设备，不可以参考任何电子或纸质材料，不可以从其他人那里获得任何帮助。本试卷共100分。

(1) (20分) 求下列方程组的通解

$$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+x_2-4x_3-x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+6x_3-3x_4=1. \end{cases}$$

(2) (20分)$n\times n$矩阵A,J为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

试计算AJ和JA并指出何时$AJ=JA$.

(3) (20分) 求下列向量组的秩和它的一个极大无关组

$$\alpha_1=(1,3,-2,6),$$
$$\alpha_2=(4,7,-4,11),$$
$$\alpha_3=(2,1,0,-1),$$
$$\alpha_4=(1,-2,2,-7).$$

(4) (10分) 设$A\in M_{s\times n}(K), B\in M_{n\times s}(K)$且$AB=0$, 证明

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\le n,$$

(5) (20分) 数域K上的线性空间V的对偶空间V^*为从V到K的所有线性映射构成的集合$\operatorname{Hom}(V,K)$. 若V的一组基是$\alpha_1,\dots,\alpha_n$, 定义对偶基$\alpha_i^\vee\in V^*$使得$\forall j$,

$$\alpha_i^\vee(\alpha_j)=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{if } i=j, \\ 0, & \text{if } i\neq j. \end{cases}$$

现在令$V=\mathbb{Q}^3$, 这里$\mathbb{Q}$是有理数域. 设

$$\epsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \epsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \epsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

若$\eta_1,\dots,\eta_n$是另外一组基

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \eta_3=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

用V^*的基$\epsilon_1^\vee,\epsilon_2^\vee,\epsilon_3^\vee$线性表出$\eta_1^\vee,\eta_2^\vee,\eta_3^\vee$.

(6) (10分)设$A=\{\alpha_1,\dots,\alpha_s\}$为$K$上有限维线性空间$V$中的向量组, 设$V$的维数是$n$. 考察映射

$$\iota: V^*\to \mathrm{Map}(A,K),$$

这里$\mathrm{Map}(A,K)$是集合A到数域K的函数的全体, 构成一个线性空间. 对任何V上的线性函数$r\in V^*$, $\iota(r)$就是r限制在集合A上, 即$\iota(r)(\alpha_i)$定义为$r(\alpha_i)$. 试证明:

- (5分) 若$\mathrm{rank}A=n$, 则ι是单射;
- (5分) 若A线性无关, 则ι是满射.