Analisi di un sistema 3 DOF

Marco Basilici, corso di Mechanical Vibrations

2015/17

1.1 Introduzione

Il sistema consiste in tre differenti corpi posizionati su dei carrelli. I carrelli sono allineati e vincolati a traslare sullo stesso asse. I corpi sono connessi tra loro tramite delle molle e solo l'ultimo corpo è connesso a telaio del meccanismo. Il primo corpo è rigidamente connesso a un sistema pignone-cremagliera azionati da un motore controllato in voltaggio dall'interfaccia del PC. La posizione di ogni massa è individuata da encoder collegati alle stesse. La posizione dello zero è identificato dalla posizione di equilibrio del sistema.

Le prove effettuate sono 4 con differenti ingressi misurabili in Volt in ingresso al motore, e acquisendo gli spostamenti delle 3 masse.

1. Input a gradino A=0.5 [V], f=0.1 [Hz]
2. Impulsi A=3[V], f=0.1[Hz]
3. Sine sweep A=0.2[V], f= crescente lentamente
4. Sine sweep A=0.2[V], f= crescente velocemente

1.2 Sistema Dinamico

1.2.1 Assunzioni

Per definire un sistema lineare alcune assunzioni devono essere fatte:

Movimento rettilineo: tutte le masse, e la cremagliera si suppone diano mosse da una forza esterna lungo lo stesso asse, ovvero l'asse di movimento.

Attrito viscoso: solo l'attrito viscoso è presente nel modello.

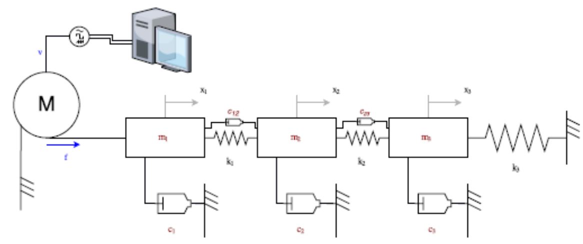
Dinamica elettrica istantanea: il modello del motore è rappresentato solo da un guadagno tra voltaggio e forza.

Meccanismo del motore unito: l'inerzia e smorzamento del motore sono uniti alla massa m_1 e c_1

$$\begin{cases} m_1 = m_{body} + \dfrac{J_{motor,zz}}{{r_{pinion}}^2} \\ c_1 = c_{body} + \dfrac{c_{motor}}{{r_{pinion}}^2} \end{cases}$$

1.2.2 Modello

Il modello scelto è costituito da 3 masse concentrate, 3 molle concentrate tra le masse (l'ultima con il telaio), e 5 smorzatori posti tra le masse e il terreno.



1.2.3 Funzione di trasferimento

L'equazione del moto del sistema è

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = +k_1(x_2 - x_1) + c_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_1\dot{x}_1 + f \\ m_2\ddot{x}_2 = +k_1(x_1 - x_2) + c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_2\dot{x}_2 + k_2(x_3 - x_2) + c_{23}(\dot{x}_3 \\ m_3\ddot{x}_3 = +k_2(x_2 - x_3) + c_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - c_3\dot{x}_3 - k_3x_3 \end{cases}$$

in forma matriciale

$$[M]\ddot{x}(t) + [C]\dot{x}(t) + [K]x\,(t) = F(t)$$

Con

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{12} + c_1 & -c_{12} & 0 \\ -c_{12} & +c_{12} + c_2 + c_{23} & -c_{23} \\ 0 & -c_{23} & c_{23} + c_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}, \ddot{x}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nel dominio di Laplace con queste condizioni iniziali

$$\begin{cases} \dot{x}\,(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$D = [M]s^2 + [C]s + [K]$$

la funzione di trasferimento di conseguenza

$$G(s) = inv\,(D)$$

1.2.4 Pre-elaborazione dei dati

1.2.4.1 encoder

I dati raccolti fornisco i "counts" degli encoder e non lo spostamento, quindi dobbiamo elaborare i dati in questo modo:

$$\Delta x = 2\pi\, r_e \frac{\Delta counts}{16000}\ [m]$$

Dove r_e è il raggio degli encoder con $2\pi r_e = 0.0706\, m$ e 16000 è il numero dei counts per giro dell'encoder.

1.2.4.2 Motore e trasmissione

Il valore disponibile dai dati è il voltaggio v, quindi servendoci di questa equazione siamo giunti alla forza.

$$f = (k_a\, k_t\, k_{mp})\ \ v\ \ [N]$$

dove $k_a \approx 2[A/V], k_t \approx 0.1[Nm/A], k_{mp} = \frac{1}{26.25}\left[\frac{1}{m}\right]$

1.2.4.3 Parametri e dati disponibili

$$Dati \begin{cases} k_1 = 800\ [N/m] \\ k_2 = 800\ [N/m] \\ k_3 = 400\ [N/m] \end{cases}, Incognite \begin{cases} m_1 \\ m_2\ [Kg] \\ m_3 \\ \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3\ [Ns/m] \\ c_{12} \\ c_{23} \\ \\ g_v \end{cases}$$

1.3 Identificazione dei parametri

1.3.1 Analisi in condizioni stazionarie

1.3.1.1 Obiettivo

L'obiettivo è verificare il rapporto tra le varie rigidezze delle molle e calcolare una nuova stima del coefficiente g_v rapporto della forza sul voltaggio

1.3.1.2 Assunzioni

L'input in volt al motore è dato da un segnale a gradino A=0.5 [V], f=0.1 [Hz]. La relativa risposta del sistema si può vedere dal grafico in fig.

Si considera il sistema negli intervalli di tempo in cui è nella condizione stazionaria.

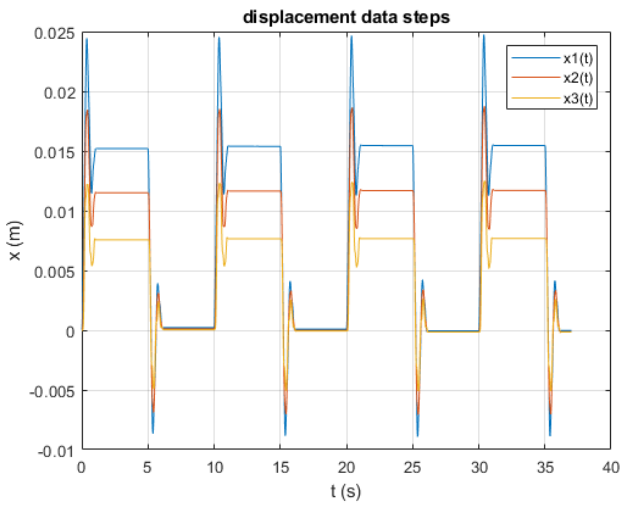
$$[K]x = g_v\, \boldsymbol{v}$$

Per la risoluzione del sistema si è assunto $k_3 = 400$ come valore reale di rigidezza.

1.3.1.3 Soluzione

Considerando lo spostamento x nella configurazione stazionaria x_{ss}

$$x_{ss} = g_v\, \boldsymbol{v}\, [K]^{-1} \quad \text{con } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{cs} = \frac{v g_v}{k_3} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k_3}{k_2} + \frac{k_3}{k_1} \\ 1 + \frac{k_3}{k_2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi di noto abbiamo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{cs}$ nell' intervallo di tempo t=2 [s] fino a t= 4)[s] , facendo la media con i valori ottenuti nei gradini successivi.

Possiamo quindi calcolare i rapporti delle rigidezze

$$k_{31} = \frac{k_3}{k_1} \qquad k_{32} = \frac{k_3}{k_2}$$

1.3.1.4 Risultati

	Calcolato	Nominale	Errore %
k_{31}	0.489	0.5	2.18
k_{32}	0.523	0.5	4.65
g_v	6.145	5.25	17.05

1.3.2 Stima dei parametri

1.3.2.1 Obiettivo

Tramite la risposta impulsiva del sistema stimare i parametri incogniti indicati nella sezione 1.2.4.3

1.3.2.2 Soluzione

Per determinare i parametri incogniti:

$$\theta = \begin{cases} m_1 \\ m_2\ [Kg] \\ m_3 \\ \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3\ [Ns/m] \\ c_{12} \\ c_{23} \\ \\ g_v \end{cases}$$

Si è proceduto in questo ordine

1. Sistema lineare
2. Definizione dei parametri incogniti
3. Calcolo delle matrici $[M], [C], [K]$
4. Calcolo della funzione di trasferimento
5. Risposta del sistema a Impulsi A=3[V], f=0.1[Hz]
6. Calcolo del RMS(e) dell'errore tra la risposta data e quella calcolata
7. Minimizzazione RMS(e)

1.3.2.3 Risultati