1 Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = \underline{\underline{1}}$

б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot 44 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = \underline{\underline{176}}$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) =$

$= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) =$

$= -3 + 12 - 9 = \underline{\underline{0}}$

2 Определитель матрицы равен 4. Найти:

а) $\det(A^2) = \det A \cdot \det A = 4 \cdot 4 = 16$

б) $\det(A^T) = \det A = 4$

в) $\det(2A) = 2 \cdot \det A = 2 \cdot 4 = 8$

3 Доказать, что матрица

$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

вырожденная. (Опред. = 0)

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -14 & 6 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-182 - 42) - 7 \cdot (52 + 18) - 3 \cdot (28 - 42) =$$

$$= -2 \cdot (-224) - 7 \cdot (70) - 3 \cdot (-14) =$$

$$= 448 - 490 + 42 = 0$$

или

Прибавим ко 2й строке первую:

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 2 & -7 & 3 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix}$$

Прибавим к 1й строке 2ю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 3 \\ -3 & 7 & 3 \end{vmatrix} \longrightarrow \text{т.о. опред.} = 0$$

4. Найти ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1) 3я строка — сумма 1й и 2й, можно отбросить:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) вычитаем из 1й строки 2ю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) меняем 1 и 2 строки местами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \text{ранг } \underline{2}$$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$:

1) 3 строка — комбинац. Σ 1й и 2й, убираем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Транспонируем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

3) Умножаем 1ю строку на 1,5, получаем 2ю строку, т.е. строку убираем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

4) Из 2й строки вычитаем 3ю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Из 2й вычитаем 1ю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :2 \\ :3 \end{matrix}$$

Делим 2ю строку на 2 а 3ю на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: <u>Ранг 3</u>