Parcial Octubre

Pregunta 1

(1 punto) Dada una serie de valores f_k $k = 1 \ldots n$ indicar que se entiende por diferencia finita de orden n $\Delta^n f_k$.

Seleccione una:

- a. $\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$ ✔
- b. $\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_{k-1}$
- c. $\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_k - \Delta^{n-1} f_{k-1}$
- d. Ninguna de las otras respuestas.

SOLUCIÓN: Opción a)

EXPLICACIÓN

Es la fórmula que aparece en la diapo 17 del tema de *Aproximación de funciones*.

Pregunta 2

(1 punto) Si P es un Spline Cúbico definido en un intervalo [a,b], se tiene:

Seleccione una:

- a. Que el Spline y todas sus derivadas son continuas en [a,b] (incluidos los nodos) ✖
- b. Que el Spline y la primera derivada son continuos en todo [a,b] (incluidos los nodos), pero la segunda derivada no tiene por qué serlo.
- c. Que, el spline, la primera y la segunda derivada son continuas en todo [a,b] (incluidos los nodos).
- d. Que el Spline es continuo en [a,b], pero ni la primera ni la segunda derivada tienen por qué ser continuas en [a,b].

SOLUCIÓN: La opción c).

EXPLICACIÓN:

Un Spline cúbico $P(x)$ se define mediante polinomios cúbicos $P_i(x)$ en subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ dentro de $[a, b]$. Para asegurar la continuidad de $P(x)$ y sus derivadas de primer y segundo orden en todo $[a, b]$, se imponen las siguientes condiciones:

1. **Continuidad en x_i**: El valor del Spline Cúbico y sus derivadas de primer y segundo orden deben ser iguales en los puntos de conexión x_i entre los subintervalos, así asegurando que sea contínuo en estos puntos.

$$P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i)$$

$$P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i)$$

$$P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i)$$

1. **Condiciones de borde**: Pueden existir diferentes condiciones de borde, como condiciones de frontera naturales, donde las segundas derivadas en los extremos a y b son cero. Esto asegura que el Spline Cúbico sea suave en los extremos.

$$P''(a) = 0$$

$$P''(b) = 0$$

Pregunta 3

(4 puntos). Para la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ sean $\mathbf{x_0 = 0, x_1 = 0.6, y\ x_2 = 0.9.}$ Construir el polinomio de interpolación de Lagrange **P(x)** a partir de esos tres puntos y encontrar el error absoluto $\mathbf{e_{abs}}$ **(f(0,45))** al evaluar **P(0,45)**.

Seleccione una:

a. e_{abs} (f(0,45)) = -0.00089418

b. e_{abs} (f(0,45)) = -0.000402109

c. e_{abs} (f(0,45)) = 0.000402109

d. Ninguna de las otras respuestas.

SOLUCIÓN:

$e_{abs}(f(0.45)) = 0.000402109$

EXPLICACIÓN:

El polinomio de interpolación de Lagrange se construye con la siguiente fórmula:

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x)$

Donde:

- n: grado del polinomio de interpolación.
- $f(x_i)$ es el valor de la función en x_i.
- $L_i(x)$ son los polinomios de Langrage dados por la siguiente fórmula:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Con los puntos que nos han dado en el enunciado, los polinomios de Lagrange quedan de la siguiente forma:

$L_0(x) = \frac{(x-0.6)(x-0.9)}{(0-0.6)(0-0.9)} = \frac{x^2-1.5x+0.54}{0.54}$

$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-0.9)}{(0.6-0)(0.6-0.9)} = \frac{x^2-0.9x}{-0.18}$

$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.6)}{(0.9-0)(0.9-0.6)} = \frac{x^2-0.6x}{0.27}$

Ahora el polinomio de interpolación $P(x)$ queda de la siguiente manera:

$P(X) = f(0) \cdot L_0(x) + f(0.6) \cdot L_1(x) + f(0.9) \cdot L_2(x)$

Ahora que lo tenemos todo, vamos a ir obteniendo respuestas:

1. $f(0.45) = \frac{1}{\sqrt{2.45}} = 0.638876565$
2. $P(0.45) = \ldots = 0.6392786748$
3. $e_{abs} = P(0.45) - f(0.45) = 0.0004021098$

Pregunta 4

i) (4 puntos) Calcular las matrices U y S de la descomposición en valores singulares (A=U*S*V^T) de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Seleccione una:

a. $U = \begin{bmatrix} -0.8247362 & -0.24750235 & -0.21848175 \\ 0.39133557 & -0.52160897 & 0.40824829 \\ 0.40824829 & -0.81649658 & -0.88634026 \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} 0.91527173 & 0 \\ 0 & 2.6762432 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $U = \begin{bmatrix} -0.8247362 & -0.52160897 & -0.21848175 \\ 0.39133557 & -0.24750235 & -0.88634026 \\ 0.40824829 & -0.81649658 & 0.40824829 \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} 0.91527173 & 0 \\ 0 & 2.6762432 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $U = \begin{bmatrix} -0.8247362 & -0.52160897 & -0.21848175 \\ 0.39133557 & -0.24750235 & -0.88634026 \\ 0.40824829 & -0.81649658 & 0.40824829 \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} 0.91527173 & 0 \\ 0 & 2.6762432 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d. $U = \begin{bmatrix} -0.26726124 & -0.40824829 & 0.87287156 \\ -0.80178373 & -0.40824829 & -0.43643578 \\ 0.53452248 & -0.81649658 & -0.21821789 \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} 2.64575131 & 0 \\ 0 & 1.73205081 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✔

SOLUCIÓN: Opción d).

EXPLICACIÓN: Vamos a ir por pasos:

1. Calculamos la matriz $A^T A$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Obtenemos los autovalores (λ):

$$\lambda_1 = 7$$
$$\lambda_2 = 3$$

2. Obtenemos las raices cuadradas:

$$\sqrt{\lambda_1} = 2.64575131$$
$$\sqrt{\lambda_2} = 1.73205081$$

En este problema sólo hay una solución cuya matriz S tenga los valores del paso 3, que es la opción d).

1. Para calcular U seguimos los siguientes pasos:

> 4.1. Autovalores de AA^T:
>
> $$\lambda_1 = 7$$
> $$\lambda_2 = 3$$
> $$\lambda_3 = 0$$
>
> 4.2. Autovectores de AA^T para λ no nulo:
>
> $$\lambda_1 \rightarrow av_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
> $$\lambda_2 \rightarrow av_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
>
> 4.3. Calculamos los módulos de los autovectores:
>
> $$|av_1| = \frac{\sqrt{14}}{2}$$
> $$|av_2| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$
>
> 4.4. Calculamos $u_i = \frac{av_i}{|av_i|}$:
>
> $$u_1 = \frac{\begin{bmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \begin{bmatrix} -0.26726124 \\ -0.80178373 \\ 0.53452248 \end{bmatrix}$$
> $$u_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \begin{bmatrix} 0.40824829 \\ 0.40824829 \\ 0.81649658 \end{bmatrix}$$

2. Buscamos la matriz U que tenga los vectores u_1 y u_2. En este caso, coincide con d).

Pregunta 5

Suponga que X es una variable aleatoria **no** uniforme. Sea f(x) su función de densidad de probabilidad, pdf. Sea h(X) una función de la variable aleatoria. Se pretende estimar el valor esperado de h(X), E[h(X)]

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

Seleccione una:

a. Si $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una muestra de f(x), y $\{x'_0, x'_1, ..., x'_n\}$ una muestra antitética a la anterior, el valor esperado de h(x) se puede estimar mediante

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n} h(x_i) + \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n} h(x'_i)$$

b. Si $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una muestra de f(x), el valor esperado de h(x) se puede estimar mediante

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} h(x_i)$$

c. Si $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una muestra de una v.a X' de pdf g(x'), el valor esperado de h(x) se puede estimar mediante

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \frac{h(x_i)\, f(x_i)}{g(x_i)}$$

d. Si $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una muestra de f(x), el valor esperado de h(x) se puede estimar mediante

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} h(x_i)\, f(x_i)$$

SOLUCIÓN: Opción d).

EXPLICACIÓN:

La fórmula que hay en d), solo es correcta en el caso de una variable aleatoria uniforme. Dado que nos han dicho que **NO** lo es, pues es la incorrecta.

La fórmula de b) es la correcta para una variable no aleatoria dado que se basa en la teoría de grandes números.

Pregunta 6

(2 puntos) Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad (pdf):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{min} \\ Cx^{-\alpha} & x > x_{min} \end{cases}$$

donde $x_{min} \in \mathbb{R}^+$, $1 < \alpha < 2$ y C es la constante de normalización $C = (\alpha - 1)x_{min}{}^{\alpha - 1}$

Suponga que dispone de un algoritmo para generar una variable aleatoria continua $u \in U(0,1)$.
¿Cuál de los siguientes igualdades produce una muestra de $\boldsymbol{X}$?

Seleccione una:

- $x = x_{min}\, u^{-1/\alpha - 1}$ ✔
- $x = x_{min}(1 - u)^{-1/\alpha}$
- $x = \left(\frac{u}{C}\right)^{-1/\alpha}$
- $x = x_{min}(1 - \alpha)\ln(u)$

SOLUCIÓN: Opción a)

EXPLICACIÓN:

La clave es utilizar la función de distribución acumulativa inversa, o CDF inversa, de X. La CDF de X se define como:

$$F(x) = \int_{x_{min}}^{x} f(t)\, dt$$

Dado que $F(x_{min}) = 0$, la CDF inversa $F^{-1}(u)$ es la solución de la ecuación:

$$F(F^{-1}(u)) = u$$

La variable aleatoria transformada x se elige de manera que $F(x) = u$. Al sustituir la expresión de la CDF y resolver para x, se obtiene la fórmula de la solución.

Pregunta 7

(2 puntos) Sea una variable aleatoria **X** con función densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_{min} \\ Zx^{-\alpha} e^{-\lambda x} & x > x_{min} \end{cases}$$

siendo **Z** la constante de normalización apropiada, $1 < \alpha < 2$ y $\lambda, x_{min} \in \mathbb{R}^+$ con $1/\lambda > x_{min}$.

Suponga que dispone de un algoritmo para obtener una muestra de una variable aleatoria que se distribuye según la función densidad de probabilidad pdf

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_{min} \\ Cx^{-\alpha} & x > x_{min} \end{cases}$$

Complete la linea que falta en el pseudocódigo del siguiente algoritmo de aceptación / rechazo para obtener una muestra de una variable aleatoria **X** cuya pdf sea f(x):

genere *una muestra* $x_1, x_2, \cdots x_N$ *de g(x)*

genere *una muestra* $u_1, u_2, \cdots u_N$ *de U(0, 1)*

para todo i ***desde*** *1* ***hasta*** N *:*

si .... acepte x_i *como elemento de la muestra de f(x)*

sino rechace x_i *como elemento de la muestra de f(x)*

Seleccione una:

- $u_i < \dfrac{f(x_i)}{A\, g(x_i)}$ *donde* $A = \left(\dfrac{C}{Z}\right) e^{-\lambda x_{min}}$
- $u_i > \dfrac{f(x_i)}{A\, g(x_i)}$ *donde* $A = \left(\dfrac{Z}{C}\right) e^{-\lambda x_{min}}$
- $u_i < \dfrac{A\, f(x_i)}{g(x_i)}$ *donde* $A = \left(\dfrac{Z}{C}\right) e^{-\lambda x_{min}}$
- $u_i < \dfrac{f(x_i)}{A\, g(x_i)}$ *donde* $A = \left(\dfrac{Z}{C}\right) e^{-\lambda x_{min}}$

SOLUCIÓN: Opción d)

EXPLICACIÓN: Notebook de *Generación de variables*

Pregunta 8

(2 puntos) Sea ***X*** una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad (pdf):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{min} \\ Cx^{-\alpha} & x > x_{min} \end{cases}$$

donde $x_{min} \in \mathbb{R}^+$, $1 < \alpha < 2$ y C es la constante de normalización $C = (\alpha - 1)x_{min}{}^{\alpha - 1}$.

¿Cuál es la función de distribución ***F(x)*** de la variable aleatoria ***X?***

Seleccione una:

- $F(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha}$
- $F(x) = \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha}$
- $F(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha + 1}$
- $F(x) = \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha + 1}$

SOLUCIÓN: Opción c

EXPLICACIÓN:

Empezamos por integrar para $x \leq x_{min}$:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x_{min}} 0 \; dt = 0$, para $x \leq x_{min}$.

Ahora integramos para $x > x_{min}$:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x_{min}} Ct^{-a} \; dt$

Calculamos la integral: $F(x) = C\left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_{x_{min}}^{x} = -\frac{C}{a-1}\left(x^{-a+1} - x_{min}^{-a+1}\right)$

Ahora, sustituimos el valor de C, simplificamos y cancelamos y obtenemos la siguiente expresión:

$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-a+1}$