Take Home 1

Álvaro José Álvarez Arranz

April 7, 2024

1 Cuestiones

1. Reflexiona y explica las modificaciones que consideres que hay que realizar en el algoritmo Simplex si tratamos de aplicarlo para la resolución de un problema de maximización, a diferencia de la versión de minimización que vimos en clase.

Respuesta: De acuerdo a lo visto en clase, para el *Algoritmo Simplex*, en la fila correspondiente a la función a **minimizar**, hay que escribir $-f(x)$, mientras que, si la función hay que **maximizarla**, se escribe la función tal cual se anuncia. Para las restricciones no hay cambio alguno.

Vamos a escribir unos ejemplos solo para maximizar y minimizar sin restricciones:

- **Maximización:** A continuación, usamos como ejemplo el ejercicio 2 de la siguiente sección:

  $$\max -x_1 - 2x_2$$

  Para este caso, la inicialización de la fila z de la tabla del algoritmo sería:

z	-1	-2

  Table 1: Tabla **maximización**

- **Minimización:** A continuación, usaremos como función a minimizar el ejercicio 2 de la siguiente sección:

  $$\min -x_1 - 2x_2$$

  Para este ejemplo, la inicialización de la fila z de la tabla del algoritmo sería:

z	1	2

  Table 2: Tabla **minimización**

2. Una formulación alternativa de un modelo de programación lineal es la formulación dual de un problema. Se pide que explores en los textos recomendados esta formulación e indiques:

   a. Cuál es la definición de problema Dual de un problema de Programación Lineal Primal.

   b. ¿Qué relación existe entre ambos en términos de las soluciones posibles?

Respuesta:

La dualidad o el **principio de dualidad** es el principio de que los problemas de optimización pueden verse desde cualquiera de las dos perspectivas, el **problema primario** o el **problema dual**. Si el primal es un problema de minimización, entonces el dual es un problema de maximización y viceversa. [1]

2 Ejercicios

1. Calcular el número de evaluaciones funcionales necesarias para los valores de $\alpha = 0.1, 0.01, 0.001$, siendo α el cociente entre la longitud final del intervalo de incertidumbre respecto de su valor inicial, para los siguientes métodos:

   a) búsquda uniforme

   b) búsqueda dicotómica.

   c) razón áurea.

   ¿Qué conclusión puedes sacar?

Solución:

Para este ejercicio se usará la siguiente función cóncava:

$$f(x) = x^2 + 2x$$

Nota: Esta función se ha usado para ilustrar ejemplos en las diapositivas.

A continuación, se usará una tabla para guardar los resultados obtenidos tras la ejecución en *python* de los algoritmos:

α	Búsqueda uniforme	Dicotómica	Razón áurea
0.1	2	5	5
0.01	2	8	10
0.001	2	11	15

Table 3: Tabla **Resultados ejecución**

Puede verse la ejecución del código en este enlace.

[1] El texto es una traducción de la página de wikipedia

En cuanto al número de iteraciones parece mejor el algoritmo de **búsqueda uniforme** siendo el peor el de la **razón áurea**. Pero en cuanto eficiencia es completamente lo contrario:

- **Búsqueda uniforme**: Divide el intervalo a evaluar en subintervalos de igual longitud y evalúa la función en puntos equidistantes dentro de cada subintervalo, requiriendo una gran cantidad de evaluaciones. Esto lo convierte en el menos eficiente de los tres algoritmos.

- **Búsqueda dicotómica**: Divide repetidamente el intervalo de búsqueda por la mitad y evalua la función en los puntos obtenidos. Pero puede converger lentamente.

- **Razón áurea**: Utiliza la proporción áurea para seleccionar puntos dentro del intervalo de búsqueda, haciendo que la relación entre los segmentos sea la misma que la relación entre el segmento más grande y el segmento entero. Converge rápidamente y esto lo convierte en el más eficiente de los 3 algoritmos.

2. Resolver el siguiente PPL por el método 2 fases, expresando cuál es la solución y el valor de la función objetivo en el óptimo (si existen).

$$\begin{aligned} \max -x_1 - 2x_2 & \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución:
A continuación, vamos a estandarizar el PPL:

$$\begin{aligned} \max -x_1 - 2x_2 & \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 &= 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Observamos que no tenemos una matriz identidad. Por ello, vamos a añadir una variable artificial, quedando el problema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max x_5 & \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Como en el problema tenemos una *variable artificial*, hay que utilizar el **método de las 2 fases**.
Matriz inicial Primera fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	0	0	0	1	0
x_5	3	4	1	0	0	20
x_4	2	-1	0	-1	1	2

Restamos la fila x_4 a la fila 0 y luego se multiplica por -1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	2	-1	0	-1	0	2
x_5	3	4	1	0	0	20
x_4	2	-1	0	-1	1	2

Iteración 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	0	0	0	-1	0
x_5	0	11/2	1	3/2	-3/2	17
x_1	1	-1/2	0	-1/2	1/2	1

Ya no hace falta seguir iterando, por lo que podemos pasar a la *Fase 2*, eliminando la variable artificial x_5.

Matriz segunda fase
La matriz queda de la siguiente manera:

	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	-1	-2	0	0	0
x_5	0	11/2	1	3/2	17
x_1	1	-1/2	0	-1/2	1

Puesto que en la *fila 0* no hay valores positivos, podemos dar por terminada la *fase 2*, quedando como resultado óptimo el siguiente resultado:

$$x = (x_1, x_2) = (1, 0)$$

$$z = -1$$