examen-2023

January 16, 2024

1 Parcial Octubre

1.1 Pregunta 1

SOLUCIÓN: Opción a)

EXPLICACIÓN

Es la fórmula que aparece en la diapo 17 del tema de *Aproximación de funciones*.

1.2 Pregunta 2

SOLUCIÓN: La opción c).

EXPLICACIÓN:

Un Spline cúbico $P(x)$ se define mediante polinomios cúbicos $P_i(x)$ en subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ dentro de $[a, b]$. Para asegurar la continuidad de $P(x)$ y sus derivadas de primer y segundo orden en todo $[a, b]$, se imponen las siguientes condiciones:

1. **Continuidad en x_i**: El valor del Spline Cúbico y sus derivadas de primer y segundo orden deben ser iguales en los puntos de conexión x_i entre los subintervalos, así asegurando que sea contínuo en estos puntos.

$P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i)$

$P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i)$

$P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i)$

2. **Condiciones de borde**: Pueden existir diferentes condiciones de borde, como condiciones de frontera naturales, donde las segundas derivadas en los extremos a y b son cero. Esto asegura que el Spline Cúbico sea suave en los extremos.

$P''(a) = 0$

$P''(b) = 0$

1.3 Pregunta 3

SOLUCIÓN:

$e_{abs}(f(0.45)) = 0.000402109$

EXPLICACIÓN:

El polinomio de interpolación de Lagrange se construye con la siguiente fórmula:

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x)$

Donde: * n: grado del polinomio de interpolación. * $f(x_i)$ es el valor de la función en x_i. * $L_i(x)$ son los polinomios de Langrage dados por la siguiente fórmula:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Con los puntos que nos han dado en el enunciado, los polinomios de Lagrange quedan de la siguiente forma:

$L_0(x) = \frac{(x-0.6)(x-0.9)}{(0-0.6)(0-0.9)} = \frac{x^2-1.5x+0.54}{0.54}$

$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-0.9)}{(0.6-0)(0.6-0.9)} = \frac{x^2-0.9x}{-0.18}$

$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.6)}{(0.9-0)(0.9-0.6)} = \frac{x^2-0.6x}{0.27}$

Ahora el polinomio de interpolación $P(x)$ queda de la siguiente manera:

$P(X) = f(0) \cdot L_0(x) + f(0.6) \cdot L_1(x) + f(0.9) \cdot L_2(x)$

Ahora que lo tenemos todo, vamos a ir obteniendo respuestas: 1. $f(0.45) = \frac{1}{\sqrt{2.45}} = 0.638876565$ 2. $P(0.45) = ... = 0.6392786748$ 3. $|f(0.45) - P(0.45)| = 0.0004021098$

1.4 Pregunta 4

SOLUCIÓN: Opción d).

EXPLICACIÓN: Vamos a ir por pasos:

1. Calculamos la matriz A^TA:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Obtenemos los autovalores (λ):

$$\lambda_1 = 7$$

$$\lambda_2 = 3$$

3. Obtenemos las raices cuadradas:

$$\sqrt{\lambda_1} = 2.64575131$$
$$\sqrt{\lambda_2} = 1.73205081$$

En este problema sólo hay una solución cuya matriz S tenga los valores del paso 3, que es la opción d).

4. Para calcular U seguimos los siguientes pasos: > 4.1. Autovalores de AA^T:

$$\lambda_1 = 7$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\lambda_3 = 0$$

>4.2. Autovectores de AA^T para λ no nulo:

$$\lambda_1 \rightarrow av_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 \rightarrow av_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> 4.3. Calculamos los módulos de los autovectores:

$$|av_1| = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$|av_2| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

>4.4. Calculamos $u_i = \frac{av_i}{|av_i|}$:

$$u_1 = \frac{\begin{bmatrix} -0.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \begin{bmatrix} -0.26726124 \\ -0.80178373 \\ 0.53452248 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = \begin{bmatrix} 0.40824829 \\ 0.40824829 \\ 0.81649658 \end{bmatrix}$$

5. Buscamos la matriz U que tenga los vectores u_1 y u_2. En este caso, coincide con d).

1.5 Pregunta 5

SOLUCIÓN: Opción d).

EXPLICACIÓN:

La fórmula que hay en d), solo es correcta en el caso de una variable aleatoria uniforme. Dado que nos han dicho que **NO** lo es, pues es la incorrecta.

La fórmula de b) es la correcta para una variable no aleatoria dado que se basa en la teoría de grandes números.

1.6 Pregunta 6

SOLUCIÓN: Opción a)

EXPLICACIÓN:

La clave es utilizar la función de distribución acumulativa inversa, o CDF inversa, de X. La CDF de X se define como:

$$F(x) = \int_{x_{min}}^{x} f(t)\ dt$$

Dado que $F(x_{min}) = 0$, la CDF inversa $F^{-1}(u)$ es la solución de la ecuación:

$$F(F^{-1}(u)) = u$$

La variable aleatoria transformada x se elige de manera que $F(x) = u$. Al sustituir la expresión de la CDF y resolver para x, se obtiene la fórmula de la solución.

1.7 Pregunta 7

SOLUCIÓN: Opción d)

EXPLICACIÓN: Notebook de *Generación de variables*

1.8 Pregunta 8

SOLUCIÓN: Opción c

EXPLICACIÓN:

Empezamos por integrar para $x \leq x_{min}$:

$ F(x)= {-∞}^{x{min}}0 dt = 0 $, para $x \leq x_{min}$.

Ahora integramos para $x > x_{min}$:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x_{min}} Ct^{-a}\ dt$

Calculamos la integral: $F(x) = C\left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_{x_{min}}^{x} = -\frac{C}{a-1}\left(x^{-a+1} - x_{min}^{-a+1}\right)$

Ahora, sustituimos el valor de C, simplificamos y cancelamos y obtenemos la siguiente expresión:

$F(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-a+1}$