# Ejercicios Teoría de la Información

Curso 2023 - 2024

Álvaro José Álvarez Arranz

alvaro.alvareza@estudiante.uam.es

## Ejercicio 1

**Demostrar la entropía para una distribución gaussiana de media $\mu$ y varianza $\sigma^2$.**

Tomando $f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (1) y $S(X) = -\int_x f(x)log_2 f(x)dx$ (2) para un caso continuo y sabiendo que $log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}$ (3):

$$S(X) = (1)(2) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} log_2(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})dx$$

Usando (3) la ecuación queda:

$$S(X) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{log\ 2}\ log(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})dx$$

Después de sacar $\frac{1}{log\ 2}$ de la integral y reordenar nos queda la siguiente ecuación:

$$S(X) = -\frac{1}{log\ 2}(log(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})\int_{\mathbb{R}} f(x)dx - \frac{1}{2\sigma^2}\int_{\mathbb{R}} f(x)(x-\mu)^2dx)$$

Dado que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ es 1 y $\int_{\mathbb{R}} f(x)(x-\mu)^2dx$ es $E[(X-\mu)^2]$ queda la siguiente ecuación:

$$S(X) = \frac{-log(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})}{log\ 2} + \frac{Var[X]}{2\sigma^2\ log\ 2}$$

Como $Var[X]$ es $\sigma^2$ y volviendo a pasar por una reordenación, nos queda lo siguiente:

$$S(X) = \frac{-log\ 1\ +\ log(\sqrt{2\pi}\sigma)}{log\ 2} + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2\ log\ 2} =$$
$$= \frac{log(\sqrt{2\pi}\sigma)}{log\ 2} + \frac{1}{2\ log\ 2}$$

Tras alguna operación nos queda la siguiente expresión:

$$S(X) = 0.5log_2(2\pi\sigma^2 e)$$

Como puede observarse en esta última expresión, la entropía no depende de la media de la gaussiana, pero sí de la varianza.

## Ejercicio 2

**Demostrar que $MI(X,Y) = MI(Y,X)$.**

La información mútua entre dos variables aleatorias $X$ e $Y$ se define como:

$$MI(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

Donde:

- $H(X)$ es la entropía de la variable $X$.
- $H(Y)$ es la entropía de la variable $Y$.
- $H(X,Y)$ es la entropía conjunta de las variables $X$ e $Y$.

Para demostrar $MI(X,Y) = MI(Y,X)$, se debe demostrar que los términos en ambos lados son iguales.

Para poder demostrar la simetría, debe cumplrse la siguiente condición:

$$H(X,Y) = H(Y,X)$$

Para ello se hace el siguiente cálculo:

$$H(X,Y) = -\sum_x\sum_y p(x,y) * log(p(x,y))$$

donde p(x,y) es la función de probabilidad conjunta de las variables $X$ e $Y$.

Para poder demostrar $H(X,Y) = H(Y,X)$ se cambian las variables en la definición de la expresión:

$$H(Y,X) = -\sum_y \sum_x p(y,x) * log(p(y,x))$$

Dado que $p(x,y)$ y $p(y,x)$ son las mismas, dado que representan la misma distribución de probabilidad conjunta, se puede resolver:

$$H(X,Y) = H(Y,X) \Leftrightarrow MI(X,Y) = MI(Y,X)$$

---

## Ejercicio 3

**Demostrar** $MI(X,Y) = S(X) + S(Y) - S(X,Y)$

Teniendo en cuenta la definición de información mutua entre $X$ e $Y$, teniendo $x \in X, y \in Y$ y utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$MI(X,Y) = \sum_x \sum_y p(x,y) log_2(\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}) =$$
$$= \sum_x \sum_y p(x,y)(log_2 p(x,y) - log_2 p(x) - log_2 p(y)) =$$
$$= \sum_x \sum_y p(x,y) log_2 p(x,y) - \sum_x \sum_y p(x,y) log_2 p(x) - \sum_x \sum_y p(x,y) log_2 p(y)$$

El primer sumatorio doble puede sustituirse por $-S(X,Y)$ dado que está definido en el ejercicio anterior y reordenando queda la siguiente expresión:

$$MI(X,Y) = -S(X,Y) - \sum_x log_2 p(x) \sum_y p(x,y) - \sum_y log_2 p(y) \sum_x p(x,y) =$$
$$= -S(X,Y) - \sum_x p(x) log_2(p(x)) - \sum_y p(y) log_2(y)$$

Usando las definiciones usadas en el ejercicio anterior para ambos sumatorios, se demuestra que:

$$MI(X,Y) = S(X) + S(Y) - S(X,Y)$$

## Ejercicio 4

**Demostrar las siguientes igualdades:**

1. $S(X,Y) = S(X) + S(Y|X) = S(Y) + S(X|Y)$

Lo primero vamos a definir los términos del enunciado:

- $S(X)$ es la entropía de la variable aleatoria $X$.
- $S(Y)$ es la entropía de la variable aleatoriia $Y$.
- $S(X|Y)$ es la entropía condicional de $X$ dado $Y$.
- $S(Y|X)$ es la entropía condicional de $Y$ dado $X$.

Para demostrar la igualdad vamos a empezar con la entropía conjunta $S(X,Y)$ cuya definición es:

$$S(X,Y) = -\sum_{xy} p(x,y) log\, p(x,y)$$

Donde $p(x,y)$ es la probabilidad conjunta de $X = x$ e $Y = y$.

Se puede expresar $p(x,y)$ en términos de $p(x)$ y $p(y|x)$ como:

$$p(x,y) = p(x) \cdot p(y|x)$$

Sustituyendo en la fórmula de entropía conjunta nos queda:

$$S(X,Y) = -\sum_{xy} p(x) \cdot p(y|x)\ log(p(x) \cdot p(y|x))$$

Usando la propiedad de los logaritmos, llegamos a:

$$S(X,Y) = -\sum_{xy} p(x) \cdot p(y|x)(log\, p(x) + log\, p(y|x))$$

Reordenando la expresión anterior nos queda que:

$$S(X,Y) = -\sum_{xy} p(x) \cdot p(y|x)\ log\ p(x) - \sum_{xy} p(x) \cdot p(y|x)\ log\ p(y|x)$$

Puede notarse que el primer sumatorio es la definición de $S(X)$ y el segundo es la definición de $S(Y|X)$, por lo que:

$$S(X,Y) = S(X) + S(Y|X)$$

Ahora, para demostrar la igualdad $S(X,Y) = S(Y) + S(X|Y)$ se usa un razonamiento similar expresando $p(x,y)$ en términos de $p(y)$ y $p(x|y)$ donde se llega a la igualdad:

$$S(X,Y) = S(Y) + S(X|Y)$$

Por tanto, quedan demostradas las igualdades:

$$S(X,Y) = S(X) + S(Y|X) = S(Y) + S(X|Y)$$

2. $MI(X,Y) = S(X) - S(X|Y) = S(Y) - S(Y|X)$

La ecuación del enunciado se deriva de la definición de $MI(X,Y)$ y de la entropía condicional. Empezamos por usar la definición de $MI(x,Y)$ y de la entropía condicional. Primero, $MI(X,Y)$ se define como:

$$MI(X,Y) = S(X) + S(Y) - S(X,Y)$$

Reorganizando la expresión, se llega a:

$$S(X,Y) = S(X) + S(Y) - MI(X,Y)$$

La entropía condicional se define de la siguiente manera:

$$S(X|Y) = S(X,Y) - S(Y)$$

Sustituyendo la ecuación anterior, obtenemos la siguiente expresión:

$$S(X|Y) = S(X) + S(Y) - MI(X,Y) - S(Y) =$$
$$= S(X) - MI(X,Y)$$

De igual manera se llega a:

$$S(Y|X) = S(Y) - MI(X,Y)$$

Por tanto, queda demostrado que:

$$MI(X,Y) = S(X) - S(X|Y) = S(Y) - S(Y|X)$$

3. $MI(X,X) = S(X)$

Usando como base las igualdades del enunciado anterior, se obtiene la siguiente expresión:

$$MI(X,X) = S(X) - S(X|Y) =$$
$$= S(X) + \sum_{x} p(x) \sum_{x} p(x|x) log_2 p(x|x)$$

Dado que el segundo sumatorio es $0$, se demuestra que:

$$MI(X,X) = S(X)$$

## Ejercicio 5

**Demostrar que cuando $\Delta t << \frac{1}{r}$, $S(X) = Tr\ log_2 \frac{e}{r\Delta t}$ donde $Tr = N$ (número de disparos en una secuencia de longitud T).** Hay que tener en cuenta lo siguiente:

- $T$ es el intervalo de tiempo.
- $\Delta t$ es el tamaño de la ventana temporal para la cual se aplica un 1 si se detecta un spike y un 0 en el caso contrario.
- $r$ es la tasa de aparición de un spike, tal que, $p = P(spike) = r\Delta t$ y $N = \frac{T}{\Delta t}$ número total de ventanas o codificaciones.
- $N_1 = pN$ es el número de 1's en $T$ y $N_0 = (1-p)N$ el número de 0's en $T$, de forma que $N = N_1 + N_0$.
- la entropía $S$ se puede tomar como el logaritmo binario del número posible de eventos:

$$S = log_2(\frac{N!}{N_1!N_0})$$

Teniendo en cuenta que cuando $x \to \infty$ se tiene que:

$$S \approx \frac{1}{log\ 2}(\frac{N!}{N_1!N_0!}) =$$
$$= \frac{1}{log\ 2}(log(N!) - log(N_1!) - log(N_0!)) =$$
$$= \frac{1}{log2}(N\ log(N) - N_1 log(N_1) - N_0 log(N_0) - N + N_1 + N_0) =$$

$$= \frac{1}{log\ 2}((N_1 + N_0)log(N) - N_1 log(N_1) - N_0 log(N_0)) =$$
$$= \frac{1}{log\ 2}(N_1(log(N) - log(N_1)) + N_0(log(N) - log(N_0))) =$$

$$= -\frac{N}{log\ 2}(\frac{N_1}{N}log(\frac{N_1}{N}) + \frac{N_0}{N}log(\frac{N_0}{N})) =$$
$$= -\frac{N}{log\ 2}(p\ log(p) + (1-p)log(1-p)) =$$

$$= -\frac{T}{\Delta t\ log\ 2}(r\Delta t\ log(r\Delta t) + (1 - r\Delta t)log(1 - r\Delta t))$$

Si ahora simplificamos la expresión y tenemos en cuenta que la probabilidad de contar un spike es tal que $p = r\Delta t << 1$:

$$S \approx \frac{1}{log\ 2}(-Tr\ log(r\Delta t) + Tr) =$$
$$= \frac{Tr}{log\ 2}(1 - log(r\Delta t)) =$$
$$= \frac{Tr}{log\ 2}log(\frac{e}{r\Delta t}) =$$

$$= Tr\ log_2(\frac{e}{r\Delta t})$$

## Ejercicio 6

**Demostrar** $H(X, Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X, Z)$

Con tres variables aleatorias $X, Y, Z$, el teorema de Bayes se puede escribir como:

$$p(x, y|z) = \frac{p(z)p(x|z)p(y|x, z)}{p(z)} = p(x|z)p(y|x, z)$$

Añadiendo logaritmos y esperanzas a ambos lados de la expresión anterior nos queda:

$$E[log_2 p(x, y|z)] = E[log_2 p(x|z)] + E[log_2 p(y|x, z)]$$

La expresión anterior equivale por definición a la igualdad del enunciado:

$$H(X, Y|Z) = H(X|Z) + (H(Y|X, Z))$$