1 Матанализ от Виноградова

1.1

Пусть $f \in L$, $x \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t) - 2S + f(x-t)|}{t} dt < +\infty.$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится к сумме S в точке x:

$$S_n(f,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} S.$$

1.2

1. $\widehat{f} \in C(\mathbb{R})$ и $|\widehat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||f||_1$ при всех $y \in \mathbb{R}$.

2. $\widehat{f} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$.

3. **Производная преобразования Фурье**.
   Если $f \in L(\mathbb{R})$ и при некотором $r \in \mathbb{N}$ функция $t \mapsto t^r f(t)$ суммируема на $\mathbb{R}$, то $\widehat{f} \in C^{(r)}(\mathbb{R})$ и при всех $k \in [1:r]$, $y \in \mathbb{R}$

   $$\widehat{f}^{(k)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R (-it)^k f(t) e^{-iyt} dt,$$

   причем $\widehat{f}^{(k)}(y) \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$.

4. **Преобразование Фурье производной**.
   Пусть $r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}(\mathbb{R})$ и $f^{(k)} \in L(\mathbb{R})$ при всех $k \in [0:r]$. Тогда при всех $k \in [1:r]$, $y \in \mathbb{R}$

   $$\widehat{f^{(k)}}(y) = (iy)^k \widehat{f}(y).$$

5. **Преобразование Фурье сдвига и сжатия**.
   Если $h, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, то

   $$\widehat{f_h}(y) = e^{ihy}\widehat{f}(y), \quad \widehat{(f(a\cdot))}(y) = \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{y}{a}\right).$$

6. **Преобразование Фурье свертки**.
   Свертка $f * g$ определена почти везде, $f * g \in L(\mathbb{R})$, $f * g = g * f$ и

   $$\widehat{f * g}(y) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(y)\widehat{g}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

2 Большое задание от доктора Тренча

2.1

$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & xe^{-x} \\ e^x & 2e^{2x} & e^{-x}(1-x) \\ e^x & 4e^{2x} & e^{-x}(x-2) \end{vmatrix} = e^{2x}(6x-5);$ $W_1 = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{-x} \\ 2e^{2x} & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix} = e^x(1-3x);$ $W_2 = \begin{vmatrix} e^x & xe^{-x} \\ e^x & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix} = 1-2x;$ $W_3 = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x};$ $u_1' = \frac{FW_1}{P_0W} = 1-3x;$ $u_2' = -\frac{FW_2}{P_0W} =$

$e^{-x}(2x-1)$; $u_3' = \dfrac{FW_2}{P_0W} = e^{2x}$; $u_1 = \dfrac{x(2-3x)}{2}$; $u_2 = -e^{-x}(2x+1)$; $u_3 = \dfrac{e^{2x}}{2}$; $y_p = u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3 = -e^x(3x^2+x+2)/2$. Since $-\dfrac{e^x}{2}$ is a solution of the complementary equation we take $y_p = -\dfrac{e^x(3x+1)x}{2}$.

The general solution is $y = -\dfrac{e^x(3x+1)x}{2} + c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3xe^{-x}$, so

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{e^x(3x+1)x}{2} \\ -\dfrac{e^x(3x^2+7x+1)}{2} \\ -\dfrac{e^x(3x^2+13x+8)}{2} \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & xe^{-x} \\ e^x & 2e^{2x} & e^{-x}(1-x) \\ e^x & 4e^{2x} & e^{-x}(x-2) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Setting $x=0$ and imposing the initial conditions yields

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{3}{2} \\ -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Solving this system yields $c_1 = -3$, $c_2 = -1$, $c_3 = 4$. Therefore, $y = -\dfrac{e^x(3x+1)x}{2} - 3e^x - e^{2x} + 4xe^{-x}$.

3 Маленькие задания от доктора Тренча

3.1

$t^6 \leftrightarrow \dfrac{6!}{s^7}$ and $e^{-t}\sin 3t \leftrightarrow \dfrac{3}{(s+1)^2+9}$, so $H(s) = \dfrac{3\cdot 6!}{s^7\left[(s+1)^2+9\right]}$.

3.2

$\sin at \leftrightarrow \dfrac{a}{s^2+a^2}$ and $\cos bt \leftrightarrow \dfrac{s}{s^2+b^2}$, so $H(s) = \dfrac{as}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$.

3.3

$\sinh at \leftrightarrow \dfrac{a}{s^2-a^2}$ and $\cosh at \leftrightarrow \dfrac{1}{s^2-a^2}$, so $H(s) = \dfrac{as}{(s^2-a^2)^2}$.