对偶问题

翟卫欣　副教授

zhaiweixin@cau.edu.cn

中国农业大学信息与电气工程学院

目录

目录

约束优化的对偶问题

为什么要研究对偶问题

目录

线性规划的对偶问题举例1

原问题：

某工厂生产A_1, A_2两类产品，它们都需要在B_1, B_2, B_3三类不同的设备上加工，所需时间如下，如何安排生产计划可以使该厂利润最大？

设备	单位台时		总有限台时
	A_1	A_2	
B_1	3	4	36
B_2	5	4	40
B_3	9	8	76
利润	32	30	

单位台时：单位产品(A_1, A_3)的加工台时

线性规划的对偶问题举例1

$$
\begin{aligned}
max\ z &= 32x_1 + 30x_2 \\
s.t.\ 3x_1 + 4x_2 &\leqslant 36 \\
5x_1 + 4x_2 &\leqslant 40 \\
9x_1 + 8x_2 &\leqslant 76 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

线性规划的对偶问题举例1

另一位老板要租用该工厂的机器，设y_1, y_2, y_3为租用B_1, B_2, B_3三种设备的机器的费用，该老板希望最小化租用成本w，但是该经营者所花费的租用费用不能太低，至少应该不低于生产产品A_1, A_2的利润。

$$
\begin{aligned}
min\ w &= 36y_1 + 40y_2 + 76y_3 \\
s.t.\ 3y_1 + 5y_2 + 9y_3 &\geqslant 32 \\
4y_1 + 4y_2 + 8y_3 &\geqslant 30 \\
y_1, y_2, y_3 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

线性规划的对偶问题举例2

原问题：

$$
\begin{aligned}
max\ 2x_1 + 3x_2 \\
s.t.\ 4x_1 + 8x_2 \leqslant 12 \\
2x_1 + 1x_2 \leqslant 3 \\
3x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\
x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

为了找到原问题的上限，我们可以根据约束条件构造原问题

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\leqslant 4x_1 + 8x_2 \leqslant 12 \\
2x_1 + 3x_2 &\leqslant \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leqslant 6 \\
2x_1 + 3x_2 &\leqslant \frac{1}{3}((4x_1 + 8x_2) + (2x_1 + 1x_2) \leqslant 5
\end{aligned}
$$

线性规划的对偶问题举例2

三个不等式约束条件都乘以$y_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3$
使得三式分别乘以y_i累加后对应的x_1的系数大于等于2 使得三式分别乘以y_i累加后对应的x_3的系数大于等于3 此时所对应的$12y_1 + 3y_2 + 4y_3$必然比原问题的最优解要大，所以尽量最小化$12y_1 + 3y_2 + 4y_3$即可

$$\begin{aligned} min\ & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ s.t.\ & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geqslant 2 \\ & 8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geqslant 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

当$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{5}{4}$时或者$y_1 = \frac{5}{16}, y_2 = 0, y_3 = \frac{1}{4}$时，原问题和对偶问题都得到最小值4.75。

线性规划的对偶问题

对称形式的线性规划问题特征：

(1)全部约束条件为不等式

(1.1)对极大化问题的约束条件都是$\leqslant$

(1.2)对极小化问题的约束条件都是$\geqslant$

(2)全部变量为非负

原问题$\Rightarrow$对偶问题

$$
\begin{aligned}
max\ z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t.\ a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &\leqslant b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &\leqslant b_2 \\
&\vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &\leqslant b_m \\
x_1, x_2, \cdots, x_n &\geqslant 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
min\ w &= b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
s.t.\ a_{1,1}y_1 + a_{2,1}y_2 + \cdots + a_{m,1}y_m &\geqslant c_1 \\
a_{1,2}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{m,2}y_m &\geqslant c_2 \\
&\vdots \\
a_{1,n}y_1 + a_{2,n}y_2 + \cdots + a_{m,n}y_m &\geqslant c_n \\
y_1, y_2, \cdots y_m &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

线性规划的对偶问题

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	原始约束	$min\ w$
y_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$x_{1,n}$	$\leqslant$	b_1
y_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$x_{2,n}$	$\leqslant$	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\leqslant$	$\cdots$
y_m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$\cdots$	$x_{m,n}$	$\leqslant$	b_m
对偶约束	$\geqslant$	$\geqslant$	$\cdots$	$\geqslant$		
$max\ z$	c_1	c_2	$\cdots$	c_n		

原问题 对偶问题

$$
\begin{array}{rcr}
max\ z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & & min\ w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\
s.t. \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} & \Rightarrow & s.t. \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

约束优化的对偶问题

考虑一般形式的约束优化问题：

$$
\begin{aligned}
(P)\ &min\, f(\boldsymbol{x}),\\
&\quad s.t.\ g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, i = 1, \cdots, m;\\
&\qquad\quad h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, \cdots, l;\\
&\qquad\quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}.
\end{aligned}
$$

- P即*primal problem*，原问题；
- $\boldsymbol{D}$是集合约束，如$\boldsymbol{D} = \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{X} = \mathbb{Z}^n$(整数规划)，$\boldsymbol{X} = \{0, 1\}$（0-1规划）。如果将问题写成只有等式约束和不等式约束的情况，则集合约束默认为$\boldsymbol{D} = \mathbb{R}^n$。

约束优化的对偶问题

对于对偶问题的研究，常需要引入拉格朗日函数，定义目标函数为：

$$\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = inf\{f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{l}\mu_i h_i(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}\}$$

inf:下界，sup:上界
原问题的对偶问题为

$$max\ \theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$$

$$s.t.\ \boldsymbol{\lambda} \geqslant \boldsymbol{0}$$

对偶函数为$\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$，部分情况下$\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = -\infty$

约束优化的对偶问题

原问题和对偶问题的矩阵形式

记$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), \cdots, g_m(\boldsymbol{x}))^T$， $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = (h_1(\boldsymbol{x}), h_2(\boldsymbol{x}), \cdots, h_l(\boldsymbol{x}))^T$

则原问题为：

$$
\begin{aligned}
& min\, f(\boldsymbol{x}), \\
& s.t.\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geqslant \boldsymbol{0} \\
& \quad\ \ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \\
& \quad\ \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}.
\end{aligned}
$$

对偶问题为：

$$
\begin{aligned}
& max\ \theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \\
& s.t.\ \boldsymbol{\lambda} \geqslant \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

其中对偶函数为

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = inf\{f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}\}$$

约束优化的对偶问题举例

清华的书，例7.3.1

弱对偶定理

弱对偶定理：设$\boldsymbol{x}$和$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$分别是原问题和对偶问题的可行解，则

$f(\boldsymbol{x}) \geqslant \theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

证明：根据$\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$的定义，有

$\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = inf\{f(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{D}\} \leqslant f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$

由于$\boldsymbol{x}$和$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$分别是原问题和对偶问题的可行解，即满足

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{\lambda} \geqslant \boldsymbol{0}$,

所以得$f(\boldsymbol{x}) \geqslant \theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$

弱对偶定理的推论

推论1：对于原问题和对偶问题，必有

$inf\{f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geqslant\mathbf{0},\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=0,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}\}\geqslant sup\{\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})|\boldsymbol{\lambda}\geqslant\mathbf{0}\}$

推论2：如果$f(\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant\theta(\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{\mu}})$，其中$\bar{\boldsymbol{x}}\in\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geqslant\mathbf{0},\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=0,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}\}$，$\bar{\boldsymbol{\lambda}}\geqslant\mathbf{0}$，则$\bar{x}$和$(\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{\mu}})$分别是原问题和对偶问题的最优解。

推论3：如果$inf\{f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geqslant\mathbf{0},\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=0,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}\}=-\infty$，则对每一个$\boldsymbol{\lambda}\geqslant\mathbf{0}$，有$\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=-\infty$

推论4：如果$sup\{\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})|\boldsymbol{\lambda}\geqslant\mathbf{0}\}=\infty$，则原问题没有可行解

目录

对偶间隙

由弱对偶定理的推论1可知原问题的目标函数的最优值f_{min}和对偶问题的目标函数的最优值θ_{max}满足关系$f_{min} \geqslant \theta_{max}$，如果严格不等号成立，则称存在对偶间隙(Duality Gap)。

$Duality\ Gap = f_{min} - \theta_{max}$

对偶间隙举例

求解如下问题的对偶间隙。

$$
\begin{aligned}
min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\
s.t. \quad & -x_1 - x_2 \leqslant -\frac{1}{2} \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

原问题$f_{min} = 1$，在$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} or \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$时取到。

对偶间隙举例

对偶问题

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_+^2} \{x_1^2 + x_2^2 - \lambda(x_1 + x_2 - \frac{1}{2})\}$$

$$= \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}_+^2} \{(x_1 - \frac{\lambda}{2})^2 + (x_2 - \frac{\lambda}{2})^2 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\}$$

$$= \begin{cases} \lambda/2 & \text{if } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \\ 2 - \frac{3}{2}\lambda & \text{if } 1 < \lambda \leqslant 3 \\ 8 - \frac{7}{2}\lambda & \text{if } 3 < \lambda \leqslant 5 \\ \dots \end{cases}$$

$$\theta_{max} = \frac{1}{2}, \ \lambda = 1$$

$$duality\ gap \ = f_{min} - \theta_{max} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

目录

强对偶定理的引理

设$\boldsymbol{D}$是$\mathbb{R}^n$中的一个非空凸集，$\phi(\boldsymbol{x})$和$g_i(\boldsymbol{x})(i = 1, 2, \cdots, m)$分别是$\mathbb{R}^n$上的凸函数和凹函数，$h_j(\boldsymbol{x})(j = 1, 2, \cdots, l)$是$\mathbb{R}$上的线性函数，即假设

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$$

那么下列两个系统中，若系统1无解，则系统2有解$(\omega_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$；反之，若系统2有解$(\omega_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$且$\omega_0 > 0$，则系统1无解。

强对偶定理的引理的证明1

设系统1无解，定义集合$C=\{(p,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})|\exists\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D},p>\phi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{q}\leqslant\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{r}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\}$，先证明$C$是非空凸集。

以下证明C是非空凸集：由于D非空，所以C非空，任取$(p_1,\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{r}_1),(p_2,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{r}_2)\in\boldsymbol{C}$，则存在$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{D}$，使得$p_1>\phi(\boldsymbol{x}_1),\boldsymbol{q}_1\leqslant\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1),\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1),p_1>\phi(\boldsymbol{x}_2),\boldsymbol{q}_2\leqslant\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2),\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_2)$。

对任意的$\lambda\in[0,1]$，记$(\hat{p},\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{r}})=\lambda(p_1,\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{r}_1)+(1-\lambda)(p_2,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{r}_2)=(\lambda p_1+(1-\lambda)p_2,\lambda\boldsymbol{q}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{q}_2,\lambda\boldsymbol{r}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{r}_2)$

由于$\phi(\boldsymbol{x})$是凸函数，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$的每个分量是凹函数，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$的每个分量是线性函数，所以存在$\hat{\boldsymbol{x}}=\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{D}$：

$$\lambda p_1+(1-\lambda)p_2>\lambda\phi(\boldsymbol{x}_1)+(1-\lambda)\phi(\boldsymbol{x}_2)\geqslant\phi(\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2)=\phi(\hat{\boldsymbol{x}})$$
$$\lambda\boldsymbol{q}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{q}_2\leqslant\lambda\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)+(1-\lambda)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2)\leqslant\boldsymbol{g}(\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}})$$
$$\lambda\boldsymbol{r}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{r}_2=\lambda\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1)+(1-\lambda)\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{h}(\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}})$$

所以$(p,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})\in\boldsymbol{C}$，所以$C$是非空凸集。

强对偶定理的引理的证明1

如果系统1无解，则$(0,\mathbf{0},\mathbf{0}) \notin \boldsymbol{C}$，根据点与凸集的分离定理可知，存在$(\bar{\omega}_0,\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{\mu}}) \neq \mathbf{0}$使得对于每一个$(p,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}) \in cl\boldsymbol{C}$都有$\geqslant 0$，令$(\omega_0,-\boldsymbol{\lambda},-\boldsymbol{\mu})$，可将上式写成$\omega_0 p-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{q}-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{r} \geqslant \forall(p,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}) \in cl\boldsymbol{C}$。固定$p,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$，使得$p>\phi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{q}\leqslant \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{r}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$，在满足上述条件下，$p$可以取任意大的正数，$\boldsymbol{q}$的分量可以取任意小的负数，均有$(p,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}) \in \boldsymbol{C}$恒成立，所以必有$\omega_0 \geqslant 0,\boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{0}$。
令$(p,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}) = (\phi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) \in cl\boldsymbol{C}$，从而可得$\omega_0\phi(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0,\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D},(\omega_0,\boldsymbol{\lambda}) \geqslant \mathbf{0},(\omega_0,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \neq \mathbf{0}$，即系统2存在解$(\omega_0,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$。

强对偶定理的引理的证明2

如果系统2存在解$(\omega_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$，其中$\omega_0 > 0, \boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{0}$满足$\omega_0\phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$。
假设存在$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$，使得$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geqslant \mathbf{0}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$，由于$\boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$，可得$\omega_0\phi(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$，由于$\omega_0 > 0$，所以可得$\phi(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$，与系统1的要求有冲突，则系统1无解。

强对偶定理

假设

- 1）$\boldsymbol{D}$是非空凸集，$f(\boldsymbol{x})$是凸函数，$g_i(\boldsymbol{x}), i=1,2,\cdots,m$是凹函数，$h_j(\boldsymbol{x}), j=1,2,\cdots,l$为线性函数，即$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}$。
- 2）假设存在$\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{D}$使得$g_i(\hat{\boldsymbol{x}})>0, i=1,2,\cdots,m; h_i(\hat{\boldsymbol{x}})=0, i=1,2,\cdots,l$且$\boldsymbol{0}\in int\ H(\boldsymbol{D})$，其中$h(\boldsymbol{D})=\{h_1(\boldsymbol{x}),h_2(\boldsymbol{x}),\cdots,h_l(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}\}$
  （第二个假设条件也被称为Slater’s condition，int是指内点）

则强对偶成立，即
$inf\{f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}\}=sup\{\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})|\boldsymbol{\lambda}\geqslant\boldsymbol{0}\}$。
另外，如果inf为有限值，则$sup\{\theta(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})|\boldsymbol{\lambda}\geqslant\boldsymbol{0}\}$在$(\bar{\omega},\bar{\boldsymbol{\mu}})$达到，$\bar{\omega}\geqslant\boldsymbol{0}$。
如果 inf在点$\bar{\boldsymbol{x}}$达到，则$\bar{\boldsymbol{\lambda}}^T\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})=0$。

对偶定理的应用-线性规划(1)

原问题：

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

$$s.t.\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}$$

其中$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，$\boldsymbol{b}$是$n \times 1$向量

对偶问题：

$$\max\ \theta(\boldsymbol{\lambda})$$

$$s.t.\boldsymbol{\lambda} \geqslant \boldsymbol{0}$$

其中

$$\begin{aligned}\theta(\boldsymbol{\lambda}) &= \inf\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\} \\ &= \inf\{(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda})^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}\}\end{aligned}$$

对偶定理的应用-线性规划(1)

由于$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，所以

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}, \, if \; \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda} = 0 \\ -\infty, \, otherwise \end{cases}$$

于是对偶问题可以重写为：

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m} \; \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}$$

$$s.t. \; \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geqslant \boldsymbol{0}$$

对偶定理的应用-线性规划(2)

原问题：

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

$$s.t.\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

其中$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，$\boldsymbol{b}$是$n \times 1$向量

对偶问题：

$$max\ \theta(\boldsymbol{\lambda})$$

$$s.t. \boldsymbol{\lambda} \geqslant \boldsymbol{0}$$

其中

$$\begin{aligned}\theta(\boldsymbol{\lambda}) &= inf\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\} \\ &= inf\{(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda})^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}\}\end{aligned}$$

对偶定理的应用-线性规划(2)

由于$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，所以

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}, \; if \; \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda} \geqslant 0 \\ -\infty, \; otherwise \end{cases}$$

于是对偶问题可以重写为：

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m} \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}$$

$$s.t. \; \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda} \leqslant \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geqslant \boldsymbol{0}$$

对偶定理的应用-二阶问题最小化

$$\min \ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$

$$s.t. \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

对偶问题：

$$\min \ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$

$$s.t. \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\theta(\boldsymbol{\mu}) = inf\{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})\}$$

可以利用梯度算法令inf中的数值为0来求解最小值，可得$2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$即$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\mu}/2$ 所以$\theta(\boldsymbol{\mu}) = -\frac{1}{4}\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\mu}$
对偶问题为$\max\limits_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^m} \ -\frac{1}{4}\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\mu}$

Thank you for your attention!

翟卫欣 副教授

zhaiweixin@cau.edu.cn

中国农业大学信息与电气工程学院