



线性规划问题1

翟卫欣 副教授

zhaiweixin@cau.edu.cn

中国农业大学信息与电气工程学院



目录

线性规划的定义

线性规划标准模型

线性规划模型举例

基本解与可行解

可行解与基本可行解举例

基本解的性质





目录

线性规划的定义

线性规划标准模型

线性规划模型举例

基本解与可行解

可行解与基本可行解举例

基本解的性质





线性规划的定义

- 线性规划研究的是一类在**线性约束条件**下求解**线性目标函数**极值的问题，即确定一组决策变量，使目标函数取得极小值（或极大值）。



目录

线性规划的定义

线性规划标准模型

线性规划模型举例

基本解与可行解

可行解与基本可行解举例

基本解的性质





线性规划标准模型

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, $\text{rank} \mathbf{A} = m$.

线性规划的其他形式可转化为**标准模型**进行求解。



线性规划标准模型的转化

- 一般假设列向量 $b \geq 0$ ，如果 $b_i \leq 0$ ，则可对第 i 个约束方程等号两侧同时乘以 -1 。
- 对于 maximize 的问题，可将 $c^T x$ 乘以 -1 转化为 minimize 的问题。



线性规划标准模型的转化

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

对于以上形式的线性规划问题，可以引入剩余变量 \mathbf{y} ，转化为以下形式：

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{Ax} - \mathbf{I}_m \mathbf{y} = [\mathbf{A}, -\mathbf{I}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中， \mathbf{I}_m 是 m 阶单位矩阵。



线性规划标准模型的转化

剩余变量的引入将不等式约束转化为了等式约束转化过程展开如下:

转化前:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

转化后:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - y_i = b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \cdots, y_m \geq 0$$



线性规划标准模型的转化

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

对于以上形式的线性规划问题，可以引入松弛变量 \mathbf{y} ，转化为以下形式：

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{I}_m \mathbf{y} = [\mathbf{A}, \mathbf{I}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中， \mathbf{I}_m 是 m 阶单位矩阵。



线性规划标准模型的转化

松弛变量的引入将不等式约束转化为了等式约束转化过程展开如下：

转化前：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

转化后：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + y_i = b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \cdots, y_m \geq 0$$



目录

线性规划的定义

线性规划标准模型

线性规划模型举例

基本解与可行解

可行解与基本可行解举例

基本解的性质





线性规划模型举例

某制造商使用4台机器 M_1 , M_2 , M_3 , M_4 生产三种不同的产品 P_1 , P_2 , P_3 。生产每种产品所需要用的每种机器的时长、每种机器的总使用时长限制、生产每种产品的成本均在表中展示。目标是使得总成本最小。

时长	产品 P_1	产品 P_2	产品 P_3	总使用时长限制
机器 M_1	1	1	1	10
机器 M_2	2	3	3	16
机器 M_3	1	5	2	12
机器 M_4	3	2	4	20
成本	15	30	20	



线性规划模型举例

建模思路:

令 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 为三种产品的产量。

约束条件为:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 16 \\ 1x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1y_1 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 1y_2 = 16 \\ 1x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 1y_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1y_4 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

优化目标为:

$$\text{minimize } f(x_1, x_2, x_3) = 15x_1 + 30x_2 + 20x_3$$



线性规划模型举例

问题的矩阵形式:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} && \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix}$$





线性规划模型举例

标准化:

$$\text{minimize } \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{subject to } [\mathbf{A}, \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix}$$



目录

线性规划的定义

线性规划标准模型

线性规划模型举例

基本解与可行解

可行解与基本可行解举例

基本解的性质





基本解与可行解

对于标准化问题:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax = b, x \geq 0 \end{aligned}$$

其中, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, $\text{rank} A = m$, $b \geq 0$.

- 从 A 中选择 m 个线性无关的列向量组成方阵 B , 求解方程 $Bx_B = b$ 可得到 $x_B = B^{-1}b$. 令 x 为 n 维列向量, 其中对应的 m 个元素组成的向量为 x_B , 其他元素为0, 则称 x 是 $Ax = b$ 在基 B 下的**基本解**.
- 通常将 A 的列向量进行重排序, 使得方阵 B 是 A 的前 m 列, 即 $A = [B, N]$, 其中 N 是 $m \times (n - m)$ 维矩阵. x 为 n 维列向量, 其中对应的前 m 个为 x_B , 其他元素为0, 即 $x = [x_B^T, 0^T]^T$.
- 向量 x_B 中的元素成为**基变量**, B 中的列向量成为**基本列向量**. 如果 x_B 中的某些基变量为0, 则称这个基本解为**退化基本解**.



基本解与可行解

可行解定义

- 满足约束条件即 $Ax = b, x \geq 0$ 的向量 x 称为**可行解**。
- 如果某个可行解也是基本解，则称之为**基本可行解**。
- 如果基本可行解是退化的基本解，则称之为**退化的基本可行解**。



目录

线性规划的定义

线性规划标准模型

线性规划模型举例

基本解与可行解

可行解与基本可行解举例

基本解的性质





可行解与基本可行解举例

- 考虑方程 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$, 求其基本可行解。
- 求解得方程的通解为 $x = \begin{bmatrix} 14/5 \\ -11/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 $s, t \in \mathbb{R}$ 。



可行解与基本可行解举例

基本解的个数最多为 $C_n^m = 6$ 个:

编号	x_1	x_2	x_3	x_4	B	基本解	可行解
1	/	/	0	0	$[a_1, a_2]$	$[14/5, -11/5, 0, 0]^T$	否
2	/	0	/	0	$[a_1, a_3]$	$[4/3, 0, 11/3, 0]^T$	是
3	/	0	0	/	$[a_1, a_4]$	无基本解	/
4	0	/	/	0	$[a_2, a_3]$	$[0, 2, 7, 0]^T$	是
5	0	/	0	/	$[a_2, a_4]$	$[0, -11/5, 0, -28/5]^T$	否
6	0	0	/	/	$[a_3, a_4]$	$[0, 0, 11/3, -8/3]^T$	否



目录

线性规划的定义

线性规划标准模型

线性规划模型举例

基本解与可行解

可行解与基本可行解举例

基本解的性质





基本解的性质

- 求解线性规划时，仅需考虑**基本可行解**。
- 对于任何满足约束条件 $Ax = b, x \geq 0$ 的向量 x ，如果它能够使目标函数 $c^T x$ 取得极小值，那么就将其称为**最优可行解**。如果最优可行解是基本解，那么它就是**最优基本可行解**。
- 目标函数的最优值（如果存在）总是可以在某个**基本可行解**上找到。



基本解的性质

- 对于线性规划的标准型，如果存在可行解，那么一定存在基本可行解。
- 证明：

假设 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 是一个可行解，且有 p 个正元素。假设其前 p 个元素是正值，其他元素为0。

即， $x_1, x_2, \dots, x_p > 0, x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_n = 0$ 。

由于 $A = [a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, a_n]$ ，所以，

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_p a_p = b$$



基本解的性质

1) 假设 a_1, a_2, \dots, a_p 线性无关, 又因为 $\text{rank}A = m$, 则 A 中不可能有大于 m 个线性无关的列向量, 所以 $p \leq m$ 。

① $p = m$ 时, a_1, a_2, \dots, a_p 是一组 m 维基, 定义为基 B , B 是非奇异 m 阶方阵。 x 是 $Ax = b, x \geq 0$ 在基 B 下的解。 x 的前 m 个元素大于0, 其余元素等于0。 x 是**基本可行解**。

② $p < m$ 时, a_1, a_2, \dots, a_p 是一组 m 维基的一部分, 线性规划标准型要求 $\text{rank}A = m$, 因此可找到额外 $m - p$ 个向量扩展为一组 m 维的基。 A 的前 p 个列向量和额外的 $m - p$ 个列向量构成了基 B 。 x 是 $Ax = b, x \geq 0$ 在基 B 下的解, B 是非奇异 m 阶方阵。 x 的前 p 个元素大于0, 相应的额外的 $m - p$ 个元素等于0, 其余元素等于0。 x 是**退化的基本可行解**。



基本解的性质

2) 假设 a_1, a_2, \dots, a_p 线性相关, 则存在不全为0的数 $y_i, i = 1, 2, \dots, p$ 使得 $y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_p a_p = 0$ 。可保证 y_i 中至少存在一个正数。

$$\textcircled{1} \begin{cases} x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_p a_p = b \\ y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_p a_p = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x_1 - \varepsilon y_1) a_1 + (x_2 - \varepsilon y_2) a_2 + \dots + (x_p - \varepsilon y_p) a_p = b$, 其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$\textcircled{2}$ 令 $y = [y_1, y_2, \dots, y_p, 0, \dots, 0]^T$, 则 $A[x - \varepsilon y] = b$

$\textcircled{3}$ 令 $\varepsilon = \min\{x_i/y_i | i = 1, 2, \dots, p, y_i > 0\}$, 即 ε 取满足 $y_i > 0$ 的前提下 x_i/y_i 的最小值

那么 $x - \varepsilon y$ 相比于 x , 有一个原来为正的元素变成了0, 其他各元素的正负号不变。此时 $x - \varepsilon y$ 是一个满足:a)所有元素均非负, b) $A[x - \varepsilon y] = b$, c)至多有 $p - 1$ 个正数元素 这三个条件的向量。

所以存在一个最多有 $p - 1$ 个元素的可行解。回到所有证明的第一步, $p \Rightarrow p - 1$ 。重复下去, 总可以找到可行解中对应的 A 中元素都线性无关, 则转到1), 一定存在**基本可行解**。



基本解的性质

- 对于线性规划的标准型，如果存在最优可行解，那么一定存在**最优基本可行解**。

- 证明：

假设 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 是一个最优可行解，且有 p 个正元素。假设其前 p 个元素是正值，其他元素为0，即 $x_1, x_2, \dots, x_p > 0, x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_n = 0$ 。另外，线性规划标准型要求 $\text{rank} A = m$ 。

由于 $A = [a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, a_n]$ ，所以， $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_p a_p = b$

1) 假设 a_1, a_2, \dots, a_p 线性无关，已证明 x 是**基本可行解**，又因为 x 是**最优可行解**，所以 x 是**最优基本可行解**。



基本解的性质

2) 假设 a_1, a_2, \dots, a_p 线性相关, 则存在不全为0的数 $y_i, i = 1, 2, \dots, p$ 使得 $y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_p a_p = \mathbf{0}$, 令 $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_p, 0, \dots, 0]^T$ 。 \mathbf{x} 作为最优可行解应满足 $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}'$, 其中 \mathbf{x}' 是任意可行解。

令 ε 取任意值满足 $|\varepsilon| \leq \min\{|x_i/y_i| | i = 1, 2, \dots, p, y_i \neq 0\}$, $\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{y}$ 相比于 \mathbf{x} , 最多有一个原来为正的元素变成了0, 其他各元素的正负号不变, 是可行解, 所以 $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T (\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{y})$, 所以 $\mathbf{c}^T \varepsilon \mathbf{y} \leq 0$ 。

由于 ε 可正可负 (即 ε 与 $-\varepsilon$ 均满足条件), 所以 $\varepsilon \mathbf{c}^T \mathbf{y} = 0$, 且线性规划的标准型要求 $\text{rank} A = m$ 。

所以, 如果 \mathbf{x} 是最优可行解, 则 $\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{y}$ 同样是最优可行解。

令 $\varepsilon = \min\{x_i/y_i | i = 1, 2, \dots, p, y_i > 0\}$, 则可得到一个最多有 $p - 1$ 个元素的最优可行解。回到所有证明的第一步, $p \Rightarrow p - 1$ 。重复下去, 总可以找到最优可行解中对应的 A 中元素都线性无关, 则转到1), 一定存在最优基本可行解。



Thank you for your
attention!

翟卫欣 副教授

zhaiweixin@cau.edu.cn

中国农业大学信息与电气工程学院