ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

TỐI ƯU LẬP KẾ HOẠCH

Mô hình hóa

Nội dung

- Tổng quan mô hình hóa
- Ví dụ minh họa

Tổng quan mô hình hóa

- Mô hình hóa
  - Xác định biến quyết định
  - Xác định các ràng buộc của bài toán
  - Xác định hàm mục tiêu
- Một bài toán có thể có nhiều phương pháp mô hình hóa khác nhau

Tuyến tính hóa ràng buộc

- Các thư viện phần mềm cho quy hoạch tuyến tính tỏ ra rất hiệu quả trong nhiều bài toán

→ Chuyển mô hình chưa tuyến tính (hàm mục tiêu, ràng buộc chưa phải tuyến tính) về mô hình tuyến tính

- Ví dụ
  - Tuyến tính hóa ràng buộc $X = \min\{x_1, x_2\}$

Tuyến tính hóa ràng buộc

- Các thư viện phần mềm cho quy hoạch tuyến tính tỏ ra rất hiệu quả trong nhiều bài toán

→ Chuyển mô hình chưa tuyến tính (hàm mục tiêu, ràng buộc chưa phải tuyến tính) về mô hình tuyến tính

- Ví dụ
  - Tuyến tính hóa ràng buộc $X = \min\{x_1, x_2\}$

Giải pháp: Định nghĩa thêm biến phụ trợ y là biến nhị phân D(y) = {0,1}, giả định M là một hằng số rất lớn

- $x_1 \geq X$
- $x_2 \geq X$
- $X \geq x_1 - M(1-y)$
- $X \geq x_2 - My$

Tuyến tính hóa ràng buộc

- Ví dụ
  - Tuyến tính hóa ràng buộc ($x = 1$) $\Rightarrow$ ($z \geq y$) trong đó x là biến nhị phân, y và z là các biến thực ?

Tuyến tính hóa ràng buộc

- Ví dụ
  - Tuyến tính hóa ràng buộc ($x = 1$) $\Rightarrow$ ($z \geq y$) trong đó x là biến nhị phân, y và z là các biến thực ?

Giải pháp: giả định M là một hằng số rất lớn

- $M(x-1) + y \leq z$

Tuyến tính hóa ràng buộc

- Ví dụ
  - Tuyến tính hóa ràng buộc ($x > 0$) $\Rightarrow$ ($z \geq y$) trong đó x, y và z là các biến thực (và x >=0) ?

Tuyến tính hóa ràng buộc

- Ví dụ
  - Tuyến tính hóa ràng buộc ($x > 0$) $\Rightarrow$ ($z \geq y$) trong đó x, y và z là các biến thực (và x >=0) ?

Giải pháp:

- Giả định M là một hằng số rất lớn,
- Đưa thêm biến nhị phân $t \in \{0,1\}$:
  - $t = 1$ mang ý nghĩa $x > 0$, và $t = 0$ mang ý nghĩa là $x = 0$
- Thay thế bằng ràng buộc
  - $x \leq M.t$
  - $z + (1-t)M \geq y$

Bài toán phân công giảng dạy

- Cần phân công m giáo viên T = {0,1,2,…, m-1} phụ trách giảng dạy *n* lớp C = {0,1,2,…,n-1} một cách cân bằng nhau nhất có thể
  - Mỗi giáo viên chỉ có thể dạy một số lớp nào đó phụ thuộc vào chuyên môn và được thể hiện ở ma trận A_{mxn}, trong đó $A(t,c) = 1$ nếu giáo viên *t* có thể dạy lớp *c*
  - Các lớp được xếp thời khóa biểu từ trước, do đó các lớp có thể trùng thời khóa biểu với nhau, ký hiệu *B* là tập các cặp 2 lớp (*i*,*j*) bị trùng thời khóa biểu
  - Tải của một giáo viên được tính bằng số lớp phân công cho giáo viên đó
- Cần lập kế hoạch phân công sao cho
  - Mỗi lớp được phân cho đúng 1 giáo viên
  - Tải của giáo viên nhiều tải nhất phải nhỏ nhất có thể được (để nhằm mục đích san đều tải giữa các giáo viên)

Bài toán phân công giảng dạy

- Ví dụ

Course	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
credits	3	3	4	3	4	3	3	3	4	3	3	4	4

Teachers	Preference Courses
0	0, 2, 3, 4, 8, 10
1	0, 1, 3, 5, 6, 7, 8
2	1, 2, 3, 7, 9, 11, 12

Conflicting courses

0	2
0	4
0	8
1	4
1	10
3	7
3	9
5	11
5	12
6	8
6	12

Bài toán phân công giảng dạy

- Ví dụ

Course	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
credits	3	3	4	3	4	3	3	3	4	3	3	4	4

Teachers	Preference Courses
0	0, 2, 3, 4, 8, 10
1	0, 1, 3, 5, 6, 7, 8
2	1, 2, 3, 7, 9, 11, 12

Lớp trùng TKB

0	2
0	4
0	8
1	4
1	10
3	7
3	9
5	11
5	12
6	8
6	12

Teacher	Assigned courses	Load
0	2, 4, 8, 10	15
1	0, 1, 3, 5, 6	15
2	7, 9, 11, 12	14

Bài toán phân công giảng dạy – CP Model

- Biến quyết định
  - $X(i)$: giáo viên dạy lớp i, $\forall i \in C$, miền giá trị $D(X(i)) = \{t \in T \mid A(t,i) = 1\}$
  - $Y(i)$: tải của giáo viên i, miền giá trị $D(Y(i)) = \{0,1,\ldots,n-1\}$
  - Z: tải lớn nhất giữa các giáo viên
- Ràng buộc
  - $X(i) \neq X(j)$, $\forall (i,j) \in B$
  - $Y(i) = \sum_{j \in C} (X(j) = i)$, $\forall i \in T$
  - $Z \geq Y(i)$, $\forall i \in T$
- Hàm mục tiêu cần tối thiểu hóa: Z

Bài toán phân công giảng dạy – ILP model

- Biến quyết định
  - $X(i,j) = 1$: giáo viên i được phân công dạy lớp j, và $X(i,j) = 0$, ngược lại, $\forall\, i \in T, j \in C$, miền giá trị $D(X(i,j)) = \{0,1\}$
  - $Y(i)$: tải của giáo viên i, miền giá trị $D(Y(i)) = \{0,1,\ldots,n-1\}$
  - Z: tải lớn nhất giữa các giáo viên
- Ràng buộc
  - $\sum_{i\in T} X(i,j) = 1$, , $\forall j \in C$
  - $X(t,i) + X(t,j) \leq 1$, $\forall (i,j) \in B$, $t \in T$
  - $Y(i) = \sum_{j\in C} X(i,j)$, $\forall i \in T$
  - $Z \geq Y(i)$, $\forall i \in T$
- Hàm mục tiêu cần tối thiểu hóa: Z

Bài toán người du lịch (TSP)

- Có n điểm 1, 2, …, n. Một người du lịch xuất phát từ điểm 1, cần đi thăm các điểm khác, mỗi điểm đúng 1 lần và quay trở về điểm 1. Biết $d(i,j)$ là khoảng cách từ điểm i đến điểm j. Hãy tìm hành trình cho người du lịch sao cho tổng độ dài là nhỏ nhất

Bài toán người du lịch (TSP)

- Biến quyết định
  - Biến nhị phân $X(i,j) = 1$ nếu hành trình đi theo cung (i, j), and $X(i,j) = 0$, ngược lại.
- Ràng buộc
  - Mỗi điểm có đúng 1 cạnh đi vào và đúng 1 cạnh đi ra

$$\sum_{j=1}^{N} X(i,j) = \sum_{j=1}^{N} X(j,i) = 1, \forall i \in \{1,2,\ldots,N\}$$

  - Ràng buộc cấm tạo chu trình con

$$\sum_{(i,j)\in S} X(i,j) \leq |S| - 1, \forall S \subseteq \{1,2,\ldots,N\} \text{ and } |S| < N$$

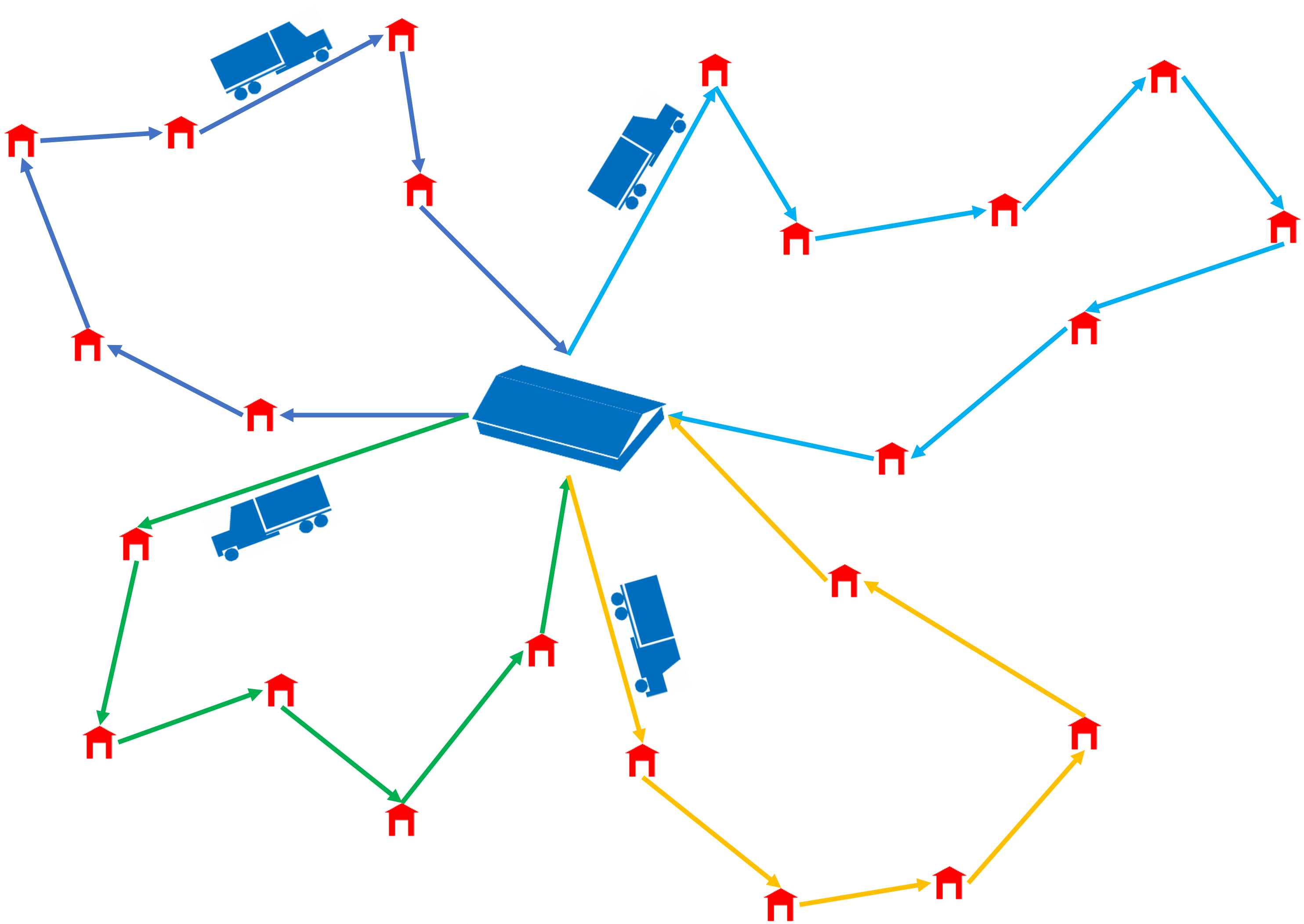
- Hàm mục tiêu cần tối thiểu hóa

$$f(X) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} d(i,j) X(i,j)$$

Bài toán người du lịch biến thể (eTSP)

- Có n điểm 1, 2, …, n. Một người du lịch xuất phát từ điểm 1, cần đi thăm các điểm khác, mỗi điểm đúng 1 lần và quay trở về điểm 1. Biết $d(i,j)$ là khoảng cách từ điểm i đến điểm j. Biết Q là tập các bộ (i,j) sao cho điểm i phải được thăm trước điểm j trên hành trình. Hãy tìm hành trình cho người du lịch sao cho tổng độ dài hành trình là nhỏ nhất

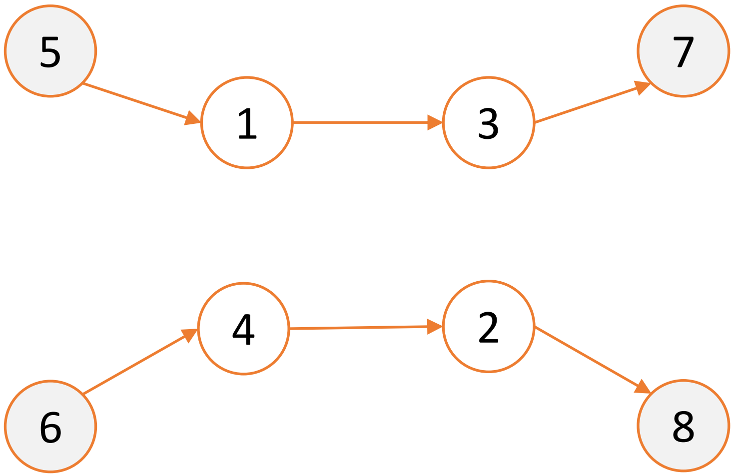
Bài toán lập lộ trình vận tải (CVRP)



Bài toán lập lộ trình vận tải (CVRP)

- Một đội K xe tải 1, 2, …, K cần được lập lộ trình đi qua N khách hàng 1, 2, …, N để thu gom hàng hóa
  - Khách hàng i nằm ở điểm i và có một lượng hàng cần thu gom là $r(i)$ đơn vị, i = 1, 2, …, N
  - Xe tải k (k = 1,…, K)
    - Xuất phát từ điểm N+k và kết thúc lộ trình ở điểm N + K + k (trong một số trường hợp, N+k và N+K+k có thể tham chiếu đến 1 điểm kho duy nhất)
    - Có tải trọng là $c(k)$ biểu diễn số lượng đơn vị hàng tối đa có thể vận chuyển trên 1 chuyến
  - Khoảng cách di chuyển từ điểm i đến điểm j là $d(i,j)$, i,j = 1,…,N + 2K
- Tính lộ trình cho các xe
  - Mỗi khách hàng được thăm bởi đúng 1 xe
  - Thỏa mãn ràng buộc về tải trọng
  - Tổng độ dài hành trình của các xe là nhỏ nhất

Bài toán lập lộ trình vận tải (CVRP)



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	2	3	4	3	3	3	3
2	4	0	2	6	1	1	1	1
3	2	4	0	2	1	1	1	1
4	5	7	7	0	4	4	4	4
5	3	1	5	7	0	0	0	0
6	3	1	5	7	0	0	0	0
7	3	1	5	7	0	0	0	0
8	3	1	5	7	0	0	0	0

	1	2	3	4
r	4	3	6	5

	1	2
c	10	10

Bài toán lập lộ trình vận tải (CVRP)

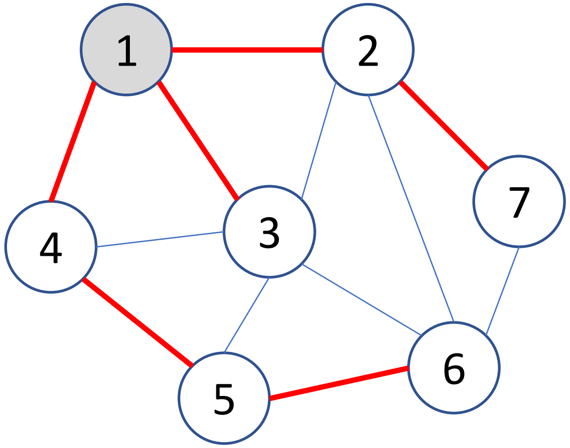
- Ký hiệu
  - $B = \{1,\ldots, N+2K\}$
  - $F_1 = \{(i, k+N) \mid i \in B, k \in \{1,\ldots,K\}\}$
  - $F_2 = \{(k+K+N, i) \mid i \in B, k \in \{1,\ldots,K\}\}$
  - $F_3 = \{(i, i) \mid i \in B\}$
  - $A = B^2 \setminus F_1 \setminus F_2 \setminus F_3$
  - $A^+(i) = \{ j \mid (i, j) \in \mathrm{A}\}$, $A^-(i) = \{ j \mid (j, i) \in \mathrm{A}\}$
- Biến quyết định
  - $X(k,i,j) = 1$ nếu xe k di chuyển qua cạnh (i, j), $\forall k = 1,\ldots,K$, $(i,j) \in A$
  - $Y(k,i)$: số đơn vị hàng hóa được thu gom trên xe k sau khi rời khỏi điểm i, $\forall k = 1,\ldots,K$, $\forall i = 1,\ldots,N+2K$
  - $Z(i)$: chỉ số của xe đi thăm điểm i, $\forall i = 1,2,\ldots, N+2K$

Bài toán lập lộ trình vận tải (CVRP)

- Ràng buộc
  - $\sum_{k=1}^{K}\sum_{j\in A^{+}(i)} X(k,i,j) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{j\in A^{-}(i)} X(k,j,i,) = 1, \forall\ i = 1,\ldots, N$
  - $\sum_{j\in A^{+}(i)} X(k,i,j) = \sum_{j\in A^{-}(i)} X(k,j,i), \forall i = 1,\ldots,N,\ k = 1,\ldots, K$
  - $\sum_{j=1}^{N} X(k,k+N,j) = \sum_{j=1}^{N} X(k,j,k+K+N) = 1, \forall k = 1,\ldots, K$
  - $M(1-X(k,i,j)) + Z(i) \geq Z(j), \forall\ (i,j) \in A, \forall k = 1,\ldots,K$
  - $M(1-X(k,i,j)) + Z(j) \geq Z(i), \forall\ (i,j) \in A, \forall k = 1,\ldots,K$
  - $M(1-X(k,i,j)) + Y(k,j) \geq Y(k,i) + r(j), \forall\ (i,j) \in A, \forall k = 1,\ldots,K$
  - $M(1-X(k,i,j)) + Y(k,i) + r(j) \geq Y(k,j), \forall\ (i,j) \in A, \forall k = 1,\ldots,K$
  - $Y(k,k+K+N) \leq c(k), \forall k = 1,\ldots,K$
  - $Y(k,k+N) = 0, \forall k = 1,\ldots,K$
  - $Z(k+N) = Z(k+K+N) = k, \forall k = 1,\ldots,K$
- Hàm mục tiêu
  - $f(X,Y,Z) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{(i,j)\in A} X(k,i,j)d(i,j) \rightarrow \min$

Bài toán quảng bá dữ liệu

- Cho mạng truyền thông, trong đó V = {1,…,N} là tập các máy tính, $E \subseteq V^2$ là tập các đường truyền kết nối giữa các máy tính. Một máy $s \in V$ là điểm phát tin tức.
- Mỗi máy tính khi nhận được gói tin có thể truyền tiếp đến các máy tính kết nối với nó
    - t(i,j) và c(i,j) tương ứng là thời gian và chi phí truyền tin từ máy i đến máy j
- Tìm tập các đường kết nối để quảng bá gói tin từ s đến các nút khác trong mạng sao cho
    - Thời gian gói tin truyền từ s đến mỗi nút khác không vượt quá L
    - Tổng chi phí truyền tin là nhỏ nhất



Bài toán quảng bá dữ liệu

- Ký hiệu $A(i) = \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$, M là hằng số rất lớn
- Biến quyết định
  - Biến nhị phân $X(i,j) = 1$ nếu gói tin được truyền từ nút i đến nút j, và $X(i,j) = 0$, ngược lại, $\forall (i,j) \in E$
  - $Y(i)$: thời điểm gói tin đến nút i, $\forall i \in V$
- Ràng buộc
  - $\sum_{i \in A(j)} X(i,j) = 1$, $\forall j \in V \setminus \{s\}$
  - $Y(i) + t(i,j) + M(1-X(i,j)) \geq Y(j)$, $\forall (i,j) \in E$
  - $Y(i) + t(i,j) + M(X(i,j)-1) \leq Y(j)$, $\forall (i,j) \in E$
  - $Y(i) \leq L$, $\forall j \in V \setminus \{s\}$
  - $Y(s) = 0$
- Hàm mục tiêu cần tối thiểu hóa

$$f(X) = \sum_{(i,j) \in E} c(i,j) X(i,j)$$

Bài toán Facility Location

- Có *M* điểm 1, 2, …, *M* có thể được sử dụng để mở dịch vụ phục vụ *N* khách hàng 1, 2, …, *N*.
  - *f*(*i*) là chi phí để mở điểm *i*
  - *Q*(*i*) là khả năng phục vụ của điểm *i* (tổng lượng hàng hóa tối đa có thể phục vụ các khách hàng)
  - *c*(*i*,*j*) là chi phí vận chuyển 1 đơn vị hang hóa từ điểm *i* đến khách hàng *j*
  - *d*(*j*) là lượng hàng yêu cầu được phục vụ của khách hàng *j*
- Lập kế hoạch mở điểm phục vụ và lượng hàng hóa mỗi điểm phục vụ mỗi khách hàng
  - Thỏa mãn ràng buộc về khả năng phục vụ
  - Tối thiểu hóa tổng chi phí

Bài toán Facility Location

- Biến quyết định
  - $Y(i)$ – biến nhị phân, $Y(i) = 1$ có nghĩa điểm phục vụ i được mở, và $Y(i) = 0$, ngược lại
  - $X(i,j)$ – lượng hàng mà điểm dịch vụ i phục vụ cho khách hàng j
- Ràng buộc
  - $\sum_{i=1}^{M} X(i,j) = d(j), \forall j = 1,\ldots, N$
  - $\sum_{j=1}^{N} X(i,j) \le Q(i)Y(i), \forall i = 1,\ldots, M$
  - $0 \le X(i,j) \le d(j)Y(i), \forall i = 1,\ldots, M, \forall j = 1,\ldots, N$
- Hàm mục tiêu cần tối ưu

$$\sum_{i=1}^{M} f(i)Y(i) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} c(i,j)X(i,j) \rightarrow \min$$

Bài tập

- Resource constrained shortest path problem
  - Cho đồ thị G = (V,E), mỗi cung e của E có chi phí là c(e) và lượng tài nguyên tiêu thụ khi đi qua cung e là r(e). Cho đỉnh nguồn s và đỉnh đích t. Hãy tìm đường đi từ s đến t trên G sao cho
    - Tổng lượng tài nguyên tiêu thụ dọc theo các cung trên đường đi lớn hơn hoặc bằng L và nhỏ hơn hoặc bằng U
    - Tổng chi phí các cung trên đường đi là nhỏ nhất
- Degree constrained minimum spanning tree problem
  - Cho đồ thị vô hướng G=(V,E) trong đó c(e) là trọng số cạnh e. Cho hằng số D, hãy tìm cây khung nhỏ nhất của G sao cho bậc của mỗi đỉnh trên cây khung không vượt quá D

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

25 YEARS ANNIVERSARY SOICT

VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

SCHOOL OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY

Thank you for your attentions!