拓扑排序/Tarjan/欧拉回路/传递闭包/差分约束/杂题选讲/知识点补充

东营市第一中学 孙翊轩

拓扑排序

- 定义：有向无环图（DAG），求一个线性序列满足：
  - 若存在一条由A到B的路径，则A在序列中一定在B前面。
- 用途：整理解决依赖关系

- 拓扑排序的题目好想，而且很容易看出来是用拓扑排序，因此不是一个热门考点。

- 拓扑排序题目一般需要的不是线性序列，而是在排序的过程中处理题目。

拓扑排序

- 求拓扑排序（BFS）：
  - 插边时维护每个点的入度，每次从入度为0的点开始删点。
  - 如果这张图是一个DAG，最后点可以被删完，拓扑序就求出来了。
- 例题：NOIP2003提高 神经网络 洛谷P1038

给定若干个点和若干个神经连接组成DAG，一部分点是发射点（从这里往外传导信号），信号只能逐层传导，在传导的同时维护一个权值的变化。

Tarjan

- 很有意思的算法
- 先看看可以解决什么：
  - 连通块
  - 割点
  - 桥
  - LCA（离线）
- 不讲思想，原因：
  - Tarjan本人的思想和现在的代码实现不符，按照他的思路写代码写出来是错的。（low[v]和dfn[v]悖论）
  - 网上教的很乱，有些思想错的代码结果很巧是对的。
  - 我提供一份最简单最正确的板子，然后背就行了。

Tarjan

- Tarjan板子应该这样分类：
  - 连通块：维护stack
  - 割点/桥：维护father判断各自的条件
  - LCA：瞎搞

Tarjan

- 双连通分量

  边双连通分量是没有桥的分量

  点双连通分量是没有割点的分量

  一般用不到点双

  边双如何求？

欧拉回路

- 一般讨论连通无向图
- 欧拉通路：从一点到另外一点可以不重复经过所有路径，可以重复经过点的一条通路。
- 欧拉回路：从一点回到该点可以不重复经过所有路径，可以重复经过点的一条回路。
- 很显然但是不会证明的结论：
  - 欧拉通路存在：无向图有两个奇度点，剩下的都是偶度点。
  - 欧拉回路存在：无向图全都是奇度点

欧拉回路

- 求欧拉回路
  - 在判断存在欧拉回路的情况下，直接DFS+栈保存即可O(nm)
  - 但是这样有两个缺陷：
    - DFS最大深度是M，系统栈可能无法承受
    - 不能给点加vis，每次到一个点都要重复搜索该点相邻的路径

以上两个原因导致DFS方法的空间时间双失利

欧拉回路

- 求欧拉回路
  - 考虑前向星存图时，如果该边已经被取过，直接把head指到下一条边。避免了边被搜索多次的问题。
  - 考虑手动模拟系统栈，把递归化为循环，防止系统栈爆炸。

  - 时间复杂度为O(N+M)，空间复杂度在可接受范围内

差分约束

- 解决什么问题？
  - 差分约束有固定模型，求解一类固定问题

    给出多个形如$x_i - x_j \le c$(c为任意常数)的条件，求一组合法的x序列使这些条件都成立。
  - 考虑变形：

    $x_i - x_j \le c$

    $x_i \le c + x_j$

    容易发现该式的形式与最短路中的三角形不等式一致。
    因此可以考虑由每个i到j连一条长度为c的边，求解最短路。
    但是怎么求呢？

差分约束

- 铺垫一个知识点：超级源点

  洛谷T155863 贪吃牛

  　　有向图，无负边，给出M个起点城市和M个终点城市，对于每个终点城市求出从任意起点城市到该终点城市的最短路径。

  考虑弗洛伊德，O(N^3)，跑不了

  M遍Dij，复杂度可以低一点，复杂度O($N^2 Log_2 N$)

差分约束

- 思路：
  新建一个“超级源点”，该源点到所有起点都连接一条长度为0的边。
  然后从该点跑Dij。
  一遍Dij就跑完了。

差分约束

- 回到差分约束

  那么为什么要在差分约束用超级源点？

  考虑约束系统存在一组解$\{a_1, a_2, \ldots\ldots a_n\}$

  那么$\{a_1+\Delta, a_2+\Delta, \ldots\ldots, a_n+\Delta\}$显然也是一组解

  我们可以不可以先求出一组负数解，这样就能获取最小的序列，不用再消去Δ了？

差分约束

- 思考

  问题为如何限制解为负数？

  观察刚才按思路建立的图，由j到i连边权k代表$x_i - x_j \le k$

  那么可以建立超级源点，对每个点连一条长度为0的边，这样就代表建立了多条形如$x_i - x_0 \le 0$的条件即$x_i \le 0$

  但是超级源点最主要的目的不在这里，为什么要建？

差分约束

- 思考

  差分约束系统可以不建超级源点，但是推荐什么地方都建。
  因为最后建出来的图不一定连通，超级源点可以解决该问题。

  超级源点建设完毕后，从源点开始跑SPFA，最后的$x_i = dis[i]$即为差分约束系统的一组解。

  注意：要判负环，如果有，差分约束系统无解。

差分约束

- 拓展

  那$x_i - x_j \geq k$的约束条件如何建边？

差分约束

- 拓展

  那$x_i - x_j \geq k$的约束条件如何建边？

  第一种：考虑由j连接到i为k的边，然后跑单源最长路（等会说）

  第二种：考虑都乘以-1，就获取了一组形如$x_j - x_i \leq -k$的条件，跑SPFA最短路就行了。

差分约束

- SPFA咋跑最长路？
  边权取反，求最短路。

闭包传递

- 传递问题有两种：
  - 集合型传递

    具有集合性质，如a//b,b//c,则a//b//c,在一个集合内。

    并查集求解即可。
  - 闭包传递

    不具有集合性质，如a→b,b→c,可以推出a→c,但是不能反推。

闭包传递

- 怎么做？
  是有向图，所以跑弗洛伊德。
  就做完了。
- 优化？
  传递闭包只需要维护bool，所以开二维bitset。
- 题目？
  给出m组大小关系，问将这n个元素进行排序还需要几组大小关系？

闭包传递

- 思路

  针对每组关系建边即可，然后传递闭包。
  双方都没有关系的，就代表需要一条关系
  枚举即可。

2-sat

- 啥是2-sat？
  有n个元素，分配到A，B两个集合中，给出M个限制形如：
  I在X集合，J必须在Y集合。（XY可能相等）
  求是否有解。

  非常套路的一类问题。

2-sat

- 建图思路

  针对i在X则J在Y可以建图表示推出传递关系

  针对每个元素建立(J,X)和(I,Y)

  那么对于I在X J在Y可以由(I,X)->(J,Y)表示推出

  但是这样建图就结束了吗？

2-sat

- 建图思路

  建图明显不严谨，需要加入矛盾条件才可能发现矛盾。
  所以对于隐形条件也要建边。
  对于I在X J在Y建立(J,!Y),(I,!X)的边
  建图就完备了
  然后用Tarjan求连通块，如果发生矛盾(I,X)和(J,Y)会在一个SCC里面。
  如果没有矛盾，就是任何一组(I,X)和(J,Y)都不在一个连通块。

多集合2-sat

- 概述

  现在变成N个元素放入多个集合中。
  这是一个完全NP问题，只能暴搜。

  如果出了，那就是可以找性质转化为2-sat问题求解的。

图论杂题选讲

- P2746 [USACO5.3]校园网Network of Schools
- 不可能的路
- 不可能的大暴力
- 不可能的规划