备战2019
全国研究生数学建模竞赛

吕 巍

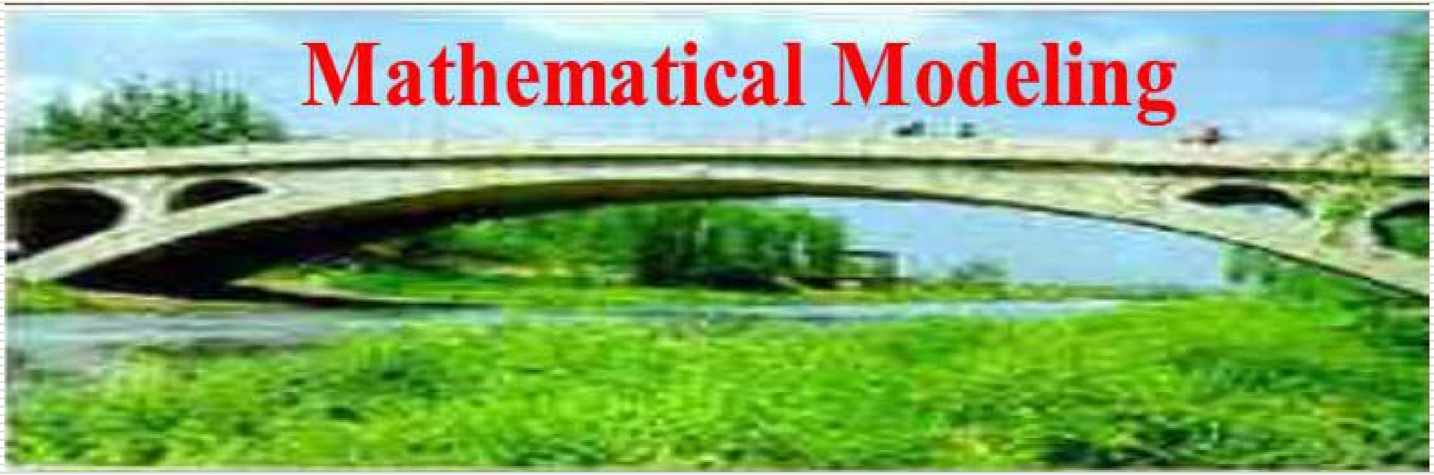
主要内容

一、什么是数学建模
二、竞赛简介
三、历年赛题分析
四、如何备战

附录：常用数学模型

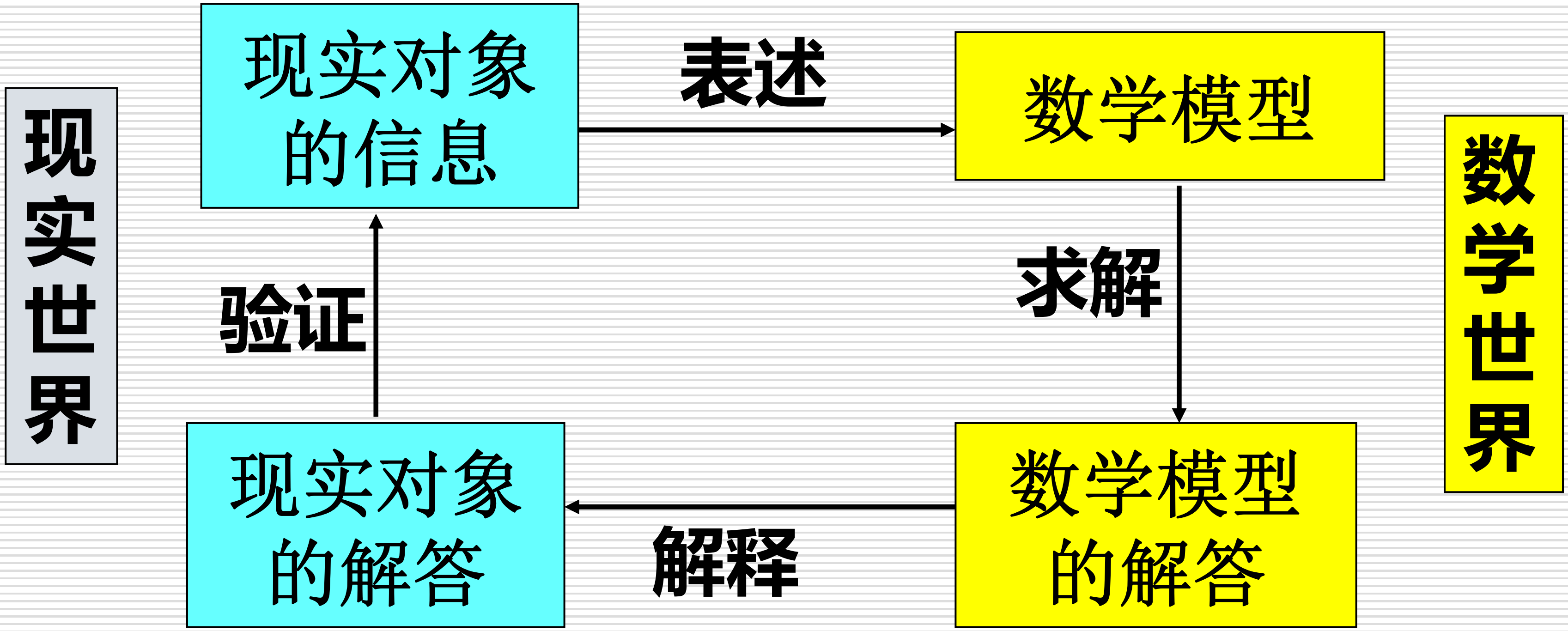
一、什么是数学建模

实际问题



数学

数学建模的全过程



比赛中常用的方法

- ✓ 数学规划法
- ✓ 概率统计法
- ✓ 层次分析法
- ✓ 主成分分析法
- ✓ 图与网络方法

比赛中常用的数学模型

- ✓ 优化模型
- ✓ 概率统计模型
- ✓ 微分方程模型

二、竞赛简介

- 1. 历史与规模
- 2. 宗旨
- 3. 特点
- 4. 内容与形式
- 5. 评审标准
- 6. 奖项设置

1. 历史与规模

- **2004**年-第一届全国研究生数学建模竞赛(南师大).
- 举办单位-教育部学位与研究生教育发展中心.
- 举行时间-每年9月中旬.
- **2018**年 - **42128**队12万(33个省以及美国和新加坡的1449所院校).

2. 宗旨

- 宗旨：　创新意识　团队精神
  重在参与　公平竞争
- 落户加分+出国添重
- 国内著名科研机构和企业将其作为衡量学生素质和水平的重要依据.

IBM 中国研究中心: Business Analysis Optimization

Job Requirements:

1、PhD M.S. in mathematics, statistics, computer science, industrial engineering management science etc.

2、Self-motivated, responsible, able to wk independently under tight deadline willing to wk under pressure.

3、Skill in applied mathematics, including mathematical programming, statistics, data mining, simulation etc.

4、Knowledge in supply chain logistics strategy modeling, simulation, planning optimization.

5、Strong interest basic knowledge about industry trends, technologies, solutions in analytics optimization.

6、Experience in ERP/S(

7、Award in highly regai

8、Experience in eclipse,

--March 26, 2009, http://www

IBM 中国研究中心-招聘条件

Position title: Business Optimization(BJ)

1. Background in industrial engineering, operations research, mathematics, Artificial Intelligence, management science etc.
2. Knowledge in network design, job scheduling, data analysis, simulation and optimization
3. Award in mathematical contest in modeling is a plus
4. Experience in industry is a plus
5. Experience in eclipse or programming model / architecture design is a plus

--Feb. 18, 2006, http://www-900.ibm.com/cn/ibm/crl/careers/condition.shtml

3. 特点

- 开放性、综合性，没有事先设定的标准答案.
- 题目中往往不提供数据或提供很多数据.

4. 内容与形式

内容

- 赛题：工程与管理等领域的实际问题.
- 答卷：中文论文.

形式

- 3名在读研究生+5天内完成.

可使用任何“死”材料(图书/互联网/软件等)，但不得与队外任何人讨论（包括上网讨论）

标准

假设的合理性，建模的创造性，结果的正确性，表述的清晰性.

5. 评审标准

假设的合理性　建模的创造性

结果的正确性　表述的清晰性

合理性：关键假设（不欣赏罗列大量无关紧要的假设；要对假设的合理性进行解释，正文中要引用）

创造性：特别欣赏独树一帜、标新立异，但要合理

正确性：不强调与参考答案的一致性和结果的精度（好方法的结果一般比较好，但不一定是最好的）

清晰性：表达严谨、简洁，思路清晰，格式符合规范，严禁暴露身份

6. 奖项设置（1679）

- 等级奖

（一291：0.75%、二1193：3.09%、三）

- 成功参赛奖
- 优秀组织奖
- 突出贡献奖

三、历年赛题分析

- 1.历年赛题及解法
- 2.赛题特点
- 3.如何选题

1. 历年赛题及解法

赛题	解法
2004 A题 发现黄球并定位	优化模型
B题 实用下料问题	优化模型
C题 售后服务数据的运用	概率统计模型
D题 研究生录取问题	优化模型
2005 A题 高速公路行车时间的估计	概率统计模型
B题 空中加油	优化模型
C题 城市交通管理中的出租车规划	优化模型
D题 仓库容量有限条件下的随机存贮管理	优化模型
2006 A题 Ad Hoc网络中的区域划分和资源分配问题	优化模型
B题 确定高精度参数问题	概率统计模型
C题 维修线性流量阀时的内筒设计问题	优化模型
D题 学生面试问题	优化模型

赛题		解法
2007 A题	建立食品卫生安全保障体系数学模型及改进模型的若干理论问题	概率统计模型
B题	机械臂运动路径设计问题	优化模型
C题	探讨提高高速公路路面质量的改进方案	优化模型
D题	邮政运输网络中的邮路规划和邮车调度	优化模型
2008 A题	汶川地震中唐家山堰塞湖泄洪问题	优化模型
B题	城市道路交通信号实时控制问题	优化模型
C题	货运列车的编组调度问题	优化模型
D题	中央空调系统节能设计问题	优化模型
2009 A题	我国就业人数或城镇登记失业率的数学建模	概率统计模型
B题	枪弹头痕迹自动比对方法的研究	优化模型
C题	多传感器数据融合与航迹预测	概率统计模型
D题	110警车配置及巡逻方案	优化模型

赛题			解法
2010	A题	确定肿瘤的重要基因信息—提取基因图谱信息方法的研究	优化模型
	B题	与封堵溃口有关的重物落水后运动过程的数学建模	微分方程模型
	C题	神经元的形态分类和识别	优化模型
	D题	特殊工件磨削加工的数学建模	优化模型
2011	A题	基于光的波粒二象性一种猜想的数学仿真	概率统计模型
	B题	吸波材料与微波暗室问题的数学建模	概率统计模型
	C题	小麦发育后期茎秆抗倒性的数学模型	概率统计模型
	D题	房地产行业的数学建模	优化模型

赛题	解法
2012 A题 基因识别问题及其算法实现	优化模型
B题 基于卫星无源探测的空间飞行器-主动段轨道估计与误差分析	概率统计模型
C题 有杆抽油系统的数学建模及诊断	优化模型
D题 基于卫星云图的风矢场（云导风）度量模型与算法探讨	概率统计模型
2013 A题 变循环发动机部件法建模及优化	优化模型
B题 功率放大器非线性特性及预失真建模	概率统计模型
C题 微蜂窝环境中无线接收信号的特性分析	概率统计模型
D题 空气中PN2.5问题的研究	概率统计模型
E题 中等收入定位与人口度量模型研究	概率统计模型
F题 可持续的中国城乡居民养老保险体系的数学建模研究	概率统计模型

赛题	解法
2014 A题 小鼠视觉感受区电位信号（LFP）与视觉刺激之间的关系研究	概率统计模型
B题 机动目标的跟踪与反跟踪	优化模型
C题 无线通信中的快时变信道建模	优化模型
D题 人体营养健康角度的中国果蔬发展战略研究	优化模型
E题 乘用车物流运输计划问题	优化模型
2015 A题 水面舰艇编队防控和信息化战争评估模型	优化模型
B题 数据的多流形结构分析	概率统计模型
C题 移动通信中的无线信道“指纹”特征建模	优化模型
D题 面向节能的单/多列车优化决策问题	优化模型
E题 数控加工刀具运动的优化控制	优化模型
F题 旅游路线规划问题	优化模型

赛题	解法
2016 A题 多无人机协同任务规划	优化模型
B题 具有遗传性疾病和性状的遗传位点分析	概率统计模型
C题 基于无线通信基站的室内三维定位问题	概率统计模型+优化模型
D题 军事行动避空侦察的时机和路线选择	优化模型
E题 粮食最低收购价政策问题研究	优化模型
2017 A题 无人机在抢险救灾中的优化运用	优化模型
B题 面向下一代光通信的VCSEL激光器仿真模型	微分方程模型
C题 航班恢复问题	优化模型
D题 基于监控视频的前景目标提取	优化模型
E题 多波次导弹发射中的规划问题	优化模型
F题 地下物流系统网络	微分方程模型

赛题	解法
2018 A题 关于跳台跳水体型系数设置的建模分析	优化模型
B题 光传送网建模与价值评估	优化模型
C题 恐怖活动分级	优化模型
D题 基于卫星高度计海面高度异常资料获取潮汐调和常数方法及应用	概率统计模型
E题 多无人机对组网雷达的协同干扰	优化模型

2. 赛题特点

- 题目来源----实际研究课题的简化、改编；有实际背景问题的编撰；合适的社会热点（或兴趣）问题
- 题目背景----通俗易懂，涉及的专业知识不深
- 解题所用的数学方法尽量多元化、综合化
- 可以查阅到一些参考材料，但是无法照搬现成文献
- 兼顾数据的收集与数据的处理

3. 如何选题

- 根据队员专业特点选择易于自己队伍解答的问题

- 不要扎堆

四、如何备战

- 1.如何准备
- 2.如何组队
- 3.如何写论文

1. 如何准备

- 学习数学建模的常用方法和软件
- 阅读优秀获奖论文
- 做一些简单的实际问题

参考书目：数学模型(第四版)，姜启源等(高等教育出版社，2011年)

2. 如何组队

领导者

- 分析问题，将问题与数学方法建立联系，建立模型
- 确定团队对问题的解决思路和方法

算手

- 设计求解算法，熟悉常见算法，有编程经验
- 通过各类软件对模型进行模拟、求解、验证

写手

- 科技论文写作能力强，能够将建立的模型和求解方法表达清楚
- 把握团队前进的方向和进度

□ 诚信最重要

- 团队合作是能否获奖的关键
- 建议是“妥协”，意思是说不要总认为自己的观点总是正确的，要多听别人的观点，在两者之间谋求共同点，一起找到解决问题的最佳方案。
- 三人组成的小组合作可以在竞赛前培养。

时间和体力的问题

- 竞赛中时间分配很重要，分配不好可能完不成论文，所以开始时要大致做一下安排。不需要分的太细，比如第一天做第一小题，第二天做第二小题，一旦解决不了问题，会很有压力，因此一切顺其自然，只要思维活跃条理清楚，问题必然会迎刃而解。开始阶段不忙写作，可以将一些小组讨论的要点记录下来，不需要太工整，大概内容记录一下，第二天晚上再开始写论文也是可以的。

比赛前不要熬夜。

3. 如何写论文

- 评定竞赛成绩高低及获奖级别的依据
- 培养科技写作能力
- 对撰写毕业论文、科技论文、科技报告、项目申请有帮助

文
章
结
构

摘要

1. 问题重述（理解）

2. 模型假设

3. 符号说明

4. 模型建立与求解

5. 模型验证

6. 模型评价

参考文献

附录（部分数据和程序）

摘要（至关重要）

- 摘要是一份简明扼要的详细摘要（包括关键词），在整篇论文评阅中占有重要权重，因为它会给读者和评卷人第一印象。

- 老师评阅时将首先根据摘要和论文整体结构及概貌对论文优劣进行初步筛选.

摘要（至关重要）

主要回答以下问题：

针对问题＋建立模型＋求解方法＋主要结果＋评价及主要推广

- **模型的数学归类（在数学上属于什么类型）**
- **建模的思想（思路）**
- **算法思想（求解思路）**
- **建模特点（模型优点，建模思想或方法，算法特点，结果检验，灵敏度分析，模型检验……）**
- **主要结果（数值结果）（回答题目所问的全部“问题”）**

摘要（至关重要）

▲ 表述：通顺、规范、准确、精练、大气【避免出现：说话象书面语，写作象口头语】

▲ 重点突出：一定要突出模型、算法、结论、创新点、特色

▲ 表述层次清晰：让人一看就知道这篇论文研究什么问题，做了什么工作，用的什么方法，得到什么结果，有什么创新和特色

题　　目　　多无人机协同任务规划

摘　　要：

本文以最优化理论为基础，研究了多无人机协同任务规划问题。首先，通过两元素优化算法（2-opt）和基于贪心策略的覆盖法，求解了多无人机协同侦察问题（MUCRP），制订了 FY-1 型无人机完成所有目标群侦察任务的最佳路线和无人机调度策略；其次，基于协同侦察调度策略，制订了 FY-2 型无人机的协同通信调度方案，并通过定量分析，证明了提出的协同通信策略的可行性；再次，采用最近邻贪心算法和基于协同攻击的覆盖法，将 FY-1 与 FY-3 型无人机的协同作战问题转化为两步优化问题分别求解，保证了攻击方无人机滞留在防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小，并给出了完成规定火力打击任务的规划结果；接着，通过提出巡检待命无人机的设想，解决了基于防御方部署远程搜索雷达情形下的协同作战问题，并给出了巡检待命无人机的调度策略。最后，结合整个建模过程，对算法复杂度和无人机作战能力的提升作了定性分析。

问题一中，分三步求解了多无人机协同侦察模型 MUCRP。通过对比两元素优化算法（2-opt）和蚁群算法（ACO）的求解结果，发现考虑最短路径和运行时间时，**2-opt 算法处理 MUCRP 效率更高**，并得出**需选择 2 台加载 S-1 型载荷的 FY-1 型无人机进行侦察，其最佳路线见文内图 1**。在此基础上，采用覆盖法得出，**需选择 1 台加载 S-2 型载荷的 FY-1 型无人机进行侦察，其最佳路线见文内图 2**。最后通过求解时间差优化问题，**给出了 FY-1 型无人机的综合调度策略（见文内表 6）**。最终求得 **FY-1 型无人机滞留在防御方雷达有效探测范围内的时间总和为 11h54m11s**。

问题二中，基于问题一中的侦察调度方案，制订了**两台 FY-2 型无人机协同通信方案，其航迹见文内图 8**。理论分析表明，在此方案下两台 FY-2 型无人机的飞行时间均小于 8 小时，于是为完成问题一的侦察任务，**至少安排两架 FY-2 型通信中继无人机**。

问题三中，将协同作战问题转化为两步优化问题，并分别建立了数学模型。第一步优化保证攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小，需首先打击防御方雷达。理论分析发现，**必须挂载 D-1 型炸弹对雷达实施打击**。通过最近邻贪心算法，**给出了打击所有雷达的 FY-3 型无人机调度方案（见文内表 8）**，并求得**攻击方无人机的滞留时间总和为 4.7h**。第二步优化是将没有配备雷达站的其它所有目标点在最短的时间内打击掉。结合最近邻贪心算法和基于协同攻击的覆盖法，给出了**打击剩余所有目标的 FY-3 型无人机调度方案（见文内表 9、表 11）**。

问题四中，基于防御方部署远程搜索雷达的情形，提出安排巡检待命无人机的方案。理论计算发现，**巡检待命的无人机必须携带 D-1 型炸弹**。同时针对远程雷达的两类开机时机，分别**给出了巡检待命无人机的调度方案（见文内 7.2.2）**。

问题五中，首先对建模用到的 5 种算法进行了复杂度分析，然后从侦察型无人机**加载载荷的拍摄距离和引导距离**、通信型无人机的**通信距离**、攻击型无人机**携带炸弹的能力和炸弹性能**、**续航能力**等方面出发，对提升无人机作战能力的技术参数进行了分析。

题 目　军事行动避空侦察的时机和路径选择

摘　要：

本文围绕军事行动的避空侦察与路径选择问题，基于地球自转运行状态参数、侦察卫星轨道运行状态参数，结合观测站对侦察卫星的观测数据以及新疆地区城市交通路线及延伸数据，分别对卫星过顶情况、观测站监测卫星情况进行预测，并对根数未知情况下的卫星运行情况进行深入分析，在此基础上，结合新疆城市交通数据建立军队最优路径模型，最后对单卫星与组合卫星条件下的军队在特定区域的规避策略进行了探索与分析。

针对军事行动避空侦察的实际和路径选择问题，本文围绕三个问题建立了合适的优化数学模型，并进行了合理性分析、编程、计算与检验，最后得到了卫星星下点运行轨迹经纬度模型、地面观测站观测范围模型、运行卫星侦查范围模型、根数未知的卫星状态预测模型、军事行动最优路径规划模型（目标函数与约束条件）、单个卫星侦察规避模型以及组合卫星侦察规避模型。

模型Ⅰ：卫星星下点运行轨迹经纬度模型

以经纬度为坐标参量建立空间坐标系，利用根数-卫星轨道变换分析卫星运行轨迹与时间的关系，判断卫星与地球的相对运动方式，列出卫星星下点轨迹-时间函数，以此建立卫星星下点运行轨迹经纬度模型。

模型Ⅱ：地面观测站观测范围模型与运行卫星侦查范围模型

根据卫星侦察目标的区域范围，结合卫星侦察幅宽、与时间状态对应的星下点坐标与运行方向，建立运行卫星侦查范围模型，并判断相应时刻卫星是否过顶；根据地面观测站的仰角区间，结合观测站的位置坐标、与时间状态对应的卫星星下点坐标，建立地面观测站观测范围模型，并判断相应时刻地面观测站是否可以观测到卫星。

模型Ⅲ：根数未知的卫星状态预测模型

通过地面观测站的观测结果预测卫星的根数，进而利用星下点轨迹模型与观测范围与侦查范围对未来观测情况进行预测，建立根数未知的卫星状态预测模型，并对观察次数对预报精度的影响进行分析。

模型Ⅳ：军事行动最优路径规划模型

将实际条件下的城市与公路转化为图论中的节点与边，将城市间实际距离转化为边的有效长度。找出所在目标之间有效路径，根据公路限速、最大行驶时间、最少休息时间的相关约束，列出城市节点-星下点轨迹位置关系约束，并以目标城市间的最短时间为目标，建立军事行动最优路径规划模型，列出最终的目标函数与约束条件，同时选择相关最短路径算法进行求解与分析。

模型Ⅴ：单卫星与组合卫星侦察规避模型

基于移动发射装置在指定区域的运动方式，结合卫星侦察、目标区域大小与形状、路网状况对军队规避结果产生的效果与影响，建立单卫星（组合卫星）侦察规避模型，结合概率论，列出所有目标影响因素并对其进行量化与归一，以影响因子为参数列出军队规避卫星的概率函数模型，并通过 Dijkstra 的改进 A^*算法进行模型的求解与结果分析。

最后，本文对相关模型的优缺点进行了评价与改进，并进行了推广。

① 问题重述

- 要简单地说明问题的情景，即要说清事情的来龙去脉。
- 列出必要数据，提出要解决的问题，并给出研究对象的关键信息的内容，它的目的在于使读者对要解决的问题有一个印象。

问题的提出，不必提供问题的每个细节。提出问题与摘要所包含内容并不相同。

问题重述

- 避免：问题重述变成重抄题目
- 应建立在对问题的理解、资料查阅等基础上的重述

② 模型假设

- 根据评阅原则，基本假设的合理性很重要，根据题目中条件和要求作出假设
- 关键性(本质性）假设不能缺
- 假设要切合问题本身
- 假设要规范、精练（3-5条），有些假设可以在正文中给出

- 模型假设是应该细致地分析实际问题，从大量的变量中筛选出最能表现问题本质的变量，并简化它们的关系。

✓论文中的假设要以严格、确切的数学语言和数学符号来表达，使读者不致产生任何曲解。数学符号要规范。

✓所提出的假设确实是建立数学模型所必需的，与建立模型无关的假设只会扰乱思考。

✓ 假设应验证其合理性。假设的合理性可以从分析问题过程中得出，例如从问题的性质出发做出合乎常识的假设；或者由观察所给数据的图像，得到变量的函数形式；也可以参考其他资料由类推得到。对于后者应指出参考文献的相关内容。

3.1 模型的假设

（1）假设地球为一个规则的球体。
（2）由于日地距离远大于地球半径，所以假设太阳光线为平行光。
（3）假设地球上某地的水平地面是地球球面上过该地的切面。
（4）假设不考虑太阳光线穿过大气层时所发生的折射。
（5）假设一天中太阳直射点的纬度不变。
（6）假设不考虑太阳的视面角、高山阻挡、海拔高度等因素的影响。
（7）假设不考虑阴天没有阳光的情况。

三、 模型假设

1．假设城市中的黑车现象对居民出行没有造成影响；
2．假设所研究的城市没有发生严重的自然灾害和社会动荡；
3．假设所研究的城市政府对出租车行业的政策基本不变；
4．假设司机和乘客都是为自身利益考虑，即经济人假设；
5．假设参考文献中的数据来源可靠，真实可信。

③ 符号说明

公式符号在Mathtype中输入，注意符号的选取

【通用、简洁、易记，避免过于复杂的记号】

问题一符号系统

符号	意义	单位
α	直杆所在地纬度值	度
β	太阳直射点的纬度	度
θ	A、B 两地经度差	度
φ	太阳光线与直杆的夹角	度
h	直杆长度	米
L	直杆影长	米
t	地方时	时
t_0	北京时间	时

④ 模型建立与求解

- 通过一定的数学方法，抽象而确切地表达变量之间的关系，顺利地建立方程组或归纳为其他形式的数学问题。
- 基本模型：
  首先要有数学模型：数学表达、方案等
  基本模型，要求完整、简明、正确
- 简化模型
  要明确说明：简化思想、依据【基于分析】
  简化后模型，尽可能完整给出
  模型要实用、有效、以有效解决问题为原则
- 避免模型平行罗列（建立平行模型的必要性）

- 鼓励创新，但要切合实际，不要离题、标新立异

创新可出现在

- 建模中，模型本身（简化的好方法、好策略等）
- 模型求解中（如算法：可行性、规模）
- 结果表示、分析、检验，模型检验
- 推广部分（模型、算法、问题），恰到好处

在问题分析、建模推导过程中，需要注意的问题

- 分析：中肯、确切、有依据
- 术语：专业、内行（忌术语不明确、表述前后混乱、歧义）
- 表述：简明，关键步骤和式子要列出（简单明了）
- 原理：正确（有理论依据）
- 注意引用

模型建立与求解

- 需要建立数学命题时，命题叙述规范，论证严密（通过定义、定理表达和呈现）
- 需要说明计算方法或算法的原理、思想、依据、步骤（如算法流程）。若采用现有软件，说明软件平台，计算过程中，中间结果呈现要适当（一定要突出重点）

- 题目中要求回答的问题、数值结果、结论，需一一列出
- 结果表示：要集中、直观、凸显，便于比较分析（表现形式可以多样化）
- 必要时对问题解答，作定性或定量分析和讨论，最后结论要明确
- 最终数值结果的正确性或合理性

⑤ 模型检验

始于现实世界并终于现实世界

数学建模工作

最终要得到现实问题的解答

求出模型的数学解以后，必须对解的意义进行分析、检验

模型检验

- 检验模型的参数和模型假设的合理性
- 使用相同的数据产生结论并证实自己

5.5 模型验证

为了验证该模型的正确性，我们进行了实地测量。

取 40 厘米长的直杆，于 14:30 至 15:30 在现居住地（E113，N30）进行了影长的坐标采样，得到了相关的数据，数据见附录。

利用模型二对此实测数据进行求解，得出的结果为：E115，N25

模型验证的结论：

（1）和实际的地点存在出入，但是误差相对较小。

（2）误差来源：未考虑太阳折射的误差、拟合曲线的误差，实地测量的误差。

（3）改进算法可使误差减小。

⑥ 模型评价

- 对数值结果或模拟结果进行必要的检验。结果不正确、不合理、或误差较大时，分析原因，对算法或模型进行修正、改进
- 提出一些新的思路，使问题更精确、也使模型得到进一步完善（注意层次化）
- 考虑是否需要列出多组数据（参考文献数据)并对数据进行比较、分析，为各种方案的提出提供依据
- 优势要突出，缺点不回避。改变原题要求，重新建模可在此做。推广或改进方向时，不要卖弄数学等专业术语，避免画蛇添足（在写作上，对不足描述要中肯、不能自我全盘否定)

模型评价

8. 模型的优缺点及改进

8.1 模型优缺点

优点：

1、 设计的多层优化搜索算法可实现性高，能够满足用户的要求

2、 利用极坐标坐标变换很好的消除了二维的直角坐标的取向性

3、 将模型三转换为优化模型，并且利用遗传算法进行求解。

缺点：

1、 模型二算法虽然使用，但是比较复杂，且最优点可能掉进海里；

2、 模型三的优化模型在求解上可能陷入局部最优解；

3、 模型四比较复杂，有多个过程，且转换坐标可能不是很好符合实际。

8.2 模型的改进

可以设计一种可实现的智能算法，防止算法得到的优化解陷入局部最优解。

参考文献（不编序号）

- 注意参考文献的引用（规范、统一、时效，避免为引用而引用）
- 在引用参考文献时，杜绝抄袭

◆ 书籍的表述方式为：

[编号] 作者，书名，出版地：出版社，出版年

◆ 期刊杂志论文的表述方式为：

[编号] 作者，论文名，杂志名，出版年，卷期号：起止页码

◆ 网上资源的表述方式为：

[编号] 作者，资源标题，网址，访问时间（年月日）

附录（不编序号）

- 为了避免正文部分杂乱和突出主题，详细的结果，详细的数据表格，可在此列出
- 主要结果数据，应在正文中列出，根据需要，有些数据结果可以适当重复
- 主要的程序 （MATLAB等程序）

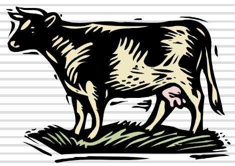
Thank you for your attendance!

Questions or Comments ?

附录：常用数学模型

- 1. 数学规划模型
- 2. 统计回归模型
- 3. 微分方程模型

1. 数学规划模型（奶制品的生产和加工）



问题

1桶牛奶 或 12h → $3kgA_1$ → 获利24元/kg

1桶牛奶 或 8h → $4kgA_2$ → 获利16元/kg

每天： 50桶牛奶 时间480h 至多加工$100kgA_1$

制订生产计划，使每天获利最大

- 35元可买到1桶牛奶，买吗？若买，每天最多买多少?
- 可聘用临时工人，付出的工资最多是每小时几元?
- A_1的获利增加到 30元/kg，应否改变生产计划?

基本模型

1桶牛奶 或 12h → $3kgA_1$ → 获利24元/kg

1桶牛奶 或 8h → $4kgA_2$ → 获利16元/kg

每天　50桶牛奶　时间480h　　至多加工$100kgA_1$

决策变量　x_1桶牛奶生产A_1　　x_2桶牛奶生产A_2

目标函数　获利 $24\times 3x_1$　　获利 $16\times 4\,x_2$

每天获利　$\max\ z = 72x_1 + 64x_2$

约束条件

原料供应　$x_1 + x_2 \le 50$

劳动时间　$12x_1 + 8x_2 \le 480$

加工能力　$3x_1 \le 100$

非负约束　$x_1, x_2 \ge 0$

线性规划模型(LP)

	模型分析与假设	线性规划模型
比例性	x_i对目标函数的“贡献”与x_i取值成正比	A_1,A_2每千克的获利是与各自产量无关的常数
	x_i对约束条件的“贡献”与x_i取值成正比	每桶牛奶加工A_1,A_2的数量, 时间是与各自产量无关的常数
可加性	x_i对目标函数的“贡献”与x_j取值无关	A_1,A_2每千克的获利是与相互产量无关的常数
	x_i对约束条件的“贡献”与x_j取值无关	每桶牛奶加工A_1,A_2的数量,时间是与相互产量无关的常数
连续性	x_i取值连续	加工A_1,A_2的牛奶桶数是实数

模型求解　图解法

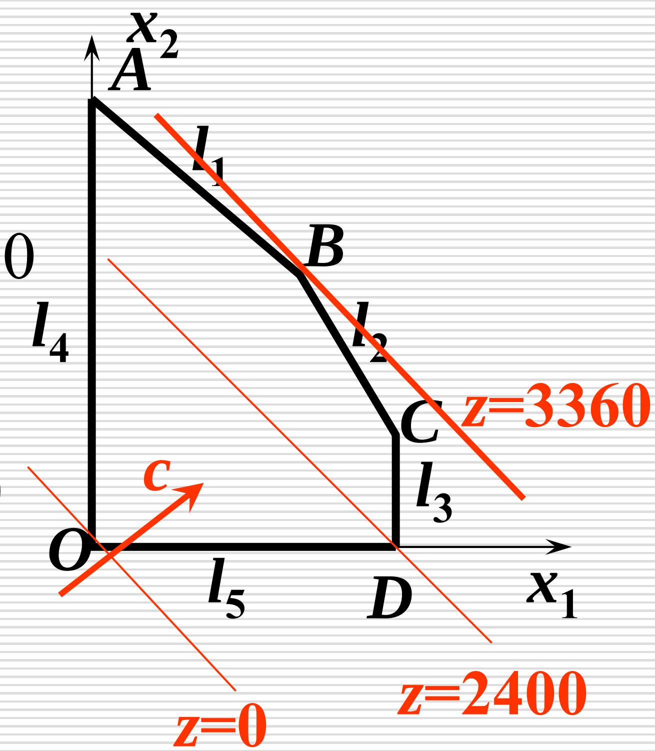
约束条件

$x_1 + x_2 \le 50 \Rightarrow l_1: x_1 + x_2 = 50$

$12x_1 + 8x_2 \le 480 \Rightarrow l_2: 12x_1 + 8x_2 = 480$

$3x_1 \le 100 \Rightarrow l_3: 3x_1 = 100$

$x_1, x_2 \ge 0 \Rightarrow l_4: x_1 = 0, l_5: x_2 = 0$



目标函数

$\max \ z = 72x_1 + 64x_2$

z=*c* (常数) ~等值线

在*B*(20,30)点得到最优解.

目标函数和约束条件是线性函数

可行域为直线段围成的凸多边形

目标函数的等值线为直线

最优解一定在凸多边形的某个顶点取得.

模型求解　　软件实现　　LINGO

```
model:
max = 72*x1+64*x2;
[milk]   x1 + x2<50;
[time]
12*x1+8*x2<480;
[cpct]   3*x1<100;
end
```

Global optimal solution found.

Objective value: 3360.000

Total solver iterations: 2

Variable	Value	Reduced Cost
X1	20.00000	0.000000
X2	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	3360.000	1.000000
MILK	0.000000	48.00000
TIME	0.000000	2.000000
CPCT	40.00000	0.000000

20桶牛奶生产A_1, 30桶生产A_2，利润3360元.

结果解释

```
model:
max = 72*x1+64*x2;
[milk]   x1 + x2<50;
[time]
12*x1+8*x2<480;
[cpct]   3*x1<100;
end
```

Global optimal solution found.

Objective value: 3360.000

Total solver iterations: 2

Variable	Value	Reduced Cost
X1	20.00000	0.000000
X2	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	3360.000	1.000000
MILK	0.000000	48.00000
TIME	0.000000	2.000000
CPCT	40.00000	0.000000

三种资源

原料无剩余 ←

时间无剩余 ←

加工能力剩余40 ←

"资源" 剩余为零的约束为紧约束（有效约束）

Global optimal solution found.

Objective value: 3360.000

Total solver iterations: 2

Variable	Value	Reduced Cost
X1	20.00000	0.000000
X2	30.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	3360.000	1.000000
MILK	0.000000	48.00000
TIME	0.000000	2.000000
CPCT	40.00000	0.000000

结果解释

最优解下“资源”增加1单位时“效益”的增量

影子价格

原料增加1单位, 利润增长48

时间增加1单位, 利润增长2

加工能力增长不影响利润

- 35元可买到1桶牛奶，要买吗? 35 <48, 应该买！
- 聘用临时工人付出的工资最多每小时几元? 2元！

敏感性分析 (“LINGO|Ranges”)

最优解不变时目标函数系数允许变化范围

(约束条件不变)

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	72.00000	24.00000	8.000000
X2	64.00000	8.000000	16.00000

x_1系数范围(64,96)

x_2系数范围(48,72)

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
MILK	50.00000	10.00000	6.666667
TIME	480.0000	53.33333	80.00000
CPCT	100.0000	INFINITY	40.00000

x_1系数由24 ×3=72增加为30×3=90，在允许范围内

- A_1获利增加到 30元/kg，应否改变生产计划?

不变！

结果解释 影子价格有意义时约束右端的允许变化范围

Ranges in which the basis is unchanged: (目标函数不变)

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	72.00000	24.00000	8.000000
X2	64.00000	8.000000	16.00000

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
MILK	50.00000	10.00000	6.666667
TIME	480.0000	53.33333	80.00000
CPCT	100.0000	INFINITY	40.00000

原料最多增加10

时间最多增加53

充分条件！

- 35元可买到1桶牛奶, 每天最多买多少?

最多买10桶!

2. 统计回归模型（牙膏的销售量）

问题

建立牙膏销售量与价格、广告投入之间的模型；

预测在不同价格和广告费用下的牙膏销售量.

收集了30个销售周期本公司牙膏销售量、价格、广告费用，及同期其他厂家同类牙膏的平均售价 .

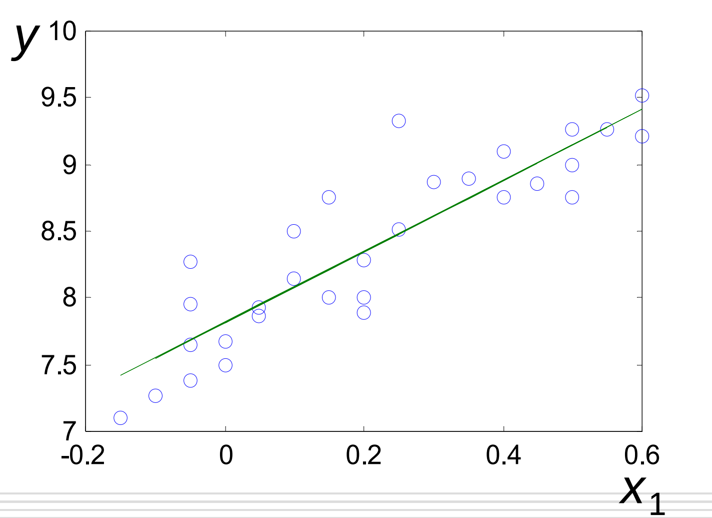
销售周期	本公司价格(元)	其他厂家价格(元)	广告费用(百万元)	价格差（元）	销售量(百万支)
1	3.85	3.80	5.50	-0.05	7.38
2	3.75	4.00	6.75	0.25	8.51
…	…	…	…	…	…
29	3.80	3.85	5.80	0.05	7.93
30	3.70	4.25	6.80	0.55	9.26

基本模型

y ~公司牙膏销售量

厂家与本公司 x_1 ~其他价格差

x_2 ~公司广告费用



$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_2^2+\varepsilon$$

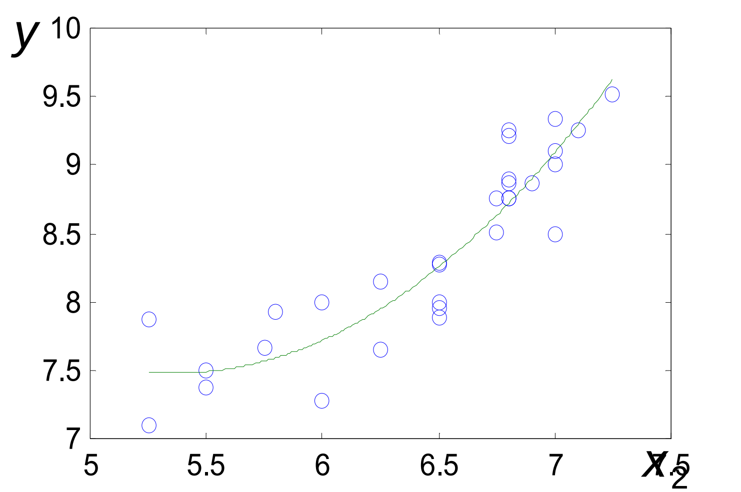
$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\varepsilon$$

y ~被解释变量（因变量）

x_1, x_2 ~解释变量(回归变量)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ~回归系数

ε~随机误差（均值为零的正态分布随机变量）



$$y=\beta_0+\beta_1x_2+\beta_2x_2^2+\varepsilon$$

模型求解 **MATLAB 统计工具箱**

$$y=\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\beta_3 x_2^2+\varepsilon$$ 由数据 y,x_1,x_2 估计 β

```
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y,x,alpha)
```

输入

y~n维数据向量

x= $[1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_2^2]$~$n\times 4$数据矩阵,第1列为全1向量

alpha(置信水平,0.05)

输出

b~β的估计值

bint~b的置信区间

r ~残差向量y-xb

rint~r的置信区间

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282 28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829 1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989 0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379 0.6594]

$R^2=0.9054$ $F=82.9409$ $p<0.0001$ $s^2=0.0490$

Stats~检验统计量 R^2, F, p, s^2

结果分析 $y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_2^2+\varepsilon$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282 28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829 1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989 0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379 0.6594]
$R^2=0.9054$ $F=82.9409$ $p<0.0001$ $s^2=0.0490$		

y的90.54%可由模型确定　F值远超过F检验的临界值

p值远小于α=0.05

模型从整体上看成立

β_2的置信区间包含零点(右端点距零点很近)

x_2对因变量y 的影响不太显著

x_2^2项显著

可将x_2保留在模型中

销售量预测 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2$

价格差x_1=其他厂家价格x_3-本公司价格

估计x_3 调整x_4 ⇨ 控制x_1 ⇨ 通过x_1，x_2预测y

控制价格差x_1=0.2元，投入广告费x_2=6.5百万元

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2=8.2933$$ (百万支)

销售量预测区间为 [7.8230，8.7636]（置信度95%）

上限用作库存管理的目标值 下限用来把握公司的现金流

若估计x_3=3.9，设定x_4=3.7，则可以95%的把握知道销售额在 7.8230×3.7≈ 29（百万元）以上

模型改进

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \varepsilon$$

x_1和x_2对y的影响独立

参数	参数估计值	置信区间
β_0	17.3244	[5.7282 28.9206]
β_1	1.3070	[0.6829 1.9311]
β_2	-3.6956	[-7.4989 0.1077]
β_3	0.3486	[0.0379 0.6594]

$R^2=0.9054$ $F=82.9409$ $p<0.0001$ $s^2=0.0426$

x_1和x_2对y的影响有交互作用

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_1 x_2 + \varepsilon$$

参数	参数估计值	置信区间
β_0	29.1133	[13.7013 44.5252]
β_1	11.1342	[1.9778 20.2906]
β_2	-7.6080	[-12.6932 -2.5228]
β_3	0.6712	[0.2538 1.0887]
β_4	-1.4777	[-2.8518 -0.1037]

$R^2=0.9209$ $F=72.7771$ $p<0.0001$ $s^2=0.0490$

两模型销售量预测比较

控制价格差 $x_1=0.2$ 元，投入广告费 $x_2=6.5$ 百万元

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2$$

预测值 $\hat{y}=8.2933$ 预测区间 [7.8230,8.7636]

$$\hat{y}=\beta_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_2^2+\hat{\beta}_4x_1x_2$$

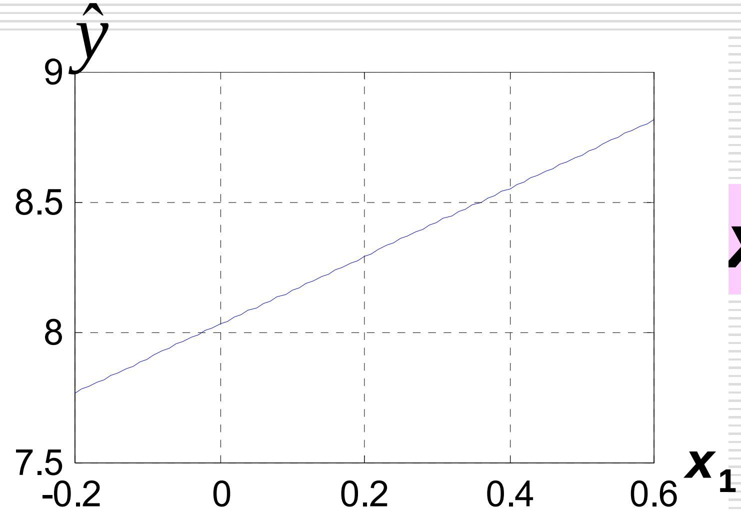
预测值 $\hat{y}=8.3272$ 预测区间 [7.8953,8.7592]

$\hat{y}$ 略有增加

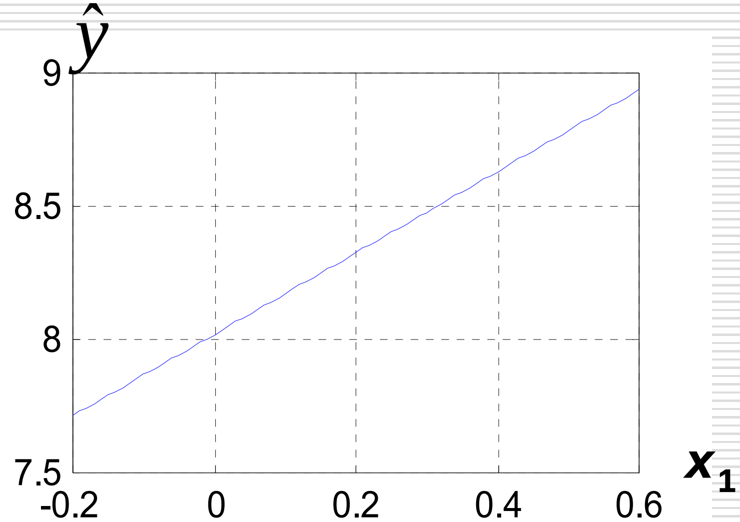
预测区间长度更短

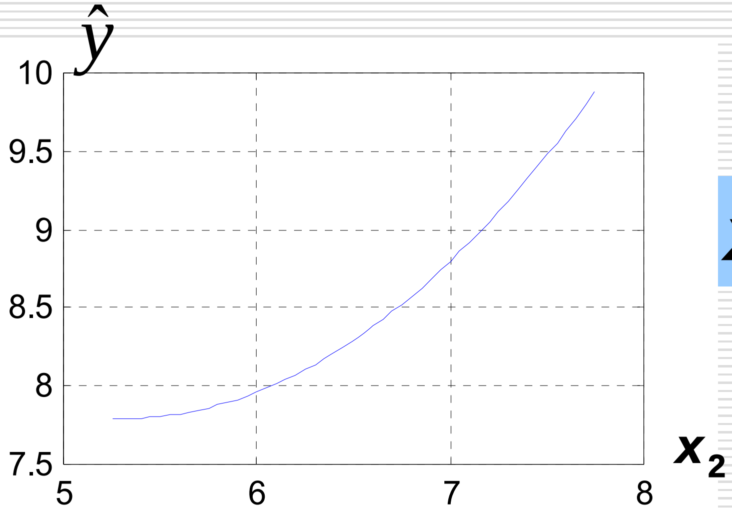
两模型$\hat{y}$ 与x_1,x_2关系的比较

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 \qquad \hat{y} = \beta_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 + \hat{\beta}_4 x_1 x_2$$

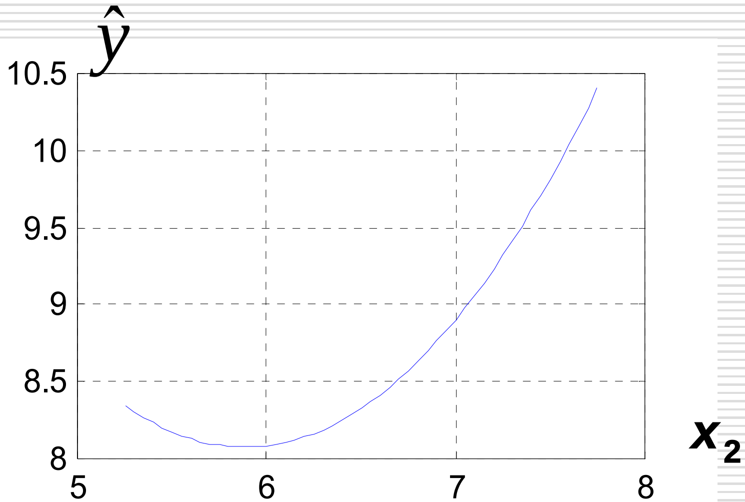


$x_2 = 6.5$





$x_1 = 0.2$



交互作用影响的讨论

$$\hat{y} = \beta_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_2^2 + \hat{\beta}_4 x_1 x_2$$

价格差 $x_1 = 0.1$　$\hat{y}\big|_{x_1=0.1} = 30.2267 - 7.7558\,x_2 + 0.6712\,x_2^2$

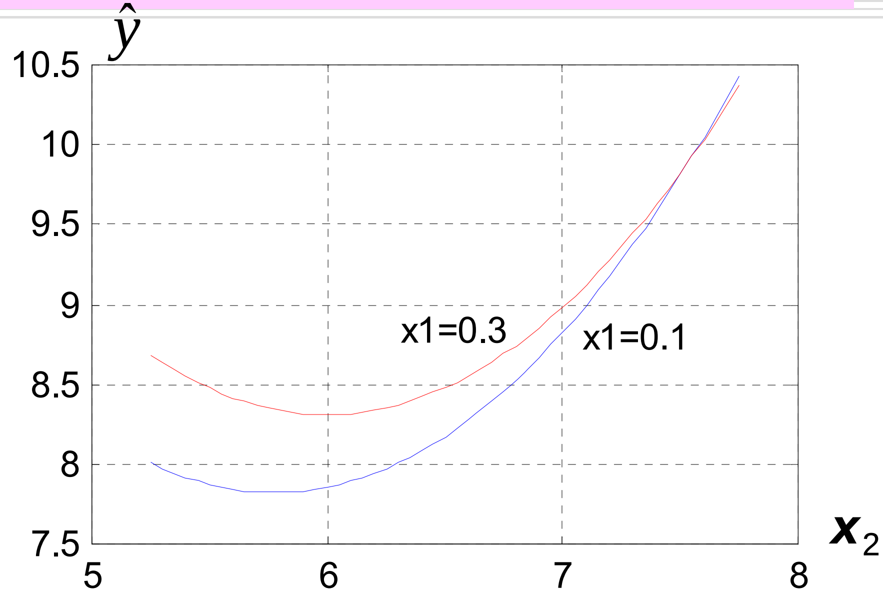
价格差 $x_1 = 0.3$　$\hat{y}\big|_{x_1=0.3} = 32.4535 - 8.0513\,x_2 + 0.6712\,x_2^2$

$x_2 < 7.5357 \Rightarrow \hat{y}\big|_{x_1=0.3} > \hat{y}\big|_{x_1=0.1}$

⇨ 价格优势会使销售量增加

加大广告投入使销售量增加

（x_2大于6百万元）

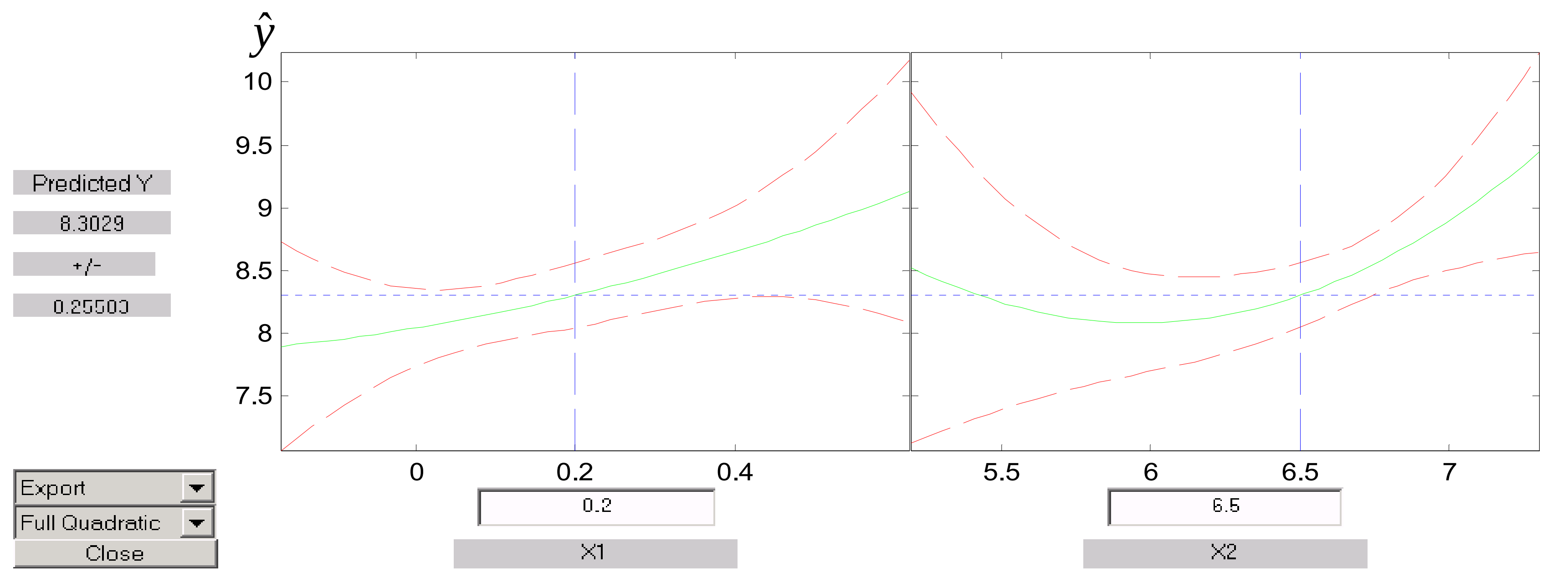


价格差较小时增加的速率更大 ⇨ 价格差较小时更需要靠广告来吸引顾客的眼球

完全二次多项式模型

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_2^2 + \varepsilon$$

MATLAB中有命令rstool直接求解



从输出 **Export** 可得 $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5)$

鼠标移动十字线(或下方窗口输入)可改变$\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$,
左边窗口显示预测值 $\hat{y}$ 及预测区间

牙膏的销售量

建立统计回归模型的基本步骤

- 根据已知数据从常识和经验分析，辅之以作图，决定回归变量及函数形式(先取尽量简单的形式).
- 用软件(如MATLAB统计工具箱)求解.
- 对结果作统计分析: R^2,F, p, s^2是对模型整体的评价，回归系数置信区间是否含零点，用于检验回归变量对因变量的影响是否显著.
- 模型改进，如增添二次项、交互项等.
- 对因变量进行预测.

3. 传染病模型

传染病的极大危害(艾滋病、**SARS**、…)

背景与问题

- 描述传染病的传播过程.
- 分析受感染人数的变化规律.
- 预报传染病高潮到来的时刻.
- 预防传染病蔓延的手段.

基本方法

不是从医学角度分析各种传染病的特殊机理，而是按照传播过程的一般规律建立数学模型.

模型1 已感染人数 (病人) ***i*(*t*)**

假设 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模 $i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i \\ i(0)=i_0 \end{cases} \Rightarrow i(t)=i_0 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow t\to\infty \Rightarrow i\to\infty \ ?$$

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 ➡ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

模型2 区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1）总人数***N***不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$.

SI 模型

2）每个病人每天有效接触人数为λ，且使接触的健康人致病.

λ ~ 日接触率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

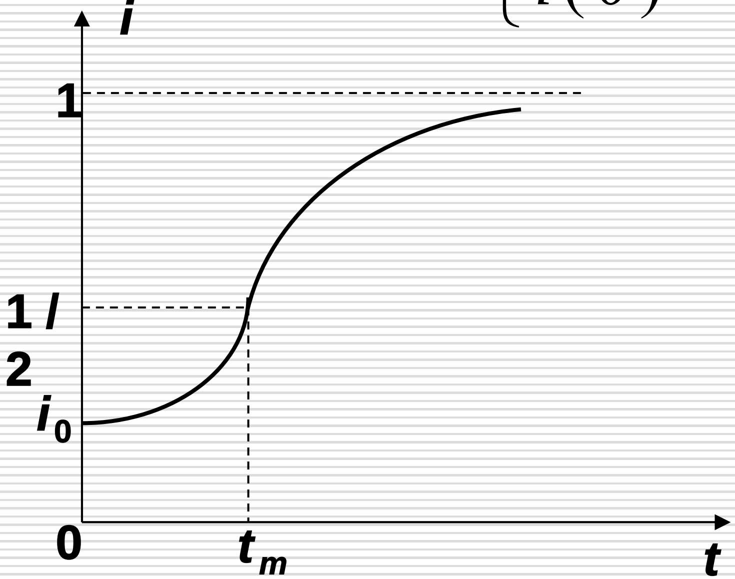
$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

⇨ Logistic 模型



$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1} \ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t = t_m$, di/dt 最大

t_m ~传染病高潮到来时刻

λ (日接触率)↓ → t_m↑

$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$?

病人可以治愈！

模型3 传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染. **SIS 模型**

增加假设 3）病人每天治愈的比例为μ μ ~日治愈率

建模 $$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda i(1-i)-\mu i & =-\lambda i[i-(1-\dfrac{1}{\sigma})] \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

$\sigma=\lambda/\mu$

λ ~ 日接触率

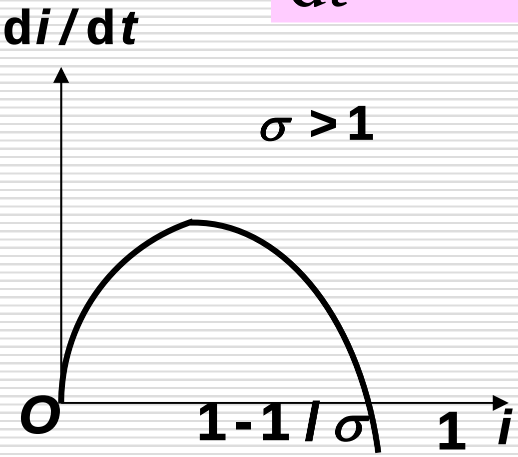
$1/\mu$ ~感染期

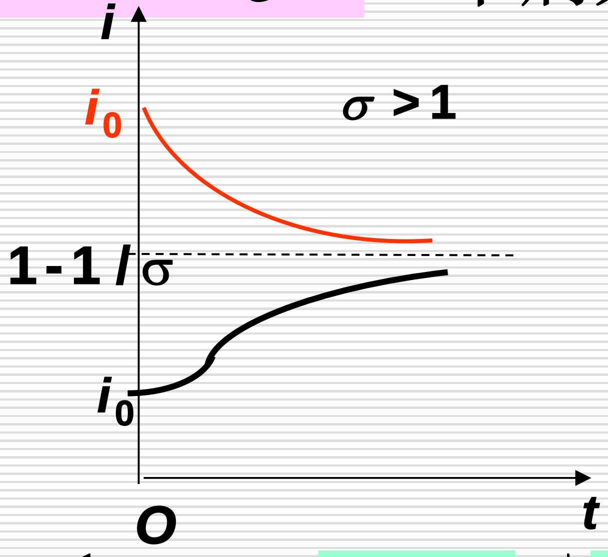
σ ~ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为接触数.

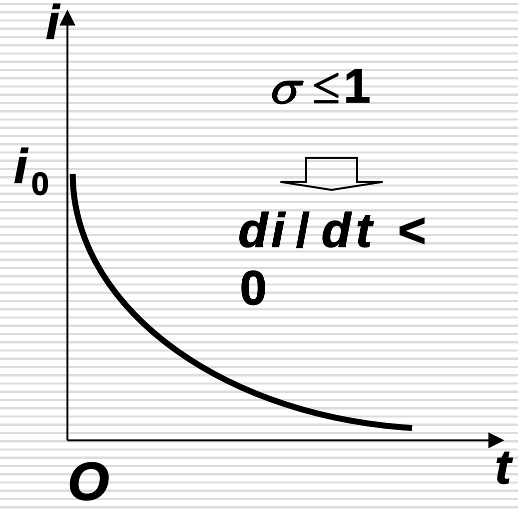
模型3

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$

接触数σ (感染期内每个病人的有效接触人数)







$$i(\infty)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sigma}, & \sigma>1\\ 0, & \sigma\le 1\end{cases}$$

$\sigma\le 1$ ⇨ $i(t)$单调下降

感染期内有效接触使健康者感染的人数不超过原有的病人数

$\sigma>1,\ i_0<1-1/\sigma$

⇨ $i(t)$按S形曲线增长

接触数σ =1 ~ 阈值

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4 传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称**移出者**.

SIR模型

假设

1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$.

2）病人的日接触率λ，日治愈率μ，
接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程.

模型4　　SIR模型

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\lambda si-\mu i\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\lambda si\\[2mm]i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

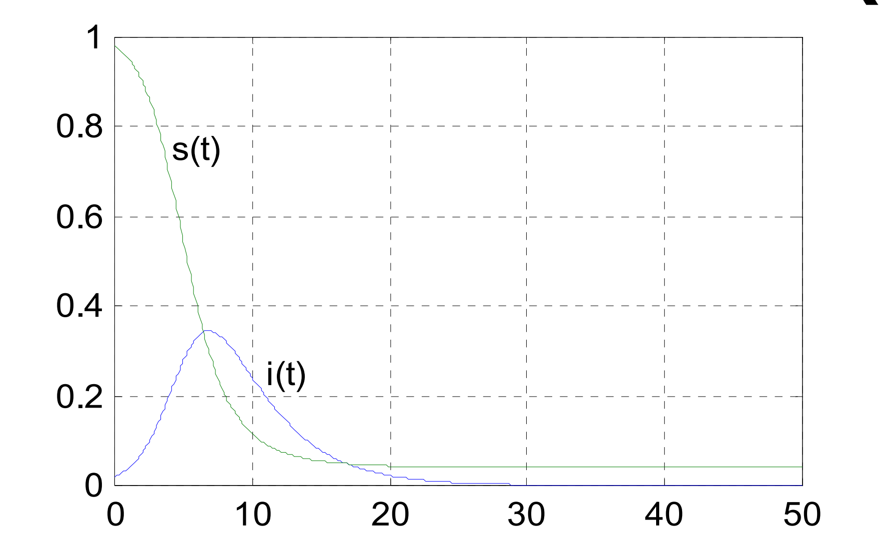
先做数值计算，再在相平面上研究解析解性质

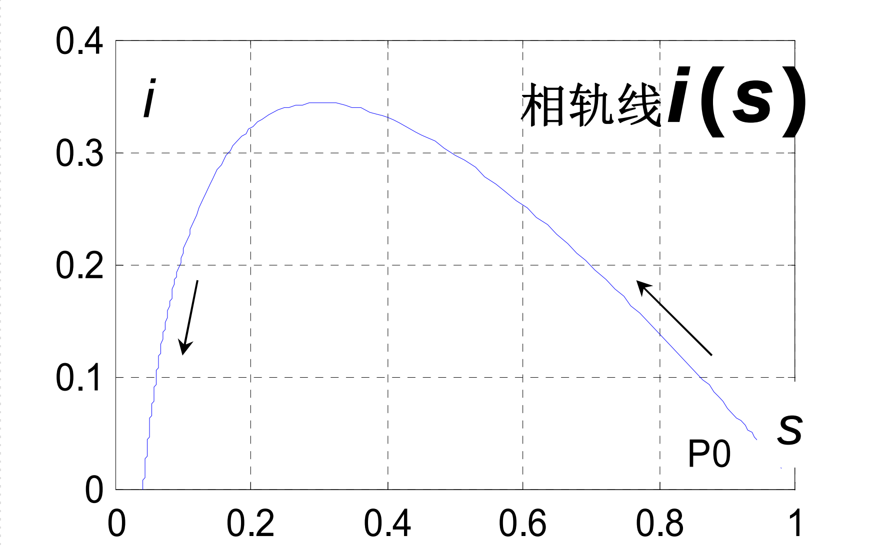
$i_0+s_0\approx 1$ **(通常$r(0)=r_0$很小)**

模型4　SIR模型的数值解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \lambda si - \mu i,\ i(0) = i_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\lambda si,\ \ s(0) = s_0 \end{cases}$$

设λ=1, μ=0.3, i_0=0.02, s_0=0.98, 用MATLAB计算作图$i(t)$, $s(t)$及$i(s)$





$i(t)$从初值增长到最大； $t\to\infty$, $i\to 0$.

$s(t)$单调减； $t\to\infty$, $s\to 0.04$.

模型4　SIR模型的相轨线分析

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去**dt**

$\sigma = \lambda / \mu$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\Big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

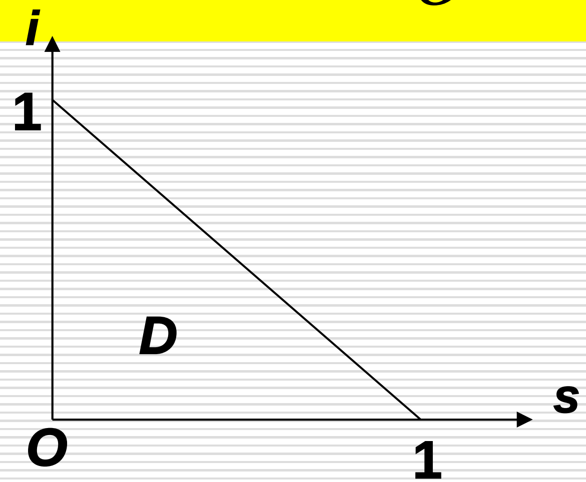
相轨线

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s,i) \mid s \ge 0,\ i \ge 0,\ s + i \le 1\}$$

在*D*内作相轨线 $i(s)$ 的图形，进行分析

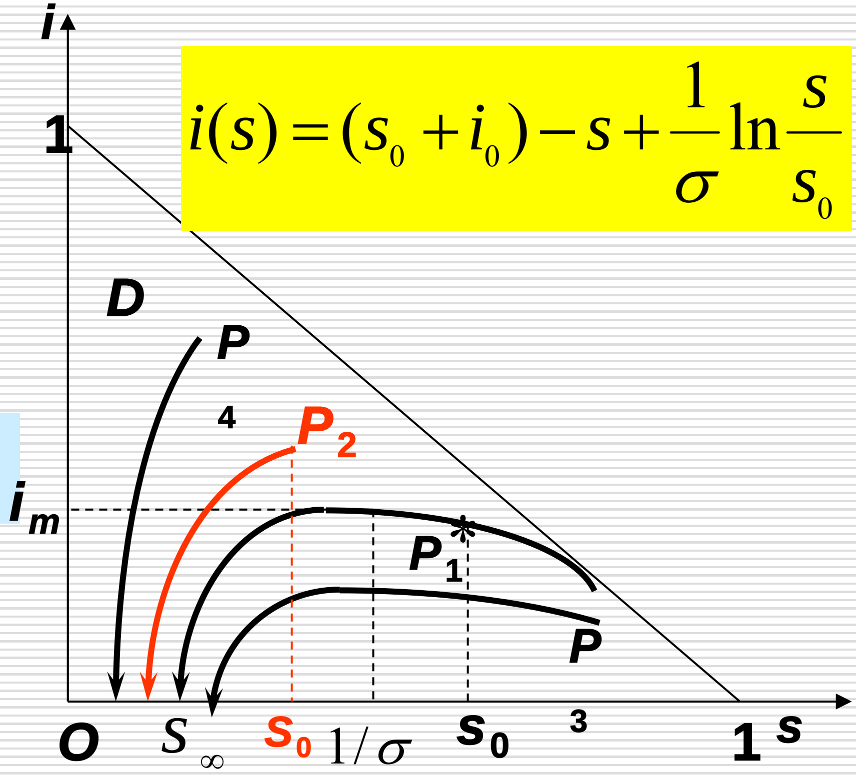


模型4　相轨线 $i(s)$ 及其分析

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$



$s(t)$单调减→相轨线的方向

$$s = 1/\sigma,\ i = i_m \qquad t \to \infty,\ i \to 0$$

$$s_\infty \text{满足} \quad s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

P_1: $s_0 > 1/\sigma \to i(t)$先升后降至0 ⇨ 传染病蔓延

P_2: $s_0 < 1/\sigma \to i(t)$单调降至0 ⇨ 传染病不蔓延

$1/\sigma$ ~ 阈值

模型4 预防传染病蔓延的手段 SIR模型

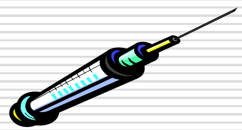
传染病不蔓延的条件——$s_0 < 1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ ⇨ 降低 $\sigma\,(=\lambda/\mu)$ ⇨ $\lambda\downarrow$, $\mu\uparrow$

λ (日接触率)↓ ⇒ 卫生水平↑

μ(日治愈率)↑ ⇒ 医疗水平↑

- 降低 s_0 ⇨ 提高 r_0 ⇨ 群体免疫



$$s_0 + i_0 + r_0 = 1$$

σ 的估计

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

忽略i_0 ⇨

$$\sigma = \frac{\ln s_0 - \ln s_\infty}{s_0 - s_\infty}$$

模型4　　预防传染病蔓延的手段

• 降低日接触率λ　• 提高日治愈率μ　• 提高移出比例r_0

以最终未感染比例s_∞和病人比例最大值i_m为度量指标.

λ	μ	$1/\sigma$	s_0	i_0	s_∞	i_∞
1	0.3	0.3	0.98	0.02	0.0398	0.3449
0.6	0.3	0.5	0.98	0.02	0.1965	0.1635
0.5	0.5	1.0	0.98	0.02	0.8122	0.0200
0.4	0.5	1.25	0.98	0.02	0.9172	0.0200
1	0.3	0.3	0.70	0.02	0.0840	0.1685
0.6	0.3	0.5	0.70	0.02	0.3056	0.0518
0.5	0.5	1.0	0.70	0.02	0.6528	0.0200
0.4	0.5	1.25	0.70	0.02	0.6755	0.0200

$\lambda\downarrow,\ \mu\uparrow \Rightarrow\ s_\infty\uparrow,\ i_m\downarrow$　$s_0\downarrow\ (r_0\uparrow) \Rightarrow\ s_\infty\uparrow,\ i_m\downarrow$

模型4　被传染人数的估计

SIR模型

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

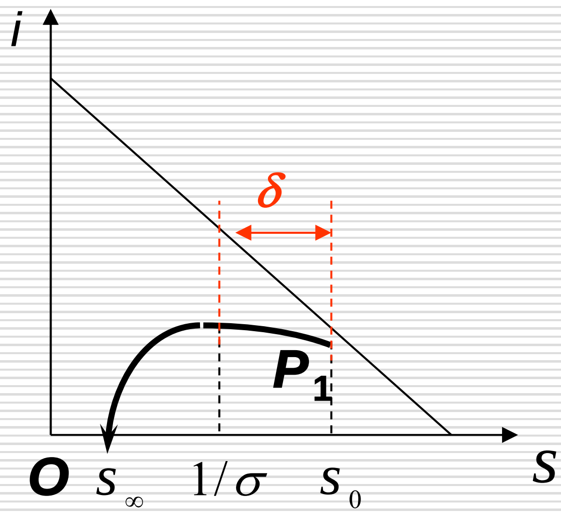
$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{\sigma}\ln\left(1 - \frac{x}{s_0}\right) \approx 0$$

$i_0 \cong 0,\ s_0 \cong 1$

$x \ll s_0$

$$\Rightarrow \quad x\left(1 - \frac{1}{s_0\sigma} - \frac{x}{2s_0^2\sigma}\right) \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad x \approx 2s_0\sigma\left(s_0 - \frac{1}{\sigma}\right)$$



$s_0 - 1/\sigma = \delta$

δ 小，$s_0\sigma \approx 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x \approx 2\delta}$$

提高阈值 $1/\sigma$ $\Rightarrow$ 降低被传染人数比例 x

传染病模型

模型1 → 模型2（SI）→ 模型3（SIS）

模型2（SI）→ 模型4（SIR）

区分病人和健康人

考虑治愈

模型3，4: 描述传播过程, 分析变化规律,

预报高潮时刻, 预防蔓延手段.

模型4: 数值计算与理论分析相结合.