Asia-pacific Journal of Multimedia Services Convergent with Art, Humanities, and Sociology
Vol.7, No.5, May (2017), pp. 13-31
http://dx.doi.org/10.14257/ajmahs.2017.05.08

지식공간론에 따른 초등학교 평면도형 영역의 지식 상태 분석

이종학1)

knowledge State Analysis of the Elementary School Plane Figure unit Using the Knowledge Space Theory

Jong-Hak Lee[1)]

요 약

수학 교과의 특징인 계통성은 수학적 내용과 개념들이 지닌 관련성과 위계적인 순서를 가리킨다. 교실 수업에서 계통성은 내용과 개념들의 관련성에 따른 위계적 순서를 제시함으로써 교사에게는 어떤 학습 요소나 개념을 먼저 지도해야 하는 지를 명확히 하며, 또한 학습자에게는 직면한 학습 내용에서 좀 더 수준 높은 개념과 기능을 수행하는데 필요한 유용한 정보를 제공한다. 최근 들어 학교 교과교육에서 수학 교과와 더불어 학문의 계통적인 특징이 뚜렷한 과학이나 컴퓨터 등의 교과에서는 지식의 관련성과 위계를 분석하고 표현하는 과학적·수리적 수단으로 지식공간론을 활용하고 있다. 이에 본 논문에서는 수학의 군론과 심리학적 이론을 활용해 개념들 간의 위계성과 이에 따른 학습자의 지식 상태를 분석하는 인지과학의 한 이론인 지식 공간론에 대해서 구체적으로 살펴보고, 이 지식공간론을 활용해 초등학교 평면도형 영역에서 넓이 단원의 위계 관계를 알아봄으로써 지식공간론의 수학교실 수업 활용에 대한 시사점을 제시하고자 한다.

핵심어 : 지식공간론, 지식 구조, 지식 상태, 계통성, 평면도형

Abstract

Systemicity which is a keynote of Mathematics means correlation of Mathematical content with concept and hierarchical sequence. When systemicity is suggested for a hierarchical sequence in classroom instruction, a teacher could make it clarify that which a concept or element in learning should be taught first. And for students, it gives information for a more sophisticated concept and function in their learning. Recently, Science or Computer subject which has systematic feature like Mathematic uses 'Knowledge Space Theory' to analyze relation and hierarchy of a concept.

In this research paper, it is examined closely that 'Knowledge Space Theory' which is a part of cognitive science for analyzing a hierarchy of concept and level of knowledge of users by using Group Theory. Futhermore, we suggest an insight about classroom instruction of 'Knowledge Space Theory' using a hierarchy of unit of area in the plane figure unit for Elementary school.

Received (February 28, 2017), Review Result (March 15, 2017)

Accepted (March 22, 2017), Published (May 31, 2017)

[1]42412 Dept. of Math Education, Daegu National Univ. of Education, Gungandaero 219, Daegu, Korea
email: mathro@dnue.ac.kr

*이 논문은 2016년도 교내학술연구비(RC2016008)의 지원으로 작성되었습니다.

ISSN: 2383-5281 AJMAHS

Keywords : Knowledge space, knowledge structure, knowledge state, Systemicity, Plane Figures

1. 서론

수학이 이미 완성된 불변의 체계가 아니라 새롭게 창조되고 기존에서 진화하는 발달적 측면을 지닌 실체라고 여긴다면, 발달의 단계에 따른 계통성의 성질에 의해 수학의 내용들은 질적이며 구조적인 차이인 위계를 지닌다고 할 수 있다. 이와 관련하여 Freudenthal은 확실성을 추구하는 정신적 활동인 수학은 상식적인 내용이 수학적 본질로 체계화·형식화되고 그 형식화된 대상은 다시 그 다음 수준의 상식적인 내용이 되는 과정을 되풀이하여 확장하는 학문적 체계로, 기본적으로 추상적인 '빈약한' 구조에서 특수한 '풍부한' 구조의 단계로 위계적으로 전개되는 특징을 지니고 있다고 말한다[1]. 대체로 수학에 내재된 위계나 구조 등의 학문적 특징은 수학이 지닌 계통성과 연관 지을 수 있다. 이때, 학문으로서 수학의 계통성은 어떤 기초적인 내용을 토대로 공통 요소가 있는 새로운 내용을 첨가하여 발전되고 통합된 새로운 내용을 구성해 나가는 것을 말한다. 일반적으로 수학은 공리와 정의를 기반으로 연역 추론에 의하여 이끈 정리를 증명함으로써 새로운 내용을 순차적으로 확장해 가는 과정에서 연역적 추론의 논리가 체계의 근간을 이루면서 타당한 논리적 계통성을 추구해 나간다. 그리고 이와 같은 학문으로서의 수학의 특징인 계통성은 다시 학교 수학의 측면에서는 학생들의 인지적 발달 단계와 수준에 따라 성취해야 할 내용 간의 관련성과 위계가 적절하고 실현가능한지를 고려하여 지도 내용으로서 수학 교과에 체계적으로 반영되고, 교사에 의해 가르쳐진 후에 학생들의 지식으로서 구조적으로 구성된다.

또한, 이렇게 학교 수학에서 교과 내용으로 반영되어 학생들에게 구성되는 계통성의 중요성은 학습할 내용에 대한 관련성과 위계가 직면한 학습 과제에서 좀 더 높은 단계의 학습을 성공적으로 수행하기 위한 필요조건이 된다는 것과, 그리고 학생들의 인지 구조가 내용에 따라 위계적으로 구성된다는 점에서 의미가 있는데, 대체로 학교 수학에서의 계통성은 논리적 추론에 의한 학문적 계통성을 의미하는 논리적 계통성과 학생들의 개념 발달 과정에서 나타나는 순서를 뜻하는 심리적 계통성으로 구분할 수 있다. 다시 말해 학교 수학의 효과적인 교수·학습을 위해서 교사는 내용으로서 수학의 논리적 계통성과 학습자로서 학생들이 구성하게 될 심리적 계통성을 적절하게 고려하여 수학 내용 지도를 위한 적절한 교수·학습 계획을 탐구하고 구안해야 한다. 즉, 학생들에게 계통적으로 쉬운 내용이 어려운 내용에 앞서 도입되어야 한다는 NCTM의 주장과 같이, 교사는 학습 내용이 학생들이 학습하기에 용이한 순서로 배열되어 있는지와 함께 수학의 논리적 체계에 따라 연결되고 위계적으로 구조화되어 있는지에 대한 충분한 검토가 필요하다[2].

일반적으로 교과의 학습 내용들이 논리적·심리적 계통성과 연결성에 의해 구조화된 경우에 내적 통합, 연결, 일치 등의 특징을 지닌다. 이때, 위계적으로 구조화된 수학 교과와 관련지어 내적 통합이란 풍부한 내용들이 위계적이고 순서적으로 연결된 것을 말한다. 대체로 내적으로 통합된 경우에 구조에서 기반을 이루는 내용들은 다른 여타의 내용들과 특수한 결합을 이루고 있으며, 이 결

합은 학습자의 인지구조 체계에서 개별적인 학습 내용들을 정보의 한 덩어리로 사고하고 처리하는 것을 가능하게 한다. 예를 들어 내적 통합이라는 관점에서 덧셈과 곱셈에 대한 학습 내용이 적절하게 구조화 되었다는 것은 덧셈과 곱셈의 관계가 분리된 구조가 아닌 유기적으로 결합되어 관련성과 위계를 지니고 있고, 인지 체계에서 각 연산을 의미 있게 통합적으로 수행할 수 있음을 말한다. 그리고 연결은 학교 수학에서 측정과 기하 내용이 유기적으로 관련을 맺고 있는 것과 같이 서로 다른 영역의 내용들이 결합된 정도를 의미하며, 일치는 학습 내용의 구조와 전문가의 지식 구조의 유사한 정도를 말하는 것이다.

학교 수학에서 교사는 학문으로서 수학이 갖추고 있는 구조화된 지식 구조를 명확히 분석하여 학생들에게 내적 통합, 연결, 일치의 속성을 지니는 지식 구조가 형성될 수 있도록 지도해야 하며, 형성된 인지 구조에 통합되도록 새롭게 결합된 수학적 내용들이 적절하게 연결될 수 있는 지도 방안을 구안해야 한다. 그런데 이는 지도할 내용과 관련지어 학교 수학의 계통성을 체계적으로 분석해 보는 활동에서 비롯된다고 할 수 있다. 학교 수학에서 다루는 내용들의 관련성, 위계적 순서, 구조를 함의하는 계통성에 대한 검토는 어떤 학습 요소나 개념을 먼저 지도해야 하는 지를 명확히 하며, 직면한 학습 내용에서 좀 더 수준 높은 개념과 기능을 수행하는데 필요한 유용한 정보를 제공하는 의미 있는 기초 자료를 산출할 수 있다. 이에 송미영과 김선희는 평가 문항을 활용하여 중학교 수학에서 내용과 인지 행동 간의 위계를 밝히는 실증적 연구를 수행한 바 있으며[2], 최근 들어서는 평가 문항의 결과를 토대로 피험자의 배경 지식 상태를 고려한 과학적 위계 분석 방법으로 지식 공간론이 과학과 컴퓨터, 수학 등의 교과에서 연구되고 있다[3-8]. 이 지식공간론은 논리적인 수학 이론을 기반으로 지식 상태와 지식 구조라는 개념을 통해 학습자의 지식 상태와 관련 지식의 위계를 과학적으로 분석할 수 있는 수리심리학 이론이다.

durva는 지능의 구조에 대해 일련의 인지 기능의 연속적 계열성을 지니고 있으므로 어떤 특별한 지식 체계와 연관된 기능의 습득도 위계적인 조직을 가지며, 따라서 낮은 단계의 기능은 높은 단계의 기능의 선수 학습요소가 되는 특징을 갖는다고 주장한다[8]. 따라서 수학 내용의 계통성 또는 위계 구조는 학생이 당면한 학습 과제에 도달하기 위해서 선수 학습으로 알고 있어야 할 내용이 무엇인지를 명확히 해 주는 장점이 있다. 즉, 수학 내용의 위계는 하위 내용과 상위 내용들 사이의 관련성과 순서를 제시해 줌으로써 학습 과제의 수행에 도움을 줄 수 있다. 일반적으로 어떤 학습 주제에 대한 위계나 학습 경로는 학습 내용에 의존하므로 대체로 교과 전문가가 내용을 분석하여 위계를 결정되거나[3], 또는 교사의 전문성과 오랜 경험으로 분석되어진다. 그렇지만 지식공간론은 학생들이 수행한 평가 문항에 수학 내용에 대한 정보도 포함되어 있다는 가정 하에 평가 결과의 수학적 분석을 통해 평가 내용의 위계와 학생들의 지식 상태를 밝힌다. 다시 말해, 지식 공간론은 임의의 문제를 해결할 수 있는 배경 지식은 어떤 체계를 이루고 있으며, 따라서 평가에서 피험자의 정답 문항은 몇 가지 유형으로 분류할 수 있다고 가정한다. 즉, 평가 문항과 결합된 지식들이 어떤 체계로 위계적인 구조를 지니고 있다면 문항에 대한 피험자의 응답에서도 그 관련성과 구조가 드러날 것이라고 여긴다.

ISSN: 2383-5281 AJMAHS

이를 통해 지식 공간론은 피험자의 평가 결과를 기반으로 하여 기본 지식 선별, 지식의 위계 분석, 학생의 지식 상태 및 지식 구조 탐색, 학습 계획 및 경로의 구성 등의 측면으로 평가 문항과 관련하는 지식의 위계성과 구조를 분석하는 것이 가능함을 집합, 순서 관계, 거리, 군 등의 수학적인 사실을 활용하여 논리적으로 밝히고 있다. 그렇지만 현재까지 이 지식공간론에 대한 연구는 이론적인 전개가 주를 이루고, 실제 적용과 관련해서는 수학과 같이 학문적 위계성이 뚜렷한 과학이나 컴퓨터 교과의 교과교육학에서 주로 연구되고 있는 실정이다. 이에 본 논문에서는 수학적 내용을 기반으로 지식 상태 및 지식 구조 등을 탐색하는 지식 공간론에 대해서 주요한 이론들을 구체적으로 살펴보고, 이를 초등수학 교과의 평가에 실제로 적용하여 평가 결과를 기반으로 초등학생들이 평면 도형의 둘레와 넓이 측정에 관련하여 구성하고 있는 지식의 위계 관계와 개별 학생들의 지식 상태를 지식공간론에 의해서 수학적·논리적으로 분석해 보고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 지식공간론

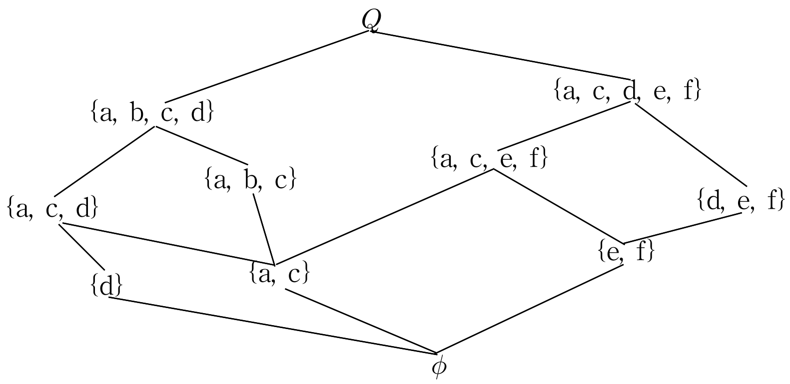
일반적으로 학교 평가의 주요한 목적 중의 하나는 학생들이 알고 있는 것과 모르는 것에 대한 구체적 정보를 제공하여 그들을 더 잘 이해하게 하고, 이를 기반으로 학교 수학 지도에서 의미 있는 의사결정을 내리는데 도움을 주기 위함이다. 평가로부터 의미 있는 추론을 이끌어내는 문항 반응 이론 중의 하나로 지식 공간론은 학생들의 문항 반응 여부에 의해서 평가 지식들의 위계성과 이에 따른 학습자의 지식 상태를 분석할 수 있다는 주장을 한다[3-4][9-11]. 즉, 지식 공간론에 따르면, 어떤 평가에서 피험자가 응답한 문항들의 집합은 각 문항이 내포한 개념에 대한 지식 정보를 나타내 주고 있으므로 이를 통해 평가 개념들의 위계를 밝힐 수 있으며, 나아가 학생이 구성한 현재의 지식 상태와 수준을 파악할 수 있다는 것이다.

이러한 이론적 근거를 전제로 지식 공간론은 단순히 정답 문항의 모임으로 치부되는 개개의 단편적인 문항의 정오(正誤) 자료에서 평가와 연관된 피험자의 지식 상태 전반에 대한 정보를 추론하는 방법을 수학적 사실들에 기반을 하여 논리적 전개와 합리적 체계로 정당화하고 있다. 이 지식 공간론은 1980년대 초에 Doignon과 Falmagne에 의해 제기된 이론으로, 이후 수리심리학의 한 분야로 연구되고 있다[3]. 최근 들어서도 계통성을 학문의 특징으로 하는 컴퓨터나 과학 교과에서 학습 내용의 위계 구조 및 교수·학습 경로와 관련하여 지식 공간론을 활용한 몇몇 연구들이 지속적으로 수행되고 있으며[3-8], 나아가 학생들 개개인이 구성한 지식 상태의 상대성 및 주관성을 밝히는데 효과적으로 응용될 수 있는 퍼지 지식공간론으로 연구 분야가 확장되고 있는 추세이다[12]. 이에 본 절에서는 수학적 사실을 기반으로 하여 지식공간론에서 주장하는 주요한 몇몇 이론적 근거들에 대해서 알아보고자 한다.

2.2 지식 구조

지식 공간론은 이론적 전개의 정당성과 논리의 타당성을 집합, 벡터 공간, 순서 관계 등의 수학적 사실들의 엄격한 적용을 통해 보장받고자 하는데, 기본적으로 지식공간론에서 다루는 직접적인 대상은 평가에서 수집 가능한 정보들을 내포하고 있는 평가 문항과 관련된 지식의 상태이다.

일반적으로 지식 공간론에서는 어떤 평가에서 평가 문항 전체의 모임을 집합 Q, 지식 상태를 K 할 때, 평가의 결과에서 도출되는 집합족 (Q,K)을 지식 구조(knowledge structure)로 약속한다. 그리고 이 지식 구조(Q,K)에서 공집합 ϕ는 모든 문항을 틀린 학생의 지식 상태를 말하고, 전체집합 Q는 문항을 모두 해결한 학생의 지식 상태를 나타내는데, 이때 지식 구조 K의 각 원소는 어떤 학생이 해결한 문항의 집합이면서 평가에 응시한 개별 학생의 지식 상태로 여긴다. 따라서 집합 Q의 부분집합들의 개수인 $2^{|Q|}$가 지식 상태의 최대 개수인데, 수학적으로 모든 평가에서 일반적인 지식 상태들의 모임은 공집합 ϕ와 전체집합 Q을 포함한 집합 Q의 부분집합들의 집합으로 표현될 수밖에 없다. 예를 들어, 어떤 평가 문항 전체의 집합 $Q=\{a, b, c, d, e, f\}$에 대해서 도출된 지식 상태 K를 $\mathrm{K}=\{\phi,\{d\},\{a,c\},\{e,f\},\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{d,e,f\},\{a,b,c,d\},\{a,c,e,f,\}\{a,c,d,e,f,\},Q\}$라 하면, 집합족$(Q,\mathrm{K})$는 하나의 지식구조가 된다. 이때, a와 c를 포함하는 지식 상태들은 각각 $\mathrm{K}_a=\{\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,c,e,f\},\{a,c,d,e,f\},Q\}$, $\mathrm{K}_c=\{\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,c,e,f\},\{a,c,d,e,f\},Q\}$와 같이 나타낼 수 있으며, 두 지식 상태 K_a와 K_c는 서로 같으므로 $\mathrm{K}_a=\mathrm{K}_c$임을 알 수 있다. 지식공간론에서 이는 a을 포함하는 모든 지식 상태는 c을 포함하고, 역으로 c을 포함하는 모든 지식 상태는 a을 포함하고 있음을 의미한다. 다시 말해, 이 의미는 문항 a을 해결한 학생은 문항 c을 맞힐 수 있고, 문항 c을 해결한 학생은 문항 a을 맞힐 수 있다는 것을 말하며, 부연하여 이는 위의 지식 구조(Q,K)에서는 문항 a, c을 해결하기 위한 배경 지식은 서로 같은 것으로 파악할 수 있다. 또한, 위의 예에서 제시된 지식 구조(Q,K)에 대해서 지식 상태들의 포함 관계를 도식화하여 나타내면 다음 [그림 1]과 같다.



[그림 1] 지식 구조도[7]

[Fig. 1] Knowledge structure diagram[7]

위의 [그림 1]에 제시된 지식 구조를 개념에 대한 지식 상태의 포함 관계 측면에서 분석하면 다

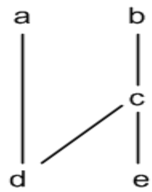
음과 같다. 먼저, 위의 [그림 1]에서 개념 a와 c, 그리고 e와 f는 각각 동일한 집합족 $\mathrm{K}_a = \mathrm{K}_c$, 그리고 $\mathrm{K}_e = \mathrm{K}_f$에 존재하므로 살펴본 바와 같이 a을 안다는 것은 c을 알고 있다는 것이 되고, e을 알고 있다는 것은 동시에 f을 알고 있다는 것으로 추론 가능하다. 따라서 지식공간론에서는 지식 상태 $\{d\}$에서 지식 상태 $\{a,b,c\}$로, 또는 지식 상태 $\{e,f\}$에서 지식 상태 }로의 변화를 이루기 위해서는 a와 c 중에서 하나의 개념만 파악하면 가능하다고 여기는 것이다. 같은 이유로 지식 상태 $\{a,b,c,d\}$에서 지식상태 Q로 변화하는 것도 e와 f 중에서 하나의 개념만을 알면 가능하다. 또한, 지식공간론에서는 위의 [그림 1]과 같은 사례를 문항(개념)의 위계적 측면으로 확장하여 분석하기 위해서 다음과 같은 정의를 한다. 즉, 지식 구조(Q,K)와 집합 Q의 두 원소 p, q에 대하여 Q에서의 관계$\le$을 $p \le q \Leftrightarrow p \in \bigcap_{K \in \mathrm{K}_q} K$라 약속한다면, 이때 $p \in \bigcap_{K \in \mathrm{K}_q} K$는 '$q$을 포함하는 모든 지식 상태는 p을 포함한다.'는 것을 의미하므로, 이는 '문항 q를 해결한 학생은 문항 p을 해결할 수 있다.'라고 추론할 수 있다. 이에 따라, 개념의 위계적 관점에서 p을 학습한 후에 q을 학습하여야 한다는 추론을 가능하게 한다[7]. 더불어, 이러한 약속에 따라 기본적으로 위계적 성질을 지니는 관계$\le$은 지식 구조(Q,K)에 대해서 순서 관계를 갖는다. 즉, 관계$\le$은 반사, 추이, 반대칭 성질을 다음과 같이 만족한다. 첫 번째, 관계$\le$에 대해서 지식 구조(Q,K)는 전체집합 Q의 모든 원소 q에 대해서 $\mathrm{K}_q \subseteq \mathrm{K}_q$의 성질을 만족하므로 $q \le q$이고, 따라서 관계$(Q,\le)$은 반사적이다. 두 번째, 집합 Q의 임의의 세 원소 p, q, r 사이에 $p \le q$, $q \le r$의 관계가 성립한다고 가정하면 $\mathrm{K}_q \subseteq \mathrm{K}_p$와 $\mathrm{K}_r \subseteq \mathrm{K}_q$을 만족하므로, 집합의 성질에 의해$\mathrm{K}_r \subseteq \mathrm{K}_p$로 $p \le r$가 성립하여 관계$(Q,\le)$은 추이적인 특징을 갖는다. 세 번째, 집합 Q의 임의의 두 원소 p, q에 대하여 $p \le q$이고 $q \le p$라 한다면, 지식공간론의 가정에 의해 p을 해결한다거나 안다는 것은 q을 해결한다거나 알고 있다는 것이 되므로 관계$(Q,\le)$는 반대칭 성질을 갖는다. 예를 들어, 두 집합 $Q=\{\mathrm{a,b,c,d,e}\}$와 $\mathrm{K}=\{\phi,\{\mathrm{a}\},\{\mathrm{b}\},\{\mathrm{a,b}\},\{\mathrm{b,c}\},\{\mathrm{a,b,c}\},\{\mathrm{b,c,e}\},\{\mathrm{a,b,c,e}\},\{\mathrm{a,b,c,d}\},Q\}$인 지식 구조$(Q,\mathrm{K})$에 대해서 각각의 문항 a,b,c,d,e을 포함하는 모든 지식 상태들은 다음과 같이 나타낼 수 있다[13].

$\mathrm{K}_a = \{\{\mathrm{a}\},\{\mathrm{a,b}\},\{\mathrm{a,b,c}\},\{\mathrm{a,b,c,e}\},\{\mathrm{a,b,c,d}\},Q\}$,

$\mathrm{K}_b = \{\{\mathrm{b}\},\{\mathrm{a,b}\},\{\mathrm{b,c}\},\{\mathrm{a,b,c}\},\{\mathrm{b,c,e}\}\{\mathrm{a,b,c,e}\},\{\mathrm{a,b,c,d}\},Q\}$

$\mathrm{K}_c = \{\{\mathrm{b,c}\},\{\mathrm{a,b,c}\},\{\mathrm{b,c,e}\},\{\mathrm{a,b,c,e}\},\{\mathrm{a,b,c,d}\},Q\}$, $\mathrm{K}_d = \{\{\mathrm{a,b,c,d}\},Q\}$,

$\mathrm{K}_e = \{\{\mathrm{b,c,e}\},\{\mathrm{a,b,c,e}\},Q\}$이다. 이때, 지식 구조$(Q,\mathrm{K})$의 각각의 지식 상태 $\mathrm{K}_a, \mathrm{K}_b, \mathrm{K}_c$, $\mathrm{K}_d, \mathrm{K}_e$에 대한 포함 관계는 $\mathrm{K}_d \subseteq \mathrm{K}_a, \mathrm{K}_e \subseteq \mathrm{K}_c$, $\mathrm{K}_d \subseteq \mathrm{K}_c$, $\mathrm{K}_d \subseteq \mathrm{K}_b$, $\mathrm{K}_c \subseteq \mathrm{K}_b$이고, 이는 문항 또는 개념들 간의 위계적 순서 관계 $a \le d$, $c \le e$, $c \le d$, $b \le c$로 나타낼 수 있다. 그리고 위의 위계적 순서 관계를 추이적 성질을 반영하여 구조화한 것을 다이어그램으로 표현하면 다음 [그림 2]와 같다.



[그림 2] 평가 문항(개념)의 위계[13]
[Fig. 2] Hierarchy of evaluation items(concept)[13]

지식공간론에서 지식 상태를 내재한 어떤 지식 구조는 위의 [그림 2]와 같이 관련 지식의 위계를 파악하는 것에서 나아가 학습의 초기 상태에서 완전 학습에 도달하는 경로인 지식 구조에 따른 최적화된 교수·학습 경로를 분석하는 역할을 담당할 수 있다.

일반적으로 교실 수업에서 다루어지는 어떤 학습 주제에 대해서 효율적으로 학습목표에 도달하기 위해서는 최적화된 교수·학습 경로의 설계가 요구되고, 이에 따라 교사는 그 주제를 가르치기 위해서 필요한 학습 내용을 파악하여 최선의 교수·학습 경로를 따라 수업 활동을 수행하게 된다. 이때, 주장한 바와 같이 지식 공간론은 교수·학습 경로를 효과적으로 분석하는 방법적 틀을 제공할 수 있는데, 이의 예로써 n개의 문항 $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$으로 이루어진 지식구조 (Q, K)에 대해서 $\phi \subset \{q_1\} \subset \{q_1, q_2\} \subset \{q_1, q_2, q_3\} \subset \cdots \subset Q$은 각 항에 하나의 원소(개념)를 첨가하여 다음의 지식상태로 도달하는 점진적 교수·학습 경로의 역할을 담당할 수 있다. 또한, 이 방법적 틀에 따라 위의 [그림 1]에서의 지식 구조(Q, K)에서 밝힌 평가 문항들의 위계 구조에 따른 교수·학습 경로들 중의 하나로 $\varphi \subset \{d\} \subset \{a, c, d\} \subset \{a, b, c, d\} \subset Q$을 들 수 있다.

2.3 위계 분석

지식공간론에 따르면 위계 관계에 따라 개념들을 서로 연결함으로써 구조화하는 것이 가능하다. 일반적으로 계통성을 특징으로 하는 수학 교과의 교수·학습에서는 어떤 수학적 지식을 습득하기 위해서 필요로 하는 선행 지식이 항상 존재하며, 대체로 이 선행 지식의 습득 이후에 상위 위계인 다음 단계의 수학적 지식을 학습하게 된다. 지식 공간론은 이와 같은 지식의 위계성에 기반을 두고 평가 문항의 결과를 분석하여, 학습자가 구성하고 있는 지식 상태나 평가 개념 간의 위계 구조를 파악하고, 이에 따라 최적화된 교수·학습 경로에 대한 정보를 제공할 수 있는 평가 이론이다.

지식공간론을 활용하여 문항 정보를 통해 피험자의 지식 상태로부터 평가 개념들 간의 위계 관계를 분석하기 위해서는 먼저 다음과 같은 몇 가지의 전제와 절차를 필요로 한다. 먼저 어떤 평가의 임의의 평가문항들에 대해서 피험자가 모르는 문제를 우연히 맞히거나 맞힐 수 있는 문제를 실수로 틀리는 상황이 없다는 전제가 이루어져야 한다. 어떤 평가에서 측정하고자 하는 능력 범위 이외의 능력들이 존재할 수 있음은 주지의 사실이나, 문항 반응 이론에서 주장하는 바와 같이 지식공간론에서는 이러한 변인들은 직접적이고 양적인 관찰이 불가능한 잠재적 특성의 일부로 여긴

다. 또한 평가의 실제적인 측면에서 볼 때 평가의 문항들이 피험자들의 자유로운 반응이 가능한 형태로 제시되는 것이 타당하겠지만, 지식공간론의 문항들은 이분법적으로 채점이 용이한 방식으로 구성되며 대체로 정답은 1점을 부여받고 틀린 보기를 선택한 문항은 0점을 받게 된다. 이에 따라 임의의 두 평가 문항 a,b에 대해서 나타날 수 있는 모든 반응의 경우의 수는 a,b을 각각 맞히거나 틀리는 것에 따라 조합되는 4가지이며, 이는 다음 [표 1]과 같이 표현될 수 있다.

[표 1] 문항 a,b의 반응에 대한 모든 경우의 수(○: 맞힘, ×: 틀림)
[Table 1] Number of cases in all the responses to questions a and b(○: Correct, ×: Incorrect)

a	b	인원수
○	○	n_1
○	×	n_2
×	○	n_3
×	×	n_4

위의 [표 1]에서 문항에 반응한 어느 한 경우의 인원수를 나타내는 $n_3=0$이라는 것은 ‘b을 맞히고, a을 틀린 학생은 없다’는 것을 말한다. 또한, 이를 a을 맞힌 학생의 집합을 A, b을 해결한 학생의 집합을 B라고 하여 집합으로 표시하면 $A^C \cap B = \phi$이고, 이는 수학적으로 $B \subset A$을 의미한다. 즉, b을 해결한 학생은 a을 맞혔다는 추론이 가능하다. 그렇지만 수학적 배경에 따른 이 추론에서 고려해야 할 점은 a을 해결한 학생 중에서도 b을 틀릴 수 있다는 것으로, b을 맞힌다는 앞 조건은 a을 해결하기 위한 필요조건이지 충분조건은 아닐 수 있다는 것이다. 그럼에도 이 추론에 따라 학습의 위계적 순서를 정한다면 ‘a을 학습한 후 b을 학습한다.’는 개념 a, b사이의 위계 관계 $a \leq b$을 구성할 수 있다.

이와 유사하게 $n_2=0$이라는 것은 ‘a을 맞히고, b을 틀린 학생은 없다’는 것으로, 이는 수학적으로 $A \subset B$임을 의미하고 논리적으로 a을 맞힌 학생은 b을 맞혔다는 추론이 가능하다. 또한 이에 따라 지식의 위계적 순서를 정한다면 ‘b을 학습한 후 a을 학습한다.’는 개념 a, b사이의 관계 $b \leq a$을 구성할 수 있다. 반면에 대부분의 지식 상태에서 문항 a와 b를 동시에 해결한 n_1이 많다는 것은 두 지식은 같은 수준의 유사한 개념이라는 추론을 가능하게 하고, 문항 a와 b을 모두 틀린 n_4가 많다는 것은 이 정보만으로는 두 지식 간의 위계 관계를 파악할 수 없다는 것을 의미한다. 살펴본 바와 같이 지식 공간론에서 지식의 위계 관계는 ‘b을 맞히고, a을 틀린 학생은 없다’는 것을 의미하는 $n_3=0$과 ‘a을 맞히고, b을 틀린 학생은 없다’는 $n_2=0$으로부터 추론을 유도한다. 그렇지만, 어느 평가에서든지 위의 [표 1]의 예와 같이 항상 $n_2=0$나 $n_3=0$인 실험실적인 상황이 나타나는 것은 아니다. 따라서 평가 결과의 현실적인 요인을 감안하여 문항(개념)의 위계를 분석할 필요가 있으며, 이를 위해 지식공간론에서는 대체로 n_2와 n_3의 인정률 m을 $\frac{n_3}{n_2+n_3} \times 100 \leq m$을 만족하는 값으로 정하는데, 일반적으로 이 인정률은 0.1이하로 정하는 경우가 대부분이다. 이는 통계적으로 오차의 허용한계를 10%이내로 하여 분석하였다는 의미이며[7], 본 연구에서도 인정률 m

을 0.1로 하여 평면도형 영역의 위계 관계를 양적으로 처리하였다.

2.4 선행 연구

개념의 위계 분석은 학습 내용을 간단하고 다양한 방식으로 기술할 수 있게 하여 추구하는 교수 목표를 달성할 수 있는 기초 자료를 제공한다[14]. 관련하여 Griffiths et al.은 학생들이 갖고 있는 오개념 형성 원인 중 하나가 교육과정에서 제시하고 있는 개념들의 잘못된 제시와 함께 학습 내용의 계열성이 명료하지 못하기 때문이라고 주장하며, 이러한 오개념을 해소하기 위한 처치로 학습 위계를 기반으로 한 수업이 효과적이었음을 밝히고 있다[15]. 더불어 교사의 학습 개념에 대한 심도 있는 교수 위계는 교사에게 교사 신념의 측면에서 자기 효능감을 높이는데 영향을 준다는 것이 알려져 있다[16-17].

또한, 개념의 위계 분석과 관련하여 Wilson에 따르면 개념의 위계를 학생에 의해서 학습되어지는 순서인 '심리적 계열'과 교수-학습 순서인 '교수 계열', 학습 과제의 배열 순서인 '논리적 계열'로 분류하는데, 보통 교과서는 논리적 계열에 따라 개발되지만[18], 학생들에게 학습되어지는 심리적 계열은 논리적 계열과는 매우 다르다는 몇몇 연구 결과들이 있다[19-20]. 이에 개념 위계에 따른 교수·학습의 효과를 분석한 정진우와 박진홍은 학습 개념에 대하여 학생들이 지니고 있는 심리적 개념의 위계 구조를 밝히고, 교육과정에서 제시한 교수 순서와 학생들의 심리적 위계에 따른 교수 순서의 교수·학습 효과에 대한 비교를 통해 심리적 위계를 기반으로 한 수업이 개념의 성취도 측면에서 효과적임을 주장한다[19]. 그런데, 개념에 대한 위계 분석은 지금까지 주로 서열화 이론에 의해 분석되어 왔으나[18][20-21], 최근에는 개념의 위계 구조뿐 만 아니라, 학습자의 지식 상태까지도 알 수 있는 지식 공간론의 활용 가능성이 제기되고 있다[4][23-24]. 이에 박상태 등은 예비 교사들을 대상으로 한 지식 상태의 분석을 통해 지식공간론이 기존의 평가 방법으로는 알 수 없었던 평가 문항과 문항 간의 관계에 대해 몇몇 시사점을 제시한다고 주장한다[24]. 또한, 박고운은 진단평가 문항의 결과로부터 얻은 위계를 도식화함으로써 각 학생의 지식 상태가 다름을 밝히고, 이를 통해 향후 보충학습에 대한 명확한 정보를 얻을 수 있었다고 주장한다[25]. 그리고 김석천은 지식공간론을 활용하여 학생들의 평가결과를 기반으로 한 학습 준비도 및 진전도를 파악할 수 있는 검사 도구를 개발하였다[26]. 끝으로 과학 교과에서 지식공간론을 활용하여 문항 사이 또는 학습 과제에 내재되어 있는 학습자의 지식 상태를 찾아내는 방법과 절차를 통해 지식의 위계를 분석한 윤마병과 김희수는 학습자가 갖고 있는 개념의 구조가 각각 다르기 때문에 교수·학습 전에 이루어지는 지식 상태 분석은 학습자의 출발점 상태 확인과 진단평가 역할을 할 수 있고, 학습 후에 얻어지는 지식 상태도는 형성평가와 향후 교수·학습에 대한 시사점을 제공할 수 있다는 것과 함께, 지식공간론을 활용한 과학 개념의 위계 분석은 교육과정 구성과 수업 현장에서 학습 과제의 위계적 제시에도 이용할 수 있을 것이라고 주장한다[23].

3. 연구 방법

3.1 연구 대상

본 연구는 초등학생들이 구성하고 있는 평면도형의 넓이 개념에 대한 위계 구조를 밝히고, 현행 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 초등수학 교과서에 제시된 논리적 위계와의 비교·분 것을 위하여 학생들의 지식 상태 검사를 수행할 수 있는 대상을 유의 추출하여 연구를 진행하였다. 연구 대상은 먼저 D광역시 소재 초등학교 4곳을 선정하여, 선정된 학교의 6학년 학급 중에서 각각 1개 학급을 추출하였다. 선정된 연구 대상 학교들의 특징은 다음과 같다. 학부모들의 교육열이 비교적 높다고 여겨지는 1개 학교는 아파트 밀집 지역에 위치하고 있으며, 사회경제적으로 중상 수준이면서 대다수의 학생들은 선행 학습으로 학원에서 중학교 수학 과정을 배우고 있었다. 다른 2개 학교는 도시 외곽 신도시에 위치한 학교로 학부모들이 맞벌이를 하는 경우가 일반적이었으며, 학생들은 대체로 수학 성적에 관심을 가지고는 있지만 실제로 수학 성적은 중위 수준에 위치하는 학생들이 많았다. 그리고 나머지 1개 학교는 구도심에 위치하고 있었는데 해마다 학급수가 줄어드는 상황이었고, 학부모들의 관심 정도와 학생들의 수학 수준이 다른 두 학교에 비해서 떨어졌다. 본 연구에서는 표집이나 분석 과정에서 개별 학생 각각의 연구 대상 학생들의 사회·경제적 수준의 차이를 특별히 고려하지 않았지만, 학교 선정에서 통계적 대표성을 지니는 학교를 대상으로 선정하고자 하였으며, 편의상 선정된 학교에서의 대상 학급을 유의 추출하였다.

지필 검사에서 불성실하게 응답한 학생을 제외한 6학년 4개 학급의 100명 학생을 연구 대상으로 선정하였다. 이는 검사 결과를 분석할 때, 지식 공간론의 위계 검사에 따른 분석 결과의 신뢰성이 연구 대상 학생들의 평가 신뢰성에 크게 좌우되기 때문이었다. 검사에 불성실한 답변으로부터 추출한 자료는 연구 대상 학생에 대한 올바른 지식 상태를 측정한 정보라고 할 수 없다. 그러므로 타당한 지식 상태를 구성하기 위하여 검사에 참여한 모든 학생에 대해서 지식 공간론에서 약속하는 기본 전제인 (1) 모르는 문제를 우연히 맞히는 경우는 없다와 (2) 맞힐 수 있는 문제를 실수로 틀리는 경우는 없다는 두 가지 조건을 가정하였다. 그리고 아무리 많은 학생이 평가에 참여하더라도 학생 각자의 답안은 몇 가지의 유형으로 분류 될 것이고, 따라서 평가에 참여하는 학생의 수가 어느 정도 이상이라면 지식 상태의 종류와 개수는 일정할 것으로 여기는 지식 공간론의 가정[7]에 따라 본 연구를 위한 충분히 많은 인원이라고 여겨지는 대상 100명을 선정함으로써 지식 상태의 정보를 최대한 객관화하고자 하였다. 또한, 현행 2009 개정 수학과 교육과정에서 평면도형의 넓이 개념은 5학년 단원의 내용이지만, 본 연구에서는 5~6학년군의 평면도형의 둘레와 넓이 개념에 대한 대상 학생들이 구성한 심리적 위계 구조를 밝히는 측면에서 둘레와 넓이 개념을 이미 학습한 6학년 학생들을 대상으로 하여 이들의 지식 상태와 구조를 파악하고자 하였다.

3.2 검사 도구 및 자료 처리

평면도형 관련 지식 상태 파악 검사지는 총문항 수가 24개이면서 단답형 지필고사 형태로 개발하였다. 개발된 평면도형의 넓이에 관한 지식 상태 검사지는 박혜경, 김영희, 전평국이 평면도형의 넓이 측정 지식들의 위계 관계 파악을 목적으로 개발한 검사지를 기반으로 하였으며[6], 이를 토대로 '평면도형' 단원의 주요 개념 요소를 선정하기 위해 2009 개정 수학과 교육과정의 초등학교 평면도형 단원과 초등수학의 교수 단위를 분석한 강완, 나귀수, 백석윤, 이경화의 연구에서 관련 개념을 추출하였다[27]. 이에 따라 평면도형의 넓이와 관련된 주요한 개념 8개를 구성하였고, 이에 따라 먼저 각 개념에 관련한 평가 목표와 내용을 각 요소별로 5개씩 분류하여 총 40문항을 개발하였다. 기개발된 문항을 초등 수학교육 전문가 2명과 초등수학 교사 3명에게 연구자가 제시한 평면도형 개념과 평가목표를 안내하면서 검사 문항들의 내용타당도, 정답의 객관도, 문항의 명료성을 검토하도록 1차 의뢰하였다. 1차 검토에서 검사지의 내용타당도는 86.4%이고, 정답의 객관도는 94.8%이었다.

이후 검토된 의견을 반영하여 32문항으로 수정·보완하였고, 이 문항들에 대해서 다른 초등수학 교사 5명에게 2차 검토를 의뢰하였다. 문항의 명료성에 관한 의견을 반영하여 8개 문항을 삭제하고, 전문가들의 지적대로 평가 문항을 수정 · 보완하여 최종적으로 24개 문항을 평면도형 개념 검사지로 완성하였다. 2차 검토에서 내용타당도는 96.8%이고, 정답 객관도는 98.6%였다.

본 연구에서 사용한 검사 도구는 각 개념 당 3개 문항으로 이루어져 있어서 2개 이상 맞춘 경우를 개념이 형성된 것으로 보고 '1'로, 1개 또는 0개 맞힌 경우를 개념이 형성되지 않은 것으로 보고 '0'으로 입력하여 지식 상태도를 작성하였다. 모든 문항의 순서 관계에서 추이적 관계를 제외하여 컴퓨터 처리를 단순화시킨 핫세 정보를 얻고, 이를 평면에 도식화(hasse diagram)하여 문항 간 또는 개념 간의 위계도를 작성하였다. 끝으로 다음 [표 2]와 같이 총 24문항으로 구성된 최종 검사지에서 각각의 문항들은 단답형으로 제시되어 있지만, 검사지의 채점은 지식 공간론의 적용을 위해 맞고 틀리는 두 가지 경우로만 단순화하여 수행하였다.

[표 2] 검사지의 구성
[Table 2] Composition of examination sheets

평가 내용	평가 개념	문항 번호
평면도형의 둘레에 대한 약속을 알고 있다. 평면도형의 둘레의 길이를 비교할 수 있다.	둘레 개념	4, 7, 21
단위 길이의 배로 도형의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	단위 길이	6, 15, 23
평면도형의 넓이를 비교할 수 있다.	넓이 개념	8, 9, 10
단위 넓이의 배로 도형의 넓이를 구할 수 있다.	단위 넓이	5, 14, 22
넓이 공식으로 기본 도형의 넓이를 구할 수 있다.	넓이 공식	1, 2, 3
넓이 공식을 이용하여 삼각형의 높이를 구할 수 있다. 조건에 적합한 길이를 구별하여 도형의 넓이를 구할 수 있다.	넓이 공식의 적용	11, 12, 13
모양을 바꾸어 구하고자 하는 도형의 넓이를 구할 수 있다.	등적 변형	18, 20, 24
사각형의 일부를 제거하여 분할한 도형의 넓이를 구할 수 있다.	넓이와 관련한	16, 17, 19

밑변과 높이를 늘린 도형의 넓이를 구할 수 있다.	문제해결	
정사각형에서 대각선을 이용하여 넓이를 구할 수 있다.		

위의 [표 2]에서 문항 6, 15, 23, 문항 4, 7, 21, 문항 5, 14, 22, 문항 8, 9, 10은 각각 평면 도형의 둘레와 넓이에 대한 의미와 관련된 개념으로, 먼저 문항 4, 7, 21과 문항 8, 9, 10은 평면 도형의 둘레와 넓이가 무엇인지에 대해서 알고 있는지를 묻는 문항이며, 문항 6, 15, 23과 문항 5, 14, 22는 단위넓이(길이)의 몇 배인가로 넓이(둘레)가 결정됨을 알고 있는가와 관련된 문항이다. 또한, 문항 1, 2, 3, 문항 11, 12, 13은 알고리즘이나 공식과 관련된 개념으로 둘레와 넓이를 계산할 때 공식을 알고 적용할 수 있는가를 묻는 문항이다. 끝으로 문항 16, 17, 19와 문항 18, 20, 24는 문제해결과 관련된 문항으로 등적 변형과 분할을 적절히 활용하여 평면도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문항이다.

평면도형 관련 지식 상태 검사는 2016년 6월 7일에서 10일 사이에 본 연구에 대해서 사전 안내를 받은 담임교사의 감독 하에 실시하였는데, 본 검사가 이루어지기 전에 학생들을 대상으로도 검사의 의의와 답안 작성 방법, 자료 처리 방식에 대해서 간단한 지도와 안내를 하였다. 본 연구의 자료처리 및 분석은 SPSS V22.0 프로그램을 활용하였고, 검사 도구에 의한 학생들의 지식상태 분석을 위해서 지식공간론을 적용하기 위해 개발된 프로그램으로 몇몇 연구에서 사용된 Visual basic excel programming을 활용하였다[7][23]. 또한, 본 연구에서 취급하는 평가 문항은 모두 '맞음'과 '틀림'으로 판명할 수 있는 이분 문항이며 어떤 학생이 맞힌 문항의 집합을 지식 상태(knowledge state)라고 한다. 이 집합은 그 학생에 대한 지식 정보를 갖고 있으며, 충분히 많은 학생이 같은 평가 문항으로 평가를 받았다면 다른 학생의 지식 상태와 비교하여 그 학생의 지식수준을 알 수 있다[3]. 끝으로 평면도형 관련 개념의 위계 분석 단계 및 과정은 평가 문항의 구체적인 내용과는 직접적인 관련은 찾을 수 없으며, 단지 이들 내용이 피험자들의 반응을 통해서 나타나는 간접적 결과인 평가 문항을 대상으로 하여 분석한다는 것에 유의해야 한다.

3.2 위계 분석 방법

제시한 바와 같이 지식 공간론을 활용한 위계 구조의 분석 과정은 평가 문항의 구체적인 내용과는 직접적인 관련이 없으며, 단지 이들 내용이 학생들을 통해서 나타나는 간접적 반응을 분석한다는 것에 관심을 갖는다. 본 연구에서는 학생들의 검사 결과를 처리하고, 또한 지식공간론의 절차를 적용하여 평면도형의 넓이에 관한 위계 관계를 알아보기 위하여 MS Office 2004의 Excel로 구현된 프로그램 Visual basic excel programming을 활용하였다. 먼저 검사 결과의 처리 순서는 다음과 같다[7].

첫 번째, 검사 결과에 따라 문항마다 맞으면 '1'로, 틀리면 '0'으로 Excel 프로그램에 입력한다.

두 번째, 지식공간론의 적용에서 중요한 단계인 지식 상태의 선별은 불성실하게 평가에 임한 학생의 결과는 위계도 분석에 큰 영향을 미치므로 이 평가 결과를 제외하여 처리하는 단계이다.

세 번째, 위계 분석 방법에 따라 가설적 위계를 예상해 봄으로써, Excel 프로그램에 의해 얻게 될 위계도를 예측해 보는 단계이다.

네 번째, Excel 프로그램을 통해 얻은 핫세 다이어그램(Hasse diagram)의 해석을 통해, 위계 관계를 최종적으로 판단하고 연구 대상 학생들 각각의 지식 상태를 진단한다.

검사 결과를 처리하기 위한 선행 작업으로 평면도형의 넓이에 관한 지식 상태 검사는 2016년 6월 초에 실시되었으며, 위의 검사 결과 처리 순서에 따라 문항마다 맞으면 '1'로, 틀리면 '0'으로 Excel 프로그램에 입력하고, 답지가 계속 반복되거나 빈칸으로 남기는 등의 불성실한 답변을 제시한 학생들의 검사지 를 제외하는 방식으로 자료를 처리하였으며, 핫세 다이어그램을 얻기 위한 통계적 오차의 허용한계인 인정률은 10%로 하여 분석하였다.

4. 연구 결과

4.1 평면도형의 둘레와 넓이의 지식 상태

학교 수학에서 평면도형의 둘레와 넓이는 5학년 1학기 5단원의 다각형의 넓이 단원에서 간단한 평면도형의 둘레를 재어보는 활동에서 둘레의 의미를 이해하고, 다음으로 3~4학년군에서 다룬 기본적인 평면 도형의 둘레의 길이를 구하는 활동에서 시작한다. 그렇지만 둘레 개념을 구체적으로 다루지는 않으며, 직사각형의 둘레 구하는 방법을 알아보는 활동을 통해 비형식적인 방식으로 둘레를 도입한다. 그리고 단위 넓이와 단위를 도입하면서, 단위 넓이의 몇 배로서 직사각형의 넓이를 구하고, 이후 순차적으로 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모의 넓이를 구하는 다양한 방법을 다루며 관련된 문제들을 해결한다[28].

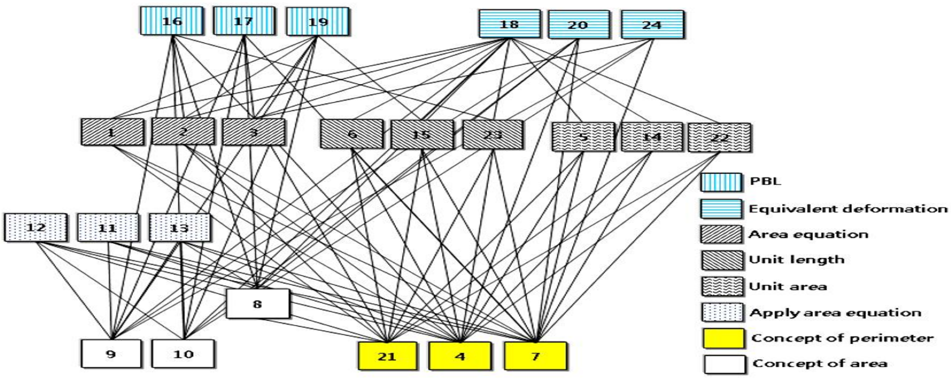
대체로 교육과정에 따른 교과서는 학생의 수준과 수학 지식이 갖는 학문적 위계를 고려하여 지식의 제시 순서가 결정된다고 가정할 수 있을 것이다. 이에 따라서, 학교 수학에서 본 연구와 관련된 평면도형의 넓이 단원 지식들의 위계를 교과서에 제시된 논리적 순서대로 학습되어지는 내용체계에 따라 개략적으로 살펴본다면 평면도형의 둘레와 넓이 개념, 단위 넓이와 길이를 활용한 평면도형의 넓이와 둘레 측정, 공식을 적용한 몇몇 평면도형의 넓이 계산, 다양한 문제 해결 전략의 순으로 [그림 3]과 같이 단순화하여 구조화할 수 있다.

다양한 문제 해결 전략
↑
공식을 적용한 몇몇 평면 도형의 넓이 계산
↑
단위 넓이와 길이를 활용한 평면 도형의 넓이와 둘레 측정
↑
평면도형의 둘레와 넓이 개념

[그림 3] 평면도형 영역의 교과서 위계

[Fig. 3] Textbook hierarchy of plane Figures

위의 [그림 3]에서 제시한 위계도와 관련하여 본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들의 평면도형 둘레와 넓이에 대한 위계 구조가 어떠한가를 좀 더 자세하고 과학적으로 분석하기 위한 지식 상태도를 [그림 4]와 같이 도출하였다.



[그림 4] 평면도형의 둘레 및 넓이 지식 상태도(초등 6학년)

[Fig. 4] Knowledge state diagram of circumference and area in plane figures (grade 6)

위의 [그림 4]와 같이 연구 대상 학생들은 대체로 평면도형의 넓이에 관련하여 주요한 3단계의 위계 구조를 갖고 있는 것으로 나타났다. 먼저 넓이(문항 8, 9, 10)와 둘레(문항 4, 7, 21)에 대한 지식은 초등 수학 지도서[28]에 제시된 바와 같이 일상에서 자주 사용하는 양이며 평면 도형을 분석하는 중요 개념인 넓이는 길이와의 관계를 이용해 구한다는 점에서 이차적인 조작을 요구하는 상위 수준의 내용으로 일반적으로 평면도형에서 둘레의 개념이 넓이에 대한 개념보다 선행 지식이라고 여겨지지만, 본 연구에서 둘레나 넓이를 구성할 수 있는 도형이 무엇인지를 파악할 수 있고 넓이나 둘레의 길이를 직관적으로 어림하거나 계산할 수 있는 것과 관련된 두 개념은 서로 관련성을 갖지 못하면서 학생들은 최하위의 지식 상태를 형성하고 있었다.

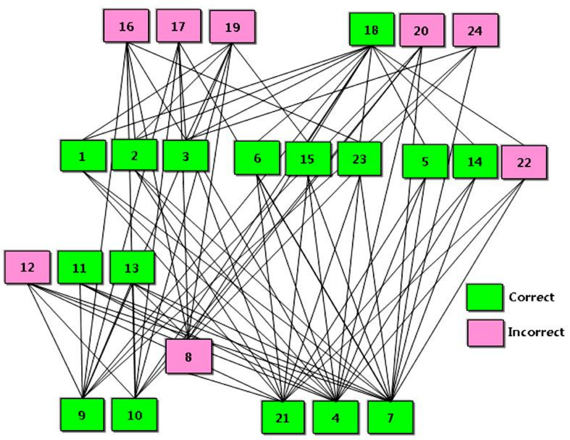
다만 둘레가 있는 평면도형의 넓이의 존재성을 물어보는 넓이 개념의 문항 8은 둘레 개념의 문항 21의 상위 개념으로 분석되었는데, 이는 비록 단순한 문제 형태이지만 문항 8과 같은 다양한 모양의 평면도형을 초등 수학에서 학생들이 다루지 않으면서 둘레와 넓이의 관계만으로 문제를 해결했어야 했던 측면과 함께 문항 8의 난이도와 관련이 있는 것으로 파악되었다. 다시 말해 연구 대상 학생들은 대체로 평이한 난이도이면서 학교 수학에서 다루는 개념과 직접적으로 관련된 문제에서 위계 관계를 더 잘 드러내는 것을 알 수 있었다. 또한 문항 8에 대해서 학생들은 다양한 모양을 가진 평면 도형의 넓이를 계산으로만 구해야 된다고 생각하는 경향이 있는 것으로 나타났으며, 넓이가 있는 도형을 찾지 못하는 것과 함께 둘레가 있어야만 넓이가 존재할 수 있다는 지식이 부족한 것으로 나타났다.

넓이에 대한 공식의 적용 지식(문항 11, 12, 13)은 넓이(문항 8, 9, 10)와 둘레(문항 4, 7, 21) 지식의 상위 수준의 지식 상태임을 알 수 있었다. 이는 일반적으로 수학교육 전문가들이 분석하는 학교 수학의 위계 관계와 학생들의 지식 상태가 대체로 일치함을 의미하는 것이지만, 지식 공간론의 위

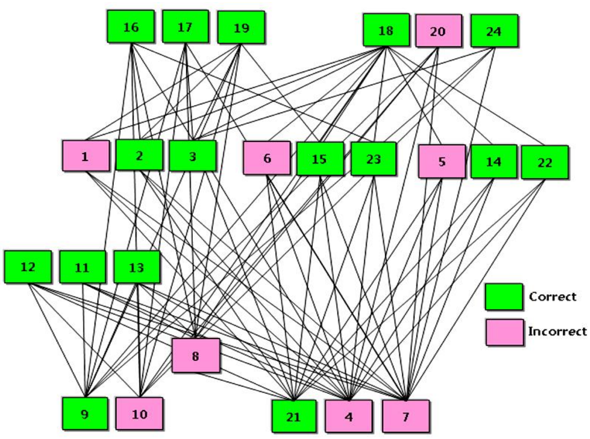
계 분석을 통해 이를 과학적으로 분석했다는데 점에서 본 연구의 의의가 있을 것이다. 그렇지만 공식으로 평면도형의 넓이를 계산(문항 1, 2, 3)하는 지식과 단위 길이(문항 6, 15, 23) 및 단위 넓이(문항 5, 14, 22)에 대한 지식 사이에 위계 관계가 구체적으로 나타나지 않은 것은 후속 연구에서 살펴봐야 할 부분으로 여겨진다. 끝으로 평면도형의 넓이에서 최상위 지식은 합동인 도형의 성질을 이용해서 분해하고 합성하는 변형과 함께 가로는 같게 하면서 높이는 변하지 않게 변형하는 형태의 등적변형(문항 16, 17, 19)에 대한 지식, 그리고 넓이에 대한 다양한 문제해결(문항 18, 20, 24) 지식이었다. 최상위 지식 중에서 등적변형(문항 16, 17, 19)에 대한 지식은 넓이 공식(문항 1, 2, 3)과 단위 길이(문항 6, 15, 23)와 관련된 지식이었다면 특별히 문제해결(문항 18, 20, 24)에 대한 지식은 넓이 공식(문항 1, 2, 3)과 단위 길이(문항 6, 15, 23) 및 단위 넓이(문항 5, 14, 22)와 관련된 지식들을 하위 위계로 하는 지식 상태를 보였다. 이는 문제해결 능력을 갖춘 학습자는 넓이에 대한 공식, 단위 길이 및 넓이에 대한 지식을 갖추고 있으며, 또한 이 지식들이 위계적으로 구조화되어 있음을 보여주는 결과이다.

4.2 개별 학생의 지식 상태 분석

지식 공간론은 학생들이 알고 있는 것과 모르는 것에 대한 정보를 제공하여 그들을 더 잘 이해하게 하고, 이를 기반으로 교사가 학교 수학 지도에서 의미 있는 의사결정을 내리는데 도움을 줄 수 있다. 즉, 검사지 동일한 점수를 얻은 학생들일지라도 그들의 지식상태는 개념 획득 수준과 구성에서 서로 차이가 있을 수 있으며, 이 차이를 학생 각자의 지식상태도 분석을 통해 알 수 있다. 아래에 제시된 [그림 5]와 [그림 6]는 지식상태 검사에서 총점이 중간에 가까운 16점(정답률 66.7%)으로서 산술평균으로 척도화하는 기존의 평가체계에서는 평면도형의 둘레와 넓이에 대해서 구성한 지식이 유사할 것으로 여겨지는 두 학생에 대한 지식상태도이다.



[그림 5] 지식상태 사례 1(학생26)
[Fig. 5] Knowledge state case 1(student 26)



[그림 6] 지식상태 사례 2(학생40)
[Fig. 6] Knowledge state case 2(student 40)

위의 [그림 5]와 [그림 6]을 통해서 평균 점수는 같지만, 지식의 위계 측면에서 평면도형의 둘레와 넓이에 대한 개념의 구조화가 잘되어 있는 학생([그림 5])과 그렇지 못한 학생의 지식상태 사례([그림 6])를 알 수 있다. 예를 들어 평면도형의 둘레와 넓이에 대한 개념의 구조화가 잘되어 있는 학생 26번은 최하위 개념인 둘레(문항 4, 7, 21)와 넓이(문항 8, 9, 10)에 대한 지식과 중간 위계 개념인 단위 정사각형의 수를 이용하여 직사각형의 넓이나 둘레의 길이를 구하는 단위 길이(문항 6, 15, 23)와 단위 넓이(문항 5, 14, 22)에 대한 지식, 그리고 공식(문항 1, 2, 3)으로 넓이를 구하는 지식을 해결하였고, 가장 높은 최상위 개념인 등적변형(문항 18, 20, 24)에 대한 지식과 넓이 개념과 관련한 문제해결(문항 16, 17, 19) 지식의 상태를 묻는 문항을 틀린 경우이다. 따라서 위의 [그림 5]에 나타난 학생 26번은 기본적인 내용에 대한 지식 상태는 완전하지만, 상위 위계에 해당하는 지식에 대한 재학습은 다시금 필요하다는 진단이 가능하며, 개념의 위계적인 구조화, 즉 평면도형의 지식 상태로 이 학생을 판단한다면 학생 26번은 지식 상태가 안정적으로 구성되어 있다고 볼 수 있다.

반면에 위의 [그림 6]에서 학생 26번과 같은 점수인 16점을 받았던 학생 40번의 지식 상태는 하위 지식인 둘레(문항 4, 7, 21)와 넓이(문항 8, 9, 10)에 대한 지식과 관련한 문항에서 오류를 보이며, 중간 위계 지식인 단위 길이(문항 6, 15, 23), 단위 넓이(문항 5, 14, 22), 넓이 공식(문항 1, 2, 3)과 관련한 지식을 묻는 문항에서 부족함을 보이고, 오히려 최상위 위계를 이루는 등적변형(문항 18, 20, 24)과 넓이 관련 문제해결(문항 16, 17, 19)에 대한 지식을 묻는 문항은 잘 해결한 경우이다.

이와 같이 학생 40번은 상위 개념에 대한 지식을 갖추고 있는 것으로 나타났으나, 가장 하위 개념에 해당하는 지식(문항 14, 7, 10)에 대한 보충학습이 필요하며, 문항 18번은 정답을 찾아냈지만 관련된 하위 문항인 문항 1, 5, 6에서 오류를 보인 것에서 중간 위계인 지식들에 대한 완전학습이 부족하거나 추측에 의해 상위 개념의 문항을 해결했던 것으로 판단할 수 있다. 따라서 학생 40번은 평면도형의 둘레와 넓이에 대한 개념의 구조화가 잘 형성되지 않은 학생으로 여겨진다. 본 연구의 결과에 대한 분석은 다음과 같다.

첫 번째, 초등학교 6학년 학생들의 평면도형의 둘레와 넓이에 대한 지식의 위계 관계는 주요한 3단계의 위계 구조를 갖고 있는 것으로 나타났다. 넓이(문항 8, 9, 10)와 둘레(문항 4, 7, 21)에 대한 지식은 최하위의 지식 상태를 형성하고 있었다. 또한, 넓이에 대한 공식의 적용 지식(문항 11, 12, 13)은 넓이(문항 8, 9, 10)와 둘레(문항 4, 7, 21) 지식의 상위 수준의 지식 상태임을 알 수 있었다. 끝으로 평면도형의 넓이에서 최상위 지식은 등적변형(문항 16, 17, 19)에 대한 지식과 넓이에 대한 다양한 문제해결(문항 18, 20, 24) 지식이었다. 최상위 지식 중에서 등적변형(문항 16, 17, 19)에 대한 지식은 넓이 공식(문항 1, 2, 3)과 단위 길이(문항 6, 15, 23)와 관련된 지식이었다면 특별히 문제해결(문항 18, 20, 24)에 대한 지식은 넓이 공식(문항 1, 2, 3)과 단위 길이(문항 6, 15, 23), 단위 넓이(문항 5, 14, 22)과 관련된 지식들을 하위 위계로 하는 지식상태를 보였다. 이는 문제해결 능력을 갖춘 학습자는 넓이에 대한 공식, 단위 길이, 단위 넓이에 대한 지식을 갖추고 있으며, 또한 이 지식들이 위계적으로 구조화되어 있음을 보여주는 결과이다.

둘째, 평면도형 관련 지식 상태 검사에서 같은 점수를 받은 두 학생에 대해서 살펴볼 때, 점수

는 같더라도 개별 학습자의 지식상태는 학생에 따라 매우 다르게 나타나는 것을 알 수 있었다. 위계 구조가 어느 정도 안정적으로 이루어진 학생의 경우에는 하위 위계를 이루고 있는 지식을 묻는 문항에 대한 해결 정도가 상위 위계에 있는 지식을 묻는 문항을 해결하는 정도보다 높았다. 반면에 평면도형의 둘레와 넓이에 대한 개념의 구조화가 잘 형성되지 않은 학생의 경우에는 관련된 여러 수준의 지식을 묻는 문항에서 일정하게 오류를 보였으며, 하위 위계의 지식보다 상위 위계의 지식을 묻는 문항을 잘 해결하는 경우도 있었다. 따라서, 기존의 평가에서 점수가 같다고 하더라도 지식 상태가 다르다면 학생의 평면도형의 둘레와 넓이에 대한 지식 수준이 유사한 단계라고 말할 수는 없었다. 이는 지식 공간론을 활용하여 구성한 학생의 지식 상태도를 통해 본시학습 전·후에 나타나는 학생들의 지식 상태를 비교하여 학생들의 학습 정도를 파악할 수 있고, 학습자 개개인에 대한 학습 전·후의 진단도 가능하여 학생 개별 지도의 자료로도 활용할 수 있다는 것을 의미한다.

5. 결론

본 연구의 목적은 지식의 위계성에 기반을 두고 평가 문항에 내재된 지식의 상태를 파악하고자 하는 지식 공간론을 활용하여 평면도형의 둘레와 넓이에 대한 지식의 위계 관계를 밝히고, 이를 통해 개별 학생의 지식 상태를 핫세 다이어그램으로 표현하여 판단해보고자 하는 것이다. 학교 수학에서 교사는 학문으로서 수학이 갖추고 있는 잘 구조화된 지식 구조와 함께 학생이 구성한 지식 상태와 구조를 밝혀냄으로서 이에 따른 효과적인 교수·학습 경로 및 지도 방안을 수립할 수 있어야 하고, 더불어 학생들에게 지식 구조가 잘 형성될 수 있도록 교수·학습 과정을 수행해 나가야 한다. 또한, 살펴본 바와 같이 어떤 평가에서 동일한 점수를 얻은 학생일지라도 지식상태가 다를 수 있으며, 교사는 이를 파악할 수 있어야만 각 개인에 맞는 적절한 개별적인 학습 처방이 가능할 수 있다.

지식 공간론은 평가 문항으로부터 지식의 위계와 평가 학생의 지식 상태와 같은 의미 있는 추론을 이끌어내는 과학적 방법을 제공하며, 정답 문항의 모임이라는 단편적인 정보에서 평가와 연관된 전반에 대한 정보를 추론하는 방법에 대한 수학적 타당성과 정당성을 갖는 평가 이론이다. 이에 본 연구는 지식 공간론에 대해서 구체적으로 살펴보고, 이를 수학과의 평가에 적용하여 학생들이 평면 도형의 둘레와 넓이 측정에 관련하여 구성하고 있는 내용의 위계 관계와 개별 학생들의 지식 상태를 분석해 보고자 D광역시 소재 초등학교 4곳을 선정하고, 선정된 학교의 6학년 학급 중에서 각각 1개 학급을 유의 추출하여 100명의 학생들을 대상으로 연구를 수행하였고 이에 따른 결과를 분석하였다.

본 연구에서 살펴본 바와 같이 수행한 지식 공간론에 기반을 한 평면도형의 둘레와 넓이에 대한 위계 분석과 학습자 개별의 지식 상태 분석은 학생의 출발점 상태를 확인하는 진단평가의 역할을 제공함으로서 개별화 학습의 기초 자료로 활용할 수 있고, 학습 후에 학생의 지식상태도는 형성평가와 향후 교수·학습 등을 위한 다양한 정보를 제공할 수 있다.

끝으로 교과의 위계에 대해서 Wilson은 학습자에 의해 학습되는 순서를 심리적 계열성, 교사에 의해 이루어지는 교수 계열성, 학문으로서 교과가 지니는 논리적 계열성 등으로 구분하는데([18]), 제시한 세 가지 계열성은 대체로 일치되는 경향을 가진다. 그렇지만 본 연구에서 살펴본 평면도형의 둘레와 넓이에 대한 학습자의 심리적 계열성은 교과서에 제시된 교수 계열성과는 차이가 있는 것으로 나타났다. 따라서 후속연구에서는 세 계열성의 관계를 살펴보고, 수학 교과에서 학문으로서의 논리적 계열성이 실제로 가르쳐지는 교수 계열성으로 구현되면서 변화되는 부분과 가르쳐진 후에 학생들에게 구조화된 심리적 계열성 사이의 차이점 등을 알아보는 것이 필요할 것이다. 더불어 지식 공간론에서는 이론적으로 위계 이론을 기반으로 한 학습자의 학습 경로와 교수자의 교수 경로를 제시하고 있는데, 본 연구에서는 자세히 다루지 못한 위계 이론과 교수·학습 경로와의 관계 분석이 후속 연구로 요구되는 바이다.

References

[1] H. Freudenthal, Revisiting Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht **(1991)**.

[2] Mi-Young Song and Sun-Hee Kim, Investigating the Hierarchical Nature of Content and Cognitive Domains in the Mathematics Curriculum for Korean Middle School Students via Assessment Items. School Mathematics. **(2007)**, Vol.9, No.2, pp.223-240.

[3] Do-Won Byun, Dal-Won Park and Deok-Ho Lee, A Study on the Algorithm of Searching the Learning Path based on Knowledge Space Theory. Report of Science Education. **(2002)**, No.33, pp.175-188.

[4] Do-Won Byun, In-chul Jung, Dal-Won Park, Young-Soon Ro and Seung-Dong Kim, Diagramming for Individualized Learning Process Based on Assessment in Mathematics Education. Mathematical Education. **(2004)**, No.43, pp.75-85.

[5] Hyeong-Cheol Jo, Jin-Sug Im and Seong-Sig Kim, Development of a Tool to Support Learning Tasks Analysis Using the Knowledge Space Theory. The Journal of Korean association of computer education. **(2005)**, Vol.7, No.1, pp.129-140.

[6] Hyeong-kyung Park, Young-hee Kim and Pyung-Kook Jeon, Analysis of the state of knowledge related to measuring the extent of fifth grade students in elementary school. 37th Proceedings of the Korea Society of Mathematical Education Conference. **(2006)**, pp.79-90.

[7] Ma-Byong Yoon, Hierarchical analysis of astronomical concepts using the knowledge space theory, Graduate school of Kongju National University **(2010)**.

[8] Hyeong-Jae Lee, Ji-Seon Ha and Sang-Tae Park, Middle School Science Gifted Students' Knowledge state Analysis of Light Concept Through Evaluation Questions. Journal of Gifted/Talented Education. **(2010)**, Vol.21, No.4, pp.861-884.

[9] J. P. Doignon and J. C. Falmagne, Knowledge Spaces, Springer-verlag **(1999)**.

[10] D. Albert and J. Lukas, Knowledge Spaces, Psychology Press, New York **(2012)**.

[11] J. C. Falmagne, D. Albert, C. Doble, D. Eppstein and X. Hu, Knowledge Spaces, Applications in

Education, Springer-verlag **(2013)**.

[12] Lee-Chae Jang, Tae-Kyun Kim and Jong-Duek Jeon, A note on fuzzy knowledge spaces. Proceedings of Korean Institute of Intelligent Systems. **(2002)**, Vol.12, No.2, pp.33-36.

[13] Institute of Science Education, Kongju National University, Introduction to Knowledge Space, Boseong, Seoul **(2002)**.

[14] J. R. Bergan, The Structural analysis of behavior: an alternative to the learning-hierarchies model. Review of Educational Research. **(1980)**, No.50, pp.625-646.

[15] Wan-Ho Chung , Hee-Young Cha and Sok-Bon Kang, A Survey on the Physiological Misconceptions of High School Students. Biology Education. **(1993)**, No.21, pp.35-53.

[16] P. T. Ashton, Teacher efficacy: A motivational paradigm for effective teacher education. Journal of Teacher Education. **(1984)**, No.35, pp.28-32.

[17] A. Bandura, Self-efficacy : The exercise of control, W.H. Freeman, New York **(1997)**.

[18] Cheong-Hwan Lim, Hierarchical Analysis of Logical Thinking Skills Using Ordering Theory. Journal of the Korean Earth Science Society. **(1992)**, No.13, pp.290-303.

[19] Jin-Woo Jeong and Jin-Hong Park, The Teaching Effect Based on Psychological Hierarchy of Earth Science Concepts in Middle School Students. Journal of the Korean Earth Science Society. **(1997)**, No.18, pp.138-145.

[20] N. W. Siedal and R. L. McKeen, More on the use of student generated learning hierarchies. Improving Human Performance. **(1974)**, No.3, pp.71-80.

[21] W. M. Bart, Some results of ordering theory for Guttman scaling. Educational and Psychological Measurement. **(1976)**, No.36, pp.41-148.

[22] W. M. Bart and D. Krus, An ordering-theoretic method to determine hierarchies among items. Educational and Psychological Measurement. **(1973)**, No.33, pp.281-300.

[23] Ma-Byong Yoon and Hee-Soo Kim, Hierarchical analysis of astronomical concepts using the knowledge space theory. Journal of the Korean Earth Science Society. **(2010)**, No.31, pp.259-266.

[24] Sang-Tae Park, Do-Won Byun, Hee-Bok Lee and Jun-Tae Kim, A Look at the Physics Concept Hierarchy of Pre-service Physics Teacher Through the Knowledge State Analysis Method. Journal of the Korean Association for Research in Science Education. **(2005)**, Vol. 25, No.7, pp.746-753.

[25] Go-Woon Park, Development of Diagnostic Test for Force and Motion in Mechanics by Knowledge State Analysis Method and its Application, Graduate school of Kongju National University **(2007)**.

[26] Seok-Cheon Kim, Development and Application of the Learning Diagnostic Test through the Knowledge State Analysis Method for Physics Knowledge, Graduate school of Kongju National University **(2008)**.

[27] Wan Kang, Gwi-Soo Na, Suk-Yoon Baek and Kyung-Hwa Lee, Elementary Mathematics Teaching Unit Dictionary, Gyeongmunsa, Seoul **(2013)**.

[28] Ministry of Education and Science Technology, Elementary Mathematics 5-1 Teacher's Guide, Genius Education chunjae, Seoul **(2011)**.