By Ngaba Franck

MetaScript

Mathematicl Fundamentals

Chapter 1

Set Theory

Set theory is a fundamental branch of mathematics that studies sets, that is, collections of well-defined objects. These objects, called elements, can be numbers, points, or even other sets. Set theory is essential for formalizing mathematical concepts and the foundations of mathematical logic.

Here are the basic concepts of set theory:

1.1 Concepts

1.1.1 Set

a Set is a collection of distinct elements. S = { a$_1, a_2, ..., a_n\}.Example : A = \{1, 2, 3\} isasetwhichcontain 1, 2 and 3.$
$B = \{banane, pomme, orange, ananas\}$

Property 1. *An infinite set is a set that contains an infinite number of elements. There are two main types of infinite sets:*

- *Countable: An infinite set is countable if it can be put into a one-to-one correspondence with the set of integers N. Example: The set of integers Z={...−3,−2,−1,0,1,2,3,...} is infinite and countable*
- *Uncountable: A set is uncountable if it is infinite, but there is no one-to-one correspondence with N. Example: The set of real numbers R is infinite and uncountable.*

1.1.2 Component of a Set

An object is an element of a set if it belongs to that set. We use the symbol $\in$*to indicate that an element belongs to a set. Example : 1* $\in$*A but 4* $\notin A$.

1.1.3 Empty Set

The Empty set, designated by $\emptyset$*or {} is a set that contains any element.*

1.1.4 Cardinality

The cardinality of a set is the number of elements in that set. If a set contains a finite number of elements, it is said to be finite, otherwise it is infinite.

Exemple : Si A=1,2,3A=1,2,3, alors la cardinalité de AA est ∣A∣=3∣A∣=3.

1.1.5 Universal Set

The universal set, denoted U, is the set that contains all possible objects in a given context. Other sets are considered subsets of the universal set.

Example: If we work with integers, the universal set can be U=Z, the set of all integers.

Property 2. *The Russel Paradox : Le paradoxe se pose lorsqu'on considère l'ensemble RR des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. La question est : est-ce que l'ensemble RR se contient lui-même ?*

Si RR se contient lui-même, alors par définition il ne devrait pas se contenir. Si RR ne se contient pas lui-même, alors par définition il devrait se contenir.

Cela mène à une contradiction logique.

Property 3. *It doesn't exst a Set which contains of the Sets and a Set can't contain itself*

1.1.6 Union, Complementary and Intersection

1.1.7 Cartesian product

1.1.8 Functions or Relations between 2 Sets

1.1.9 Cartesian product

1.1.10 Parts of a Set

1.2 Zermelo-Fraenke Set Theory

1. Axiome d'extensionnalité

Cet axiome formalise la notion d'égalité entre ensembles. Deux ensembles sont égaux s'ils contiennent exactement les mêmes éléments.

Si AA et BB sont des ensembles, alors A=BA=B si et seulement si □x(x□A□□□□x□B)□x(x□A□x□B).

2. Axiome de la paire

Cet axiome affirme que pour deux ensembles AA et BB, il existe un ensemble qui contient exactement AA et BB comme éléments.

Pour tout AA et BB, il existe un ensemble C=A,BC=A,B.

3. Axiome de la réunion (ou de l'union)

Pour tout ensemble AA, il existe un ensemble qui contient tous les éléments des ensembles contenus dans AA. Autrement dit, on peut former l'ensemble de l'union de tous les ensembles d'un ensemble donné.

Si AA est un ensemble, alors il existe un ensemble BB tel que B=□AB=□A (c'est-à-dire l'union de tous les éléments de AA).

4. Axiome de l'ensemble vide

Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément. Cet ensemble est l'ensemble vide, noté □□.

□A(□x(x□A))□A(□x(x□/A)).

5. Axiome de la compréhension (ou schéma d'axiome de séparation)

Pour tout ensemble AA et toute propriété définissable P(x)P(x), il est possible de former un sous-ensemble de AA contenant exactement les éléments de AA qui vérifient la propriété PP.

□A,□B,□x(x□B□□□□(x□A□P(x)))□A,□B,□x(x□B□(x□A□P(x))). Remarque : Cet axiome permet de définir des sous-ensembles tout en évitant les paradoxes comme celui de Russell.

6. Axiome de la puissance

Pour tout ensemble AA, il existe un ensemble BB qui contient tous les sous-ensembles possibles de AA. Cet ensemble est appelé l'ensemble des parties de AA, noté P(A)P(A).

□A,□B,□C(C□A□□□□C□B)□A,□B,□C(C□A□C□B).

7. Axiome de l'infini

Il existe un ensemble infini, souvent pris comme l'ensemble des nombres naturels NN, contenant l'ensemble vide et fermé sous l'opération de l'ajout d'un élément (le successeur).

Il existe un ensemble AA tel que □□A□□A et pour tout x□Ax□A, l'ensemble x□xx□x est aussi dans AA.

8. Axiome de remplacement (ou schéma d'axiome de substitution)

Si pour chaque élément d'un ensemble AA, une certaine règle PP associe un unique élément, alors l'ensemble des éléments ainsi associés forme lui-même un ensemble.

Si AA est un ensemble et que pour chaque x∈Ax∈A il existe un unique yy tel que P(x,y)P(x,y) est vrai, alors l'ensemble des yy ainsi associés forme un ensemble.

9. Axiome de fondation (ou de régularité)

Cet axiome interdit les ensembles qui contiennent eux-mêmes ou qui mènent à des chaînes infinies d'appartenance. Il garantit que toute relation d'appartenance est bien fondée.

Pour tout ensemble AA, il existe un élément x∈Ax∈A tel que A∩x=∅A∩x=∅ (ce qui implique que AA ne peut pas contenir AA ou un ensemble qui contient AA).

10. Axiome du choix (inclus dans ZFC)

Cet axiome affirme que, pour toute collection d'ensembles non vides, il est possible de choisir un élément dans chaque ensemble, même si cette collection est infinie. L'axiome du choix est souvent formulé ainsi :

Pour toute famille d'ensembles non vides Aii∈IAii∈I, il existe une fonction de choix ff telle que pour tout i∈Ii∈I, f(i)∈Aif(i)∈Ai.

Chapter 2

Linear Algebra

Chapter 3

Diffential Equations and Numerical Methods

Chapter 4

Geometry and Trigonometry

Chapter 5

raph Theory

Chapter 6

Lagrangian and Hamiltonian Mechanics

Chapter 7

Fourier Analysis