18 Вариант:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}2cx^2, & x\in(\cancel{0}\,{-1};1)\\ 0, & x\notin(-1,1)\end{cases}$$

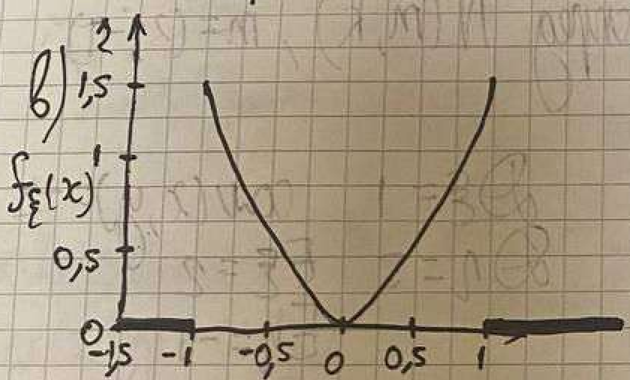
а) const c $\quad \int_{-1}^{1} f_\xi(x)\,dx=1 \quad \int_{-1}^{1} 2cx^2\,dx=1 \Rightarrow \frac{4c}{3}=1 \quad c=\frac{3}{4}$

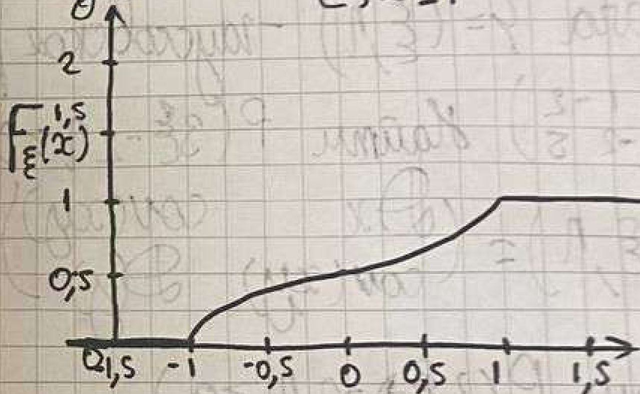
б) ф-ция распред СВ ξ ; $F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$

для $x\le -1$ и $x\ge 1$ ф-ция распред равна 0 и 1. Для $-1\le x<1$

$F_\xi(x)=\int_{-1}^{x}\frac{3}{2}t^2\,dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}$; $\begin{cases}0, & \text{при } x<-1\\ x^3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, & x\in[-1;1)\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

в)





г) $E(2-2\xi)(-\xi-3)=\int_{-1}^{1}(2-2x)(-x-3)\frac{3}{2}x^2\,dx=\frac{3(2x^5+5x^4-10x^3)}{10}$

$\int_{-1}^{1}\frac{3x^3(2x^2+5x-10)}{10}\,dx=-\frac{24}{5}$

д) $D(-3\xi+2)=(-3)^2D(\xi)=9\cdot E(\xi^2)=9\cdot\frac{3}{5}=\frac{27}{5}=5{,}4$

е) $P(\xi>0{,}5)=1-P(\xi\le 0{,}5)=1-F_\xi(0{,}5)=1-\left(\frac{0{,}5^3}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{16}$

Ответ: а) $\frac{3}{4}$ б) $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ x^3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, & x\in[-1;1)\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$ в) $\boxed{\checkmark}$ г) $-\frac{24}{5}$; д) 5,4

е) $\frac{7}{16}$

№4

1) Покажем, что $\lambda = \frac{4\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}$

По условию нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda v^2 e^{-\beta v^2} dv = 1$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda v^2 e^{-\beta v^2} dv = 0 + \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda v^2 e^{-\beta v^2} dv = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} v^2 e^{-\beta v^2} dv$

Возьмем его по частям $\int \underbrace{v}_{x} \underbrace{v e^{-\beta v^2} dv}_{dy} = xy - \int y dx$

$x = v \to dx = dv$, $dy = ve^{-\beta v^2} dv \to y = \int ve^{-\beta v^2} dv$ ← возьмем по частям

$\int \underbrace{v}_{x} \underbrace{e^{-\beta v^2} dv}_{dy} = x = v \to dx = dv$, $dy = e^{-\beta v^2} dv \to y = \int e^{-\beta v^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}}$ - интеграл Эйлера-Пуассона

$\beta > 0$

Тогда $\int ve^{-\beta v^2} = xy - \int y dx = \frac{v\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} - \int \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} dv = \frac{v\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} dv = \frac{1}{2\beta}$

$\int\limits_{0}^{+\infty} v^2 e^{-\beta v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^{\frac{3}{2}}}$, подставим $\to \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{4\beta^{\frac{3}{2}}} = 1 \to \lambda = \frac{4\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}$ - ЧТД

2) Найдем плотность распред. кинетической энергии

$f_E(x) = \frac{1}{2} m v^2$; По формуле с лекции: $f_\eta(y) = f_\xi(\Phi^{-1}(y)) * |\Phi^{-1}(y)'|$

Заметим, что $E = \frac{m}{2} v^2$ - строго монотонна при $v > 0$ и т.к $v > 0$ → формула применима. Пусть Плот-ть распред кинетической энергии $f_E(v)$, пл-ть распред. абсолютного знач v молекул $f_V(v)$

$f_V(v) = \lambda v^2 e^{-\beta v^2}$ $\quad y = \Phi(v) = \frac{m}{2} v^2 = \gamma v^2$ $\quad v = \psi(y) = \Phi^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{\gamma}}$

Берем только с + $(v > 0)$: $v' = (\Phi^{-1}(y))'^{+} = (\sqrt{\frac{y}{\gamma}})' = \frac{1}{2\sqrt{\gamma y}}$ тогда

$f_E(y) = f_V(\sqrt{\frac{y}{\gamma}}) \left|\frac{1}{2\sqrt{\gamma y}}\right|$: т.к $\frac{1}{2\sqrt{\gamma y}} > 0$ и $\gamma = \frac{m}{2}$: $f_E(y) = f_V(\sqrt{\frac{2y}{m}}) \left|\frac{1}{\sqrt{2my}}\right|$

Опускаем модуль т.к $v > 0 \Rightarrow f_E(y) = f_V(\sqrt{\frac{2y}{m}}) \frac{1}{\sqrt{2my}}$

Ответ: 1) ЧТД 2) $f_E(y) = f_V(\sqrt{\frac{2y}{m}}) \frac{1}{\sqrt{2my}}$