ИДЗ 3

Маслов Данила, БПИ228, Вариант 18

10 декабря 2023

Задача 5

Условие

Случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (μ_1, μ_2) и ковариационной матрицей:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & cov(\xi, \eta) \\ cov(\eta, \xi) & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}$$

Найти: $P(\xi - 2\eta > 8)$, если $(\mu_1, \mu_2) = (10; 0)$; $\Sigma = \begin{pmatrix} 40 & -8\sqrt{10} \\ -8\sqrt{10} & 48 \end{pmatrix}$

Решение

ξ и η распределены по нормальному закону, т.е. $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_\xi^2) = N(10, 40), \eta \sim N(\mu_2, \sigma_\eta^2) = N(0, 48)$. При этом $E\xi = \mu_1 = 10, D\xi = \sigma_\xi^2 = 40, E\eta = \mu_2 = 0, D\eta = \sigma_\eta^2 = 48$.

$\xi - 2\eta$ - линейная комбинация случайных величин ξ и η, следовательно, $\xi - 2\eta$ также распределена по нормальному закону. Найдем параметры распределения, пользуясь свойствами математического ожидания, дисперсии и ковариации:

$$E(\xi - 2\eta) = E\xi - 2E\eta = 10 - 2 \cdot 0 = 10$$

$D(\xi - 2\eta) = D\xi + (-2)^2 D\eta + 2cov(\xi, -2\eta) = D\xi + 4D\eta - 4cov(\xi, \eta) = 40 + 4 \cdot 48 - 4 \cdot (-8\sqrt{10}) = $
$= 232 + 32\sqrt{10}$

$$\xi - 2\eta \sim N(10, 232 + 32\sqrt{10})$$

$P(\xi - 2\eta > 8) = P(8 < \xi - 2\eta < +\infty) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(\frac{8-10}{\sqrt{232+32\sqrt{10}}}) \approx \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(-0,1096) \approx$
$\approx \Phi(+\infty) + \Phi_0(0,11) = 0,5 + 0,0438 = 0,5438$

Ответ: 0,5438

Задача 6

Условие

В условиях предыдущей задачи найти условную вероятность $P(|\eta| < \frac{8\sqrt{2}}{3} | \xi = 10)$

Решение

По теореме о нормальной корреляции условное распределение СВ ξ_1 при условии $\xi_2 = y$ является гауссовским с параметрами:

$$E(\xi_1|\xi_2 = y) = E\xi_1 + \frac{cov(\xi_1, \xi_2)}{D\xi_2}(y - E\xi_2),$$

$$D(\xi_1|\xi_2 = y) = D\xi_1 - \frac{(cov(\xi_1, \xi_2))^2}{D\xi_2}.$$

Найдем параметры условного распределения СВ η при условии $\xi = 10$:

$$E(\eta|\xi = 10) = E\eta + \frac{cov(\eta, \xi)}{D\xi}(10 - E\xi) = 0 + \frac{-8\sqrt{10}}{40}(10 - 10) = 0$$

$$D(\eta|\xi = 10) = D\eta - \frac{(cov(\eta, \xi))^2}{D\xi} = 48 - \frac{(-8\sqrt{10})^2}{40} = 32$$

$$(\eta|\xi = 10) \sim N(0; 32)$$

$P(|\eta| < \frac{8\sqrt{2}}{3}|\xi = 10) = P(-\frac{8\sqrt{2}}{3} < \eta < \frac{8\sqrt{2}}{3}|\xi = 10) = \Phi_0(\frac{\frac{8\sqrt{2}}{3} - 0}{32}) - \Phi_0(\frac{-\frac{8\sqrt{2}}{3} - 0}{32}) = \Phi_0(\frac{\sqrt{2}}{12}) + \Phi_0(\frac{\sqrt{2}}{12}) \approx 2\Phi_0(0, 12) = 2 \cdot 0, 0478 = 0, 0956$

Ответ: 0,0956