TP2 de méthodes numériques

- Intégration numérique -

Exercice 1 : Méthode de Simpson composée

Écrire une fonction qui permet de calculer l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ avec la méthode de Simpson composée. Votre programme devra prendre :

1. **en arguments d'entrée :** les valeurs de a, b, le nombre n d'intervalles de quadrature, f ;
2. **en sortie :** l'intégrale I.

Exercice 2 : Méthodes de Gauss

Rappel de cours : Les méthodes de quadrature de gauss permettent de trouver $n+1$ points de quadrature $\{x_0, \cdots, x_n\}$ et $n+1$ coefficients $\{\lambda_0, \cdots, \lambda_n\}$ tels que la formule approchée :

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

soit d'ordre $2n+1$ (exacte pour $f \in \mathbb{P}_{2n+1}$), où $\omega : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction poids.

1. **Méthode de Gauss-Legendre :** $\omega(x) = 1$

Rappel de cours :

— $[a,b] = [-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Nombre de points de quadrature	Points de quadrature x_i	Poids associés λ_i
0	-	-
1	0	2
2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$	1, 1
3	$-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$

— Sur $[a,b]$ quelconque :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \times \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(z_i)$$

avec

$$z_i = \frac{b-a}{2} \times x_i + \frac{b+a}{2}.$$

(a) Programmez la méthode de Gauss-Legendre avec $n = 2$ et $n = 3$, sur un intervalle $[a,b]$ quelconque.

(b) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 xe^{-x}dx$ par la formule de Gauss-Legendre à 3 noeuds et par la formule de Simpson avec 3 évaluations de f. Laquelle est la plus précise ?

2. **Méthode de Gauss-Chebycheff** ($\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$)

Rappel de cours :

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{b-a}{2} \times \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Les points et les coefficients de quadrature sont donnés pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\boxed{x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \times \frac{\pi}{2}\right) \qquad \lambda_i = \frac{\pi}{n+1}} \qquad i \in \{0, \cdots, n\}$$

(a) Écrire une fonction prenant en entrée une fonction f et un entier n et qui retourne la valeur approchée de l'intégrale de $f(x)/\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$

(b) Tracer l'erreur entre la formule de Gauss-Chebycheff et la valeur "exacte" de l'intégrale en fonction de n pour la fonction $g : x \mapsto exp(2x)$ avec $n = 2, \cdots, 10$. Commenter.