Méthodes itératives de résolution d'un système linéaire

Exercice 1 : Soit à résoudre le système linéaire :

$$AX = b$$

avec A une matrice carrée de taille n, b le vecteur réponse et X la solution recherchée. On se propose de résoudre ce système par des méthodes itératives ; pour cela, il vous est demandé d'écrire les fonctions qui suivent sous Python :

1. *jacobi* mettant en oeuvre la méthode de Jacobi,
2. *gausseidel* mettant en oeuvre la méthode de Gauss-Seidel.

Ces fonctions doivent prendre pour :
— arguments d'entrée : la matrice A, le vecteur b, un vecteur de départ, la précision souhaitée et le nombre maximal d'itérations autorisé,
— arguments de sortie : la solution X trouvée si le processus a convergé et un message d'erreur sinon.

Exercice 2 : Soit à résoudre le système linéaire $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le conditionnement de A. Qu'en concluez-vous ?
2. Trouver la solution X^* de ce système par la méthode du pivot de Gauss.
3. Résoudre ce système par la méthode de Jacobi, pour une précision $\epsilon = 10^{-6}$, un nombre maximal d'itérations autorisé $N_{max} = 1000$, pour différents vecteurs de départ :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 2000 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   Vous constatez la convergence de la suite des solutions approchées vers la solution exacte, pour les différents vecteurs de départ choisis. La convergence est assurée dans cet exemple quel que soit le vecteur de départ choisi. Quelle propriété de la matrice A permet ce résultat ?

4. Choisissons comme vecteur de départ le vecteur nul. Pour différentes précisions ϵ, déterminer le nombre d'itérations utiles puis donner une représentation graphique du nombre d'itérations utiles par rapport à la précision souhaitée. Commenter.