TP4 : Équations différentielles ordinaires (EDO)

- Applications -

F. Saïd

---

1 Application 1 : Évolution de population

On s'intéresse à l'évolution dans le temps d'une population donnée (humaine, animale, ensemble de particules, de molécules...). L'unité de temps est par exemple l'année, et l'unité de population le millier d'individus. On postule, pour des raisons d'espace disponible, de ressources, etc, que l'accroissement de la population pendant un petit intervalle de temps, $dP(t)$, est proportionnel à la fois à l'intervalle de temps, dt, au taux de croissance, r, supposé constant, à la taille actuelle de la population $P(t)$ (plus il y a d'individus, plus il y a de naissances), mais aussi à l'écart entre population théorique maximum K et population actuelle $K - P(t)$ (quand on approche du maximum de la population, les ressources disponibles diminuent et la mortalité augmente).
Ceci nous amène à l'équation :

$$dP(t) = \frac{r}{K} P(t) \left(K - P(t)\right) dt \tag{1}$$

que l'on peut encore écrire sous la forme suivante, dite modèle logistique :

$$\boxed{\frac{dP}{dt}(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)} \tag{2}$$

La population $P(t)$ des États-Unis d'Amérique, entre 1790 et 1910, a été étudiée avec ce modèle par Pearl et Reed en 1920. Avec l'origine des temps en 1790, les valeurs des paramètres du modèle logistique sont donnés par $K = 197273$ et $r = 0.031$.

1. Représenter l'évolution de la population des États-Unis entre 1790 et 1910, par pas de 10 ans.
2. La population réelle des États-Unis pour cette période (en milliers d'habitants) est donnée par le tableau ci-dessous. Le compléter et commenter la différence entre les données estimées et les données réelles.

Année	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
Population réelle	3929	5308	7240	9638	12866	17069	23192
Estimation	3929	5318	7180	9662	12944	17 237	22778
Année	1860	1870	1880	1890	1900	1910	
Population réelle réelle	31443	38558	50156	62948	75995	91972	
Estimation	29805	38522	49042	61324	75124	89974	

3. Quand la population maximale est-elle atteinte, à un million près, d'après ce modèle ?

2 Application 2 : Loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement (resp.réchauffement) de Newton, énoncée par Isaac Newton stipule que le taux de perte (resp. gain) de chaleur d'un corps est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu environnant.

Sa formulation mathématique est :

$$\boxed{\frac{dT}{dt}(t) = k(T(t) - T_A)} \tag{3}$$

où $T(t)$ désigne la température du corps à l'instant t, T_A la température constante du milieu ambiant et k une constante réelle qui dépend des caractéristiques physiques du corps.

— Si k est positive, le corps gagne en température et il en perd si k est négative.
— Si le corps est de grandes dimensions et bien isolé alors sa perte ou gain de température est lente et la constante $|k|$ est petite.
— Si l'objet est petit et mal isolé alors sa perte ou gain de température est rapide et $|k|$ est grand.

Avec la loi de refroidissement de Newton, on peut par exemple prédire le temps nécessaire au refroidissement d'un objet soumis à une température ambiante connue, ou encore l'heure de décès d'une personne connaissant sa température probable à l'heure du décès et sa température actuelle.

Application : Lorsqu'un poulet est sorti du four, sa température est de 300°F et trois minutes plus tard, sa température est de 200°F. La température ambiante, quant à elle, est de 70°F.

1. Écrire la loi de refroidissement du poulet.
2. Résoudre de manière exacte et approchée l'équation différentielle trouvée.
3. Représenter l'évolution de la température du poulet depuis sa sortie du four.
4. Combien de temps faudra-t-il pour que le poulet atteigne la température ambiante ?