$$\therefore X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2、$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}$

则 $(A\vdots E)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0\\2&3&4&5&0&1&0\\5&4&3&2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0\\0&-1&-2&-3&-2&1&0\\0&-6&-12&-18&-5&0&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-6r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0\\0&-1&-2&-3&-2&1&0\\0&0&0&0&7&-6&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-3&2&0\\0&-1&-2&-3&-2&1&0\\0&0&0&0&7&-6&1\end{pmatrix}$

$\therefore P$为 $\begin{pmatrix}-3&2&0\\-2&1&0\\7&-6&1\end{pmatrix}$

PA为 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

17. 非齐次线性方程组为

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

$\therefore$ 系数矩阵为 $\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}$

利用克拉默法则:

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow[r_1\div(\lambda+2)]{r_1+r_2+r_3}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

若 $|A|\neq0$ 即 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时有唯一解

当 $\lambda=1$ 时 增广矩阵为 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}$

故化为行阶梯为 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}$

$$\begin{cases}x_1=1-x_2-x_3\\x_2=c_1\\x_3=c_2\end{cases}$$ 故 $x_1=1-c_1-c_2$

$$\therefore x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

18. 该方程的增广矩阵为 $(A:B)=\begin{pmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}$

原矩阵 $\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&-2&1&\lambda\\-2&1&1&-2\\1&1&-2&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&1&\lambda\\0&-3&3&2\lambda-2\\0&3&-3&\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&\lambda\\0&-3&3&2\lambda-2\\0&0&0&(\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}$

若要使该方程有解 $R(A)=R(A:B)$ 故

$(\lambda-1)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda=1$ 或 -2

当 $\lambda=1$ 时 令 $x_3=c$ 故 $x_2=c$ $x_1=1+c$

$$\therefore \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

当 $\lambda=-2$ 时 令 $x_3=c$ 故 $x_2=c+2$ $x_1=c+2$

$$\therefore \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

22、由定理7 有解的充要条件为 $R(A)=R(A,E_m)$

A为$m\times n$矩阵故 $R(A)\le m$

$$m=R(E_m)\le R(A,E_m)=R(A)$$

$$\therefore R(A)=m$$

习题四：

4. $a_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$ $a_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix}$ $a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$

故 $|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-r_3]{r_1-ar_3}\begin{vmatrix}0&1+a&1-a^2\\0&a+1&-1-a\\1&-1&a\end{vmatrix}$

将行列式按列展开则有 $(1+a)(-1-a)-(a+1)(1-a^2)$

$$=(1+a)[-1-a-1+a^2]=(a+1)^2(a-2)$$

当行列式为0时线性相关故有：

$$(a+1)^2(a-2)=0 \Rightarrow a=-1 \text{ 或 } a=2 \text{ 时相关}$$

10. 方法一：设有 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 使得：

$$x_1b_1+x_2b_2+\cdots+x_rb_r=0$$

即 $x_1a_1+x_2(a_2+a_1)+\cdots+x_r(a_1+a_2+\cdots+a_r)=0$

$\Rightarrow (x_1+x_2+\cdots+x_r)a_1+(x_2+x_3+\cdots+x_r)a_2+\cdots+x_ra_r=0$

$\because$ $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关 则

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_r=0\\ x_2+x_3+\cdots+x_r=0\\ \vdots\\ x_r=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\\ \vdots\\ x_r=0\end{cases}$$

故 $x_1b_1+x_2b_2+\cdots+x_rb_r$ 只有零解

故线性无关.

方法二：$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_r)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$

右侧矩阵为一个上三角 记为 K 故 $|K|=1\neq 0$.

即 K 为可逆阵 由矩阵秩的性质可知

$$R(AK)=R(A)$$ 故

又 $\because$ $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 为线性无关 $\Rightarrow R(A)=r$

$\therefore R(B)=r$ 则 $(b_1, b_2, \cdots, b_r)$ 为线性无关

方法三：$(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_r) = (a_1, a_1+a_2, \cdots, a_1+a_2+\cdots+a_r)$

$\xrightarrow{c_2-c_1} (a_1, a_2, \cdots, a_1+a_2+\cdots+a_r) \xrightarrow{c_3-c_2-c_1} \cdots \xrightarrow{c_r-c_{r-1}-\cdots-c_1}$

$(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ $\therefore$ 可知 $R(b_1, b_2, \cdots, b_r) = r$.

故可知 $b_1, b_2, \cdots b_r$ 线性无关

(3) 由已知关系可以写出等式如下：

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \times]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

将行列式记作 K $\quad R(K)=2$

$R(B) = R(AK) \leq \min\{R(A), R(K)\} = 2$

故 $R(B) \leq 2$ 即小于3

$\therefore b_1\ b_2\ b_3$ 线性相关

14 (2) 设Ⅰ的系数矩阵为A，Ⅱ的系数矩阵为B

$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$

故 $A \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$ $\quad B \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$

对A故设 $x_3=a_1,\ x_4=a_2$ $\quad$ 对B则有 $x_3=b_1,\ x_4=b_2$

$\therefore x_1=-x_4=-a_2$ $\quad x_1=-x_4=-b_2$

$x_2=x_4=a_2$ $\quad x_2=x_3-x_4=b_1-b_2$

$\therefore \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{cases}-a_2=-b_2\\a_2=b_1-b_2\\a_1=b_1\\a_2=b_2\end{cases}$ $\quad \begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_2=\frac{1}{2}b_1\end{cases}$

故设 $b_2=c$ 则可得 $a_1=2c\quad a_2=c\quad b_1=2c\quad b_2=c$

代回解中可得

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=2c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$

28. 非齐次方程的通解 = 对应齐次方程的通解 + 非齐次一个特

对齐次方程的解中性质3可知

对应方程的解为 $x_1 = \eta_1 - \eta_2$ $x_2 = \eta_1 - \eta_3$

又由性质1可知 $x = \xi_1$ 与 $x = \xi_2$ 都为解 则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 也为解

$\therefore x = (\eta_1 - \eta_2) + (\eta_1 - \eta_3)$ 也为解

即 $x = 2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ 为基础解系.

$\therefore$ 通解 $= c\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

32 (1) 若 $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 是线性相关的

又 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 是基础解系 故线性无关

$\therefore \eta^*$ 可由 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示

又 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 对应齐次方程的基础解系 故知:

η^* 是 $Ax = 0$ 齐次方程的一个解

又题中已知 η^* 是非齐次线性方程一解 故矛盾.

故 $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关

(2) 又 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \cdots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 该向量组中的元素

都可以用向量组 $\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表示

故 $R(A) = R(B) = n - r$

故也线性无关

习题五：

6.(2) 设矩阵A为 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$ 特征向量为x，特征值为λ

由定可知 $A\cdot x=\lambda x \Longleftrightarrow Ax-\lambda x=0$

$(A-\lambda E)x=0$. 有非零解的条件为 $|A-\lambda E|=0$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\2&1-\lambda&3\\3&3&6-\lambda\end{vmatrix} \xlongequal{r_1+(-r_2)} \begin{vmatrix}-1-\lambda&\lambda+1&0\\2&1-\lambda&3\\3&3&6-\lambda\end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix}-1-\lambda&0&0\\2&3-\lambda&3\\3&6&6-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)[(3-\lambda)(6-\lambda)-\cancel{9}18] = (-1-\lambda)(18-9\lambda+\lambda^2-18)$$

$$=(-1-\lambda)(\lambda-9)\lambda=0$$

$\therefore \lambda_1=0 \quad \lambda_2=-1 \quad \lambda_3=9$.

故 当$\lambda_1=0$时 代入可得

$A\cdot x=0$ 由

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1-r_2]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\div(-3)]{r_1+r_2} \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 基础解系为 $P_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 故 k_1P_1 为当λ_1取0时的特征向量

当$\lambda_2=-1$时 $\Rightarrow (A+E)x=0 \quad A+E=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{pmatrix}$

原式 $\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}2&2&3\\3&3&7\\2&2&3\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{2r_2-3r_1} \begin{pmatrix}2&2&3\\0&0&5\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix}2&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

故可得基础解系为 $P_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 故 k_2P_2 为λ_2取-1时的特征向量

当$\lambda_3=9$时

$$A-9E=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix}-5&5&0\\5&-5&0\\3&3&-3\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{2r_1-r_2} \begin{pmatrix}-2&0&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故所得基础解系为 $P_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 故 k_3P_3 为 $\lambda_3=9$时的特征向量