目录

1 第一部分：作业题整理

1.1 集合与映射作业题

1.1.1

试证：映射左可逆当且仅当它是单射; 右可逆当且仅当它是满射

证明. (1) 设 f 映射左可逆，当且仅当它是单射。
(a) 必要性：设 g 是 f 的左逆，则对 $\forall t \in T$，有 $g(f(t)) = t$。即 $g \circ f = I_T = I_T(t)$。有 $g \circ f = I_T$，而 I_T 是双射，故 f 是单射。
(b) 充分性：定义 $g : S \to T$ 如下 $g(s) = t_1$，$s \in f(T)$ 且 $f(t_1) = s$。对每个 $s \in S$，$g(s)$ 只有一个值，且若 $f(t_1) = s$，因 $g \circ f(t_1) = g(s) = t$。
故 g 是 f 的左逆。

(2) 右可逆当且仅当它是满射。
(a) 必要性：设 g 是 f 的右逆，则对 $\forall s \in S$，有 $f(g(s)) = s$。有 $f \circ g = I_S$，而 I_S 是双射，故 f 是满射。
(b) 充分性：若 f 是满射，则对任意 $s \in S$，至少存在一个 $t \in T$，使得 $f(t) = s$。定义 $g : S \to T$ 如下，对每个 $s \in S$，有:

1. 若只有一个 $t \in T$ 使得 $f(t) = s$，令 $g(s) = t$。
2. 若有 $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$，使得 $f(t_1) = f(t_2) = \cdots = f(t_n) = s$，则取某一个 t_i，令 $g(s) = t_i$。

这样，对每个 $s \in S$，$g(s)$ 只有一个值，且 $f(g(s)) = s$。故 g 是 f 的右逆。

□

1.1.2

试证：全体有理数是可数的。

证明. 我们先证明 $[0, 1)$ 中全体有理数是可数的。显然，排列

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}, \ldots$$

这样就列举出了 $[0,1)$ 中的所有有理数。我们把这些数重新排列：从第一行开始，从左到右排列成

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\dots$$

然后剔除重复的数，可得列出的就是 $[0,1)$ 中有理数的全集。

很明显，当有理数 $r\in[0,1)$ 时，对任何整数 n，映射 $r\to r+n$ 是 $[0,1)$ 中的有理数和 $[n,n+1)$ 中的有理数之间的一一对应。因此，$[n,n+1)$ 的全体有理数也是可数的。

这样，上述全体有理数可以表示为

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\{x: x\in[n,n+1),\ x\in\mathbb{Q}\},$$

这是可数个互不相交的可数集的并。

因此，全体有理数是可数的。 □

1.1.3

试证：可数个至多可数集的并集是至多可数的。

证明. 设意即为 $S=\bigcup E_n\ (n=1,2,3,\dots)$ 是一列至多可数集。

令 $S=\bigcup E_n$，那么 S 是至多可数集。不妨对每个 $n\in\mathbb{N}^*$，$E_n=\{x_{n1},x_{n2},\dots,x_{nk},\dots\}$。

考虑下列无限矩阵列：

$$\begin{array}{ccccc}
x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & \dots\\
x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{24}, & \dots\\
x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & x_{34}, & \dots\\
x_{41}, & x_{42}, & x_{43}, & x_{44}, & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

其中第 n 行由 E_n 的元素组成，这个矩阵列包含 S 中的所有元素。

按照简单指示图的那样，这些元素可以排成一行：

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{13},\ x_{22},\ x_{31},\ x_{14},\ x_{23},\ x_{32},\ x_{41},\ \dots$$

当两个集合 E_i 和 E_j 有公共元素时，这些元素在这一行中会重复出现。我们从左到右顺次，重复元素仅保留第一次出现的那个。

这样以后，得到的单集合 S 即为 S 的所有元素。因此，S 是至多可数的。 □

1.1.4

试构造一个开区间 $(0,1)$ 与闭区间 $[0,1]$ 之间的一一对应。

证明. 我们构造下面函数从 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 上的映射 f：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{当}x=0\text{ 时},\\ \frac{1}{n+2}, & \text{当}x=\frac{1}{n}\text{ 时}(n\in\mathbb{N}^*),\\ x, & \text{当}x\notin\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\}\text{ 时}.\end{cases}$$

显然，f 是 $(0,1)$ 与 $[0,1]$ 之间的一一对应关系。 □

1.1.5

试证：每个无限集与自身的一个真子集对等。

证明. 因为有限集是不存在自反真子集对等的，若证明 A 为无限集的充要条件为 A 与其某真子集对等，即可证明题目。

1. 充分性：因为有限集不存在真子集对等，故充要性显然成立。
2. 必要性：取 A 中一个非空有限子集 B。显然，有 $A\sim(A\setminus B)$，即得必要性。

故每个无限集都与自身的一个真子集对等。 □

1.2 数列极限作业题

1.2.1

设 $a>0$。求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ 和 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$。

证明. **(1) 证明** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$：

1. 当 $a=1$ 时，显然存在 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$。

2. 当 $a>1$ 时，记 $a^{1/n}=1+d_n$，则 $d_n>0$。由 $a=(1+d_n)^n=1+nd_n+\frac{n(n-1)}{2}d_n^2+\cdots$，得：

$$d_n=a^{1/n}-1\le\frac{\ln a}{n}.$$

显然，当 $n\to\infty$ 时，$a^{1/n}\to1$。

3. 当 $0 < a < 1$ 时，令 $\frac{1}{a} > 1$，同理可得 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$。

综上，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$。

(2) 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$**:**

1. 当 $a \neq 0$ 时，设 $k = \lfloor |a| \rfloor + 1$，表示不大于 $|a|$ 的整数加 1，则:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{|a|^n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} \leq \frac{k}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}.$$

2. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，取 $N = \max\{k, \frac{k|a|}{\varepsilon}\}$，当 $n > N$ 时，有:

$$\frac{a^n}{n!} \leq k \cdot \frac{|a|}{n!} < \varepsilon.$$

故 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$。

综上:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

□

1.2.2

已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，试证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor na_n \rfloor}{n} = a$$

此处方括号表示取整函数。

证明. **(1) 证明** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$**:**

已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 即对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 当 $n > m$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$。

取自然数 m, 设 $|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_m - a| = A$ 是正数, 已知 $\lim_{n\to\infty} \frac{A}{n} = 0$, 即对于上述同样的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 且 $N > m$，当 $n > N$ 时，有 $\frac{A}{n} < \varepsilon$。

从而有:

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right|$$

$$\leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_m - a|}{n} + \frac{|a_{m+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}.$$

前一项小于 $\frac{A}{n}$，后一项小于 ε，因此:

$$\frac{A}{n} + \frac{n - m}{n}\varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性，可得 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$。

(2) 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor na_n\rfloor}{n}=a$：

因为 $|\lfloor na_n\rfloor-na_n|<1$，故：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor na_n\rfloor-na_n}{n}=0$$

又有：

$$\left|\frac{\lfloor na_n\rfloor}{n}-a\right|=\left|\frac{\lfloor na_n\rfloor-na_n}{n}+\frac{na_n}{n}-a\right|\leq\frac{|\lfloor na_n\rfloor-na_n|}{n}+|a_n-a|$$

因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，有 $\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$，从而：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor na_n\rfloor}{n}=a$$

综上：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor na_n\rfloor}{n}=a$$

□

1.2.3

设 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$。试证：

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}\right)=0$$

证明. 注意到：

$$\sum_{k=0}^{p}a_k\sqrt{n+k}=\sum_{k=0}^{p}(a_0+a_1+\cdots+a_k)\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n+k+1}\right),$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\frac{a_0+a_1+\cdots+a_k}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n+k+1}}.$$

由于 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$，显然：

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}\right)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

□

1.2.4

设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-2}) = 0$，试证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$$

证明. 为方便起见，令 $a_0 = 0$，那么：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_2 - a_0) + (a_4 - a_2) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n-2})}{n}.$$

由已知条件 $\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-2}) = 0$，因此：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{n} = 0$$

同理，可得：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{2n+1} = 0$$

合并后得：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$$

进一步，计算：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \right)$$

由 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ 和 $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$，有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0 - 0 = 0$$

综上，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$。 □

1.2.5

设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $0 < a_n < 1$，$(1 - a_n)a_{n+1} > \frac{1}{4}$，$n \in \mathbb{N}$。

试证：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

证明. 注意到函数 $(1-x)x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$，因此由条件 $(1-a_n)a_{n+1} > \frac{1}{4} \geq (1-a_n)a_n$，可知 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的。

进而可得 $\{a_n\}$ 有极限，令其为 a，那么有：

$$(1-a)a \geq \frac{1}{4}$$

解得 $a = \frac{1}{2}$。

因此，$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \frac{1}{2}$。 □

1.2.6

设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对所有正整数 n,p 满足

$$|a_{n+p}-a_n| \leq \frac{p}{n}$$

问 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是否是基本列?

证明. $\{a_n\}$ 不一定是基本列。例如取 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，那么 $|a_{n+p}-a_n| \leq \frac{p}{n}$ 是成立的，但 $\{a_n\}$ 显然发散，不是基本列。 □

1.2.7

设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对所有正整数 n,p 满足

$$|a_{n+p}-a_n| \leq \frac{p}{n^2}$$

问 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是否是基本列?

证明. $\{a_n\}$ 是基本列。

对 $\varepsilon > 0$，只要取 $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$，那么当 $n > N$ 时，有:

$$\begin{aligned}
|a_{n+p}-a_n| &\leq |a_{n+p}-a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1}-a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1}-a_n| \\
&\leq \frac{1}{(n+p-1)^2} + \frac{1}{(n+p-2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)n} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} < \varepsilon
\end{aligned}$$

即 $\{a_n\}$ 是柯西收敛级列，故 $\{a_n\}$ 是基本列。 □

1.2.8

设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界且发散，试证 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 必有两个子列收敛于不同的极限。

证明.

1. 由列紧性定理知 $\{a_n\}$ 有一个收敛子列，极限设为 a。
2. 因为 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限，所以 $\exists \varepsilon_0 > 0$，使得对于每行 $j > 0$，都存在 $k_j > 0$ 使得 $|a_{k_j} - a| \geq \varepsilon_0$。

3. 不妨让 $k_{j+1} > k_j$，那么从子列 $\{a_{k_j}\}$ 中又可以取出另一个收敛子列。显然，这是 $\{a_n\}$ 的一个收敛子列，且不以 a 为极限。

综上，$\{a_n\}$ 有界发散，$\{a_n\}$ 必有两个子列收敛于不同的极限。 □

1.3 有限覆盖上下极限作业题

1.3.1

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界数列，试证：

$$\liminf a_n + \liminf b_n \le \liminf(a_n + b_n) \le \liminf a_n + \limsup b_n \le \limsup a_n + \limsup b_n$$

证明. 注意到上下极限的关系，要证的是不等式，仅需证明：

$$\liminf a_n + \liminf b_n \le \liminf(a_n + b_n) \le \liminf a_n + \limsup b_n \tag{1}$$

$$\liminf(a_n + b_n) \le \liminf a_n + \limsup b_n \le \limsup a_n + \limsup b_n \tag{2}$$

我们只需证明其中的不等式 (1) 和 (2)，其余不等式可以由类似推导得到。

证明不等式 (1)：

$$\inf a_k + \inf b_k \le \inf(a_k + b_k) \le \inf a_k + \sup b_k$$

1. 当 $k \to \infty$ 时：

$$\inf a_k \le a_k, \quad \inf b_k \le b_k \implies a_k + b_k \ge \inf a_k + \inf b_k$$

因此，$\inf a_k + \inf b_k$ 是 $a_k + b_k$ 的一个下界，从而：

$$\inf a_k + \inf b_k \le \inf(a_k + b_k) \tag{3}$$

2. 记 $c_k = a_k + b_k$，则 $a_k = c_k - b_k$。由此可得：

$$\inf a_k = \inf(c_k - b_k) \ge \inf c_k - \sup b_k$$

根据 $\inf c_k = \inf(a_k + b_k)$，因此：

$$\inf(a_k + b_k) \le \inf a_k + \sup b_k \tag{4}$$

由 (3) 和 (4)，可得：

$$\inf a_k + \inf b_k \le \inf(a_k + b_k) \le \inf a_k + \sup b_k \tag{5}$$

证明不等式 (2)：类似证明，可以得到：

$$\liminf a_n + \liminf b_n \le \liminf(a_n + b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n$$

综上，证明了所需的不等式：

$$\liminf a_n + \liminf b_n \le \liminf(a_n + b_n) \le \liminf a_n + \limsup b_n \le \limsup a_n + \limsup b_n$$

□

1.3.2

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是正数列，且 $\liminf a_n > 0$。试证：

$$\limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n}, \quad \liminf \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\limsup a_n}$$

证明. 1. 证明 $\limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n}$：

(1) 存在 $\{a_{n_k}\}$ 的子列，使得：

$$\limsup \frac{1}{a_n} = \lim \frac{1}{a_{n_k}} = \frac{1}{\liminf a_n}$$

(2) 又存在另一子列 $\{a_{m_k}\}$，使得：

$$\liminf \frac{1}{a_n} = \lim \frac{1}{a_{m_k}} = \frac{1}{\limsup a_n}$$

因此：

$$\limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n}$$

2. 证明 $\liminf \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\limsup a_n}$：

由上述结论 $\limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n}$，可得：

$$(\limsup \frac{1}{a_n}) \cdot (\liminf a_n) = 1$$

因为 $\{a_n\}$ 是正数列，且 $\liminf a_n > 0$，显然有：

$$(\limsup a_n) \cdot (\liminf \frac{1}{a_n}) = 1$$

由 $\{a_n\}$ 的任意性，故有：

$$\liminf \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\limsup a_n}$$

□

1.3.3

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为正数列，且

$$(\limsup a_n)\left(\limsup \frac{1}{a_n}\right)=1$$

试证 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛。

证明. 易知 $\{a_n\}$ 为正数列，故 $\liminf a_n \geq 0$。

由题意可知：

$$(\limsup a_n)\left(\limsup \frac{1}{a_n}\right)=1$$

得：

$$\limsup \frac{1}{a_n}=\frac{1}{\limsup a_n}$$

若 $\liminf a_n > 0$，则显然有 $\liminf a_n = \limsup a_n$，故 $\{a_n\}$ 收敛。

若 $\liminf a_n = 0$，那么：

$$\limsup \frac{1}{a_n}=+\infty$$

同理 $\limsup a_n = 0$。因此 $\{a_n\}$ 收敛。

综上，$\{a_n\}$ 收敛。 □

1.3.4

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为正数列，试证：

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

证明. 记 $\alpha = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$。若 $\alpha=+\infty$，则不等式显然成立。

当 $0 \leq \alpha < +\infty$ 时，需证明 $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha$。只需证明对任意 $\varepsilon > 0$，有 $\limsup \sqrt[n]{a_n} < \alpha+\varepsilon$。

由定义，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，有：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha+\varepsilon$$

取 $n = N, N+1, \ldots$，则 $n-N$ 个相乘得：

$$\frac{a_n}{a_N}=\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}} < (\alpha+\varepsilon)^{n-N}$$

即有：

$$a_n < a_N(\alpha+\varepsilon)^{n-N}$$

令 $M \equiv a_N(\alpha+\varepsilon)^{-N}$，则有：

$$a_n < M(\alpha+\varepsilon)^n$$

因此：

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{M}(\alpha+\varepsilon)$$

当 $n \to \infty$ 时，$\sqrt[n]{M} \to 1$，取上极限得：

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \le \alpha+\varepsilon$$

由于 ε 的任意性，得：

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \le \alpha$$

综上，得：

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

□

1.3.5

给定数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，记

$$b_n = 2a_n - 3a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

试证：数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛。

证明. **必要性**若 $\{a_n\}$ 收敛，不妨设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则：

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(2a_n - 3a_{n+1}) = 2a - 3a = a$$

显然 $\{b_n\}$ 收敛。

充分性若 $\{b_n\}$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$。由定义：

$$b_n = 2a_n - 3a_{n+1}$$

可得：

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{3}b_n$$

令 $C_n = a_{n+1} - a_n$，作差得：

$$C_{n+1} = \frac{2}{3}C_n - \frac{1}{3}(b_{n+1} - b_n)$$

当 $n \to \infty$ 时，因 $b_{n+1} - b_n \to 0$，可得：

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty} C_n$$

显然 $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$，即：

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$$

由 $\{a_n\}$ 的递推公式，可知 $\{a_n\}$ 收敛。

综上，$\{b_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 收敛。 □

1.3.6

设 $\alpha, \beta > 0, a_1 > 0$，且

$$a_{n+1} = \alpha + \frac{\beta}{a_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

试证数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，并求其极限。

证明. 由于 $a_1 > 0, \alpha > 0, \beta > 0$，由递推关系 $a_{n+1} = \alpha + \frac{\beta}{a_n}$ 可知，对于任意 $n \geq 1$，均有 $a_n > \alpha > 0$。

将递推公式写为：

$$a_{n+1} = \alpha + \frac{\beta}{a_n}$$

定义函数 $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x}$，解方程 $f(x) = x$，得：

$$x_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}, \quad x_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$$

显然 $x_1 > 0$ 且 $x_2 < 0$，由于 $a_n > 0$，因此只能有 a_n 收敛于 x_1。

令 $a_n - x_1 = b_n$，则：

$$a_{n+1} - x_1 = f(a_n) - x_1$$

将 $f(x)$ 线性化，得：

$$f(a_n) - x_1 = \frac{\beta}{a_n} - \frac{\beta}{x_1} = -\frac{\beta}{x_1^2}(a_n - x_1)$$

于是：

$$b_{n+1} = -\frac{\beta}{x_1^2} b_n$$

显然，$|\frac{\beta}{x_1^2}| < 1$，因此 $b_n \to 0$，即 $a_n \to x_1$。

综上，$\{a_n\}$ 收敛，且极限为：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$$

□

1.3.7

设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $a_{p+q} \leq a_p + a_q$，$p, q = 1, 2, \ldots$，试证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$$

证明. 对于不等式 $a_{p+q} \leq a_p + a_q$，考虑其意义，便于想象，不妨先设 $p = 10$。此时，对于任意 a_q，例如 $a_{11} \leq a_{10} + a_1, a_{20} \leq 2a_{10} + a_2$。

一般地，对于任意自然数 n 可以表示为 $n = k \cdot 10 + r$，其中 $k = 0, 1, 2, \ldots$，$r = 0, 1, 2, \ldots, 9$。从而有：

$$a_n \leq k a_{10} + a_r$$

令 $k = \frac{n-r}{10} \to +\infty$，由此式可知：

$$\inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{k a_{10}}{n} + \frac{a_r}{n}$$

此式对一切 n 成立。

令 $n \to +\infty$，取上下极限。注意 $k/n \to 1/10$，我们有：

$$\inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$$

因此：

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$$

综上：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$$

□

1.3.8

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为正数列，试证：

$$\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geq 1$$

证明. 假设 $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)<1$，则存在 $n_0\in\mathbb{N}$，当 $n\geq n_0$ 时，总有：

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)<1$$

即：

$$\frac{1+a_{n+1}}{a_n}<1+\frac{1}{n}$$

从而：

$$a_n-a_{n+1}>\frac{a_n}{n}$$

依次可得：

$$\frac{a_{n_0}}{n_0}-\frac{a_{n_0+1}}{n_0+1}>\frac{a_{n_0}}{n_0}-\frac{a_{n_0+1}}{n_0+1}+\frac{a_{n_0+1}}{n_0+2}>\cdots$$

相加可得：

$$\frac{a_{n_0}}{n_0}>\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0+1}+\cdots+\frac{1}{n}$$

当 n_0 选定后，$\frac{a_{n_0}}{n_0}$ 为定值，而显然：

$$\frac{1}{n_0}+\cdots+\frac{1}{n}$$

为无界的，这与假设矛盾。

故假设不成立，得：

$$\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geq 1$$

□

1.3.9

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界数列，记

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

指出 $\limsup a_n$ 与 $\limsup A_n$ 的大小关系并给出证明。

证明. $\limsup A_n \le \limsup a_n$. 下证。

已知 $\{a_n\}$ 有界，故 $\exists M$ 使得 $|a_n| \le M$，不妨令 $A = \limsup a_n$，$B = \limsup A_n$。

对 $\forall \varepsilon > 0$，由 $A = \limsup A_n$ 及 $|a_n| \le M$ 可知，在 $\{a_n\}$ 中，只有有限项大于 $A + \varepsilon$，记这些项的最大下标为 m。则当 $n > m$ 时，

$$A_n \le \frac{mM + (n-m)(A+\varepsilon)}{n} \le M\frac{m}{n} + A + \varepsilon$$

当 n 充分大时，有 $A_n \le A + \varepsilon$，由 ε 的任意性可知 $A_n \le A$，故 $B \le A$。

因此 $\limsup A_n \le \limsup a_n$。 □

1.3.10

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是闭区间 $[a,b]$ 内的数列，f 是 $[a,b]$ 上的连续函数。是否一定有

$$f(\limsup a_n) = \limsup f(a_n)?$$

说明理由。

证明. 不一定成立。

不妨令 $[a,b] = [0,1]$，令 f 是 $[0,1]$ 上单调连续的概率空间 P。

设 $\{a_n\}$ 构成 P 上的一个事件列。那么

$$P(\limsup A_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \ge \limsup_{k\to\infty} P(A_n) = \limsup P(A_n)$$

即 $P(\limsup A_n) \ge \limsup P(A_n)$。因此，不一定有 $f(\limsup a_n) = \limsup f(a_n)$。 □

1.4 连续函数作业题

1.4.1

设

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R},$$

又有常数 $\alpha \ne 1$ 使得

$$f(x) - f(\alpha x) = o(x) \quad (x \to 0).$$

试证：

$$f(x) = o(x) \quad (x \to 0).$$

证明. 不妨令 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A\in\mathbb{R}$，则显然有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\alpha x)}{x}=\alpha A$$

结合已知条件可得

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\alpha x)}{x}=A-\alpha A=(1-\alpha)A$$

于是显然 $A=0$。

由此得证 $f(x)=o(x)\quad(x\to 0)$。 □

1.4.2

设函数 f,g 在区间 I 上连续，记

$$F(x)=\min\{f(x),g(x)\},\quad G(x)=\max\{f(x),g(x)\},$$

试证：F,G 在 I 上连续。

证明. 易知

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\right],\quad G(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right].$$

对于任意 $x_0\in I$，若 f 在点 x_0 连续，g 在点 x_0 连续，则 $f(x),g(x)$ 在 I 上均连续。易知 $|f(x)-g(x)|$ 在 I 上也连续，故 $|f(x)-g(x)|$ 在区间 I 上连续。

故显然，$F(x),G(x)$ 在 I 上均连续。 □

1.4.3

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，记

$$m(x)=\inf_{a\le t\le x}f(t).$$

试证：函数 m 在 $[a,b]$ 上连续。

证明. 设 $x_0\in[a,b]$，先证明 $m(x)$ 在点 x_0 右连续。

任给 $\epsilon>0$，由于 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，故存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$，于是当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有

$$f(x)>f(x_0)-\epsilon\ge m(x_0)-\epsilon$$

而当 $a \leq s \leq x_0$ 时，$f(s) \geq m(x_0) \geq m(x_0) - \epsilon$，由此可知

$$m(x) \geq \min\{m(x_0), f(x)\} \geq m(x_0) - \epsilon$$

又因为 $m(x_0)$ 显然是递减的，故 $m(x_0) > m(x) \geq m(x_0) - \epsilon$（当 $x_0 < x < x_0 + \delta$）。

由此可知

$$\lim_{x \to x_0^+} m(x) = m(x_0)$$

即 $m(x)$ 在 x_0 处右连续。

下面证明左连续。不妨设 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 上的最小值在 $x = x_0$ 时取得，即

$$m(x_0) = f(x_0) \quad 且 \quad m(x) = f(x_0), \quad a \leq x < x_0$$

显然成立。

当 $x \to x_0^-$ 时，$m(x) = m(x_0)$，从而右连续。

任给 $\epsilon > 0$，同理，存在 $\delta > 0$，当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，恒有

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon = m(x_0) + \epsilon$$

因此

$$m(x_0) \leq m(x) \leq m(x_0) + \epsilon$$

从而

$$\lim_{x \to x_0^-} m(x) = m(x_0)$$

即 $m(x)$ 在 x_0 处左连续。

综上，$m(x)$ 在 x_0 处左右连续，由 x_0 的任意性可知，函数 m 在 $[a, b]$ 上连续。 □

1.4.4

设函数 f 在原点的某邻域 U 内有界，且有常数 $\alpha, \beta > 1$ 满足

$$f(\alpha x) = \beta f(x), \quad x \in U$$

试证：f 在原点处连续。

证明. 在 $f(\alpha x) = \beta f(x)$ 中，令 $x = 0$，而 $\alpha, \beta > 1$，即 $f(0) = f(\alpha \cdot 0) = \beta f(0)$，所以 $f(0) = 0$。

若证明 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$，则由 $U(0,\delta)$ 有界知 f 在原点连续。由 $f(\alpha x)=\beta f(x)$ 推得 $f(\alpha^n x)=\beta^n f(x)$，$f$ 在 $U(0,\delta)$ 内有界，故当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$|f(x)|<M$。

对任意 $\varepsilon>0$，由 $\beta>1$，可知存在 $N\in\mathbb{N}$，使得 $\frac{M}{\beta^n}<\varepsilon$。取定 n，当 $|x|<\frac{\delta}{\alpha^n}$ 时，显然有

$$|f(x)-0|=|f(x)|=\beta^n|f(\alpha^n x)|<\beta^n\cdot\frac{M}{\beta^n}<\varepsilon$$

故 $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$。

综上，f 在原点连续。 □

1.4.5

设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $0,1$ 两点连续，且满足

$$f(x^2)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

试证：f 是常函数。

证明. 当 $x\in(0,1)$，由条件可知 $f(x)=f(x^2)=f(x^4)=\cdots=f(x^{2^n})$。

由于 f 在 $x=0$ 处连续，令 $n\to\infty$，则有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^{2^n})=f(0)$$

当 $x=1$，由 f 的连续性可得

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

又当 $x\in(1,+\infty)$ 时，有

$$f(x)=f(\sqrt{x})=f((\sqrt{x})^2)=\cdots=f((x^{\frac{1}{2^n}})^2)$$

再由 f 在 $x=1$ 处的连续性有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}})=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=f(0)$$

易见 f 为相同常数，故 $f(x)\equiv f(0), x\in(-\infty,+\infty)$。

综上，f 为常函数。 □

1.4.6

设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处有有限的左极限和右极限，且满足

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

试证：

$$f(x)=(f(1)-f(0))x+f(0).$$

证明. 由条件有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

记 $b=f(0)$，则有

$$f(x)+f(y)=f(x+y)+b$$

进而有

$$f(x)-b+f(y)-b=f(x+y)-b$$

令 $g(x)=f(x)-b$，则

$$g(x)+g(y)=g(x+y)$$

显然，$g(x)$ 满足 Cauchy 方程，因此 $g(x)=g(1)x$，从而有

$$f(x)=g(1)x+b=[f(1)-f(0)]x+f(0)$$

□

1.4.7

设函数 f 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$。试证：存在 $\xi\in[0,a]$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$。

证明. 因为 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，则 $\varphi(x)=f(x)-f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上连续。令 $\varphi(0)=f(0)-f(a)$，$\varphi(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$。

若 $f(0)-f(a)=0$，则有 $\xi=0$ 或 $\xi=a$，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$。

若 $f(0)-f(a)\neq 0$，则有 $\varphi(0)\cdot\varphi(a)<0$，由零点存在定理可知存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$。 □

1.4.8

设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$。试证：对于任意正整数 n，存在实数 $\xi\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 满足

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$$

证明. 当 $n=1$ 时，因 $f(0)=f(1)$，则取 $\xi=0$，结论成立。

当 $n>1$ 时，令 $F(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$，则

$$F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=[f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)]+[f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)]+\cdots+[f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)]$$

$$=f(1)-f(0)=0$$

若 $F(0)=F\left(\frac{1}{n}\right)=\cdots=F\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$，取任意 $\xi=0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$ 中一点即可。

若 $F(0),F\left(\frac{1}{n}\right),\cdots,F\left(\frac{n-1}{n}\right)$ 均不全可为 0，则有两项极必为异号。

即 $\exists i,j$，使得 $F(\xi_i)F(\xi_j)<0$，$\xi_i,\xi_j\in\{0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}\}$。

又因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，由根值存在定理可知，存在 $\xi\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$，使得 $F(\xi)=0$。

即 $f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$。

综上，存在 $\xi\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 满足 $f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$。 □

1.4.9

设函数 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，f 单调，且有数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,b]$ 使得对任意正整数 n，有 $g(x_n)=f(x_{n+1})$。试证：存在 $\xi\in[a,b]$ 满足 $f(\xi)=g(\xi)$。

证明. 设 $F(x)=f(x)-g(x)$，那么 $F(x_n)=f(x_n)-g(x_n)=f(x_n)-f(x_{n+1})$。

根据连续函数的介值性可知，存在 $\xi_n\in[x_n,x_{n+1}]$，使得

$$F(\xi_n)=\frac{F(x_n)}{n}.$$

取 $\{\xi_n\}$ 的一个收敛子列 $\{\xi_{n_k}\}$，其极限设为 ξ，利用 f 的单调收敛性可知

$$F(\xi)=\lim_{k\to\infty}F(\xi_{n_k})=\lim_{k\to\infty}\frac{F(x_{n_k})}{n_k}=0$$

所以 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$，$\xi\in[a,b]$。 □

1.4.10

设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界，又对任意实数 c，$f(x)=c$ 只有有限多个解。试证：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ 存在.}$$

证明. 不妨设 $m_1 < f(x) < M_1,\ x\in[a,+\infty),\ C_1=\frac{m_1+M_1}{2}$，因为方程 $f(x)=C_1$ 至多只有有限个实根，所以当 x 充分大时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=C_1$ 无公共交点，因此当 x 充分大时，$f(x)$ 始终属于 $(m_1,C_1]$ 或 $[C_1,M_1)$ 内。

若 $f(x)$ 属于前者，则令 $[m_2,M_2]=[m_1,C_1]$，否则令 $[m_2,M_2]=[C_1,M_1]$。依此类推，则可得到闭区间列 $\{[m_n,M_n]\}$，满足：

1. $[M_{n+1},M_{n+1}]\subseteq[M_n,M_n],\ n=1,2,3,\dots$
2. $M_n-m_n=\frac{M_1-m_1}{2^n}\to 0,\ n\to\infty$
3. 对于每个 n，当 x 充分大时，$f(x)\in(m_n,M_n)$

由闭区间套定理，存在唯一的点 $\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[m_n,M_n]$，下证 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\xi$。

对于任意 $\epsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，$[m_n,M_n]\subset(\xi-\epsilon,\xi+\epsilon)$。取 $n_0>N$，存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，$f(x)\in(m_{n_0},M_{n_0})$，于是当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-\xi|<M_{n_0}-m_{n_0}<2\epsilon$。

ϵ 任意，因此 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\xi$ 即 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 存在。 □

1.5 可微函数作业题

1.5.1

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试证：存在点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(\xi)-f(a)=f'(\xi)(b-\xi)$$

证明. 要证 $f(\xi)-f(a)=f'(\xi)(b-\xi)$，只需证

$$(b-\xi)f'(\xi)-[f(\xi)-f(a)]=0$$

即可。

构造函数 $F(x) = (b-x)[f(x) - f(a)]$，由题设可知，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导。

观察函数 $F(x)$ 可知，$F(a) = F(b) = 0$，因此 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理，由罗尔定理可知，存在一点 $\xi \in (a,b)$，满足 $F'(\xi) = 0$。

由 $F'(x) = (b-x)f'(x) - [f(x) - f(a)]$ 可知

$$F'(\xi) = (b-\xi)f'(\xi) - [f(\xi) - f(a)] = 0 \iff f(\xi) - f(a) = f'(\xi)(b-\xi)$$

□

1.5.3

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$g(x) \neq 0$，且有 $f(a)g(b) = f(b)g(a)$。试证：存在点 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi)g(\xi) = f(\xi)g'(\xi)$$

证明. 构造 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$，由题设可知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $F(a) = F(b) = 0$。

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理，故至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，满足 $F'(\xi) = 0$。

计算 $F'(x)$：

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

因此

$$\frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \quad \text{且} \quad g(\xi) \neq 0$$

故

$$f'(\xi)g(\xi) = f(\xi)g'(\xi)$$

□

1.5.4

设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且

$$f(0) + f(1) + f(2) = 3, \quad f(3) = 1,$$

试证：存在点 $\xi \in (0,3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$。

证明. $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上也连续，从而 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可取到最大值 M 和最小值 m，于是

$$m \leq f(0) \leq m, \quad m \leq f(1) \leq m, \quad m \leq f(2) \leq M \implies m \leq \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \leq M.$$

由介值定理可知，至少存在一点 $\zeta \in [0,2]$，使得

$$f(\zeta) = \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1.$$

又因为 $f(x)$ 在 $[\zeta,3] \subset [0,3]$ 上连续，在 $(\zeta,3)$ 上可导，且 $f(\zeta)=1=f(3)$，由罗尔定理可知，必存在一点 $\xi \in (\zeta,3) \subset (0,3)$，使得

$$f'(\xi) = 0.$$

□

1.5.5

设 $x_1 = 14, x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}\ (n=1,2,3,\cdots)$。

(1) 求 $\lim_{n\to\infty} x_n$；

(2) 求 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4(x_{n+1}-2)}{x_n-2}\right)^{\frac{1}{x_n-2}}$。

证明. **解 5-1**：不难发现对于 $n \in \mathbb{Z}^+$，都有 $x_n > 0$，首先通过做差法考虑数列的单调性：

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2+x_n} - \sqrt{2+x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}}.$$

从第一个等式可以看出 $x_{n+1}-x_n$ 的正负性与 $x_n - x_{n-1}$ 有关，递推可知 $x_{n+1} - x_n \leq x_2 - x_1$，由 $x_2 - x_1 = \sqrt{2+14} - 14 = -10 < 0$。

因此显然 x_n 单调递减，结合第二个等式显然可得知 x_n 有下界 2。由单调有界定理，不动点定理和压缩映射定理可知 $\sqrt{2+A} = A$，显然 $A=2$（此数列的非负性），因此：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A = 2$$

解 5-2：结合 5-1 结论，令 $I = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4(x_{n+1}-2)}{x_n-2}\right)^{\frac{1}{x_n-2}}$，做出变量替换 $x_n - 2 = t$，$t \to 0$。

$$I=\lim_{t\to 0}\left(\frac{4(\sqrt{t+4}-2)}{t}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left(1-t+4(\sqrt{t+4}-2)\right)^{\frac{-t}{t+4(\sqrt{t+4}-2)}}.$$

利用洛必达法则得：

$$\lim_{t\to 0}\frac{-t}{t+4(\sqrt{t+4}-2)}=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{1+\frac{4}{2\sqrt{t+4}}}=\frac{-1}{4}$$

故：

$$I=e^{-\frac{1}{16}}$$

□

1.5.6

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且满足 $f'(a)=f'(b)=0$。试证：存在点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f''(\xi)|\geq 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}.$$

证明. 由泰勒定理，对 $\forall x\in(a,b)$，均存在对应的 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得

$$f(x)=\begin{cases}f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2,\\ f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2\end{cases}$$

结合 $f'(a)=f'(b)=0$，上面两式相减有

$$|f(b)-f(a)|=\left|\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2\right|.$$

观察题证等式，令 $x=\frac{a+b}{2}$，此时 $(x-a)^2=(x-b)^2=\frac{(b-a)^2}{4}$，带入上述表达式可得

$$|f(b)-f(a)|=\frac{1}{8}(b-a)^2\cdot|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|.$$

令 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则

$$|f(b)-f(a)|\leq\frac{1}{8}(b-a)^2\cdot 2|f''(\xi)|.$$

因此有

$$|f(b)-f(a)|\leq\frac{1}{4}(b-a)^2|f''(\xi)|,$$

即

$$|f''(\xi)|\geq 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}.$$

□

1.5.7

设 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数，满足

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n,$$

其中 $0<\theta<1$，且 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$。试证：

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$$

证明. 已知 $f(x)$ 是区间上 $n+1$ 阶可导函数，所以 $f(a+h)$ 本可以展开到 h^{n+1}，即有

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

其中 $\eta\in(a,b)$。

上面两式作差化简后得

$$\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)}h=f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)$$

拉格朗日中值定理得存在 $\xi\in(a,a+h)$，使得

$$f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)=f^{(n+1)}(\xi)\cdot\theta h,$$

带入得

$$\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)}=f^{(n+1)}(\xi)\cdot\theta$$

现在利用 $f^{(n+1)}(x)$ 的连续性，结合 $\xi,\eta\to a\ (h\to 0)$，对上述两端关于 $h\to 0$ 取极限有

$$\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)}=f^{(n+1)}(a)\cdot\lim_{h\to 0}\theta$$

再结合 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$ 可得证

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$$

□

1.5.8

设

$$y = x^3 \ln(1+x),$$

求 $y^{(99)}(0)$。

证明. 观察变量形式，根据麦克劳林展开式可得

$$y = x^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+3}}{n}.$$

又由 Taylor 展开式

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{y^{(99)}(0)}{99!}x^{99} + \cdots$$

故而由其唯一性可知，有 $n+3=99$，即 $n=96$，此时

$$y^{(99)}(0) = (-1)^{96-1}\frac{99!}{96} \implies y^{(99)}(0) = -\frac{99!}{96}.$$

□

1.5.9

试比较 2023^{2024} 和 2024^{2023} 的大小。

证明. 观察发现 $2024 > 2023 > e$，构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$，观察 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上的单调性。

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, \quad x \in (e, +\infty)$$

显然，$f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，即 $f(2024) < f(2023)$。

$$0 < \frac{\ln 2024}{2024} < \frac{\ln 2023}{2023} \implies 2023 \ln 2024 < 2024 \ln 2023 \implies \ln 2024^{2023} < \ln 2023^{2024}$$

显然

$$2024^{2023} < 2023^{2024}.$$

□

1.5.10

就 k 的不同取值情况，讨论方程

$$x - \frac{\pi}{2}\sin x = k$$

在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内根的个数。

证明. 观察方程形式，构造函数

$$f(x) = x - \frac{\pi}{2}\sin x,$$

研究 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性。

计算 $f'(x)$，得

$$f'(x) = 1 - \frac{\pi}{2}\cos x.$$

令 $f'(x) = 0$，可得驻点

$$x_0 = \arccos\frac{2}{\pi}.$$

结合 $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$，研究 $y = f(x)$ 与 $y = k$ 的交点。

分情况讨论：

i. 当 $k \geq 0$ 或 $k < f\left(\arccos\frac{2}{\pi}\right)$ 时，原方程没有根；

ii. 当 $k = f\left(\arccos\frac{2}{\pi}\right)$ 时，原方程有一个根；

iii. 当 $f\left(\arccos\frac{2}{\pi}\right) < k < 0$ 时，原方程有两个根。

□

1.5.11

设 $p(x)$ 是一个多项式，试证：

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{e^{|x|}} = 0$;
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{e^{x^2}} = 0$.

证明. 解 11-1：不妨设 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\,(n \in \mathbb{Z}^+, a_n \in \mathbb{R})$，我们有 $p^{(n)}(x) = n!a_n$。

先考虑 $x > 0$ 的情况，此时

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^{|x|}} = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x}$$

此时 $p(x), e^x \to \infty\,(x \to +\infty)$，洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{p^{(n)}(x)}{(e^x)^{(n)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!a_n}{e^x} = 0$$

同理 $x < 0$ 的情况，$p(x), e^{|x|} \to \infty\,(x \to -\infty)$，显然可以得到相同的结论。

因此，综上所述

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^{|x|}} = 0$$

解 11-2：参考 11-1 的解法，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^{x^2}} = 0$$

分子有限次求导后结果为 0，而分母任意阶导数在 $x \to \infty$ 时都是无穷大量，反复使用洛必达法则即可得

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^{x^2}} = 0$$

□

1.5.12

定义函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & \text{当} x \neq 0; \\ 0, & \text{当} x = 0. \end{cases}$$

1. 对任意正整数 n，总是有多项式 $p_n(x)$ 使得当 $x \neq 0$ 时
$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^{-2}};$$
2. $f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

证明. **解 12-1: 使用数学归纳法**

1. 当 $n=1$ 时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-x^{-2}}$ 可知结论成立。

2. 现在设 $f^{(k)}(x)=p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-x^{-2}}$ 成立，其中 $p_k\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的多项式。

3. 则
$$f^{(k+1)}(x)=p_k'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x^{-2}}+p_k\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right)e^{-x^{-2}}=p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-x^{-2}},$$
其中
$$p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x^3}p_k\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}p_k'\left(\frac{1}{x}\right)$$
仍是 $\frac{1}{x}$ 的多项式。因此假设成立，故对任意正整数 n，总是有多项式 $p_n(x)$ 使得当 $x\neq 0$ 时有
$$f^{(n)}(x)=p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-x^{-2}}$$

解 12-2: 结合 11-2 和 12-1 两个结论，再用数学归纳法证明本题：

1. 当 $n=1$ 时，有
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^{-2}}-0}{x}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y^2}}{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=0$$

2. 现在设 $f^{(k)}(0)=0$ 成立。

3. 则
$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-x^{-2}}}{x}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{p_k(y)e^{-y^2}}{\frac{1}{y}}=0$$

综上所述，
$$f^{(n)}(0)=0\quad(n=1,2,3,\dots)$$

□

1.5.13

设 $f(x)$ 在全实轴上可导，且有实数 A 使得
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+xf'(x)\right)=A.$$
试证：
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

证明. 设函数 f 和 g 在 (a,b) 上可导，$g(x)\neq 0$ 且 $\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$。如果极限

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在，那么

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

证明如下:

令

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\mathbb{R},$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，有

$$l-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<l+\varepsilon.$$

因此对 $(x,c)\subset(a,a+\delta)$，根据 Cauchy 中值定理，必存在 $\xi\in(x,c)$，使得

$$l-\varepsilon<\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<l+\varepsilon.$$

固定 c，对 $x\to a^+$ 取上极限，得

$$\limsup_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\leq l+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，得

$$\limsup_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\leq l.$$

同理可得

$$\liminf_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\geq l.$$

因此

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l \implies \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

令 $h(x)=xf(x),g(x)=x$，由题目可知，$h'(x),g(x),f(x),h(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上均可导。分别令 $a=\pm\infty$，即可得到

$$\frac{h'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

□

1.5.14

设 $a=\sqrt[3]{3}$，$x_1=a$，$x_{n+1}=a^{x_n}\,(n=1,2,\cdots)$。

试证：

1. $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在；

2. $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 3$。

证明. **解 14-(1)** 首先用数学归纳法证明对 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，都有 $\sqrt[3]{3}\le x_n<3$。

1. 对 $n=1,2$ 显然有 $\sqrt[3]{3}\le x_1<x_2<3$；

2. 现在设当 $k=n$ 时，$\sqrt[3]{3}\le x_n<3$ 仍成立；

3. 当 $k=n+1$ 时，显然 $\sqrt[3]{3}\le x_n<x_{n+1}=a^{x_n}=a^{a^n}<3$ 成立。

因此，对 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，都有 $\sqrt[3]{3}\le x_n<3$，从而得到 x_n 有界。

然后通过做差法研究 x_n 的单调性：

$$x_{n+2}-x_{n+1}=a^{x_{n+1}}-a^{x_n}=a^{x_n}\left(a^{x_{n+1}-x_n}-1\right)=a^{x_n}\left(a^{x_{n+1}-x_n}-1\right),\quad [a^n>0,a^0=1].$$

不难看出 $x_{n+2}-x_{n+1}$ 的正负性与 $x_{n+1}-x_n$ 相同，反复递代可知只与 x_2-x_1 的正负性有关。

$x_2-x_1>0$，因此对 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，都有 $x_{n+1}-x_n>0$，易知 x_n 单调递增。

由单调有界定理可知，数列 x_n 必有极限，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ 存在.}$$

解 14-(2) 首先构造函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$, 研究 $h(x)$ 的单调性。$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\,(x=e)$ $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减。在 $(0,+\infty)$ 上有极大值 $\frac{1}{e}$。

再构造函数 $p(x)=x^x$，不难看出 $p(x)=\frac{1}{e}e^{x\ln x}=e^{h(x)}$，因此有 $p(3)<p(e)\implies 3^{\frac{1}{e}}<\frac{1}{e}$。

考虑方程 $f(x)=x^x$ 的不动点问题，令 $g(x)=x-a^x$，显然 $g(x)=0$ 的解就是 $f(x)$ 的不动点。

$g'(x)=a^x\ln a-1, g''(x)=a^x(\ln a)^2>0$，显然 $g(x)$ 单调递增。当 $g'(x)<0$ 时，$x^*=-\frac{\ln a}{\ln a}$。

因此 $g(x)$ 有最小值 $g(x)=\frac{1+\ln\ln a}{\ln a}$，当 $g'(x)<0$ 时，解得 $x^*=\frac{1}{e^e}$。

当 $1<a=\frac{1}{33}$ 时，由于 $g(x)=0$ 是凸函数，$g(x)=0$ 有且仅有两个根，分别令其为 x_1,x_2，它们是 $f(x)$ 的两个不动点，不失一般性，令 $x_1<x^*<x_2$。

1. 对于 $x_2=x^*=-\frac{\ln\ln a}{\ln a}$，由于 $a^{x^2}=x_2$，可得 $|f'(x_2)|=|a^{x^2}\ln a|=x_2\ln a>-\ln a>1$。

2. 对于 $x_1<x^*$，由于 $f'(x)=x^{x_1}\ln a$，可得 $|f'(x_1)|=|a^{x_1}\ln a|=f(x)\ln a<1$。

因此，当 $1<a<e^e$ 时，$f(x)$ 有且仅有两个不动点，且较小的点为稳定的不动点，较大的点为不稳定的不动点。

对于 $g(x)=0$，显然有一个解 $x=3$，但

$$3-x=3+\frac{\ln a}{\ln\ln 3}=3+\frac{\ln(3\ln 3)}{\ln 3}=3(\ln 3\ln\ln 3).$$

显然 $x_2=3$ 是较大的不稳定的不动点，故 $f(x)$ 不可能收敛于 $x_2=3$。因此，可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n\neq 3.$$

□

1.6 函数性质作业题

1.6.1

设 n 为正整数，函数

$$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\ln|x|, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

试证：f 在 $x=0$ 处有 $n-1$ 阶导数，但 $f^{(n)}(0)$ 不存在。

证明. 当 $n=1$ 时，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(\ln|x|)-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin(\ln|x|)=0,$$

所以 $f'(0)=0$。

又因为

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin(\ln|x|)+x\cos(\ln x), & x>0,\\ 2x\sin(\ln|x|)+x\cos(\ln(-x)), & x<0,\end{cases}$$

所以

$$f''(x)=\begin{cases}x\big(2\sin(\ln|x|)+\cos(\ln|x|)\big), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\big(2\sin(\ln|x|)+\cos(\ln|x|)\big)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\big(2\sin(\ln|x|)+\cos(\ln|x|)\big),$$

不存在，因此 $f''(0)$ 不存在。

假设 $n=k$ 时，结论成立。当 $n=k+1$ 时，可得

$$f'(x)=\begin{cases}x^{k+1}\big((k+2)\sin(\ln|x|)+\cos(\ln|x|)\big), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

类似证明，结论成立。

由此可知，当 f 在 $x=0$ 处有 $n-1$ 阶导数，必有 $f^{(n)}(0)$ 不存在。 □

1.6.2

试构造可微函数 $f(x)$ 使得 $f'(0)>0$，但对任意 $\delta>0$，$f(x)$ 在开区间 $(-\delta,\delta)$ 上都不是递增函数。

证明. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

计算导数，首先验证 $x=0$ 时：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}>0.$$

对于 $x\neq 0$，$f'(x)$ 为：

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}.$$

当 $x_k = \frac{1}{k\pi}\,(k = 1, 2, \dots)$ 时，

$$f'(x_k) = \frac{1}{2} - (-1)^k.$$

从上述公式可见，在包含零点的任意开区间内，$f'(x)$ 可以取不同符号的值。因此，$f(x)$ 在该开区间内不是单调函数。 □

1.6.3

试构造在整个实数轴上可导的函数 $f(x)$，使得对任意给定的 $\delta > 0$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$，总是有一个点列

$$x_n \in (0, \delta), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \text{并且} \quad f'(x_n) = \xi.$$

证明. 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1. $f(x)$ 在整个实数轴上可导：当 $x \neq 0$ 时，有

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

当 $x = 0$ 时，计算

$$f'(0) = \lim_{x\to0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

2. 导数为任意值 ξ 的点列：选择点列 $x_n = \frac{1}{n\pi + \arccos(-\xi)}$，有

$$f'(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)}{x_n} = \xi.$$

3. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$：因为 $x_n = \frac{1}{n\pi + \arccos(-\xi)}$，随着 $n \to \infty$，有 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$。
综上，函数 $f(x)$ 满足题意。 □

1.6.4

试构造可微函数 $f(x)$ 使得 $f'(0)>0$，但对任意 $\delta>0$，$f(x)$ 在开区间 $(-\delta,\delta)$ 上都不是递增函数。

证明. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

计算导数，首先验证 $x=0$ 时：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}>0.$$

对于 $x\neq 0$，$f'(x)$ 为：

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}.$$

当 $x_k=\frac{1}{k\pi}\,(k=1,2,\dots)$ 时，

$$f'(x_k)=\frac{1}{2}-(-1)^k.$$

从上述公式可见，在包含零点的任意开区间内，$f'(x)$ 可以取不同符号的值。因此，$f(x)$ 在该开区间内不是单调函数。 □

1.6.5

试构造在整个实数轴上有任意阶导数的函数 $f(x)$，使得 $f(x)$ 的任意阶 Maclaurin 多项式都等于零，但对任意 $x\neq 0$，都有

$$f(x)>0.$$

证明. 从可微函数）第 12 题（1.5.12）可以得到如下结论：

设

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x^{-2}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

有

$$f^{(n)}(0)=0.$$

由此结论可知，此函数在 $x=0$ 这一点的泰勒展开式为零多项式，即此函数的任意阶 Maclaurin 多项式都等于零，且满足题干所要求的值域问题。 □

1.7 积分作业题

1.7.1

求积分

$$I=\int_0^2 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}\,\mathrm{d}x.$$

证明. 设

$$I=\int_0^2 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2,$$

其中

$$I_1=\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_1^2 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}\,\mathrm{d}x.$$

对于 I_2，作变量替换 $t=2-x$，则有

$$I_2=\int_1^2 \frac{2-x}{e^x+e^{2-x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{t}{e^{2-t}+e^t}\,\mathrm{d}t.$$

注意到 $I_2=-I_1+\int_0^1 \frac{2}{e^x+e^{2-x}}\,\mathrm{d}x$。

因此

$$I=I_1+I_2=2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{2-x}}.$$

令 $t=e^x$，则

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{2-x}}=\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t^2+e^2}.$$

从而

$$I=\frac{2}{e}\arctan\frac{t}{e}\bigg|_1^e=\frac{2}{e}\left(\arctan 1-\arctan\frac{1}{e}\right).$$

计算得

$$I=\frac{2}{e}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{e}\right).$$

□

1.7.2

设函数 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且满足

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=1,\quad \int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

试证：

$$\max_{0\le x\le 1}|f(x)|\ge 2^n(n+1).$$

证明. 此题可化简为证明：存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $|f(\xi)|\ge 2^n(n+1)$。

使用反证法，假设对 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|<2^n(n+1)$，则

$$I=\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

根据绝对值不等式，有

$$\le\int_0^1 |(x-\frac{1}{2})^n|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x<2^n(n+1)\int_0^1 |(x-\frac{1}{2})^n|\,\mathrm{d}x.$$

$$=2^n(n+1)\left[\int_0^{1/2}(x-\frac{1}{2})^n\,\mathrm{d}x+\int_{1/2}^1(x-\frac{1}{2})^n\,\mathrm{d}x\right].$$

$$<2^n(n+1)\cdot 2\int_0^{1/2}(x-\frac{1}{2})^n\,\mathrm{d}x=2^{n+1}(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}(x-\frac{1}{2})^{n+1}\bigg|_0^{1/2}=1.$$

矛盾。因此，必定存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $|f(\xi)|\ge 2^n(n+1)$。

从而

$$\max_{0\le x\le 1}|f(x)|\ge 2^n(n+1).$$

□

1.7.3

设函数 f 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，$f(0)=f(1)=0$，且当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\ne 0$。试证：

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\,\mathrm{d}x\ge 4.$$

证明. 利用连续函数性质及拉格朗日微分中值定理证明。

由于题意，设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最大值，记为 $f(x_0)$，其中 $x_0\in(0,1)$。

由拉格朗日微分中值定理，有

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=f'(\xi_1),\quad \xi_1\in(0,x_0);$$

$$\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\xi_2),\quad \xi_2\in(x_0,1).$$

即
$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)}{x_0},\quad f'(\xi_2)=-\frac{f(x_0)}{1-x_0}.$$
于是
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq\int_0^{\xi_1}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x+\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x+\int_{\xi_2}^{1}\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x.$$
由拉格朗日中值定理，
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq\frac{1}{f(x_0)}\left(\frac{f(x_0)}{x_0}+\frac{f(x_0)}{1-x_0}\right).$$
进一步化简得
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq\frac{1}{x_0(1-x_0)}.$$
当 $x_0=\frac{1}{2}$ 时，$x_0(1-x_0)=\frac{1}{4}$，从而
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq 4.$$
故得证。 □

1.7.4

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导。试证：
$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$
证明. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可设 $|f(\xi)|=\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|,\xi\in[a,b]$ 及 $|f(\eta)|=\min_{a\leq x\leq b}|f(x)|,\eta\in[a,b]$。于是
$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|-\min_{a\leq x\leq b}|f(x)|=|f(\xi)|-|f(\eta)|\leq|f(\xi)-f(\eta)|=\left|\int_\eta^\xi f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$
另一方面，由积分中值定理，$\exists\zeta\in[a,b]$，使得
$$f(\zeta)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$\min_{a\le x\le b}|f(x)|\le|f(\zeta)|=\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

因此

$$\begin{aligned}\max_{a\le x\le b}|f(x)|&=\min_{a\le x\le b}|f(x)|+(\max_{a\le x\le b}|f(x)|-\min_{a\le x\le b}|f(x)|)\\&\le\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故得证。 □

1.7.5

设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶连续可导 $(a>0)$，且 $f''(x)\ge 0$。试证：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\ge af\left(\frac{a}{2}\right).$$

证明. 将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a}{2}$ 展开成 1 阶 Taylor 公式，有

$$f(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a}{2}\right)^2,\quad(0<\xi<a).$$

由 $f''(x)\ge 0$，得到

$$f(x)\ge f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right).$$

对上述不等式两边从 0 到 a 积分，由于

$$\int_0^a\left(x-\frac{a}{2}\right)\mathrm{d}x=0,$$

就得到

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\ge af\left(\frac{a}{2}\right).$$

□

1.7.6

设函数 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是凸函数，$f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内存在且有界。试证：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos((2n+1)x)\,\mathrm{d}x \le 0.$$

证明. 由条件可知，$f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上必为一递增函数。

即有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos((2n+1)x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2n+1}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin((2n+1)x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

□

1.7.7

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，试证：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

证明. 设 t 为实参数，则

$$\int_a^b (f(x)+tg(x))^2\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

即

$$\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x \cdot t^2 + 2\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]t + \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

令

$$A = \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x, \quad B = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad C = \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x,$$

作为 t 的一元二次不等式 $At^2+2Bt+C \ge 0$，则必有 $B^2-AC \le 0$，即 $B^2 \le AC$。

因此

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

□

1.7.8

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，试证：

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g(x)^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明. 由展开式

$$\left(\left(\int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$= \int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x) \,\mathrm{d}x + 2\sqrt{\int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x) \,\mathrm{d}x}.$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$\sqrt{\int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x) \,\mathrm{d}x} \geq \left|\int_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x\right|.$$

因此

$$\left(\left(\int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \geq \int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x) \,\mathrm{d}x + 2\int_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x.$$

由此可得

$$\left(\left(\int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \geq \int_a^b (f(x)+g(x))^2 \,\mathrm{d}x.$$

两边取平方根，即得

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\square$

1.7.9

求定积分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

证明. 首先证明等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x.$$

设 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$，当 $x = 0$ 时，$t = \frac{\pi}{2}$；当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$t = 0$。于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \mathrm{d}t.$$

由 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x.$$

再由定积分分部积分公式，得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x,$$

令 $u = \sin^{n-1} x, v' = \cos x$，则 $u' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$，$v = \sin x$，于是

$$I_n = \sin^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

化简得

$$I_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x,$$

$$I_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x.$$

令 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x = I_{n-2}$，则

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

$$I_n + (n-1) I_n = (n-1) I_{n-2},$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad (n \geq 2).$$

这个等式叫作积分 I_n 关于下标 n 的递推公式。如果将 n 换成 $n-2$，则有

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

同样地依次进行下去，直到 I_n 的下标递减到 0 或 1 为止，于是

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0,$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot I_1.$$

其中当 $n=0$ 时，$\sin^0 x = 1$，

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

因此，

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \text{ 是偶数;}$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, \quad n \text{ 是奇数.}$$

□

1.7.10

设 $(0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) = \ln x - \int_1^e f(x)\,dx,$$

求

$$I = \int_1^e f(x)\,dx.$$

证明. 记
$$\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x = a,$$
则 $f(x)=\ln x - a$，于是
$$a=\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x - a(e-1),$$
所以
$$a=\frac{1}{e}\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{e}\left(x\ln x - x\right)\Big|_1^e=\frac{1}{e}.$$
□

1.7.11

设函数 $f(x)$ 连续且满足
$$\int_0^1 tf(2x-t)\,dt=\frac{1}{2}\arctan x^2,\quad f(1)=1.$$
求
$$I=\int_1^2 f(x)\,dx.$$

证明. 由
$$\int_0^x f(2x-t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{2x}(2x-u)f(u)(-\mathrm{d}u),$$
即
$$\int_0^x f(2x-t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{2x}(2x-u)f(u)\,\mathrm{d}u=2x\int_x^{2x}f(u)\,\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\,\mathrm{d}u.$$
得
$$2x\int_x^{2x}f(u)\,\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\arctan^2 x,$$
等式两边对 x 求导得
$$2\left[2xf(2x)+2x\int_x^{2x}f(u)\,\mathrm{d}u-f(x)-4xf(x)\right]+xf(x)=\frac{x}{1+x^2},$$
整理得
$$2\int_x^{2x}f(u)\,\mathrm{d}u-xf(x)=\frac{x}{1+x^2}.$$

取 $x=1$ 得

$$2\int_1^2 f(u)\,\mathrm{d}u - f(1) = \frac{1}{2},$$

故

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$

□

1.7.12

设函数

$$S(x) = \int_0^x |\cos t|\,dt,$$

求

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x}.$$

证明. 设 $n\pi < x \le (n+1)\pi, n$ 为正整数，则 $\frac{x}{n} \to \pi$ 当 $x \to +\infty$。由

$$\int_0^{n\pi} |\cos x|\,dx = n, \quad \int_0^x |\cos x|\,dx = 2n \le \int_{n\pi}^x |\cos x|\,dx \le \int_{n\pi}^\infty |\cos x|\,dx = \pi,$$

可知

$$2n \le S(x) \le 2n+\pi.$$

因此，得

$$\frac{2n}{x} \le \frac{S(x)}{x} \le \frac{2n+\pi}{x}.$$

当 $x \to +\infty$ 时，$\frac{2n}{x} \to 0$ 和 $\frac{2n+\pi}{x} \to 0$，从而

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

□

1.7.13

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，证明

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\,dx = \ln 2\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{1}{x}\,dx.$$

证明. 令 $t=\frac{4}{x}$，则 $x=\frac{4}{t}$，$dx=-\frac{4}{t^2}dt$，于是

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\ln\frac{x}{x}\,dx=\int_4^1 f\left(\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\right)t\,(\ln 4-\ln t)\left(-\frac{4}{t^2}\right)\,dt.$$

$$=\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\ln 4-\ln x\,dx$$

所以

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\ln\frac{x}{x}dx=(\ln 2)\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\,dx.$$

□

1.7.14

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，满足

$$f(0)=f(1)=0,\quad f'(0)=0,\quad f'(1)=1.$$

试证

$$\int_0^1 \left(f''(x)\right)^2 dx\geq 4,$$

并指出不等式中等号成立的条件。

证明. 构造一个三次多项式 $p(x)$，满足 $p(0)=p(1)=0,p'(0)=0,p'(1)=1$。于是有

$$p(x)=kx^2(x-1),\quad 1=p'(1)=k\cdot 1\cdot(1-1)=k,\quad \text{得}\quad p(x)=x^3-x^2,\quad p'(x)=3x^2-2x,$$

$$p''(x)=6x-2,\quad p^{(3)}(x)=0.$$

因此

$$\int_0^1[p''(x)]^2dx=\int_0^1(36x^2-24x+4)dx=12-12+4=4.$$

当 $f(x)=x^3-x^2$ 时，等号成立。考虑积分

$$\int_0^1\left(f''(x)^2-[p''(x)]^2\right)dx$$

有

$$=\int_0^1[f''(x)-p''(x)]^2dx+2\int_0^1 f'(x)p^{(3)}(x)dx-2\int_0^1 p''(x)f^{(3)}(x)dx=8$$

所以

$$\int_0^1 (f''(x))^2\,dx \ge \int_0^1 [p''(x)]^2\,dx = 4$$

且等号成立当 $f(x)=p(x)$ 时。再由 f 与 p 满足条件，得

$$f(x)=p(x)=x^3-x^2.$$

□

1.7.15

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且严格递增。对每个正整数 n，记

$$F_n(x)=f(x)^n,\quad \text{设}\quad \theta_n\in[0,1]\quad \text{满足}\quad F_n(\theta_n)=\int_0^1 F_n(x)\,dx.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n=1.$$

证明. 由条件，对每个 $n, F_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上也都是非负、严格递增的连续函数。

对 $\epsilon>0$ ($\epsilon<\frac{1}{2}$)，因为

$$0\le\frac{f(1-2\epsilon)}{f(1-\epsilon)}<1\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(1-2\epsilon)}{f(1-\epsilon)}\right)^n=0,$$

所以存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，

$$\left(\frac{f(1-2\epsilon)}{f(1-\epsilon)}\right)^n=\frac{F_n(1-2\epsilon)}{F_n(1-\epsilon)}<\epsilon.$$

从而又有

$$F_n(1-2\epsilon)<\epsilon F_n(1-\epsilon)<\int_{1-\epsilon}^1 F_n(x)\,dx<\int_0^1 F_n(x)\,dx=F_n(\theta_n).$$

再由 $F_n(x)$ 为严格递增，得知 $n>N$ 时满足

$$1-2\epsilon<\theta_n<1.$$

这就证明得

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n=1.$$

□

2 第二部分：等距分划下的 Riemann 积分

2.1 黎曼积分的定义

设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数。如果存在一个实数 I，使得任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于 $[a,b]$ 的任意一个分割

$$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

只要其宽度

$$\|P\|=\max_{1\le k\le n}\Delta x_k<\delta, \quad \text{此处} \quad \Delta x_k=x_k-x_{k-1},\ k=1,2,\cdots,n,$$

那么，在每个子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上任取一点 ξ_k，都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right|<\epsilon,$$

我们就说 f 在 $[a,b]$ 上可积，称为 f 在 $[a,b]$ 上的黎曼积分，简称积分，记为

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I.$$

2.2 问题

如果将上述定义中的分割 P 改成对区间 $[a,b]$ 实行 n 等分，即要求所有 Δx_k 都相等，这样得出的可积性以及积分的定义与原来的定义是否等价？为什么？

2.3 可积的第一第二充要条件

等距分划

称点集 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一个分割，如果满足条件：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ i=1,\cdots,n$，并称 $\|P\|=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$ 为分割 P 的细度。

如果 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n},\ i=1,\cdots,n$，则称 P 为**等距分划**。

介点集与 Riemann 积分和

设 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 为区间 $[a,b]$ 的一个分割。对每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$，任选 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则称 $\xi=\{\xi_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为从属于 P 的一个 **介点集**；并称和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{或} \quad \sum_{P} f(\xi_i)\Delta x_i$$

为 f 在区间 $[a,b]$ 上的一个 **Riemann（积分）和**。

可积与定积分

设 I 为实数，且有

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I,$$

即 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，对 $\|P\|<\delta$ 的每个分割 P，以及对从属于 P 的每个介点集 ξ，成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon,$$

则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**或简称 **可积**，记为

$$f\in R[a,b],$$

并称 I 为 f 在区间 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分**或 **定积分**，简称积分，记为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I, \quad \text{或其简化记号} \quad \int_a^b f = I.$$

振幅与振幅面积

为叙述可积的充分必要条件，需要引入以下概念。设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有界，$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 为 $[a,b]$ 的一个分割，对 $i=1,\cdots,n$，记

$$M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\} \quad \text{与} \quad m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\},$$

称 $\omega_i=M_i-m_i$ 为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的**振幅**，$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$ 为 f 的**振幅面积**。

可积的第一充分必要条件

命题 2.3.5（可积的第一充分必要条件）

有界函数 $f \in R[a, b]$ 的充分必要条件是

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

可积的第二充分必要条件

命题 2.3.6（可积的第二充分必要条件）

有界函数 $f \in R[a, b]$ 的充分必要条件是对每个 $\varepsilon > 0$，存在区间 $[a, b]$ 的一个分割 P，使成立

$$\sum_{P} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

这两个命题在许多教科书上都有具体的证明过程，在此不作证明直接使用。

证明过程可详见参考文献[1][2]

2.4 Riemann 积分引理

引理叙述

设 $f \in R[a, b]$ 且

$$\int_a^b f = I,$$

其充分必要条件是存在 $[a, b]$ 的一个分割序列 $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$，满足条件

$$\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_{k,i}) \Delta x_{k,i} = I,$$

且极限值不依赖于介点集的选取。

引理证明

必要性显然，下面证明充分性。

既然极限值不依赖于介点集的选取，那么我们有

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\sup_{(\xi_{k,i}\in[x_{k,i-1},x_{k,i}])}f(\xi_{k,i})\right)\Delta x_{k,i}=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\inf_{(\xi_{k,i}\in[x_{k,i-1},x_{k,i}])}f(\xi_{k,i})\right)\Delta x_{k,i}=I.$$

两者相减得到

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\omega_i\Delta x_{k,i}=0,$$

其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 表示 f 在 $[x_{k,i-1},x_{k,i}]$ 上的振幅。

故根据可积的第一充分必要条件，$f\in R[a,b]$。由于

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}f(\xi_{k,i})\Delta x_{k,i}=I,$$

根据积分函数点集选取的任意性性质，有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I.$$

2.5 问题 2.2 解答

问题描述

如果将黎曼积分定义中的分割 P 改成对区间 $[a,b]$ 进行 n 等分，即所有 Δx_k 相等，这样得出的可积性以及积分的定义是否与原定义等价？为什么?

问题解答

引理 2.4.1 表明 Riemann 积分的定义中分划的任意性要求可以降低，例如等距分划也是可以的。[3] 对于任意一个函数 f，若其在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则对于任意分割序列 $\{P_k\}$，只要 $\|P_k\|\to 0$，都可以得出相同的积分值。因此，将分割改为等距分划不会改变函数的可积性以及积分值。

具体而言，设 P_k 为等距分割，每个子区间长度为

$$\Delta x=\frac{b-a}{n_k},$$

根据 Riemann 积分定义，当 $n_k \to \infty$ 时，仍满足

$$\lim_{n_k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_{k,i}) \Delta x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

因此，等距分划定义的黎曼积分与原定义等价。

3 第三部分：离散动力系统的混沌现象

3.1 周期点、周期轨道与不动点

假设 I 是一个区间，函数 $f: I \to I$。对任意 $x \in I$，我们规定

$$f^0(x) = x, \quad f^1(x) = f(x), \quad f^{n+1}(x) = f(f^n(x)), \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

这样得到的函数 $f^n: I \to I$ 称为 f 的第 n 次迭代（$n = 0, 1, 2, \cdots$）。显然，f^0 就是恒等映射，f^1 就是 f 自身。

对给定的 $x \in I$，我们考虑点列

$$x, f(x), f^2(x), \cdots.$$

如果有正整数 m 使得 $f^m(x) = x$，则 x 称为 f 的一个**周期点**，把 m 称为 x 的**一个周期**。

如果 x 的最小周期是 n，则称 x 是 f 的一个 **n− 周期点**。这时点列

$$x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{m-1}(x)$$

是由 n 个互不相同的点组成的有限数列，称为 x 的 **n− 周期轨道**。

f 的 1 周期点也称为 f 的**不动点**。

3.2 问题

3.2.1 问题 1（Brouwer 不动点定理）

证明：如果 I 是一个闭区间，$f: I \to I$ 连续，则 f 必有不动点。

3.2.2 问题 2（构造 2-周期点函数）

试构造一个 $[0, 1]$ 上的连续函数，使得 f 有 2-周期点。

3.2.3 问题 3（构造 3-周期点函数）

试构造一个 $[0, 1]$ 上的连续函数，使得 f 有 3-周期点。

3.2.4 问题 4（Li-Yorke 定理）

证明：如果 $f: I \to I$ 连续，且有 3-周期点，那么对任意正整数 n，f 必有 n-周期点。

3.3 两个补充定理

3.3.1 零点存在定理

设 $f \in C[a,b]$，并满足条件 $f(a)f(b) < 0$，则存在点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = 0$。

3.3.2 介值定理

区间上的连续函数的值域必是区间（可缩为一点）。

这两个定理在许多教科书上都有具体的证明方法，在此直接使用不作证明。详细证明过程在参考文献[4]。

3.4 问题解答

3.4.1 问题 1 解答

这是著名的 Brouwer（布劳威尔）不动点定理的特例，下面给出一种证明。

原问题：如果 I 是一个闭区间，$f: I \to I$ 连续，则 f 必有不动点等价于以下命题

Brouwer 不动点定理如果 $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$，并且 $f: I \to I$ 是连续函数，那么 f 至少有一个不动点。[5]

解：如果 $f(a) = a$ 或 $f(b) = b$，那么命题显然成立。否则，$f(a) > a$ 且 $f(b) < b$。

定义一个辅助函数：

$$g(x) = f(x) - x, \quad x \in [a,b].$$

显然，$g(a) = f(a) - a > 0$，而 $g(b) = f(b) - b < 0$。

又因为 f 是连续函数，故 $g(x)$ 也是 $[a,b]$ 上的连续函数。因此，根据介值定理（Intermediate Value Theorem），存在 $x^* \in (a,b)$，使得

$$g(x^*) = 0.$$

由 $g(x^*) = f(x^*) - x^* = 0$ 可得

$$f(x^*) = x^*.$$

因此，x^* 是 f 的不动点。命题得证。

从而原问题"如果 $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$，并且 $f : I \to I$ 是连续函数，那么 f 至少有一个不动点"得证。 □

3.4.2 问题 2 解答

原问题：试构造一个 $[0, 1]$ 上的连续函数，使得 f 有 2-周期点。

解：构造函数 $f(x) = x^2 - 1$

点 $x_0 = -1$ 是函数 $f(x) = x^2 - 1$ 的一个周期为 2 的 2-周期点，因为

$$f(-1) = 0 \quad \text{且} \quad f^2(-1) = -1.$$

同样地，$x_0 = 0$ 也是函数 $f(x)$ 的一个周期为 2 的 2-周期点。 □

3.4.3 问题 3 解答

原问题：试构造一个 $[0, 1]$ 上的连续函数，使得 f 有 3-周期点。

解：构造函数 $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2$

点 $x_0 = 1$ 是函数 $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2$ 的一个周期为 3 的 3-周期点，因为

$$f(1) = -1, \quad f^2(1) = 0, \quad \text{且} \quad f^3(1) = 1.$$

□

3.4.4 问题 4 解答

这是中国台湾数学家李天岩和美国数学家 Yorke, J.A. 于 1975 年发表在《美国数学月刊》的论文《周期 3 蕴涵混沌》(《Period three implies chaos》) 提出。被普遍称为 Li-Yorke Theorem，是 Sharkovsky 定理的一种特殊变形，下面给出两种证明方法。

问题：如果 $f : I \to I$ 连续，且有 3-周期点，那么对任意正整数 n，f 必有 n-周期点。

方法一

证明. 设 x_1 是周期为 3 的点，且 $f(x_1) = x_2$ 和 $f(x_2) = x_3$。假设 $x_1 < x_2 < x_3$（其他可能的排列方式可采用类似的证明）。令

$$I_1 = [x_1, x_2], \quad I_2 = [x_2, x_3].$$

那么有

$$f(I_1) = I_2, \quad f(I_2) = I_1 \cup I_2.$$

由于 $I_2 \to I_2$，区间 I_2 中存在一个不动点 p_1（周期为 1）。同时有 $I_1 \to I_2 \to I_1$，这意味着在 I_1 中存在一个周期为 2 的周期点 p_2。这两个点显然与 x_1, x_2, x_3 不同，因为它们的周期小于 3。

此外，对于任意给定的整数 $n > 3$，可以构造以下序列：

$$I_1 \to I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1,$$

其中区间 I_2 出现了 $n-1$ 次。

这表明在 I_1 中存在一个周期为 n 的点 p_n，其满足以下条件：

$$f^n(p_n) = p_n, \quad f^i(p_n) \in I_2 \quad 对于所有 0 < i \leq n-1.$$

注意，$p_n \neq x_2$，因为 $f^2(x_2) \in I_1 \setminus I_2$。因此，

$$f^i(p_n) \neq p_n \quad 对于所有 0 < i \leq n-1,$$

这表明 p_n 的周期正好为 n。

□

方法二

证明. **引理 1(其实为问题 1)** 设函数 $f : I \to I$ 连续，且 $J = [a, b] \subset I$。如果 $f(J) \subset J$，那么 f 在 J 上有一个不动点。

解： 由于 $f(J) \subset J$，可以找到 $c, d \in J$，使得 $f(c) = a$ 以及 $f(d) = b$。若 $c = a$ 或 $d = b$，那么 a 或 b 就是 f 的不动点。如果不是这样，则说明 $c > a$ 且 $d < b$。这时，连续函数 $\varphi(x) = f(x) - x$ 满足

$$\varphi(c) = f(c) - c = a - c < 0, \quad \varphi(d) = f(d) - d = b - d > 0.$$

因此由零值定理可知，φ 在 c 与 d 之间必有一个零点，这一点正是 f 的不动点。 □

引理 2 设函数 $f: I \to I$ 连续，J_1, J_2 是 I 的两个闭子区间。如果 $f(J_1) \supset J_2$，那么必存在 J_1 的闭子区间 K，使得 $f(K) = J_2$。

解： 设 $J_1 = [a,b], J_2 = [U,V]$，由于 $f(J_1) \supset J_2$，必存在 $u, v \in [a,b]$，使得 $f(u) = U, f(v) = V$。不妨设 $u < v$（$u > v$ 的情形可类似处理）。令

$$E = \{s : f(s) = U,\ u \le s \le v\}.$$

因为 $f(u) = U$，故 E 为非空集且有上界，因此 E 必有上确界。记 $u^* = \sup E$，我们证明 $f(u^*) = U$。由上确界的定义知，对于任意的正整数 n，必有 $s_n \in E$，使得

$$u^* - \frac{1}{n} < s_n \le u^*.$$

由此可得 $\lim s_n = u^*$。由于 $s_n \in E$，故 $f(s_n) = U$。令 $n \to \infty$，并利用 f 的连续性，即得 $f(u^*) = U$。这就证明了 $u^* \in E$，而且 $u^* \ne v$（因为 $f(v) = V$）。有了 u^* 之后，可以定义

$$F = \{t : f(t) = V,\ u^* < t \le v\}.$$

F 当然有下确界，记 $v^* = \inf F$。同理可证 $f(v^*) = V$。由此可知 $u^* \ne v^*$。记

$$K = [u^*, v^*].$$

那么对于任意的 $x \in (u^*, v^*)$，由于 $x > u^*$，必有 $f(x) \ne U$；又因 $x < v^*$，必有 $f(x) \ne V$，故由介值定理，对任意的 $\eta \in (U,V)$，必有 $\xi \in [u^*, v^*]$，使得 $f(\xi) = \eta$。这就证明了

$$f([u^*, v^*]) \supset [U,V]. \tag{1}$$

为了证明 $f([u^*, v^*]) \subset [U,V]$，必须证明：对任意的 $x < U$（或 $x > V$），不可能存在 $s \in [u^*, v^*]$，使得 $f(s) = x$。如果有这样的 x，我们再取一点 $x' \in (U,V)$。根据式 (1)，存在 $s' \in [u^*, v^*]$，使得 $f(s') = x'$，那么由于 $f(s') = x'$，而且 $x < U < x'$，故由介值定理，必有 ξ 介于 s' 与 s 之间，使得 $f(\xi) = U$。由于 ξ >U，这是不可能的。这就证明了

$$f([u^*, v^*]) \subset [U,V]. \tag{2}$$

综合式（1）与（2），即得 $f(K) = [U,V]$。 □

引理 3 设函数 $f: I \to I$ 连续，$J_0, J_1, \cdots, J_{n-1}$ 是 I 的 n 个闭子区间。

如果

$$f(J_0) \supset J_1,\, f(J_1) \supset J_2,\, \cdots,\, f(J_{n-2}) \supset J_{n-1},\, f(J_{n-1}) \supset J_0,$$

那么：

（1）存在 $x_0 \in J_0$，使得 $f^n(x_0) = x_0$；

（2）$f(x_0) \in J_1,\, f^2(x_0) \in J_2,\, \cdots,\, f^{n-1}(x_0) \in J_{n-1}$。

用一句通俗的话来说，当 j 从 0 跑过 $1, 2, \cdots, n-1$ 时，$f(x_0)$ 依次地"拜访" $J_0, J_1, \cdots, J_{n-1}$，最后仍然回到 x_0。

解： 因为 $f(J_{n-1}) \supset J_0$，由引理 2 知，有一个闭子区间 $K_{n-1} \subset J_{n-1}$，使得 $f(K_{n-1}) = J_0$。类似地，因 $f(J_{n-2}) \supset J_{n-1} \supset K_{n-1}$，又可以找到一个闭子区间 $K_{n-2} \subset J_{n-2}$，使得 $f(K_{n-2}) = K_{n-1}$。同理，可以找到一个闭子区间 $K_1 \subset J_1$，使得 $f(K_1) = K_2$。最后，存在在 J_0 的闭子区间 K_0，使得 $f(K_0) = K_1$。

因此，我们看到

$$\begin{aligned}
&f(K_0) = K_1,\\
&f^2(K_0) = K_2,\\
&f^3(K_0) = K_3,\\
&\vdots\\
&f^{n-1}(K_0) = K_{n-1},\\
&f^n(K_0) = f(K_{n-1}) = J_0 \supset K_0.
\end{aligned}$$

对函数 f^n 运用引理 1，我们可以找到一点 $x_0 \in K_0 \subset J_0$，使得 $f^n(x_0) = x_0$。很显然，我们有 $f^k(x_0) \in K_k \subset J_k\ (k = 1, 2, \cdots, n-1)$。因此，引理 3 得证。 □

现在可以来证明问题 4。

根据假定，设 η 是 f 的一个 3 周期点，那么 $\eta, f(\eta), f^2(\eta)$ 构成 η 的 3 周期轨。不妨设

$$\eta < f(\eta) < f^2(\eta).$$

为简单起见，设 $a = \eta, \beta = f(\eta), \gamma = f^2(\eta)$，于是有

$$f(a) = \beta,\, f(\beta) = \gamma,\, f(\gamma) = a.$$

记 $H = [a, \beta], K = [\beta, \gamma]$。由于 $f(a) = \beta, f(\beta) = \gamma$，故由介值定理，知

$$f(H) \supset K. \tag{3}$$

又因 $f(\beta)=\gamma, f(\gamma)=a$，仍由介值定理，知

$$f(K)\supset[a,\gamma]=H\cup K. \tag{4}$$

现在来证明，对于任意的 $n\in\mathbb{N}^*$，f^n 必有 n 周期点。当 $n=1$ 时，由式 (4)，知 $f(K)\supset K$，故由引理 1，f 在 K 上有一个不动点，即 1 周期点。再设 $n=2$，由式 (4)，知

$$f(K)\supset H.$$

由式 (3)，知 $f(H)\supset K$。于是由引理 3 知，存在一点 $x_0\in K$，使得

$$f^2(x_0)=x_0,\ f(x_0)\in H.$$

我们证明 2 是 x_0 的最小周期。若 $f(x_0)=x_0$，那么 $x_0\in H\cap K=\{\beta\}$，即 $x_0=\beta$，这就导致

$$f(x_0)=f(\beta)=\gamma>\beta=x_0.$$

的矛盾。现设 $n>3$，记

$$J_0=J_1=\cdots=J_{n-2}=K,\ J_{n-1}=H.$$

从式 (4)，知 $f(J_j)\supset J_{j+1}\ (j=0,1,\cdots,n-2)$。又从式 (3)，有 $f(J_{n-1})\supset J_0$，即引理 3 的要求都满足。因此有一点 $x_0\in J_0=K$，使得 $f^n(x_0)=x_0$, 且

$$f^j(x_0)\in J_j\quad(j=1,2,\cdots,n-1). \tag{5}$$

现在证明 n 是 x_0 的最小周期。否则，存在 $k<n$，使得 $f^k(x_0)=x_0$，于是 $x_0,f(x_0),\cdots,f^{k-1}(x_0)$ 构成 x_0 的 k 周期轨。由于 $n>1\Rightarrow n>2\Rightarrow k-1$，所以 $f^{n-1}(x_0)$ 必是

$$x_0,f(x_0),\cdots,f^{n-2}(x_0)$$

中的一个。由式 (5) 知，它们都在 K 中。但是 $f^{n-1}(x_0)\in J_{n-1}=H$。这说明 $f^{n-1}(x_0)\in K\cap H=\{\beta\}$，因此 $x_0=f^n(x_0)=f(\beta)=\gamma$，而

$$a=f(\gamma)=f(x_0)=f(\beta)=\gamma\Rightarrow K=[\beta,\gamma].$$

这是不可能的。

这样就完全证明了问题 4。

□

Li-Yorke 定理告诉我们，看似简单的映射可能表现出非常复杂的动态行为。反之，也存在一些情形，映射表现得极为简单。

参考文献

[1] 徐森林, 薛春华. 数学分析[M]. 清华大学出版社, 2005.

[2] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 科学出版社, 2006.

[3] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 等. 数学分析习题课讲义: 上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[4] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程. 上册[M]. 高等教育出版社, 2003.

[5] ELAYDI S N. Discrete Chaos: With Applications in Science and Engineering[M]. Chapman, 2007.

[6] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 等. 数学分析习题课讲义: 下册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[7] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程. 下册[M]. 高等教育出版社, 2003.

[8] 李傅山. 数学分析中的问题与方法[M]. 科学出版社, 2016.