目录

1．问题一

1.1 题目一：计算 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$（选自数项级数第二题）

概念、方法与技巧：题目一考点为级数的求和，通过观察形式可发现级数展开可形成隔项和抵消从而化简原式。

解：因为

$$\begin{aligned}S_n &= (1-2\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{3}-2\sqrt{4}+\sqrt{5})+\\ &\cdots+(\sqrt{n-2}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n})+(\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\\ &\quad+(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})\\ &\quad=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n &= \lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)\\ &=1-\sqrt{2}\end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 收敛，其和为 $1-\sqrt{2}$ 。

1.2 题目二：证明以下结果

1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos 2n}{n}$ 收敛；

2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 收敛（选自数项级数第七题）

概念、方法与技巧：知识点狄利克雷判别法;绝对收敛，题目二（1）需要结合三角函数的变幻与二倍角展开公式，化简成熟悉的 sin 级数性质，对交错级数的求解方式做进一步的理解。题目二（2）通过观察与（1）的关联，发现可以改写成两个收敛级数相乘的形式，从而得到原级数的一些性质，在此题中，运用了收敛级数的积仍为收敛级数的性质。

解（1）：由于

$$2\sin 1\sum_{n=1}^{n}\cos 2k = 2\sin(\cos 2 + 2\sin 1\cos 4 + \cdots + 2\sin 1\cos n$$
$$= (\sin 3 - \sin 1) + (\sin 5 - \sin 3) + \cdots + (\sin(2n+1) - \sin(2n-1))$$
$$= \sin(2n+1) - \sin 1$$

故 $\left|\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\right| = \left|\dfrac{\sin(2n+1)-\sin 1}{2\sin 1}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sin 1}$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n$ 部分和数列有界，

且数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调趋于 0，由狄利克雷判别法有 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$ 收敛，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{\cos 2n}{n}\right|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos 2n}{n}$ 收敛。

解（2）：因为 $\sin^2 n = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2n)$，故若能证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{n}$$

都收敛，那么原级数收敛。由 Leibniz 判别法知第一个级数收敛。由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(2+\pi)}{n}$$

且（1）中已经证明该级数收敛。因而原级数收敛。

1.3 题目三：设函数列

$$f_n(x) = \frac{x(\ln n)^{\alpha}}{n^x}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

讨论 α 取何值时，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛（选自函数项级数一第五题）

概念、方法与技巧：此题考查了对级数敛散性的判断及一致收敛定义的证明，通过分类讨论将级数转化为导数的正负性以判断级数的敛散性。

解：

（1）当 $x=0$ 时，$f_n(0)=0$，故 $f_n(0)\to 0(n\to\infty)$；当 $x>0$ 时，对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$，

$$f_n(x)=\frac{x(\ln n)^{\alpha}}{n^x}=xe^{-x\ln n}(\ln n)^{\alpha}\to 0,\quad n\to\infty$$

故 α 为任何实数值时，$\left\{f_n(x)\right\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上收敛。

（2）因为

$$f_n^{'}(x)=\frac{(\ln n)^{\alpha}\left(n^x-xn^x\ln n\right)}{n^{2x}}=\frac{(\ln n)^{\alpha+1}\left(\frac{1}{\ln n}-x\right)}{n^x}$$

所以

$$f_n^{'}(x)\begin{cases}>0, & x<\dfrac{1}{\ln n}\\ =0, & x=\dfrac{1}{\ln n}\\ <0, & x>\dfrac{1}{\ln n}\end{cases}$$

因此，$f_n(x)$ 在点 $x=\dfrac{1}{\ln n}$ 处达到极大值。又因为

$$f_n(0)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0$$

故当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f_n(x)$ 在点 $x=\dfrac{1}{\ln n}$ 处达到最大值。再注意到，$n^{\frac{1}{\ln n}}=\mathrm{e}^{\ln n\frac{1}{\ln n}}=e$，我们有

$$f_n\left(\frac{1}{\ln n}\right)=\frac{(\ln n)^{\alpha-1}}{n^{\frac{1}{\ln n}}}=\frac{1}{\mathrm{e}}(\ln n)^{\alpha-1}$$

由此可知，当 $\alpha\leqslant 1$ 时，$\left\{f_n\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right\}$ 收敛；当 $\alpha>1$ 时，$\left\{f_n\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right\}$ 发散到 $+\infty$。

故当 $\alpha\leqslant 1$ 时，$\left\{f_n(x)\right\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。

1.4 题目四：试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛（选自函数项级数一第六题）

概念、方法与技巧：此题考察了单调减函数对一致收敛性的影响，理解级数的基本性质后，运用 Dirichlet 判别法判断两个无穷级数积的收敛性。

解：令 $u_n(x)=\frac{n}{n^2+x^2}$。对 $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$u_n(x)-u_{n+1}(x)=\frac{n}{n^2+x^2}-\frac{n+1}{(n+1)^2+x^2}=\frac{n^2+n-x^2}{\left(n^2+x^2\right)\left[(n+1)^2+x^2\right]}。$$

当 n 足够大时 $u_n(x)-u_{n+1}(x)>0.\{u_n(x)\}$ 单调减且

$$u_n(x)=\frac{n}{n^2+x^2}<\frac{1}{n}\to 0,$$

它一致地趋于 0。而

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$$

一致有界，由 Dirichlet 判别法得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(x)$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

1.5 题目五：设 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t,\quad n=1,2,3,\cdots$$

证明：函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零（选自函数项级数一第七题）

概念、方法与技巧：本题通过对函数的定义，使用积分来构造上界，利用 Riemann 可积的性质与数学归纳法总结得出一致收敛的性质。

解：因为 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，所以在 $[a,b]$ 上有界，即 $M>0$ ，s。t。 $\left|f_1(x)\right|\leqslant M$ 。由此知

$$\left|f_2(x)\right|=\left|\int_a^x f_1(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^x\left|f_1(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant M(x-a)$$

$$\left|f_3(x)\right|\leqslant\int_a^1 M(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(x-a)^2$$

用归纳法可以证明

$$\left|f_n(x)\right|\leqslant\frac{M}{n!}(x-a)^{n-1}\leqslant\frac{M(b-a)^{n-1}}{n!}\to 0\quad(n\to+\infty)$$

所以 $\left\{f_n(x)\right\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0。

1.6 题目六：设 p,n 是非负整数，将 $f(x)=(1-x)^{-p-1}$ 展开成幂级数，由此证明

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{p}\binom{p+n-k}{p}=\binom{2p+n+1}{2p+1}$$ （选自函数项级数二第三题）

概念、方法与技巧：本题考察对二项式定理的运用，及幂级数展开的定义理解。

解：设 p、n 是非负整数，将 $f(x)=(1-x)^{-p-1}$ 展开成幂级数，

根据幂级数展开式 $(1-x)^{-r}=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\begin{matrix}r+k\\ r\end{matrix}\right|x^k$ （r 为任意实数），可得：

$$\begin{aligned}f(x)&=(1-x)^{-p-1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\begin{matrix}-p-1+k\\ -p-1\end{matrix}\right|(-x)^k\end{aligned}$$

接下来证明 $\sum_{k=0}^{n}\left|\begin{matrix}p+k\\ p\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}p+n-k\\ p\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}2p+n+1\\ 2p+1\end{matrix}\right|$

根据二项式定理：$\left|\begin{matrix}r\\ m\end{matrix}\right|=\frac{r!}{m!(r-m)!}$，对等式左边进行化简：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left|\begin{matrix} p+k \\ p \end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} p+n-k \\ p \end{matrix}\right| &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(p+k)!}{p!(k)!}\frac{(p+n-k)!}{p!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(p+n)!}{(p-k)!(n-k)!}\frac{k!(p-k)!}{p!} \\
&= \frac{(p+n)!}{p!}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!(p-k)!}{(p-k)!(n-k)!} = \frac{(p+n)!}{p!}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{(n-k)!} \\
&= \frac{(p+n)!}{p!(n!)}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n!} = \frac{(p+n)!}{p!(n!)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\cdot k! = \frac{(p+n)!}{p!(n!)}\cdot\frac{n!}{n!}\cdot(n+1) \\
&= \frac{(p+n)!}{(p!)(n!)}\cdot(n+1) \\
&= \left|\begin{matrix} 2p+n+1 \\ 2p+1 \end{matrix}\right|
\end{aligned}
$$

综上，等式成立。

1.7 题目七: 给出一个使二元函数 $f(x,y)$ 在某点的二重极限存在，但相应的累次极限一个存在，另一个不存在的例子（选自多元函数微分学一第三题）

概念、方法与技巧：本题考察了二重极限和累次极限的定义，很快就能给出一个函数例子。

解：函数 $f(x,y)=\frac{1}{y}\sin x$ 满足 $\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=0, \lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{y}\sin x$ 不存在，但是 $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}f(x,y)=0$ 。

1.8 题目八：设函数 $F(x,y,z)$ 有连续一阶偏导数，并满足不等式

$$y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\geq a>0,\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

证明: $\lim_{t\to+\infty}F(-\cos t,\sin t,t)=\infty$ （选自多元函数微分学一第四题）

概念、方法与技巧：本题通过构造新的函数 G(t),运用 Taylor 公式进行近似值展开，利用不等式得到所求结果，核心在于通过结果反推出 Taylor 公式的形式。

解：令 $G(t)=F(-\cos t,\sin t,t),t\geqslant 0$ 。则 $G(t)$ 连续可导，且

$$
\begin{aligned}
G'(t) &= \sin t F_x' + \cos t F_y' + F_z', \\
G(0) &= F(-1,0,0).
\end{aligned}
$$

曲线 C 上的点 $(x,y,z)=(-\cos t,\sin t,t)$ ，有 $F(x,y,z)=G(t)$ 。根据一元函数的 Taylor 公式得：

$$
\begin{aligned}
G(t) &= G(0)+G^{'}(\tau)t \\
&= F(-1,0,0)+\Big[\sin\tau F_x^{'}(-\cos\tau,\sin\tau,\tau)+\cos\tau F_y^{'}(-\cos\tau,\sin\tau,\tau) \\
&\quad +F_\tau^{'}(-\cos\tau,\sin\tau,\tau)\Big]t
\end{aligned}
$$

记 $F(-1,0,0)=\alpha_0,(-\cos\tau,\sin\tau,\tau)=(\xi,\eta,\zeta)$ 为曲线上的点 Q，上式变为

$$F(-\sin t,\cos t,t)=G(t)=\alpha_0+\left(\eta F_x^{'}-\xi F_y^{'}+F_x^{'}\right)t\geqslant\alpha_0+\alpha t\to+\infty\quad(t\to+\infty)。$$

即曲线上的点趋于无穷远时， $F(x,y,z)\to+\infty$ 。

1.9 题目九：分别给出满足下列要求的函数 $f(x.y)$：

（1）在原点 $O(0,0)$ 处连续，但偏导数不存在；

（2）在原点 $O(0,0)$ 处偏导数存在，但不连续；

（3）在原点 $O(0,0)$ 处可微，但偏导数不连续（选自多元函数微分学二第一题）

概念、方法与技巧：本题考察了多元函数微分的定义及基本性质，充分理解后可以很容易的构造出对应的函数了。

解（1）：

证明: $z=f(x,y)=|x|+|y|$ 在点 $(0,0)$ 处，连续，但偏导数不存在。

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(|x|+|y|)=0=f(0,0)$ ，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。

因为 $f(x,0)=|x|$，在 $x=0$ 点的导数不存在，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处对 x 的偏导数不存在。同理， $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处对 y 的偏导数不存在。

解（2）：

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则在点 $O(0,0)$ 处偏导数存在，但函数不连续。

由偏导数定义，得

$$f_x^{'}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

$$f_y^{'}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0.$$

即两个偏导数都存在。

考虑连续性，取 $y=kx^2$ 让点 $(x,y)\quad(0,0)$ 。则

$$f\left(x,kx^2\right)=\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}(x\neq 0),$$

所以当 $x=0$ 时，$f\left(x,kx^2\right)=\dfrac{k}{1+k^2}$ ，因 k 而异，故知 $\lim_{(x,y)\to(0.0)}f(x,y)$ 不存在，更谈不上连续性

解（3）：

设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$f(x,y)$ 在原点 $O(0,0)$ 处可微，但在原点 $O(0,0)$ 处两个偏导数都不连续。

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}}=0$$

类似地有 $f_y(0,0)=0$;由

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0$$

（其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ），得函数 $f(x,y)$ 在原点 $O(0,0)$ 处可微且 $\mathrm{d}f\big|_{(0,0)}=0$;

由

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

不存在，得 $f_x(x,y)$ 在原点 $O(0,0)$ 处不连续，同理 $f_y(x,y)$ 在原点 $O(0,0)$ 处不连续。

1.10 题目十：求由方程

$$x^2+2xy+2y^2=1$$

确定的隐函数 $y=y(x)$ 的极值（选自多元函数微分学三第一题）

概念、方法与技巧：此题通过运用二阶导数的链式法则及商法则，判断极值点与驻点，从而得到对应的隐函数性质。

解：由

$$y^{'}=-\frac{x+y}{x+2y}=0,$$

得到 $x+y=0$，再代人 $x^2+2xy+2y^2=1$ 得到 $y^2=1$，由此可知隐函数 $y=\ y(x)$ 的驻点为 $x=\pm1$，且当 $x=\pm1$ 时有 $y=\mp1$。

由于在驻点有

$$y^{''}=-\frac{1+y^{'}}{x+2y}+\frac{x+y}{(x+2y)^2}\left(1+2y^{'}\right)=-\frac{1}{y}$$

根据 $y^{''}(\pm1)$ 的符号可知，$y=y(x)$ 在 $x=-1$ 取极大值 1，在 $x=1$ 取极小值-1。

注本题也可由

$$x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2=1$$

得到 $-1\leqslant y\leqslant 1$，由此可知 $y=y(x)$ 在 $x=-1$ 取极大值 1，在 $x=1$ 取极小值-1。

1.11 题目十一：已知平面 $\ell x+my+nz=p$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切，ℓ,m,n,a,b,c,p 均为已知实数，证明：$a^2\ell^2+b^2m^2+c^2n^2=p^2$（选自多元函数微分学三第三题）

概念、技巧与方法：此题通过求解椭圆面上的切平面方程，得到相关参数和变量之间的等式，从而通过变量代换得到相应的关系。

解：椭球面过$\left(x_1,y_1,z_1\right)$点的切平面为

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y+\frac{z_1}{c^2}z=1,$$

两边同乘p得$p\frac{x_1}{a^2}x+p\frac{y_1}{b^2}y+p\frac{z_1}{c^2}z=p$

因该平面与平面$lx+my+nz=p$均是过$\left(x_1,y_1,z_1\right)$的切平面，故须

$$l=p\frac{x_1}{a^2},m=p\frac{y_1}{b^2},n=p\frac{z_1}{c^2},$$

$$\therefore x_1=\frac{a^2l}{p},y_1=\frac{b^2m}{p},z_1=\frac{c^2n}{p}$$

再将它们代入已知平面方程即$lx+my+nz=p$，即有

$a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=p^2$

1.12 题目十二：过直线

$$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\x+y-z=0\end{cases}$$

作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求此切平面的方程（选自多元函数微分学三第五题）

概念、技巧与方法：本题通过找到直线的方向向量与曲面的切平面参数方程，从而找到直接与曲面的交点，利用代换消去参数，确定交点，得到切平面方程。

解：直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\10&2&-2\\1&1&-1\end{vmatrix}=(0,8,8)$$

设$\left(x_0,y_0,z_0\right)$为曲面$3x^2+y^2-z^2=27$上的点，则曲面在$\left(x_0,y_0,z_0\right)$点处切平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\left(3x_0,y_0,-z_0\right)$，切平面方程为$3x_0\left(x-x_0\right)+y_0\left(y-y_0\right)-z_0\left(z-z_0\right)=0$，即

$$3x_0x + y_0y - z_0z = 27.$$

由题意 $s \cdot \boldsymbol{n} = 0$，知 $s \cdot \boldsymbol{n} = y_0 - z_0 = 0$，于是 $y_0 = z_0$。代入曲面方程解得 $x_0 = \pm 3$。又过直线的平面束方程为

$$10x + 2y - 2z - 27 + \lambda(x + y - z) = 0$$

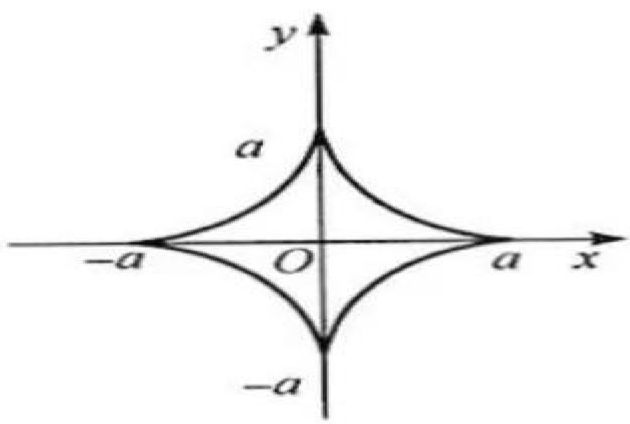
整理得 $(10+\lambda)x + (2+\lambda)y - (2+\lambda)z = 27$。因为直线过曲面的切平面，故

$$\frac{10+\lambda}{3x_0} = \frac{2+\lambda}{y_0} = \frac{-(2+\lambda)}{-z_0} = 1$$

由此得 $10 + \lambda = 3x_0$。当 $x_0 = 3$ 时，$\lambda = -1$；当 $x_0 = -3$ 时，$\lambda = -19$。故可得过直线所作的平面与曲面相切的切点为 $(3,1,1),(-3,17,17)$。

所以满足要求的切平面方程为 $9x + y - z = 27$ 及 $9x + 17y - 17z = 27$。

1.13 题目十三：将星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\,(a > 0)$ 表示成参数曲线，求其弧长（选自曲线与曲面第一题）



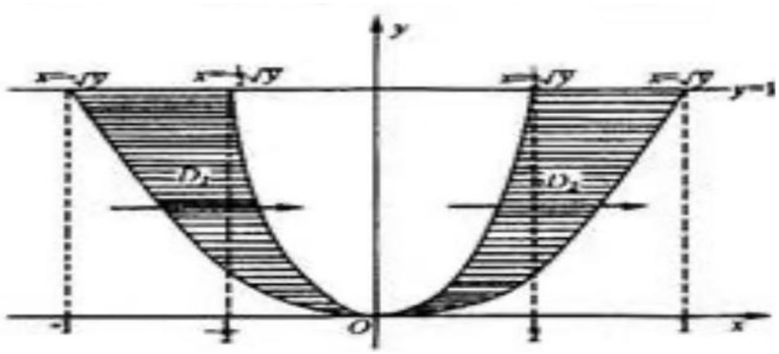
概念、技巧与方法：通过画图可以发现图形的对称性，进而可以很容易的得到结果。

解：由曲线的对称性，只需求曲线位于第一象限的部分再取 4 倍即可。为方便，将曲线用参数式表示为 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$，故所求弧长

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left[a\left(\cos^3 t\right)'\right]^2 + \left[b\left(\sin^3 t\right)'\right]^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t=6a$$

1.14 题目十四：计算二重积分 $\iint_D (x+y)dxdy$，此处 D 是由抛物线 $y=x^2, y=4x^2$ 及直线 $y=1$ 围成的闭区域（选自多元函数重积分一第一题）



概念、技巧与方法：通过画出三个函数的图像与交点，可以很容易的得到对称性与积分区域，从而通过重积分得到面积。

解：画图可知，积分区域为

$$D=\left\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant 1,-\sqrt{y}\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}\sqrt{y}\right\}\cup\left\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant 1,\frac{1}{2}\sqrt{y}\leqslant x\leqslant \sqrt{y}\right\}$$

$$\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}}(x+y)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(x+y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)\Bigg|_{-\sqrt{y}}^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}}\mathrm{d}y+\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[\left(\frac{1}{8}y-\frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y+y^{\frac{3}{2}}\right)+\left(\frac{1}{2}y+y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}y-\frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}}\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y=\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{5}$$

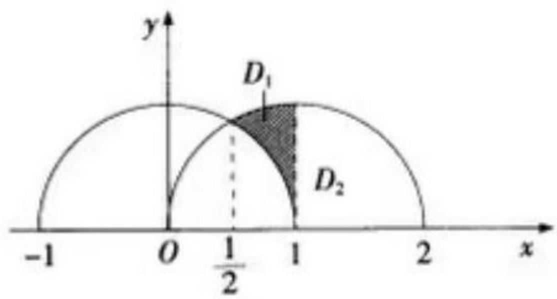
故面积为 2/5。

1.15 题目十五：计算二重积分 $\iint_D xydxdy$，

$D=\left\{(x,y): y\geq 0, x^2+y^2\geq 1, x^2+y^2-2x\leq 0\right\}$ **（选自多元函数重积分一第三题）**

概念、技巧与方法：通过画图可以很容易的得到积分区域，从而完成重积分的计算。

解：



在直角坐标系下，易知积分区域 $\mathrm{D}=\mathrm{D1}+\mathrm{D2}$

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1, \sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{2x-x^2}\right\}$$

$$D_2=\left\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{2x-x^2}\right\}$$

于是，有

$$I=\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int_{1/2}^{1}dx\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2\pi-y^2}}xydy+\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{\sqrt{2-x^2}}xydy$$

$$=\frac{9}{16}$$

1.16 题目十六：计算累次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz$**（选自多元函数重积分第四题）**

概念、技巧与方法：运用柱坐标变换，将难求的积分区域转换为熟悉的积分方式，可以很快得到结果。

解：应用柱面坐标变换

$$V' = \left\{ (r,\theta,z) | 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, r \leqslant z \leqslant \sqrt{2-r^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 dz \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 \left[\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}} - r^3 \right] r dr \\ &= \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

1.17 题目十七：计算积分 $\iiint_D (y-z)\arctan z dxdydz$，其中 D 是由曲面

$$x^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 = a^2, z=0, z=h$$

围成的区域（选自多元函数重积分一第五题）

概念、技巧与方法：通过联想曲面的积分，可以想到做出仿射变换以简化积分求解难度。

解：受曲面方程启发，宜作变换 $x=u, \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z)=v, z=w$，即作变换

$$\begin{cases} x = u \\ y = \sqrt{2}v + w \\ z = w \end{cases}$$

因为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{2} \neq 0$$

所以

$$I = \iiint_{V_1} \sqrt{2}v \ \arctan w \cdot \sqrt{2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = 2\iiint_{V_1} v \ \arctan w \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

其中V_1是由曲面$u^2+v^2=R^2$及$w=0$及$w=h$所围成的立体。上式再经柱面坐标变换得

I 0

$$2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R}r\mathrm{d}r\int_0^{h}r\ \sin\theta\ \arctan w\mathrm{d}w=2\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{R}r^2\mathrm{d}r\int_0^{h}\arctan w\mathrm{d}w$$

从此U形等式串的两端即知

$I=0$

1.18 题目十八：计算积分

$$I=\iiint_B\cos(mx+ny+pz)dxdydz$$

其中B是单位球

$x^2+y^2+z^2\le 1$

m,n,p **是不全为零的常数（选自多元函数重积分一第七题）**

概念、技巧与方法：本题核心在与找出相对应的仿射坐标系以简化积分难度，但是柱坐标变换的核心在于分解积分，需要进一步仔细思考分部积分。

解：在坐标原点O沿方向(m,n,p)设立w轴。在平而$\Pi: ax+by+cz=0$上，以O为原点建立平面直角坐标系Ouv，使得$Ouvw$成右手系。点$M(x,y,z)$在$Ouvw$坐标系下的w坐标等于$\pm d$（其中d为M到平面Π的距离），且当M在Π的(m,n,p)所指方向一侧时取“+”，否则取″-″，即

$$w=\frac{mx+ny+pz}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

点在坐标系$Oxyz$和$Ouvw$之下的坐标之间的对应构成了一个正交变换T，其变换函数行列式为1，且V在T之下的像仍为V白身：$u^2+v^2+w^2\leqslant 1$。于是

$$\iiint_V\cos(mx+ny+pz)dxdydz=\iiint_{u^2+w^2+x^2<1}\cos\left(w\sqrt{m^2+n^2+p^2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

为了计算上式中后积分，我们作柱面坐际变换

$$T:\begin{cases} u = r\cos\theta, \\ v = r\sin\theta, \quad (r,\theta,w)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times(-\infty,+\infty), \\ w = w, \end{cases}$$

于是$J(r,\theta,w)=r$，且$u^2+v^2+w^2\leqslant 1$的原像为

$$V^{'}=|(r,\theta,w)|-1\leqslant w\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{1-w^2}|$$

这样得到

$$\iiint\limits_{v^2+w^2+w^2\leq 1}\cos\left(w\sqrt{m^2+n^2+p^2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}w\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\sqrt{1-w^2}}\cos\left(w\sqrt{m^2+n^2+p^2}\right)r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_{0}^{1}\left(1-w^2\right)\cos\left(w\sqrt{m^2+n^2+p^2}\right)\mathrm{d}w$$

$$=\frac{4\pi}{m^2+n^2+p^2}\left(\frac{\sin\sqrt{m^2+n^2+p^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}-\cos\sqrt{m^2+n^2+p^2}\right)$$

故

$$\iiint\limits_{V}\cos(mx+ny+pz)dxdydz=\frac{4\pi}{m^2+n^2+p^2}\left(\frac{\sin\sqrt{m^2+n^2+p^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}-\cos\sqrt{m^2+n^2+p^2}\right)$$

1.19 题目十九：设 f 是单变量函数，在$[a,b]$上连续且恒正。试用重积分证明：

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x\int_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geq(b-a)^2$$ **（选自多元函数重积分二第二题）**

概念、技巧与方法：本题通过函数的单调性可以通过计算得到结果，但是常用的柯西-施瓦茨不等式的熟练运用可以进一步简化积分难度。

解法 1：设 $f(t)=\int_{a}^{t}f(x)dx\cdot\int_{a}^{t}\frac{1}{f(x)}dx-(t-a)^2 \qquad t\in[a,b]$

则 $f^{'}(t)=f(t)\int_{a}^{t}\frac{1}{f(x)}dx+\frac{1}{f(t)}\int_{a}^{t}f(x)dx-2(t-a)$

$$=\int_a^t \frac{f(t)}{f(x)}dx+\int_a^t \frac{f(x)}{f(t)}dx-\int_a^t 2dx=\int_a^t\left(\frac{f(t)}{f(x)}-2+\frac{f(x)}{f(t)}\right)dx$$

$=\int_a^t\left(\sqrt{\frac{f(t)}{f(x)}}-\sqrt{\frac{f(x)}{f(t)}}\right)^2 dx>0$，即 $f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增加，故 $f(b)\ge f(a)$

所以 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2$

解法 2:利用柯西一施瓦兹不等式 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}=\int_a^b(\sqrt{f(x)})^2dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{(\sqrt{f(x)})^2}\ge\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2=(b-a)^2$$

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}=\int_a^b(\sqrt{f(x)})^2dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{(\sqrt{f(x)})^2}\ge\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2=(b-a)^2$$

1.20 题目二十：设函数 f 是一元连续函数，

$$F(t)=\iiint\limits_D\left(z^2+f\left(x^2+y^2\right)\right)dxdydz$$

其中

$$D=\left\{(x,y,z):x^2+y^2\le t^2,0\le z\le h\right\}$$

求 $F'(t)$ 和 $\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{t^2}$（选自多元函数重积分二第三题）

概念、技巧与方法：本题通过分解积分先化简积分难度，再通过观察积分形式联想到运用极坐标变换优化积分结构。而在求导数时，则需要运用 Leibniz 公式简化求导过程，得到结果。

解：

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \iiint\limits_{\Omega} \left[z^2 + f\left(x^2+y^2\right) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^h z^2 \mathrm{d}z + \iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^h \mathrm{d}z \\
&= \pi t^2 \cdot \frac{h^3}{3} + h \iint\limits_{x^2+y^2=t^2} f\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi h^3 t^2}{3} + h \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{|t|} f\left(r^2\right) r \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi h^3 t^2}{3} + 2\pi h \int_0^{|t|} f\left(r^2\right) r \mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

则当 $t>0$ 时，$F(t) = \dfrac{\pi h^3 t^2}{3} + 2\pi h \int_0^t f\left(r^2\right) r \mathrm{d}r$ ，

$$
\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi h^3 t}{3} + 2\pi h f\left(t^2\right) t
$$

当 $t<0$ 时，$F(t) = \dfrac{\pi h^3 t^2}{3} + 2\pi h \int_0^{-t} f\left(r^2\right) r \mathrm{d}r$ ，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{2\pi h^3 t}{3} + 2\pi h f\left(t^2\right)(-t)\cdot(-1) \\
&= \frac{2\pi h^3 t}{3} + 2\pi h t f\left(t^2\right)
\end{aligned}
$$

从而 $\dfrac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2\pi h^3 t}{3} + 2\pi h t f\left(t^2\right)$

2. 问题二

2.1 隐映射定理陈述

设有由 m 个方程组成的方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0, \\ \cdots, \\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中涉及的变元的个数 m+n 多于方程的个数。如果方程组(1)是一个合适的约束，可望从方程组(1)中“解出”$y_1,\cdots,y_m$ 使得其中的每一个都是 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数，即

$$\begin{cases} y_1=f_1\left(x_1,\cdots,x_n\right) \\ \cdots, \\ y_m=f_m\left(x_1,\cdots,x_n\right) \end{cases} \tag{2}$$

这里 $x_1,\cdots,x_n$ 是 n 个独立的变元。为了缩短记号，可令

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

从而把方程组(1)写为

$$F(x,y)=0 \tag{3}$$

其中 0 是 $m\times 1$ 的零矩阵;而把式(2)写为

$$y=f(x) \tag{4}$$

设 $\boldsymbol{F}$ 定义在开集 $D\subset \mathbf{R}^{m+n}$ 上，在 $m\times(n+m)$ 矩阵

$$JF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

中作分块: $JF = \left(J_x F, J_y F\right)$，其中

$$J_x F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \ J_y F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

$J_x F$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，而 $J_y F$ 是一个 m 阶方阵。[1]

有了这些准备之后，我们可以来精确地表述隐映射定理。

定理 2.1.1（隐映射定理）：设开集 $D \subset \mathbf{R}^{n+m}, F: D \to \mathbf{R}^m$，满足下列条件:

(a) $F \in C^1(D)$**；**

(b)有一点 $\left(x_0, y_0\right) \in D$**，使得** $F\left(x_0, y_0\right) = 0$**；**

(c)行列式 $\det J_y F\left(x_0, y_0\right) \neq 0$ **。**

那么存在 $\left(x_0, y_0\right)$ **的一个邻域** $G \times H$**，使得：**

(1)对每一个 $x \in G$**，方程(3)在** H **中有唯一的解，记为** $f(x)$**；**

(2) $y_0 = f\left(x_0\right)$**；**

(3) $f \in C^1(G)$**；**

(4)当 $x \in G$ **时，**

$$Jf(x) = -\left(J_y F(x,y)\right)^{-1} J_x F(x,y)$$

其中 $y = f(x)$ **。[1][2]**

2.2 隐映射定理证明

首先我们需要知道如下定理

定理 2.2.1 设开集 $D \subset \mathbf{R}^{n+1}, F: D \to \mathbf{R}$, 满足条件：

(a) $F \in C^1(D)$

(b) $F(x_0, y_0) = 0$ ，这里 $x_0 \in \mathrm{R}^n, y_0 \in \mathrm{R}$ 且 $(x_0, y_0) \in D$ ；

(c) $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$ 。

那么存在 (x_0, y_0) 的一个邻域 $G \times J$ ，其中 G 是 x_0 在 R^n 的一个邻域，J 是 R 中含 y_0 的一个开区间，使得：

(1) 对每一个 $x \in G$ ，方程

$$F(x,y) = 0$$

在 J 中有唯一解，记为 $f(x)$ ；

(2) $y_0 = f(x_0)$ ；

(3) $f \in C^1(G)$ ；

(4) 当 $x \in G$ 时，

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 $y=f(x)$。[1]

基于定理 2.2.1，我们可以证明定理 2.1.1。

证明：我们对方程组(1)中方程的个数进行归纳。

当 $m=1$ 时，式(1)中只有一个方程，本定理就是定理 2.2.1，设当方程的个数为 $m-1$ 时，结论是正确的，我们来考察 m 个方程的情况，即式(1)成立的情况。

由于 $\det J_y F\left(x_0, y_0\right) \neq 0$ 以及 $F \in C^1(D)$，不妨设在 D 上的每一点都有 $\det J_y F \neq 0$，否则可以找出开集 D_1，使 $\left(x_0, y_0\right) \in D_1 \subset D$，并且在 D_1 上的每一点处都有 $\det J_y F \neq 0$，这时就把 D_1 干脆当成 D 好了。

由条件(c)，可知 m 阶方阵

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\left(x_0, y_0\right)\right)$$

中的每一个元素不都等于零。为方便起见，设

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\left(x_0, y_0\right) \neq 0 \tag{5}$$

改变一些记号，例如，令

$$u=\left(y_1, \cdots, y_{m-1}\right),\ t=y_m,\ y=(u, t)$$

同理，再用矩阵等式 $\boldsymbol{y}_0=\left(\boldsymbol{u}_0, t_0\right)$ 来规定记号 $\boldsymbol{u}_0$ 与 t_0 的意义。这样一来，式(5)可以写成

$$\frac{\partial F_m}{\partial t}\left(x_0, u_0, t_0\right) \neq 0$$

又有

$$F_m\left(x_0, u_0, t_0\right)=F_m\left(x_0, y_0\right)=0$$

由定理 2.2.1 可知，存在 $\left(x_0, u_0, t_0\right)$ 的一个邻域 $\left(G_n \times G_{m-1}\right) \times J \subset D$，使得：

(i)对每一点$(x,u)\in G_n\times G_{m-1}$，方程

$$F_m(x,u,t)=0$$

在J中有唯一的解$t=\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$，这里函数$\varphi:G_n\times G_{m-1}\to J$；

(ii)$\varphi\left(\boldsymbol{x}_0,u_0\right)=t_0$；

(iii)$\varphi\in C^1\left(G_n\times G_{m-1}\right)$。

到此为止，我们所做过的事只是:从方程组(1)的最后一个方程将y_m解出，使之成为其他变元$x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_{m-1}$的函数。下面将要做的是:将这个函数代人式(1)中其他最初的$m-1$个方程，以消去变量y_m。

以上的两点不过是解方程组时常用的“消元”技巧。方程组(1)中前面那$m-1$个方程的左边遂变为

$$\Phi_i(x,u)=F_i(x,u,\varphi(x,u))\quad(i=1,2,\cdots,m-1)\tag{6}$$

考虑映射

$$\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_{m-1}\end{pmatrix}:G_n\times G_{m-1}\to\mathbf{R}^{m-1}$$

若能证明Φ满足本定理的三个条件，便可利用归纳假定了。

显然$\Phi\in C^1$，并且由于

$$\begin{aligned}\Phi_i\left(x_0,u_0\right)&=F_i\left(x_0,u_0,\varphi\left(x_0,u_0\right)\right)\\&=F_i\left(x_0,u_0,t_0\right)=F_i\left(x_0,y_0\right)=0\end{aligned}$$

$(i=1,2,\cdots,m-1)$。所以$\Phi\left(x_0,u_0\right)=0$。

现在证明 $\det J_{\Delta}\Phi\left(x_0,u_0\right)\neq 0$ 。

对式(6)的两边关于 u_j (即 y_j) $(j=1,2,\cdots,m-1)$ 求导数，得

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial u_j}=\frac{\partial F_i}{\partial y_j}+\frac{\partial F_i\partial\varphi}{\partial y_m\partial u_i}\,(i,j=1,2,\cdots,m-1) \tag{7}$$

由于(i)就是

$$F_m(x,u,\varphi(x,u))=0$$

让上式也对 u_j (即 y_i) $(j=1,2,\cdots,m-1)$ 求导数，得

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_j}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}=0\quad(j=1,2,\cdots,m-1) \tag{8}$$

利用行列式的性质以及等式(7)和(8)，即得

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}
&=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}\\
&=\frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x_0,u_0,t_0)\det(J_u\Phi(x_0,u_0))
\end{aligned} \tag{9}$$

根据条件(c)，式(9)的左边不等于 0，因而

$$\det\left(J_u\Phi\left(x_0,u_0\right)\right)\neq 0$$

所有这些表明，映射 Φ 满足本定理中的三个条件。可对 Φ 用归纳假设，从而知定理的结论(1)，(2)和(3)对映射 Φ 成立。这就是说，存在点 $\left(x_0,u_0\right)$ 的邻域 $G\times H_{m-1}\subset G_n\times G_{m-1}$，使得：

(1) 当 $x\in G$ 时，方程 $\Phi(x,u)=0$ 在 H_{m-1} 中有唯一解 $u=g(x)$，其中映射 $g:G\to H_{m-1}$;

(2) $g\left(x_0\right)=u_0$;

(3) $g\in C^1(G)$。

令

$$\begin{aligned}&f(x)=(g(x),\varphi(x,g(x)))\ (x\in G),\\&H=H_{m-1}\times J,\end{aligned}$$

于是 $f:G\to H$。我们要证明 f 满足条件(1)，(2)和(3)。

当 $x\in G$ 时，$(x,g(x))\in G\times H_{m-1}\subset G_n\times G_{m-1}$，于是由(1)，可得

$$\begin{aligned}F_i(x,f(x))&=F_i(x,g(x),\varphi(x,g(x)))\\&=\Phi_i(x,g(x))=0\,(i=1,2,\cdots,m-1)\end{aligned}$$

另外由(i)，又有

$$F_m(x,f(x))=F_m(x,g(x),\varphi(x,g(x)))=0$$

结合以上诸式，得出当 $x\in G$ 时，有 $F(x,f(x))=0$。这就证明了 f 满足(1)。

由(2)和(ii)，可见

$$f\left(x_0\right)=\left(g\left(x_0\right),\varphi\left(x_0,g\left(x_0\right)\right)\right)=\left(u_0,\varphi\left(x_0,u_0\right)\right)=\left(u_0,t_0\right)=y_0,$$

所以 f 满足(2)。

再由(3)和(iii)，即知 f 满足(3)。

到此为止，我们已经证明了在定理的条件下，存在隐映射 f 满足定理中的(1)，(2)和(3)。余下的是要证明 f 也满足(4)。事实上，当 $x \in G$ 时，有恒等式

$$F(x, f(x)) = 0,$$

对上式复合求导，得到

$$J_x F(x, f(x)) + J_y F(x, f(x)) Jf(x) = 0$$

由于在 D 上 $\det J_y F$ 处处不为零，所以 $J_y F$ 是可逆方阵。在上式中取逆方阵，得出

$$Jf(x) = -\left(J_y F(x, f(x))\right)^{-1} J_x F(x, f(x))$$

这正是(4)。[1][2]

证毕

2.3 隐映射定理的意义

定理 2.1.1（隐映射定理）不仅具有重要的理论意义，而且上述证明过程提供了一种可操作的求非线性方程组的近似解的方法。[1]

3.问题三

3.1 函数项级数一致收敛的 Dirichlet 判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) (x \in D)$，其中$\{a_n(x)\}$对于$\forall x \in D$关于$n$单调，在$D$上一致收敛于 0；而且，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$的部分和在$D$上一致有界：$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \le M$，$x \in D$，$n \in N^+$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$在$D$上一致收敛。

3.2 函数项级数一致收敛的 Abel 判别法

设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) (x \in D)$，其中函数列$\{a_n(x)\}$对每一固定$x \in D$关于$n$单调且一致有界：$|a_n(x)| \le M$，$x \in D$，$n \in N^+$；同时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$在$D$上一致收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$在$D$上也一致收敛。

注：*Abel* 判别法和 *Dirichlet* 判别法都是$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) (x \in D)$一致收敛的充要条件。关键是写成两项相乘的形式，使其满足条件。

4.问题四

4.1 曲线方向的定义

我们可以通过曲线的切向量/切线，法向量/法平面，曲率，挠率来定义空间曲线的方向

-->

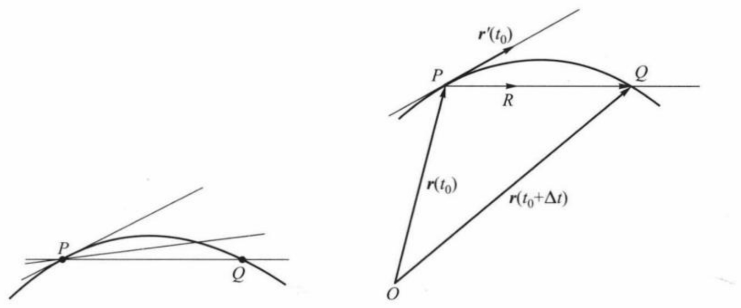


图 1-7　　图 1-8

4.1.1 曲线的切线和切平面

给出曲线上一点 P，点 Q 是 P 的邻近一点(如图 1-7)，把割线 PQ 绕 P 点旋转，使 Q 点沿曲线趋近于 P 点，若割线 PQ 趋近于一定的位置，则我们把这条割线 PQ 的极限位置称为曲线在 P 点的切线。而定点 P 称为切点。直观上看，切线是通过切点的所有直线当中最贴近曲线的直线。

设曲线的参数方程是

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

切点 P 对应参数 t_0, Q 点对应参数 $t_0 + \Delta t$ (如图 1-8)，则有

$$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{r}\left(t_0 + \Delta t\right) - \boldsymbol{r}\left(t_0\right)$$

在割线 PQ 上作向量 $\overrightarrow{PR}$，使得

$$\overrightarrow{PR}=\frac{\boldsymbol{r}\left(t_0+\Delta t\right)-\boldsymbol{r}\left(t_0\right)}{\Delta t}$$

当 $Q\to P$(即 $\Delta t\to 0$) 时，若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 可微，则由向量函数的微商可得向量 $\overline{PR}$ 的极限

$$\boldsymbol{r}^{'}\left(t_0\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}\left(t_0+\Delta t\right)-\boldsymbol{r}\left(t_0\right)}{\Delta t}$$

根据曲线的切线定义，得到 $\overline{PR}$ 的极限是切线上的一向量 $\boldsymbol{r}^{'}(t)$，**它称为曲线上一点的切向量。**

由于我们已规定只研究曲线的正则点，即 $\boldsymbol{r}^{'}(t)\neq 0$，所以曲线上一点的切向量是存在的。而这个切向量就是切线上的一个非零向量。由以上的推导过程可以看出，这个切向量的正向和曲线的参数 t 的增量方向是一致的。

现在我们导出曲线上一点的切线方程。

我们仍设曲线上一个切点 P 所对应的参数为 t_0,P 点的向径是 $\boldsymbol{r}\left(t_0\right),\boldsymbol{\rho}=\{X,Y,Z\}$ 是切线上任一点的向径(如图 1-9)，因为 $\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}\left(t_0\right)//\boldsymbol{r}^{'}\left(t_0\right)$，则得 P 点的**切线方程**为

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}\left(t_0\right)=\lambda\boldsymbol{r}^{'}\left(t_0\right)$$

其中 λ 为切线上的参数。

下面再导出用坐标表示的切线方程。设

$$r(t_0)=\{x(t_0),y(t_0),z(t_0)\},$$
$$r^{'}(t_0)=\{x^{'}(t_0),y^{'}(t_0),z^{'}(t_0)\},$$

则由上述切线方程消去 λ 得到

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)},$$

这是坐标表示的切线方程。

4.1.2 曲线的曲率

定义：空间曲线(C)在P点的曲率为

$$k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|,$$

其中Δs为P点及其邻近点P_1间的弧长，$\Delta\varphi$为曲线在点P和P_1的切向量的夹角。

4.1.3 曲线的挠率

定义：曲线(C)在P点的挠率为

$$\tau(s)=\begin{cases}+|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|, & 当\dot{\boldsymbol{\gamma}}和\beta异向,\\ -|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|, & 当\dot{\boldsymbol{\gamma}}和\beta同向.\end{cases}$$

挠率的绝对值是曲线的副法向量(或密切平面)对于弧长的旋转速度。[3]

4.2 曲面方向的定义

曲面的方向，通常可以通过曲面的切向量/切平面，法向量/法平面和曲线的渐进方向及曲率来定义。

4.2.1 曲面的切向量和切平面

给出平面上一初等区域G,G中的点的笛卡儿坐标是(u,v),G经过上述映射f后的像是曲面S.对于空间的笛卡儿坐标系来说，S上的点的坐标是(x,y,z)，这样我们可以具体写出f的解析表达式:

$$x=f_1(u,v),y=f_2(u,v),z=f_3(u,v),\ (u,v)\in G$$

(2.1)称为曲面S的参数表示或参数方程，u和v称为曲面S的参数或曲纹坐标.

若曲面上点的曲纹坐标由下列方程来确定:

$$u = u(t),\ v = v(t)$$

其中t是自变量，把它们代人曲面的参数方程中，则这种点的向径可以用复合函数来表示:

$$r = r(u(t), v(t)) = r(t)$$

于是$\boldsymbol{r}$可以表示为一个变量t的函数，且当t在某一区间上变动时，$\boldsymbol{r}$的终点在空间中描绘一条曲线。因此(2.4)或(2.5)在曲面上确定某一曲线，这曲线在曲面上(u_0, v_0)点处的切方向称为曲面在该点的切方向或方向。它平行于

$$\boldsymbol{r}^{'}(t) = \boldsymbol{r}_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r}_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

其中$\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$分别是在$(u_0, v_0)$点的两条坐标曲线的切向量。

上式说明$\boldsymbol{r}^{'}(t), \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$共面，所以有:

命题2 曲面上正则点处的所有切方向都在过该点的坐标曲线的切向量$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$所决定的平面上。

我们称此平面为曲面在这一点的切平面，还可以简写成

$$\boldsymbol{r}^{'}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} + \boldsymbol{r}_v\right) [3]$$

4.2.2 曲面的法向量

曲面在正则点处垂直于切平面的方向称为曲面的法方向.过这点平行于法方向的直线称为曲面在该点的法线.显然，曲面的法向量$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$，于是

$$\text{曲面的单位法向量}\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\left|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\right|}$$

由于曲面的法线是通过点$P(x, y, z)$，并且平行于法方向的直线，因而它的方程可写为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \lambda\left(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\right),$$

其中$\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$是法线上的任意一点，λ是决定点$\boldsymbol{R}$在法线上的位置的参数。

由以上的讨论我们已经了解到曲面在已知点邻近的弯曲性可以由曲面离开它的切平面的快慢来决定。[3]

4.2.3 曲线的渐进方向与曲率

因此，当我们想刻画曲面在已知点邻近的弯曲性时，就需要用曲面上过该点的不同曲线的曲率来进行研究。

给出C^2类曲面S:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$$

过曲面S上点$P(u,v)$的任一曲线(C)为

$$u = u(s), v = v(s)$$

或

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(s), v(s)) = \boldsymbol{r}(s),$$

其中s是自然参数。

我们仍用以前的符号，以$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$分别表示曲线(C)的切向量和主法向量.根据伏雷内公式有

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} = k\boldsymbol{\beta}$$

其中k是曲线(C)在P点的曲率。

如果P点是曲面的双曲点，则它的迪潘指标线有一对渐近线，我们把沿渐近线的方向$(\mathrm{d}) = \mathrm{d}u : \mathrm{d}v$称为曲面在$P$点的渐近方向。由解析几何中二次曲线的理论可知，这两个渐近方向满足方程

$$L_0\,\mathrm{d}u^2 + 2M_0\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N_0\mathrm{d}v^2 = 0$$

为了避免混淆，我们在上式中用 L_0, M_0, N_0 分别表示 L, M, N 在 P 点的值。

由法曲率的公式 $k_n = \dfrac{II}{\mathrm{I}}$ 也可以得到渐近方向的等价定义:曲面上的一点 P 处使 $k_n = 0$ 的方向称为曲面在 P 点的渐近方向。

对于曲面上的曲线，如果它上面每一点的切方向都是渐近方向，则称为渐近曲线.渐近曲线的微分方程是

$$L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = 0$$

若 $L = N = 0$，代人渐近网方程可得 $M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$，即 $\mathrm{d}u = 0$ 或 $\mathrm{d}v = 0$。反之，若 $\mathrm{d}u = 0$ 或 $\mathrm{d}v = 0$，代人渐近网方程可知 $L = N = 0$

设曲面上 P 点处的两个方向为 $(\mathrm{d}) = \mathrm{d}u : \mathrm{d}v$ 和 $(\delta) = \delta u : \delta v$，如果包含这两个方向的直线是 P 点的迪潘指标线的共轭直径，则方向 (d) 和 (δ) 称为曲面的共轭方向。

如果曲面上一点 P 的两个方向既正交又共轭，则称之为曲面在 P 点的主方向。

设这两个方向是 $(\mathrm{d}) = \mathrm{d}u : \mathrm{d}v, (\delta) = \delta u : \delta v$.由于正交性，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0,$$

即

$$E\,\mathrm{d}u\delta u + F(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + G\mathrm{d}v\delta v = 0$$

由于共轭性，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \delta \boldsymbol{n} = 0 \quad 或 \quad \delta \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n} = 0,$$

即

$$L\,\mathrm{d}u\delta u + M(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + N\mathrm{d}v\delta v = 0$$

以上两个条件改写为

$$(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v)\delta u+(F\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v)\delta v=0$$
$$(L\mathrm{d}u+M\mathrm{d}v)\delta u+(M\mathrm{d}u+N\mathrm{d}v)\delta v=0$$

从以上两式消去 $\delta u,\delta v$ 得

$$\begin{vmatrix} E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v & F\mathrm{d}u+G\mathrm{d}v \\ L\mathrm{d}u+M\mathrm{d}v & M\mathrm{d}u+N\mathrm{d}v \end{vmatrix}=0$$

曲面上一点处主方向上的法曲率称为曲面在此点的主曲率.由于曲面上一点处的主方向是过此点的曲率线的方向,因此主曲率也就是曲面上一点处沿曲率线方向的法曲率.

在曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上选曲率线网为曲纹坐标网，则 $F=M=0$，这时对于曲面的任一方向 $(\mathrm{d})=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$，它的法曲率公式就简化成

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L\mathrm{d}u^2+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2}$$

沿 u-曲线 $(\mathrm{d}v=0)$ 的方向对应的主曲率是 $k_1=\dfrac{L}{E}$，

沿 v-曲线 $(\mathrm{d}u=0)$ 的方向对应的主曲率是 $k_2=\dfrac{N}{G}$.设 k_1,k_2 为曲面上一点的两个主曲率，则它们的乘积 k_1k_2 称为曲面在这一点的高斯

(Gauss)曲率，通常以 K 表示.它们的平均数 $\dfrac{1}{2}\left(k_1+k_2\right)$ 称为曲面在这一点的平均曲率，

通常以 H 表示.由方程(2.45)，利用二次方程的根与系数的关系，便得

高斯曲率 $K=k_1k_2=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$，

平均曲率 $H=\dfrac{1}{2}\left(k_1+k_2\right)=\dfrac{LG-2MF+NE}{2\left(EG-F^2\right)}$

5.参考文献

[1] 常庚哲，史济怀编著。 数学分析教程 下 第 3 版[M]。 合肥：中国科学技术大学出版社， 2013.01.

[2] 常庚哲，史济怀编著。 数学分析教程 上 第 3 版[M]。 合肥：中国科学技术大学出版社， 2012.08.

[3] 梅向明，黄敬之编。微分几何 第 5 版[M]。北京：高等教育出版社，2019.07.