Ejercicios 4 (g-l) y 5:

Variables Instrumentales y Bad Controls

Ejercicio 4 - Continuación: Variables Instrumentales

Pregunta j: Primera Etapa (First Stage)

¿Qué es la primera etapa?

En variables instrumentales con 2SLS (Two-Stage Least Squares), la **primera etapa** es la regresión del tratamiento endógeno sobre el instrumento (y controles):

$$D_i = \pi_0 + \pi_1 Z_i + \pi' X_i + v_i \tag{1}$$

donde:

- D_i: Tratamiento endógeno (`summercamp`)
- Z_i: Instrumento (`letter`)
- X_i: Controles (female, parental_schooling, etc.)
- π_1: Efecto del instrumento sobre el tratamiento

Hipótesis de relevancia

Para que Z sea un instrumento válido, debe satisfacer:

$$H_0 : \pi_1 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \pi_1 \neq 0 \tag{2}$$

Rechazar H_0 es necesario para que el instrumento sea **relevante**.

Prueba de instrumento débil

Un instrumento se considera **débil** si:

$$F < 10 \tag{3}$$

donde F es el estadístico F de la primera etapa.
Regla de Staiger-Stock: $F > 10$ es la regla empírica estándar.
Consecuencias de instrumentos débiles:

- Sesgo hacia OLS (sesgo de muestra finita)
- Tamaños de prueba distorsionados
- Intervalos de confianza no confiables

Interpretación del coeficiente

El coeficiente $\hat{\pi}_1$ se interpreta como:

"Recibir la carta aumenta la probabilidad de participación en $\hat{\pi}_1$ puntos (o puntos porcentuales si D es binario)"

Típicamente esperamos $0{,}1 < \hat{\pi}_1 < 0{,}5$ para una carta recordatoria.

Pregunta k: Forma Reducida sin Controles

¿Qué es la forma reducida?

La **forma reducida** (reduced form) es la regresión directa del outcome sobre el instrumento:

$$Y_i = \gamma_0 + \gamma_1 Z_i + \varepsilon_i \tag{4}$$

donde:

- Y_i: Outcome (`test_score` año 6)
- Z_i: Instrumento (`letter`)
- γ_1: Efecto de ser asignado al instrumento (ITT)

Intention-to-Treat (ITT)

El coeficiente γ_1 es el **efecto ITT**:

$$\text{ITT} = E[Y_i(Z = 1)] - E[Y_i(Z = 0)] \tag{5}$$

Interpretación: Efecto de ser *asignado* a recibir la carta, independientemente de si realmente participó en summercamp.

Características del ITT:

- Identificado por aleatorización del instrumento
- No requiere supuestos adicionales (solo aleatorización)
- Más fácil de estimar que el efecto causal del tratamiento
- Pero mezcla çompliersz "non-compliers"

¿Es ATE o ATT?

El ITT **NO es ni ATE ni ATT**.
ATE (Average Treatment Effect):

$$\text{ATE} = E[Y_i(D = 1) - Y_i(D = 0)] \tag{6}$$

ATT (Average Treatment Effect on the Treated):

$$\text{ATT} = E[Y_i(D = 1) - Y_i(D = 0)|D = 1] \tag{7}$$

ITT es el efecto de la asignación, no del tratamiento real. La relación es:

$$\text{ITT} = \Pr(D = 1|Z = 1) \times \text{ATE para compliers} \tag{8}$$

donde çompliers"son aquellos que reciben el tratamiento si y solo si reciben el instrumento.

Pregunta l: Forma Reducida con Controles

Modelo extendido

$$Y_i = \gamma_0 + \gamma_1 Z_i + \gamma' X_i + \varepsilon_i \tag{9}$$

¿Por qué agregar controles si Z es aleatorio?

Si el instrumento fue **verdaderamente aleatorizado**, entonces:

$$E[\varepsilon_i|Z_i, X_i] = E[\varepsilon_i|X_i] \tag{10}$$

Por lo tanto, **no necesitamos** controles para insesgamiento.
Sin embargo, agregar controles puede:

1. **Mejorar precisión** (reducir $\text{Var}(\hat{\gamma}_1)$):

   Si las X's predicen fuertemente Y, entonces:

   $$\sigma^2_{\varepsilon,\text{con X}} < \sigma^2_{\varepsilon,\text{sin X}} \tag{11}$$

   lo que implica:

   $$\text{SE}(\hat{\gamma}_1)_{\text{con X}} < \text{SE}(\hat{\gamma}_1)_{\text{sin X}} \tag{12}$$

2. **Ajustar por desbalances** (aunque deberían ser nulos):

   En muestras finitas, puede haber desbalances por azar. Controlar puede corregir esto.

3. **Verificar aleatorización**:

   Si $\hat{\gamma}_1$ cambia mucho al agregar controles, es señal de que la aleatorización pudo haber fallado.

Comparación de resultados

Esperamos que:

$$|\hat{\gamma}_1^{\text{con X}} - \hat{\gamma}_1^{\text{sin X}}| < 0{,}05 \times |\hat{\gamma}_1^{\text{sin X}}| \tag{13}$$

Es decir, el coeficiente no debe cambiar más del 5 %.
Si cambia sustancialmente, hay evidencia de:

- Falla en la aleatorización
- Desbalances importantes
- Confounding residual

Estimación 2SLS (Two-Stage Least Squares)

Procedimiento

Etapa 1: Regresión de D sobre Z y X:

$$D_i = \pi_0 + \pi_1 Z_i + \pi' X_i + v_i \tag{14}$$

Obtener valores predichos:

$$\hat{D}_i = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 Z_i + \hat{\pi}' X_i \tag{15}$$

Etapa 2: Regresión de Y sobre $\hat{D}$ y X:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \hat{D}_i + \beta' X_i + u_i \tag{16}$$

El coeficiente $\hat{\beta}_1$ es el **estimador 2SLS** del efecto causal.

Fórmula de Wald (caso simple, sin controles)

Cuando no hay controles, el estimador IV tiene una forma cerrada:

$$\hat{\beta}_1^{IV} = \frac{\text{Forma Reducida}}{\text{Primera Etapa}} = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\pi}_1} \tag{17}$$

Esta es la **fórmula de Wald** o **ratio de Wald**.
Interpretación intuitiva:

- Numerador: Efecto de Z sobre Y (ITT)
- Denominador: Efecto de Z sobre D (tasa de cumplimiento)
- Ratio: Efecto de D sobre Y (para compliers)

LATE (Local Average Treatment Effect)

El estimador 2SLS identifica el **LATE**:

$$\text{LATE} = E[Y_i(1) - Y_i(0)|\text{complier}] \tag{18}$$

donde un çomplier.es alguien que:

$$D_i(Z = 1) = 1 \quad \text{y} \quad D_i(Z = 0) = 0 \tag{19}$$

Es decir, participa si recibe el instrumento, pero no participa si no lo recibe.
Importante: LATE $\neq$ ATE en general. Solo identifica el efecto para compliers.

Comparación OLS vs IV

Estimadores

OLS:

$$\hat{\beta}_1^{OLS} = \frac{\text{Cov}(D_i, Y_i)}{\text{Var}(D_i)} \tag{20}$$

IV:

$$\hat{\beta}_1^{IV} = \frac{\text{Cov}(Z_i, Y_i)}{\text{Cov}(Z_i, D_i)} \tag{21}$$

¿Cuándo difieren?

Diferencia OLS vs IV

OLS y IV difieren cuando hay **endogeneidad**:

$$\text{Cov}(D_i, u_i) \neq 0 \tag{22}$$

En ese caso:

$$\text{plim}(\hat{\beta}_1^{OLS}) = \beta_1 + \frac{\text{Cov}(D_i, u_i)}{\text{Var}(D_i)} \neq \beta_1 \tag{23}$$

$$\text{plim}(\hat{\beta}_1^{IV}) = \beta_1 \quad (\text{si } Z \text{ es válido}) \tag{24}$$

Dirección del sesgo:

- Si $\text{Cov}(D_i, u_i) > 0$: OLS sobrestima (sesgo positivo)
- Si $\text{Cov}(D_i, u_i) < 0$: OLS subestima (sesgo negativo)

Interpretación de $\hat{\beta}^{IV} > \hat{\beta}^{OLS}$

Si encontramos $\hat{\beta}^{IV} > \hat{\beta}^{OLS}$, esto sugiere:

$$\text{Cov}(D_i, u_i) < 0 \tag{25}$$

En el contexto del summer camp:

Condicional en los controles incluidos, quienes participan tienen *menores* outcomes potenciales sin tratamiento. Esto podría deberse a:

- **Selección negativa residual**: Incluso después de controlar por observables, familias más preocupadas (cuyos hijos tendrían peor desempeño sin intervención) son más propensas a participar
- **Omisión de variables**: Hay factores no observables correlacionados negativamente con participación y positivamente con outcomes
- **Heterogeneidad de efectos**: El LATE (efecto para compliers) es mayor que el ATE (efecto promedio)

Test de Hausman

El **test de Hausman** prueba si hay endogeneidad:

$$H_0 : \text{Cov}(D_i, u_i) = 0 \quad \text{(OLS es consistente)} \tag{26}$$

Procedimiento:

1. Estimar primera etapa y obtener residuos $\hat{v}_i$
2. Incluir $\hat{v}_i$ en regresión OLS:
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + \beta' X_i + \delta \hat{v}_i + \varepsilon_i \tag{27}$$
3. Probar $H_0 : \delta = 0$

Interpretación:

- Si $p < 0{,}05$: Rechazamos H_0 → Hay endogeneidad → Usar IV
- Si $p > 0{,}05$: No rechazamos → OLS puede ser consistente

Supuestos de Variables Instrumentales

Para que Z sea un instrumento válido para identificar el efecto causal de D sobre Y, debe cumplir:

1. Relevancia (Relevance)

$$\text{Cov}(Z_i, D_i) \neq 0 \tag{28}$$

Verificable: Probar con primera etapa ($F > 10$).

2. Exogeneidad (Exogeneity)

$$\text{Cov}(Z_i, u_i) = 0 \tag{29}$$

donde u_i es el error en la ecuación estructural:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + \beta' X_i + u_i \tag{30}$$

No directamente verificable: Debe ser defendido por el diseño del estudio (ej. aleatorización).

3. Restricción de Exclusión (Exclusion Restriction)

$$Z_i \to Y_i \quad \text{solo a través de} \quad D_i \tag{31}$$

Es decir, no hay caminos directos $Z \to Y$ que no pasen por D.
Formalmente: En la ecuación estructural,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + \beta' X_i + u_i \tag{32}$$

Z no debe aparecer.
No directamente verificable: Requiere argumento teórico/institucional.

4. Monotonicidad (Monotonicity)

$$D_i(Z = 1) \geq D_i(Z = 0) \quad \forall i \tag{33}$$

O equivalentemente:

$$D_i(Z = 1) \leq D_i(Z = 0) \quad \forall i \tag{34}$$

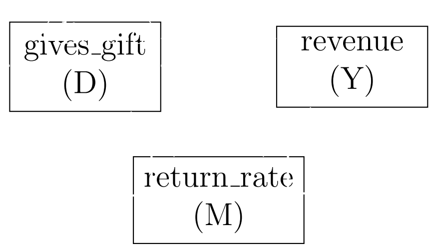
Es decir, no hay "defiers"(individuos que hacen lo opuesto al instrumento).
En nuestro caso: Nadie debe participar *menos* por recibir la carta.
Típicamente asumido: Razonable en muchos contextos pero no verificable.

Ejercicio 5: Bad Controls - Experimento de Regalos

Pregunta a: DAG y Visualización

Estructura Causal

El **Directed Acyclic Graph (DAG)** muestra las relaciones causales:



Interpretación:

- **Flecha sólida** $D \to M$: Dar regalos aumenta tasa de retorno
- **Flecha sólida** $M \to Y$: Mayor tasa de retorno aumenta ingresos
- **Flecha punteada** $D \to Y$: Posible efecto directo (en este caso, ≈ 0)

Tipos de efectos

Efecto Total:

$$\tau_{\text{total}} = \gamma + \alpha\beta \tag{35}$$

Efecto Directo:

$$\tau_{\text{directo}} = \gamma \tag{36}$$

Efecto Indirecto:

$$\tau_{\text{indirecto}} = \alpha\beta \tag{37}$$

En nuestro experimento:

- $\alpha \approx 0{,}10$ (regalos aumentan return rate en 10 pp)
- $\beta \approx 1000$ (cada unidad de return rate aumenta revenue en \$1000)
- $\gamma \approx 0$ (no hay efecto directo)
- $\tau_{\text{total}} = 0 + 0{,}10 \times 1000 = 100$

Pregunta b: Efecto sobre el Mediador

Modelo

$$M_i = \alpha_0 + \alpha_1 D_i + v_i \tag{38}$$

donde:

- M_i: `return_rate` (tasa de retorno)
- D_i: `gives_gift` (da regalo)
- α_1: Efecto de regalos sobre return rate

Interpretación

El coeficiente $\hat{\alpha}_1$ estima:

$$\alpha_1 = E[M_i(1)] - E[M_i(0)] \tag{39}$$

donde $M_i(d)$ es el valor potencial de return rate bajo tratamiento d.
Típicamente: $0{,}05 < \hat{\alpha}_1 < 0{,}15$ es un rango razonable.

Pregunta c: Modelo Correcto (Sin Bad Control)

Especificación

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i \tag{40}$$

¿Por qué no incluir M?

1. **Experimento**: D fue aleatorizado → No hay confounding

$$E[u_i | D_i] = 0 \tag{41}$$

2. **Objetivo**: Queremos el **efecto total**

$$\beta_1 = E[Y_i(1) - Y_i(0)] \tag{42}$$

Esto incluye todos los caminos causales de D a Y.

3. M **es mediador**: No es un confounder, está en el camino causal

$$D \to M \to Y \tag{43}$$

Estimador:

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y}_{\text{tratado}} - \bar{Y}_{\text{control}} \tag{44}$$

Este es un estimador **insesgado** del ATE bajo aleatorización.

Pregunta d: Explicación Formal del Sesgo

Marco de Resultados Potenciales

Para cada tienda i, definimos:

- $Y_i(1)$: Revenue si da regalos
- $Y_i(0)$: Revenue si no da regalos
- $M_i(1)$: Return rate si da regalos
- $M_i(0)$: Return rate si no da regalos

Efecto Total

$$\tau = E[Y_i(1) - Y_i(0)] \tag{45}$$

¿Qué identifica el modelo con bad control?

Si estimamos:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + \beta_2 M_i + \varepsilon_i \tag{46}$$

El coeficiente β_1 intenta identificar:

$$\beta_1 = E[Y_i(1) - Y_i(0) | M_i(1) = M_i(0) = m] \tag{47}$$

Es decir, el efecto de D **manteniendo** M **fijo**.

¿Por qué esto es problemático?

Problema Fundamental

Estamos preguntando:
"¿Cuál es el efecto de dar regalos, si la tasa de retorno no cambia?"
Pero esto es **contradictorio** porque:

- Sabemos que dar regalos *sí cambia* la tasa de retorno: $M_i(1) \neq M_i(0)$
- Fijar M artificialmente **bloquea** el mecanismo causal principal
- Solo capturamos efectos residuales"que no operan vía M

En este caso, como *todo* el efecto opera vía M (efecto directo ≈ 0), controlar por M **elimina completamente** el efecto.

Sesgo formal

El sesgo es:

$$\begin{aligned} \text{Sesgo} &= \tau - \beta_1 & (48)\\ &= E[Y_i(1) - Y_i(0)] - E[Y_i(1) - Y_i(0) | M_i(1) = M_i(0)] & (49)\\ &= \tau_{\text{indirecto}} & (50) \end{aligned}$$

Es decir, perdemos todo el efecto indirecto.

Pregunta e: Demostración Empírica del Sesgo

Modelo Incorrecto

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + \beta_2 M_i + \varepsilon_i \tag{51}$$

Especificación	$\hat{\beta}_1$	**Interpretación**
Sin M (correcto)	≈ 100	Efecto total
Con M (incorrecto)	≈ 0	Solo efecto directo

Cuadro 1: Comparación de estimadores

Comparación de Estimadores

¿Por qué $\hat{\beta}_1 \approx 0$ con control?

Al controlar por M, comparamos tiendas con la *misma* tasa de retorno. Dentro de este grupo:

- Tiendas que dan regalos: Alta return rate (inducida por regalos)
- Tiendas que no dan regalos: Alta return rate (por otras razones)

Como ambas tienen la misma return rate, tienen revenues similares. El efecto "desaparece"porque hemos **bloqueado** el camino causal.

Analogía

Es como preguntar:
"¿Aumenta la educación los salarios, manteniendo constante la productividad?"
Si la educación aumenta salarios *precisamente porque* aumenta productividad, entonces fijar productividad elimina el efecto.

Análisis de Mediación

Descomposición del Efecto Total

El análisis de mediación formal descompone:

$$\tau_{\text{total}} = \underbrace{\gamma}_{\text{Directo}} + \underbrace{\alpha\beta}_{\text{Indirecto}} \tag{52}$$

Procedimiento:

1. Estimar efecto sobre mediador:

$$M_i = \alpha_0 + \alpha_1 D_i + v_i \quad \Rightarrow \quad \hat{\alpha} \tag{53}$$

2. Estimar efecto del mediador (controlando por D):

$$Y_i = \beta_0 + \gamma D_i + \beta M_i + u_i \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta}, \hat{\gamma} \tag{54}$$

3. Calcular efectos:

$$\text{Efecto directo} = \hat{\gamma} \tag{55}$$

$$\text{Efecto indirecto} = \hat{\alpha} \times \hat{\beta} \tag{56}$$

$$\text{Efecto total (calculado)} = \hat{\gamma} + \hat{\alpha}\hat{\beta} \tag{57}$$

4. Verificar:

$$\text{Efecto total (directo)} = \hat{\beta}_1^{\text{sin control}} \tag{58}$$

Proporción mediada

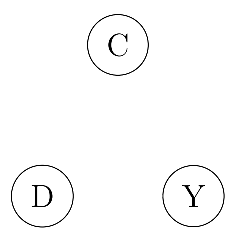
$$\text{Proporción mediada} = \frac{\alpha\beta}{\gamma + \alpha\beta} \times 100\,\% \tag{59}$$

En nuestro caso: $\approx 100\,\%$ (todo el efecto es indirecto).

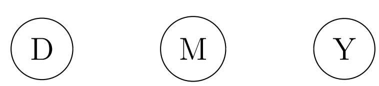
Cuándo SÍ Controlar por Variables

Regla General

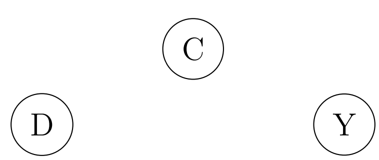
SÍ controlar cuando la variable es un **confounder**:



C es causa común de D y Y $\rightarrow$ Debe controlarse.
NO controlar cuando la variable es un **mediador**:



M está en el camino causal $\rightarrow$ No controlar (para efecto total).
NUNCA controlar cuando la variable es un **collider**:



C es causado por D y Y $\rightarrow$ Controlar introduce sesgo (collider bias).

Lecciones Finales

Principios para Controlar Variables

Antes de incluir cualquier control en tu regresión, pregúntate:

1. **¿Cuál es el DAG?** Dibuja las relaciones causales.
2. **¿Qué efecto quiero?**
   - Efecto total → NO controlar mediadores
   - Efecto directo → SÍ controlar mediadores
3. **¿Es un confounder o mediador?**
   - Confounder: Causa común → CONTROLAR
   - Mediador: En el camino causal → NO CONTROLAR (para efecto total)
4. **¿El tratamiento fue aleatorizado?**
   - Sí → No necesitas controles para insesgamiento (solo para precisión)
   - No → Necesitas identificar y controlar por confounders
5. **Criterio de puerta trasera** (backdoor criterion):

   Controla variables que bloquean caminos espurios pero no bloquean caminos causales.