

# Econometría 1 - Actividad 7

## Simulaciones de Variables Instrumentales

### Ejercicio 4: Instrumentos Débiles y Endogeneidad

División de Economía - CDE  
Dr. Francisco Cabrera

## 1 Introducción: Por Qué Simulaciones

Las **simulaciones Monte Carlo** son una herramienta fundamental para entender las propiedades de los estimadores econométricos.

### 1.1 Ventajas de las Simulaciones

#### 1. Conocemos la verdad:

- En datos reales: los parámetros verdaderos son desconocidos
- En simulaciones: nosotros especificamos los parámetros
- Podemos evaluar si los estimadores recuperan la verdad

#### 2. Experimentación controlada:

- Cambiar un solo aspecto (e.g., fuerza del instrumento)
- Ver el efecto aislado
- Imposible en datos reales

#### 3. Verificar propiedades teóricas:

- Consistencia:  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta} = \beta$
- Insesgamiento:  $E[\hat{\beta}] = \beta$
- Distribución asintótica

## 2 Escenario Base: Instrumento Fuerte y Exógeno

### 2.1 Proceso Generador de Datos (DGP)

**DGP del Escenario Base:**

$$\begin{aligned}
 z_i &\sim N(0, 1) \quad (\text{instrumento}) \\
 u_i &\sim N(0, 1) \quad (\text{error}) \\
 x_i &= 0.5 z_i + 4 u_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, 1) \\
 y_i &= 3 x_i + 5 u_i
 \end{aligned} \tag{1}$$

**Parámetro verdadero:**  $\beta_1 = 3$

## 2.2 Propiedades del DGP

### 1. Endogeneidad de $x$

$$\text{Cov}(x_i, u_i) = \text{Cov}(0.5z_i + 4u_i + \varepsilon_i, u_i) = 4 \text{Var}(u_i) = 4 \neq 0 \tag{2}$$

Por lo tanto,  $x$  es **endógena**.

### 2. Relevancia del instrumento

$$\text{Cov}(z_i, x_i) = \text{Cov}(z_i, 0.5z_i + 4u_i + \varepsilon_i) = 0.5 \text{Var}(z_i) = 0.5 \neq 0 \tag{3}$$

El instrumento es **relevante**.

### 3. Exogeneidad del instrumento

Como  $z_i$  y  $u_i$  son generados independientemente:

$$\text{Cov}(z_i, u_i) = 0 \tag{4}$$

El instrumento es **exógeno**.

## 2.3 Sesgo del Estimador MCO

El estimador de MCO tiene el siguiente límite en probabilidad:

**Sesgo de MCO por endogeneidad:**

$$\text{plim } \hat{\beta}_1^{\text{OLS}} = \beta_1 + \frac{\text{Cov}(x_i, u_i)}{\text{Var}(x_i)} \tag{5}$$

En nuestro DGP:

- $\text{Cov}(x_i, u_i) = 4$  (positivo)
- Por lo tanto:  $\text{plim } \hat{\beta}_1^{\text{OLS}} > \beta_1 = 3$

**Conclusión:** MCO **sobreestima** el efecto verdadero.

## 2.4 Consistencia del Estimador IV

Con un instrumento válido ( $z$  relevante y exógeno):

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta}_1^{\text{IV}} = \beta_1 = 3 \quad (6)$$

El estimador IV es **consistente**.

## 3 Ejercicio 4a: Evaluación del Instrumento

### 3.1 Condición 1: Relevancia

Regresión de primera etapa

$$x_i = \pi_0 + \pi_1 z_i + v_i \quad (7)$$

Hipótesis a probar:

$$\begin{aligned} H_0 : \pi_1 &= 0 && (\text{instrumento irrelevante}) \\ H_1 : \pi_1 &\neq 0 && (\text{instrumento relevante}) \end{aligned} \quad (8)$$

Regla práctica de Stock y Yogo (2005)

**Instrumento débil vs fuerte:**

Un instrumento se considera **DÉBIL** si:

$$F_{\text{first stage}} < 10 \quad (9)$$

donde  $F$  es el estadístico F de la prueba de  $H_0 : \pi_1 = 0$ .

**Consecuencias de instrumento débil:**

- Sesgo del estimador IV hacia MCO
- Inferencia no válida (intervalos de confianza incorrectos)
- Distribución asintótica no aproxima bien la distribución finita

### 3.2 Condición 2: Exogeneidad

Restricción de exclusión:

$$\text{Cov}(z_i, u_i) = 0 \quad (10)$$

Esta condición **NO** es **testable** directamente porque  $u_i$  no es observable.

## Verificación por construcción del DGP

En nuestras simulaciones:

- $z_i \sim N(0, 1)$  generado independientemente
- $u_i \sim N(0, 1)$  generado independientemente
- Por construcción:  $z_i \perp\!\!\!\perp u_i$

## 4 Ejercicio 4b: Instrumento Débil

### 4.1 Nuevo DGP con Instrumento Débil

DGP con relevancia reducida:

$$\begin{aligned} z_i &\sim N(0, 1) \\ u_i &\sim N(0, 1) \\ x_i &= 0.2 z_i + 4 u_i + \varepsilon_i \quad (\text{coeficiente de } z \text{ reducido}) \\ y_i &= 3 x_i + 5 u_i \end{aligned} \tag{11}$$

Cambio:  $0.5 \rightarrow 0.2$  en la ecuación de  $x$ .

### 4.2 Sesgo con Instrumento Débil

Cuando el instrumento es débil, el estimador IV tiene **sesgo de muestra finita**.

Fórmula aproximada del sesgo (Bound, Jaeger, Baker, 1995):

$$\frac{E[\hat{\beta}_1^{\text{IV}} - \beta_1]}{\sigma} \approx \frac{1}{F} \cdot \frac{n - K}{n} \tag{12}$$

donde:

- $F$  = F-estadístico de primera etapa
- $n$  = tamaño de muestra
- $K$  = número de instrumentos
- $\sigma$  = desviación estándar de  $u$

Implicación: El sesgo es inversamente proporcional a  $F$ .

- Si  $F$  es pequeño  $\rightarrow$  sesgo grande
- El estimador IV está sesgado hacia MCO

### 4.3 Dirección del Sesgo

Con instrumento débil:

$$E[\hat{\beta}_1^{\text{IV}}] \approx \lambda \beta_1^{\text{OLS}} + (1 - \lambda) \beta_1 \quad (13)$$

donde  $0 < \lambda < 1$  depende inversamente de  $F$ .

**Interpretación:**  $\hat{\beta}_1^{\text{IV}}$  es una mezcla entre el estimador consistente ( $\beta_1$ ) y el estimador sesgado (MCO).

## 5 Ejercicio 4c: Error Estándar con Instrumento Débil

### 5.1 Fórmula del Error Estándar de IV

El error estándar asintótico del estimador IV es:

Error estándar de  $\hat{\beta}_1^{\text{IV}}$ :

$$\text{SE}(\hat{\beta}_1^{\text{IV}}) = \frac{\sigma_u}{\sigma_x \sqrt{n} \rho_{zx}} \quad (14)$$

donde:

- $\sigma_u$  = desviación estándar del error  $u$
- $\sigma_x$  = desviación estándar de  $x$
- $\rho_{zx}$  = correlación entre  $z$  y  $x$
- $n$  = tamaño de muestra

### 5.2 Efecto de Instrumento Débil

Si la correlación  $\rho_{zx}$  disminuye:

$$\rho_{zx} \downarrow \Rightarrow \text{SE}(\hat{\beta}_1^{\text{IV}}) \uparrow \quad (15)$$

**Implicaciones:**

1. Mayor incertidumbre en la estimación
2. Intervalos de confianza más anchos
3. Menor poder estadístico en las pruebas

### 5.3 Demostración con la Relación F

El F-estadístico de primera etapa está relacionado con la correlación:

$$F \approx n \rho_{zx}^2 \quad (\text{aproximadamente, para un instrumento}) \quad (16)$$

Por lo tanto:

$$\text{SE}(\hat{\beta}_1^{\text{IV}}) \propto \frac{1}{\sqrt{F}} \quad (17)$$

**Conclusión:** El error estándar es inversamente proporcional a  $\sqrt{F}$ .

Si el F-estadístico disminuye de  $F_1$  a  $F_2$ , el error estándar aumenta en un factor:

$$\frac{\text{SE}_2}{\text{SE}_1} \approx \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} \quad (18)$$

## 6 Ejercicio 4d: Instrumento Endógeno

### 6.1 Nuevo DGP con Instrumento Endógeno

DGP con violación de exogeneidad:

$$\begin{aligned} v_i &\sim N(0, 1) \quad (\text{variable no observada}) \\ z_{2i} &= v_i + \varepsilon_{zi}, \quad \varepsilon_{zi} \sim N(0, 1) \\ u_{2i} &= 0.1 v_i + \varepsilon_{ui}, \quad \varepsilon_{ui} \sim N(0, 1) \\ x_{2i} &= 0.2 z_{2i} + 4 u_{2i} + \varepsilon_{xi} \\ y_{2i} &= 3 x_{2i} + 5 u_{2i} \end{aligned} \quad (19)$$

**Problema:** Tanto  $z_{2i}$  como  $u_{2i}$  dependen de  $v_i$  (no observada).

### 6.2 Violación de Exogeneidad

$$\text{Cov}(z_{2i}, u_{2i}) = \text{Cov}(v_i + \varepsilon_{zi}, 0.1v_i + \varepsilon_{ui}) = 0.1 \text{Var}(v_i) = 0.1 \neq 0 \quad (20)$$

**Conclusión:** El instrumento  $z_2$  NO es exógeno.

### 6.3 Inconsistencia del Estimador IV

Cuando  $\text{Cov}(z, u) \neq 0$ , el estimador IV converge a:

Límite en probabilidad con instrumento endógeno:

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta}_1^{\text{IV}} = \frac{\text{Cov}(z_i, y_i)}{\text{Cov}(z_i, x_i)} \quad (21)$$

Sustituyendo  $y_i = \beta_1 x_i + \gamma u_i$  (donde  $\gamma = 5$  en nuestro caso):

$$\begin{aligned} \text{plim } \hat{\beta}_1^{\text{IV}} &= \frac{\text{Cov}(z_i, \beta_1 x_i + \gamma u_i)}{\text{Cov}(z_i, x_i)} \\ &= \frac{\beta_1 \text{Cov}(z_i, x_i) + \gamma \text{Cov}(z_i, u_i)}{\text{Cov}(z_i, x_i)} \\ &= \beta_1 + \gamma \frac{\text{Cov}(z_i, u_i)}{\text{Cov}(z_i, x_i)} \end{aligned} \quad (22)$$

**Sesgo asintótico:**

$$\text{Sesgo} = \gamma \frac{\text{Cov}(z_i, u_i)}{\text{Cov}(z_i, x_i)} = 5 \times \frac{\text{Cov}(z_i, u_i)}{\text{Cov}(z_i, x_i)} \neq 0 \quad (23)$$

⇒ El estimador IV es **INCONSISTENTE**.

## 6.4 Comparación: OLS vs IV con Instrumento Endógeno

Ambos estimadores están sesgados:

- **MCO:** sesgado por  $\text{Cov}(x, u) \neq 0$
- **IV:** sesgado por  $\text{Cov}(z, u) \neq 0$

### ¿Cuál es mejor?

Depende de la magnitud relativa de los sesgos:

$$\begin{aligned} \text{Sesgo}_{\text{OLS}} &= \frac{\text{Cov}(x, u)}{\text{Var}(x)} \\ \text{Sesgo}_{\text{IV}} &= \gamma \frac{\text{Cov}(z, u)}{\text{Cov}(z, x)} \end{aligned} \quad (24)$$

**Es posible que:**  $|\text{Sesgo}_{\text{IV}}| > |\text{Sesgo}_{\text{OLS}}|$

⇒ Un instrumento endógeno puede ser **PEOR** que MCO.

## 7 Ejercicio 4e: Mejora en Relevancia

### 7.1 Nuevo DGP con Relevancia Mejorada

DGP con instrumento endógeno pero más relevante:

$$\begin{aligned}
 v_i &\sim N(0, 1) \\
 z_{2i} &= v_i + \varepsilon_{zi} \\
 u_{2i} &= 0.1 v_i + \varepsilon_{ui} \\
 x_{3i} &= 3 z_{2i} + 4 u_{2i} + \varepsilon_{xi} \quad (\text{coeficiente aumentado a } 3) \\
 y_{2i} &= 3 x_{3i} + 5 u_{2i}
 \end{aligned} \tag{25}$$

**Cambio:**  $0.2 \rightarrow 3$  en la ecuación de  $x$ .

## 7.2 Regla Práctica: Estadístico t

**Regla práctica alternativa para relevancia:**

Un instrumento se considera **RELEVANTE** si:

$$|t_{\text{first stage}}| > 3.16 \tag{26}$$

donde  $t$  es el estadístico t del coeficiente del instrumento en la primera etapa.

**Relación con la regla F:**

Para un solo instrumento ( $K = 1$ ):

$$F = t^2 \tag{27}$$

Por lo tanto:

$$|t| > 3.16 \Leftrightarrow F > (3.16)^2 \approx 10 \tag{28}$$

Ambas reglas son equivalentes.

## 7.3 ¿Por Qué el Estimador es Más Consistente?

Aunque el instrumento sigue siendo endógeno ( $\text{Cov}(z_2, u_2) \neq 0$ ), el sesgo asintótico se reduce.

**Descomposición del límite en probabilidad**

$$\text{plim } \hat{\beta}_1^{\text{IV}} = \beta_1 + \gamma \frac{\text{Cov}(z_i, u_i)}{\text{Cov}(z_i, x_i)} \tag{29}$$

**Componentes del sesgo:**

- Numerador:  $\text{Cov}(z_i, u_i)$  (endogeneidad del instrumento)
- Denominador:  $\text{Cov}(z_i, x_i)$  (relevancia del instrumento)

**Efecto de aumentar la relevancia**

Cuando aumentamos el coeficiente de  $z$  en la ecuación de  $x$ :

- $\text{Cov}(z_i, u_i)$  permanece **igual** (no cambia la dependencia de  $v$ )
- $\text{Cov}(z_i, x_i)$  **aumenta** (mayor efecto directo)

Por lo tanto:

$$\text{Cov}(z_i, x_i) \uparrow \Rightarrow \frac{\text{Cov}(z_i, u_i)}{\text{Cov}(z_i, x_i)} \downarrow \Rightarrow |\text{Sesgo}| \downarrow \quad (30)$$

### Intuición: Señal vs Ruido

- **Señal:**  $\text{Cov}(z, x) =$  variación en  $x$  inducida por  $z$
- **Ruido:**  $\text{Cov}(z, u) =$  correlación espuria entre  $z$  y  $u$

**Ratio señal/ruido:**

$$S/R = \frac{\text{Cov}(z, x)}{\text{Cov}(z, u)} \quad (31)$$

Al mejorar la relevancia:

- La señal aumenta
- El ruido permanece constante
- El ratio S/R mejora
- El sesgo asintótico disminuye

## 7.4 Fórmula del Sesgo Asintótico

**Sesgo asintótico con instrumento endógeno:**

$$\text{Sesgo}_\infty = \beta_1^{\text{IV}} - \beta_1 = \gamma \frac{\text{Cov}(z, u)}{\text{Cov}(z, x)} \quad (32)$$

**Factores que reducen el sesgo:**

1. **Disminuir**  $\text{Cov}(z, u)$  (mejorar exogeneidad)  $\rightarrow$  IDEAL
2. **Aumentar**  $\text{Cov}(z, x)$  (mejorar relevancia)  $\rightarrow$  AYUDA PERO NO RESUELVE

**Conclusión:**

- La exogeneidad ( $\text{Cov}(z, u) = 0$ ) es **esencial**
- La relevancia ( $\text{Cov}(z, x)$  grande) es **importante** pero **secundaria**

## 7.5 Ejercicio 4f: Discusión del F-estadístico

El F-estadístico de primera etapa es:

$$F = \frac{\text{ESS}/K}{\text{RSS}/(n - K - 1)} \quad (33)$$

Para un instrumento:

$$F \approx \frac{n \rho_{zx}^2}{1 - \rho_{zx}^2} \quad (34)$$

Interpretación de  $F > 10$ :

1. **Relevancia confirmada:**

- El instrumento tiene suficiente correlación con  $x$
- La primera etapa es fuerte

2. **Sesgo de muestra finita pequeño:**

- El sesgo hacia MCO es mínimo
- La aproximación asintótica es buena

3. **Inferencia válida:**

- Los errores estándar son confiables
- Las pruebas t e intervalos de confianza son válidos

**IMPORTANTE:**  $F > 10$  NO garantiza exogeneidad

Un F-estadístico alto indica:

- El instrumento es **relevante**
- No hay problemas de instrumento **débil**
- NO dice nada sobre **exogeneidad**

Es posible tener  $F > 10$  y aún así  $\text{Cov}(z, u) \neq 0$ .

⇒ La exogeneidad debe argumentarse por otras vías:

- Conocimiento del contexto institucional
- Aleatorización o quasi-aleatorización
- Pruebas con variables observables
- Argumentos económicos

## 8 Resumen: Jerarquía de Propiedades del Instrumento

Orden de importancia de las propiedades de un instrumento:

1. **EXOGENEIDAD** ( $\text{Cov}(z, u) = 0$ ):

- **Absolutamente esencial**
- Sin exogeneidad, IV es inconsistente
- No hay forma de corregirlo en la estimación
- Debe argumentarse a priori

2. **RELEVANCIA** ( $\text{Cov}(z, x) \neq 0, F > 10$ ):

- **Muy importante** para precisión
- Afecta sesgo de muestra finita y varianza
- Pero un instrumento débil es mejor que uno endógeno
- Puede mejorarse con controles o múltiples instrumentos

Casos extremos:

- Exógeno + Fuerte ( $F > 10$ ): **IDEAL**
- Exógeno + Débil ( $F < 10$ ): **USABLE**  (con precaución)
- Endógeno + Fuerte: **MALO** (inconsistente)
- Endógeno + Débil: **MUY MALO** (peor que MCO)

### 8.1 Comparación de Escenarios

Escenario	$\text{Cov}(z,u)$	F	Consistencia	Uso
Base (ideal)	0	Alto	Sí	Recomendado
Débil	0	Bajo	Sí	<input type="radio"/> Con precaución
Endógeno débil	$\neq 0$	Bajo	No	Evitar
Endógeno fuerte	$\neq 0$	Alto	No	Evitar

Table 1: Comparación de propiedades y usabilidad de instrumentos

## 9 Lecciones para la Práctica

### 9.1 Recomendaciones para Investigación Aplicada

#### 1. Priorizar exogeneidad sobre relevancia:

- Buscar fuentes de variación "as-if random"
- Argumentar extensamente por qué  $\text{Cov}(z, u) = 0$
- Usar aleatorización, discontinuidades, o variación histórica

#### 2. Verificar relevancia:

- Reportar siempre  $F$ -estadístico de primera etapa
- Verificar  $F > 10$  (o  $|t| > 3.16$ )
- Si  $F < 10$ , reconocer las limitaciones

#### 3. Pruebas indirectas de exogeneidad:

- Probar correlación de  $z$  con variables observables (e.g., IQ, educación de padres)
- Usar controles para hacer  $z$  exógeno condicionalmente
- Realizar pruebas de sobreidentificación si hay múltiples instrumentos

#### 4. Ser transparente sobre limitaciones:

- Discutir amenazas a la validez del instrumento
- Reconocer si el instrumento es débil
- Interpretar cuidadosamente (LATE vs ATE)

#### 5. Comparar con MCO:

- Mostrar siempre estimaciones OLS e IV
- Discutir por qué difieren
- Si  $IV \approx OLS$ , discutir implicaciones

### 9.2 Trade-offs en Variables Instrumentales

**Conclusión:** Solo usar IV cuando:

- La endogeneidad es una preocupación seria
- Tenemos un instrumento creíblemente válido
- Estamos dispuestos a identificar LATE en vez de ATE

<b>Aspecto</b>	<b>MCO</b>	<b>IV</b>
Consistencia (si $x$ endógena)	No	Sí (si $z$ válido)
Eficiencia	Alta	Baja
Complejidad	Simple	Requiere instrumento
Interpretación	ATE (con supuestos)	LATE
Robustez	A especificación	A validez de $z$

Table 2: Trade-offs entre MCO y IV