Eléments de mécanique des fluides

Enoncé du projet transversal

Énoncé général

Dans ce projet, il vous est demandé d'implémenter la résolution numérique de l'opérateur Laplacien par la méthode des différences finies discrétisée sur une grille régulière. La résolution sera implémentée dans le logiciel Matlab.

Le but final est de déterminer l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible barotrope dans différentes configurations géométriques.

Afin de vous **guider progressivement** dans ce projet, plusieurs **sous-objectifs** sont définis. Il s'agira notamment de coder des fonctions respectant une interface spécifique. Ces fonctions seront vérifiées automatiquement sur la plateforme. Finalement, un **test individuel** devra être complété et fera l'objet d'une cotation spécifique. Dans ce test, vous devrez notamment répondre à des questions d'ordre "numérique" ou d'interprétation de résultats de calculs obtenus sur des applications proposées. La cote obtenue comptera pour la note finale de l'examen.

Trois configurations géométriques sont à calculer:

1. Un canal rectiligne: principalement utile pour vérifier la validité de votre code
2. Une superposition d'un écoulement uniforme à une source: l'objectif est de représenter l'écoulement autour d'un tube de Pitot/Prandtl.
3. Un îlot placé dans un écoulement. Deux conditions limites sont proposées. Les notions de circulation, traînée et portance sont à discuter au regard des résultats numériques.

Pour chaque cas, le calcul sera mené en terme de **fonction de courant**. Vous ne devrez utiliser que des conditions de Dirichlet. Le domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites sont fournis au travers de fichiers texte ASCII.

Le travail est individuel.

Objectifs

Pour vous accompagner dans ce projet, plusieurs sous-objectifs vous sont proposés. Certains sont accompagnés d'un testeur de code pour vous assurer du bon fonctionnement de vos développements.

Sous-objectifs

Résolution du Laplacien

Le premier objectif est de résoudre le Laplacien sur l'ensemble du domaine. Il est donc nécessaire, pour chaque maille, de calculer les coefficients à ajouter au système à résoudre. Pour ce faire, nous vous demandons de coder une fonction dont l'interface est la suivante: *[j, a, b] = getCoeff(num_left, num_right, num_down, num_up, num_cent, type_cent, cl_cent)* avec:

- *num_xxx* le numéro du nœud xxx
- *type_cent* le type de maille centrale, soit 0 = hors domaine de calcul, 1 = nœud de calcul entouré de nœuds de calcul ou condition limite et 2 = nœud condition limite de Dirichlet
- *cl_cent* l'éventuelle valeur de condition limite à prendre par ce nœud
- *a* le vecteur colonne de coefficients de l'équation du nœud central dans le système linéaire à résoudre
- *j* le vecteur colonne contenant les numéros de colonnes des coefficients contenus dans *a*
- *b* la valeur du terme de droite de l'équation.

Pour une meilleure efficacité (mémoire et vitesse de calcul), il est conseillé d'avoir recours à une matrice de type creuse pour la définition du système linéaire. Cela se fait via les fonctions *sparse* ou *spalloc* par exemple (voir aide Matlab). Une fois le système de type $A\psi = b$ construit, il est possible de le résoudre dans Matlab par un appel du type psi = A\b. Le résultat ψ se présentant sous forme de vecteur, il convient enfin de replacer ces résultats sous forme de matrice pour les tracer sur des figures adaptées.

Calcul des vitesses

Les vitesses sont calculées comme la dérivée de la fonction de courant. Il vous est demandé de coder une fonction qui permet de calculer la dérivée en un nœud du domaine. Etant donné la présence de limites dans le domaine, la dérivée devra tantôt être calculée centrée, tantôt décentrée. La fonction que vous écrirez doit prendre cet aspect en considération. L'interface de la fonction doit être la suivante: *v = deriv(f_left, f_c, f_right, type_left, type_c, type_right, h)* avec:

- *f_xxx* la valeur de la fonction à dériver à gauche, au centre et à droite, respectivement en bas, au centre et en haut
- *type_xxx* le type de nœud (0 = hors domaine de calcul, 1 = nœud de calcul entouré de nœuds de calcul ou condition limite et 2 = nœud condition limite de Dirichlet) à gauche, au centre et à droite, respectivement en bas, au centre et en haut
- *h* le pas spatial entre deux nœuds
- *v* la valeur numérique de la dérivée

Calcul de la circulation

La circulation, notée Γ, se calcule comme $\Gamma = \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{s}$. Pour la calculer numériquement, les points sous une courbe fermée doivent être sélectionnés dans l'ordre et l'interface de la fonction doit prendre la forme: *c = circu(u,v,x,y)*

- *u* le vecteur des composantes horizontales de vitesse (classées selon l'ordre de parcours des nœuds)
- *v* le vecteur des composantes verticales de vitesse (classées selon l'ordre de parcours des nœuds)
- *x* le vecteur de coordonnées x (classées selon l'ordre de parcours des nœuds)
- *y* le vecteur de coordonnées y (classées selon l'ordre de parcours des nœuds)
- *c* la circulation

La courbe $\mathcal{C}$ étant fermée, les premiers éléments des vecteurs *u, v, x* et *y* sont répétés en fin de vecteurs. Les vecteurs *u, v, x* et *y* sont des vecteurs colonnes. Afin de simplifier l'implémentation, vous pouvez considérer des courbes composées de segments uniquement horizontaux et verticaux.

Calcul des pressions et de forces

Les pressions se calculent à partir de la fonction d'Helmholtz. La charge étant conservée dans tout le domaine, la pression peut se déduire à partir d'une constante C (à fixer arbitrairement), de la vitesse absolue U au nœud considéré et de l'altitude de ce dernier. Les écoulements proposés étant considérés plans, l'altitude fait partie dans la constante:

$$p = \rho g \left(C - \frac{U^2}{2g} \right)$$

Les forces appliquées sur un corps se déduisent des pressions appliquées sur celui-ci. Concrètement, le calcul des forces s'effectue en intégrant les diagrammes de pression sur les faces du corps considéré. Pour le calcul, utilisez une fonction dont l'interface est la suivante: *[fx,fy]=force(p,x,y)* avec:

- *p* le vecteur colonne des pressions (classées selon l'ordre de parcours des nœuds)
- *x* le vecteur colonne de coordonnées x (classées selon l'ordre de parcours des nœuds)
- *y* le vecteur colonne de coordonnées y (classées selon l'ordre de parcours des nœuds)
- *fx* et *fy* les forces par unité d'épaisseur selon x et y respectivement

Applications

Après l'implémentation du code, trois cas sont à tester. Pour chaque cas, les fichiers d'initialisation vous sont fournis. Ils permettent de définir le domaine, les conditions aux limites et la numérotation des nœuds.

Canal rectiligne

Le canal rectiligne permet de vérifier le bon fonctionnement du code. Aucune analyse particulière ne doit être menée pour ce cas-ci. Cette partie sera tout de même évaluée lors de l'exécution de votre code.

Pas spatial : 0.5 m.

Superposition d'un écoulement uniforme à une source

La superposition d'une source et d'un écoulement uniforme permet d'étudier l'écoulement à proximité d'un tube de Pitot/Prandtl. Pour cette application, il vous est demandé de repérer la ligne de courant qui permet de décrire la forme de la sonde. A partir de ce résultat et des pressions dans l'écoulement, vous devrez définir la position d'un tube piézométrique utile pour déduire la vitesse de l'écoulement, en complément du tube de Pitot. Il vous est demandé aussi de discuter cette position au regard de la solution analytique:

$$\Psi = U_\infty y + \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y-b}{x-a}$$

$$u = U_\infty + \frac{Q}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$v = \frac{Q}{2\pi} \frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

avec

- U_∞ la vitesse à l'infini (là où l'écoulement peut être considéré comme uniforme)

- Q le débit de la source
- (a, b) les coordonnées de la source

Dans ce projet, $U_\infty = 4m/s$ et $Q = 0.5m^2/s$.

Pas spatial : 0.001 m.

Ilot dans un écoulement

Enfin, le calcul d'un écoulement autour d'un îlot pour deux conditions aux limites différentes sera l'occasion de discuter des notions de circulation, de traînée et de portance.

Pas spatial : 0.01 m.

Planning

- 22/03: Séance introductive (2h) – en amphithéâtre
- 22/03: Codage de la construction du système à résoudre (2h) – en classe selon la répartition habituelle
- 29/03: Résolution du système et calcul des vitesses et variables dérivées (2h) – en classe selon la répartition habituelle
- 12/04: Permanence de 14h à 16h (TP64/B52) pour répondre à d'éventuelles questions
- 19/04: Application du code (2h) – en classe selon la répartition habituelle
- 26/04 13h30: Deadline questionnaire en ligne **individuel**

Modifié le: lundi 19 mars 2018, 15:45