Eléments de mécanique des fluides
Projet transversal écoulements irrotationnels

Marche à suivre pour le codage

http://www.hece.ulg.ac.be

Deux équations possibles:

Irrotationalité

Conservation masse

Hypothèse

Potentiel	Fonction de courant
$\Delta\phi = 0$	$\boxed{\Delta\psi = 0}$
$u = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}$	$u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$
$v = \dfrac{\partial\phi}{\partial y}$	$v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$

Ces équations doivent être respectées en tout point du domaine.

Discret

La résolution d'un Laplacien a des applications dans d'autres domaines que la mécanique des fluides, par ex. propagation de la chaleur, électromagnétisme, etc.

Cas d'application – 2D horizontal

1. Canal rectiligne

2. Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source

3. Ecoulement autour d'un îlot

1. Canal rectiligne

Cas « évident » → débogage aisé → validation du code

→ Constante sur x , 0 sur y

2. Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source

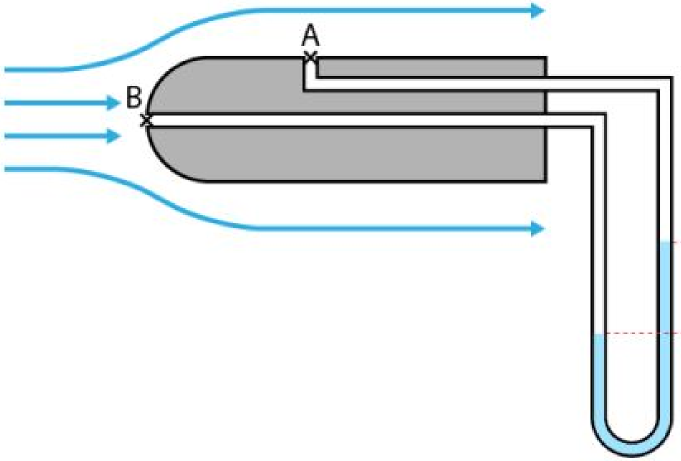
3. Ecoulement autour d'un îlot

1. Canal rectiligne

Cas « évident » → débogage aisé → validation du code

2. Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source

Idéalisation d'un tube de Prandtl

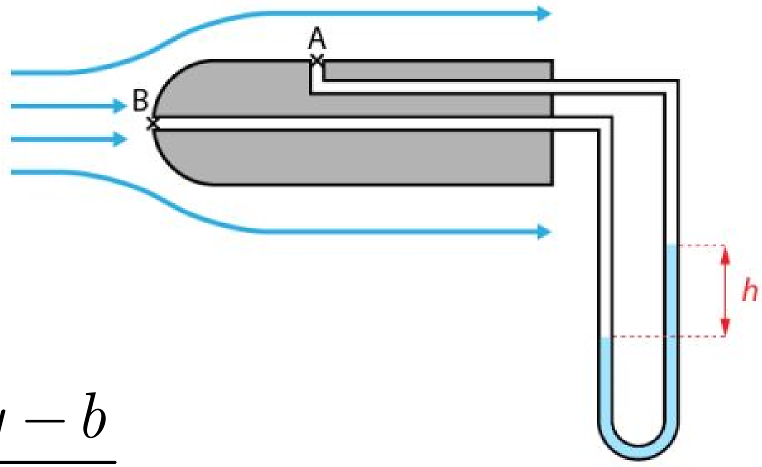


3. Ecoulement autour d'un îlot

2. Superposition d'un **écoulement uniforme** et d'une **source**

$$\begin{cases} u = U_\infty = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = 0 = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

$$\Psi = U_\infty y$$



$$\begin{cases} u = \dfrac{Q}{2\pi} \dfrac{x-a}{\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2} \\ v = \dfrac{Q}{2\pi} \dfrac{y-b}{\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2} \end{cases}$$

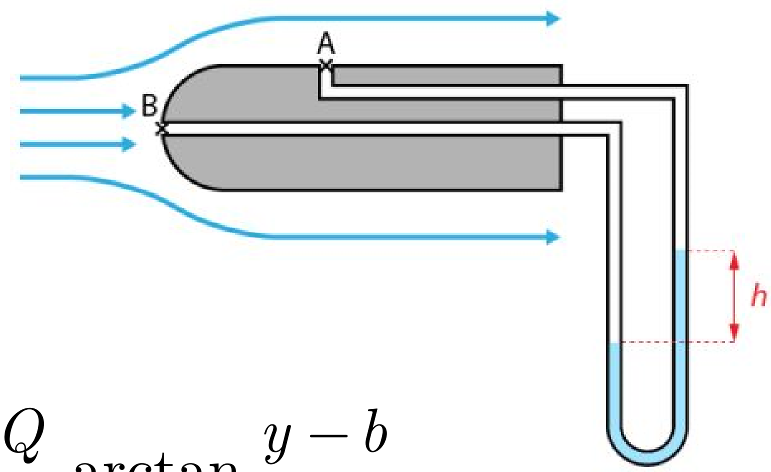
$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Atn} \frac{y-b}{x-a}$$

Avec $\left(a,b\right)$ les coordonnées de la source

2. Superposition d'un **écoulement uniforme** et d'une **source**

$$\begin{cases} u = U_\infty \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{Q}{2\pi} \dfrac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ v = \dfrac{Q}{2\pi} \dfrac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \end{cases}$$



$$\Psi = U_\infty y + \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y-b}{x-a}$$

$$u = U_\infty + \frac{Q}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$v = \frac{Q}{2\pi} \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

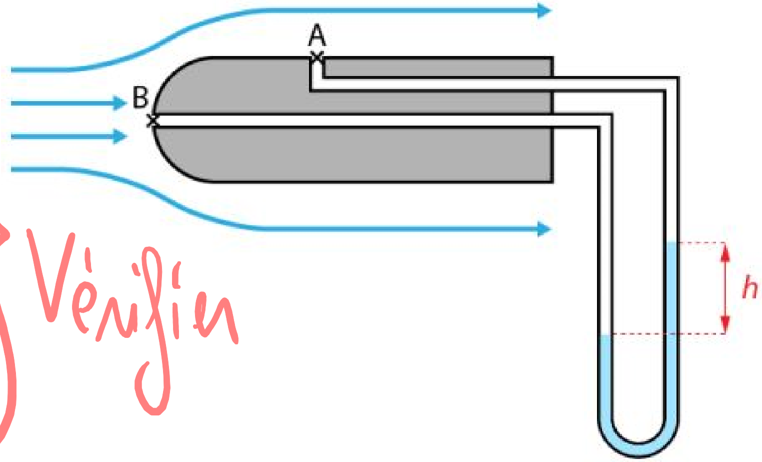
2. Superposition d'un **écoulement uniforme** et d'une **source**

$$\Psi = U_\infty y + \frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{y-b}{x-a}$$

$$u = U_\infty + \frac{Q}{2\pi}\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$v = \frac{Q}{2\pi}\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Vérifier



Que vaut la norme de la vitesse ?

Par Bernoulli, que vaut la pression en tout point du domaine ?

Le point A doit être choisi tel que $p_A = p_\infty$

càd où $p - p_\infty = 0$

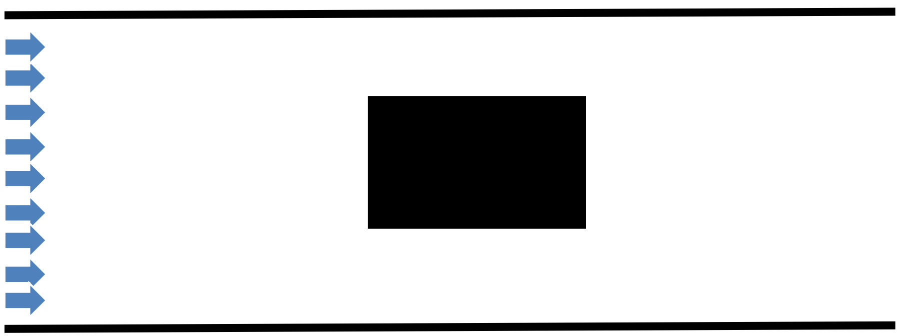
1. Canal rectiligne

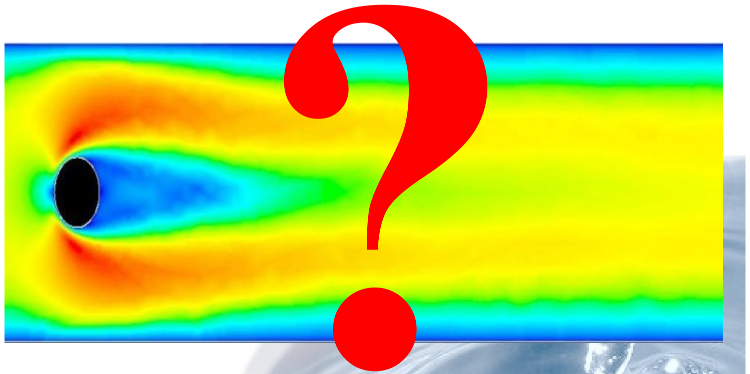
   Cas « évident » → débogage aisé → validation du code

2. Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source

   Idéalisation d'un tube de Prandtl

3. Ecoulement autour d'un îlot





Conditions aux limites

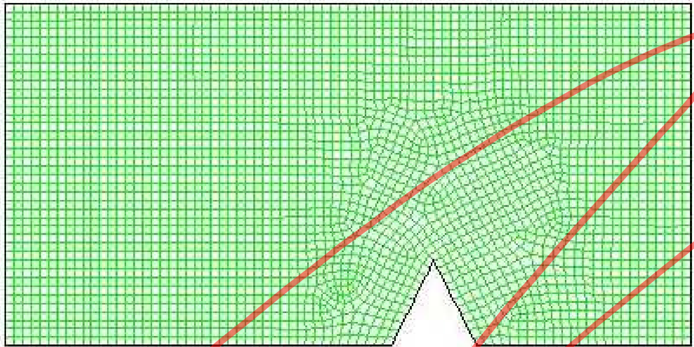
Conditions aux limites

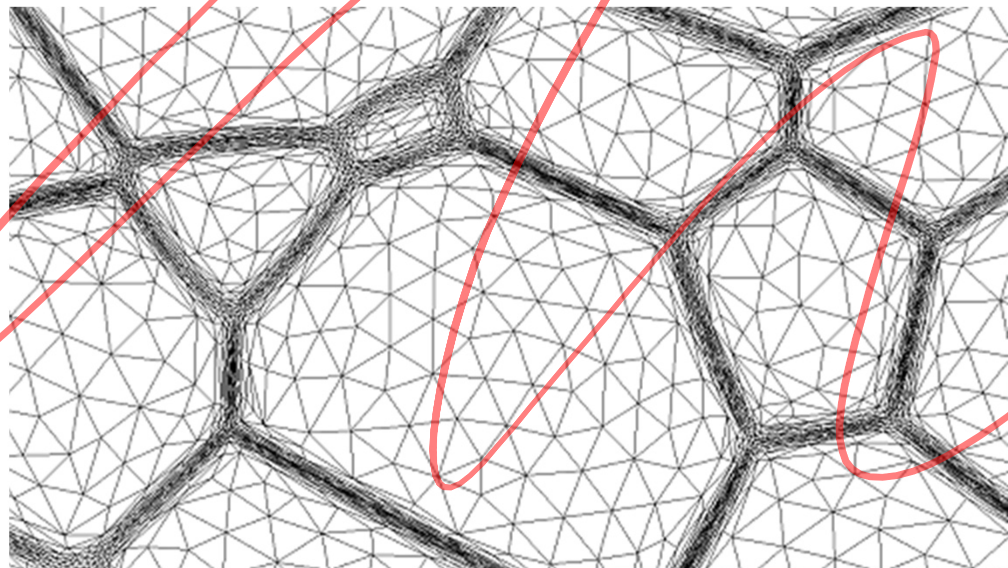
1. Condition de Dirichlet : valeur imposée
2. Condition de Neumann : valeur de dérivée imposée
3. Condition mixte : combinaison des deux premières

Discrétisation

Méthode numérique

- Ecoulement stationnaire → indépendant du temps $\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}$
- Besoin d'une méthode de discrétisation spatiale → **maillage**



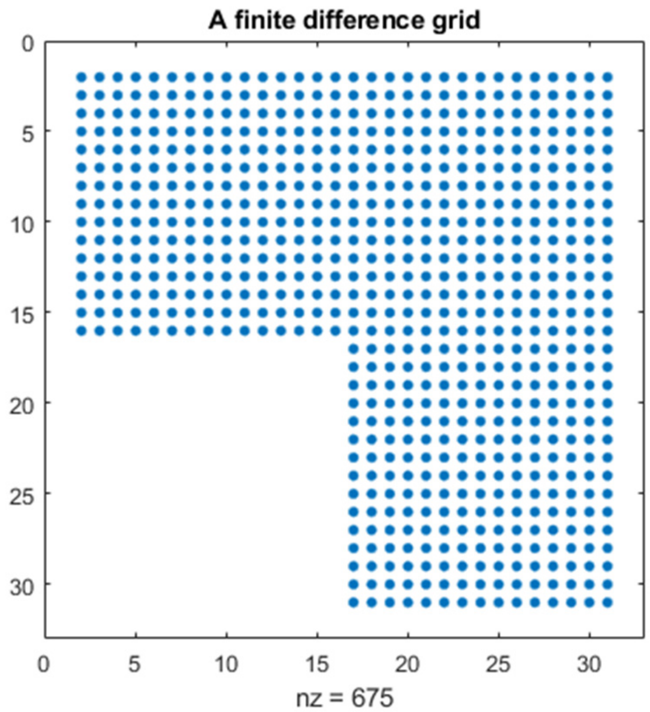


- Ecoulement stationnaire → indépendant du temps

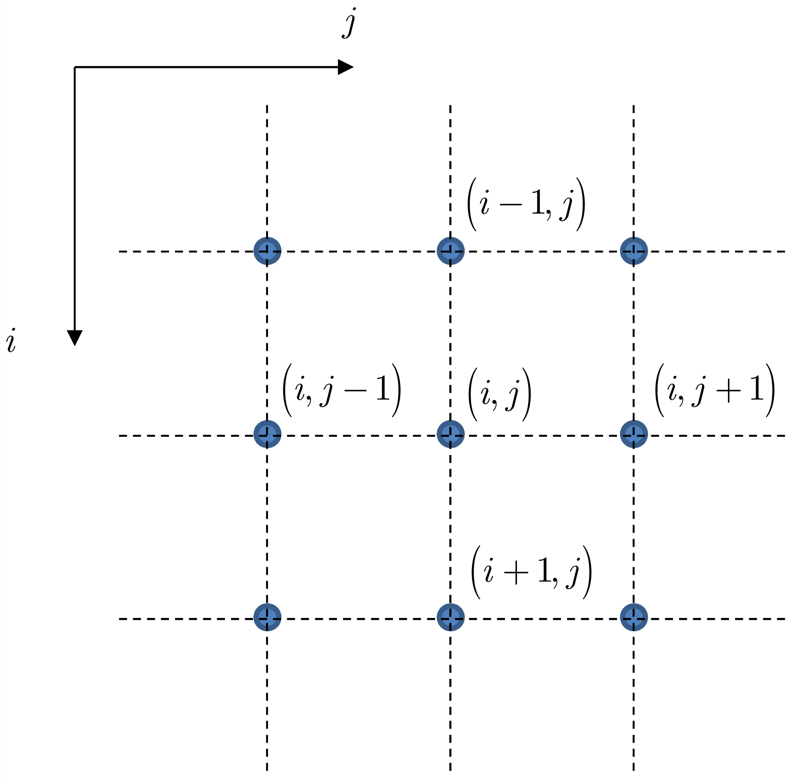
- Besoin d'une méthode de discrétisation spatiale

$\Delta x = \Delta y$

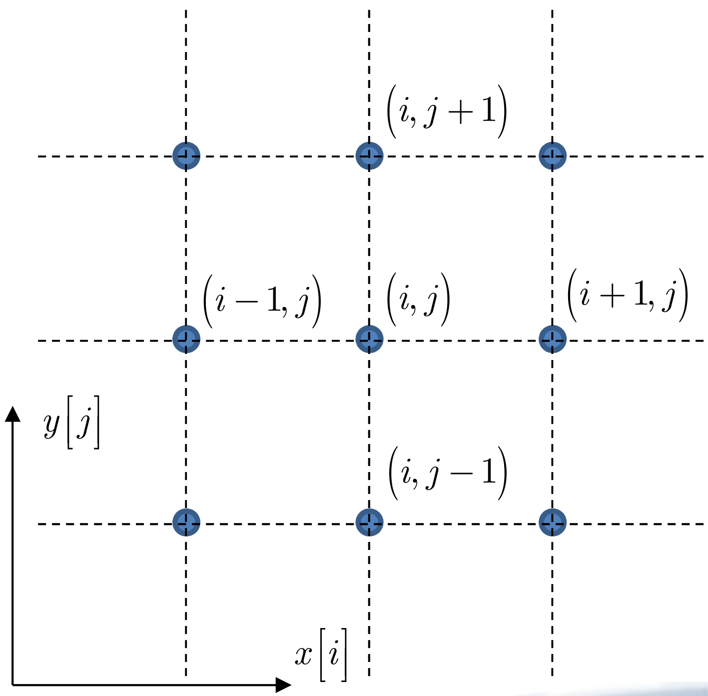
Différences finies



Objectif : faire correspondre les matrices avec une visualisation cartésienne.

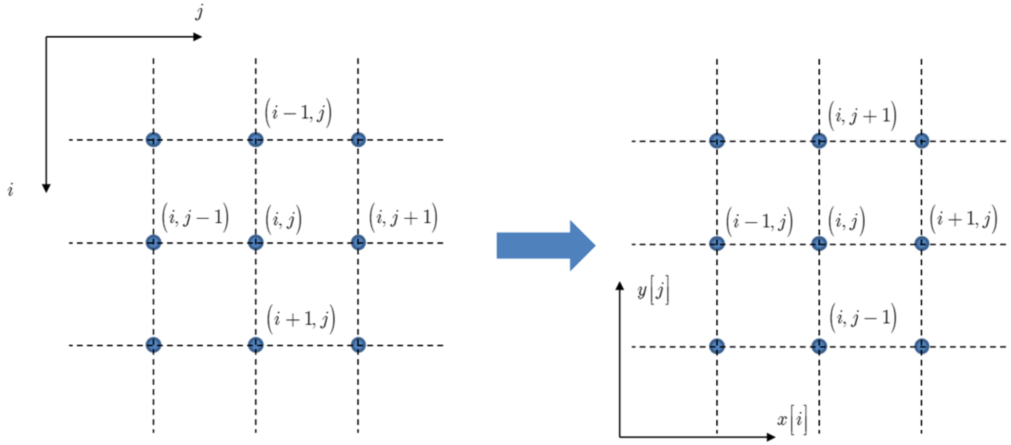


Vision matricielle



Vision cartésienne

Objectif : faire correspondre les matrices avec une visualisation cartésienne.



?

$$A(1,1)_{ij} \equiv A(0,0)_{xy}$$
$$A(m,n)_{ij} \equiv A\left((m-1)\Delta x,(n-1)\Delta y\right)_{xy}$$

?

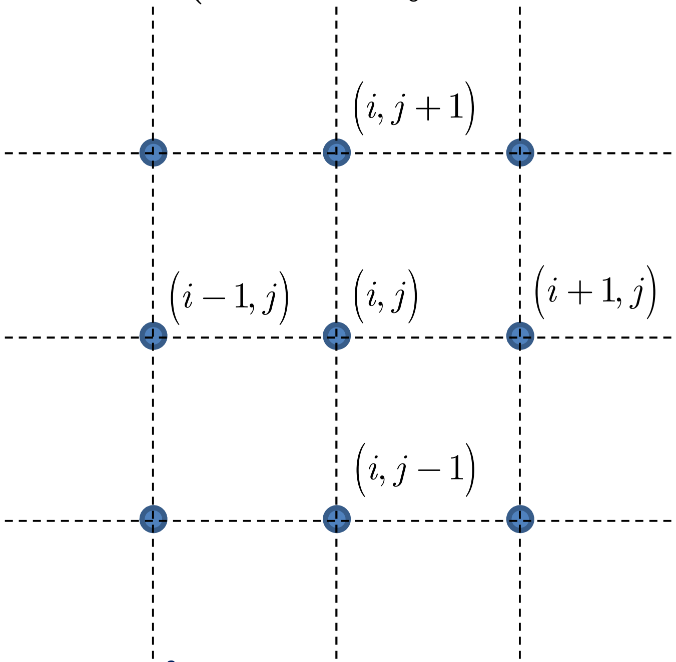
Résolution **d'une** équation

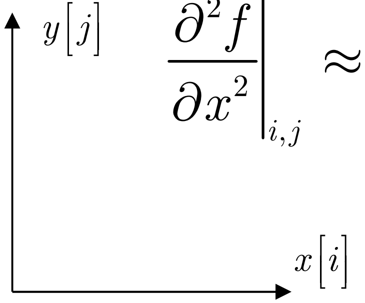
Soit le Laplacien d'une fonction qui vaut une valeur b: $\Delta f = b$

Le développement du Laplacien en 2D donne:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b$$

En **différences finies**, une dérivée seconde selon x s'exprime comme (cf. Analyse numérique – MATH0006) :





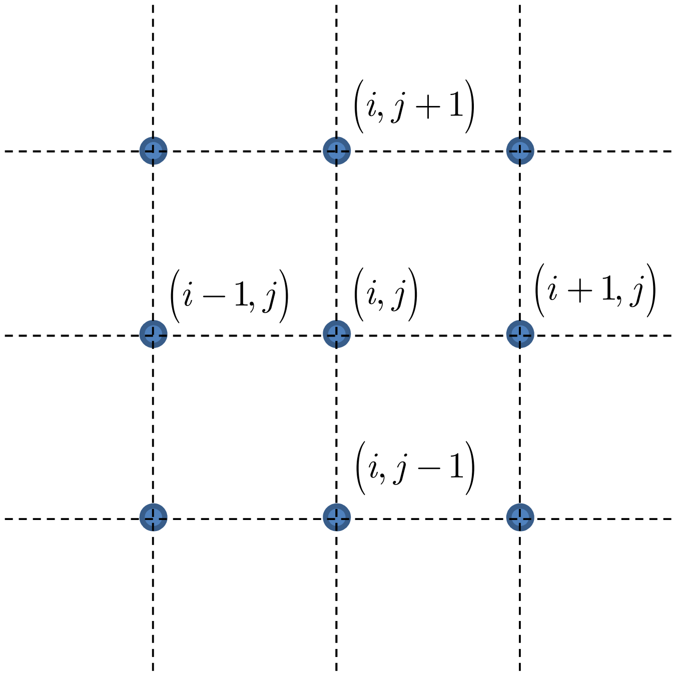
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \approx \frac{\dfrac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} - \dfrac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

La Laplacien se discrétise alors comme :

$$\Delta f\Big|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} = b$$

Si $\Delta x = \Delta y$ (ce qui est le cas pour ce projet), alors



$$\Delta f\Big|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}}{\Delta x^2} = b$$

1 équation pour chaque nœud du domaine !

Gestion des conditions limites:

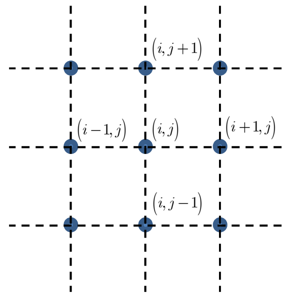
1. Dirichlet (valeur de f imposée à X): $f_{i,j} = X$

2. Neumann (valeur de la dérivée imposée à X): $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = X$

a) Dérivée centrée $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} = X$$

b) Dérivée décentrée arrière $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} = X$$

c) Dérivée décentrée avant $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} = X$$



Pour un écoulement irrotationnel d'un fluide incompressible, le Laplacien de la fonction de potentiel ϕ est nul : $\Delta\phi = 0$

- $f \rightarrow \phi$
- $b \rightarrow 0$

$$\frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j}}{\Delta x^2} = 0$$

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = 0$$

Une condition d'imperméabilité s'exprime comme (pour un décentrement arrière) :

$$u_{i,j} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} = 0$$

$$v_{i,j} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{i,j} \approx \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y} = 0$$

Résolution **d'un système d'équations**

Soit un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{1,1}f_1 + a_{1,2}f_2 + \cdots + a_{1,N}f_N = b_1 \\ a_{2,1}f_1 + a_{2,2}f_2 + \cdots + a_{2,N}f_N = b_2 \\ \cdots \\ a_{N,1}f_1 + a_{N,2}f_2 + \cdots + a_{N,N}f_N = b_N \end{cases}$$

Il peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

$A \backslash b = f$

Les précisions sur différentes méthodes de résolution sont données dans le cours MATH0006.

Des fonctions propres à chaque langage de programmation permettent d'effectuer efficacement la résolution du système. Par exemple, pour une système de type Ax=b:

- Matlab : `x = A\b`
- Julia : `x = \(A,b)`
- Fortran (+ LAPACK library) :

```
call dgesv(N,1,A,LDA,ipiv,b,LDB,info)
```

Pour de meilleures performances : définir la matrice comme creuse (« sparse »). Les algorithmes de résolution sont alors optimisés.

Construction du système en pratique

0	0	0	0	0	0	0
0	1	3	6	10	13	0
0	2	4	7	11	14	0
0	5	8	9	12	15	0
0	0	0	0	0	0	0

Hors domaine

Nœud de calcul

Nœud Dirichlet

Nœud Neumann

i Indice du nœud

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = 0$$

$$\phi_{11} + \phi_{4} + \phi_{6} + \phi_{9} - 4\phi_{7} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \\ \phi_{10} \\ \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \phi_{13} \\ \phi_{14} \\ \phi_{14} \end{pmatrix}}_{\phi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

0	0	0	0	0	0	0
0	1	3	6	10	13	0
0	2	4	7	11	14	0
0	5	8	9	12	15	0
0	0	0	0	0	0	0

- Hors domaine
- Nœud de calcul
- Nœud Dirichlet
- Nœud Neumann
- i Indice du nœud

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = 0$$

$$\phi_{11} + \phi_{4} + \phi_{6} + \phi_{9} - 4\phi_{7} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&-4&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{pmatrix}
\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \phi_5\\ \phi_6\\ \phi_7\\ \phi_8\\ \phi_9\\ \phi_{10}\\ \phi_{11}\\ \phi_{12}\\ \phi_{13}\\ \phi_{14}\\ \phi_{14}
\end{pmatrix}}_{\phi}
=
\underbrace{\begin{pmatrix}
0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0
\end{pmatrix}}_{b}$$

0	0	0	0	0	0	0
0	1	3	6	10	13	0
0	2	4	7	11	14	0
0	5	8	9	12	15	0
0	0	0	0	0	0	0

	Hors domaine
	Nœud de calcul
	Nœud Dirichlet
	Nœud Neumann
i	Indice du nœud

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j} = 0$$

$$\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y} = b_9$$

$$\phi_{12} + \phi_8 + \phi_7 - 3\phi_9 = b_9 \Delta y$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&-4&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{pmatrix}
\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \phi_5\\ \phi_6\\ \phi_7\\ \phi_8\\ \phi_9\\ \phi_{10}\\ \phi_{11}\\ \phi_{12}\\ \phi_{13}\\ \phi_{14}\\ \phi_{14}
\end{pmatrix}}_{\phi}
=
\underbrace{\begin{pmatrix}
0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0
\end{pmatrix}}_{b}$$

0	0	0	0	0	0	0
0	1	3	6	10	13	0
0	2	4	7	11	14	0
0	5	8	9	12	15	0
0	0	0	0	0	0	0

(gris)	Hors domaine
(bleu)	Nœud de calcul
(orange)	Nœud Dirichlet
(violet)	Nœud Neumann
i	Indice du nœud

$$\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}-4\phi_{i,j}=0$$

$$\frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{\Delta y}=b_9$$

$$\phi_{12}+\phi_8+\phi_7-3\phi_9=b_9\Delta y$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&-4&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&-3&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\\\phi_4\\\phi_5\\\phi_6\\\phi_7\\\phi_8\\\phi_9\\\phi_{10}\\\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\\\phi_{14}\\\phi_{14}\end{pmatrix}}_{\phi}
=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\b_9\Delta y\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

0	0	0	0	0	0	0
0	1	3	6	10	13	0
0	2	4	7	11	14	0
0	5	8	9	12	15	0
0	0	0	0	0	0	0

	Hors domaine
	Nœud de calcul
	Nœud Dirichlet
	Nœud Neumann
i	Indice du nœud

$$\phi_2 = b_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \\ \phi_{10} \\ \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \phi_{13} \\ \phi_{14} \\ \phi_{14} \end{pmatrix}}_{\phi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_9 \Delta y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

Construction du système en pratique

0	0	0	0	0	0	0
0	1	3	6	10	13	0
0	2	4	7	11	14	0
0	5	8	9	12	15	0
0	0	0	0	0	0	0

(gris)	Hors domaine
(bleu)	Nœud de calcul
(orange)	Nœud Dirichlet
(violet)	Nœud Neumann
i	Indice du nœud

Et ainsi de suite jusqu'à avoir traité tous les nœuds.

Ensuite, résolution du système.

La matrice de résultats peut alors être remplie avec les valeurs du vecteur ϕ

A partir des résultats de potentiel ou de fonction de courant, les vitesses peuvent être calculées par différences finies.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Différences finies:

- centrées si possible
- décentrée si sur un bord du domaine

a) Dérivée centrée $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$

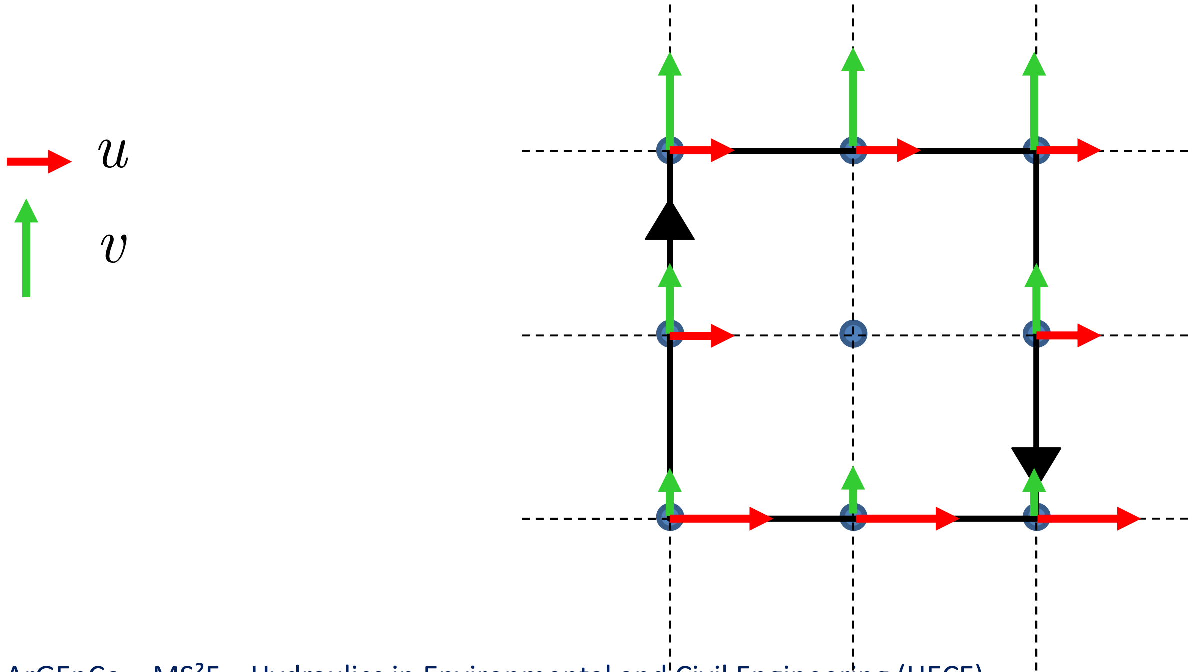
b) Dérivée décentrée arrière $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}$

c) Dérivée décentrée avant $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}$

Circulation autour d'une courbe fermée: $\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{U} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Procédure:

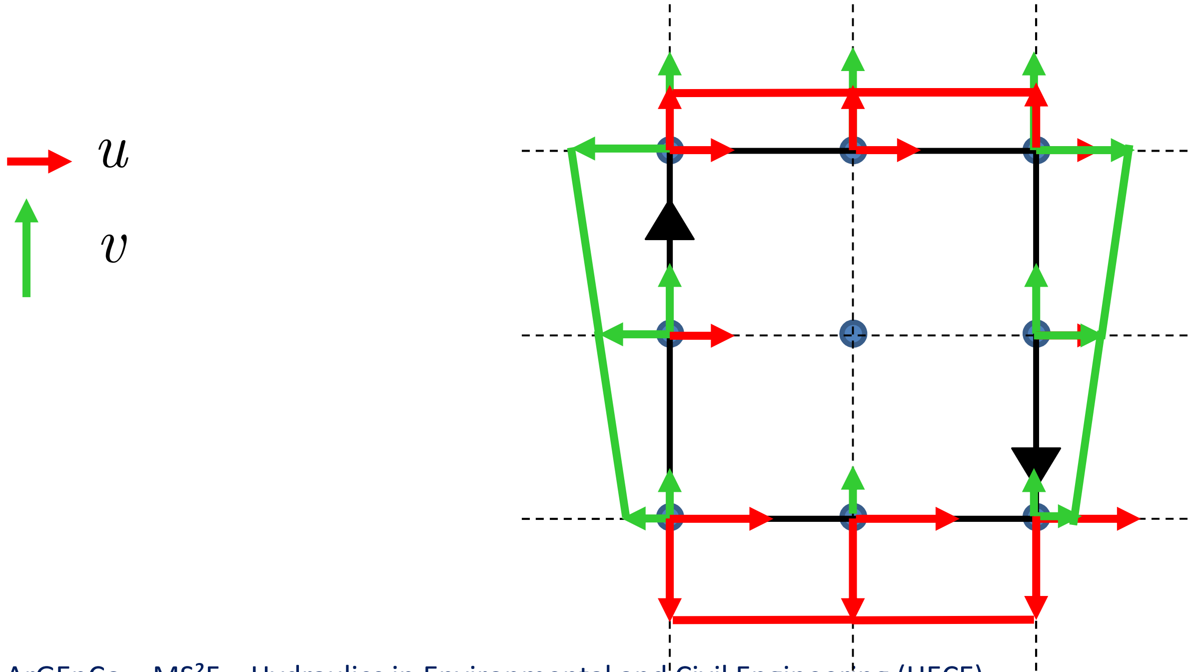
- Choisir une courbe fermée qui passe par les nœuds et suit les directions x et y.
- Garder uniquement les composantes tangentes à la courbe pour l'intégration.
- Intégrer selon la méthode des trapèzes.



Circulation autour d'une courbe fermée: $\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{U} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Procédure:

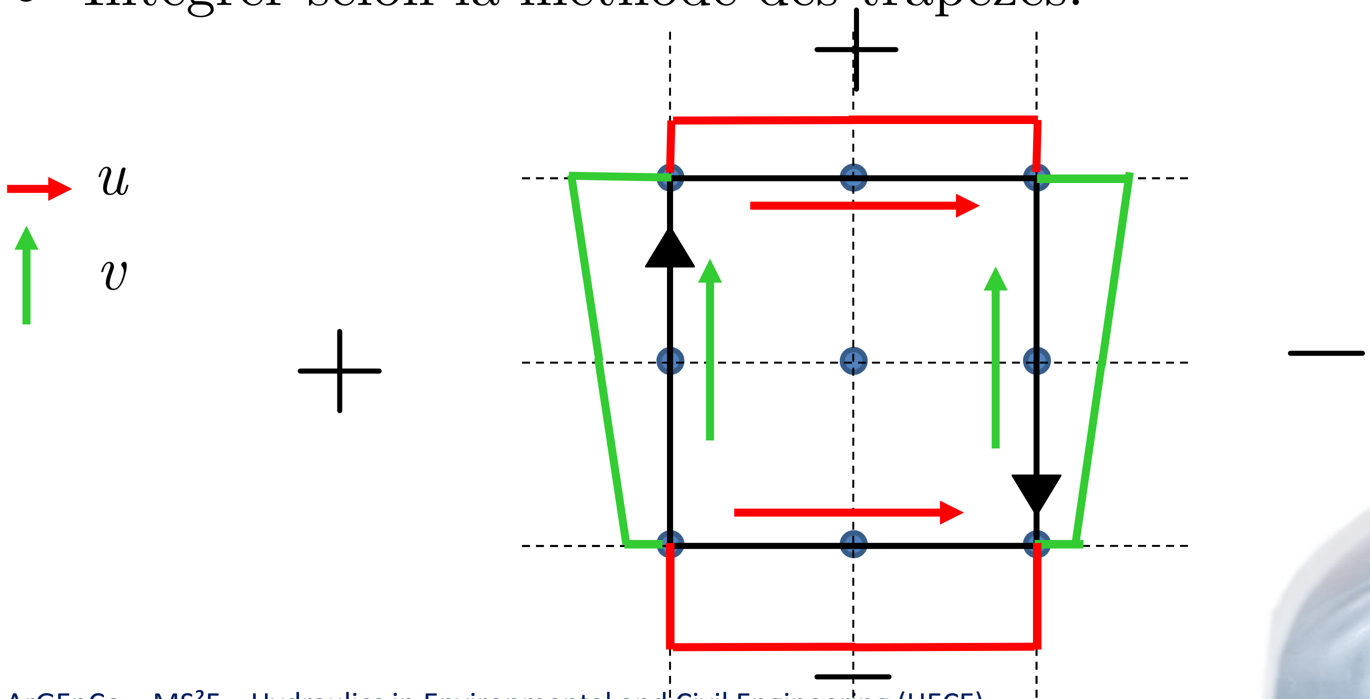
- Choisir une courbe fermée qui passe par les nœuds et suit les directions x et y.
- Garder uniquement les composantes tangentes à la courbe pour l'intégration.
- Intégrer selon la méthode des trapèzes.



Circulation autour d'une courbe fermée: $\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{U} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

Procédure:

- Choisir une courbe fermée qui passe par les nœuds et suit les directions x et y.
- Garder uniquement les composantes tangentes à la courbe pour l'intégration.
- Intégrer selon la méthode des trapèzes.



La portance et la trainée peuvent se calculer en intégrant les diagrammes de pression le long de corps et en projetant selon la direction ad-hoc.

La pression relative se calcule en considérant la conservation de la charge dans un écoulement irrotationnel. Dès lors:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\left\|\vec{U}\right\|^2}{2g} = C$$

$$p = \rho g \left(C - z - \frac{\left\|\vec{U}\right\|^2}{2g} \right)$$

En pratique

- Evaluations **individuelles** via la plate-forme
- Etapes intermédiaires obligatoires mais **non cotées**
- Validation en ligne des codes soumis
- !! Interface des fonctions/routines à respecter !!
- Validation finale du code complet et questions **cotées**
- Soumissions multiples autorisées mais avec pénalités

⚠ Légende !!!

Fichiers de données

- Fichiers à télécharger sur la plate-forme (**lire 000-README.txt**)
- 1 matrice de domaine
  - « 0 » = hors domaine
  - « 1 » = domaine intérieur
  - « 2 » = condition limite de Dirichlet
- 1 matrice de valeur de conditions aux limites
  - valeur de la condition de Dirichlet au nœud de discrétisation marqué comme « 2 »
- 1 matrice de numérotation
  - numérotation de calcul à utiliser pour remplir le système d'équations
- Pas spatial spécifique à chaque cas

  (voir fichier 000-README.txt)

- 22/03: Séance introductive (2h) – en amphithéâtre
- 22/03: Codage de la construction du système à résoudre (2h) – en petits groupes
- 29/03: Résolution du système et calcul des vitesses et variables dérivées (2h) – en petits groupes
- 12/04: Permanence de 14h à 16h pour répondre à d'éventuelles questions
- 19/04: Application du code
- 26/04 13h30: Deadline questionnaire en ligne individuel