Stabilité d'un pont suspendu soumis à des sollicitations cycliques

Profs Q. Louveaux, O. Brüls, F. Nguyen

Introduction aux méthodes numériques et projet
Bachelier en sciences de l'ingénieur, Bloc 1
Université de Liège
Année académique 2016-2017

Introduction

Les évolutions technologiques tant du point de vue des matériaux mis en oeuvre que des méthodes de calculs développées permettent d'atteindre de nouveaux records dans le domaine du génie civil[1]. Ces évolutions ont permis, outre la recherche accrue d'esthétisme, la réalisation de structures de plus en plus légères et donc également économiques. Cette diminution de la masse propre structurelle a sans aucun doute conduit au dessin de structures plus souples mais également davantage sensibles aux problèmes vibratoires. Les sollicitations dynamiques rencontrées dans le cadre des structures du génie civil peuvent être classées en plusieurs catégories dont nous ne considérerons ici que le chargement éolien. Alors que la recherche d'une certaine souplesse peut être envisagée par exemple dans le cadre de structures en zone sismique, ce type de caractéristique est tout à fait à proscrire lorsque les effets d'un vent turbulent doivent être contrecarrés. Les méthodes d'analyse de structures soumises à la turbulence du vent trouvent donc leurs applications majeures dans les structures les plus souples du génie civil, à savoir, les ponts suspendus et haubanés, les hauts buildings, les toitures de stades, les câbles à haute tension, les tours de refroidissement... Les raisonnements développés dans la suite décrivent essentiellement un modèle simplifié de tabliers de ponts souples suspendus.

Quel que soit le type de chargement dynamique appliqué à une structure, les équations à résoudre (les équations du mouvement) sont des équations différentielles de second ordre à coefficients constants ou non selon que le problème étudié peut être considéré comme linéaire ou non. A chaque type de sollicitation dynamique est associé une méthode adéquate de résolution du problème. Parmi celles-ci, les méthodes numériques offrent la possibilité de réaliser rapidement un grand nombre de calculs en fonction des scénarios envisagés ou d'effectuer de la paramétrisation de structures. Ce projet a pour objectif d'étudier la

[1]Denoel V., 2002, Analyse de structures soumises au vent turbulent: de l'approche stochastique fréquentielle au transitoire non linéaire. Mémoire de DEA. Université de Liège.

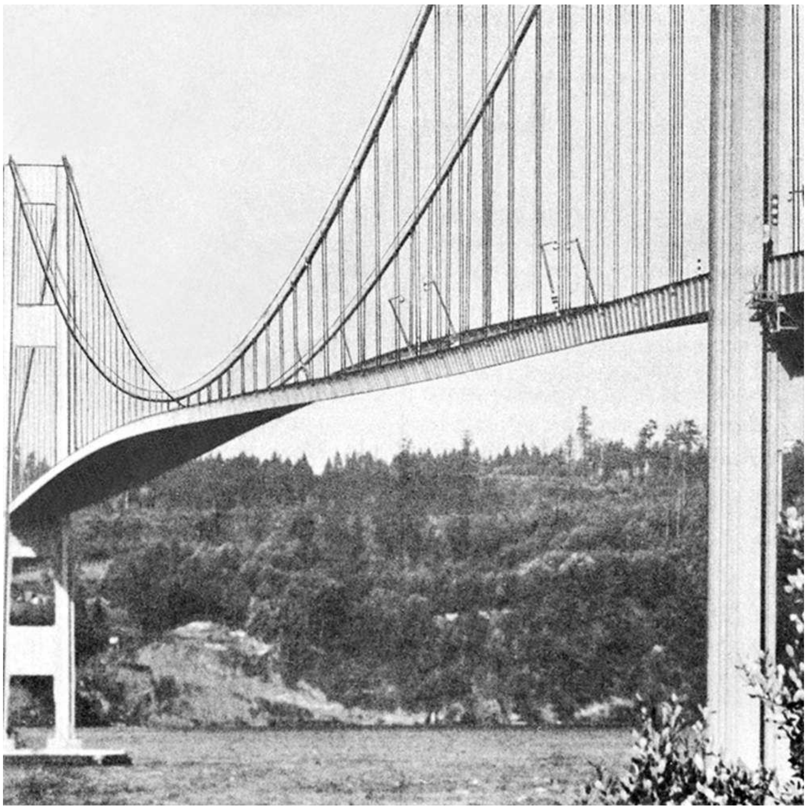

Figure 1: Le tablier d'un pont suspendu subissant une déformation en torsion.

stabilité d'un pont suspendu sous une action cyclique, par exemple générée par le vent. Le développement d'un modèle simplifié de pont suspendu couplé à une sollicitation cyclique également simplifiée nous permettra d'étudier les conditions de stabilité du pont.

Description du modèle

La structure du pont suspendu est modélisée selon une coupe transversale (figure 2) par un système simplifié reprenant le tablier de pont de longueur $2l$ et les câbles attachés aux extrémités du tablier. Le système a pour variables principales la position verticale y par rapport à la position d'équilibre (c'est-à-dire uniquement sous l'effet de la gravité) et l'angle de torsion du tablier de pont θ.

Si les câbles se comportent comme des ressorts linéaires, ils obéissent à la loi de Hooke et génèrent une force $f_{lin}(x)$:

$$f_{lin}(x) = Kx$$

où x est la variation de longueur du ressort en m (correspondant ici au déplacement vertical du tablier y^+ ou y^- par rapport à la position d'équilibre) et K sa raideur en N/m.

Cependant, selon cette loi linéaire, les câbles exerceront une force égale que les câbles soient en tension ou en compression, ce qui n'est pas réaliste physiquement. Un modèle plus représentatif se base sur une fonction non-linéaire pour laquelle un câble tendu ($x > 0$) exercera une force plus importante qu'un câble détendu ($x < 0$):

$$f_{nl}(x) = \frac{K}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)$$

avec le paramètre α en m^{-1} caractérisant la non-linéarité de la raideur du câble.

Considérant le schéma de la figure 2 et la loi de Newton avec un amortissement des mouvements, nous pouvons écrire les équations du mouvement pour les variables y et θ qui traduisent l'équilibre des forces verticales et des moments.

$$my'' = -c_y y' - [f(y^-) + f(y^+)] + A\sin(\omega t)$$

$$\frac{ml^2}{3}\theta'' = -c_\theta \theta' + l[f(y^-) - f(y^+)]\cos(\theta)$$

avec

- m: la masse du tablier de pont, que l'on fixera à 2500 kg ;
- $2l$: la largeur du tablier de pont, fixée à 12 m ;
- c_y: le coefficient d'amortissement fixé à 25 Ns/m;
- c_θ: le coefficient d'amortissement en torsion fixé à 300 Nms;
- θ: l'angle de torsion du tablier par rapport à l'horizontal, en radians;

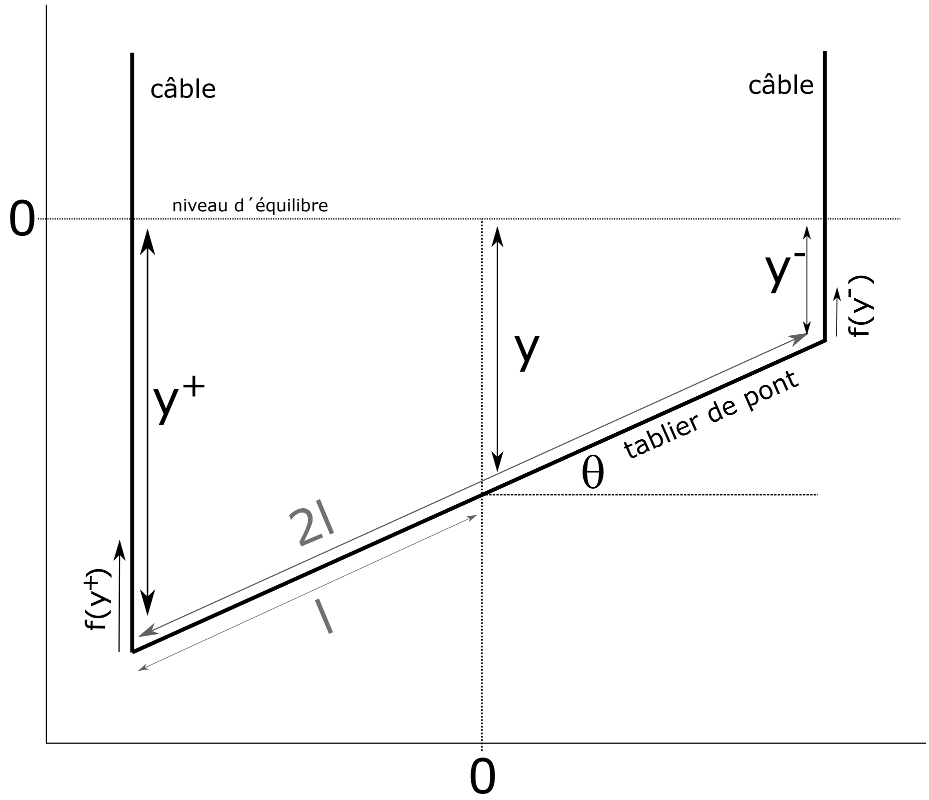

Figure 2: Modèle simplifié d'un pont suspendu de largeur de tablier $2l$. y représente la distance (m) du centre du tablier par rapport à sa position d'équilibre et θ l'angle du tablier avec l'horizontal

- y, y^+, y^-: les déplacements verticaux tels que définis à la figure 2 (les valeurs de y^+ et y^- peuvent être exprimées en fonction de y et θ);
- $f(y^+)$ et $f(y^-)$: la loi de force évaluée en y^+ et y^- qui correspond à la fonction f_{lin} ou f_{nl} selon les cas;
- K: la raideur des câbles fixée à 1000 N/m;
- α: le paramètre du modèle du câble fixé à 0.1 m^{-1};
- $A\sin(\omega t)$: l'excitation du vent qui est modélisée comme une force agissant dans la direction verticale et évoluant cycliquement en fonction du temps avec une amplitude A (N) et une fréquence angulaire ω (rad/s).

Question 1: Algorithmes de la sécante et de la bissection

Pour le modèle simplifié présenté ci-dessus l'évolution de l'enveloppe de l'angle de torsion peut être obtenue en fonction du temps par intégration numérique des équations de mouvement. Il n'existe pas de solution analytique pour déterminer, par exemple, le temps qu'il faudrait pour atteindre une valeur donnée de l'amplitude de l'angle de torsion.

A cette fin, on demande d'implémenter deux fonctions:

```
function x = secante(@f,x0,x1)
```

et

```
function x = bissection(@f,x0, x1)
```

qui permettent de rechercher la racine d'une fonction MATLAB `f(x)` à partir de deux valeurs initiales `x0` et `x1` selon la méthode de la sécante et de la bissection. Si vous le souhaitez, des arguments supplémentaires peuvent être ajoutés à cette fonction. Dans le rapport, veuillez discuter les conditions de convergence de chacun des deux algorithmes ainsi que le choix des deux valeurs initiales.

Utilisez ces deux algorithmes pour trouver le temps nécessaire pour atteindre une amplitude de 0.3 radians. Pour ce faire, la fonction décrivant l'enveloppe de l'angle de torsion sera préalablement construite par interpolation à partir des valeurs fournies dans le fichier `enveloppe.xls`. On demande également de justifier le choix de la méthode d'interpolation.

Question 2: Mise en place de la modélisation

Établissez le modèle numérique permettant d'effectuer la simulation du système du pont suspendu.

1. Les équations du mouvement sont deux équations différentielles du deuxième ordre couplées pour les variables $[y, \theta]$. Ré-écrivez les équations du mouvement sous la forme d'un système de 4 équations différentielles du premier ordre pour les variables $[y, y', \theta, \theta']$ dans le cas du modèle de câble linéaire ainsi que dans le cas du modèle non-linéaire.

2. Définir dans MATLAB deux fonctions `odefunction_lin` et `odefunction_nl` qui reçoivent en argument le temps et les variables $[y, y', \theta, \theta']$ des deux systèmes d'équations différentielles ci-dessus et fournit en sortie les dérivées $[y', y'', \theta', \theta'']$ vérifiant les équations du mouvement.

3. Implémenter la méthode d'Euler explicite pour résoudre le système d'équations différentielles sur l'intervalle de temps [0, 1000] secondes en prenant comme conditions initiales

$$[y, y', \theta, \theta'] = [0, 0, 0.002, 0] \text{ respectivement en m, m/s, rad et rad/s}$$

   pour les modèles de câble linéaire et non-linéaire. Tracer l'évolution des variables y et θ en fonction du temps et comparer les réponses des deux modèles pour une amplitude A de la force cyclique égale à 27500 N et pour une pulsation ω de 3 rad/s.

4. Utiliser la fonction `ode45` pour résoudre les deux systèmes d'équations différentielles pour les mêmes conditions qu'au point précédent. Comparez les résultats entre la méthode d'Euler explicite et `ode45`.

5. Comparez la stabilité du pont suspendu pour les cas où $f(x)$ est linéaire et $f(x)$ est non-linéaire.

Question 3: Etude de la stabilité du tablier de pont

Pour les conditions initiales de la question 2.3, en considérant le modèle de câble non-linéaire, avec $\omega = 3$ rad/s et pour un intervalle de temps de $[0, 1000]$ secondes, on demande de :

1. Créer une fonction permettant de rechercher la force maximale exercée dans les câbles sur la période de simulation considérée pour $A = 27500$ N.

2. Déterminer ensuite l'amplitude A de la sollicitation cyclique verticale due au vent (ω est fixé à 3 rad/s) nécessaire pour atteindre une tension de 7900 N dans un des deux câbles, ce qui conduirait à leur rupture. Pour ce faire, utilisez les fonctions que vous avez créées à la question 1 et au point 1 ci-dessus.

3. Comment évolue cette amplitude de "rupture" A si l'on fait varier le paramètre α dans le modèle non-linéaire des câbles?

Pour cette question, vous pouvez utiliser au choix une des deux méthodes de résolution d'équations différentielles implémentées lors de la question 2.

Consignes

- Le travail comporte un code de calcul MATLAB et un rapport d'une longueur de 10 pages maximum.

- Le code doit être correct et écrit par vous (ce que nous vérifierons à la présentation orale).

- Le code doit être soigné et commenté.

- Le code doit utiliser au maximum les possibilités vectorielles de MATLAB.

- Pour toute fonction, nous sommes susceptibles de vous demander de montrer un *profile* MATLAB et de l'interpréter.

- Les étudiants ingénieur civil architecte sont dispensés de la question 3.

Critères d'évaluation

Si la note de la présentation orale est supérieure ou égale à 10/20, la note finale n_f sera définie par la moyenne arithmétique pondérée

$$n_f = 0.2\, n_m + 0.35\, n_r + 0.45\, n_o$$

où n_m est la note de l'évaluation continue (milestones), n_r est la note du rapport et du code MATLAB et n_o est la note de la présentation orale. Dans les autres cas, la note finale sera celle de la présentation orale $n_f = n_o$.

Évaluation continue (poids $0,2$)

Deux "milestones" permettront de vérifier votre état d'avancement en cours de projet. Lors du milestone 1 organisé le 3 mars, votre groupe devra effectuer une démonstration du programme développé pour la question 1. Lors du milestone 2 organisé le vendredi 17 mars, votre groupe devra effectuer une démonstration du programme développé pour la question 2.5. Une cote sur 10 sera attribuée selon les critères suivants :

- le programme donne une réponse complète à la question : 10/10;
- le programme donne une réponse partielle à la question : entre 5 et 9/10;
- le programme est bien avancé mais il ne fonctionne pas : entre 3 et 4/10;
- le programme n'est pas bien avancé : entre 1 et 2/10.

Une absence non justifiée sera sanctionnée par une note individuelle de 0/10, indépendamment du résultat du groupe.

Rapport et code MATLAB (poids $0,35$)

Un fichier .zip par groupe comprenant un rapport au format PDF et accompagné des fichiers .m de votre programme doit être soumis via la plateforme eCampus au plus tard pour le vendredi 5 avril. Le nom du fichier .zip et le nom du fichier .pdf doivent respecter le format suivant: "NumeroGroupe_NomA_NomB_NomC.xxx". Par exemple : l'archive "27_Dupond_Beckers_Bastin.zip" doit inclure le fichier "27_Dupond_Beckers_Bastin.pdf".

- La longueur du rapport ne peut dépasser 10 pages. Il est inutile d'écrire une introduction et une conclusion.
- Pour chaque question, les résultats obtenus doivent être illustrés.
- La justification des choix numériques est très importante. Pensez à expliquer les choix qui vous ont semblé cruciaux.

- La forme du rapport est prise en compte. Il est recommandé de suivre les règles de bonne pratique pour la réalisation d'un rapport scientifique qui feront l'objet d'une présentation le mercredi 15 mars. Le nombre de pages étant limité, il est inutile de répéter l'énoncé. Allez donc à l'essentiel.

- La qualité du code (efficacité et soin) est également considérée dans l'évaluation.

En plus du rapport par groupe, nous vous demanderons de remplir un questionnaire individuel portant sur votre évaluation du fonctionnement du groupe de travail. Ce questionnaire individuel devra être obligatoirement remis via eCampus pour le jeudi 6 avril.

Présentation orale (poids $0,45$)

La présentation orale est **individuelle**. Vous devez faire une démonstration du programme de votre groupe et répondre à des questions supplémentaires. Les éléments suivants seront pris en considération :

- la maîtrise du programme réalisé par votre groupe;

- les justifications et éclaircissements par rapport aux choix réalisés et aux résultats présentés dans le rapport;

- la maîtrise des notions théoriques vues au cours.

Deuxièmes sessions

Lors de la session de septembre, certains groupes peuvent être dispensés de remettre un nouveau code et un nouveau rapport. Dans ce cas, seul l'oral doit être représenté et compte pour 100% de la note finale. Pour les autres groupes, un nouveau code et un nouveau rapport doivent être remis 5 jours avant l'examen oral. Si la note de la présentation orale est supérieure ou égale à $10/20$, la note finale est alors définie par la moyenne arithmétique pondérée

$$n_f = 0.35\, n_r + 0.65\, n_o$$

où n_r est la note du rapport et du code MATLAB et n_o est la note de la présentation orale. Dans les autres cas, la note finale sera celle de la présentation orale $n_f = n_o$.