Задача 2-фазной фильтрации: метод Ньютона

Постановка задачи:

$$\begin{cases} \phi\frac{\partial S}{\partial t} - div(S_k \bigtriangledown p) = g_0 = 0 \\ \phi\frac{\partial(1-S)}{\partial t} - div((1-S)k \bigtriangledown p) = g_\omega = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Рассматривается скважина радиуса r. T - полное время интегрирования по времени, $\triangle t$ - шаг по времени, $t_0 = 0$, m - количество шагов, $S \in [0, 1]$ - насыщение нефти, $S_0 = 0.75$, p - давление, $p_0 = 100$, $\phi = const$- пористость.

Схема решения:

0) Нулевое Ньютоновское приближение: $p^0 = p_0$, $S^0 = S_0$

1) Изначально принимается $k = 1$. По формуле невязки считаем R_0^k и R_ω^k:

$$R_0 = \phi\frac{\partial S}{\partial t} - div(Sk\bigtriangledown p) - q_0 = \phi\frac{S_i - S_i^0}{\triangle t} + \sum_j T_{ij}\begin{pmatrix} S_i, p_i > p_j \\ S_j, p_i < p_j \end{pmatrix} - k(S_i)WI(p_{bh} - p_i) = 0, \quad (2)$$

где

$$k(S_i) = [beginarrayccc1$$

, если нагнетающая скважина

S_i, если добывающая

(3)

2) Проверка условия:

$$\left\| R_0^k \right\| + \left\| R_\omega^k \right\| < \varepsilon \quad (4)$$

если условие выполнено, то $p_0 = p^k$ и $S_0 = S^k$. Если нет, переходим к 3 пункту.

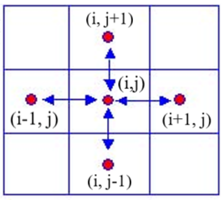
3) Вычисляем Якобиан:

$$J_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_0}{\partial p^T} \frac{\partial R_0}{\partial S^T} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$J_0 = \begin{cases} \frac{\partial R_{0i}}{\partial p_i} = \sum T_{ij} \begin{pmatrix} S_i, p_i > p_j \\ S_j, p_i < p_j \end{pmatrix} - k(S_i) WI \\ \frac{\partial R_{0i}}{\partial p_j} = -T_{ij} \begin{pmatrix} S_i, p_i > p_j \\ S_j, p_i < p_j \end{pmatrix} \\ \frac{\partial R_{0i}}{\partial S_i} = \frac{\phi}{\triangle t} + \sum T_{ij}(p_i - p_j) \begin{pmatrix} 1, p_i > p_j \\ 0, p_i < p_j \end{pmatrix} + WI(p_i - p_{bh}) \frac{\partial k(S_i)}{\partial S_i} \\ \frac{\partial R_{0i}}{\partial S_j} = T_{ij}(p_i - p_j) \begin{pmatrix} 1, p_i > p_j \\ 0, p_i < p_j \end{pmatrix} \end{cases} \tag{6}$$

Используется 5-точечная схема конечных разностей для Якобиана:

$$\tau_1 u_{i-1,j} - \tau_1 u_{i,j} + \tau_2 u_{i,j+1} - \tau_2 u_{i,j} + \tau_3 u_{i+1,j} - \tau_3 u_{i,j} + \tau_4 u_{i,j} - \tau_4 u_{i,j-1} = r(x) = 0 \tag{7}$$



4) Решаем систему:

$$J_0 \begin{bmatrix} \triangle p \\ \triangle S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_0^k \\ -R_\omega^k \end{bmatrix} \tag{8}$$

Если невязка сходится:

$$\left\| \begin{matrix} -R_0 \\ -R_\omega \end{matrix} \right\| = 0, \tag{9}$$

то задача решена: $p_0 = p^k$ и $S_0 = S^k$.

5) Следующий шаг Ньютона:

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= p^k + \alpha \triangle p \\ S^{k+1} &= S^k + \alpha \triangle S, \end{aligned} \tag{10}$$

где α - подбирается так, чтобы значения давления и насыщенности не выходили за область допустимых значений.

6) Шаг увеличивается: $k = k + 1$. ё 1 $m = m + 1 \Rightarrow t = \triangle t * m$, когда $\triangle t * m \geq T$ алгоритм заканчивается на последней итерации, если условие не выполнено, то переходим к пункту 1.