Конспект лекций по курсу Оптимальное управление

Оглавление

Глава 1

Оптимальное управление

1.1 Лекция 1

Рекомендованная литература:

1. Киселёв Ю.Н. «Оптимальное управление», 1988
2. Благодатских В.И. «Введение в оптимальное управление», 2001
3. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. «Оптимальное управление. Линейная теория и приложения», 2007
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. «Математическая теория оптимальных процессов», 1966

Теория ОУ родилась в ходе решения задачи о моделировании боя двух самолётов (задачи уклонения/преследования), описываемой системой дифференциальных уравнений. Задача эта до сих пор не решена ввиду её сложности.

Как правило, сложные задачи пытаются упростить. С этой целью можно рассмотреть модель с одним самолётом. Однако и она для нас будет слишком сложной. Поэтому имеет смысл начать с ещё более простой модели — управляемого снаряда, который нужно доставить из точки А в точку Б в наикратчайшее время.

Мы будем иметь дело с моделями, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.1.1 Описание задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

Здесь $x \in E^n$ (x принадлежит пространству $\mathbb{R}^n$, где введено скалярное произведение — евклидову пространству). То есть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i = x_i(t)$.

Аналогично, $u \in E^m$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $u_i = u_i(t)$. При этом их множество значений ограничено: $u_{i\min} \leqslant u_i \leqslant u_{i\max}$, $u \in U \subset E^m$. Множество U называется **областью управления**. Как правило, оно замкнуто. Пример — $U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \dfrac{u_1^2}{a^2} + \dfrac{u_2^2}{b^2} = 1 \right\}$.

Таким образом, можно переписать уравнение в виде

$$\dot{x} = f(x, u(t)) = F(x, t) \tag{1.2}$$

Из какого класса выбираются функции $u_i(t)$? Наиболее популярны следующие варианты:

- кусочно-непрерывные функции
- кусочно-постоянные функции
- измеримые функции

Первые два часто используются в приложениях. С первым случаем есть некоторая тонкость в определении. В математическом анализе под кусочно-непрерывной функцией понимается следующее:

Определение. Функция $u(t)$ называется **кусочно-непрерывной** на отрезке $[t_0, t_1]$, если она непрерывна на нём всюду за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода.

В оптимальном управлении для удобства принято считать, что кусочно-непрерывная функция **непрерывна в концах отрезка** $[t_0, t_1]$.
Второй может соответствовать простейшим прикладным случаям, отражая, например, состояние управляющих электромагнитов: 0 — выключен, 1 — включен. В этом случае $U = \{0, 1\}$ *(замкнуто!)*, и функции $u_i(t)$ принимают лишь два возможных значения.
Третий случай нужен в основном в теоретических исследованиях. В целом, можно выбрать и какой-нибудь другой класс, например, гладких функций.

Выбрав область управления U и класс, из которого мы будем брать функции, мы определяем **класс допустимых управлений** D_U. Например, $D_U = \left\{ u(t) \;\middle|\; \begin{cases} u(t) \in U \; \forall\, t \in [t_0, t_1] \\ u(t) \in C[t_0, t_1] \end{cases} \right\}$.

Для решения систем дифференциальных уравнений хотелось бы применить теоремы о существовании и единственности решений, но ввиду того, что рассматриваемые классы достаточно широки, не всегда соблюдаются условия теорем — например, липшицевость функции $F(x,t) \equiv f(x,u(t))$. Приходится либо накладывать дополнительные ограничения на условие, либо вообще по-другому вводить понятие решения дифференциального уравнения.

Конкретизируем задачу. Выберем некоторую фиксированную функцию $u = u(t) \in D_U$. Пусть мы хотим, чтобы в начальный момент времени t_0 точка $x_0 = x(t_0)$ принадлежала некоторому множеству $M_0 \subset E^n$, а в конечный момент времени t_1 точка $x(t_1)$ принадлежала множеству $M_1 \subset E^n$. Тогда мы должны решить, по сути, некоторую краевую задачу с условиями

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \end{cases} \tag{1.3}$$

Моменты времени t_0, t_1 могут быть как фиксированными, так и свободными. Обычно начальный момент t_0 фиксирован, а t_1 свободно. Если решение такой задачи существует, то пара $\big(u(t), x(t)\big)$ называется **допустимым процессом**.

Но как надо выбирать функцию u? Для этого вводится **функционал качества**:

$$J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \tag{1.4}$$

Выберем наиболее «качественную» функцию $u(t)$ — ту, на которой достигается минимум этого функционала (можно было бы искать максимум, но эти задачи эквивалентны и сводятся друг к другу умножением $f^0(x,u)$ на -1). Т.е. решим задачу

$$J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min_{u \in D_U} \tag{1.5}$$

где x — решение уравнения 1.3, соответствующего функции u.

Т.е. полностью наша задача будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.6}$$

Однако решить её в таком виде в общем случае весьма сложно.

1.1.2 Линейный случай

Разберёмся сначала с более простым случаем. Предположим, что функция $f(x,u)$ имеет вид

$$f(x,u) = Ax + Bu, \tag{1.7}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Таким образом, в правой части нет произведений вида $x_i u_j$. На самом деле, можно даже предположить, что функция имеет вид

$$f(x,u) = Ax + u \tag{1.8}$$

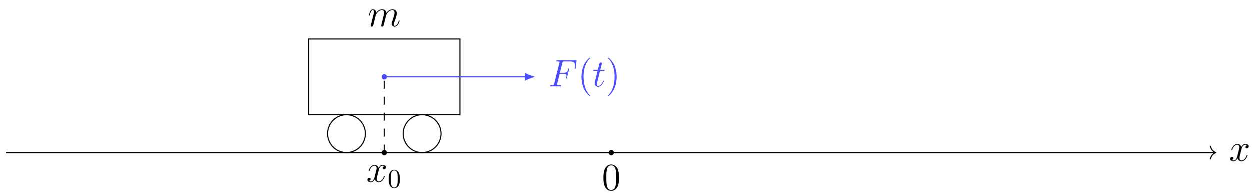
так как всегда можно сделать замену $v = Bu$. Чтобы не менять обозначения, предположим, что мы уже сделали эту замену и $u \in E^n$.

Кроме того, положим $f^0(x,u) \equiv 1$. Тогда функционал качества приобретает очень простой вид: $J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} 1\,dt = t_1 - t_0$. Таким образом, минимизируя функционал качества, мы находим такую функцию $u(t)$, при которой точка $x(t)$ быстрейшим образом попадает из множества M_0 в множество M_1.

Мы приходим к формулировке **линейной задачи быстродействия**:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.9}$$

1.1.3 Модель тележки



Рассмотрим движение тележки по прямой под действием внешней силы $F(t)$. $x = x(t)$ — координата. Будем считать, что $F_{\min} \leqslant F(t) \leqslant F_{\max}\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$ (что логично — в реальном мире сила ограничена). Пусть мы хотим доставить тележку в точку $x = 0$ и остановить её там. Тогда краевые условия выглядят следующим образом:

$$\begin{matrix} x(t_0) = x_0, & \dot{x}(t_0) = x_{01} \\ x(t_1) = 0, & \dot{x}(t_1) = 0 \end{matrix} \tag{1.10}$$

Вспомним второй закон Ньютона: $m\ddot{x} = F$. Перепишем это в виде $\ddot{x} = \dfrac{F}{m}$ и обозначим $v = \dfrac{F}{m}$. Покажем, что уравнение $\ddot{x} = v$ можно переписать в виде, аналогичном 1.9. Для этого введём переменные $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$. Тогда $\dot{x_1} = x_2,\ \dot{x_2} = \ddot{x} = v$. Для простоты считаем, что $\dfrac{F_{\min}}{m} = -1, \dfrac{F_{\max}}{m} = 1$.

Теперь введём матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$. Тогда область управления $U = 0 \times [-1, 1]$ *(замкнута!)*.

С учётом этих обозначений задачу о тележке можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{u} \\ \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{01} \end{pmatrix} \\ \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.11}$$

Таким образом, модель тележки сводится к линейной задаче быстродействия.

1.2 Лекция 2

Напомним формулировки. Основная задача (будет решена в следующем семестре):

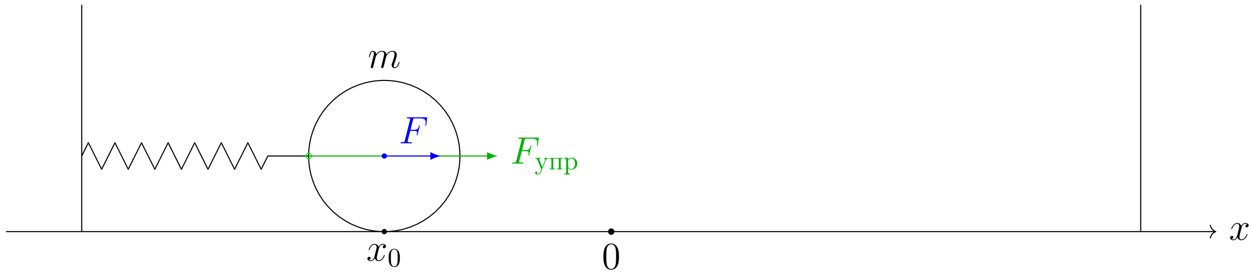
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \quad x \in E^n,\ u \in E^m \\ x(t_0) \in M_0 \subset E^n \\ x(t_1) \in M_1 \subset E^n \\ J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x, u)\, dt \to \min\limits_{u \in D_U}, \quad U \subset E^m \end{cases} \tag{1.12}$$

Упрощённая задача — задача линейного быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \subset E^n \\ x(t_1) \in M_1 \subset E^n \\ J = t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U}, \quad U \subset E^n \end{cases} \tag{1.13}$$

Приведём ещё один пример задачи, описываемой линейной системой.

1.2.1 Модель пружинного маятника



Запишем второй закон Ньютона для пружинного маятника, на который действует сила упругости $F_{упр} = -kx$ и внешняя сила F.

$$m\ddot{x} = -kx + F \tag{1.14}$$

Опять же, хотим доставить маятник в точку $x = 0$ и остановить его там.

$$\begin{matrix} x(t_0) = x_0, & \dot{x}(t_0) = x_{01} \\ x(t_1) = 0, & \dot{x}(t_1) = 0 \end{matrix} \tag{1.15}$$

Преобразуем уравнение:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{F}{m} \tag{1.16}$$

Сделаем замены $\dfrac{k}{m} = \omega^2$, $\dfrac{F}{m} = v$. Для простоты считаем, что $\omega = 1, |v| \leqslant 1$.

Тогда $\ddot{x} = -x + v$. Как и в прошлой задаче, введём переменные $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$. Тогда

$$\dot{x_1} = x_2 \tag{1.17}$$

$$\dot{x_2} = -x_1 + v \tag{1.18}$$

Обозначим $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, а также $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда можно записать уравнение 1.17 в виде

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{u} \\ \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{01} \end{pmatrix} \\ \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.19}$$

В этом курсе будут обсуждаться следующие темы:

1. Управляемость (т.е. существование хотя бы одного допустимого процесса $\big(u(t), x(t)\big)$ (т.е. эта штука вообще управляется?))
2. Теоремы существования.
3. Необходимые условия оптимальности.
4. Достаточные условия оптимальности.
5. Теоремы единственности.

В ходе курса нам придётся решать задачу минимизации некоторого функционала $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt$. Может возникнуть желание решать их методами вариационного исчисления. Однако, оказывается, что зачастую это невозможно. Причина — в замкнутости области управления U.

Задачи вариационного исчисления решались на открытых множествах, и это позволяло ввести **вариацию функции** δf. При этом $f + \delta f$ всё ещё принадлежала исходному множеству. В задачах оптимального управления может встретиться, например, множество $U = \big\{0, 1\big\}$. В этой области будут лежать лишь кусочно-постоянные функции со значениями 0 и 1, и почти любая вариация выведет нас за пределы области управления.

Кроме того, решения задач оптимального управления очень часто проходят именно по границе множества U, что только усугубляет описанную выше проблему.

Таким образом, мы вынуждены искать другие методы. Для этого нам нужно познакомиться с элементами выпуклого анализа.

1.2.2 Элементы выпуклого анализа

В евклидовом пространстве E^n есть скалярное произведение $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Это позволяет нам ввести метрику и расстояние:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{1.20}$$
$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{1.21}$$

Нам потребуется определение шара:

Определение. Замкнутым шаром в E^n называется множество

$$S_r(a) = \left\{x \in E^n \colon \|x - a\| \leqslant r\right\}. \tag{1.22}$$

А кроме того, ещё целый блок определений, касающийся свойств множеств в E^n.

1. f — *внутренняя* точка множества $F \in E^n$, если $\exists\, \varepsilon > 0 \colon S_\varepsilon(f) \subset F$.
2. $\operatorname{int} F$ — множество всех внутренних точек множества F (или *внутренность* множества F).
3. f — *предельная* точка множества $F \in E^n$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $S_\varepsilon(f) \cap F \neq \varnothing$.
4. F — *замкнутое* множество, если оно содержит все свои предельные точки.
5. $\overline{F}$ — минимальное замкнутое множество, содержащее F (или *замыкание* множества F).
6. $\partial F = F \setminus \operatorname{int} F$ — *граница* множества F.
7. F ограничено, если $\exists\, R > 0 \colon F \subset S_R(0)$.
8. Ограниченное и замкнутое множество в E^n — компакт.
9. $\Omega(E^n)$ — множество непустых компактов в E^n.
10. Пусть $a, b \in E^n$. Тогда $[a, b] = \left\{x \in E^n \,\middle|\, x = \lambda a + (1 - \lambda) b,\ \lambda \in [0, 1]\right\}$.
11. Множество F называется выпуклым, если $\forall\, a, b \in F \implies [a, b] \subset F$.
12. Пусть $F \in E^n$. Тогда $\operatorname{conv} F$ — минимальное выпуклое множество, содержащее F (*минимальная выпуклая оболочка*).

13. $\operatorname{conv}\Omega(E^n)$ — множество непустых выпуклых компактов в E^n.

14. *Модуль* множества $F \in \Omega(E^n)$: $|F| = \max\limits_{x \in F} |x|$. Для ограниченного F — $|F| = \sup\limits_{x \in F} |x|$.

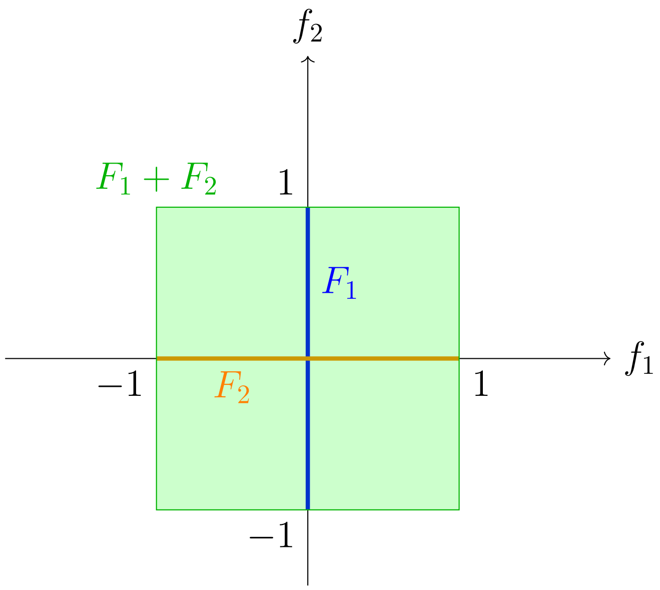
Сложение множеств

Определение. Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. Введём операцию сложения множеств:

$$F_1 + F_2 = \left\{ f = f_1 + f_2 \,\middle|\, f_1 \in F,\ f_2 \in F \right\}.$$

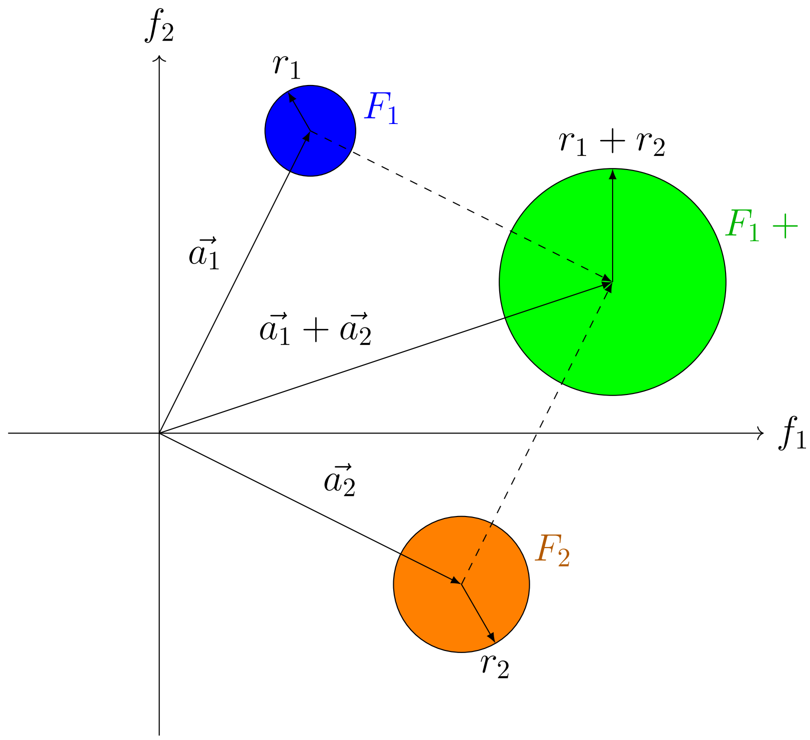
Пример. Пусть $F_1 = \{f_1\} \subset E^n$, $F_2 \in \Omega(E^n)$. Тогда $F_1 + F_2 = f_1 + F_2$ — параллельный перенос на вектор $f_1 \in E^n$.

Пример. Пусть $F_1 = \left\{ f \in E^2 \colon f_1 = 0, |f_2| \leqslant 1 \right\}$,
$F_2 = \left\{ f \in E^2 \colon |f_1| \leqslant 1, f_2 = 0 \right\}$ — отрезки.
Тогда $F_1 + F_2 = \left\{ f \in E^2 \colon |f_1| \leqslant 1, |f_2| \leqslant 1 \right\}$ — квадрат.



Замечание. *Здесь f_1 и f_2 — первая и вторая координаты двумерного вектора, а не элементы множеств F_1 и F_2, как было в определении суммы множеств.*

Пример. Пусть $F_1 = S_{r_1}(a_1)$, $F_2 = S_{r_2}(a_2)$. Тогда $F_1 + F_2 = S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.



Докажем это. Для того, чтобы показать равенство произвольных множеств A и B, достаточно доказать двустроннее вложение: $A \subset B$ и $B \subset A$.

- $S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) \subset S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.

  Возьмём произвольный $f \in S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$. По определению суммы множеств это значит, что существуют такие $g \in S_{r_1}(a_1), h \in S_{r_2}(a_2)$, что $g + h = f$. Тогда

  $$\|f - a_1 - a_2\| = \|g + h - a_1 - a_2\| \leqslant \|g - a_1\| + \|h - a_2\| \leqslant r_1 + r_2.$$

  Таким образом, $f \in S_{r_1+r_1}(a_1 + a_2) = \big\{f \in E^n \colon \|f - a_1 - a_2\| \leqslant r_1 + r_2\big\}$. В силу произвольности выбора f получаем, что $S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) \subset S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.

- $S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2) \subset S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$.

  Возьмём произвольный $f \in S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$. Легко видеть, что $\tilde{f} = f - a_1 - a_2 \in S_{r_1+r_2}(0)$:

  $$\|\tilde{f}\| = \|f - a_1 - a_2\| \leqslant r_1 + r_2.$$

  Положим теперь
  $$\tilde{g} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}\tilde{f}, \quad \tilde{h} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\tilde{f}.$$

  Очевидно, что $\tilde{g} + \tilde{h} = \tilde{f}$. При этом $\tilde{g} \in S_{r_1}(0)$, ведь $\|\tilde{g}\| = \dfrac{r_1}{r_1 + r_2}\|\tilde{f}\| \leqslant$

$\dfrac{r_1}{r_1 + r_2}(r_1 + r_2) = r_1$. Аналогично $\tilde{h} \in S_{r_2}(0)$.

Если мы введём g и h как

$$g = \tilde{g} + a_1,\ h = \tilde{h} + a_2$$

то $g \in S_{r_1}(a_1),\ h \in S_{r_2}(a_2)$ и

$$g + h = \tilde{g} + \tilde{h} + a_1 + a_2 = \tilde{f} + a_1 + a_2 = f - a_1 - a_2 + a_1 + a_2 = f$$

Но это значит, что $f \in S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$. В силу произвольности f заключаем, что $S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2) \subset S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$.

Покажем, что класс $\Omega(E^n)$ замкнут относительно сложения, т.е. $\forall F_1, F_2 \in \Omega(E^n) \implies F_1 + F_2 \in \Omega(E^n)$. Для этого достаточно показать, что множество $F_1 + F_2$ замкнуто и ограничено, так как в конечномерном случае это равносильно компактности. Ограниченность очевидна, так как

$$\forall f \in F_1 + F_2 \quad \|f\| = \|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$$

а множества F_1, F_2 ограничены.

Покажем замкнутость. Возьмём произвольную сходящуюся последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \xrightarrow[k\to\infty]{} x, x_k \in F_1 + F_2$. Нам нужно показать, что $x \in F_1 + F_2$.

Каждый член последовательности можно представить в виде $x_k = y_k + z_k,\ y_k \in F_1,\ z_k \in F_2$. Таким образом, получаем две последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$. В силу компактности множества F_1 можем выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_m}\}_{m=1}^{+\infty} \xrightarrow[m\to\infty]{} y \in F_1$. Возьмём в последовательности $\{z_n\}$ члены с номерами $n_m, m \in \mathbb{N}$. В силу компактности множества F_2 можем выделить подпоследовательность $\{z_{n_{m_k}}\}_{k=1}^{+\infty} \xrightarrow[k\to\infty]{} z \in F_2$.

Тогда последовательность $x_{n_{m_k}} = y_{n_{m_k}} + z_{n_{m_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} y + z$. Но последовательность $\{x_n\}$ по условию сходится к x, а значит, все её подпоследовательности сходятся к тому же пределу. Таким образом, $x = y + z \in F_1 + F_2$, что и требовалось доказать.

1.3 Лекция 3

1.3.1 Сложение множеств. Умножение множеств на число и на матрицу

Сложение непустых компактов

На прошлой лекции мы ввели операцию сложения множеств: если $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$, то

$$F_1 + F_2 = \big\{ f \in E^n \colon f = f_1 + f_2, f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \big\}$$

где $\Omega(E^n)$ — множество непустых компактов в E^n. Также мы доказали, что $\Omega(E^n)$ замкнуто относительно сложения, то есть

$$F_1, F_2 \in \Omega(E^n) \implies F_1 + F_2 \in \Omega(E^n).$$

Утверждение. *Множество непустых выпуклых компактов замкнуто относительно операции сложения, то есть $F_1, F_2 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$, то $F_1 + F_2 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$.*

Доказательство. Действительно, пусть $x, y \in F_1 + F_2$. Тогда

$$\begin{aligned} x &= a_1 + b_1,\ a_1 \in F_1,\ b_1 \in F_2 \\ y &= a_2 + b_2,\ a_2 \in F_1,\ b_2 \in F_2 \end{aligned}$$

Возьмём $\lambda \in [0, 1]$.

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda(a_1 + b_1) + (1-\lambda)(a_2 + b_2) = \underbrace{\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2}_{\in F_2}$$

Таким образом, любая точка из отрезка $[x, y]$ представляется в виде суммы элементов из F_1 и F_2, что и означает, что $[x, y] \subset F_1 + F_2$. В силу произвольности x, y делаем вывод, что $F_1 + F_2 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$. ∎

Операция сложения множеств:

1. Коммутативна: $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$
2. Ассоциативна: $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$
3. Существует нейтральный элемент $e = \big\{0\big\}$: $F + \big\{0\big\} = F \quad \forall F$.

При этом не всегда существует такое G, что $F + G = \big\{0\big\}$. *(Точнее, такого G почти никогда не существует).*

Умножение множества на число

Определение. Пусть $\lambda \in E^1$, $F \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$\lambda \cdot F = \left\{\lambda x \,\middle|\, x \in F\right\}. \tag{1.23}$$

Легко проверяются следующие утверждения:

- $F \in \Omega(E^n) \implies \lambda F \in \Omega(E^n)$.
- $F \in \operatorname{conv}\Omega(E^n) \implies \lambda F \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$.
- $\lambda \cdot S_r(0) = S_{|\lambda r|}(0)$.

Операция умножения множества на число:

1. Ассоциативна: $(\alpha\beta)F = \alpha(\beta F)$
2. Существует нейтральный элемент $e = 1$: $1 \cdot F = F \quad \forall F$
3. Дистрибутивно относительно сложения множеств: $\lambda(F + G) = \lambda F + \lambda G$

При этом $(\alpha + \beta)F$, вообще говоря, $\neq \alpha F + \beta F$:

$$\begin{gathered} F = S_r(0), \alpha = 1, \beta = -1 \\ (1 + (-1)) \cdot S_r(0) = \left\{0\right\} \\ 1 \cdot S_r(0) + (-1) \cdot S_r(0) = S_r(0) + S_r(0) = S_{2r}(0) \end{gathered}$$

Сложение непустых выпуклых компактов

Рассмотрим класс $\operatorname{conv}\Omega(E^n)$. Пусть $\alpha, \beta \geqslant 0$. Оказывается, что тогда $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$.

Доказательство. Покажем взаимное вложение.

$(\alpha + \beta)F \subset \alpha F + \beta F$:

$$x \in (\alpha + \beta)F \implies \exists f \in F\colon x = (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f \in \alpha F, \beta F$$

$(\alpha + \beta)F \supset \alpha F + \beta F$:

$$\begin{aligned} &x \in \alpha F + \beta F \implies \exists f_1, f_2 \in F\colon x = \alpha f_1 + \beta f_2 = \\ &\qquad (\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} f_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} f_2\right) = (\alpha + \beta)\underbrace{(\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2)}_{\in F} \in (\alpha + \beta)F \end{aligned}$$

Заметим, что здесь мы существенно использовали то обстоятельство, что $\alpha, \beta \geqslant 0$. В противном случае λ могло выйти за пределы отрезка $[0, 1]$. ■

Геометрически можно интерпретировать множество выпуклых компактов как конус (точнее, множество векторов, принадлежащих конусу) - в нём тоже выполняются все аксиомы линейного пространства, кроме существования обратного элемента.

Умножение множества на матрицу

Определение. Пусть $F \in \Omega(E^n), A \in E^{n\times n}$. Тогда

$$AF = \{z \in E^n\colon z = Af, f \in F\}. \tag{1.24}$$

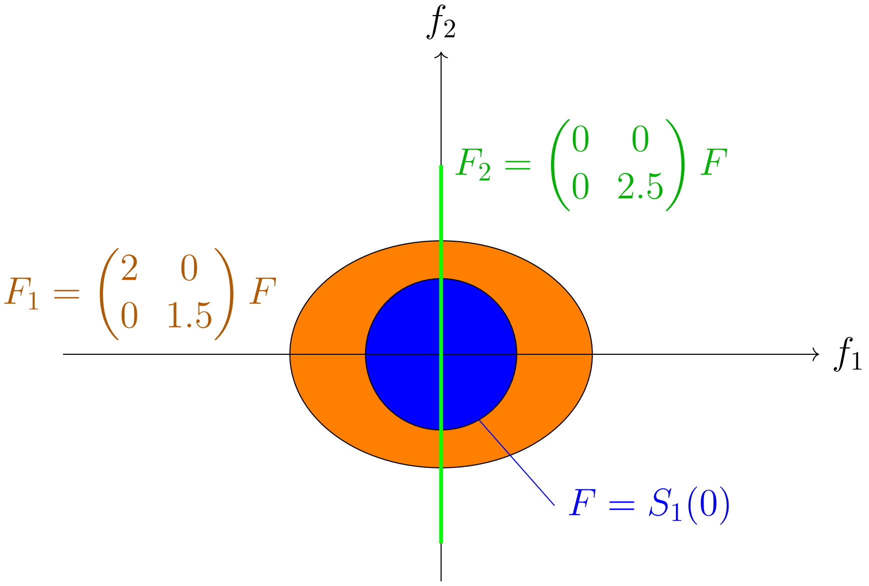
Например, если $A = \lambda I$, то $AF = \lambda F$.
Легко проверить следующие утверждения:

- $F \in \Omega(E^n) \implies AF \in \Omega(E^n)$.
- $F \in \operatorname{conv}\Omega(E^n) \implies AF \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$.

Свойства:

1. $(AB)F = A(BF)$
2. $IF = F$
3. $A(F+G) = AF + AG$
4. $(A+B)F \subset AF + BF$

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a \neq 0, b \neq 0, F = S_1(0)$.
Тогда $AF = \left\{f \in E^2\colon \left(\frac{f_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{b}\right)^2 \leqslant 1\right\}$.
Если $a = 0$, то $AF = \{f \in E^2\colon f_1 = 0, |f_2| \leqslant |b|\}$ — отрезок.



1.3.2 Метрика

Ввести на $\Omega(E^n)$ или $\operatorname{conv}\Omega(E^n)$ скалярное произведение или норму нельзя, так как они не являются линейными пространствами. Но можно ввести метрику.

Определение. Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. **Метрика Хаусдорфа**:

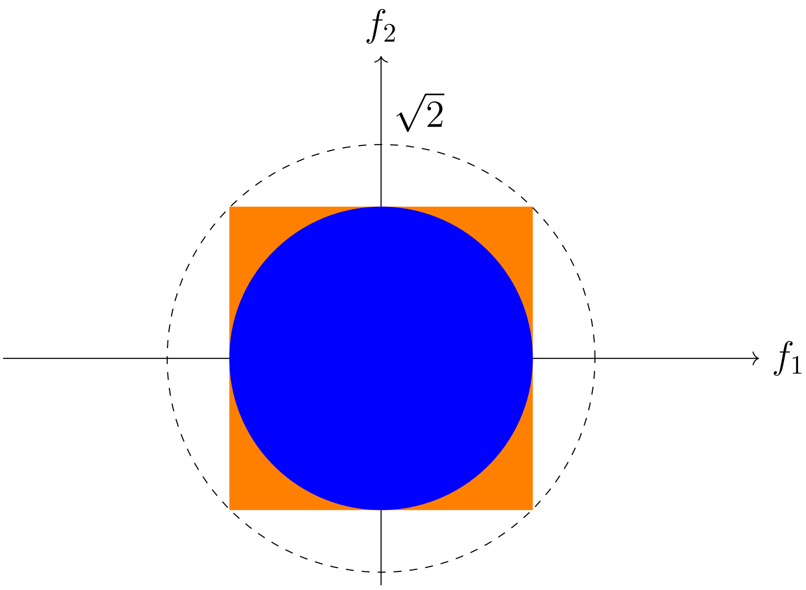
$$h(F_1, F_2) = \min_{r \geqslant 0}\big\{r \bigm| F_1 \subset F_2 + S_r(0),\ F_2 \subset F_1 + S_r(0)\big\} \tag{1.25}$$

Пример. Пусть $F_1 = \big\{0\big\}, F_2 = S_1(0) \subset E^2$. Очевидно, что

$$\begin{cases} F_1 \subset F_2 + S_r(0) & \forall r \geqslant 0 \\ F_2 \subset F_1 + S_r(0) & \forall r \geqslant 1 \end{cases}$$

Значит, $h(F_1, F_2) = 1$.

Пример. Пусть $F_1 = \big\{|f_1| \leqslant 1, |f_2| \leqslant 1\big\}$ — квадрат, $F_2 = S_1(0)$. Шар, очевидно, всегда вложен в квадрат: $F_2 \subset F_1 + S_r(0)$ $\forall r \geqslant 0$. При этом $F_1 \subset F_2 + S_r(0)$ $\forall r \geqslant \sqrt{2} - 1$.
Значит, $h(F_1, F_2) = \sqrt{2} - 1$.



Пример. $h\big(\big\{0\big\}, F\big) = |F|$ $\forall F \in \Omega(E^n)$.

Докажем, что это действительно метрика. Симметричность $(h(F_1, F_2) = h(F_2, F_1))$ и положительная определённость $(h(F_1, F_2) \geqslant 0, h(F_1, F_2) = 0 \iff$

$F_1 = F_2$) сразу следуют и определения. Введём обозначения для расстояний:

$$\begin{cases} h(F_1, F_2) = h_{12}, \\ h(F_1, F_3) = h_{13}, \\ h(F_3, F_2) = h_{23} \end{cases}$$

Далее,

$$F_1 \subset F_3 + S_{h_{13}}(0), \quad F_3 \subset F_2 + S_{h_{23}}(0)$$
$$F_1 \subset F_3 + S_{h_{13}}(0) \subset F_2 + S_{h_{23}}(0) + S_{h_{13}}(0) = F_2 + S_{h_{23}+h_{13}}(0) \implies$$
$$h_{12} \leqslant h_{13} + h_{23}$$

Вернёмся к компактам и выпуклым оболочкам.

Определение. Отрезок $[a, b] = \big\{z \in E^n \colon z = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in [0, 1]\big\}$.

Определение. Множество F выпукло, если $\forall a, b \in F \implies [a, b] \in F$.

Определение. G — выпуклая оболочка множества F, если

- G выпукло;
- $F \subset G$.

Определение. $H = \operatorname{conv} F$ — минимальная выпуклая оболочка множества F, если

- H выпукло;
- $F \subset H$;
- $\forall$ выпуклой оболочки G верно $H \subset G$.

Замечание. Минимальная выпуклая оболочка — это пересечение всех выпуклых оболочек множества F.

Пример. Выпуклая оболочка трёх точек, не лежащих на одной прямой — треугольник

Как строить выпуклую оболочку?

1. Подход Каратеодори:

$$\operatorname{conv} F = \Big\{z \in E^n \colon \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i = 1 \; \forall f_i \in F\Big\},$$

   где m пока проолзвольное.

Теорема Каратеодори. *Для построения выпуклой оболочки описанным выше методом достаточно взять $m = n + 1$, где $n = \operatorname{Dim} E^n$.*

2. Геометрический подход (подход Болтянского):

Утверждение. *Пусть $F \in E^n \setminus \varnothing$.*

$$\begin{aligned} &F_0 = F. \\ &F_1 = \big\{[x, y] \colon x, y \in F_0\big\}. \\ &F_2 = \big\{[x, y] \colon x, y \in F_1\big\}. \\ &\ldots \end{aligned}$$

Тогда $\operatorname{conv} F = H = \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} F_m$.

Доказательство. Надо показать, что

(a) $F \subset H$

(b) H выпукло

(c) $\forall G \supset F, G$ выпукло $\implies H \subset G$.

Заметим, что $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset H$. Отсюда очевидно, что $H \supset F = F_0$.

$\forall x \in H \implies \exists m_1 \in \mathbb{N} \colon x \in F_{m_1}$. Аналогично, $\forall y \in H \implies \exists m_2 \mathbb{N} \colon x \in F_{m_2}$. Положим $m = \max(m_1, m_2)$. Тогда $x, y \in F_m \implies [x, y] \subset F_{m+1} \subset H$. То есть, мы показали, что для произвольных $x, y \in H$ верно, что $[x, y] \in H$. Значит, H выпукло.

Возьмём любое выпуклое $G \supset F$. В силу выпуклости G: $F_0 \subset G \implies F_1 \subset G \implies \ldots$ Тогда $H \subset G$. ∎

Задача (о стабилизации цепочки множеств):
$\exists l = l(n, F) \leqslant n \colon F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_l = F_{l+1} = F_{l+2} = \ldots = H$.

Отрезок строится за 1 шаг, треугольник за два шага. Рассмотрим 4 точки в пространстве, не лежащие в одной плоскости (тетраэдр).
$F_0 = \big\{a_0, a_1, a_2, a_3\big\}$ — вершины.
$F_1 = \big\{[a_0, a_1], [a_0, a_2], [a_0, a_3], [a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_2, a_3]\big\}$ — рёбра.
$F_2 =$ тетраэдр (за счёт соединения противоположных рёбер).

Текущая и неулучшаемая оценка числа шагов для построения выпуклой оболочки — $l = \lceil \log_2 n \rceil + 1$.

1.4 Лекция 4

1.4.1 Лемма об отделимости

На прошлой лекции мы показали, что

$$H = \operatorname{conv} F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \tag{1.26}$$

где $F = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$.

Напомним, как строились эти множества, и заодно перепишем это в немного другой форме:

$$F_n = \bigcup_{x,y \in F_{n-1}} [x, y] = \bigcup_{x,y \in F_{n-1}} \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \left\{\lambda x + (1-\lambda)y\right\} =$$
$$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \bigcup_{x,y \in F_{n-1}} \left\{\lambda x + (1-\lambda)y\right\} =$$
$$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \left\{\lambda F + (1-\lambda)F\right\}$$

$\exists s = s(n, F)\colon F_s = F_{s+1} = \ldots = H$. Кроме того, $F \in \Omega(E^n) \implies \operatorname{conv} F \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$.

Утверждение (Лемма об отделимости)**.** *Пусть* $H \in \operatorname{conv} \Omega(E^n), x_0 \notin H$. *Тогда*

$$\exists \psi \in E^n \setminus \left\{0\right\}\colon (h - x_0, \psi) < 0,\ \forall h \in H.$$

Или, эквивалентно,

$$\exists \psi \in S_1(0)\colon (h - x_0, \psi) < 0,\ \forall h \in H.$$

Доказательство. Найдём $\min\limits_{h \in H} \|h - x_0\| = \|h_0 - x_0\| > 0$. Положим $\psi = x_0 - h_0$. Тогда

$$(h - x_0, x_0 - h_0) < 0,\ \forall h \in H.$$

Или

$$(h - x_0, h_0 - x_0) > 0,\ \forall h \in H.$$

Действительно, при $h = h_0$

$$(h_0 - x_0, h_0 - x_0) = \|h_0 - x_0\|^2 > 0,\ \forall h \in H.$$

Иначе для любого $h \in H$ рассмотрим вектор $h(\lambda) = \lambda h + (1-\lambda)h_0,\ \lambda \in [0, 1]$. Так как h_0 по определению является ближайшим к x_0 вектором из H, можем сказать, что $\|h(\lambda) - x_0\|^2 \geqslant \|h_0 - x_0\|^2$. Распишем норму как скалярное произведение:

$$
\begin{gathered}
(\lambda h + (1-\lambda)h_0 - x_0, \lambda h + (1-\lambda)h_0 - x_0) \geqslant \|h_0 - x_0\|^2 \\
(\lambda(h - h_0) + h_0 - x_0, \lambda(h - h_0) + h_0 - x_0) \geqslant \|h_0 - x_0\|^2 \\
\lambda^2\|h - h_0\|^2 + 2\lambda(h - h_0, h_0 - x_0) + \|h_0 - x_0\|^2 \geqslant \|h_0 - x_0\|^2 \\
\lambda^2\|h - h_0\|^2 + 2\lambda(h - h_0, h_0 - x_0) \geqslant 0
\end{gathered}
$$

Для $\lambda \in (0, 1]$:

$$
\lambda\|h - h_0\|^2 + 2(h - h_0, h_0 - x_0) \geqslant 0
$$

Устремим λ к нулю:

$$
\lambda\|h - h_0\|^2 + 2(h - h_0, h_0 - x_0) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 2(h - h_0, h_0 - x_0) \geqslant 0, \ \forall h \in H
$$

Значит,

$$
\begin{gathered}
(h - x_0, h_0 - x_0) = (h - h_0 + h_0 - x_0, h_0 - x_0) = \\
(h - h_0, h_0 - x_0) + \|h_0 - x_0\|^2 \geqslant 0.
\end{gathered}
$$

Что и требовалось доказать.

Для того, чтобы ψ принадлежал единичной сфере, достаточно его нормировать — ведь $h_0 \neq x_0 \implies \psi \neq 0$. ■

Можно отказаться от замкнутости, беря замыкание исходного множества. Тогда знак неравенства станет нестрогим. Можно также отказаться от ограниченности, рассматривая пересечение исходного множества с шаром $S_{\|h - x_0\|}(x_0)$. В доказательстве мы используем ближайший к x_0 элемент h_0, а любые элементы, лежащие вне пересечения, будут дальше от x_0.

От выпуклости отказаться нельзя.

Если $x_0 \in \partial H$, то $\exists \psi\colon (h - x_0, \psi) \leqslant 0$. Действительно,

$$
\begin{gathered}
x_0 \in \partial H \implies \exists \{x_k\} \notin H\colon x_k \to x_0. \\
\forall x_k \ \exists \psi_k \in S_1(0)\colon (h - x_0, \psi_k) < 0 \implies \\
\exists \psi_0\colon (h - x_0, \psi_0) \leqslant 0 \quad \forall h \in H.
\end{gathered}
$$

Это можно ещё записать как

$$
\exists \psi_0\colon \max_{h \in H}(h, \psi_0) \leqslant (x_0, \psi_0).
$$

1.4.2 Опорная функция

Определение. Пусть $F \in \Omega(E^n), \psi \in E^n$. Опорная функция —

$$C(F,\psi) = \max_{f\in F}(f,\psi). \tag{1.27}$$

Если $\exists R > 0\colon F \subset E^n\colon F \subset S_R(0)$, то

$$C(F,\psi) = \sup_{f\in F}(f,\psi).$$

Пример. Если $F = \{f\}$, то $C(F,\psi) = (f,\psi)$. Это один из немногих примеров, где опорная функция дифферецируема.

Пример. Если $F = S_1(0)$, то $C(F,\psi) = \max\limits_{f\in S_1(0)}(f,\psi)$. Если выбрать $\psi \in S_1(0)$, то задача сводится к нахождению максимальной проекции. Значит,

$$C(S_1(0),\psi) = \left(\frac{\psi}{\|\psi\|},\psi\right) = \frac{1}{\|\psi\|}(\psi,\psi) = \|\psi\|.$$

Пример. Если $F = S_1(0) \setminus \partial S_1(0)$, то $C(F,\psi) = \sup\limits_{f\in S_1(0)}(f,\psi) = \|\psi\|$.

Пример. Если $F = \partial S_1(0) = \{\psi\colon \|\psi\| = 1\}$, то вновь $C(F,\psi) = \|\psi\|$. Заметим, что норма не является дифференцируемой в нуле.

Пример. Пусть $F = \{f \in E^2\colon |f_1| \leqslant 1, |f_2| \leqslant 1\}$ — квадрат.

$$\begin{gathered} C(F,\psi) = \max_{f\in F}(f,\psi) = \\ = \max_{f\in F}(f_1\psi_1 + f_2\psi_2) = \\ = \max_{|f_1|\leqslant 1}(f_1\psi_1) + \max_{|f_2|\leqslant 1}(f_2\psi_2) = \\ = \begin{cases} \psi_1, & \psi_1 > 0 \\ 0, & \psi_1 = 0 \\ -\psi_1, & \psi_1 < 0 \end{cases} + \begin{cases} \psi_2, & \psi_2 > 0 \\ 0, & \psi_2 = 0 \\ -\psi_2, & \psi_2 < 0 \end{cases} = |\psi_1| + |\psi_2| \end{gathered}$$

Соответственно, здесь нет дифференцируемости на осях.

Определение. Опорное множество:

$$\mathcal{U}(F,\psi) = \{f \in F\colon (f,\psi) = C(F,\psi)\}$$

Определение. Опорная гиперплоскость:

$$\Gamma_\psi = \left\{ f \in E^n \colon (f, \psi) = C(F, \psi) \right\}$$

Замечание. $\mathcal{U}(F, \psi) = F \cap \Gamma_\psi$.

Свойства опорной функции

Очевидно, $|C(F, \psi)| = \sup\limits_{f \in F} (f, \psi) \leqslant \sup\limits_{f \in F} \|f\| \cdot \|\psi\| \leqslant |F| \cdot \|\psi\|$.

1. F — ограниченное множество, $\psi \in E^n \implies$

$$C(F, \psi) = C(\overline{F}, \psi).$$

2. Однородность степени 1 по второму аргументу:

$$C(F, \lambda\psi) = \lambda C(F, \psi), \quad \forall \lambda > 0$$

3. Полуаддитивность по второму аргументу:

$$C(F, \psi_1 + \psi_2) \leqslant C(F, \psi_1) + C(F, \psi_2), \\ \forall F \in \Omega(E^n), \forall \psi_1, \psi_2 \in E^n$$

4. Условие Липшица по второму аргументу:

$$|C(F, \psi_1) - C(F, \psi_2)| \leqslant |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|$$

   Замечание. $C(F, \cdot) \colon E^n \mapsto E^n$ непрерывна по ψ.

   Замечание. $C(F, \cdot) \colon E^n \mapsto E^n$ выпукла:

$$C(F, \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2) \leqslant C(F, \lambda\psi_1) + C(F, (1-\lambda)\psi_2) = \\ \lambda C(F, \psi_1) + (1-\lambda) C(F, \psi_2).$$

5. Пусть $A \in E^{n \times n}, F \in \Omega(E^n), \psi \in E^n$.

$$C(AF, \psi) = C(F, A^*\psi).$$

6. Положительная однородность степени 1 по первому аргументу:

$$C(\lambda F, \psi) = \lambda C(F, \psi), \quad \lambda > 0.$$

7. Аддитивность по первому аргументу:

$$C(F_1 + F_2, \psi) = C(F_1, \psi) + (F_2, \psi), \quad F_1, F_2 \in \Omega(E^n).$$

Замечание. Пусть $\alpha, \beta \geqslant 0,\ F, G \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$C(\alpha F + \beta G, \psi) = \alpha C(F, \psi) + \beta C(G, \psi).$$

Доказательства.

1. Если максимум в определении опорной функции достигается на предельной точке f_0 множества F, $f_0 \notin F$, то существует последовательность $\{f_k\} \to f_0$, такая что

$$(f_0 - x_0, \psi) - \frac{1}{k} < (f_k - x_0, \psi) \leqslant (f_0 - x_0, \psi).$$

С одной стороны, $C(F, \psi) \leqslant (f_0 - x_0, \psi)$, так как это максимум. С другой стороны, если $C(F, \psi) = (f_0 - x_0, \psi) - \varepsilon,\ \varepsilon > 0$, то

$$\exists k \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{k} < \varepsilon \implies (f_k - x_0, \psi) > (f_0 - x_0, \psi) - \frac{1}{k} > (f_0 - x_0, \psi) - \varepsilon,$$

что приводит к противоречию. Значит, $C(F, \psi) = C(\overline{F}, \psi)$.

2. Воспользуемся тем, что константу можно выносить из скалярного произведения и максимума:

$$C(F, \lambda\psi) = \max_{f \in F}(f, \lambda\psi) = \lambda \max_{f \in F}(f, \psi) = \lambda C(F, \psi)$$

3. Пользуясь первым свойством, докажем сразу для произвольного ограниченного множества:

$$\begin{gathered} C(F, \psi_1 + \psi_2) = C(\overline{F}, \psi_1 + \psi_2) = \\ \max_{f \in \overline{F}}(f, \psi_1 + \psi_2) = \\ \max_{f \in \overline{F}}\big((f, \psi_1) + (f, \psi_2)\big) \leqslant \\ \max_{f \in \overline{F}}(f, \psi_1) + \max_{f \in \overline{F}}(f, \psi_2) = \\ C(\overline{F}, \psi_1) + C(\overline{F}, \psi_2) = C(F, \psi_1) + C(F, \psi_2) \end{gathered}$$

4. Воспользуемся свойством 3:

$$C(F, \psi_1) = C(F, \psi_1 - \psi_2 + \psi_1) \leqslant C(F, \psi_1 - \psi_2) + C(F, \psi_2)$$
$$C(F, \psi_1) - C(F, \psi_2) \leqslant C(F, \psi_1 - \psi_2) \leqslant |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

В силу симметричности:

$$C(F, \psi_2) - C(F, \psi_1) \leqslant C(F, \psi_2 - \psi_1) \leqslant |F| \cdot \|\psi_2 - \psi_1\|$$

Или

$$C(F, \psi_1) - C(F, \psi_2) \geqslant -|F| \cdot \|\psi_2 - \psi_1\|.$$

Отсюда и вытекает, что $|C(F, \psi_1) - C(F, \psi_2)| \leqslant |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|$.

5. Воспользуемся определением сопряжённого оператора:

$$C(AF, \psi) = \max_{g \in AF}(g, \psi) =$$
$$\max_{f \in F}(Af, \psi) = \max_{f \in F}(f, A^*\psi) = C(F, A^*\psi).$$

6. Достаточно заметить, что умножение на скаляр равносильно умножению на скалярную матрицу и использовать свойства 5 и 2:

$$C(\lambda F, \psi) = C(\lambda I F, \psi) = C(F, \lambda I^* \psi) = \lambda C(F, \psi).$$

7. Воспользуемся определением суммы множеств и независимостью f_1, f_2:

$$C(F_1 + F_2, \psi) = \max_{f \in F_1 + F_2}(f, \psi) = \max_{f_1 \in F_1, f_2 \in F_2}(f_1 + f_2, \psi) =$$
$$\max_{f_1 \in F_1, f_2 \in F_2}\big((f_1, \psi) + (f_2, \psi)\big) =$$
$$\max_{f_1 \in F_1}(f_1, \psi) + \max_{f_2 \in F_2}(f_2, \psi) = C(F_1, \psi) + C(F_2, \psi).$$

На следующей лекции мы докажем важный факт: $C(F, \psi) = C(\operatorname{conv} F, \psi)$.

1.5 Лекция 6

Мы остановились на липшицевости опорной функции по первому аргументу:

$$|C(F_1,\psi)-C(F_2,\psi)| \leqslant \|\psi\|\cdot h(F_1,F_2)$$

Возникает вопрос — как искать расстояние Хаусдорфа? По определению это делать неудобно.

Утверждение (Свойство 16). *Пусть* $F_1,F_2\in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$. *Тогда*

$$h(F_1,F_2)=\max_{\psi\in S}\left|C(F_1,\psi)-C(F_2,\psi)\right|.$$

Доказательство. Обозначим $M=\max\limits_{\psi\in S}|C(F_1,\psi)-C(F_2,\psi)|$. Покажем, что $h(F_1,F_2)\leqslant M$ и одновременно $h(F_1,F_2)\geqslant M$. Пользуясь липшицевостью и тем, что $\forall\psi\in S$ $\|\psi\|=1$, получаем:

$$\forall\psi\in S \implies |C(F_1,\psi)-C(F_2,\psi)|\leqslant h(F_1,F_2)$$

Но тогда $h(F_1,F_2)\geqslant M=\max\limits_{\psi\in S}|C(F_1,\psi)-C(F_2,\psi)|$.

Пусть $\psi\in E^n,\psi\neq 0$. Тогда $\frac{\psi}{\|\psi\|}\in S \implies$

$$\left|C\left(F_1,\frac{\psi}{\|\psi\|}\right)-C\left(F_2,\frac{\psi}{\|\psi\|}\right)\right|\leqslant M$$

Значит,

$$|C(F_1,\psi)-C(F_2,\psi)|\leqslant M\cdot\|\psi\| \quad \forall\psi\in E^n$$

Раскроем модуль:

$$-M\|\psi\|\leqslant C(F_1,\psi)-C(F_2,\psi)\leqslant M\cdot\|\psi\| \quad \forall\psi\in E^n$$

Можем записать

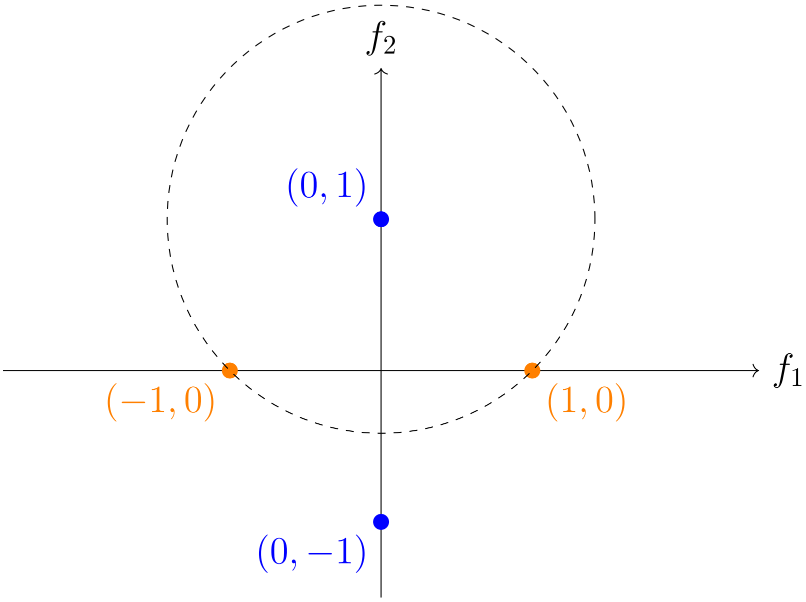
$$\begin{aligned}C(F_1,\psi)\leqslant C(F_2,\psi)+M\|\psi\| =&\\ C(F_2,\psi)+C(S_M(0),\psi)=C(F_2+S_M(0),\psi) \quad \forall\psi\in E^n \implies&\\ F_1\subset F_2+S_M(0)&\end{aligned}$$

Аналогичными рассуждениями получаем $F_2\subset F_1+S_M(0)$. Тогда $h(F_1,F_2)\leqslant M$, откуда и вытекает, что

$$h(F_1,F_2)=M=\max_{\psi\in S}|C(F_1,\psi)-C(F_2,\psi)|$$

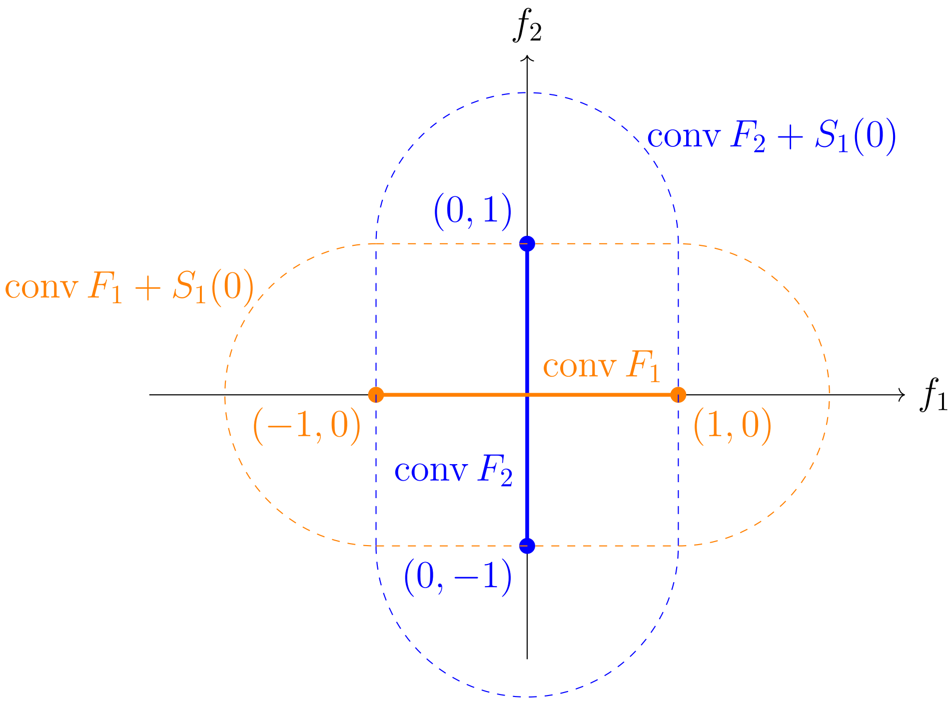
■

Пример. $F_1 = \big\{(1,0),(-1,0)\big\}, F_2 = \big\{(0,1),(0,-1)\big\}$.



Понятно, что хаусдорфово расстояние между этими двухточечными множествами равно $\sqrt{2}$.

Рассмотрим теперь их выпуклые оболочки:



Теперь посчитаем её с помощью доказанного утверждения:

$$h(F_1,F_2) = \max_{\psi\in S}|C(F_1,\psi) - C(F_2,\psi)| = \max_{\psi\in S}\Big|\max_{f\in F_1}(f,\psi) - \max_{f\in F_2}(f,\psi)\Big| =$$
$$\max_{\psi\in S}\Big|\max\big\{\psi_1,-\psi_1\big\} - \max\big\{\psi_2,-\psi_2\big\}\Big| = \max_{\psi\in S}\big||\psi_1| - |\psi_2|\big| = 1.$$

Пример. Расстояние между шарами $h(S_{r_1}(a_1), S_{r_2}(a_2))$: шары являются выпуклыми компактами, поэтому можно применить свойство 16.

$$h(S_{r_1}(a_1), S_{r_2}(a_2)) = \max_{\psi \in S} \big| (a_1, \psi) + r_1\|\psi\| + (a_2, \psi) + r_2\|\psi\| \big| =$$
$$\max_{\psi \in S} \big| (a_1 - a_2, \psi) + (r_1 - r_2) \big| = \|a_1 - a_2\| + |r_1 - r_2|$$

Максимум достигается на векторе $\operatorname{sgn}(r_1 - r_2) \cdot \dfrac{a_1 - a_2}{\|a_1 - a_2\|}$.

Заметим, что модуль множества $|F|$ можно выразить не только как $h(F, \{0\})$, но и как $\max\limits_{\psi \in S} C(F, \psi)$. В самом деле,

$$\max_{\psi \in S} C(F, \psi) = \max_{\psi \in S} \max_{f \in F} (f, \psi) = \max_{f \in F} \max_{\psi \in S} (f, \psi) = \left\{ \psi = \frac{f}{\|f\|} \right\} =$$
$$\max_{f \in F} \left(f, \frac{f}{\|f\|} \right) = \max_{f \in F} \|f\| = |F|$$

Утверждение. *Пусть функция $f\colon E^n \mapsto E^n$ — конечная. $f(\psi)$ — опорная функция некоторого выпуклого компакта $F \iff$ выполняются два свойства:*

1. $f(\lambda\psi) = \lambda f(\psi) \quad \forall \lambda > 0, \psi \in E^n$
2. $f(\psi_1 + \psi_2) \leqslant f(\psi_1) + f(\psi_2) \quad \psi_1, \psi_2 \in E^n$

При этом $F = \bigcap\limits_{\psi \in S} \big\{ x \in E^n \colon (x, \psi) \leqslant f(\psi) \big\}$.

Многозначные отображения.

Определение. Функция $F(t)\colon E^1 \mapsto \Omega(E^n)$ называется многозначным отображением.

Пример. $F(t) = S_{|t|}(2t)$.

Пример. $F(t) = t \cdot \big\{ -1, 1 \big\}$.

Пример. $F(t) = \begin{cases} -1, t < 0 \\ [-1, 1], t = 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$.

Пример. $F(t) = \begin{cases} [-1, 1], t \neq 0 \\ 0, t = 0 \end{cases}$.

Определение. Отображение $f\colon E^n \mapsto E^1$ называется *однозначной ветвью* многозначного отображения $F(t)$, если

$$\forall t \in E^n \quad f(t) \in F(t)$$

Пример. $f = \begin{cases} t, t < 1/2 \\ -t, t \geqslant 1/2 \end{cases}$ — однозначная ветвь для $F(t) = t \cdot \{-1, 1\}$.

Пример. $f \equiv 0, f = \sin x$ — однозначные ветви для $F(t) = \begin{cases} -1, t < 0 \\ [-1, 1], t = 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$.

Пусть $F(t)\colon E^1 \mapsto \Omega(E^n)$.

Определение. Многозначное отображение $F(t)$ непрерывно в точке t_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon$$
$$|t - t_o| \leqslant \delta \implies h(F(t), F(t_0)) \leqslant \varepsilon$$

Определение. $F(t)$ непрерывна на T, если она непрерывна $\forall t \in T$.

Утверждение.

$F(t)$ *— непрерывное многозначное отображение* $\implies$
$C(F(t), \psi)$*непрерывно по* t *равномерно по* $\psi \in S$ $\implies$
$\operatorname{conv} F(t)$ *непрерывна.*

Доказательство. По свойству 15:

$$|C(F(t), \psi) - C(F(t_0), \psi)| \leqslant \|\psi\| \cdot h(F(t), F(t_0)) \leqslant h(F(t), F(t_0)) \leqslant \varepsilon \quad \forall t\colon |t - t_0| \leqslant \delta$$

Вторая часть:

$$h(\operatorname{conv} F(t), \operatorname{conv} F(t_0)) = \max_{\psi \in S} |C(F(t), \psi) - C(F(t_0), \psi)| \leqslant \varepsilon \quad \forall t\colon |t - t_0| \leqslant \delta$$

■

Следствие. $F(t)\colon E^1 \mapsto \operatorname{conv} \Omega(E^n)$. *Тогда*

$F(t)$ *— непрерывное многозначное отображение* $\iff$
$C(F(t), \psi)$*непрерывно по* t *равномерно по* $\psi \in S$ $\iff$
$\operatorname{conv} F(t)$ *непрерывна по* t *равномерно по* $\psi \in S$ $\iff$
$\operatorname{conv} F(t)$ *непрерывна по* t *по* $\forall$ *фиксированного* $\psi \in S$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Очевидно

$\Longleftarrow$ От противного:

$$\exists r > 0 \; \exists \{t_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} t_0,\; \psi_k \in S \forall K \in \mathbb{N}\colon \exists k \geqslant K\colon \tag{1.28}$$

$$|C(F(t_k), \psi_k) - C(F(t_0), \psi_k)| \geqslant r > 0 \tag{1.29}$$

Считаем, что ψ_k сходится, так как это последовательность на компакте, и из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

$$|C(F(t_k), \psi_k) - C(F(t_0), \psi_k) + C(F(t_k), \psi_0) - C(F(t_0), \psi_0) + \\ C(F(t_0), \psi_0) - C(F(t_0), \psi_k)| \leqslant$$

$$|F(t_k)| \|\psi_k - \psi_0\| + |C(F(t_k), \psi_0) - C(F(t_0), \psi_0)| + |F(t_0)| \|\psi_k - \psi_0\|$$

Всё три слагаемых стремятся к нулю.

Допустим теперь, что $|F(t_k)| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$. Но

$$|F(t_k)| = \max_{\psi\in S} C(F(t_k), \psi) = C(F(t_k), \phi_k), \quad \phi_k \in S$$

где ϕ_k — вектора, на которых достигается максимум. $\phi_k \in S \implies \phi_k \to \phi_0 \in S$. (На самом деле, сходится некоторая подпоследовательность, но мы просто переобозначим её за ϕ_k).

$$C(F(t_k), \phi_k) - C(F(t_0), \phi_0) \leqslant |F(t_k)| \cdot \|\phi_k - \phi_0\|$$
$$|F(t_k)| - C(F(t_0), \phi_0) \leqslant |F(t_k)| \cdot \|\phi_k - \phi_0\|$$
$$|F(t_k)| \left(1 - \|\phi_k - \phi_0\|\right) \leqslant C(F(t_k), \phi_0)$$

Функция $C(F(t), \psi_0)$ непрерывна по t, а значит, ограничена. Но из этого вытекает ограниченность $|F(t_k)|$, и это противоречит нашему предположению.

■

Пример. $C(F(t), \psi) = \begin{cases} -\psi, & \psi < 0 \\ |\psi|, & \psi = 0 \\ \psi, & \psi > 0 \end{cases}$

Пример. Бывают непрерывные многозначные отображения, у которых нет ни одной непрерывной однозначной ветви.

$F(t)\colon [0,1] \mapsto \Omega(E^n)$

$$t \in [0,1]\colon F(t) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \ln t) \\ \sin(\alpha + \ln t) \end{pmatrix}, t \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \right.$$

Пусть $f(t)$ — однозначная. Тогда в окрестности нуля она совершает бесконечное число оборотов и не может быть непрерывной.

1.6 Лекция 7.

1.6.1 Измеримость многозначных отображений

Рассматриваем многозначные отображения $F(t)\colon E^1 \mapsto \Omega(E^n)$.

Определение. Многозначное отображение $F(t)$ **измеримо**, если $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall K \in \Omega(E^n)$

$$\big\{t\colon h\big(F(t), K\big) \leqslant \varepsilon\big\} \text{ измеримо по Лебегу.}$$

Лемма.

$F(t)$ *измерима* $\implies$

$C(F(t), \psi)$ *измерима для любого фиксированного* $\psi \implies$

$\operatorname{conv} F(t)$ *измеримо* $\forall t$.

Доказательство. На лекции не доказано, отсылают к C-свойству Лузина. ∎

Лемма. *Рассмотрим функцию* $f(\psi), \psi \in E^n \setminus \{0\}$.

$$\begin{cases} f(\lambda\psi) = \lambda f(\psi) \quad \forall \lambda > 0 \\ f(\psi_1 + \psi_2) = f(\psi_1) + f(\psi_2) \end{cases} \iff \exists P \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)\colon C(P, \psi) = f(\psi).$$

Напомним, что если $F \in \Omega(E^n)$, то

$$\Gamma_\psi = \big\{x \in E^n\colon (x, \psi) = C(F, \psi)\big\}$$
$$\mathcal{U}(F, \psi) = \big\{x \in F\colon (x, \psi) = C(F, \psi)\big\}$$
$$\mathcal{U}(F, \psi) = \Gamma_\psi \cap F$$

Лемма. $\operatorname{conv}\mathcal{U}(F,\psi) = \operatorname{conv} F \cap \Gamma_\psi$.

Теорема Филиппова. *Пусть $F(t)\colon E^1 \mapsto \Omega(E^n)$ — измеримое многозначное отображение.*

Тогда $\exists f(t)\colon E^1 \mapsto E^n$ — измеримая однозначная ветвь.
При этом $f(t) \in \mathcal{U}(F(t),\psi_0) \quad \forall t, \forall \psi_0 \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\psi \neq 0, F \in \Omega(E^n)$.

Найдём производную опорной функции по направлению ψ.

$$C'(F,\psi_0;\psi) = \lim_{\alpha\to+0} \frac{C(F,\psi_0+\alpha\psi) - C(F,\psi_0)}{\alpha}$$

Этот предел существует, так как дробь ограчена снизу и монотонно не возрастает по α. В самом деле,

$$C(F,\psi_0) = C(F,\psi_0+\alpha\psi-\alpha\psi) \leqslant \\ C(F,\psi_0+\alpha\psi) + C(F,-\alpha\psi) = C(F,\psi_0+\alpha\psi) + \alpha C(F,-\psi)$$

$$\frac{C(F,\psi_0+\alpha\psi) - C(F,\psi_0)}{\alpha} \geqslant \\ \frac{C(F,\psi_0+\alpha\psi) - C(F,\psi_0+\alpha\psi) + \alpha C(F,-\psi)}{\alpha} = C(F,-\psi)$$

И ограниченность снизу доказана.

Докажем монотонность. Пусть теперь $0 < \alpha_2 < \alpha_1,\ \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in (0,1)$.

$$x_1 = \psi_0 + \alpha_1\psi$$
$$x_2 = \psi_0$$
$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\psi_0+\alpha\psi) + \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\psi_0 = \psi_0 + \alpha_2\psi$$

Тогда

$$C(F,\psi+\alpha_2\psi) - C(F,\psi_0) \leqslant \alpha_2 \frac{C(F,\psi+\alpha_2\psi) - C(F,\psi_0)}{\alpha_1}$$
$$\frac{C(F,\psi+\alpha_2\psi) - C(F,\psi_0)}{\alpha_2} \leqslant \frac{C(F,\psi+\alpha_2\psi) - C(F,\psi_0)}{\alpha_1}$$

Т.е. дробь действительно монотонно не возрастает по α.

Пусть $\lambda > 0$.

$$C'(F,\psi_0;\lambda\psi)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{C(F,\psi_0+\alpha\lambda\psi)-C(F,\psi_0)}{\alpha}=$$
$$\lim_{\alpha\to+0}\lambda\frac{C(F,\psi_0+\alpha\lambda\psi)-C(F,\psi_0)}{\lambda\alpha}=$$
$$\lambda\lim_{\beta\to+0}\frac{C(F,\psi_0+\beta\psi)-C(F,\psi_0)}{\beta}=\lambda C'(F,\psi_0;\psi)$$

$$C'(F,\psi_0;\psi_1+\psi_2)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{C(F,\psi_0+\alpha(\psi_1+\psi_2))-C(F,\psi_0)}{\alpha}=$$
$$\lim_{\alpha/2\to+0}\frac{C(F,\psi_0+\frac{\alpha}{2}(\psi_1+\psi_2))-C(F,\psi_0)}{\frac{\alpha}{2}}=$$
$$\lim_{\alpha/2\to+0}\frac{C(F,\frac{\psi_0+\alpha\psi_1+\psi_0+\alpha\psi_2}{2})-C(F,\psi_0)}{\frac{\alpha}{2}}=$$
$$\lim_{\alpha/2\to+0}\frac{\frac{1}{2}(C(F,\psi_0+\alpha\psi_1+\psi_0+\alpha\psi_2)-2C(F,\psi_0))}{\frac{\alpha}{2}}\leqslant$$
$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{C(F,\psi_0+\alpha\psi_1)-C(F,\psi_0)+C(\psi_0+\alpha\psi_2)-C(F,\psi_0)}{\alpha}=$$
$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{C(F,\psi_0+\alpha\psi_1)-C(F,\psi_0)}{\alpha}+\lim_{\alpha\to+0}\frac{C(\psi_0+\alpha\psi_2)-C(F,\psi_0)}{\alpha}=$$
$$C'(F,\psi_0;\psi_1)+C'(F,\psi_0;\psi_2).$$

Таким образом, производная опорной функции обладает свойствами 1 и 2 из леммы 2, но тогда существует такой выпуклый компакт P, что опорная функция к нему есть наша фунция.

Докажем, что $P=\operatorname{conv}\mathcal{U}(F,\psi_0)=\operatorname{conv}F\cap\Gamma_{\psi_0}$. Достаточно показать двустороннее вложение. Покажем, что $\operatorname{conv}\mathcal{U}(F,\psi_0)\subset P$.

$\forall x\in\operatorname{conv}\mathcal{U}(F,\psi_0)=\operatorname{conv}F\cap\Gamma_{\psi_0}$, то есть:

$$(x,\psi_0)=C(F,\psi_0)$$
$$(x,\psi)\leqslant C(F,\psi)$$

Мы пишем $C(F,\psi)$, так как $C(\operatorname{conv}F,\psi)=C(F,\psi)$.

Рассмотрим (x,ψ).

$$(x,\psi)=\frac{(x,\lambda\psi)}{\lambda}=\frac{(x,\psi_0-\psi_0+\lambda\psi)}{\lambda}=$$
$$\frac{(x,\psi_0+\lambda\psi)-(x,\psi_0)}{\lambda}\leqslant\frac{C(F,\psi_0+\lambda\psi)-C(F,\psi_0)}{\lambda}$$

Перейдём к пределу $\lambda\to+0\implies(x,\psi)\leqslant C'(F,\psi_0;\psi)=C(P,\psi)\implies x\in P$.

Докажем обратное вложение, используя, что $\operatorname{conv}\mathcal{U}(F,\psi) = \operatorname{conv} F \cap \Gamma_\psi$. Покажем, что $x \in P \implies x \in \Gamma_\psi$.

$\forall x \in P,\ \forall \psi \in E^n \quad (x,\psi) \leqslant C'(F,\psi_0;\psi)$. Подставим $\psi = \psi_0$.

$$(x,\psi_0) \leqslant C'(F,\psi_0;\psi_0) =$$
$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{C(F,\psi_0+\alpha\psi_0) - C(F,\psi_0)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)\frac{C(F,\psi_0) - C(F,\psi_0)}{\alpha} = C(F,\psi_0)$$

$$(x,-\psi_0) \leqslant C'(F,\psi_0;-\psi_0) =$$
$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{C(F,\psi_0-\alpha\psi_0) - C(F,\psi_0)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}(1-\alpha)\frac{C(F,\psi_0) - C(F,\psi_0)}{\alpha} = -C(F,\psi_0)$$

$(x,-\psi_0) \leqslant -C(F,\psi_0) \implies (x,\psi_0) \geqslant C(F,\psi_0)$.

$$\begin{cases}(x,\psi_0) \leqslant C(F,\psi_0)\\ (x,\psi_0) \geqslant C(F,\psi_0)\end{cases} \implies (x,\psi_0) = C(F,\psi_0) \implies x \in \Gamma_{\psi_0}.$$

Осталось показать, что $x \in P \implies x \in \operatorname{conv} F$.

$$(x,\psi) \leqslant C'(F,\psi_0;\psi) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{C(F,\psi_0+\alpha\psi) - C(F,\psi_0)}{\alpha} \leqslant$$
$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{C(F,\psi_0)+\alpha C(F,\psi) - C(F,\psi_0)}{\alpha} = C(F,\psi)$$

Тогда

$$x \in P \implies \begin{cases} x \in \Gamma_\psi \\ x \in \operatorname{conv} F\end{cases} \implies x \in \mathcal{U}(F,\psi).$$

Значит, $P = \mathcal{U}(F,\psi)$.

Вспомним, что же мы доказывали. $F(t)\colon E^1 \mapsto \Omega(E^n)$ измерима $\implies$ $\exists f(t)\colon$

1. $f(t) \in F(t) \quad \forall t$;
2. $f(t)$ измерима;
3. $f(t) \in \mathcal{U}(F(t),\psi_0) \quad \forall \psi_0 \neq 0$.

Рассмотрим в пространстве E^n базис $e_1 = \psi_0, e_2, \ldots, e_n$. Положим

$$\mathcal{U}_0(t) = F(t)$$
$$\mathcal{U}_1(t) = \mathcal{U}(F(t),\psi_0) = \mathcal{U}(\mathcal{U}_0(t), e_1)$$

$$\mathcal{U}_i(t) = \mathcal{U}(\mathcal{U}_{i-1}, e_i)$$

$\mathcal{U}_n(t) \subset \mathcal{U}_{n-1}(t) \subset \ldots \subset \mathcal{U}_1(t) \subset F(t).$

$$\mathcal{U}_i \subset \Gamma_{e_1} \equiv \Gamma_{\psi_0} \implies \dim \mathcal{U}_1(t) \leqslant \dim \Gamma_{e_1} = n - 1.$$
$$\mathcal{U}_i \subset \Gamma_{e_2} \cap \Gamma_{e_1} \implies \dim \mathcal{U}_1(t) \leqslant \dim \Gamma_{e_1} \cap \Gamma_{e_2} = n - 2.$$
$$\ldots$$
$$\dim \mathcal{U}_n(t) = 0$$

Значит, $\mathcal{U}_n(t) = \big\{f(t)\big\}$. При этом по построению $f(t) \in \mathcal{U}_i(t) = \mathcal{U}(\mathcal{U}_{i-1}, e_i) \subset \mathcal{U}(F(t), e_i)$. Значит, $f(t) \in \mathcal{U}(F(t), e_i)$ для всех базисных векторов, а значит, и для $\forall \psi_0 \neq 0$. ■

1.6.2 Интеграл от многозначного отображения

Определение. Пусть $F(t)\colon [t_0, t_1] \mapsto \Omega(E^n)$.

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)dt = \Big\{x \in E^n\colon x = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt, \text{ где } f(t) \text{ — однозначная ветвь } F(t)\Big\}.$$

Теорема Ляпунова. *Пусть* $F(t)\colon [t_0, t_1] \mapsto \Omega(E^n)$ *— измеримое отображение и* $|F(t)| \leqslant K(t)$, *где* $K(t)$ *— интегрируемая по Лебегу на* $[t_0, t_1]$.

Тогда
$$\int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)dt \in \operatorname{conv} \Omega(E^n).$$

Доказательство. Обозначим $G = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)dt$. Надо доказать, что

1. G непусто
2. G ограниченно
3. G замкнуто
4. G выпукло

По теореме Филиппова в силу измеримости $F(t)$ существует измеримая ветвь $f(t)$, причём
$$f(t) \leqslant |F(t)| \leqslant K(t)$$

Тогда существует $\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt \in G$.

$$\forall g \in G \; g = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$$

$$\|g\| \leqslant \left\| \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt \right\| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} \|f(t)\|\,dt \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} |F(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} |K(t)|\,dt = K$$

3, 4 — без доказательства. (Можно посмотреть в книге Благодатского «Введение в ОУ»). ■

Пример. $F(t) = t \cdot \big\{-1, 1\big\}, t \in [0, 1]$.

$$G = \int\limits_0^1 F(t)\,dt$$

Можно рассмотреть непрерывные ветви:

$$g_1 = \int\limits_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$g_2 = \int\limits_0^1 -t\,dt = -\frac{1}{2}$$

Тогда по теореме Ляпунова $G = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

В самом деле, если рассматривать не только непрерывные ветви:

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \alpha], \\ -t, & t \in (\alpha, 1) \end{cases}$$

где $\alpha \in [0, 1]$, то можно увидеть, что

$$g_\alpha = \int\limits_0^1 f_\alpha(t)dt = \int\limits_0^\alpha t\,dt + \int\limits_\alpha^1 -t\,dt = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2} = \alpha^2 - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

То есть $\forall x \in \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big] \; \exists \alpha(x) = \sqrt{x + \frac{1}{2}}\colon g_\alpha = x \implies x \in G$.

1.7 Лекция 8.

На прошлой лекции была сформулирована теорема Ляпунова: если $F(t)\colon [t_0, t_1] \mapsto \Omega(E^n)$ — измеримое отображение и $|F(t)| \leqslant K(t)$, где $K(t)$ — интегрируемая по Лебегу на $[t_0, t_1]$, то

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)dt \in \operatorname{conv} \Omega(E^n).$$

Она позволяет гораздо легче искать интегралы многозначных отображений.

Лемма (О внесении знака опорной функции под знак интеграла)**.** *Пусть* $F(t)\colon [t_0, t_1] \mapsto \Omega(E^n)$ *— измеримое отображение и* $|F(t)| \leqslant K(t)$*, где* $K(t)$ *— интегрируемая по Лебегу на* $[t_0, t_1]$.

Тогда

$$C\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)\, dt, \psi\right) = \int\limits_{t_0}^{t_1} C(F(t), \psi)\, dt$$

Доказательство.

$$G = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t) \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$$

$C(G, \psi)$ — опорная функция.

$$|C(F(t), \psi)| \leqslant F(t)\|\psi\| \leqslant K(t)\|\psi\| \implies \exists \int\limits_{t_0}^{t_1} C(F(t), \psi)\, dt$$

$$\forall g \in G \implies \exists f(t) \in F(t)\colon |f(t)| \leqslant C(F(t), \psi)$$

$$g = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt$$

$$(g, \psi) = \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt, \psi\right) \leqslant$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (f(t), \psi)\, dt$$

Так как g — любое,

$$\int_{t_0}^{t_1} (f(t), \psi)\, dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \max_{f(t)\in F(t)} (f(t), \psi)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} C(F(t), \psi)\, dt.$$

Покажем обратное. По теореме Филиппова:

$$f(t) \in \mathcal{U}(F(t), \psi) \implies$$
$$(f(t), \psi) = C(F(t), \psi),$$
$$\int_{t_0}^{t_1} C(F(t), \psi)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (f(t), \psi)\, dt =$$
$$\left(\int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt, \psi\right) = (g, \psi) \leqslant C(G, \psi)$$

Таким образом,

$$C\left(\int_{t_0}^{t_1} F(t)\, dt, \psi\right) = \int_{t_0}^{t_1} C(F(t), \psi)\, dt$$

■

Пример. $F(t)\colon [t_0, t_1] \mapsto \Omega(E^1)$.
$F(t) = t \cdot \{-1, 1\}$.

$$G = \int_0^1 F(t)\, dt$$

$$C(G, \psi) = C\left(\int_0^1 t \cdot \{-1, 1\}\, dt, \psi\right) =$$
$$\int_0^1 C(t \cdot \{-1, 1\}, \psi)\, dt = \int_0^1 t \cdot |\psi| = \frac{1}{2}\psi = C(S_1(0), \psi)$$

$G = S_{1/2}(0) = [-1/2, 1/2]$.

Пример. $F(t)\colon [-\pi, \pi] \mapsto \Omega(E^2)$.
$F(t) = A(t) \cdot \{-U, U\}$.

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t^2 \\ \cos t & t^3 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \int\limits_{-\pi}^{\pi} A(t)\big\{-U, U\big\}\, dt$$

$$C(G, \psi) = C\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} A(t) \cdot \big\{-U, U\big\}\, dt, \psi\right) =$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} C(A(t) \cdot \big\{-U, U\big\}, \psi)\, dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} C(\big\{-U, U\big\}, A^*(t)\psi)\, dt =$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |(U, A^*(t)\psi)|\, dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |(A(t)U, \psi)|\, dt.$$

$$C(G, \psi) = \int\limits_{\pi}^{\pi} \left| \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, (\psi_1, \psi_2) \right| dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \|\psi\| |\psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t|\, dt =$$

$$-\|\psi\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\cos\alpha \sin t + \sin\alpha \cos t| dt = \|\psi\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin(t+\alpha)| dt = 4\|\psi\| = C(S_1(0), \psi)$$

$G = S_4(0).$

Пусть $F(t) \equiv F \in \Omega(E^n)$. Верно ли следующее утверждение?

$$G = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t) dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} F dt = F(t_1 - t_0) \quad (?)$$

Посчитаем интеграл при помощи опорной функции:

$$C(G, \psi) = \int\limits_{t_0}^{t_1} C(F, \psi)\, dt = (t_1 - t_0) C(F, \psi) =$$

$$C((t_1 - t_0)F, \psi) \implies$$

$$G = (t_1 - t_0) \operatorname{conv} F$$

То есть, для выпуклых компактов F верно

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} F\,dt = (t_1 - t_0)F.$$

Утверждение. *Пусть* $F(t)\colon [t_0, t_1] \mapsto \Omega(E^n)$ *— измеримое отображение и* $|F(t)| \leqslant K(t)$, *где* $K(t)$ *— интегрируемая по Лебегу на* $[t_0, t_1]$.

Рассмотрим

$$G(\tau) = \int\limits_{t_0}^{\tau} F(t)\,dt, \quad \tau \in [t_0, t_1]$$

$G\colon [t_0, t_1] \mapsto \operatorname{conv}\Omega(E^n)$.

Тогда $G(\tau)$ *— непрерывное многозначное отображение.*

Доказательство.

$$C(G(\tau), \psi) = \int\limits_{t_0}^{\tau} C(F(t), \psi)\,dt.$$

$C(G(t), \psi)$ непрерывна по τ для любого фиксированного $\psi_0 \in E^n \implies G(\tau)$ непрерывна. ■

1.7.1 Формула Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда размерность $n = 1, u(t)$ непрерывна.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Решение этой задачи можно найти по *формуле Коши*:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} \left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)a} u(s)\,ds \right) =$$

$$e^{a(t-t_0)}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)a}u(s)\,ds.$$

Если $u(t)$ измерима, то не получится ограничиться интегралом Римана и обычными теоремами существования и единственности. Тогда ищем $x(t)$ — абсолютно непрерывную на $[t_0, t_1]$, т.е. почти всюду дифференцируемую на $[t_0, t_1]$, такую что $\dot{x}(t)$ интегрируема по Лебегу на $[t_0, t_1]$ и

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\,ds.$$

Что делать при $n > 1$?

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Оказывается, решение выражается той же формулой:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A}u(s)\,ds\right) =$$

$$e^{A(t-t_0)}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}u(s)\,ds.$$

Но что такое e^A?

1.7.2 Экпоненциал матрицы

В одномерном случае верно разложение в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

Пусть теперь $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — постоянная матрица.

Определение. *Экспоненциалом матрицы* D называется матрица вида

$$e^D = I + D + \frac{D^2}{2} + \ldots + \frac{D^k}{k!} + \ldots$$

Соответственно,

$$e^{tD} = I + tD + \frac{t^2}{2}D^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}D^k + \ldots$$

Об основных свойствах экспоненциала матрицы.

1. *Для* $\forall D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *существует* e^D*, а последовательность* $\frac{(D)^k_{ij}}{k!}$ *образует абсолютно сходящийся ряд* $\forall i, j = \overline{1, n}$.
2. *Если* $AB = BA$*, то* $e^{AB} = e^A e^B$.
3. e^D *— невырожденная матрица.*
4. e^{tA} *непрерывно дифференцируема по* t *на* $(-\infty, +\infty)$ *и*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A$$

Доказательство.

1. Пусть $d = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |d_{ij}|$.

$$\begin{gathered} |D_{ij}| \leqslant d \\ |D^2_{ij}| \leqslant nd^2 \\ \vdots \\ |D^k_{ij}| \leqslant n^{k-1}d^k \end{gathered}$$

Тогда

$$\left|\left(D + \frac{D^2}{2} + \ldots + \frac{D^k}{k!} + \ldots\right)_{ij}\right| \leqslant$$
$$d + \frac{nd^2}{2!} + \frac{n^2d^3}{3!} + \ldots = \frac{e^{nd} - 1}{n} \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Таким образом, все ряды из элементов матрицы сходятся абсолютно. А значит, экпоненциал существует.

2.

$$\begin{gathered} AB = BA \\ (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \end{gathered}$$

$$(A+B)^m = \sum_{k+l=m} \frac{m!}{k!l!} A^k B^l$$

Значит,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},\ e^B = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!}$$

$$e^A \cdot e^B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!}\right) = \sum_{k=0,l=0}^{\infty} \frac{A^k B^l}{k!l!} =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k+l=m} \frac{m!}{k!l!} A^k B^l = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(A+B)^m = e^{AB}$$

3. Заметим, что D и $-D$ коммутируют.

$$e^{D+(-D)} = e^O = I = e^D \cdot e^{-D}$$
$$(e^D)^{-1} = e^{-D}$$

4. Распишем по определению:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

Это абсолютно сходящийся степенной ряд. Его можно почленно дифференцировать, и радиус сходимости не изменится. Получим

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt}(I + tA + \frac{t^2}{2!}A + \ldots) = O + A + tA^2 + \ldots =$$
$$A(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots) = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A.$$

■

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = I + t \cdot O + \ldots = I$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3 = \ldots,$$

$$e^{tA} = I + t\cdot A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I,$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \ldots = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$$
$$e_{11} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots = \cos t$$
$$e_{12} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots = \sin t$$
$$e_{21} = -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \ldots = -\sin t$$
$$e_{22} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots = \cos t$$

1.8 Лекция 9

На прошлой лекции было введено определение экспоненциала матрицы:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

Напомним его свойства:

1. $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$
2. $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$
3. $\frac{d}{dt}e^{tA} = A\cdot e^{tA} = e^{tA}\cdot A$

Матричный экспоненциал является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = I \end{cases} \implies X(t) = e^{tA}$$

Например, для $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ получится $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
для $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ получится $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Можно рассматривать матрицу по столбцам:

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}\Big[\dot{e_1}\dots\dot{e_n}\Big] = A\Big[e_1\dots e_n\Big]$$

Получим n задач Коши с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae \\ e(0) = \vec{e_i}, \end{cases}$$

где $\vec{e_i} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{й}}, 0, \dots, 0)^T$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решим задачи Коши

$$\dot{x} = Ax,\ x(0) = \vec{e_i}, i = 1, 2.$$

При $x(0) = e_1$:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, & x_1(0) = 1 \\ \dot{x_2} = 0, & x_2(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x_2} = 0 &\implies x_2(t) = C_2 \\ \dot{x_1} = C_2 &\implies x_1(t) = C_2 t + C_1 \\ x_2(0) = 0 &\implies C_2 = 0 \\ x_1(0) = 1 &\implies C_1 = 1 \end{aligned}$$

Значит, решение первой задачи — $x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $x(0) = e_2$:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 & x_1(0) = 0 \\ \dot{x_2} = 0 & x_2(0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x_2} &\implies x_2(t) = C_2 \\ \dot{x_1} = C_2 &\implies x_1(t) = C_2 t + C_1 \end{aligned}$$

$$x_2(0) = 1 \implies C_2 = 1$$
$$x_1(0) = 0 \implies C_1 = 0$$

Значит, решение второй задачи — $x(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$. Итого $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найдём её экспоненциал.

$$\dot{x} = Ax,\ x(0) = \vec{e_i}, i = 1, 2$$
$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x_2} = -x_2 \implies x_2(t) = C_2 e^{-t}$$
$$\dot{x_1} = C_2 e^{-t} \implies x_1(t) = C_1 - C_2 e^{-t}$$

Учтём начальные условия:

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Значит, $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко доказываются следующие свойства:

- $\left(e^{tA}\right)^* = e^{tA^*}$
- $e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A}$

Ещё раз напомним формулу для решения задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$x(t) \;=\; e^{(t-t_0)A}\left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-(s-t_0)A}u(s)\,ds\right) \;=\; e^{(t-t_0)A}x_0 \,+\, \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{(t-s)A}u(s)\,ds. \tag{1.30}$$

Теорема Каратеодори. *Пусть $u(t)$ — интегрируемая по Лебегу на отрезке $[t_0, t_1]$ функция.*

Тогда решение задачи Коши существует, единственно, принадлежит классу абсолютно непрерывных функций и задаётся формулой Коши 1.30.

Доказательство. Проверим начальное условие:

$$x(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_0} e^{-(s-t_0)A}ds = I \cdot x_0 = x_0$$

Посчитаем производную:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(e^{(t-t_0)A}\cdot x_0 + e^{tA}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-sA}\cdot u(s)ds\right) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{(t-t_0)A}\cdot x_0\right) + \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)\cdot \int\limits_{t_0}^{t} e^{-sA}u(s)ds + e^{tA}\cdot\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{-sA}u(s)ds\right) =$$

$$Ae^{(t-t_0)A}\cdot x_0 + Ae^{tA}\cdot\int\limits_{t_0}^{t} e^{-sA}u(s)ds + e^{tA}\cdot e^{-tA}\cdot u(t) =$$

$$A\left(e^{(t-t_0)A}\cdot x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}u(s)ds\right) + u(t) = Ax(t) + u(t).$$

Существование доказано.

Докажем единственность. Предположим противное: пусть $x(t), y(t)$ — 2 различных решения ЗК в классе абсолютно непрерывных функций. Рассмотрим

$z(t) = x(t) - y(t)$.

$$\begin{cases} \dot{z} = Ax + u - Ay - u = A(x-y) \\ z(t_0) = x(t_0) - y(t_0) = 0 \end{cases}$$

То есть, достаточно показать, что у задачи

$$\begin{cases} \dot{z} = Az \\ z(t_0) = 0 \end{cases}$$

есть единственное решение — $z(t) \equiv 0$.

Оценим производную:

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(z(t), z(t)) = 2(\dot{z}, z) = 2(Az, z) \leqslant 2\|A\| \cdot \|z(t)\|^2$$

Введём функцию $\varphi(t) = \|z(t)\|^2 \cdot e^{-2\|A\|(t-t_0)}$. Тогда

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(t) \geqslant 0 \quad \forall t \geqslant t_0 \end{cases}$$

Оценим её производную:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\left(\|z(t)\|^2\right) \cdot e^{-2\|A\|(t-t_0)} - \|z(t)\|^2 \cdot 2\|A\| e^{-2\|A\|(t-t_0)} \leqslant \\ 2\|A\| \cdot \|z(t)\|^2 \cdot e^{-2\|A\|(t-t_0)} - 2\|A\| \cdot \|z(t)\|^2 \cdot e^{-2\|A\|(t-t_0)} = 0.$$

Таким образом, $\dot{\varphi}(t) \leqslant 0$, а в силу абсолютной непрерывности $\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{\varphi}(s)\, ds \leqslant 0$. Но по определению $\varphi(t) \geqslant 0 \implies \varphi(t) \equiv 0$. ■

Сформулируем ещё одно свойство экспоненциала:

О представлении экспоненциала в виде суммы первых n степеней матрицы A. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда*

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) A^j,$$

где $p_j(t)$ — аналитические функции, т. е. функции, всюду разложимые в степенной ряд с радиусом сходимости $R = \infty$.

Для доказательства нам потребуется следующая теорема.

Теорема Гамильтона—Кэли. *Определим характерический многочлен матрицы A:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n\big(\lambda^n - h_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - h_1\lambda - h_0\big) \equiv f(\lambda).$$

Тогда $f(A) = O$.

Таким образом,

$$A^n = h_{n-1}A^{n-1} + h_{n-2}A^{n-2} + \ldots + h_1 A + h_0 I,$$

или

$$A^n = q^0_{n-1}A^{n-1} + q^0_{n-2}A^{n-2} + \ldots + q^0_1 A + q^0_0 I.$$

Значит, и любая степень выше n-й выражается через первые n:

$$A^{n+1} = q^0_{n-1}A^{n} + q^0_{n-2}A^{n-1} + \ldots + q^0_1 A^2 + q^0_0 A$$

$$A^{n+1} = q^0_{n-1}\underbrace{\big(q^0_{n-1}A^{n-1} + q^0_{n-2}A^{n-2} + \ldots + q^0_1 A + q^0_0 I\big)}_{A^n} + q^0_{n-2}A^{n-1} + \ldots + q^0_1 A^2 + q^0_0 A$$

$$A^{n+1} = q^1_{n-1}A^{n-1} + q^1_{n-2}A^{n-2} + \ldots + q^1_1 A + q^1_0 I$$

Для более высоких степеней аналогично.

Далее можно подставить эти выражения в определение экспоненциала, привести подобные и показать, что получающиеся ряды сходятся.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = p_0(t)I + p_1(t)A = 1\cdot I + t\cdot A.$$

Как находить такие функции?

$$e^{tA} = p_0 I + p_1 A \quad \Big|\ \frac{d}{dt}$$

$$Ae^{tA} = \dot p_0 I + \dot p_1 A$$

$$A\big(p_0 I + p_1 A\big) = \dot p_0 I + \dot p_1 A$$

$$Ap_0 + A^2 p_1 = Ap_0 = \dot p_0 I + \dot p_1 A$$

Получаем уравнение

$$p_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{p_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dot{p_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Можем составить дифференциальное уравнение, беря начальное условие из тождества $p_0(0)I + p_1(t)A = I$:

$$\dot{p_0} = 0,\ p_0(0) = 1 \implies p_0(t) \equiv 1$$
$$\dot{p_1} = p_0,\ p_1(0) = 0 \implies p_1(t) \equiv t$$

Итого есть три способа поиска экспоненциала: по определению, решением линейной системы или поисеом функций $p_i(t)$.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 \\ x_0 = e_i, i = 1, 2 \end{cases}$$

$$\ddot{x_1} = \dot{x_2} = x_1, \lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm 1$$

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$
$$x_1(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$$

При $x_0 = e_1$:

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 = C_1 + C_2 \\ x_2(0) = 0 = C_1 + C_2 \end{cases}$$
$$C_1 = \frac{1}{2} = C_2 \implies$$
$$x_1(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$$
$$x_2(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$$

При $x_0 = e_2$:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 = C_1 + C_2 \\ x_2(0) = 1 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{2} \implies$$

$$x_1(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$$

$$x_2(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$$

Итого

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \cosh t \cdot I + \sinh t \cdot A.$$

Соответственно, $p_0(t) = \cosh t, p_1(t) = \sinh t$.

Мы почти готовы решать задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = Ax + u(t) x(t_0) \in M_0 x(t_1) \in M_1$$

Нужно ввести понятия *множества достижимости* и *множества управляемости*.

Замечание. Если в задаче Коши задать условие не в точке t_0, а в точке t_1, то по существу почти ничего не изменится:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \implies$$

$$x(t) = e^{(t-t_1)A} \left(x_1 + \int\limits_{t_1}^{t} e^{(t_1-s)A} u(s)\, ds \right) = e^{(t-t_1)A} x_1 + \int\limits_{t_1}^{t} e^{(t-s)A} u(s)\, ds.$$

1.9 Лекция 10

Рассматриваем краевую задачу.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \end{cases}$$

1.9.1 Множество достижимости

Оставим сначала только условие в начальный момент времени.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ x(t_0) \in M_0 \end{cases}$$

Определение. Пусть $t \in [t_0, t_1]$. Множество достижимости $X(t) = X(t, M_0, U, t_0)$ определяется как

$$X(t) = \left\{x \in E^n \colon x = x(t), \frac{dx}{ds} = Ax(s) + u(s), t_0 \leqslant s \leqslant t_1, x(t_0) \in M_0, u \in D_U\right\} =$$

$$\left\{x \in E^n \colon x = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{(t-s)A}u(s)\,ds,\ x_0 \in M_0, u \in D_U\right\} =$$

$$\bigcup_{\substack{x_0 \in M_0 \\ u \in D_U}} \left\{e^{(t-t_0)A}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{(t-s)A}u(s)\,ds\right\}$$

Свойства множества достижимости:

1. $X(t) = e^{(t-t_0)A}M_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}U\,ds,\ X(t_0) = M_0$
2. $M_0, U \in \Omega(E^n) \implies X(t) \in \Omega(E^n), t \in [t_0, t_1]$
3. $M_0 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n), U \in \Omega(E^n) \implies X(t) \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$
4. $C(X(t), \psi) = C(M_0, e^{(t-t_0)A^*}\psi) + \int\limits_{t_0}^{t} C(U, e^{(t-s)A^*}\psi)ds$
5. $\tau = t - t_0 \implies X(t) = e^{\tau A}M_0 + \int\limits_{0}^{\tau} e^{\alpha A}U d\alpha$
6. $X(t)$ непрерывно зависит от t на $[t_0, t_1]$.

Все утверждения достаточно просты. Докажем только 5-е.

Доказательство. Пусть $G = \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}Uds$. Сделаем замену $t - s =$

$\alpha, d\alpha = -ds$.

$$C(G,\psi) = \int\limits_{t_0}^{t} C(U, e^{(t-s)A^*}\psi)ds = \int\limits_{t-t_0}^{0} C(U, e^{(t-s)A^*}\psi)d(-\alpha) =$$

$$\int\limits_{0}^{t-t_0} C(U, e^{(t-s)A^*}\psi)d(\alpha) = G_1 = \int\limits_{0}^{\tau} e^{\alpha A} U d\alpha \implies$$

Очевидно, $e^{(t-t_0)A} = e^{\tau A}$. Отсюда и вытекает утверждаемое. ■

1.9.2 Множество управляемости

Теперь зафиксируем условие в конечный момент времени.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ x(t_1) \in M_1 \end{cases}$$

Определение. Пусть $t \in (t_0, t_1)$. Множество управляемости $Z(t) = Z(t, M_1, U)$ определяется как

$$Z(t) = \left\{ x \in E^n \colon \frac{dx}{ds} = Ax(s) + u(s), t \leqslant s \leqslant t_1, x(t_1) \in M_1, u \in D_U \right\} =$$

$$\left\{ x \in E^n \colon x = e^{(t-t_1)A}x_1 + \int\limits_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}u(s)ds = \right.$$

$$\left. e^{(t-t_1)A}x_1 + \int\limits_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}(-u(s))ds,\ x_1 \in M_1,\ u \in D_U \right\} =$$

$$\bigcup_{\substack{x_1 \in M_1 \\ u \in D_U}} \left\{ e^{(t-t_1)A}x_1 + \int\limits_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}(-u(s))ds \right\}.$$

Свойства множества управляемости:

1. $Z(t) = e^{(t-t_1)A}M_1 + \int\limits_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}(-U)ds,\ X(t_1) = M_1$

2. $M_1, U \in \Omega(E^n) \implies Z(t) \in \Omega(E^n), t \in [t_0, t_1]$

3. $M_1 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n), U \in \Omega(E^n) \implies Z(t) \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$

4. $C(Z(t), \psi) = C(M_1, e^{(t-t_1)A^*}, \psi) + \int\limits_t^{t_1} C(U, -e^{(t-s)A^*}\psi) ds$

5. $\tau = t - t_1 \implies Z(t) = e^{-\tau A} M_1 + \int\limits_0^{\tau} e^{-\alpha A}(-U) d\alpha$

6. $Z(t)$ непрерывно зависит от t на $[t_0, t_1]$.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\dot{x} = u$. Положим $\tau = t - t_0$.

$$X(\tau) = M_0 + \int\limits_0^{\tau} U d\alpha = M_0 + \tau \cdot \operatorname{conv} U$$

Пусть теперь $\tau = t_1 - t$

$$Z(\tau) = M_1 + \int\limits_0^{\tau} -U d\alpha = M_1 + \tau \operatorname{conv}(-U)$$

Пусть $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\operatorname{conv} U = \left\{ x \in E^2 \colon x_1 = 1, |x_2| \leqslant 1 \right\},$$
$$\operatorname{conv} -U = \left\{ x \in E^2 \colon x_1 = -1, |x_2| \leqslant 1 \right\}$$

1.9.3 Сопряжённое уравнение

Пусть есть уравнение $\dot{x} = Ax + u$. Рассмотрим *сопряжённое уравнение* $\dot{\psi} = -A^*\psi$. Очевидно, что оно всегда имеет решение $\psi \equiv 0$. Но нас будут интересовать нетривиальные решения. По формуле Коши

$$\psi(t) = e^{-(t-t_0)A^*}\psi(t_0)$$

При этом

$$\psi(t) \neq 0 \iff \psi(t_0) \neq 0$$

Определение. Любое ненулевое решение сопряжённого уравнения называется сопряжённой переменной:

Если начальное условие задано в момент времени t_1, то решение будет иметь вид

$$\psi(t) = e^{-(t-t_0)A^*}\psi(t_1), \psi(t_1).$$

Лемма. *Докажем третье свойство. Пусть* $\dot{x} = Ax + u, t \in [t_0, t_1]$, $\psi(t)$ *— сопряжённая переменная.*

1. $C(X(t), \psi(t)) = C(M_0, \psi(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} C(U, \psi(s))ds$

2. $C(Z(t), -\psi(t)) = C(M_1, -\psi(t_1)) + \int\limits_{t}^{t_1} C(U, \psi(s))ds$

3. $\big(x(t), \psi(t)\big) = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} (u(s), \psi(s))ds$

4. $\big(x(t), \psi(t)\big) = (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int\limits_{t}^{t_1} (u(s), \psi(s))ds$

Доказательство. Пусть $x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}ds$.

$$\psi(t) = e^{-(t-t_0)A^*}\psi(t_0)$$

$$(x(t), \psi(t)) = \left(e^{(t-t_0)A}\left(x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A}u(s)ds\right), e^{-(t-t_0)A^*}\psi(t_0)\right)$$

$$(x(t), \psi(t)) = \left(x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A}u(s)ds,\ e^{(t-t_0)A^*}e^{-(t-t_0)A^*}\psi(t_0)\right)$$

$$(x(t), \psi(t)) = \left(x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A}u(s)ds,\ \psi(t_0)\right) =$$

$$\big(x(t_0), \psi(t_0)\big) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(e^{-(s-t_0)A^*}u(s), \psi(t_0)\Big)ds =$$

$$\big(x(t_0), \psi(t_0)\big) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(u(s)e^{-(s-t_0)A^*}, \psi(t_0)\Big)ds =$$

$$\big(x(t_0), \psi(t_0)\big) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(u(s), e^{-(s-t_0)A}\psi(t_0)\Big)ds =$$

$$\big(x(t_0), \psi(t_0)\big) + \int\limits_{t_0}^{t} (u(s), \psi(s))ds.$$

Четвёртое доказывается аналогично. Первые два проверяются непосредственно подставкой формулы из определения сопряжённой переменной. ■

1.9.4 Управляемость

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \end{cases}$$

Определение. Пусть $t \in [t_0, t_1]$. Объект называется *управляемым*, если

$$\exists u \in D_U \colon x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1.$$

Очевидно, что критерием управляемости является условие $X(t_1) \cap M_1 \neq \varnothing$. Используя опорные функции, можем получить необходимое условие управляемости:

$$C(X(t_1), \psi) + C(M_1, -\psi) \geqslant 0 \quad \forall \psi \in E^n, \psi \neq 0$$

Можно воспринимать ψ как сопряжённую переменную:

$$C(X(t_1), \psi(t_1)) + C(M_1, -\psi(t_1)) \geqslant 0 \quad \forall \psi(t_1) \neq 0$$

Тогда можно сформулировать необходимое (и достаточное, в случае $M_0, M_1 \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$) условие управляемости с помощью сопряжённой переменной:

$$C(M_0, \psi(t_0)) + \int\limits_{t_0} C(U, \psi(s))ds + C(M_1, -\psi(t_1)) \geqslant 0$$