

Конспект лекций по курсу Оптимальное управление

Оглавление

1	Оптимальное управление	2
1.1	Лекция 1	2
1.1.1	Описание задачи	2
1.1.2	Линейный случай	5
1.1.3	Модель тележки	5
1.2	Лекция 2	6
1.2.1	Модель пружинного маятника	7
1.2.2	Элементы выпуклого анализа	9
1.3	Лекция 3	13
1.3.1	Сложение множеств. Умножение множеств на число и на матрицу	13
1.3.2	Метрика	16
1.4	Лекция 4	19
1.4.1	Лемма об отделимости	19
1.4.2	Опорная функция	21
1.5	Лекция 6	25

Глава 1

Оптимальное управление

1.1 Лекция 1

Рекомендованная литература:

1. Киселёв Ю.Н. «Оптимальное управление», 1988
2. Благодатских В.И. «Введение в оптимальное управление», 2001
3. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. «Оптимальное управление. Линейная теория и приложения», 2007
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. «Математическая теория оптимальных процессов», 1966

Теория ОУ родилась в ходе решения задачи о моделировании боя двух самолётов (задачи уклонения/преследования), описываемой системой дифференциальных уравнений. Задача эта до сих пор не решена ввиду её сложности.

Как правило, сложные задачи пытаются упростить. С этой целью можно рассмотреть модель с одним самолётом. Однако и она для нас будет слишком сложной. Поэтому имеет смысл начать с ещё более простой модели — управляемого снаряда, который нужно доставить из точки А в точку В в наикратчайшее время.

Мы будем иметь дело с моделями, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.1.1 Описание задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

Здесь $x \in E^n$ (x принадлежит пространству \mathbb{R}^n , где введено скалярное произведение — евклидову пространству). То есть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i = x_i(t)$.

Аналогично, $u \in E^m$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $u_i = u_i(t)$. При этом их множество значений ограничено: $u_{i \min} \leq u_i \leq u_{i \max}$, $u \in U \subset E^m$. Множество U называется **областью управления**. Как правило, оно замкнуто. Пример — $U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mid \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} = 1 \right\}$.

Таким образом, можно переписать уравнение в виде

$$\dot{x} = f(x, u(t)) = F(x, t) \quad (1.2)$$

Из какого класса выбираются функции $u_i(t)$? Наиболее популярны следующие варианты:

- кусочно-непрерывные функции
- кусочно-постоянные функции
- измеримые функции

Первые два часто используются в приложениях. С первым случаем есть некоторая тонкость в определении. В математическом анализе под кусочно-непрерывной функцией понимается следующее:

Определение. Функция $u(t)$ называется **кусочно-непрерывной** на отрезке $[t_0, t_1]$, если она непрерывна на нём всюду за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода.

В оптимальном управлении для удобства принято считать, что кусочно-непрерывная функция **непрерывна в концах отрезка** $[t_0, t_1]$.

Второй может соответствовать простейшим прикладным случаям, отражая, например, состояние управляющих электромагнитов: 0 — выключен, 1 — включен. В этом случае $U = \{0, 1\}$ (*замкнуто!*), и функции $u_i(t)$ принимают лишь два возможных значения.

Третий случай нужен в основном в теоретических исследованиях. В целом, можно выбрать и какой-нибудь другой класс, например, гладких функций.

Выбрав область управления U и класс, из которого мы будем брать функции, мы определяем **класс допустимых управлений** D_U . Например, $D_U = \left\{ u(t) \mid \begin{cases} u(t) \in U \ \forall t \in [t_0, t_1] \\ u(t) \in C[t_0, t_1] \end{cases} \right\}$.

Для решения систем дифференциальных уравнений хотелось бы применить теоремы о существовании и единственности решений, но ввиду того, что рассматриваемые классы достаточно широки, не всегда соблюдаются условия

теорем — например, липшицевость функции $F(x, t) \equiv f(x, u(t))$. Приходится либо накладывать дополнительные ограничения на условие, либо вообще по-другому вводить понятие решения дифференциального уравнения.

Конкретизируем задачу. Выберем некоторую фиксированную функцию $u = u(t) \in D_U$. Пусть мы хотим, чтобы в начальный момент времени t_0 точка $x_0 = x(t_0)$ принадлежала некоторому множеству $M_0 \subset E^n$, а в конечный момент времени t_1 точка $x(t_1)$ принадлежала множеству $M_1 \subset E^n$. Тогда мы должны решить, по сути, некоторую краевую задачу с условиями

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Моменты времени t_0, t_1 могут быть как фиксированными, так и свободными. Обычно начальный момент t_0 фиксирован, а t_1 свободно. Если решение такой задачи существует, то пара $(u(t), x(t))$ называется **допустимым процессом**.

Но как надо выбирать функцию u ? Для этого вводится **функционал качества**:

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt \quad (1.4)$$

Выберем наиболее «качественную» функцию $u(t)$ — ту, на которой достигается минимум этого функционала (можно было бы искать максимум, но эти задачи эквивалентны и сводятся друг к другу умножением $f^0(x, u)$ на -1). Т.е. решим задачу

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt \rightarrow \min_{u \in D_U} \quad (1.5)$$

где x — решение уравнения 1.3, соответствующего функции u .

Т.е. полностью наша задача будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ J[u] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt \rightarrow \min_{u \in D_U} \end{cases} \quad (1.6)$$

Однако решить её в таком виде в общем случае весьма сложно.

1.1.2 Линейный случай

Разберёмся сначала с более простым случаем. Предположим, что функция $f(x, u)$ имеет вид

$$f(x, u) = Ax + Bu, \quad (1.7)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Таким образом, в правой части нет произведений вида $x_i u_j$. На самом деле, можно даже предположить, что функция имеет вид

$$f(x, u) = Ax + u \quad (1.8)$$

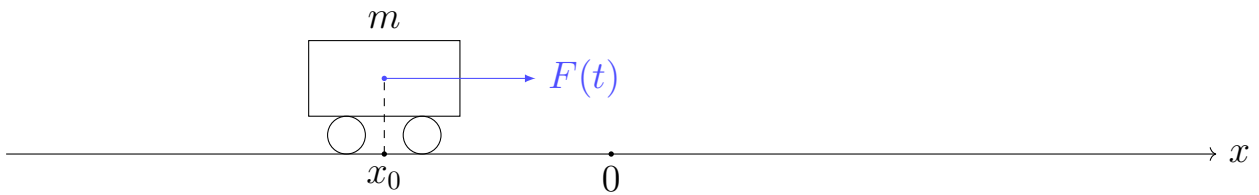
так как всегда можно сделать замену $v = Bu$. Чтобы не менять обозначения, предположим, что мы уже сделали эту замену и $u \in E^n$.

Кроме того, положим $f^0(x, u) \equiv 1$. Тогда функционал качества приобретает очень простой вид: $J[u] = \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = t_1 - t_0$. Таким образом, минимизируя функционал качества, мы находим такую функцию $u(t)$, при которой точка $x(t)$ быстрее всего попадает из множества M_0 в множество M_1 .

Мы приходим к формулировке **линейной задачи быстрогодействия**:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u \in D_U} \end{cases} \quad (1.9)$$

1.1.3 Модель тележки



Рассмотрим движение тележки по прямой под действием внешней силы $F(t)$. $x = x(t)$ — координата. Будем считать, что $F_{\min} \leq F(t) \leq F_{\max} \forall t \in [t_0, t_1]$ (что логично — в реальном мире сила ограничена). Пусть мы хотим доставить тележку в точку $x = 0$ и остановить её там. Тогда краевые условия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, & \dot{x}(t_0) &= x_{01} \\ x(t_1) &= 0, & \dot{x}(t_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Вспомним второй закон Ньютона: $m\ddot{x} = F$. Перепишем это в виде $\ddot{x} = \frac{F}{m}$

и обозначим $v = \frac{F}{m}$. Покажем, что уравнение $\ddot{x} = v$ можно переписать в виде, аналогичном 1.9. Для этого введём переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Тогда $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = \ddot{x} = v$. Для простоты считаем, что $\frac{F_{\min}}{m} = -1$, $\frac{F_{\max}}{m} = 1$.

Теперь введём матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$. Тогда область управления $U = 0 \times [-1, 1]$ (замкнута!).

С учётом этих обозначений задачу о тележке можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{u} \\ \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{01} \end{pmatrix} \\ \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u \in D_U} \end{cases} \quad (1.11)$$

Таким образом, модель тележки сводится к линейной задаче быстродействия.

1.2 Лекция 2

Напомним формулировки. Основная задача (будет решена в следующем семестре):

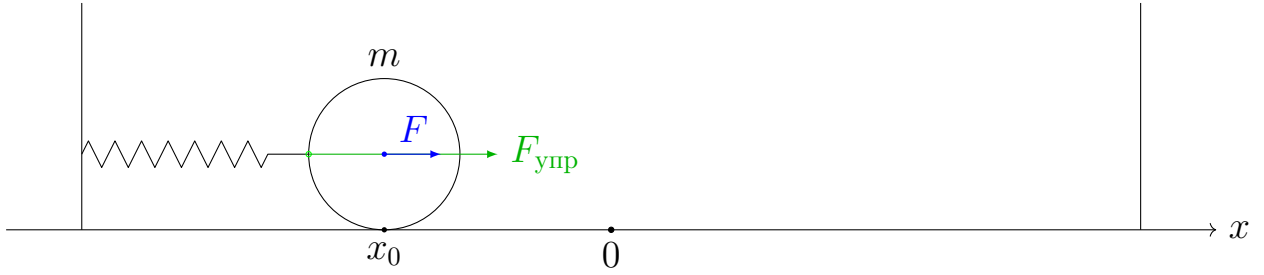
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & x \in E^n, u \in E^m \\ x(t_0) \in M_0 \subset E^n \\ x(t_1) \in M_1 \subset E^n \\ J[u] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt \rightarrow \min_{u \in D_U}, & U \subset E^m \end{cases} \quad (1.12)$$

Упрощённая задача — задача линейного быстрогодействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \subset E^n \\ x(t_1) \in M_1 \subset E^n \\ J = t_1 - t_0 \rightarrow \min, \quad U \subset E^n \\ u \in D_U \end{cases} \quad (1.13)$$

Приведём ещё один пример задачи, описываемой линейной системой.

1.2.1 Модель пружинного маятника



Запишем второй закон Ньютона для пружинного маятника, на который действует сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$ и внешняя сила F .

$$m\ddot{x} = -kx + F \quad (1.14)$$

Опять же, хотим доставить маятник в точку $x = 0$ и остановить его там.

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_{01} \\ x(t_1) &= 0, \quad \dot{x}(t_1) = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Преобразуем уравнение:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{F}{m} \quad (1.16)$$

Сделаем замены $\frac{k}{m} = \omega^2$, $\frac{F}{m} = v$. Для простоты считаем, что $\omega = 1$, $|v| \leq 1$.

Тогда $\ddot{x} = -x + v$. Как и в прошлой задаче, введём переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Тогда

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.17)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + v \quad (1.18)$$

Обозначим $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, а также $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда можно записать уравнение 1.17 в виде

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{u} \\ \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{01} \end{pmatrix} \\ \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u \in D_U} \end{cases} \quad (1.19)$$

В этом курсе будут обсуждаться следующие темы:

1. Управляемость (т.е. существование хотя бы одного допустимого процесса $(u(t), x(t))$ (т.е. эта штука вообще управляется?))
2. Теоремы существования.
3. Необходимые условия оптимальности.
4. Достаточные условия оптимальности.
5. Теоремы единственности.

В ходе курса нам придётся решать задачу минимизации некоторого функционала $J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt$. Может возникнуть желание решать их методами вариационного исчисления. Однако, оказывается, что зачастую это невозможно. Причина — в замкнутости области управления U .

Задачи вариационного исчисления решались на открытых множествах, и это позволяло ввести **вариацию функции** δf . При этом $f + \delta f$ всё ещё принадлежала исходному множеству. В задачах оптимального управления может встретиться, например, множество $U = \{0, 1\}$. В этой области будут лежать лишь кусочно-постоянные функции со значениями 0 и 1, и почти любая вариация выведет нас за пределы области управления.

Кроме того, решения задач оптимального управления очень часто проходят именно по границе множества U , что только усугубляет описанную выше проблему.

Таким образом, мы вынуждены искать другие методы. Для этого нам нужно познакомиться с элементами выпуклого анализа.

1.2.2 Элементы выпуклого анализа

В евклидовом пространстве E^n есть скалярное произведение $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Это позволяет нам ввести метрику и расстояние:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (1.20)$$

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \quad (1.21)$$

Нам потребуется определение шара:

Определение. Замкнутым шаром в E^n называется множество

$$S_r(a) = \{x \in E^n : \|x - a\| \leq r\}. \quad (1.22)$$

А кроме того, ещё целый блок определений, касающийся свойств множеств в E^n .

1. f — *внутренняя* точка множества $F \in E^n$, если $\exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(f) \subset F$.
2. $\text{int } F$ — множество всех внутренних точек множества F (или *внутренность* множества F).
3. f — *предельная* точка множества $F \in E^n$, если $\forall \varepsilon > 0 S_\varepsilon(f) \cap F \neq \emptyset$.
4. F — *замкнутое* множество, если оно содержит все свои предельные точки.
5. \overline{F} — минимальное замкнутое множество, содержащее F (или *замыкание* множества F).
6. $\partial F = F \setminus \text{int } F$ — *граница* множества F .
7. F ограничено, если $\exists R > 0 : F \subset S_R(0)$.
8. Ограниченное и замкнутое множество в E^n — компакт.
9. $\Omega(E^n)$ — множество непустых компактов в E^n .
10. Пусть $a, b \in E^n$. Тогда $[a, b] = \{x \in E^n \mid x = \lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in [0, 1]\}$.
11. Множество F называется выпуклым, если $\forall a, b \in F \implies [a, b] \subset F$.
12. Пусть $F \in E^n$. Тогда $\text{conv } F$ — минимальное выпуклое множество, содержащее F (*минимальная выпуклая оболочка*).

13. $\text{conv } \Omega(E^n)$ — множество непустых выпуклых компактов в E^n .

14. *Модуль* множества $F \in \Omega(E^n)$: $|F| = \max_{x \in F} |x|$. Для ограниченного F —
 $|F| = \sup_{x \in F} |x|$.

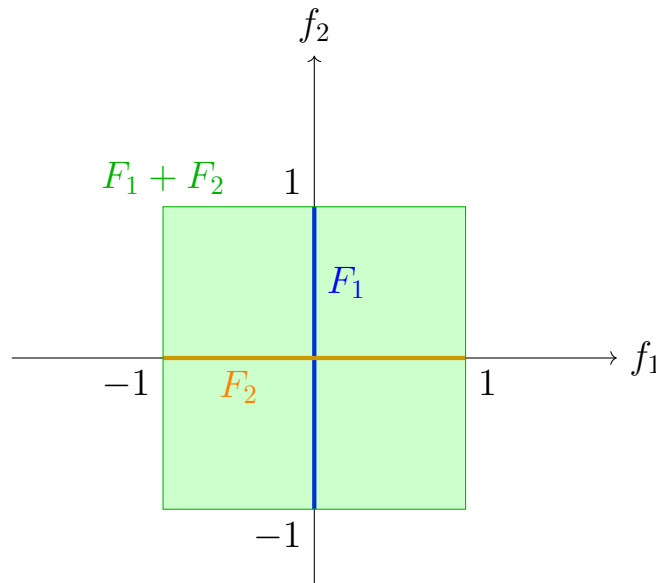
Сложение множеств

Определение. Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. Введём операцию сложения множеств:

$$F_1 + F_2 = \{f = f_1 + f_2 \mid f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\}.$$

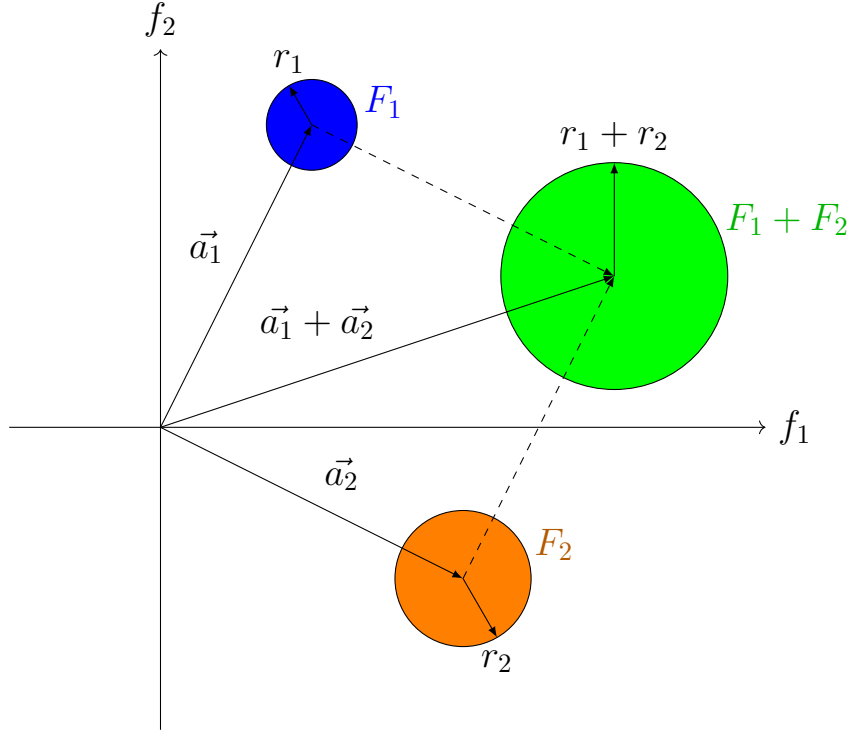
Пример. Пусть $F_1 = \{f_1\} \subset E^n$, $F_2 \in \Omega(E^n)$. Тогда $F_1 + F_2 = f_1 + F_2$ — параллельный перенос на вектор $f_1 \in E^n$.

Пример. Пусть $F_1 = \{f \in E^2 : f_1 = 0, |f_2| \leq 1\}$,
 $F_2 = \{f \in E^2 : |f_1| \leq 1, f_2 = 0\}$ — отрезки.
Тогда $F_1 + F_2 = \{f \in E^2 : |f_1| \leq 1, |f_2| \leq 1\}$ — квадрат.



Замечание. Здесь f_1 и f_2 — первая и вторая координаты двумерного вектора, а не элементы множеств F_1 и F_2 , как было в определении суммы множеств.

Пример. Пусть $F_1 = S_{r_1}(a_1)$, $F_2 = S_{r_2}(a_2)$. Тогда $F_1 + F_2 = S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.



Докажем это. Для того, чтобы показать равенство произвольных множеств A и B , достаточно доказать двустороннее вложение: $A \subset B$ и $B \subset A$.

- $S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) \subset S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.

Возьмём произвольный $f \in S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$. По определению суммы множеств это значит, что существуют такие $g \in S_{r_1}(a_1), h \in S_{r_2}(a_2)$, что $g + h = f$. Тогда

$$\|f - a_1 - a_2\| = \|g + h - a_1 - a_2\| \leq \|g - a_1\| + \|h - a_2\| \leq r_1 + r_2.$$

Таким образом, $f \in S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2) = \{f \in E^n : \|f - a_1 - a_2\| \leq r_1 + r_2\}$. В силу произвольности выбора f получаем, что $S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) \subset S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.

- $S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2) \subset S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$.

Возьмём произвольный $f \in S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$. Легко видеть, что $\tilde{f} = f - a_1 - a_2 \in S_{r_1+r_2}(0)$:

$$\|\tilde{f}\| = \|f - a_1 - a_2\| \leq r_1 + r_2.$$

Положим теперь

$$\tilde{g} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \tilde{f}, \quad \tilde{h} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \tilde{f}.$$

Очевидно, что $\tilde{g} + \tilde{h} = \tilde{f}$. При этом $\tilde{g} \in S_{r_1}(0)$, ведь $\|\tilde{g}\| = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \|\tilde{f}\| \leq$

$\frac{r_1}{r_1 + r_2}(r_1 + r_2) = r_1$. Аналогично $\tilde{h} \in S_{r_2}(0)$.

Если мы введём g и h как

$$g = \tilde{g} + a_1, \quad h = \tilde{h} + a_2$$

то $g \in S_{r_1}(a_1)$, $h \in S_{r_2}(a_2)$ и

$$g + h = \tilde{g} + \tilde{h} + a_1 + a_2 = \tilde{f} + a_1 + a_2 = f - a_1 - a_2 + a_1 + a_2 = f$$

Но это значит, что $f \in S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$. В силу произвольности f заключаем, что $S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2) \subset S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$.

Покажем, что класс $\Omega(E^n)$ замкнут относительно сложения, т.е. $\forall F_1, F_2 \in \Omega(E^n) \implies F_1 + F_2 \in \Omega(E^n)$. Для этого достаточно показать, что множество $F_1 + F_2$ замкнуто и ограничено, так как в конечномерном случае это равносильно компактности. Ограниченность очевидна, так как

$$\forall f \in F_1 + F_2 \quad \|f\| = \|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$$

а множества F_1, F_2 ограничены.

Покажем замкнутость. Возьмём произвольную сходящуюся последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x, x_k \in F_1 + F_2$. Нам нужно показать, что $x \in F_1 + F_2$.

Каждый член последовательности можно представить в виде $x_k = y_k + z_k$, $y_k \in F_1$, $z_k \in F_2$. Таким образом, получаем две последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$. В силу компактности множества F_1 можем выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_m}\}_{m=1}^{+\infty} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} y \in F_1$. Возьмём в последовательности $\{z_n\}$ члены с номерами $n_m, m \in \mathbb{N}$. В силу компактности множества F_2 можем выделить подпоследовательность $\{z_{n_{m_k}}\}_{k=1}^{+\infty} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} z \in F_2$.

Тогда последовательность $x_{n_{m_k}} = y_{n_{m_k}} + z_{n_{m_k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y + z$. Но последовательность $\{x_n\}$ по условию сходится к x , а значит, все её подпоследовательности сходятся к тому же пределу. Таким образом, $x = y + z \in F_1 + F_2$, что и требовалось доказать.

1.3 Лекция 3

1.3.1 Сложение множеств. Умножение множеств на число и на матрицу

Сложение непустых компактов

На прошлой лекции мы ввели операцию сложения множеств: если $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$, то

$$F_1 + F_2 = \{f \in E^n : f = f_1 + f_2, f_1 \in F_1, f_2 \in F_2\}$$

где $\Omega(E^n)$ — множество непустых компактов в E^n . Также мы доказали, что $\Omega(E^n)$ замкнуто относительно сложения, то есть

$$F_1, F_2 \in \Omega(E^n) \implies F_1 + F_2 \in \Omega(E^n).$$

Утверждение. *Множество непустых выпуклых компактов замкнуто относительно операции сложения, то есть $F_1, F_2 \in \text{conv } \Omega(E^n)$, то $F_1 + F_2 \in \text{conv } \Omega(E^n)$.*

Доказательство. Действительно, пусть $x, y \in F_1 + F_2$. Тогда

$$\begin{aligned} x &= a_1 + b_1, \quad a_1 \in F_1, \quad b_1 \in F_2 \\ y &= a_2 + b_2, \quad a_2 \in F_1, \quad b_2 \in F_2 \end{aligned}$$

Возьмём $\lambda \in [0, 1]$.

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(a_2 + b_2) = \underbrace{\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2}_{\in F_2}$$

Таким образом, любая точка из отрезка $[x, y]$ представляется в виде суммы элементов из F_1 и F_2 , что и означает, что $[x, y] \subset F_1 + F_2$. В силу произвольности x, y делаем вывод, что $F_1 + F_2 \in \text{conv } \Omega(E^n)$. ■

Операция сложения множеств:

1. Коммутативна: $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$
2. Ассоциативна: $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$
3. Существует нейтральный элемент $e = \{0\}$: $F + \{0\} = F \quad \forall F$.

При этом не всегда существует такое G , что $F + G = \{0\}$. (Точнее, такого G почти никогда не существует).

Умножение множества на число

Определение. Пусть $\lambda \in E^1$, $F \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$\lambda \cdot F = \{\lambda x \mid x \in F\}. \quad (1.23)$$

Легко проверяются следующие утверждения:

- $F \in \Omega(E^n) \implies \lambda F \in \Omega(E^n)$.
- $F \in \text{conv } \Omega(E^n) \implies \lambda F \in \text{conv } \Omega(E^n)$.
- $\lambda \cdot S_r(0) = S_{|\lambda r|}(0)$.

Операция умножения множества на число:

1. Ассоциативна: $(\alpha\beta)F = \alpha(\beta F)$
2. Существует нейтральный элемент $e = 1$: $1 \cdot F = F \quad \forall F$
3. Дистрибутивно относительно сложения множеств: $\lambda(F + G) = \lambda F + \lambda G$

При этом $(\alpha + \beta)F$, вообще говоря, $\neq \alpha F + \beta F$:

$$\begin{aligned} F &= S_r(0), \alpha = 1, \beta = -1 \\ (1 + (-1)) \cdot S_r(0) &= \{0\} \\ 1 \cdot S_r(0) + (-1) \cdot S_r(0) &= S_r(0) + S_r(0) = S_{2r}(0) \end{aligned}$$

Сложение непустых выпуклых компактов

Рассмотрим класс $\text{conv } \Omega(E^n)$. Пусть $\alpha, \beta \geq 0$. Оказывается, что тогда $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$.

Доказательство. Покажем взаимное вложение.

$$(\alpha + \beta)F \subset \alpha F + \beta F:$$

$$x \in (\alpha + \beta)F \implies \exists f \in F: x = (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f \in \alpha F + \beta F$$

$$(\alpha + \beta)F \supset \alpha F + \beta F:$$

$$x \in \alpha F + \beta F \implies \exists f_1, f_2 \in F: x = \alpha f_1 + \beta f_2 =$$

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} f_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} f_2 \right) = (\alpha + \beta) \underbrace{(\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2)}_{\in F} \in (\alpha + \beta)F$$

Заметим, что здесь мы существенно использовали то обстоятельство, что $\alpha, \beta \geq 0$. В противном случае λ могло выйти за пределы отрезка $[0, 1]$. ■

Геометрически можно интерпретировать множество выпуклых компактов как конус (точнее, множество векторов, принадлежащих конусу) - в нём тоже выполняются все аксиомы линейного пространства, кроме существования обратного элемента.

Умножение множества на матрицу

Определение. Пусть $F \in \Omega(E^n)$, $A \in E^{n \times n}$. Тогда

$$AF = \{z \in E^n : z = Af, f \in F\}. \quad (1.24)$$

Например, если $A = \lambda I$, то $AF = \lambda F$.

Легко проверить следующие утверждения:

- $F \in \Omega(E^n) \implies AF \in \Omega(E^n)$.
- $F \in \text{conv } \Omega(E^n) \implies AF \in \text{conv } \Omega(E^n)$.

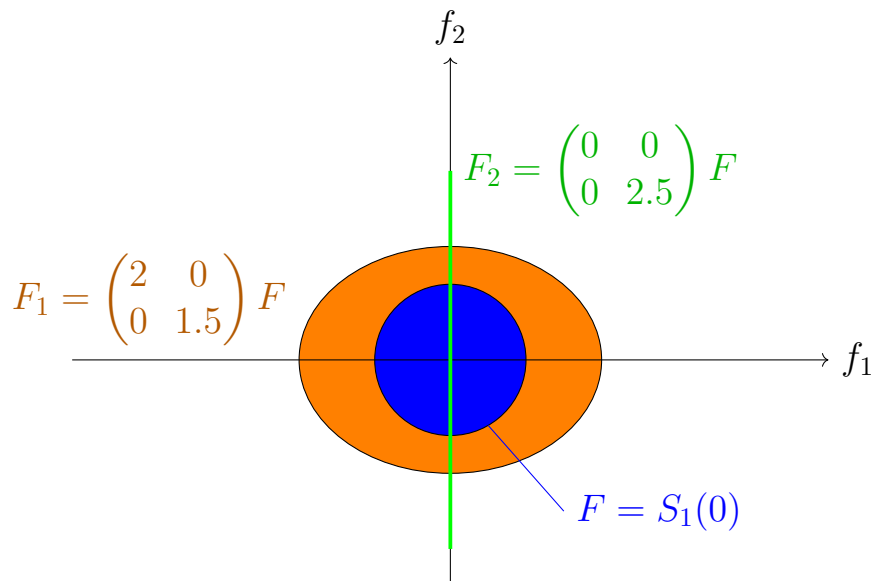
Свойства:

1. $(AB)F = A(BF)$
2. $IF = F$
3. $A(F + G) = AF + AG$
4. $(A + B)F \subset AF + BF$

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a \neq 0, b \neq 0$, $F = S_1(0)$.

Тогда $AF = \{f \in E^2 : \left(\frac{f_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{b}\right)^2 \leq 1\}$.

Если $a = 0$, то $AF = \{f \in E^2 : f_1 = 0, |f_2| \leq |b|\}$ — отрезок.



1.3.2 Метрика

Ввести на $\Omega(E^n)$ или $\text{conv } \Omega(E^n)$ скалярное произведение или норму нельзя, так как они не являются линейными пространствами. Но можно ввести метрику.

Определение. Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. **Метрика Хаусдорфа:**

$$h(F_1, F_2) = \min_{r \geq 0} \{r \mid F_1 \subset F_2 + S_r(0), F_2 \subset F_1 + S_r(0)\} \quad (1.25)$$

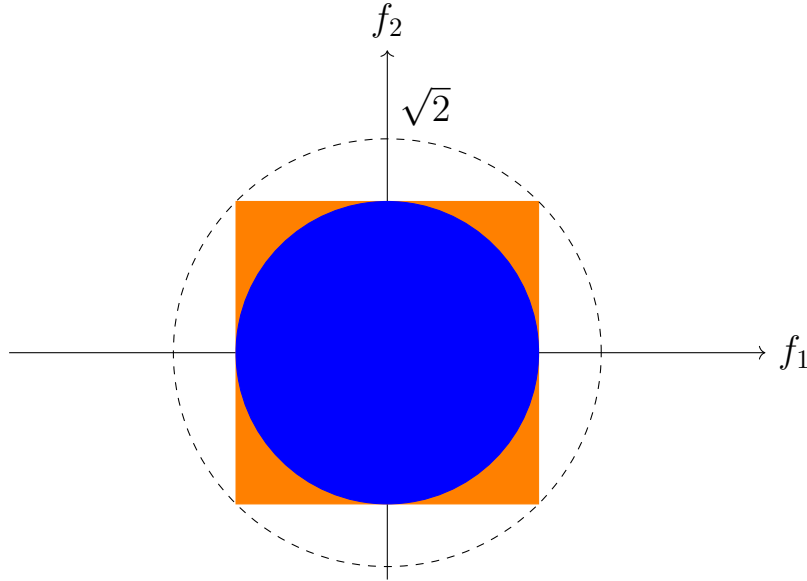
Пример. Пусть $F_1 = \{0\}, F_2 = S_1(0) \subset E^2$. Очевидно, что

$$\begin{cases} F_1 \subset F_2 + S_r(0) & \forall r \geq 0 \\ F_2 \subset F_1 + S_r(0) & \forall r \geq 1 \end{cases}$$

Значит, $h(F_1, F_2) = 1$.

Пример. Пусть $F_1 = \{|f_1| \leq 1, |f_2| \leq 1\}$ — квадрат, $F_2 = S_1(0)$. Шар, очевидно, всегда вложен в квадрат: $F_2 \subset F_1 + S_r(0) \forall r \geq 0$. При этом $F_1 \subset F_2 + S_r(0) \forall r \geq \sqrt{2} - 1$.

Значит, $h(F_1, F_2) = \sqrt{2} - 1$.



Пример. $h(\{0\}, F) = |F| \forall F \in \Omega(E^n)$.

Докажем, что это действительно метрика. Симметричность ($h(F_1, F_2) = h(F_2, F_1)$) и положительная определённость ($h(F_1, F_2) \geq 0, h(F_1, F_2) = 0 \iff$

$F_1 = F_2$) сразу следуют и определения. Введём обозначения для расстояний:

$$\begin{cases} h(F_1, F_2) = h_{12}, \\ h(F_1, F_3) = h_{13}, \\ h(F_3, F_2) = h_{23} \end{cases}$$

Далее,

$$\begin{aligned} F_1 &\subset F_3 + S_{h_{13}}(0), \quad F_3 \subset F_2 + S_{h_{23}}(0) \\ F_1 &\subset F_3 + S_{h_{13}}(0) \subset F_2 + S_{h_{23}}(0) + S_{h_{13}}(0) = F_2 + S_{h_{23}+h_{13}}(0) \implies \\ &h_{12} \leq h_{13} + h_{23} \end{aligned}$$

Вернёмся к компактам и выпуклым оболочкам.

Определение. Отрезок $[a, b] = \{z \in E^n : z = \lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in [0, 1]\}$.

Определение. Множество F выпукло, если $\forall a, b \in F \implies [a, b] \in F$.

Определение. G — выпуклая оболочка множества F , если

- G выпукло;
- $F \subset G$.

Определение. $H = \text{conv } F$ — минимальная выпуклая оболочка множества F , если

- H выпукло;
- $F \subset H$;
- \forall выпуклой оболочки G верно $H \subset G$.

Замечание. Минимальная выпуклая оболочка — это пересечение всех выпуклых оболочек множества F .

Пример. Выпуклая оболочка трёх точек, не лежащих на одной прямой — треугольник

Как строить выпуклую оболочку?

1. Подход Каратеодори:

$$\text{conv } F = \left\{ z \in E^n : \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i = 1 \forall f_i \in F \right\},$$

где m пока произвольное.

Теорема Каратеодори. Для построения выпуклой оболочки описанным выше методом достаточно взять $m = n + 1$, где $n = \text{Dim } E^n$.

2. Геометрический подход (подход Болтянского):

Утверждение. Пусть $F \in E^n \setminus \emptyset$.

$$F_0 = F.$$

$$F_1 = \{[x, y] : x, y \in F_0\}.$$

$$F_2 = \{[x, y] : x, y \in F_1\}.$$

...

$$\text{Тогда } \text{conv } F = H = \bigcup_{m=0}^{+\infty} F_m.$$

Доказательство. Надо показать, что

$$(a) \quad F \subset H$$

$$(b) \quad H \text{ выпукло}$$

$$(c) \quad \forall G \supset F, G \text{ выпукло} \implies H \subset G.$$

Заметим, что $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset H$. Отсюда очевидно, что $H \supset F = F_0$.

$\forall x \in H \implies \exists m_1 \in \mathbb{N} : x \in F_{m_1}$. Аналогично, $\forall y \in H \implies \exists m_2 \mathbb{N} : x \in F_{m_2}$. Положим $m = \max(m_1, m_2)$. Тогда $x, y \in F_m \implies [x, y] \subset F_{m+1} \subset H$. То есть, мы показали, что для произвольных $x, y \in H$ верно, что $[x, y] \in H$. Значит, H выпукло.

Возьмём любое выпуклое $G \supset F$. В силу выпуклости G : $F_0 \subset G \implies F_1 \subset G \implies \dots$ Тогда $H \subset G$. ■

Задача (о стабилизации цепочки множеств):

$$\exists l = l(n, F) \leq n : F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_l = F_{l+1} = F_{l+2} = \dots = H.$$

Отрезок строится за 1 шаг, треугольник за два шага. Рассмотрим 4 точки в пространстве, не лежащие в одной плоскости (тетраэдр).

$$F_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\} \text{ — вершины.}$$

$$F_1 = \{[a_0, a_1], [a_0, a_2], [a_0, a_3], [a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_2, a_3]\} \text{ — рёбра.}$$

$$F_2 = \text{тетраэдр (за счёт соединения противоположных рёбер).}$$

Текущая и неулучшаемая оценка числа шагов для построения выпуклой оболочки — $l = \lceil \log_2 n \rceil + 1$.

1.4 Лекция 4

1.4.1 Лемма об отделимости

На прошлой лекции мы показали, что

$$H = \text{conv } F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad (1.26)$$

где $F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$.

Напомним, как строились эти множества, и заодно перепишем это в немного другой форме:

$$\begin{aligned} F_n &= \bigcup_{x,y \in F_{n-1}} [x, y] = \bigcup_{x,y \in F_{n-1}} \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{ \lambda x + (1 - \lambda)y \} = \\ &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \bigcup_{x,y \in F_{n-1}} \{ \lambda x + (1 - \lambda)y \} = \\ &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{ \lambda F + (1 - \lambda)F \} \end{aligned}$$

$\exists s = s(n, F): F_s = F_{s+1} = \dots = H$. Кроме того, $F \in \Omega(E^n) \implies \text{conv } F \in \text{conv } \Omega(E^n)$.

Утверждение (Лемма об отделимости). Пусть $H \in \text{conv } \Omega(E^n)$, $x_0 \notin H$. Тогда

$$\exists \psi \in E^n \setminus \{0\}: (h - x_0, \psi) < 0, \forall h \in H.$$

Или, эквивалентно,

$$\exists \psi \in S_1(0): (h - x_0, \psi) < 0, \forall h \in H.$$

Доказательство. Найдём $\min_{h \in H} \|h - x_0\| = \|h_0 - x_0\| > 0$. Положим $\psi = x_0 - h_0$. Тогда

$$(h - x_0, x_0 - h_0) < 0, \forall h \in H.$$

Или

$$(h - x_0, h_0 - x_0) > 0, \forall h \in H.$$

Действительно, при $h = h_0$

$$(h_0 - x_0, h_0 - x_0) = \|h_0 - x_0\|^2 > 0, \forall h \in H.$$

Иначе для любого $h \in H$ рассмотрим вектор $h(\lambda) = \lambda h + (1 - \lambda)h_0$, $\lambda \in [0, 1]$. Так как h_0 по определению является ближайшим к x_0 вектором из H , можем

сказать, что $\|h(\lambda) - x_0\|^2 \geq \|h_0 - x_0\|^2$. Распишем норму как скалярное произведение:

$$\begin{aligned} (\lambda h + (1 - \lambda)h_0 - x_0, \lambda h + (1 - \lambda)h_0 - x_0) &\geq \|h_0 - x_0\|^2 \\ (\lambda(h - h_0) + h_0 - x_0, \lambda(h - h_0) + h_0 - x_0) &\geq \|h_0 - x_0\|^2 \\ \lambda^2\|h - h_0\|^2 + 2\lambda(h - h_0, h_0 - x_0) + \|h_0 - x_0\|^2 &\geq \|h_0 - x_0\|^2 \\ \lambda^2\|h - h_0\|^2 + 2\lambda(h - h_0, h_0 - x_0) &\geq 0 \end{aligned}$$

Для $\lambda \in (0, 1]$:

$$\lambda\|h - h_0\|^2 + 2(h - h_0, h_0 - x_0) \geq 0$$

Устремим λ к нулю:

$$\lambda\|h - h_0\|^2 + 2(h - h_0, h_0 - x_0) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2(h - h_0, h_0 - x_0) \geq 0, \quad \forall h \in H$$

Значит,

$$\begin{aligned} (h - x_0, h_0 - x_0) &= (h - h_0 + h_0 - x_0, h_0 - x_0) = \\ &= (h - h_0, h_0 - x_0) + \|h_0 - x_0\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Для того, чтобы ψ принадлежал единичной сфере, достаточно его нормировать — ведь $h_0 \neq x_0 \implies \psi \neq 0$. ■

Можно отказаться от замкнутости, беря замыкание исходного множества. Тогда знак неравенства станет нестрогим. Можно также отказаться от ограниченности, рассматривая пересечение исходного множества с шаром $S_{\|h-x_0\|}(x_0)$. В доказательстве мы используем ближайший к x_0 элемент h_0 , а любые элементы, лежащие вне пересечения, будут дальше от x_0 .

От выпуклости отказаться нельзя.

Если $x_0 \in \partial H$, то $\exists \psi: (h - x_0, \psi) \leq 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} x_0 \in \partial H &\implies \exists \{x_k\} \notin H: x_k \rightarrow x_0. \\ \forall x_k \exists \psi_k \in S_1(0): (h - x_0, \psi_k) < 0 &\implies \\ \exists \psi_0: (h - x_0, \psi_0) \leq 0 \quad \forall h \in H. \end{aligned}$$

Это можно ещё записать как

$$\exists \psi_0: \max_{h \in H} (h, \psi_0) \leq (x_0, \psi_0).$$

1.4.2 Опорная функция

Определение. Пусть $F \in \Omega(E^n)$, $\psi \in E^n$. Опорная функция —

$$C(F, \psi) = \max_{f \in F} (f, \psi). \quad (1.27)$$

Если $\exists R > 0: F \subset E^n: F \subset S_R(0)$, то

$$C(F, \psi) = \sup_{f \in F} (f, \psi).$$

Пример. Если $F = \{f\}$, то $C(F, \psi) = (f, \psi)$. Это один из немногих примеров, где опорная функция дифференцируема.

Пример. Если $F = S_1(0)$, то $C(F, \psi) = \max_{f \in S_1(0)} (f, \psi)$. Если выбрать $\psi \in S_1(0)$, то задача сводится к нахождению максимальной проекции. Значит,

$$C(S_1(0), \psi) = \left(\frac{\psi}{\|\psi\|}, \psi \right) = \frac{1}{\|\psi\|} (\psi, \psi) = \|\psi\|.$$

Пример. Если $F = S_1(0) \setminus \partial S_1(0)$, то $C(F, \psi) = \sup_{f \in S_1(0)} (f, \psi) = \|\psi\|$.

Пример. Если $F = \partial S_1(0) = \{\psi: \|\psi\| = 1\}$, то вновь $C(F, \psi) = \|\psi\|$. Заметим, что норма не является дифференцируемой в нуле.

Пример. Пусть $F = \{f \in E^2: |f_1| \leq 1, |f_2| \leq 1\}$ — квадрат.

$$\begin{aligned} C(F, \psi) &= \max_{f \in F} (f, \psi) = \\ &= \max_{f \in F} (f_1 \psi_1 + f_2 \psi_2) = \\ &= \max_{|f_1| \leq 1} (f_1 \psi_1) + \max_{|f_2| \leq 1} (f_2 \psi_2) = \\ &= \begin{cases} \psi_1, & \psi_1 > 0 \\ 0, & \psi_1 = 0 \\ -\psi_1, & \psi_1 < 0 \end{cases} + \begin{cases} \psi_2, & \psi_2 > 0 \\ 0, & \psi_2 = 0 \\ -\psi_2, & \psi_2 < 0 \end{cases} = |\psi_1| + |\psi_2| \end{aligned}$$

Соответственно, здесь нет дифференцируемости на осях.

Определение. Опорное множество:

$$\mathcal{U}(F, \psi) = \{f \in F: (f, \psi) = C(F, \psi)\}$$

Определение. Опорная гиперплоскость:

$$\Gamma_\psi = \{f \in E^n : (f, \psi) = C(F, \psi)\}$$

Замечание. $\mathcal{U}(F, \psi) = F \cap \Gamma_\psi$.

Свойства опорной функции

Очевидно, $|C(F, \psi)| = \sup_{f \in F} (f, \psi) \leq \sup_{f \in F} \|f\| \cdot \|\psi\| \leq |F| \cdot \|\psi\|$.

1. F — ограниченное множество, $\psi \in E^n \implies$

$$C(F, \psi) = C(\overline{F}, \psi).$$

2. Однородность степени 1 по второму аргументу:

$$C(F, \lambda\psi) = \lambda C(F, \psi), \quad \forall \lambda > 0$$

3. Полуаддитивность по второму аргументу:

$$\begin{aligned} C(F, \psi_1 + \psi_2) &\leq C(F, \psi_1) + C(F, \psi_2), \\ \forall F \in \Omega(E^n), \forall \psi_1, \psi_2 \in E^n \end{aligned}$$

4. Условие Липшица по второму аргументу:

$$|C(F, \psi_1) - C(F, \psi_2)| \leq |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|$$

Замечание. $C(F, \cdot): E^n \mapsto E^n$ непрерывна по ψ .

Замечание. $C(F, \cdot): E^n \mapsto E^n$ выпукла:

$$\begin{aligned} C(F, \lambda\psi_1 + (1 - \lambda)\psi_2) &\leq C(F, \lambda\psi_1) + C(F, (1 - \lambda)\psi_2) = \\ &= \lambda C(F, \psi_1) + (1 - \lambda)C(F, \psi_2). \end{aligned}$$

5. Пусть $A \in E^{n \times n}, F \in \Omega(E^n), \psi \in E^n$.

$$C(AF, \psi) = C(F, A^*\psi).$$

6. Положительная однородность степени 1 по первому аргументу:

$$C(\lambda F, \psi) = \lambda C(F, \psi), \quad \lambda > 0.$$

7. Аддитивность по первому аргументу:

$$C(F_1 + F_2, \psi) = C(F_1, \psi) + (F_2, \psi), \quad F_1, F_2 \in \Omega(E^n).$$

Замечание. Пусть $\alpha, \beta \geq 0$, $F, G \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$C(\alpha F + \beta G, \psi) = \alpha C(F, \psi) + \beta C(G, \psi).$$

Доказательства.

1. Если максимум в определении опорной функции достигается на предельной точке f_0 множества F , $f_0 \notin F$, то существует последовательность $\{f_k\} \rightarrow f_0$, такая что

$$(f_0 - x_0, \psi) - \frac{1}{k} < (f_k - x_0, \psi) \leq (f_0 - x_0, \psi).$$

С одной стороны, $C(F, \psi) \leq (f_0 - x_0, \psi)$, так как это максимум. С другой стороны, если $C(F, \psi) = (f_0 - x_0, \psi) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то

$$\exists k \in \mathbb{N}: \frac{1}{k} < \varepsilon \implies (f_k - x_0, \psi) > (f_0 - x_0, \psi) - \frac{1}{k} > (f_0 - x_0, \psi) - \varepsilon,$$

что приводит к противоречию. Значит, $C(F, \psi) = C(\overline{F}, \psi)$.

2. Воспользуемся тем, что константу можно выносить из скалярного произведения и максимума:

$$C(F, \lambda\psi) = \max_{f \in F} (f, \lambda\psi) = \lambda \max_{f \in F} (f, \psi) = \lambda C(F, \psi)$$

3. Пользуясь первым свойством, докажем сразу для произвольного ограниченного множества:

$$\begin{aligned} C(F, \psi_1 + \psi_2) &= C(\overline{F}, \psi_1 + \psi_2) = \\ &= \max_{f \in \overline{F}} (f, \psi_1 + \psi_2) = \\ &= \max_{f \in \overline{F}} ((f, \psi_1) + (f, \psi_2)) \leq \\ &= \max_{f \in \overline{F}} (f, \psi_1) + \max_{f \in \overline{F}} (f, \psi_2) = \\ &= C(\overline{F}, \psi_1) + C(\overline{F}, \psi_2) = C(F, \psi_1) + C(F, \psi_2) \end{aligned}$$

4. Воспользуемся свойством 3:

$$\begin{aligned} C(F, \psi_1) &= C(F, \psi_1 - \psi_2 + \psi_1) \leq C(F, \psi_1 - \psi_2) + C(F, \psi_2) \\ C(F, \psi_1) - C(F, \psi_2) &\leq C(F, \psi_1 - \psi_2) \leq |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|. \end{aligned}$$

В силу симметричности:

$$C(F, \psi_2) - C(F, \psi_1) \leq C(F, \psi_2 - \psi_1) \leq |F| \cdot \|\psi_2 - \psi_1\|$$

Или

$$C(F, \psi_1) - C(F, \psi_2) \geq -|F| \cdot \|\psi_2 - \psi_1\|.$$

Отсюда и вытекает, что $|C(F, \psi_1) - C(F, \psi_2)| \leq |F| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|$.

5. Воспользуемся определением сопряжённого оператора:

$$\begin{aligned} C(AF, \psi) &= \max_{g \in AF} (g, \psi) = \\ \max_{f \in F} (Af, \psi) &= \max_{f \in F} (f, A^*\psi) = C(F, A^*\psi). \end{aligned}$$

6. Достаточно заметить, что умножение на скаляр равносильно умножению на скалярную матрицу и использовать свойства 5 и 2:

$$C(\lambda F, \psi) = C(\lambda IF, \psi) = C(F, \lambda I^*\psi) = \lambda C(F, \psi).$$

7. Воспользуемся определением суммы множеств и независимостью f_1, f_2 :

$$\begin{aligned} C(F_1 + F_2, \psi) &= \max_{f \in F_1 + F_2} (f, \psi) = \max_{f_1 \in F_1, f_2 \in F_2} (f_1 + f_2, \psi) = \\ &= \max_{f_1 \in F_1, f_2 \in F_2} ((f_1, \psi) + (f_2, \psi)) = \\ &= \max_{f_1 \in F_1} (f_1, \psi) + \max_{f_2 \in F_2} (f_2, \psi) = C(F_1, \psi) + C(F_2, \psi). \end{aligned}$$

На следующей лекции мы докажем важный факт: $C(F, \psi) = C(\text{conv } F, \psi)$.

1.5 Лекция 6

Мы остановились на липшицевости опорной функции по первому аргументу:

$$|C(F_1, \psi) - C(F_2, \psi)| \leq \|\psi\| \cdot h(F_1, F_2)$$

Возникает вопрос — как искать расстояние Хаусдорфа? По определению это делать неудобно.

Утверждение (Свойство 16). Пусть $F_1, F_2 \in \text{conv } \Omega(E^n)$. Тогда

$$h(F_1, F_2) = \max_{\psi \in S} |C(F_1, \psi) - C(F_2, \psi)|.$$

Доказательство. Обозначим $M = \max_{\psi \in S} |C(F_1, \psi) - C(F_2, \psi)|$. Покажем, что $h(F_1, F_2) \leq M$ и одновременно $h(F_1, F_2) \geq M$. Пользуясь липшицевостью и тем, что $\forall \psi \in S \|\psi\| = 1$, получаем:

$$\forall \psi \in S \implies |C(F_1, \psi) - C(F_2, \psi)| \leq h(F_1, F_2)$$

Но тогда $h(F_1, F_2) \geq M = \max_{\psi \in S} |C(F_1, \psi) - C(F_2, \psi)|$.

Пусть $\psi \in E^n, \psi \neq 0$. Тогда $\frac{\psi}{\|\psi\|} \in S \implies$

$$\left| C\left(F_1, \frac{\psi}{\|\psi\|}\right) - C\left(F_2, \frac{\psi}{\|\psi\|}\right) \right| \leq M$$

Значит,

$$|C(F_1, \psi) - C(F_2, \psi)| \leq M \cdot \|\psi\| \quad \forall \psi \in E^n$$

Раскроем модуль:

$$-M\|\psi\| \leq C(F_1, \psi) - C(F_2, \psi) \leq M \cdot \|\psi\| \quad \forall \psi \in E^n$$

Можем записать

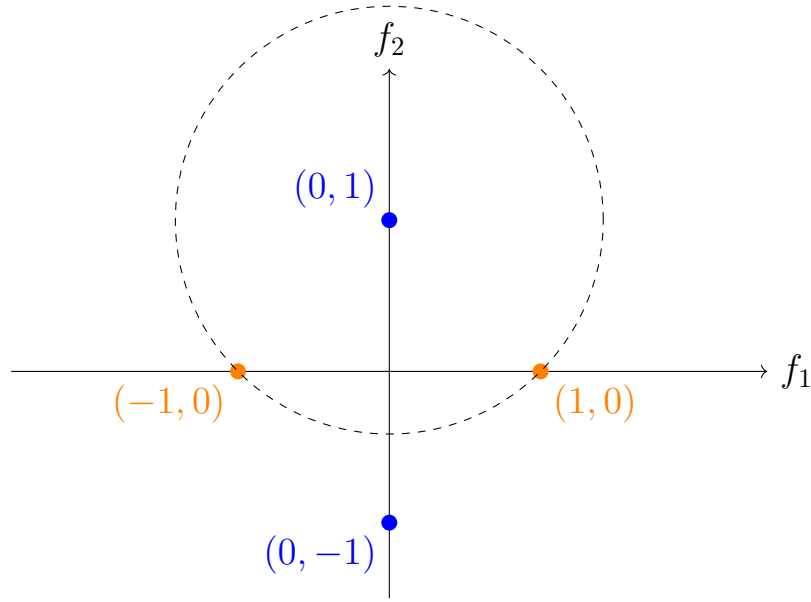
$$\begin{aligned} C(F_1, \psi) &\leq C(F_2, \psi) + M\|\psi\| = \\ &C(F_2, \psi) + C(S_M(0), \psi) = C(F_2 + S_M(0), \psi) \quad \forall \psi \in E^n \implies \\ &F_1 \subset F_2 + S_M(0) \end{aligned}$$

Аналогичными рассуждениями получаем $F_2 \subset F_1 + S_M(0)$. Тогда $h(F_1, F_2) \leq M$, откуда и вытекает, что

$$h(F_1, F_2) = M = \max_{\psi \in S} |C(F_1, \psi) - C(F_2, \psi)|$$

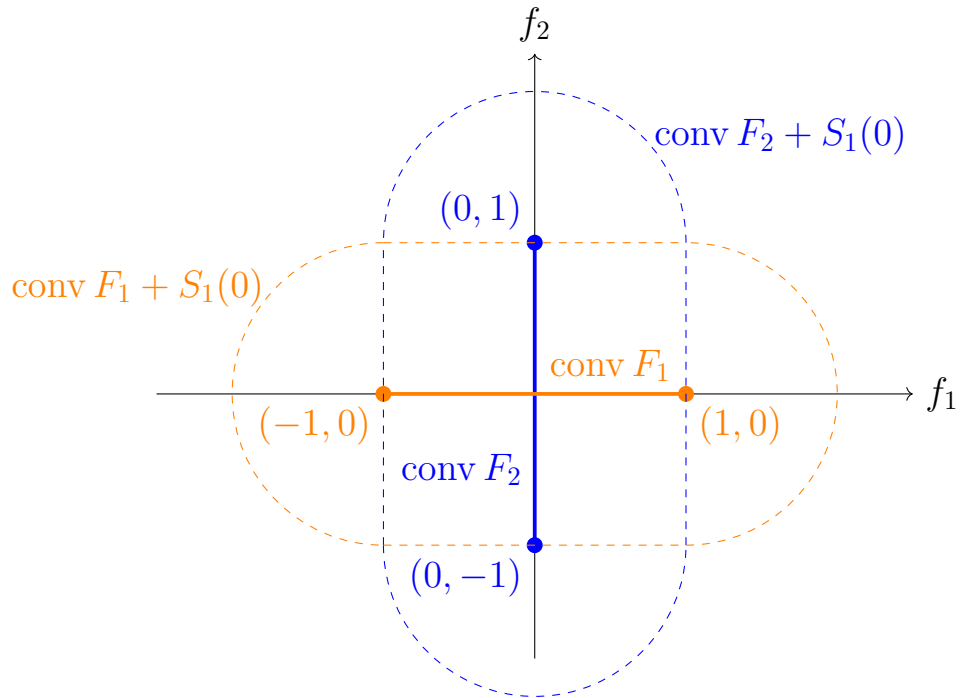


Пример. $F_1 = \{(1, 0), (-1, 0)\}$, $F_2 = \{(0, 1), (0, -1)\}$.



Понятно, что хаусдорфово расстояние между этими двухточечными множествами равно $\sqrt{2}$.

Рассмотрим теперь их выпуклые оболочки:



Теперь посчитаем её с помощью доказанного утверждения:

$$h(F_1, F_2) = \max_{\psi \in S} |C(F_1, \psi) - C(F_2, \psi)| = \max_{\psi \in S} \left| \max_{f \in F_1} (f, \psi) - \max_{f \in F_2} (f, \psi) \right| =$$

$$\max_{\psi \in S} \left| \max\{\psi_1, -\psi_1\} - \max\{\psi_2, -\psi_2\} \right| = \max_{\psi \in S} ||\psi_1| - |\psi_2|| = 1.$$

Пример. Расстояние между шарами $h(S_{r_1}(a_1), S_{r_2}(a_2))$: шары являются выпуклыми компактами, поэтому можно применить свойство 16.

$$h(S_{r_1}(a_1), S_{r_2}(a_2)) = \max_{\psi \in S} |(a_1, \psi) + r_1 \|\psi\| + (a_2, \psi) + r_2 \|\psi\|| =$$

$$\max_{\psi \in S} |(a_1 - a_2, \psi) + (r_1 - r_2)| = \|a_1 - a_2\| + |r_1 - r_2|$$

Максимум достигается на векторе $\operatorname{sgn}(r_1 - r_2) \cdot \frac{a_1 - a_2}{\|a_1 - a_2\|}$.

Заметим, что модуль множества $|F|$ можно выразить не только как $h(F, \{0\})$, но и как $\max_{\psi \in S} C(F, \psi)$. В самом деле,

$$\max_{\psi \in S} C(F, \psi) = \max_{\psi \in S} \max_{f \in F} (f, \psi) = \max_{f \in F} \max_{\psi \in S} (f, \psi) = \left\{ \psi = \frac{f}{\|f\|} \right\} =$$

$$\max_{f \in F} \left(f, \frac{f}{\|f\|} \right) = \max_{f \in F} \|f\| = |F|$$

Утверждение. Пусть функция $f: E^n \mapsto E^n$ — конечная. $f(\psi)$ — опорная функция некоторого выпуклого компакта $F \iff$ выполняются два свойства:

1. $f(\lambda\psi) = \lambda f(\psi) \quad \forall \lambda > 0, \psi \in E^n$
2. $f(\psi_1 + \psi_2) \leq f(\psi_1) + f(\psi_2) \quad \psi_1, \psi_2 \in E^n$

При этом $F = \bigcap_{\psi \in S} \{x \in E^n: (x, \psi) \leq f(\psi)\}$.

Многозначные отображения.

Определение. Функция $F(t): E^1 \mapsto \Omega(E^n)$ называется многозначным отображением.

Пример. $F(t) = S_{|t|}(2t)$.

Пример. $F(t) = t \cdot \{-1, 1\}$.

Пример. $F(t) = \begin{cases} -1, t < 0 \\ [-1, 1], t = 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$.

Пример. $F(t) = \begin{cases} [-1, 1], t \neq 0 \\ 0, t = 0 \end{cases}$.

Определение. Отображение $f: E^n \mapsto E^1$ называется *однозначной ветвью* многозначного отображения $F(t)$, если

$$\forall t \in E^n \quad f(t) \in F(t)$$

Пример. $f = \begin{cases} t, t < 1/2 \\ -t, t \geq 1/2 \end{cases}$ — однозначная ветвь для $F(t) = t \cdot \{-1, 1\}$.

Пример. $f \equiv 0, f = \sin x$ — однозначные ветви для $F(t) = \begin{cases} -1, t < 0 \\ [-1, 1], t = 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$.

Пусть $F(t): E^1 \mapsto \Omega(E^n)$.

Определение. Многозначное отображение $F(t)$ непрерывно в точке t_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \\ |t - t_0| \leq \delta \implies h(F(t), F(t_0)) \leq \varepsilon$$

Определение. $F(t)$ непрерывна на T , если она непрерывна $\forall t \in T$.

Утверждение.

$$F(t) \text{ непр. м. о.} \implies \\ C(F(t), \psi) \text{ непрерывно по } t \text{ равномерно по } \psi \in S \implies \\ \text{conv } F(t) \text{ непрерывна.}$$

Доказательство. По свойству 15:

$$|C(F(t), \psi) - C(F(t_0), \psi)| \leq \|\psi\| \cdot h(F(t), F(t_0)) \leq h(F(t), F(t_0)) \leq \varepsilon \quad \forall t: |t - t_0| \leq \delta$$

Вторая часть:

$$h(\text{conv } F(t), \text{conv } F(t_0)) = \max_{\psi \in S} |C(F(t), \psi) - C(F(t_0), \psi)| \leq \varepsilon \quad \forall t: |t - t_0| \leq \delta$$

■

Следствие. $F(t): E^1 \mapsto \text{conv } \Omega(E^n)$. Тогда

$$F(t) \text{ непр. м. о.} \iff \\ C(F(t), \psi) \text{ непрерывно по } t \text{ равномерно по } \psi \in S \iff \\ \text{conv } F(t) \text{ непрерывна по } t \text{ равномерно по } \psi \in S \iff \\ \text{conv } F(t) \text{ непрерывна по } t \text{ по } \forall \text{ фиксированного } \psi \in S$$

Доказательство.

\Rightarrow Очевидно

\Leftarrow От противного:

$$\exists r > 0 \exists \{t_k\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} t_0, \psi_k \in S \forall K \in \mathbb{N}: \exists k \geq K: \quad (1.28)$$

$$|C(F(t_k), \psi_k) - C(F(t_0), \psi_k)| \geq r > 0 \quad (1.29)$$

Считаем, что ψ_k сходится, так как это последовательность на компакте, и из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

$$\begin{aligned} |C(F(t_k), \psi_k) - C(F(t_0), \psi_k) + C(F(t_k), \psi_0) - C(F(t_0), \psi_0) + \\ C(F(t_0), \psi_0) - C(F(t_0), \psi_k)| \leq \\ |F(t_k)| \|\psi_k - \psi_0\| + |C(F(t_k), \psi_0) - C(F(t_0), \psi_0)| \\ + |F(t_0)| \|\psi_k - \psi_0\| \end{aligned}$$

Всё три слагаемых стремятся к нулю.

Допустим теперь, что $|F(t_k)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$. Но

$$|F(t_k)| = \max_{\psi \in S} C(F(t_k), \psi) = C(F(t_k), \phi_k), \quad \phi_k \in S$$

где ϕ_k — вектора, на которых достигается максимум. $\phi_k \in S \Rightarrow \phi_k \rightarrow \phi_0 \in S$. (На самом деле, сходится некоторая подпоследовательность, но мы просто переобозначим её за ϕ_k)

$$\begin{aligned} C(F(t_k), \phi_k) - C(F(t_0), \phi_0) &\leq |F(t_0)| \cdot \|\phi_k - \phi_0\| \\ |F(t_k)| - C(F(t_0), \phi_0) &\leq |F(t_0)| \cdot \|\phi_k - \phi_0\| \\ |F(t_k)| (1 - \|\phi_k - \phi_0\|) &\leq C(F(t_0), \phi_0) \end{aligned}$$

То есть $|F(t_k)|$ ограничена, и это противоречит нашему предположению. ■

Пример. $C(F(t), \psi) = \begin{cases} -\psi, & \psi < 0 \\ |\psi|, & \psi = 0 \\ \psi, & \psi > 0 \end{cases}$

Пример. Бывают непрерывные многозначные отображения, у которых нет ни одной непрерывной однозначной ветви.

$$F(t): [0, 1] \mapsto \Omega(E^n)$$

$$t \in [0, 1]: F(t) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \ln t) \\ \sin(\alpha + \ln t) \end{pmatrix}, t \leq \alpha \leq 2\pi \right.$$

Пусть $f(t)$ — однозначная. Тогда в окрестности нуля она совершает бесконечное число оборотов и не может быть непрерывной.