Конспект лекций по курсу
Оптимальное управление

Оглавление

Глава 1

Оптимальное управление

1.1 Лекция 1

Рекомендованная литература:

1. Киселёв Ю.Н. «Оптимальное управление», 1988
2. Благодатских В.И. «Введение в оптимальное управление», 2001
3. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. «Оптимальное управление. Линейная теория и приложения», 2007
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. «Математическая теория оптимальных процессов», 1966

Теория ОУ родилась в ходе решения задачи о моделировании боя двух самолётов (задачи уклонения/преследования), описываемой системой дифференциальных уравнений. Задача эта до сих пор не решена ввиду её сложности.

Как правило, сложные задачи пытаются упростить. С этой целью можно рассмотреть модель с одним самолётом. Однако и она для нас будет слишком сложной. Поэтому имеет смысл начать с ещё более простой модели — управляемого снаряда, который нужно доставить из точки А в точку Б в наикратчайшее время.

Мы будем иметь дело с моделями, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.1.1 Описание задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

Здесь $x \in E^n$ (x принадлежит пространству $\mathbb{R}^n$, где введено скалярное произведение — евклидову пространству). То есть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i = x_i(t)$.

Аналогично, $u \in E^m$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $u_i = u_i(t)$. При этом их множество значений ограничено: $u_{i\min} \leqslant u_i \leqslant u_{i\max}$, $u \in U \subset E^m$. Множество U называется **областью управления**. Как правило, оно замкнуто. Пример — $U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \dfrac{u_1^2}{a^2} + \dfrac{u_2^2}{b^2} = 1 \right\}$.

Таким образом, можно переписать уравнение в виде

$$\dot{x} = f(x, u(t)) = F(x, t) \tag{1.2}$$

Из какого класса выбираются функции $u_i(t)$? Наиболее популярны следующие варианты:

- кусочно-непрерывные функции
- кусочно-постоянные функции
- измеримые функции

Первые два часто используются в приложениях. С первым случаем есть некоторая тонкость в определении. В математическом анализе под кусочно-непрерывной функцией понимается следующее:

Определение. Функция $u(t)$ называется **кусочно-непрерывной** на отрезке $[t_0, t_1]$, если она непрерывна на нём всюду за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода.

В оптимальном управлении для удобства принято считать, что кусочно-непрерывная функция **непрерывна в концах отрезка** $[t_0, t_1]$.
Второй может соответствовать простейшим прикладным случаям, отражая, например, состояние управляющих электромагнитов: 0 — выключен, 1 — включен. В этом случае $U = \{0, 1\}$ *(замкнуто!)*, и функции $u_i(t)$ принимают лишь два возможных значения.
Третий случай нужен в основном в теоретических исследованиях. В целом, можно выбрать и какой-нибудь другой класс, например, гладких функций.

Выбрав область управления U и класс, из которого мы будем брать функции, мы определяем **класс допустимых управлений** D_U. Например, $D_U = \left\{ u(t) \,\middle|\, \begin{cases} u(t) \in U \; \forall\, t \in [t_0, t_1] \\ u(t) \in C[t_0, t_1] \end{cases} \right\}$.

Для решения систем дифференциальных уравнений хотелось бы применить теоремы о существовании и единственности решений, но ввиду того, что рассматриваемые классы достаточно широки, не всегда соблюдаются условия теорем — например, липшицевость функции $F(x,t) \equiv f(x, u(t))$. Приходится либо накладывать дополнительные ограничения на условие, либо вообще по-другому вводить понятие решения дифференциального уравнения.

Конкретизируем задачу. Выберем некоторую фиксированную функцию $u = u(t) \in D_U$. Пусть мы хотим, чтобы в начальный момент времени t_0 точка $x_0 = x(t_0)$ принадлежала некоторому множеству $M_0 \subset E^n$, а в конечный момент времени t_1 точка $x(t_1)$ принадлежала множеству $M_1 \subset E^n$. Тогда мы должны решить, по сути, некоторую краевую задачу с условиями

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \end{cases} \tag{1.3}$$

Моменты времени t_0, t_1 могут быть как фиксированными, так и свободными. Обычно начальный момент t_0 фиксирован, а t_1 свободно. Если решение такой задачи существует, то пара $\big(u(t), x(t)\big)$ называется **допустимым процессом**.

Но как надо выбирать функцию u? Для этого вводится **функционал качества**:

$$J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \tag{1.4}$$

Выберем наиболее «качественную» функцию $u(t)$ — ту, на которой достигается минимум этого функционала (можно было бы искать максимум, но эти задачи эквивалентны и сводятся друг к другу умножением $f^0(x,u)$ на -1). Т.е. решим задачу

$$J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min_{u \in D_U} \tag{1.5}$$

где x — решение уравнения 1.3, соответствующего функции u.

Т.е. полностью наша задача будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.6}$$

Однако решить её в таком виде в общем случае весьма сложно.

1.1.2 Линейный случай

Разберёмся сначала с более простым случаем. Предположим, что функция $f(x,u)$ имеет вид

$$f(x,u) = Ax + Bu, \tag{1.7}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Таким образом, в правой части нет произведений вида $x_i u_j$. На самом деле, можно даже предположить, что функция имеет вид

$$f(x,u) = Ax + u \tag{1.8}$$

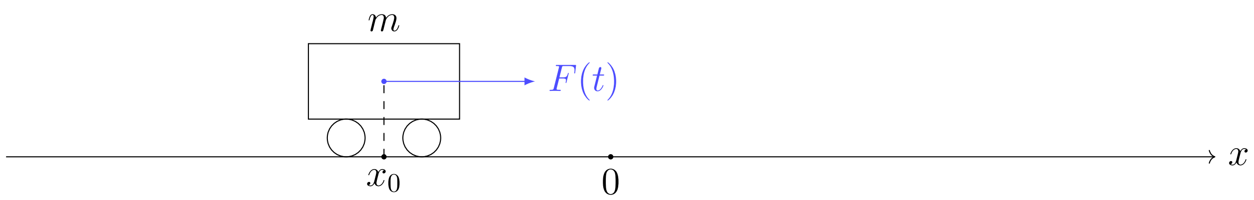
так как всегда можно сделать замену $v = Bu$. Чтобы не менять обозначения, предположим, что мы уже сделали эту замену и $u \in E^n$.

Кроме того, положим $f^0(x,u) \equiv 1$. Тогда функционал качества приобретает очень простой вид: $J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} 1\,dt = t_1 - t_0$. Таким образом, минимизируя функционал качества, мы находим такую функцию $u(t)$, при которой точка $x(t)$ быстрейшим образом попадает из множества M_0 в множество M_1.

Мы приходим к формулировке **линейной задачи быстродействия**:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.9}$$

1.1.3 Модель тележки



Рассмотрим движение тележки по прямой под действием внешней силы $F(t)$. $x = x(t)$ — координата. Будем считать, что $F_{\min} \leqslant F(t) \leqslant F_{\max}\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$ (что логично — в реальном мире сила ограничена). Пусть мы хотим доставить тележку в точку $x = 0$ и остановить её там. Тогда краевые условия выглядят следующим образом:

$$\begin{matrix} x(t_0) = x_0, & \dot{x}(t_0) = x_{01} \\ x(t_1) = 0, & \dot{x}(t_1) = 0 \end{matrix} \tag{1.10}$$

Вспомним второй закон Ньютона: $m\ddot{x} = F$. Перепишем это в виде $\ddot{x} = \dfrac{F}{m}$ и обозначим $v = \dfrac{F}{m}$. Покажем, что уравнение $\ddot{x} = v$ можно переписать в виде, аналогичном 1.9. Для этого введём переменные $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$. Тогда $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = v$. Для простоты считаем, что $\dfrac{F_{\min}}{m} = -1, \dfrac{F_{\max}}{m} = 1$.

Теперь введём матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$. Тогда область управления $U = 0 \times [-1, 1]$ *(замкнута!)*.

С учётом этих обозначений задачу о тележке можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{u} \\ \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{01} \end{pmatrix} \\ \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.11}$$

Таким образом, модель тележки сводится к линейной задаче быстродействия.

1.2 Лекция 2

Напомним формулировки. Основная задача (будет решена в следующем семестре):

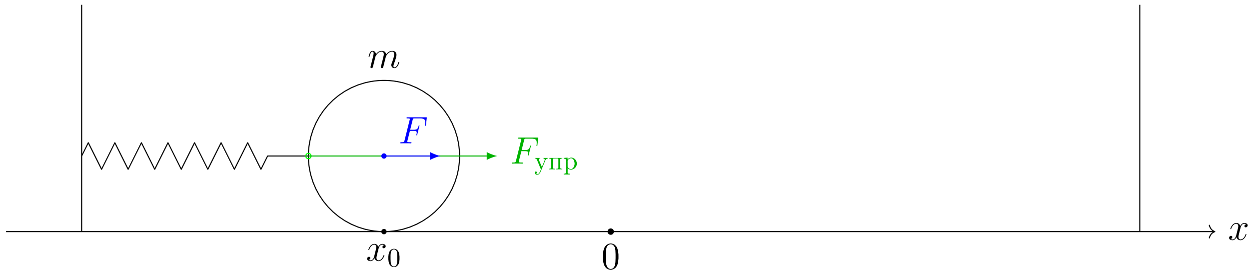
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \quad x \in E^n,\ u \in E^m \\ x(t_0) \in M_0 \subset E^n \\ x(t_1) \in M_1 \subset E^n \\ J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x, u)\, dt \to \min\limits_{u \in D_U}, \quad U \subset E^m \end{cases} \tag{1.12}$$

Упрощённая задача — задача линейного быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \subset E^n \\ x(t_1) \in M_1 \subset E^n \\ J = t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U}, \quad U \subset E^n \end{cases} \tag{1.13}$$

Приведём ещё один пример задачи, описываемой линейной системой.

1.2.1 Модель пружинного маятника



Запишем второй закон Ньютона для пружинного маятника, на который действует сила упругости $F_{упр} = -kx$ и внешняя сила F.

$$m\ddot{x} = -kx + F \tag{1.14}$$

Опять же, хотим доставить маятник в точку $x = 0$ и остановить его там.

$$\begin{matrix} x(t_0) = x_0, & \dot{x}(t_0) = x_{01} \\ x(t_1) = 0, & \dot{x}(t_1) = 0 \end{matrix} \tag{1.15}$$

Преобразуем уравнение:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{F}{m} \tag{1.16}$$

Сделаем замены $\dfrac{k}{m} = \omega^2$, $\dfrac{F}{m} = v$. Для простоты считаем, что $\omega = 1, |v| \leqslant 1$.

Тогда $\ddot{x} = -x + v$. Как и в прошлой задаче, введём переменные $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$. Тогда

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{1.17}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + v \tag{1.18}$$

Обозначим $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, а также $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда можно записать уравнение 1.17 в виде

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{u} \\ \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{01} \end{pmatrix} \\ \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.19}$$

В этом курсе будут обсуждаться следующие темы:

1. Управляемость (т.е. существование хотя бы одного допустимого процесса $\big(u(t), x(t)\big)$ (т.е. эта штука вообще управляется?))
2. Теоремы существования.
3. Необходимые условия оптимальности.
4. Достаточные условия оптимальности.
5. Теоремы единственности.

В ходе курса нам придётся решать задачу минимизации некоторого функционала $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt$. Может возникнуть желание решать их методами вариационного исчисления. Однако, оказывается, что зачастую это невозможно. Причина — в замкнутости области управления U.

Задачи вариационного исчисления решались на открытых множествах, и это позволяло ввести **вариацию функции** δf. При этом $f + \delta f$ всё ещё принадлежала исходному множеству. В задачах оптимального управления может встретиться, например, множество $U = \big\{0, 1\big\}$. В этой области будут лежать лишь кусочно-постоянные функции со значениями 0 и 1, и почти любая вариация выведет нас за пределы области управления.

Кроме того, решения задач оптимального управления очень часто проходят именно по границе множества U, что только усугубляет описанную выше проблему.

Таким образом, мы вынуждены искать другие методы. Для этого нам нужно познакомиться с элементами выпуклого анализа.

1.2.2 Элементы выпуклого анализа

В евклидовом пространстве E^n есть скалярное произведение $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Это позволяет нам ввести метрику и расстояние:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{1.20}$$

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{1.21}$$

Нам потребуется определение шара:

Определение. Замкнутым шаром в E^n называется множество

$$S_r(a) = \left\{x \in E^n \colon \|x - a\| \leqslant r\right\}. \tag{1.22}$$

А кроме того, ещё целый блок определений, касающийся свойств множеств в E^n.

1. f — *внутренняя* точка множества $F \in E^n$, если $\exists\, \varepsilon > 0 \colon S_\varepsilon(f) \subset F$.
2. $\operatorname{int} F$ — множество всех внутренних точек множества F (или *внутренность* множества F).
3. f — *предельная* точка множества $F \in E^n$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $S_\varepsilon(f) \cap F \neq \varnothing$.
4. F — *замкнутое* множество, если оно содержит все свои предельные точки.
5. $\overline{F}$ — минимальное замкнутое множество, содержащее F (или *замыкание* множества F).
6. $\partial F = F \setminus \operatorname{int} F$ — *граница* множества F.
7. F ограничено, если $\exists\, R > 0 \colon F \subset S_R(0)$.
8. Ограниченное и замкнутое множество в E^n — компакт.
9. $\Omega(E^n)$ — множество непустых компактов в E^n.
10. Пусть $a, b \in E^n$. Тогда $[a, b] = \left\{x \in E^n \,\middle|\, x = \lambda a + (1 - \lambda) b,\ \lambda \in [0, 1]\right\}$.
11. Множество F называется выпуклым, если $\forall\, a, b \in F \implies [a, b] \subset F$.
12. Пусть $F \in E^n$. Тогда $\operatorname{conv} F$ — минимальное выпуклое множество, содержащее F (*минимальная выпуклая оболочка*).

13. $\operatorname{conv}\Omega(E^n)$ — множество непустых выпуклых компактов в E^n.

14. *Модуль* множества $F \in \Omega(E^n)$: $|F| = \max\limits_{x\in F}|x|$. Для ограниченного F — $|F| = \sup\limits_{x\in F}|x|$.

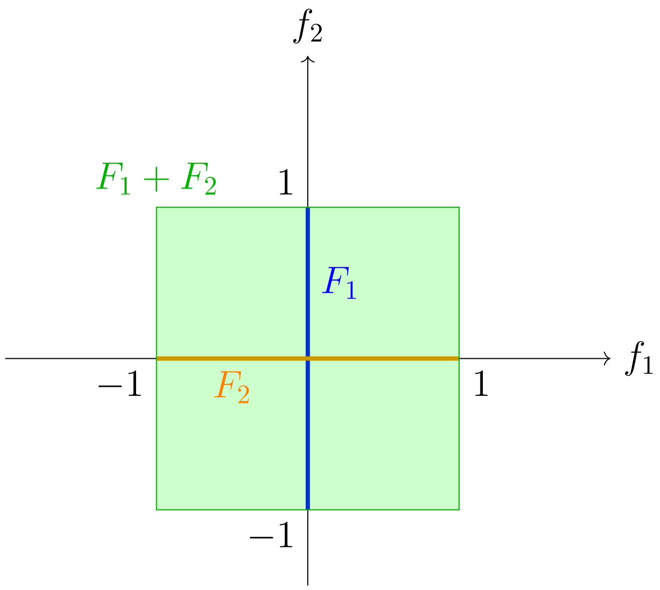
Сложение множеств

Определение. Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. Введём операцию сложения множеств:

$$F_1 + F_2 = \big\{ f = f_1 + f_2 \,\big|\, f_1 \in F,\ f_2 \in F \big\}.$$

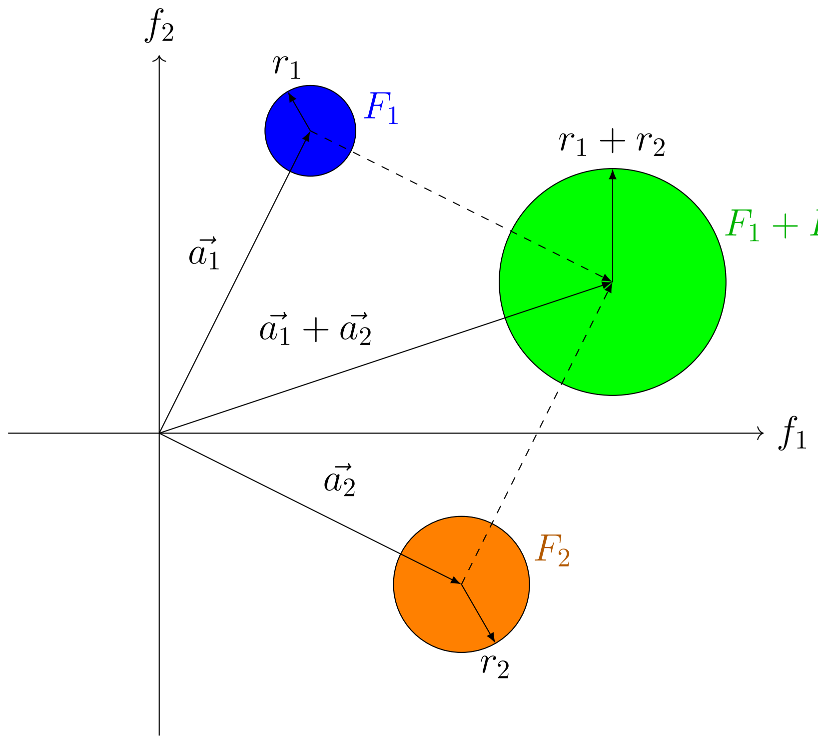
Пример. Пусть $F_1 = \{f_1\} \subset E^n$, $F_2 \in \Omega(E^n)$. Тогда $F_1 + F_2 = f_1 + F_2$ — параллельный перенос на вектор $f_1 \in E^n$.

Пример. Пусть $F_1 = \big\{ f \in E^2 \colon f_1 = 0, |f_2| \leqslant 1 \big\}$,
$F_2 = \big\{ f \in E^2 \colon |f_1| \leqslant 1, f_2 = 0 \big\}$ — отрезки.
Тогда $F_1 + F_2 = \big\{ f \in E^2 \colon |f_1| \leqslant 1, |f_2| \leqslant 1 \big\}$ — квадрат.



Замечание. *Здесь f_1 и f_2 — первая и вторая координаты двумерного вектора, а не элементы множеств F_1 и F_2, как было в определении суммы множеств.*

Пример. Пусть $F_1 = S_{r_1}(a_1)$, $F_2 = S_{r_2}(a_2)$. Тогда $F_1 + F_2 = S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.



Докажем это. Для того, чтобы показать равенство произвольных множеств A и B, достаточно доказать двустроннее вложение: $A \subset B$ и $B \subset A$.

- $S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) \subset S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.

  Возьмём произвольный $f \in S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$. По определению суммы множеств это значит, что существуют такие $g \in S_{r_1}(a_1), h \in S_{r_2}(a_2)$, что $g + h = f$. Тогда

$$\|f - a_1 - a_2\| = \|g + h - a_1 - a_2\| \leqslant \|g - a_1\| + \|h - a_2\| \leqslant r_1 + r_2.$$

  Таким образом, $f \in S_{r_1+r_1}(a_1 + a_2) = \big\{f \in E^n \colon \|f - a_1 - a_2\| \leqslant r_1 + r_2\big\}$. В силу произвольности выбора f получаем, что $S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) \subset S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.

- $S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2) \subset S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$.

  Возьмём произвольный $f \in S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$. Легко видеть, что $\tilde{f} = f - a_1 - a_2 \in S_{r_1+r_2}(0)$:

$$\|\tilde{f}\| = \|f - a_1 - a_2\| \leqslant r_1 + r_2.$$

  Положим теперь

$$\tilde{g} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}\tilde{f}, \quad \tilde{h} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\tilde{f}.$$

  Очевидно, что $\tilde{g} + \tilde{h} = \tilde{f}$. При этом $\tilde{g} \in S_{r_1}(0)$, ведь $\|\tilde{g}\| = \dfrac{r_1}{r_1 + r_2}\|\tilde{f}\| \leqslant$

$\dfrac{r_1}{r_1+r_2}(r_1+r_2) = r_1$. Аналогично $\tilde{h} \in S_{r_2}(0)$.

Если мы введём g и h как

$$g = \tilde{g} + a_1,\ h = \tilde{h} + a_2$$

то $g \in S_{r_1}(a_1),\ h \in S_{r_2}(a_2)$ и

$$g + h = \tilde{g} + \tilde{h} + a_1 + a_2 = \tilde{f} + a_1 + a_2 = f - a_1 - a_2 + a_1 + a_2 = f$$

Но это значит, что $f \in S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$. В силу произвольности f заключаем, что $S_{r_1+r_2}(a_1+a_2) \subset S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$.

Покажем, что класс $\Omega(E^n)$ замкнут относительно сложения, т.е. $\forall F_1, F_2 \in \Omega(E^n) \implies F_1 + F_2 \in \Omega(E^n)$. Для этого достаточно показать, что множество $F_1 + F_2$ замкнуто и ограничено, так как в конечномерном случае это равносильно компактности. Ограниченность очевидна, так как

$$\forall f \in F_1 + F_2 \quad \|f\| = \|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$$

а множества F_1, F_2 ограничены.

Покажем замкнутость. Возьмём произвольную сходящуюся последовательность $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{+\infty} \xrightarrow[k\to\infty]{} x, x_k \in F_1 + F_2$. Нам нужно показать, что $x \in F_1 + F_2$.

Каждый член последовательности можно представить в виде $x_k = y_k + z_k,\ y_k \in F_1,\ z_k \in F_2$. Таким образом, получаем две последовательности $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{+\infty}, \left\{z_n\right\}_{n=1}^{+\infty}$. В силу компактности множества F_1 можем выделить сходящуюся подпоследовательность $\left\{y_{n_m}\right\}_{m=1}^{+\infty} \xrightarrow[m\to\infty]{} y \in F_1$. Возьмём в последовательности $\left\{z_n\right\}$ члены с номерами $n_m, m \in \mathbb{N}$. В силу компактности множества F_2 можем выделить подпоследовательность $\left\{z_{n_{m_k}}\right\}_{k=1}^{+\infty} \xrightarrow[k\to\infty]{} z \in F_2$.

Тогда последовательность $x_{n_{m_k}} = y_{n_{m_k}} + z_{n_{m_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} y + z$. Но последовательность $\left\{x_n\right\}$ по условию сходится к x, а значит, все её подпоследовательности сходятся к тому же пределу. Таким образом, $x = y + z \in F_1 + F_2$, что и требовалось доказать.

1.3 Лекция 3

1.3.1 Сложение множеств. Умножение множеств на число и на матрицу

Сложение непустых компактов

На прошлой лекции мы ввели операцию сложения множеств: если $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$, то $F_1 + F_2 = \big\{ f \in E^n \colon f = f_1 + f_2, f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \big\}$, где $\Omega(E^n)$ — множество непустых компактов в E^n. Также мы доказали, что $\Omega(E^n)$ замкнуто относительно сложения, то бишь $F_1, F_2 \in \Omega(E^n) \implies F_1 + F_2 \in \Omega(E^n)$.

Можно показать, что если $F_1, F_2 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$, то $F_1 + F_2 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$.
Доказательство. Действительно, пусть $x, y \in F_1 + F_2$. Тогда

$$x = a_1 + b_1,\ a_1 \in F_1,\ b_1 \in F_2, \quad y = a_2 + b_2,\ a_2 \in F_1,\ b_2 \in F_2$$

Возьмём $\lambda \in [0, 1]$.

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda(a_1 + b_1) + (1-\lambda)(a_2 + b_2) = \underbrace{\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2}_{\in F_1} + \underbrace{\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2}_{\in F_2}$$

Таким образом, любая точка из отрезка $[x, y]$ представляется в виде суммы элементов из F_1 и F_2, что и означает, что $[x, y] \subset F_1 + F_2$. В силу произвольности x, y делаем вывод, что $F_1 + F_2 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$. ■

Операция сложения множеств:

1. Коммутативна: $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$
2. Ассоциативна: $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$
3. Существует нейтральный элемент $e = \big\{0\big\}$: $F + \big\{0\big\} = F \quad \forall F$.

При этом не всегда существует такое G, что $F + G = \big\{0\big\}$. *(Точнее, такого G почти никогда не существует).*

Умножение множества на число

Определение. Пусть $\lambda \in E^1$, $F \in \Omega(E^n)$. Тогда $\lambda \cdot F = \big\{ \lambda x \,\big|\, x \in F \big\}$.

Легко проверяются следующие утверждения:

- $F \in \Omega(E^n) \implies \lambda F \in \Omega(E^n)$.
- $F \in \operatorname{conv}\Omega(E^n) \implies \lambda F \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$.

- $\lambda \cdot S_r(0) = S_{|\lambda r|}(0)$.

Операция умножения множества на число:

1. Ассоциативна: $(\alpha\beta)F = \alpha(\beta F)$
2. Существует нейтральный элемент $e = 1$: $1 \cdot F = F \quad \forall F$
3. Дистрибутивно относительно сложения множеств: $\lambda(F + G) = \lambda F + \lambda G$

При этом $(\alpha + \beta)F$, вообще говоря, $\neq \alpha F + \beta F$:

$$F = S_r(0),\, \alpha = 1, \beta = -1$$
$$(1 + (-1)) \cdot S_r(0) = \big\{0\big\}$$
$$1 \cdot S_r(0) + (-1) \cdot S_r(0) = S_r(0) + S_r(0) = S_{2r}(0)$$

Сложение непустых выпуклых компактов

Рассмотрим класс $\operatorname{conv}\Omega(E^n)$. Пусть $\alpha, \beta \geqslant 0$. Оказывается, что тогда $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$.

Доказательство. Покажем взаимное вложение.

$(\alpha + \beta)F \subset \alpha F + \beta F$:

$$x \in (\alpha + \beta)F \implies \exists f \in F\colon x = (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f \in \alpha F, \beta F$$

$(\alpha + \beta)F \supset \alpha F + \beta F$:

$$x \in \alpha F + \beta F \implies \exists f_1, f_2 \in F\colon x = \alpha f_1 + \beta f_2 =$$
$$(\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} f_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} f_2\right) = (\alpha + \beta)\underbrace{(\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2)}_{\in F} \in (\alpha + \beta)F$$

■

Геометрически можно интерпретировать множество выпуклых компактов как конус (точнее, множество векторов, принадлежащих конусу) - в нём тоже выполняются все аксиомы линейного пространства, кроме существования обратного элемента.

Умножение множества на матрицу

Определение. Пусть $F \in \Omega(E^n), A \in E^{n \times n}$. Тогда $AF = \big\{z \in E^n\colon z = Af, f \in F\big\}$.

Например, если $A = \lambda I$, то $AF = \lambda F$.

Легко проверить следующие утверждения:

- $F \in \Omega(E^n) \implies AF \in \Omega(E^n)$.
- $F \in \operatorname{conv}\Omega(E^n) \implies AF \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$.

Свойства:

1. $(AB)F = A(BF)$
2. $IF = F$
3. $A(F+G) = AF + AG$
4. $(A+B)F \subset AF + BF$

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a \neq 0, b \neq 0, F = S_1(0)$.
Тогда $AF = \left\{f \in E^2 \colon \left(\frac{f_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{b}\right)^2 \leqslant 1\right\}$.
Если $a = 0$, то $AF = \left\{f \in E^2 \colon f_1 = 0, |f_2| \leqslant |b|\right\}$ — отрезок.

1.3.2 Метрика

Ввести на $\Omega(E^n)$ или $\operatorname{conv}\Omega(E^n)$ скалярное произведение или норму нельзя, так как они не являются линейными пространствами. Но можно ввести метрику.

Определение. Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. **Метрика Хаусдорфа**:

$$h(F_1, F_2) = \min_{r \geqslant 0} \left\{ r \,\middle|\, F_1 \subset F_2 + S_r(0),\ F_2 \subset F_1 + S_r(0) \right\} \tag{1.23}$$

Пример. Пусть $F_1 = \{0\}, F_2 = S_1(0) \subset E^2$. Очевидно, что

$$\begin{cases} F_1 \subset F_2 + S_r(0) & \forall r \geqslant 0 \\ F_2 \subset F_1 + S_r(0) & \forall r \geqslant 1 \end{cases}$$

Значит, $h(F_1, F_2) = 1$.

Пример. Пусть $F_1 = \left\{|f_1| \leqslant 1, |f_2| \leqslant 1\right\}$ — квадрат, $F_2 = S_1(0)$. Шар, очевидно, всегда вложен в квадрат: $F_2 \subset F_1 + S_r(0)$ $\forall r \geqslant 0$. При этом $F_1 \subset F_2 + S_r(0)$ $\forall r \geqslant \sqrt{2} - 1$.
Значит, $h(F_1, F_2) = \sqrt{2} - 1$.

Пример. $h\big(\{0\}, F\big) = |F|$ $\forall F \in \Omega(E^n)$.

Докажем, что это действительно метрика. Симметричность ($h(F_1, F_2) = h(F_2, F_1)$) и положительная определённость ($h(F_1, F_2) \geqslant 0, h(F_1, F_2) = 0 \iff F_1 = F_2$) сразу следуют и определения. Введём обозначения для расстояний:

$$\begin{cases} h(F_1, F_2) = h_{12}, \\ h(F_1, F_3) = h_{13}, \\ h(F_3, F_2) = h_{23} \end{cases}$$

Далее,

$$F_1 \subset F_3 + S_{h_{13}}(0), \quad F_3 \subset F_2 + S_{h_{23}}(0)$$
$$F_1 \subset F_3 + S_{h_{13}}(0) \subset F_2 + S_{h_{23}}(0) + S_{h_{13}}(0) = F_2 + S_{h_{23}+h_{13}}(0) \implies$$
$$h_{12} \leqslant h_{13} + h_{23}$$

Вернёмся к компактам и выпуклым оболочкам.

Определение. Отрезок $[a, b] = \{z \in E^n \colon z = \lambda a + (1 - \lambda) b, \lambda \in [0, 1]\}$.

Определение. Множество F выпукло, если $\forall a, b \in F \implies [a, b] \in F$.

Определение. G — выпуклая оболочка множества F, если

- G выпукло;
- $F \subset G$.

Определение. $H = \operatorname{conv} F$ — минимальная выпуклая оболочка множества F, если

- H выпукло;
- $F \subset H$;
- $\forall$ выпуклой оболочки G верно $H \subset G$.

Замечание. Минимальная выпуклая оболочка — это пересечение всех выпуклых оболочек множества F.

Пример. Выпуклая оболочка трёх точек, не лежащих на одной прямой — треугольник

Как строить выпуклую оболочку?

1. Подход Каратеодори: $\operatorname{conv} F = \{z \in E^n \colon \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \lambda_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i = 1 \; \forall f_i \in F\}$, где m пока проозвольное.

теорема Каратеодори. *Для построения выпуклой оболочки описанным выше методом достаточно взять $m = n + 1$, где $n = \operatorname{Dim} E^n$.*

2. Геометрический подход (подход Болтянского):

   Утверждение. *Пусть $F \in E^n \setminus \varnothing$.*

$$F_0 = F.$$
$$F_1 = \big\{[x, y] \colon x, y \in F_0\big\}.$$
$$F_2 = \big\{[x, y] \colon x, y \in F_1\big\}.$$
$$\ldots$$

   Тогда $\operatorname{conv} F = H = \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} F_m$.

   Доказательство. Надо показать, что

   (a) $F \subset H$

   (b) H выпукло

   (c) $\forall G \supset F, G$ выпукло $\implies H \subset G$.

   Заметим, что $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset H$. Отсюда очевидно, что $H \supset F = F_0$.

   $\forall x \in H \implies \exists m_1 \in \mathbb{N} \colon x \in F_{m_1}$. Аналогично, $\forall y \in H \implies \exists m_2 \mathbb{N} \colon x \in F_{m_2}$. Положим $m = \max(m_1, m_2)$. Тогда $x, y \in F_m \implies [x, y] \subset F_{m+1} \subset H$. То есть, мы показали, что для произвольных $x, y \in H$ верно, что $[x, y] \in H$. Значит, H выпукло.

   Возьмём любое выпуклое $G \supset F$. В силу выпуклости G: $F_0 \subset G \implies F_1 \subset G \implies \ldots$ Тогда $H \subset G$. ■

Задача (о стабилизации цепочки множеств):
$\exists l = l(n, F) \leqslant n \colon F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_l = F_{l+1} = F_{l+2} = \ldots = H$.

Отрезок строится за 1 шаг, треугольник за два шага. Рассмотрим 4 точки в пространстве, не лежащие в одной плоскости (тетраэдр). $F_0 = \big\{a_0, a_1, a_2, a_3\big\}$ — вершины.
$F_1 = \big\{[a_0, a_1], [a_0, a_2], [a_0, a_3], [a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_2, a_3]\big\}$ — рёбра.
$F_2 =$ тетраэдр (за счёт соединения противоположных рёбер).

Текущая и неулучшаемая оценка числа шагов для построения выпуклой оболочки — $l = \lceil \log_2 n \rceil + 1$.