Конспект лекций по курсу Оптимальное управление

Оглавление

Глава 1

Оптимальное управление

1.1 Лекция 1

Рекомендованная литература:

1. Киселёв Ю.Н. «Оптимальное управление», 1988
2. Благодатских В.И. «Введение в оптимальное управление», 2001
3. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. «Оптимальное управление. Линейная теория и приложения», 2007
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. «Математическая теория оптимальных процессов», 1966

Теория ОУ родилась в ходе решения задачи о моделировании боя двух самолётов (задачи уклонения/преследования), описываемой системой дифференциальных уравнений. Задача эта до сих пор не решена ввиду её сложности.

Как правило, сложные задачи пытаются упростить. С этой целью можно рассмотреть модель с одним самолётом. Однако и она для нас будет слишком сложной. Поэтому имеет смысл начать с ещё более простой модели — управляемого снаряда, который нужно доставить из точки А в точку Б в наикратчайшее время.

Мы будем иметь дело с моделями, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.1.1 Описание задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

Здесь $x \in E^n$ (x принадлежит пространству $\mathbb{R}^n$, где введено скалярное произведение — евклидову пространству). То есть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i = x_i(t)$.

Аналогично, $u \in E^m$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $u_i = u_i(t)$. При этом их множество значений ограничено: $u_{i\min} \leqslant u_i \leqslant u_{i\max}$, $u \in U \subset E^m$. Множество U называется **областью управления**. Как правило, оно замкнуто. Пример — $U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \middle| \dfrac{u_1^2}{a^2} + \dfrac{u_2^2}{b^2} = 1 \right\}$.

Таким образом, можно переписать уравнение в виде

$$\dot{x} = f(x, u(t)) = F(x, t) \tag{1.2}$$

Из какого класса выбираются функции $u_i(t)$? Наиболее популярны следующие варианты:

- кусочно-непрерывные функции
- кусочно-постоянные функции
- измеримые функции

Первые два часто используются в приложениях. С первым случаем есть некоторая тонкость в определении. В математическом анализе под кусочно-непрерывной функцией понимается следующее:

Определение. Функция $u(t)$ называется **кусочно-непрерывной** на отрезке $[t_0, t_1]$, если она непрерывна на нём всюду за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода.

В оптимальном управлении для удобства принято считать, что кусочно-непрерывная функция **непрерывна в концах отрезка** $[t_0, t_1]$.
Второй может соответствовать простейшим прикладным случаям, отражая, например, состояние управляющих электромагнитов: 0 — выключен, 1 — включен. В этом случае $U = \{0, 1\}$ *(замкнуто!)*, и функции $u_i(t)$ принимают лишь два возможных значения.
Третий случай нужен в основном в теоретических исследованиях. В целом, можно выбрать и какой-нибудь другой класс, например, гладких функций.

Выбрав область управления U и класс, из которого мы будем брать функции, мы определяем **класс допустимых управлений** D_U. Например, $D_U = \left\{ u(t) \middle| \begin{cases} u(t) \in U \ \forall\, t \in [t_0, t_1] \\ u(t) \in C[t_0, t_1] \end{cases} \right\}$.

Для решения систем дифференциальных уравнений хотелось бы применить теоремы о существовании и единственности решений, но ввиду того, что рассматриваемые классы достаточно широки, не всегда соблюдаются условия теорем — например, липшицевость функции $F(x,t) \equiv f(x, u(t))$. Приходится либо накладывать дополнительные ограничения на условие, либо вообще по-другому вводить понятие решения дифференциального уравнения.

Конкретизируем задачу. Выберем некоторую фиксированную функцию $u = u(t) \in D_U$. Пусть мы хотим, чтобы в начальный момент времени t_0 точка $x_0 = x(t_0)$ принадлежала некоторому множеству $M_0 \subset E^n$, а в конечный момент времени t_1 точка $x(t_1)$ принадлежала множеству $M_1 \subset E^n$. Тогда мы должны решить, по сути, некоторую краевую задачу с условиями

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \end{cases} \tag{1.3}$$

Моменты времени t_0, t_1 могут быть как фиксированными, так и свободными. Обычно начальный момент t_0 фиксирован, а t_1 свободно. Если решение такой задачи существует, то пара $\big(u(t), x(t)\big)$ называется **допустимым процессом**.

Но как надо выбирать функцию u? Для этого вводится **функционал качества**:

$$J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \tag{1.4}$$

Выберем наиболее «качественную» функцию $u(t)$ — ту, на которой достигается минимум этого функционала (можно было бы искать максимум, но эти задачи эквивалентны и сводятся друг к другу умножением $f^0(x,u)$ на -1). Т.е. решим задачу

$$J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min_{u \in D_U} \tag{1.5}$$

где x — решение уравнения 1.3, соответствующего функции u.

Т.е. полностью наша задача будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.6}$$

Однако решить её в таком виде в общем случае весьма сложно.

1.1.2 Линейный случай

Разберёмся сначала с более простым случаем. Предположим, что функция $f(x,u)$ имеет вид

$$f(x,u) = Ax + Bu, \tag{1.7}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Таким образом, в правой части нет произведений вида $x_i u_j$. На самом деле, можно даже предположить, что функция имеет вид

$$f(x,u) = Ax + u \tag{1.8}$$

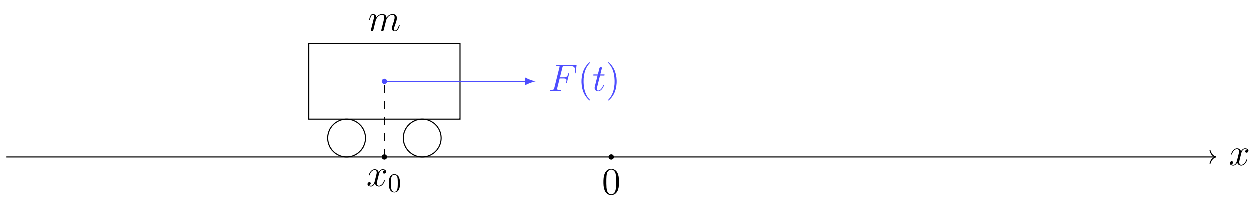
так как всегда можно сделать замену $v = Bu$. Чтобы не менять обозначения, предположим, что мы уже сделали эту замену и $u \in E^n$.

Кроме того, положим $f^0(x,u) \equiv 1$. Тогда функционал качества приобретает очень простой вид: $J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} 1\,dt = t_1 - t_0$. Таким образом, минимизируя функционал качества, мы находим такую функцию $u(t)$, при которой точка $x(t)$ быстрейшим образом попадает из множества M_0 в множество M_1.

Мы приходим к формулировке **линейной задачи быстродействия**:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.9}$$

1.1.3 Модель тележки



Рассмотрим движение тележки по прямой под действием внешней силы $F(t)$. $x = x(t)$ — координата. Будем считать, что $F_{\min} \leqslant F(t) \leqslant F_{\max}\ \forall\, t \in [t_0, t_1]$ (что логично — в реальном мире сила ограничена). Пусть мы хотим доставить тележку в точку $x = 0$ и остановить её там. Тогда краевые условия выглядят следующим образом:

$$\begin{matrix} x(t_0) = x_0, & \dot{x}(t_0) = x_{01} \\ x(t_1) = 0, & \dot{x}(t_1) = 0 \end{matrix} \tag{1.10}$$

Вспомним второй закон Ньютона: $m\ddot{x} = F$. Перепишем это в виде $\ddot{x} = \dfrac{F}{m}$ и обозначим $v = \dfrac{F}{m}$. Покажем, что уравнение $\ddot{x} = v$ можно переписать в виде, аналогичном 1.9. Для этого введём переменные $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$. Тогда $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = v$. Для простоты считаем, что $\dfrac{F_{\min}}{m} = -1, \dfrac{F_{\max}}{m} = 1$.

Теперь введём матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$. Тогда область управления $U = 0 \times [-1, 1]$ *(замкнута!)*.

С учётом этих обозначений задачу о тележке можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{u} \\ \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{01} \end{pmatrix} \\ \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.11}$$

Таким образом, модель тележки сводится к линейной задаче быстродействия.

1.2 Лекция 2

Напомним формулировки. Основная задача (будет решена в следующем семестре):

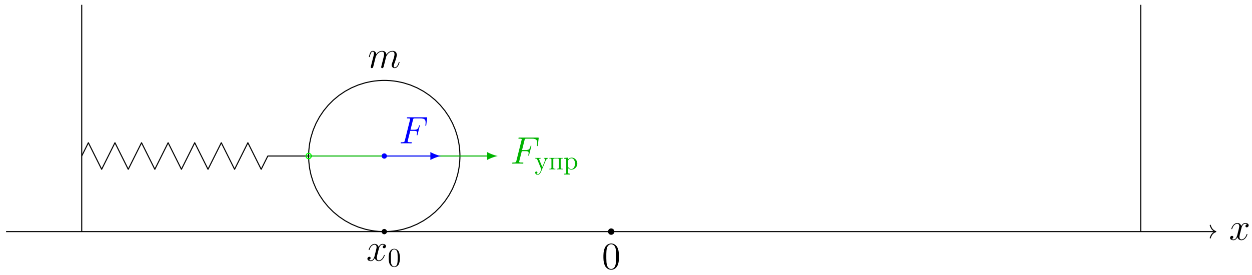
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \quad x \in E^n,\ u \in E^m \\ x(t_0) \in M_0 \subset E^n \\ x(t_1) \in M_1 \subset E^n \\ J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x, u)\, dt \to \min\limits_{u \in D_U}, \quad U \subset E^m \end{cases} \tag{1.12}$$

Упрощённая задача — задача линейного быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \subset E^n \\ x(t_1) \in M_1 \subset E^n \\ J = t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U}, \quad U \subset E^n \end{cases} \tag{1.13}$$

Приведём ещё один пример задачи, описываемой линейной системой.

1.2.1 Модель пружинного маятника



Запишем второй закон Ньютона для пружинного маятника, на который действует сила упругости $F_{упр} = -kx$ и внешняя сила F.

$$m\ddot{x} = -kx + F \tag{1.14}$$

Опять же, хотим доставить маятник в точку $x = 0$ и остановить его там.

$$\begin{matrix} x(t_0) = x_0, & \dot{x}(t_0) = x_{01} \\ x(t_1) = 0, & \dot{x}(t_1) = 0 \end{matrix} \tag{1.15}$$

Преобразуем уравнение:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{F}{m} \tag{1.16}$$

Сделаем замены $\dfrac{k}{m} = \omega^2$, $\dfrac{F}{m} = v$. Для простоты считаем, что $\omega = 1$, $|v| \leqslant 1$.

Тогда $\ddot{x} = -x + v$. Как и в прошлой задаче, введём переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Тогда

$$\dot{x_1} = x_2, \tag{1.17}$$

$$\dot{x_2} = -x + v \tag{1.18}$$

Обозначим $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, а также $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда можно записать уравнение 1.17 в виде

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{u} \\ \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{01} \end{pmatrix} \\ \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u \in D_U} \end{cases} \tag{1.19}$$

В этом курсе будут обсуждаться следующие темы:

1. Управляемость (т.е. существование хотя бы одного допустимого процесса $\big(u(t), x(t)\big)$ (т.е. эта штука вообще управляется?))
2. Теоремы существования.
3. Необходимые условия оптимальности.
4. Достаточные условия оптимальности.
5. Теоремы единственности.

1.2.2 Элементы выпуклого анализа

В евклидовом пространстве E^n есть скалярное произведение $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Это позволяет нам ввести метрику и расстояние:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{1.20}$$

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{1.21}$$

Определение. Замкнутым шаром в E^n называется множество

$$S_r(a) = \big\{x \in E^n \colon \|x - a\| \leqslant r\big\}. \tag{1.22}$$

А кроме того, ещё целый блок определений, касающийся свойств множеств в E^n.

1. f — *внутренняя* точка множества $F \in E^n$, если $\exists\, \varepsilon > 0 \colon S_\varepsilon(f) \subset F$.

2. $\operatorname{int} F$ — множество всех внутренних точек множества F (или *внутренность* множества F).

3. f — *предельная* точка множества $F \in E^n$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ S_\varepsilon(f) \cap F \neq \varnothing$.

4. F — *замкнутое* множество, если оно содержит все свои предельные точки.

5. $\overline{F}$ — минимальное замкнутое множество, содержащее F (или *замыкание* множества F).

6. $\partial F = F \setminus \operatorname{int} F$ — *граница* множества F.

7. F ограничено, если $\exists\, R > 0 \colon F \subset S_R(0)$.

8. Ограниченное и замкнутое множество в E^n — компакт.

9. $\Omega(E^n)$ — множество непустых компактов в E^n.

10. Пусть $a, b \in E^n$. Тогда $[a,b] = \big\{x \in E^n \,\big|\, x = \lambda a + (1-\lambda)b,\ \lambda \in [0,1]\big\}$.

11. Множество F называется выпуклым, если $\forall\, a, b \in F \implies [a,b] \subset F$.

12. Пусть $F \in E^n$. Тогда $\operatorname{conv} F$ — минимальное выпуклое множество, содержащее F (*минимальная выпуклая оболочка*).

13. $\operatorname{conv} \Omega(E^n)$ — множество непустых выпуклых компактов в E^n.

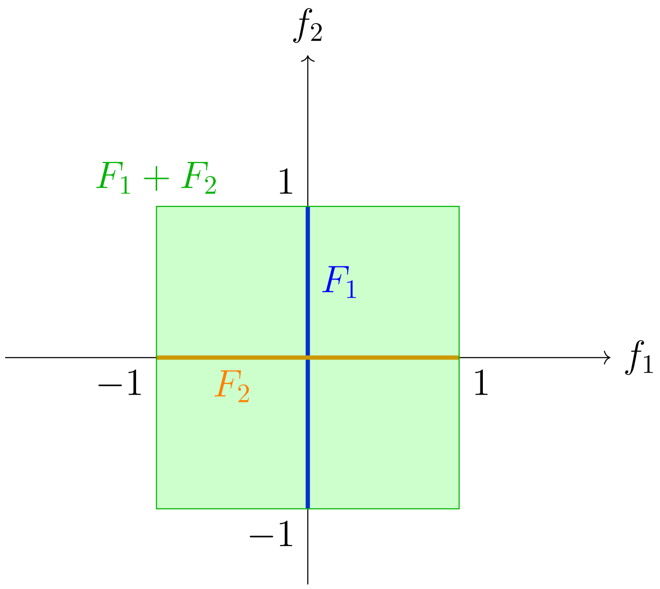
14. *Модуль* множества $F \in \Omega(E^n) \colon |F| = \max\limits_{x \in F} |x|$. Для ограниченного F — $|F| = \sup\limits_{x \in F} |x|$.

Определение. Пусть $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$. Введём операцию сложения множеств:

$$F_1 + F_2 = \big\{f = f_1 + f_2 \,\big|\, f_1 \in F,\ f_2 \in F\big\}.$$

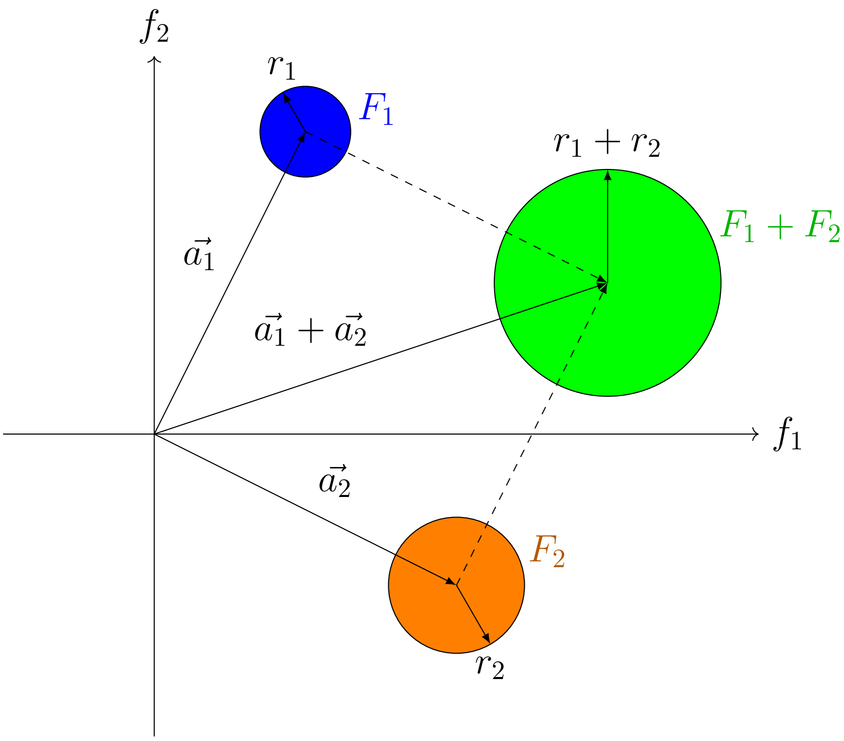
Пример. Пусть $F_1 = \{f_1\} \subset E^n,\ F_2 \in \Omega(E^n)$. Тогда $F_1 + F_2 = f_1 + F_2$ — параллельный перенос на вектор $f_1 \in E^n$.

Пример. Пусть $F_1 = \big\{f \in E^2 \colon f_1 = 0, |f_2| \leqslant 1\big\}$,
$F_2 = \big\{f \in E^2 \colon |f_1| \leqslant 1, f_2 = 0\big\}$ — отрезки.
Тогда $F_1 + F_2 = \big\{f \in E^2 \colon |f_1| \leqslant 1, |f_2| \leqslant 1\big\}$ — квадрат.



Замечание. *Здесь f_1 и f_2 — первая и вторая координаты двумерного вектора, а не элементы множеств F_1 и F_2, как было в определении суммы множеств.*

Пример. Пусть $F_1 = S_{r_1}(a_1),\ F_2 = S_{r_2}(a_2)$. Тогда $F_1 + F_2 = S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.



Докажем это. Для того, чтобы показать равенство произвольных множеств A и B, достаточно доказать двустроннее вложение: $A \subset B$ и $B \subset A$.

- $S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) \subset S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.

  Возьмём произвольный $f \in S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$. По определению суммы множеств это значит, что существуют такие $g \in S_{r_1}(a_1), h \in S_{r_2}(a_2)$, что

$g + h = f$. Тогда

$$\|f - a_1 - a_2\| = \|g + h - a_1 - a_2\| \leqslant \|g - a_1\| + \|h - a_2\| \leqslant r_1 + r_2.$$

Таким образом, $f \in S_{r_1+r_1}(a_1 + a_2) = \big\{f \in E^n\colon \|f - a_1 - a_2\| \leqslant r_1 + r_2\big\}$. В силу произвольности выбора f получаем, что $S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2) \subset S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.

- $S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2) \subset S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$.

  Возьмём произвольный $f \in S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$. Легко видеть, что $\tilde{f} = f - a_1 - a_2 \in S_{r_1+r_2}(0)$:

  $$\|\tilde{f}\| = \|f - a_1 - a_2\| \leqslant r_1 + r_2.$$

  Положим теперь
  $$\tilde{g} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}\tilde{f},\ \ \tilde{h} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\tilde{f}.$$

  Очевидно, что $\tilde{g} + \tilde{h} = \tilde{f}$. При этом $\tilde{g} \in S_{r_1}(0)$, ведь $\|\tilde{g}\| = \dfrac{r_1}{r_1 + r_2}\|\tilde{f}\| \leqslant \dfrac{r_1}{r_1 + r_2}(r_1 + r_2) = r_1$. Аналогично $\tilde{h} \in S_{r_2}(0)$.
  Если мы введём g и h как

  $$g = \tilde{g} + a_1,\ h = \tilde{h} + a_2$$

  то $g \in S_{r_1}(a_1),\ h \in S_{r_2}(a_2)$ и

  $$g + h = \tilde{g} + \tilde{h} + a_1 + a_2 = \tilde{f} + a_1 + a_2 = f - a_1 - a_2 + a_1 + a_2 = f$$

  Но это значит, что $f \in S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$. В силу произвольности f заключаем, что $S_{r_1+r_2}(a_1 + a_2) \subset S_{r_1}(a_1) + S_{r_2}(a_2)$.