Ma trận

Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

Tóm tắt

Nhắc lại về ma trận và ma trận vuông

Định nghĩa

- *Một* ma trận *cỡ $m \times n$ là một bảng có m* hàng *và n* cột*:*

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  ở đó mỗi phần tử *a_{ij} là một số.*

- *Nếu $m = n$, ma trận M được gọi là một* ma trận vuông *cấp n. Khi đó, các phần tử a_{ii} $(1 \leq i \leq n)$ tạo thành* đường chéo chính *của ma trận M.*

Vector

- Một ma trận $1 \times n$ còn được gọi là một *vector ["vếch-tơ"] hàng*.
- Một ma trận $m \times 1$ còn được gọi là một *vector cột*.

Chú ý:

- Ma trận thường được ký hiệu bằng chữ cái viết hoa: A, M, ...
- Vector thường được ký hiệu bằng chữ thường, in đậm hoặc có mũi tên phía trên: **a**, **b**, $\vec{x}$, $\vec{v}$, ...

Thí dụ:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Chú ý: Một ma trận có thể được biểu diễn theo các hàng hoặc các cột của nó.

Thí dụ:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

Ma trận bằng nhau

Định nghĩa

Hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *và* $B = (b_{i'j'})_{m'\times n'}$ *là* **bằng nhau** *nếu:*

- *Chúng có cùng cỡ:* $m = m'$, $n = n'$.
- *Với mọi* $1 \le i \le m\,, 1 \le j \le n$*,* $a_{ij} = b_{ij}$.

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta có $A = B\,, A \neq C\,, A \neq D\,.$

Tóm tắt

Cộng hai ma trận

Định nghĩa

Tổng *của hai ma trận* $A = (a_{ij})$ *và* $B = (b_{ij})$ *cùng cỡ* $m \times n$ *là một ma trận cỡ* $m \times n$ *được cho bởi:*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Thí dụ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: không được định nghĩa vì hai ma trận không cùng cỡ.

Tóm tắt

Nhân một ma trận với một vô hướng

Định nghĩa

Tích *của một ma trận* $A = (a_{ij})$ *cỡ* $m \times n$ *với một vô hướng* c *là một ma trận cỡ* $m \times n$ *được cho bởi:*

$$cA = (ca_{ij})$$

Thí dụ:

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Chú ý: Tích $(-1)A$ được viết gọn là $-A$. Từ đó, *hiệu* của hai ma trận cùng cỡ được định nghĩa bởi:

$$A - B = A + (-B) = A + (-1)B\,.$$

Tóm tắt

Nhân hai ma trận

Định nghĩa

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})$ *cỡ* $m \times n$ *và* $B = (b_{jk})$ *cỡ* $n \times p$. Tích *của hai ma trận* A *và* B *là một ma trận cỡ* $m \times p$ *được cho bởi:*

$$AB = (c_{ij}),$$

ở đó

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

với mọi $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$.

Nhân hai ma trận

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}.$$

Nhân hai ma trận

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}.$$

$$c_{11} = (-1)(-3) + 3(-4) = -9$$

Nhân hai ma trận

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}.$$

$$c_{11} = (-1)(-3) + 3(-4) = -9$$
$$c_{12} = (-1)2 + 3.1 = 1$$

Nhân hai ma trận

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-1)(-3) + 3(-4) = -9 \\ c_{12} &= (-1)2 + 3.1 = 1 \\ c_{21} &= 4(-3) + (-2)(-4) = -4 \\ c_{22} &= 4.2 + (-2)1 = 6 \\ c_{31} &= 5(-3) + 0(-4) = -15 \\ c_{32} &= 5.2 + 0.1 = 10 \end{aligned}$$

Nhân hai ma trận

Chú ý:

- Tích AB chỉ được định nghĩa nếu số cột của A bằng số hàng của B.
- Phần tử c_{ij} được nhận bằng cách "nhân" hàng i của A với cột j của B.
- Kể cả khi AB và BA đều được định nghĩa thì nói chung $AB \neq BA$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -14 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Tóm tắt

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ pttt:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Gọi A là ma trận hệ số của hệ (1) và đặt:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hệ (1) có thể được viết dưới dạng:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Dạng tổ hợp tuyến tính của hệ phương trình tuyến tính

Đặt $\mathbf{a_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ là vector cột thứ i của ma trận A:

$$\mathbf{a_i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hệ (1) có thể được viết dưới dạng *tổ hợp tuyến tính*:

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \cdots + x_n\mathbf{a_n} = \mathbf{b}\,.$$

Tóm tắt

Tính chất của phép cộng và phép nhân với vô hướng

Định lý

Giả sử A, B, C là các ma trận cùng cỡ $m \times n$ và c, d là các vô hướng. Khi đó:

1. $A + B = B + A$ *(tính giao hoán của phép cộng)*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(tính kết hợp của phép cộng)*
3. $(cd)A = c(dA)$ *(tính kết hợp của phép nhân với vô hướng)*
4. $1.A = A$ *(đơn vị của phép nhân với vô hướng)*
5. $c(A + B) = cA + cB$ *(tính phân phối)*
6. $(c + d)A = cA + dA$ *(tính phân phối)*

Chứng minh: thay trực tiếp định nghĩa của các phép toán vào và kiểm tra đẳng thức.

Ma trận 0

Định nghĩa

Ma trận 0 cỡ $m \times n$ là một ma trận $m \times n$ mà tất cả các phần tử đều bằng 0. Ký hiệu: O_{mn}.

Định lý

Giả sử A là một ma trận cỡ $m \times n$ và c là một vô hướng. Khi đó:

1. $A + O_{mn} = O_{mn} + A = A$.
2. $A + (-A) = O_{mn}$
3. *Nếu* $cA = O_{mn}$ *thì* $c = 0$ *hoặc* $A = O_{mn}$.

Tóm tắt

Tính chất của phép nhân ma trận

Định lý

Giả sử A, B, C là các ma trận với cỡ sao cho các phép toán được thực hiện là có nghĩa. Giả sử c là một vô hướng. Khi đó:

1. $A(BC) = (AB)C$ *(tính kết hợp của phép nhân)*
2. $A(B + C) = AB + AC$ *(tính phân phối)*
3. $(A + B)C = AC + BC$ *(tính phân phối)*
4. $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ *(tính kết hợp)*

Chứng minh: thay trực tiếp định nghĩa của các phép toán vào và kiểm tra đẳng thức.

Tính chất của phép nhân ma trận

Chú ý:

- Nhờ tính chất kết hợp, ta có thể viết tích của ba hoặc nhiều ma trận mà không cần nói rõ thứ tự thực hiện các phép nhân.
- Phép nhân ma trận không có tính giao hoán, tức là nói chung $AB \neq BA$ (hoặc tích không được định nghĩa).
- Nói chung $AB = O$ không suy ra được $A = O$ hoặc $B = O$.
- Nói chung $AC = BC$ (hoặc $CA = CB$) không suy ra được $A = B$.

Thí dụ:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$: $A \neq 0, B \neq 0$ và $AB = 0$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$: $A \neq B$ nhưng $AC = BC$.

Ma trận đơn vị

Định nghĩa

Ma trận đơn vị *cấp n, ký hiệu I_n, là ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử bằng 0, ngoại trừ các phần tử trên đường chéo chính bằng 1:*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận đơn vị có vai trò là phần tử đơn vị của phép nhân ma trận:

Định lý

Giả sử A là một ma trận cỡ $m \times n$. Khi đó:

1. $AI_n = A$
2. $I_mA = A$

Lũy thừa của ma trận vuông

Định nghĩa

Giả sử A là một ma trận vuông cấp n và k là một số nguyên dương. Lũy thừa bậc k *của A được định nghĩa như sau:*

$$A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ lần}}$$

Quy ước: $A^0 = I_n$.

Mệnh đề

Giả sử A là một ma trận vuông cấp n và k, l là các số tự nhiên. Khi đó:

1. $A^{k+l} = A^k A^l$
2. $A^{kl} = (A^k)^l$

Tóm tắt

Chứng minh định lý về số nghiệm

Xét hệ pttt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ta sẽ chứng minh rằng nếu hệ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt thì hệ sẽ có vô số nghiệm (do đó hệ chỉ có thể có vô số nghiệm hoặc ít hơn 2, tức là 0 hoặc 1, nghiệm).

- Giả sử hệ có 2 nghiệm $\mathbf{x_1} \neq \mathbf{x_2}$: $A\mathbf{x_1} = A\mathbf{x_2} = \mathbf{b}$.
- Khi đó $A(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}) = \mathbf{0}$, hay $\mathbf{x_h} = \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}$ là nghiệm của hệ thuần nhất $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Suy ra $A(\mathbf{x_1} + c\mathbf{x_h}) = \mathbf{b}$ với mọi c, hay $\mathbf{x_1} + c\mathbf{x_h}$ là nghiệm của $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với mọi c.
- Vì $\mathbf{x_h} \neq \mathbf{0}$ và có vô số giá trị của c nên có vô số nghiệm dạng $\mathbf{x_1} + c\mathbf{x_h}$.

Tóm tắt

Ma trận chuyển vị

Định nghĩa

Giả sử $A = (a_{ij})$ *là một ma trận* $m \times n$.

- Ma trận chuyển vị *của* A*, ký hiệu là* A^T*, là một ma trận* $n \times m$ *được cho bởi:*

$$A^T = (a'_{ij})$$

  sao cho $a'_{ij} = a_{ji}$ *với* $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

- *Nếu* $A^T = A$ *thì* A *được gọi là một* ma trận đối xứng.

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tính chất của ma trận chuyển vị

Định lý

Giả sử A, B là các ma trận có cỡ thích hợp, và c là một vô hướng. Khi đó:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(cA)^T = cA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$.
5. AA^T *và* $A^T A$ *là các ma trận đối xứng.*

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -5 \\ -6 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}.$$