Chéo hóa và chéo hóa trực giao

Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

Tóm tắt

Tóm tắt

Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là chéo hóa được nếu nó đồng dạng với một ma trận đường chéo. Nói cách khác, tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo.

Thí dụ: Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ chéo hóa được vì với

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

thì $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Tóm tắt

1. Chéo hóa ma trận vuông
   - Ma trận chéo hóa được
   - Điều kiện chéo hóa được
2. Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng
   - Chéo hóa ma trận đối xứng
   - Ma trận trực giao
   - Chéo hóa trực giao

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Nhận xét:

- Hai ma trận vuông đồng dạng thì có cùng các giá trị riêng.
- Ma trận tam giác (đặc biệt: ma trận đường chéo) cấp n có n giá trị riêng (tính cả bội).

Mệnh đề

Nếu ma trận vuông A cấp n là chéo hóa được thì nó có n giá trị riêng tính cả bội.

Chú ý: Điều ngược lại chưa chắc đúng.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Giả sử A chéo hóa được: $P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Ký hiệu $\mathbf{p}_i$ là vector cột thứ i của P. Ta có:

$$A\,[\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \ldots\ \mathbf{p}_n] = PD = [\lambda_1\mathbf{p}_1\ \lambda_2\mathbf{p}_2\ \ldots\ \lambda_n\mathbf{p}_n]$$

Suy ra $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$. Các vector $\mathbf{p}_i$ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm toàn các vector riêng của A.

Định lý

Ma trận A chéo hóa được nếu và chỉ nếu nó có n vector riêng độc lập tuyến tính.

Hệ quả

Nếu A có n giá trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Thí dụ: Chéo hóa $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Đa thức đặc trưng: $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

$(-2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_1 = [-1\ 0\ 1]^T$
$(2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_2 = [1\ \ -1\ 4]^T$
$(3I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_3 = [-1\ 1\ 1]^T$

Đặt $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, ta có $P^{-1}AP = diag(-2, 2, 3)$.

Tóm tắt

1. Chéo hóa ma trận vuông
   - Ma trận chéo hóa được
   - Điều kiện chéo hóa được

2. Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng
   - Chéo hóa ma trận đối xứng
   - Ma trận trực giao
   - Chéo hóa trực giao

Giá trị riêng của ma trận đối xứng

Cho A là một ma trận đối xứng cấp n: $A = A^T$.

Định lý

1. *A chéo hóa được.*
2. *Tất cả các giá trị riêng của A là thực.*
3. *Nếu λ là một giá trị riêng bội k của A thì không gian con riêng của A ứng với λ có số chiều là k (nghĩa là A có k vector riêng độc lập tuyến tính ứng với λ).*

Giá trị riêng của ma trận đối xứng

Thí dụ:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ chéo hóa được với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ có $\det(\lambda I - A_2) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)^2$.

   Với $\lambda_1 = -1$, có 2 vector riêng độc lập tuyến tính
   $\mathbf{u}_1 = [1\ 1\ 0\ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0\ 0\ 1\ 1]^T$.
   Với $\lambda_2 = 3$, có 2 vector riêng độc lập tuyến tính
   $\mathbf{u}_3 = [1\ -1\ 0\ 0]^T$, $\mathbf{u}_4 = [0\ 0\ 1\ -1]^T$.

Tóm tắt

Ma trận trực giao

Định nghĩa

Ma trận vuông P được gọi là trực giao nếu nó khả nghịch và $P^{-1} = P^T$.

Nhận xét:

- Ma trận P là trực giao nếu và chỉ nếu $PP^T = P^TP = I$.
- Ma trận P là trực giao nếu và chỉ nếu P^T là trực giao.

Thí dụ:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Nhận biết ma trận trực giao

Định lý

Ma trận vuông P là trực giao nếu và chỉ nếu các vector cột (hàng) của nó tạo thành một hệ trực chuẩn.

Tóm tắt

Vector riêng của ma trận đối xứng

Định lý

Giả sử A là một ma trận đối xứng. Giả sử λ_1, λ_2 là hai giá trị riêng khác nhau của A và $\mathbf{x}_1\,, \mathbf{x}_2$ tương ứng là vector riêng của $\lambda_1\,, \lambda_2$. Khi đó $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ vuông góc (trực giao) với nhau.

Chứng minh:

- $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1\,, A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$.
- $\lambda_1(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) = \lambda_1\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 = (A\mathbf{x}_1)^T\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T A^T\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T(\lambda_2\mathbf{x}_2)\lambda_2\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 = \lambda_2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)$.
- $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) = 0$, mà $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, nên $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$.

Chéo hóa trực giao

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là chéo hóa trực giao được *nếu tồn tại một ma trận trực giao P cấp n sao cho $P^{-1}AP = P^{T}AP$ là một ma trận đường chéo.*

Định lý

Ma trận vuông A cấp n là chéo hóa trực giao được và có n giá trị riêng thực nếu và chỉ nếu A là một ma trận đối xứng.

Phương pháp chéo hóa trực giao

Ý tưởng: Tìm một cơ sở trực chuẩn gồm các vector riêng.

Các bước thực hiện:

1. Giải phương trình đặc trưng để tìm các giá trị riêng (tính cả bội).
2. Với mỗi giá trị riêng, tìm một cơ sở của không gian con riêng tương ứng rồi trực chuẩn hóa bằng Gram-Schmidt.
3. Tạo ma trận P với các *cột* là các vector riêng trực chuẩn tìm được.

Thí dụ chéo hóa trực giao

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 3)(\lambda - 2) \implies$ có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = -3\,, \lambda_2 = 2$.

Với $\lambda_1 = -3$ tìm được $\mathbf{u}_1 = [-2\ 1]^T$, chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_1 = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T$.

Với $\lambda_2 = 2$ tìm được $\mathbf{u}_2 = [1\ 2]^T$, chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right]^T$.

Từ đó $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ và $P^T A P = diag(-3, 2)$.

Thí dụ chéo hóa trực giao

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 6)(\lambda - 3)^2 \implies$ có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = -6\,, \lambda_2 = 3$ (bội 2).

Với $\lambda_1 = -6$ tìm được $\mathbf{u}_1 = [1\ -2\ 2]^T$, chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_1 = \left[\frac{1}{3}\ -\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\right]^T$.

Với $\lambda_2 = 3$ tìm được $\mathbf{u}_2 = [2\ 1\ 0]^T$ và $\mathbf{u}_3 = [-2\ 0\ 1]^T$, trực chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\ 0\right]^T$ và $\mathbf{v}_3 = \left[-\frac{2}{3\sqrt{5}}\ \frac{4}{3\sqrt{5}}\ \frac{5}{3\sqrt{5}}\right]^T$.

Từ đó $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ và $P^T AP = diag(-6, 3, 3)$.