
Phép đếm (Counting)

Phép đếm (số lượng các phần tử)

- ☐ Các nguyên lý cơ bản
- ☐ Nguyên lý lồng chim bồ câu
- ☐ Hoán vị và tổ hợp
- ☐ Hệ số nhị thức
- ☐ Thuật toán chia để trị
- ☐ Thuật toán quy hoạch động

Hệ số nhị thức (Binomial coefficient)

□ Hằng đẳng thức PASCAL: Với $n, k (n \geq k)$

$$C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$$

□ Tam giác PASCAL

$\binom{0}{0}$		1
$\binom{1}{0} \binom{1}{1}$		1 1
$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$		1 2 1
$\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$	$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$	1 3 3 1
$\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$		1 4 6 4 1
$\binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}$		1 5 10 10 5 1
$\binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6}$		1 6 15 20 15 6 1
$\binom{7}{0} \binom{7}{1} \binom{7}{2} \binom{7}{3} \binom{7}{4} \binom{7}{5} \binom{7}{6} \binom{7}{7}$		1 7 21 35 35 21 7 1

Hệ số nhị thức

□ Định lí 1:

$$\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$$

□ Định lí 2 (VANDERMONDE):

$$C(m + n, r) = \sum_{k=0}^r C(m, r - k) C(n, k) \text{ với } r \leq \min(m, n)$$

Hệ số nhị thức

□ Định lí 3 (Nhị thức):

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{j=0}^n C(n, j) x^{n-j} y^j \\ &= C(n, 0) x^n + C(n, 1) x^{n-1} y + \dots \\ &\quad + C(n, n-1) x y^{n-1} + C(n, n) y^n\end{aligned}$$

□ Định lí 4:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C(n, k) = 0$$

Hệ số nhị thức

□ Tìm hệ số của $x^5 y^8$ trong khai triển $(x + y)^{15}$

□ Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(x + 1)^{10}$

□ $C(n, 2n) = \sum_{k=0}^n C(k, n)^2$

□ Tìm công thức tính hệ số của x^k trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$

Kĩ thuật truy hồi

□ **Ví dụ:** Bài toán nuôi thỏ

- 1) Các con thỏ không bao giờ chết
- 2) Hai tháng sau khi ra đời, mỗi cặp thỏ mới sẽ sinh ra một cặp thỏ con (một đực, một cái)
- 3) Khi đã sinh con rồi thì cứ mỗi tháng tiếp theo chúng lại sinh được một cặp con mới

□ Giả sử từ đầu tháng 1 có một cặp mới ra đời thì đến tháng thứ n sẽ có bao nhiêu cặp.

Kĩ thuật truy hồi

Gọi $f(n)$ là số thỏ ở tháng thứ n

Tháng 1: Có 1 cặp $f(1) = 1$



1

Tháng 2: Có 1 cặp $f(2) = 1$



2

$f(n) = a$



3

$f(n + 1) = b$ (có $b - a$ cặp sinh)



4

$f(n + 2) = b + a$
 $= f(n + 1) + f(n)$



5



6



Kĩ thuật truy hồi

□ **Ví dụ:** Bài toán nuôi thỏ 2

- 1) Các con thỏ không bao giờ chết
- 2) **Ba tháng sau khi ra đời**, mỗi cặp thỏ mới sẽ sinh ra một cặp thỏ con (một đực, một cái)
- 3) Khi đã sinh con rồi thì cứ mỗi tháng tiếp theo chúng lại sinh được một cặp con mới

□ Giả sử từ đầu tháng 1 có một cặp mới ra đời thì đến tháng thứ n sẽ có bao nhiêu cặp.

Kĩ thuật truy hồi

□ Ví dụ: Bài toán đếm số lượng xâu nhị phân

- Đếm số lượng xâu nhị phân không có hai bit 1 nào đứng cạnh nhau

$n = 1$ có 2 xâu thỏa mãn 0, 1

$n = 2$ có 3 xâu thỏa mãn 00, 01, 10

$n = 3$ có 5 xâu 000, 001, 010, 100, 101

$n = 5$ có bao nhiêu xâu thỏa mãn?

Kĩ thuật truy hồi

- ❑ Kĩ thuật truy hồi còn dùng để đánh giá độ phức tạp thuật toán chia để trị.
- ❑ Thuật toán chia để trị (divide & conquer)
 - ❑ chia bài toán thành các bài toán con cùng dạng (**none overlapping**) nhỏ hơn.
- ❑ Thuật toán quy hoạch động (dynamic algorithm)
 - ❑ Chia bài toán thành các bài toán con cùng dạng (**overlapping**) nhỏ hơn.
 - ❑ Dùng bảng lưu trữ lại phương án các bài toán con, tránh được việc phải giải lại bài toán con khi gặp lại.

Thuật toán chia để trị

Tính A^N

□ Cách tính

- Tính $B = A^{\frac{N}{2}}$
- $C = B \times B \times A^{N\%2}$

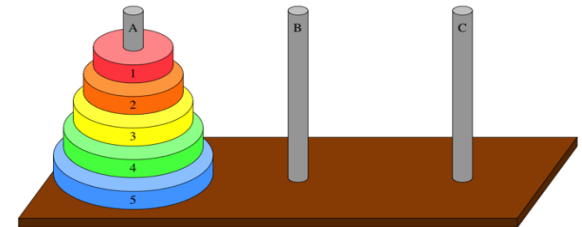
□ Độ phức tạp

- $f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + 1$
- $O(\log n)$

Thuật toán chia để trị

□ Bài toán tháp Hà Nội

- Bắt đầu, các đĩa được chồng lên nhau ở cọc A, đĩa nhỏ nằm trên đĩa lớn.
- Yêu cầu chuyển toàn bộ số đĩa từ cọc A sang cọc C, tuân theo các quy tắc sau:
 - Chỉ sử dụng thêm 1 cọc B để chuyển;
 - Một lần chỉ được di chuyển một đĩa nằm trên cùng từ cọc này sang cọc khác;
 - Một đĩa chỉ được đặt lên một đĩa lớn hơn.



Thuật toán chia để trị

□ Bài toán tháp Hà Nội

□ Cách chuyển n đĩa từ cọc A sang C dưới đây là tối ưu?

○ Chuyển($n-1$,A,B)

○ Chuyển(1,A,C)

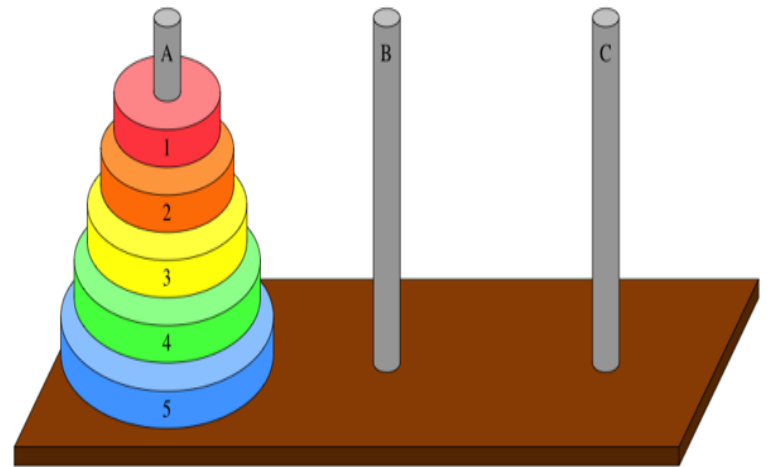
○ Chuyển($n-1$,B,A)

□ Tính số lần chuyển đĩa?

○ $f(1) = 1$;

○ $f(2) = 3$;

○ $f(n) = f(n-1) + 1 + f(n-1) = 2^n - 1$



Thuật toán chia để trị

□ Bài toán lát gạch

- Một sàn nhà kích thước $2^N \times 2^N$ khuyết 1 ô.
- Hãy lát sàn nhà bằng 4 loại gạch hình thước thợ.

