Định thức

Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

Tóm tắt

1. Định thức
   - Định thức của ma trận vuông
   - Khai triển Laplace
2. Định thức và các phép biến đổi sơ cấp
   - Định thức và các phép biến đổi theo hàng
   - Định thức và các phép biến đổi theo cột
   - Định thức bằng 0
3. Tính chất của định thức
   - Định thức và phép nhân
   - Định thức và phép chuyển vị
   - Định thức và ma trận nghịch đảo

Tóm tắt

Định thức của ma trận 2×2

Xét

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Xét hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

khi $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Định thức của ma trận 2×2

Định nghĩa

Định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

được cho bởi công thức:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,.$$

Thí dụ: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0\,.$

Định thức con và phần bù đại số

Cho ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})$.

Định nghĩa

Định thức con *ứng với hàng i và cột j của A, ký hiệu M_{ij}, là định thức của ma trận thu được từ A bằng cách xóa đi hàng i và cột j.*

Phần bù đại số *ứng với hàng i và cột j của A là $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

Thí dụ: Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6\,, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3\,.$$

và $C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 6\,, C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -3.$

Định thức con và phần bù đại số

Chú ý:

- Để định nghĩa định thức con của một ma trận vuông cấp n, ta đã thừa nhận rằng định thức của một ma trận vuông cấp $n-1$ đã được định nghĩa và tính được.
- Nếu i và j cùng chẵn hoặc cùng lẻ thì $C_{ij} = M_{ij}$; nếu i và j khác tính chẵn lẻ thì $C_{ij} = -M_{ij}$.

Định thức của ma trận $n \times n$

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})$ *là ma trận vuông cấp* n $(n \geq 1)$. *Định thức của* A, *ký hiệu là* $\det(A)$ *hay* $|A|$, *được định nghĩa bằng quy nạp theo* n *như sau:*

- *Nếu* $n = 1$*:* $\det(A) = a_{11}$.
- *Nếu* $n \geq 2$*:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \cdots + a_{1n} C_{1n} .$$

Thí dụ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Ta tính được $C_{11} = -1$, $C_{12} = 5$, $C_{13} = 4$.
Từ đó $\det(A) = 14$.

Nhận xét: Trong thí dụ trên, ta vẫn thu được định thức nếu "khai triển" theo một cột hoặc theo một hàng khác.

Tóm tắt

Khai triển Laplace

Định lý (Khai triển Laplace của định thức)

Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận vuông cấp n. Với mọi hàng i và với mọi cột j, ta có:

- *Khai triển Laplace theo hàng i:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in} .$$

- *Khai triển Laplace theo cột j:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj} .$$

Nhận xét: Ta thường chọn khai triển theo một hàng hoặc cột có nhiều số 0 để giảm nhẹ việc tính toán.

Khai triển Laplace

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Khai triển theo cột 3: $\det(A) = 3C_{13} = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times 13 = 39\,.$

Định thức của ma trận 3×3

Tính định thức của

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ?$$

Cách 1: Khai triển theo một hàng hoặc một cột nào đó.

Cách 2:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\,. \end{aligned}$$

Định thức của ma trận tam giác

Ma trận tam giác:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}, \quad \det(B) = b_{11} b_{22} \dots b_{nn}.$$

Đặc biệt: Ma trận đường chéo.

Tóm tắt

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Nếu tính định thức bằng khai triển Laplace: có thể tới $n!$ số hạng!

Ý tưởng hiệu quả hơn: đưa về ma trận tam giác.

Định lý

Cho A và B là các ma trận vuông cấp n. Giả sử B nhận được từ A bằng một phép biến đổi sơ cấp p. Các định thức của A và B liên hệ với nhau như sau:

1. *Nếu p là phép đổi chỗ hai hàng thì $\det(B) = -\det(A)$;*
2. *Nếu p là phép nhân một hàng với hằng số $c \neq 0$ thì $\det(B) = c \det A$;*
3. *Nếu p là phép cộng một hàng với bội của một hàng khác thì $\det(B) = \det(A)$.*

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Thí dụ:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_1 \leftrightarrow h_2) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_2 - 2h_1) \\
&= 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (-1/7 \times h_2) \\
&= 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (h_3 - h_2) \\
&= 7 \times (1 \times 1 \times (-1)) \\
&= -7\,.
\end{aligned}
$$

Tóm tắt

Các phép biến đổi sơ cấp theo cột

- Các khái niệm phép biến đổi sơ cấp theo cột, ma trận tương đương theo cột giống hệt như đối với hàng, trừ việc các tính toán được thực hiện trên cột thay vì hàng.
- Quan hệ giữa các phép biến đổi theo cột và định thức giống hệt giữa các phép biến đổi theo hàng và định thức.

Thí dụ:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ 5 & -10 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} \quad (c_2 + 2c_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Tóm tắt

Điều kiện đủ để định thức bằng 0

Định lý

Một ma trận vuông A có định thức bằng 0 nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- *Có một hàng (hoặc cột) bằng 0;*
- *Có hai hàng (hoặc hai cột) bằng nhau;*
- *Có một hàng (hoặc cột) là một bội của một hàng (hoặc cột) khác*

Thí dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 18 & 4 \end{vmatrix} \quad (h_2 - 2h_1)\,.$$

Vì hàng 3 bằng -2 nhân với hàng 2 nên định thức bằng 0.

Tóm tắt

Định thức và phép nhân hai ma trận

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det(A) = -7\,, \det(B) = 11$.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = -77\,.$$

Định lý

Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cỡ thì

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Nhận xét: định lý có thể được mở rộng cho tích của nhiều hơn 2 ma trận (vuông, cùng cỡ).

Định thức và phép nhân với một số

Thí dụ:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(2A) = -56\,.$$

Định lý

Nếu A là một ma trận vuông cấp n và c là một số thì

$$\det(cA) = c^n \det(A)\,.$$

Tóm tắt

Định thức và ma trận chuyển vị

Định lý

Nếu A là một ma trận vuông thì $\det(A^T) = \det(A)$.

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det(A) = \det(A^T) = -6$.

Tóm tắt

Định thức và tính khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông A là khả nghịch nếu và chỉ nếu $\det(A) \neq 0$.

Định thức và tính khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông A là khả nghịch nếu và chỉ nếu $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh (ý chính):

- Giả sử A khả nghịch. Khi đó, vì $AA^{-1} = I_n$ nên $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Suy ra $\det(A) \neq 0$.
- Giả sử $\det(A) \neq 0$. Giả sử B là một ma trận bậc thang thu gọn tương đương theo hàng với A. Vì $\det(A) \neq 0$ nên $\det(B) \neq 0$. Từ đó $B = I_n$, tức là B khả nghịch. Suy ra A khả nghịch.

Định lý

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

Tổng hợp các điều kiện khả nghịch

Định lý

Cho A là một ma trận vuông cấp n. Các điều kiện sau là tương đương:

1. *A khả nghịch.*
2. *Hệ pttt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ có nghiệm duy nhất với mọi $\mathbf{b}$.*
3. *Hệ pttt $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ chỉ có nghiệm tầm thường.*
4. *A tương đương theo hàng với I_n.*
5. *A viết được thành tích của các ma trận sơ cấp.*
6. $\det(A) \neq 0$.