Không gian vector

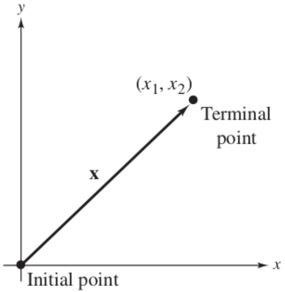
Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

Tóm tắt

Tóm tắt

1. Vector trong mặt phẳng ($\mathbb{R}^2$)
2. Vector trong $\mathbb{R}^n$
3. Không gian vector
4. Không gian vector con

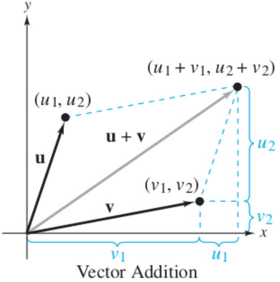
Vector trong mặt phẳng



Hình: Larson et al., p. 180

- Một *vector* trong mặt phẳng là một đoạn thẳng có hướng:
  - *điểm đầu* là gốc tọa độ $(0, 0)$,
  - *điểm cuối* có tọa độ (x, y).
- *Tọa độ* của vector là tọa độ của điểm cuối: $\mathbf{u} = (x, y)$.
- Hai vector $\mathbf{u}(x_1, y_1)$ và $\mathbf{v}(x_2, y_2)$ *bằng nhau* nếu $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

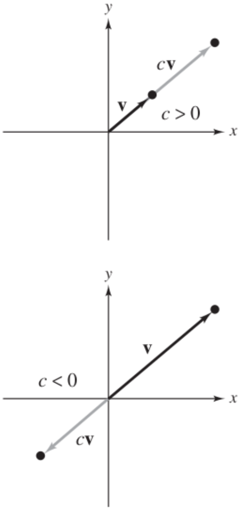
Phép cộng vector



Hình: Larson et al., p. 180

- *Tổng* của hai vector $\mathbf{u}(x_1, y_1)$ và $\mathbf{v}(x_2, y_2)$, ký hiệu là $\mathbf{u} + \mathbf{v}$:
  - là một vector;
  - $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- Trên mặt phẳng, phép cộng vector có thể được thực hiện nhờ *quy tắc hình bình hành*.
- *Vector không* $\mathbf{0} = (0, 0)$ thỏa mãn $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ với mọi vector $\mathbf{u}$.

Phép nhân vector với vô hướng



Hình: Larson et al., p. 181

- *Tích* của một vector $\mathbf{u}(x_1, y_1)$ với một số thực c :
  - là một vector;
  - $c\mathbf{u} = (cx_1, cy_1)$.
- Hai vector $\mathbf{u}$ và $c\mathbf{u}$ là *cùng hướng* nếu $c > 0$, *ngược hướng* nếu $c < 0$.
- *Vector đối* của $\mathbf{u}$ là $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$.
- *Phép trừ* vector: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Thí dụ

Cho $\mathbf{u} = (3, 4)$ và $\mathbf{v} = (-2, 5)$. Tính:

- $\frac{1}{2}\mathbf{v}$?

$$\frac{1}{2}\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2} \times (-2), \frac{1}{2} \times 5\right) = \left(-1, \frac{5}{2}\right).$$

- $\mathbf{u} - \mathbf{v}$?

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = (3, 4) + (2, -5) = (5, -1).$$

- $\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$?

$$\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} = (3, 4) + (-1, \frac{5}{2}) = (2, \frac{13}{2}).$$

Các tính chất của phép cộng và phép nhân với vô hướng

Định lý

Những điều sau đúng với mọi vector $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *và với mọi số* c, d:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *là một vector.* [tính đóng của phép cộng]
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. [tính giao hoán]
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$. [tính kết hợp của phép cộng]
4. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. [phần tử trung lập của phép cộng]
5. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. [phần tử đối]
6. $c\mathbf{u}$ *là một vector.* [tính đóng của phép nhân với vô hướng]
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$. [tính phân phối]
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$. [tính phân phối]
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$. [tính kết hợp của phép nhân]
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$. [phần tử trung lập của phép nhân]

Tóm tắt

Vector trong $\mathbb{R}^n$

Khái niệm vector trong mặt phẳng tọa độ có thể được mở rộng cho những bộ sắp thứ tự gồm n giá trị:

- Mỗi *vector* được đồng nhất với một "điểm": $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Hai *vector bằng nhau* nếu tất cả các thành phần tương ứng của chúng bằng nhau:

$$\mathbf{u}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{v}(y_1, \ldots, y_n) \iff x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n\,.$$

Các phép toán với vector trong $\mathbb{R}^n$

- *Tổng* của hai vector $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ và $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n)$ cũng là một vector trong $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) .$$

- *Tích* của một vector $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ và một *vô hướng* $c \in \mathbb{R}$ là

$$c\mathbf{u} = (cx_1, \ldots, cx_n) .$$

- *Vector không*: $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ thỏa mãn $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ với mọi vector $\mathbf{u}$.
- *Vector đối* của $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ là

$$-\mathbf{u} = (-x_1, \ldots, -x_n) .$$

- *Hiệu* của hai vector $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ và $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n)$ là

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) .$$

Các tính chất của phép cộng và phép nhân với vô hướng

Định lý

Những điều sau đúng với mọi vector $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *và với mọi số* c, d:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *là một vector.* [tính đóng của phép cộng]
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. [tính giao hoán]
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$. [tính kết hợp của phép cộng]
4. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. [phần tử trung lập của phép cộng]
5. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. [phần tử đối]
6. $c\mathbf{u}$ *là một vector.* [tính đóng của phép nhân với vô hướng]
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$. [tính phân phối]
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$. [tính phân phối]
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$. [tính kết hợp của phép nhân]
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$. [phần tử trung lập của phép nhân]

Thí dụ

Cho các vector trong $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{u} = (2, -1, 5, 0)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 1, -1)$, $\mathbf{w} = (-6, -2, 0, 3)$. Tìm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ biết rằng:

(a) $\mathbf{x} = 2\mathbf{u} - (\mathbf{v} + 3\mathbf{w})$

Tính biểu thức trong dấu ngoặc trước:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + 3\mathbf{w} &= (-14, 9, 1, 8) \\ \implies \mathbf{x} &= 2\mathbf{u} - (\mathbf{v} + 3\mathbf{w}) \\ &= (18, 1, 9, -8)\,. \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất phân phối để bỏ dấu ngoặc:

$$\begin{aligned} -(\mathbf{v} + \mathbf{3}w) &= -\mathbf{v} - 3\mathbf{w} \\ \implies \mathbf{x} &= 2\mathbf{u} - \mathbf{v} - 3\mathbf{w} \\ &= (18, 1, 9, -8)\,. \end{aligned}$$

(b) $3(\mathbf{x} + \mathbf{w}) = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x}$

$$\begin{aligned} 3\mathbf{x} + 3\mathbf{w} &= 2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} \\ 2\mathbf{x} &= 2\mathbf{u} - \mathbf{v} - 3\mathbf{w} \\ 2\mathbf{x} &= (18, 1, 9, -8) \\ \mathbf{x} &= (9, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}, -4)\,. \end{aligned}$$

Vector $\mathbf{0}$ và vector đối

Định lý

Trong không gian $\mathbb{R}^n$:

1. *Vector $\mathbf{0}$ là duy nhất.*
2. *Với mọi vector $\mathbf{v}$, vector đối của $\mathbf{v}$ là duy nhất.*

Chứng minh

1. Giả sử có hai vector không là $\mathbf{0}_1$ và $\mathbf{0}_2$. Ta có:

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_1 &= \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 \text{ (vì } \mathbf{0}_2 \text{ là vector không)} \\ &= \mathbf{0}_2 \text{ (vì } \mathbf{0}_1 \text{ là vector không)}\,. \end{aligned}$$

2. Giả sử tồn tại một vector $\mathbf{v}$ có hai vector đối là $\mathbf{w}_1$ và $\mathbf{w}_2$. Ta có:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{w}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} + \mathbf{w}_2) \\ &= (\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}) + \mathbf{w}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2\,. \end{aligned}$$

Vector $\mathbf{0}$ và vector đối

Định lý

Với mọi $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *và* $c \in \mathbb{R}$:

1. *Nếu* $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$ *thì* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
3. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
4. *Nếu* $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *thì* $c = 0$ *hoặc* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
5. *Nếu* $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ *thì* $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.
6. $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Chứng minh

1. Thêm $-\mathbf{v}$ vào (bên trái) hai vế của đẳng thức.
2. $0\mathbf{v} = (0+0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$. Thêm $-(0\mathbf{v})$ vào hai vế ta thu được $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
3. $c\mathbf{0} = c(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$.
4. Nếu $c \neq 0$, nhân hai vế với $1/c$ ta thu được $1\mathbf{v} = \mathbf{0}$ hay $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
5. Thêm $-\mathbf{v}$ vào (bên trái) hai vế của đẳng thức.
6. Do định nghĩa.

Tổ hợp tuyến tính

Xét các vector $\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ trong $\mathbb{R}^n$.

Ta nói vector $\mathbf{x}$ là một *tổ hợp tuyến tính* của các vector $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ nếu tồn tại các vô hướng $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sao cho:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k\,.$$

Thí dụ: Vector $\mathbf{x} = (-1, -2, -2)$ có phải là tổ hợp tuyến tính của các vector $\mathbf{u} = (0, 1, 4), \mathbf{v} = (-1, 1, 2), \mathbf{w} = (3, 1, 2)$?

Ta tìm các số a, b, c sao cho $\mathbf{x} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$:

$$(-1, -2, -2) = a(0, 1, 4) + b(-1, 1, 2) + c(3, 1, 2)$$
$$(-1, -2, -2) = (-b + 3c, a + b + c, 4a + 2b + 2c)$$

Đồng nhất các phần tử tương ứng và giải hệ pttt ta được
$a = 1, b = -2, c = -1.$
Vậy $\mathbf{x} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

Tóm tắt

1. Vector trong mặt phẳng ($\mathbb{R}^2$)
2. Vector trong $\mathbb{R}^n$
3. Không gian vector
4. Không gian vector con

Không gian vector

Định nghĩa

Một không gian vector *V được xác định bởi:*

- *Một tập hợp V;*
- *Hai phép toán trên V:*
  - phép cộng,
  - phép nhân với vô hướng;

sao cho các tiên đề về không gian vector *(xem trang sau) được thỏa mãn.*

Không gian vector

Định nghĩa

1. $\forall \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$. [tính đóng của phép cộng]
2. $\forall \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. [tính giao hoán]
3. $\forall \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{w} \in V, (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$. [tính kết hợp của phép cộng]
4. $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. [phần tử trung lập của phép cộng]
5. $\forall \mathbf{u} \in V, \exists (-\mathbf{u}) \in V : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. [phần tử đối]
6. $\forall \mathbf{u} \in V, \forall c \in \mathbb{R}, c\mathbf{u} \in V$. [tính đóng của phép nhân với vô hướng]
7. $\forall \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{v} \in V, \forall c \in \mathbb{R}, c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$. [tính phân phối]
8. $\forall \mathbf{u} \in V, \forall c \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{R}, (c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$. [tính phân phối]
9. $\forall \mathbf{u} \in V, \forall c \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{R}, c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$. [tính kết hợp của phép nhân]
10. $\forall \mathbf{u} \in V, 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$. [phần tử trung lập của phép nhân]

Thí dụ về không gian vector

- Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ với phép cộng và phép nhân thông thường là một không gian vector:
  - Các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối, ...được thừa hưởng từ phép cộng và phép nhân các số thực;
  - Phần tử trung lập của phép cộng ("vector không") là 0; phần tử đối của a là $-a$.

- $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ với hai phép toán thông thường là một không gian vector:
  - Các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối, ...được thừa hưởng từ phép cộng và phép nhân với vô hướng trong $\mathbb{R}^n$;
  - Phần tử trung lập của phép cộng là $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$; phần tử đối của $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là $-\mathbf{v} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Thí dụ về không gian vector

- Tập hợp $M_{2,2}$ gồm tất cả các ma trận 2×2, với phép cộng ma trận và phép nhân với vô hướng là một không gian vector:
  - Các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối, ... được thừa hưởng từ phép cộng ma trận và phép nhân với vô hướng;
  - Phần tử trung lập của phép cộng là ma trận $\mathcal{O}_{2,2}$; phần tử đối của $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.
- Tập hợp $M_{m,n}$ gồm tất cả các ma trận $m \times n$, với phép cộng ma trận và phép nhân với vô hướng là một không gian vector.

Thí dụ về không gian vector

- Tập hợp $P_2 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ các đa thức bậc *không quá 2* với hai phép toán:

$$\begin{aligned}(a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0) &= (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x \\ &\quad + (a_0 + b_0) \\ c(a_2x^2 + a_1x + a_0) &= ca_2x^2 + ca_1x + ca_0\end{aligned}$$

  là một không gian vector.

  - Tính đóng của các phép toán: từ định nghĩa trên.
  - Các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối, ...: thừa hưởng từ các phép cộng và phép nhân của đa thức.
  - Phần tử trung lập của phép cộng là đa thức $\mathbf{0}(x)$ $(a_0 = a_1 = a_2 = 0)$; phần tử đối của $a_2x^2 + a_1x + a_0$ là $-a_2x^2 - a_1x - a_0$.

- Tập hợp P_n các đa thức bậc *không quá n* cùng với phép cộng và phép nhân với vô hướng được định nghĩa tương tự như trên là một không gian vector.

Thí dụ về không gian vector

- Tập hợp $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$ gồm tất cả các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ với hai phép toán:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(cf)(x) = c\,(f(x))$$

  là một không gian vector.
  - Tính đóng của các phép toán: do tính chất của hàm liên tục.
  - Các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối, ...: thừa hưởng từ các phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{R}$.
  - Phần tử trung lập của phép cộng là hàm $f_0 \equiv 0$; phần tử đối của $f(x)$ được xác định bởi $(-f)(x) = -(f(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. (*Bài tập: Chứng minh rằng 1) f_0 là hàm liên tục và 2) $-f$ là hàm liên tục nếu f liên tục.*)
- Tương tự, các tập hợp sau cùng với các phép toán thông thường cũng là các không gian vector:
  - Tập hợp các hàm liên tục trên một miền $D \subset \mathbb{R}$ (khoảng đóng, khoảng mở, ...).
  - Tập hợp các hàm khả vi trên một miền $D \subset \mathbb{R}$.
  - Tập hợp các hàm khả tích trên một miền $D \subset \mathbb{R}$.

Thí dụ về không gian vector

- Tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên với hai phép toán thông thường không phải một không gian vector.
- Tập hợp $\mathbb{R}^+$ gồm các số thực dương cùng với hai phép toán thông thường không phải một không gian vector.
- Tập hợp các đa thức bậc 2 cùng với hai phép toán thông thường không phải một không gian vector.
- Tập hợp $\mathbb{R}^2$ với phép cộng thông thường và phép nhân sau:

$$c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$$

không phải một không gian vector.

Vector không và vector đối

Định lý

Cho V là một không gian vector.

1. *Vector* $\mathbf{0}$ *là duy nhất.*
2. *Với mọi vector* $\mathbf{v}$, *vector đối của* $\mathbf{v}$ *là duy nhất.*

Định lý

Cho V là một không gian vector. Với mọi $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ *và* $c \in \mathbb{R}$:

1. *Nếu* $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$ *thì* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
3. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
4. *Nếu* $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *thì* $c = 0$ *hoặc* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
5. *Nếu* $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ *thì* $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.
6. $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Tóm tắt

Không gian vector con

Thí dụ: Trong không gian vector $\mathbb{R}^3$, xét

$$W = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\} \ (\text{mặt phẳng } Oxy)\,.$$

Ta có thể kiểm tra rằng W cùng với hai phép toán của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn các tiên đề của không gian vector. Ta nói rằng W là một *không gian vector con* của $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa

Cho V là một không gian vector.
Một tập hợp con <u>khác rỗng</u> W của V được gọi là một không gian (vector) con *của V nếu nó cùng với các phép toán của V tạo thành một không gian vector.*

Dấu hiệu nhận biết và tính chất

Định lý

Một tập hợp con khác rỗng W của V là một không gian con của V nếu và chỉ nếu nó đóng đối với hai phép toán của V, nghĩa là:

- $\forall \mathbf{u} \in W, \forall \mathbf{v} \in W, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.
- $\forall \mathbf{u} \in W, \forall c \in \mathbb{R}, c\mathbf{u} \in W$.

Mệnh đề

Cho V là một không gian vector.

- *Mọi không gian con W của V đều chứa vector không của V. Hơn nữa, vector không của V cũng là vector không của W: $\mathbf{0}_W \equiv \mathbf{0}_V$.*
- *Các tập hợp $\{\mathbf{0}_V\}$ và V là các không gian con của V. Với mọi không gian con W của V, $\{\mathbf{0}_V\} \subset W \subset V$.*

Chú ý: Các không gian con $\{\mathbf{0}_V\}$ và V được gọi là các không gian con *tầm thường* của V.

Thí dụ

- $V = M_{2,2}$, W là tập hợp các ma trận đối xứng cấp 2.
  - $W \neq \emptyset$ vì $I_2 \in W$.
  - W đóng với phép cộng: nếu $A, B \in W$ thì $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$, do đó $(A+B) \in W$.
  - W đóng với phép nhân với vô hướng: nếu $A \in W$, $c \in \mathbb{R}$ thì $(cA)^T = c(A^T) = cA$, do đó $cA \in W$.

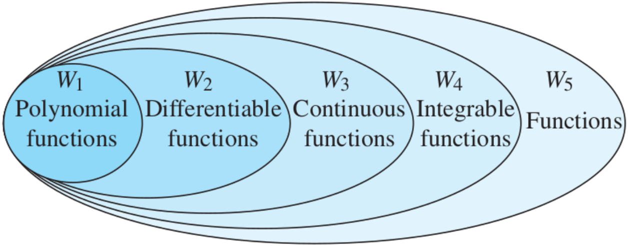
  Vậy W là một không gian con của $M_{2,2}$.
- $V = M_{2,2}$, U là tập hợp các ma trận khả nghịch cấp 2. U không chứa ma trận $\mathcal{O}_{2,2}$ nên U không phải là không gian con của $M_{2,2}$.
- $V = M_{2,2}$, U' là tập hợp các ma trận suy biến cấp 2. U' không đóng với phép cộng (*bài tập: vì sao?*) nên U' không phải là không gian con của $M_{2,2}$.

Thí dụ

Xét các tập hợp sau:

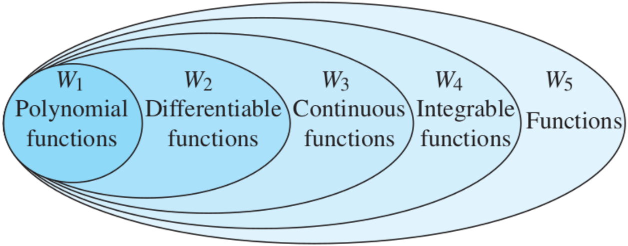
- W_1 gồm tất cả các đa thức trên khoảng $[0, 1]$;
- W_2 gồm tất cả các hàm khả vi trên khoảng $[0, 1]$;
- W_3 gồm tất cả các hàm liên tục trên khoảng $[0, 1]$;
- W_4 gồm tất cả các hàm khả tích trên khoảng $[0, 1]$;
- W_5 gồm tất cả các hàm xác định trên khoảng $[0, 1]$;

Ta có quan hệ bao hàm $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 \subset W_5$ như trong hình vẽ (*vì sao?*).



Hình: Larson et al., p. 201

Thí dụ



Hình: Larson et al., p. 201

- W_5 là một không gian vector.
- W_1, W_2, W_3, W_4 là các không gian con của W_5.
- Với mọi cặp chỉ số $i < j$, W_i là không gian con của W_j.

Thí dụ

- $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ (góc phần tư thứ nhất).
  - $U \neq \emptyset$, đóng với phép cộng;
  - U không đóng với phép nhân với vô hướng.

  Do đó, U không phải không gian con của $\mathbb{R}^2$.

- $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$ (góc phần tư thứ nhất hợp với góc phần tư thứ ba).
  - $W \neq \emptyset$, đóng với phép nhân với vô hướng;
  - W không đóng với phép cộng.

  Do đó, W không phải không gian con của $\mathbb{R}^2$.

Giao của hai không gian con

Định lý

Nếu U và W là hai không gian con của không gian vector V thì $U \cap W$ cũng là một không gian con của V.

Chú ý:

- Kết quả có thể mở rộng cho giao của một số hữu hạn các không gian con.
- Hợp của hai không gian con nói chung không phải là một không gian con.
  (Thí dụ: $V = \mathbb{R}^2$, U là trục hoành, W là trục tung, $U \cup W$ không đóng với phép cộng)