Ánh xạ tuyến tính

Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

Tóm tắt

1 Ánh xạ tuyến tính

2 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Tóm tắt

1. Ánh xạ tuyến tính

2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho V, W là các không gian vector. Một ánh xạ $T : V \to W$ được gọi là một ánh xạ tuyến tính *(hay một* đồng cấu*) từ V vào W nếu với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ và với mọi $c \in \mathbb{R}$:*

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
2. $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$

Chú ý: Các phép toán ở vế trái là các phép toán trong V, các phép toán ở vế phải là các phép toán trong W.

Thí dụ

- Xét $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được cho bởi $T_1(x, y) = (2x, x + y)$. Xét $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ và $c \in \mathbb{R}$. Ta có:
  - $T_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ và $T_1(\mathbf{v}_1) + T_1(\mathbf{v}_2) = (2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$.
  - $T_1(c\mathbf{v}_1) = T_1(cx_1, cy_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$, $cT_1(\mathbf{v}_1) = c(2x_1, x_1 + y_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$.

  Vậy T_1 là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

- Xét $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_2(x) = x^2$. Vì nói chung $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$ (chẳng hạn lấy $x_1 = x_2 = 1$) nên T_2 không phải là một ánh xạ tuyến tính.
  (T_2 *có thỏa mãn tính chất thứ hai không?*)

- Xét $T_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_3(x) = x + 2$. Với $c \neq 1$, $T_3(cx) = cx + 2 \neq c(x + 2) = cT_3(x)$, nên T_3 không phải là một ánh xạ tuyến tính.
  (T_3 *có thỏa mãn tính chất thứ nhất không?*)

- *Ánh xạ không* $0 : V \to W, 0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ là một ánh xạ tuyến tính.

- *Ánh xạ đồng nhất* $id : V \to V, id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ là một ánh xạ tuyến tính.

Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. *Với mọi* $\mathbf{v} \in V$, $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.
3. *Với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$.
4. *Nếu* $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ *thì*

$$T(\mathbf{v}) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_k T(\mathbf{v}_k)\,.$$

Nhận xét: Một ánh xạ tuyến tính được xác định hoàn toàn bởi ảnh của một cơ sở.

Định lý

Ánh xạ $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính nếu và chỉ nếu với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ và với mọi $a, b \in \mathbb{R}$:

$$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})\,.$$

Thí dụ

- Xét ánh xạ tuyến tính $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho

$$T_1(\mathbf{e}_1) = (2, -1, 4)\,,\; T_1(\mathbf{e}_2) = (1, 5, -2)\,,\; T_1(\mathbf{e}_3) = (0, 3, 1)\,.$$

  Khi đó với mọi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} T_1(x, y, z) &= xT_1(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) + zT(\mathbf{e}_3) \\ &= x(2, -1, 4) + y(1, 5, -2) + z(0, 3, 1) \\ &= (2x + y, -x + 5y + 3z, 4x - 2y + z)\,. \end{aligned}$$

- Xét $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ và $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.
  Do các tính chất của phép nhân ma trận, T_2 là một ánh xạ tuyến tính.
  Cụ thể, $T_2(x, y) = (3x, 2x + y, -x - 2y)$.

Ánh xạ tuyến tính xác định bởi phép nhân ma trận

Định lý

Cho A là một ma trận $m \times n$. Khi đó ánh xạ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được xác định bởi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ là một ánh xạ tuyến tính.

Ánh xạ tuyến tính xác định bởi phép nhân ma trận

Định lý

Cho A là một ma trận $m \times n$. Khi đó ánh xạ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được xác định bởi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ là một ánh xạ tuyến tính.

Thí dụ:

- Xét $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ánh xạ tuyến tính $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ là phép quay một góc θ (tâm quay là gốc tọa độ).
- Xét $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ánh xạ tuyến tính $P_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $P_z(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ là phép chiếu lên mặt phẳng Oxy.

Tóm tắt

1. Ánh xạ tuyến tính
2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Nhân *(hay* hạt nhân, hạch*) của một ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$, ký hiệu là* $\ker(T)$*, là tập hợp tất cả các vector $\mathbf{v} \in V$ sao cho $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$:*

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} .$$

Thí dụ:

- Nhân của ánh xạ không $0 : V \to W$ là toàn bộ V.
- Nhân của ánh xạ đồng nhất id là $\ker(id) = \{\mathbf{0}\}$.
- Phép chiếu P_z trong $\mathbb{R}^3$ lên mặt phẳng Oxy có nhân là $\ker(P_z) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.
- Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Nhân của $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Với mọi ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$, $\ker(T)$ là một không gian con của V.

Thí dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ và $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.
Nhân của T là không gian nghiệm của hệ $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Nghiệm của hệ là $(-2s + t, s + 2t, s, -4t, t)$, suy ra

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{(-2s + t, s + 2t, s, -4t, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= span\{(-2, 1, 1, 0, 0), (1, 2, 0, -4, 1)\} . \end{aligned}$$

Hệ quả

Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được xác định bởi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Nhân của T là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ảnh của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Ảnh của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$, ký hiệu là $Im(T)$, được định nghĩa bởi:

$$Im(T) = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} .$$

Định lý

Ảnh của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ là một không gian con của W.

Ảnh của ánh xạ tuyến tính

Thí dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ và $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

Với $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, ta có:

$$A\mathbf{v} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

suy ra
$Im(T) = span\{(1, 2, -1, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 3, -2, 0), (1, 1, 0, 2), (-1, 0, 1, 8)\}$.

Mệnh đề

Ảnh của ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ là không gian cột của ma trận A.

Hạng của ánh xạ tuyến tính

Xét ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$.

Định nghĩa

Hạng của T, ký hiệu là $rank(T)$, là số chiều của không gian ảnh của T:

$$rank(T) = \dim(Im(T)).$$

Định lý (Hạng của ánh xạ tuyến tính)

Nếu V là một không gian hữu hạn chiều thì

$$\dim(\ker(T)) + rank(T) = \dim(V).$$

Nhận xét: Khi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, ta tìm lại định lý hạng của ma trận.

Đơn cấu

Định nghĩa

Một đơn cấu *là một ánh xạ tuyến tính đồng thời là một đơn ánh.*

Định lý

Ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ *là một đơn cấu nếu và chỉ nếu* $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Thí dụ:

- Ánh xạ đồng nhất là một đơn cấu.
- Ánh xạ không không phải là một đơn cấu nếu $V \neq \{\mathbf{0}\}$.
- Phép quay R_θ trong $\mathbb{R}^2$ là một đơn cấu.
- Phép chiếu P_z trong $\mathbb{R}^3$ không phải là một đơn cấu.

Toàn cấu

Định nghĩa

Một toàn cấu *là một ánh xạ tuyến tính đồng thời là một toàn ánh.*

Định lý

Nếu W là một không gian hữu hạn chiều thì ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ là một toàn cấu nếu và chỉ nếu rank$(T) = \dim(W)$.

Hệ quả

Nếu $\dim(V) = \dim(W) = n$ thì ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ là một đơn cấu nếu và chỉ nếu nó là một toàn cấu.

Đẳng cấu

Định nghĩa

Một đẳng cấu *là một ánh xạ tuyến tính vừa là đơn cấu, vừa là toàn cấu. Nếu tồn tại một đẳng cấu $T : V \to W$ thì ta nói rằng các không gian V và W* đẳng cấu *với nhau.*

Định lý

Hai không gian hữu hạn chiều V và W là đẳng cấu với nhau nếu và chỉ nếu $\dim(V) = \dim(W)$.

Thí dụ: Các không gian sau đẳng cấu với nhau:

- $\mathbb{R}^4$
- $M_{2,2}$
- $M_{1,4}$
- P_3 (các đa thức bậc không quá 3)