Phép đếm (Counting)

Phép đếm (số lượng các phần tử)

- Các nguyên lí cơ bản
- Nguyên lý lồng chim bồ câu
- Hoán vị và tổ hợp
- Hệ số nhị thức
- Thuật toán chia để trị
- Thuật toán quy hoạch động

Lý thuyết tổ hợp

- Là một phần quan trọng của toán rời rạc, chuyên nghiên cứu sự sắp xếp các đối tượng.
- Liệt kê, đếm các đối tượng có những tính chất nào đó.
  - Đếm các phần tử xuất hiện nhiều trong toán học cũng như tin học,
  - Để giải quyết nhiều vấn đề cũng như được dùng nhiều khi tính xác suất của các biến cố.
  - Ví dụ, cần đếm số cách khác nhau đặt mật khẩu thỏa mãn các điều kiện: Độ dài ít nhất 6 ký tự và không vượt quá 8 ký tự và mỗi ký tư lấy từ tập [‘0’..’9’,’a’..’z’]
- Tạo ra một cách sắp xếp các đối tượng thỏa mãn tính chất nào đó.
  - Ví dụ, xây dựng thời khóa biểu, lịch thi, hay phương án sản xuất,…

Các nguyên lí cơ bản của phép đếm

- **Quy tắc cộng**:
  - Giả sử có hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách, khi đó có $n_1 + n_2$ cách làm một trong hai công việc đó.
- **Ví dụ**: Cần chọn một đại biểu là nam sinh viên có điểm trung bình từ 8.0 trở lên hoặc là nữ sinh viên có điểm trung bình từ 7.5 trở lên. Biết rằng có 20 sinh viên nam thỏa mãn tiêu chuẩn, 25 nữ sinh viên thỏa mãn tiêu chuẩn.
  - Có 20 + 25 cách chọn đại biểu.
- Quy tắc này có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau:
  - Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập này bằng tổng số các phần tử của các tập thành phần.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Các nguyên lí cơ bản của phép đếm

- **Quy tắc nhân**
  - Giả sử có một nhiệm vụ được tách ra làm hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách, khi đó có $n_1 \times n_2$ cách làm nhiệm vụ đó.
- **Ví dụ**: Cần chọn hai đại biểu, một là nam sinh viên có điểm trung bình từ 8.0 trở lên và một là nữ sinh viên có điểm trung bình từ 7.5 trở lên. Biết rằng có 20 sinh viên nam thỏa mãn tiêu chuẩn, 25 nữ sinh viên thỏa mãn tiêu chuẩn.
  - Có 20×25 cách chọn đại biểu.
- Quy tắc này có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau:
  - Chọn một phần tử của tích Đề-các $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ được tiến hành bằng cách chọn lần lượt từng phần tử của A_1, một phần tử của A_2, …, một phần tử của A_n.

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

Các nguyên lí cơ bản của phép đếm

- Đếm số cách khác nhau đặt mật khẩu thỏa mãn các điều kiện sau:
  - ✓ Độ dài ít nhất 6 ký tự và không vượt quá 8 ký tự;
  - ✓ Mỗi ký tự lấy từ tập [‘0’..’9’,’a’..’z’]

- Hãy cho biết biến k nhận giá trị bằng bao nhiêu sau khi chạy từng đoạn chương trình dưới đây:

```
k = 0;
for (int i=1; i<=123; i++)
    k++;
for (int i=1; i<=111; i++)
    k++;
```

```
k = 0;
for (int i=1; i<=12; i++)
    for (int i=1; i<=11; i++)
        k++;
```

Các nguyên lý của phép đếm

- Nguyên lý bù trừ (Exclusive principle)
  - Để giải quyết các trường hợp bị tính nhiều hơn một lần khi đếm theo Quy tắc cộng.
  - Theo nguyên lý tập hợp: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- **Ví dụ**: đếm số lượng xâu nhị phân độ dài 8, bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00.
  - 128 (số xâu bắt đầu bằng 1) + 64 (số xâu kết thúc 00) – 32 (số xâu bắt đầu bằng 1 và kết thúc 00) = 160

Các nguyên lý của phép đếm

- Trong một trường đại học có 18 sinh viên ngành toán và 325 sinh viên ngành tin học
  - Có bao nhiêu cách chọn hai sinh viên làm đại diện, sao cho một là sinh viên toán và một là sinh viên tin học.
  - Có bao nhiêu cách chọn một sinh viên làm sinh viên đại diện

- Từ 1 đến 1000 có bao nhiêu số chia hết cho 6 hoặc chia hết cho 9?

Các nguyên lý của phép đếm

- Từ New York tới Denver có 6 hang hang không và có 7 hang bay từ Devel tới San Francisco. Có bao nhiêu khả năng khác nhau để bay từ New York đến San Francisco mà có qua Denver?
- Một phiếu trắc nghiệm gồm 10 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời.
  - Có bao nhiêu cách điền phiếu trắc nghiệm này nếu mọi câu hỏi đều phải được trả lời.
  - Có bao nhiêu cách điền phiếu trắc nghiệm này nếu có thể bỏ trống các câu hỏi.

Nguyên lý Dirichlet (tổ bồ câu)

- **Định lý 1**: Nếu có $k+1$ (hoặc nhiều hơn) đồ vật được đặt vào trong k hộp thì có ít nhất một hộp chứa chứa hai hoặc nhiều hơn hai đồ vật.
  - **Ví dụ**: Một tập thể gồm 367 người, như vậy có ít nhất 2 người trùng ngày sinh.
- **Định lý 2**: Nếu có k đồ vật được đặt vào trong b hộp, sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{k}{b} \right\rceil$ vật.
  - **Ví dụ**: Trong 100 người có ít nhất $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ người cùng tháng sinh.

Nguyên lý Dirichlet (tổ bồ câu)

- Chứng tỏ rằng trong $n + 1$ số nguyên dương đội một khác nhau không vượt quá $2n$, luôn tồn tại hai số nguyên tố cùng nhau.

- **Lời giải**:
  - Trong n+1 số đôi một khác nhau không vượt quá 2n
    - tồn tại hai số liên tiếp nhau
      - hai số đó nguyên tố cùng nhau.

Nguyên lý Dirichlet (tổ bồ câu)

- Chứng tỏ rằng trong $n+1$ số nguyên dương không vượt quá $2n$, luôn tồn tại hai số chia hết cho nhau.
- **Giải:** Ta biểu diễn a_j=$2^{k_j} * q_j$, trong đó k_j là số nguyên không âm còn q_j là số nguyên dương lẻ nhỏ hơn $2n$.
  - Vì chỉ có n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 2n nên theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại hai trong các số lẻ q_1, q_2, …, q_{n+1} bằng nhau. Giả sử 2 số đó là $q_i = q_j$ $(= q)$, khi đó ta có a_i=$2^{k_i} * q$, a_j=$2^{k_j} * q$ chia hết cho nhau (đpcm)

Hoán vị và chỉnh hợp

- **Hoán vị** của một tập các đối tượng khác nhau
  - Là số cách sắp xếp có thứ tự của các đối tượng này.
- **Chỉnh hợp chập r của n phần tử**
  - Số cách sắp xếp có thứ tự r ($r \leq n$) phần tử của n phần tử khác nhau.
  - Hoán vị là một trường hợp đặc biệt khi $r = n$.
- **Định lý**: Chỉnh hợp chập r của n phần tử

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$P(n, n) = n!$$

- **Ví dụ**: Có 3!=6 cách xếp 3 người A, B, C xếp vào 3 chỗ ngồi, các cách đó là ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Hoán vị và chỉnh hợp

- Có bao nhiêu cách xếp 8 người ngồi quanh một bàn tròn, hai cách ngồi được gọi là giống nhau nếu cách này có thể nhận được từ cách kia bằng cách xoay bàn.
- Cho $S = \{1,2,3\}$. Cách sắp xếp $(3,1,2)$ là một hoán vị của S, còn cách xếp $(3,1)$ là một chỉnh hợp chập 2 của S.

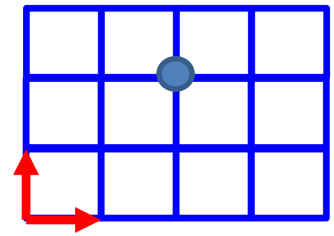
Tổ hợp

- Tổ hợp chập r của một tập hợp n phần tử
  - Số cách chọn không có thứ tự r phần tử từ tập đã cho
  - $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
  - $C(n,r) = C(n,n-r)$

- **Ví dụ**: Chọn ngẫu nhiên 2 người trong 3 người A, B, C. Có $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$, các cách đó là AB, AC, BC

Tổ hợp

- Có bao nhiêu cách lấy ra 5 quân bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 quân sao cho trong 5 quân bài lấy ra có 3 quân Át và 2 quân 10.
- Đếm số đường đi từ góc trái dưới lên góc phải trên, mỗi lần di chuyển lên trên hoặc di chuyển sang phải.



- Đếm số đường đi từ góc trái dưới lên góc phải trên, mỗi lần di chuyển lên trên hoặc di chuyển sang phải và đi qua điểm điểm tròn.

Tổ hợp

- Một câu lạc bộ có 25 thành viên.
  - Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào uy ban thường trực
  - Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên làm chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủy quỹ

Chỉnh hợp và tổ hợp mở rộng

- Chỉnh hợp lặp chập r của n
  - Số cách lấy r phần tử (có thứ tự) từ tập gồm n phần tử
  - Sau khi được chọn, mỗi phần tử được bỏ lại tập ban đầu
- **Định lý**: Chỉnh hợp lặp chập r của n bằng n^r
- **Ví dụ**: Tính số cách lấy được 3 quả bóng ra khỏi bình kín chứa 5 quả bóng đỏ và 7 quả bóng xanh, nếu sau mỗi lần lấy một quả bóng ra lại bỏ nó trở lại bình.
  - 12^3 (lấy mẫu có hoàn lại)

Chỉnh hợp và tổ hợp mở rộng

- Tổ hợp lặp chập r của n
  - Số cách lấy r loại phần tử (không có thứ tự) tư tập gồm n loại phần tử
  - Mỗi loại phần tử có vô hạn số lượng phần tử
- **Định lý**: Số tổ hợp lặp chập r của n phần tử bằng $C(n+r-1, r)$
- Giả sử trong một đĩa hoa quả có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa hoa quả nếu thứ tự lấy là không quan trọng, các quả thuộc cùng một loại là không phân biệt.

Chỉnh hợp và tổ hợp mở rộng

- Một cửa hang bánh quy có 4 loại khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn 6 hộp bánh? Giả sử ta chỉ quan tâm tới loại bánh mà không quan tâm tới hộp bánh cụ thể nào cũng như thứ tự chọn chúng.

- **Giải**: Số cách chọn 6 hộp bánh bằng số tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử, bằng C(4+6-1, 6) = C(9, 6) = 84 cách chọn.

Chỉnh hợp và tổ hợp mở rộng

- Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 11$

- **Giải:** Mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 11 phần tử từ một tập gồm 3 loại, trong đó có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2 và x_3 phần tử loại 3 được chọn. Do đó, số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 11 của 3, bằng C(3+11-1, 11) = C(13, 11) = C(13, 2) = 78.

Hoán vị lặp

- Số hoán vị của n phần tử, trong đó có n_1 phần tử giống nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử loại 2,…, và n_k phần tử loại k bằng:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

- Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ ABBA?

Hoán vị lặp

- Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn
  - $x_i \geq 1$ với i = 1, 2, 3, 4, 5.
  - $x_i \geq$ i, với i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- Bất đẳng thức sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?
  - $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$