
Phép đếm (Counting)

Phép đếm (số lượng các phần tử)

- ☐ Các nguyên lí cơ bản
- ☐ Nguyên lý lồng chim bồ câu
- ☐ Hoán vị và tổ hợp
- ☐ Hệ số nhị thức
- ☐ Thuật toán chia để trị
- ☐ Thuật toán quy hoạch động

Thuật toán quy hoạch động

□ Ví dụ: trò chơi lò cò

- Người chơi cần vượt qua một đoạn đường dài n mét
- Mỗi bước, người chơi có ba cách nhảy với độ dài bước nhảy tương ứng là 1 mét, 2 mét, 3 mét.
- Một cách nhảy thỏa mãn
 - Gồm các bước nhảy có tổng đúng bằng n .
- Đếm số cách nhảy thỏa mãn?

□ Lời giải: $f(n)$ là số cách nhảy thỏa mãn

- $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4$
- $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2) + f(n - 3)$

Thuật toán quy hoạch động

- ❑ Cho bảng gồm m hàng, n cột. Mỗi ô của bảng chứa một kí tự A hoặc B.
- ❑ Xuất phát từ góc trái dưới, mỗi lần được di chuyển sang ô bên trên hoặc ô bên phải.
- ❑ Đếm số lượng đường đi đến góc phải trên
 - ❑ Xâu ghép từ các kí tự trên đường đi là một xâu đối xứng.

A	A	A	A
A	A	A	B
A	B	A	A

Thuật toán quy hoạch động

□ Lời giải

Gọi $f(x, y, u, v)$ là số lượng đường đi từ ô (x, y) đến ô (u, v) , ta có

$$f(x, y, u, v) = \sum_{\substack{(x', y') \text{ bên trên hoặc bên phải của } (x, y) \\ (u', v') \text{ bên trái hoặc bên dưới } (u, v) \\ \text{kí tự ở } (x', y') \text{ giống kí tự ở } (u', v')}} f(x', y', u', v')$$

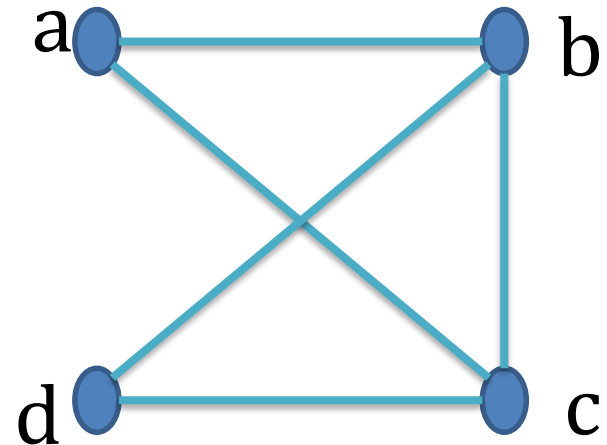
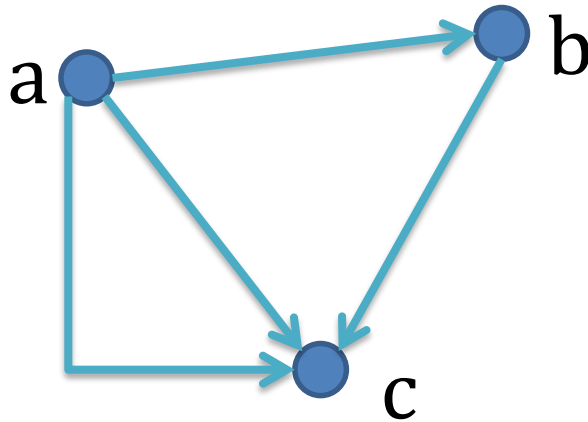
A	A	A	A
A	A	A	B
A	B	A	A

Lý thuyết đồ thị

Đồ thị

Định nghĩa: Một đồ thị (graph) $G = (V, E)$ gồm một tập không rỗng các đỉnh V và một tập các cạnh E . Mỗi cạnh có một hoặc hai đỉnh kết nối với nó gọi là điểm cuối

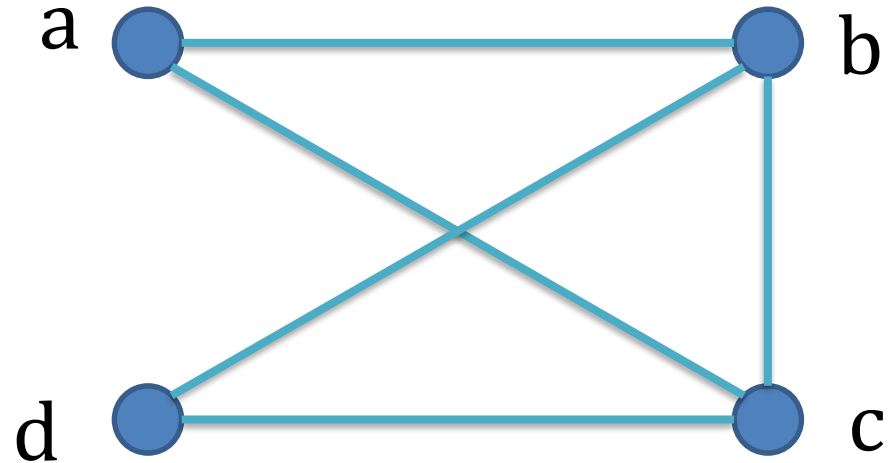
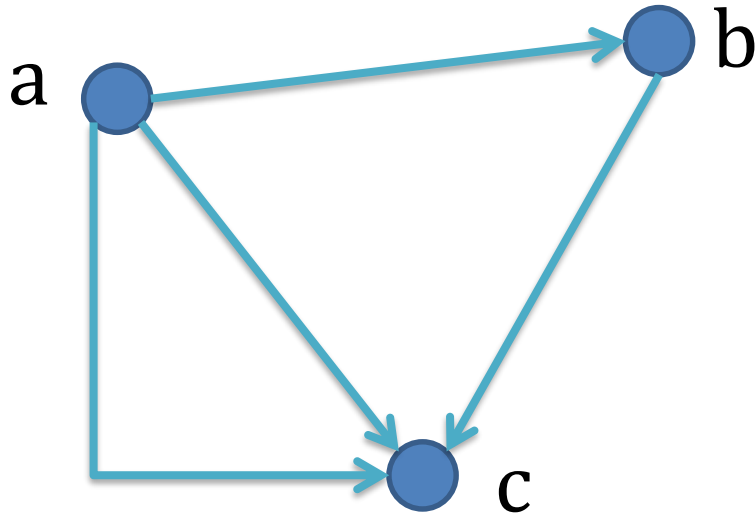
□ Ví dụ



Đồ thị

□ Các loại đồ thị cơ bản

- Đồ thị có hướng (Directed graph)
- Đồ thị vô hướng (Undirected graph)



Đồ thị

❑ Đơn đồ thị

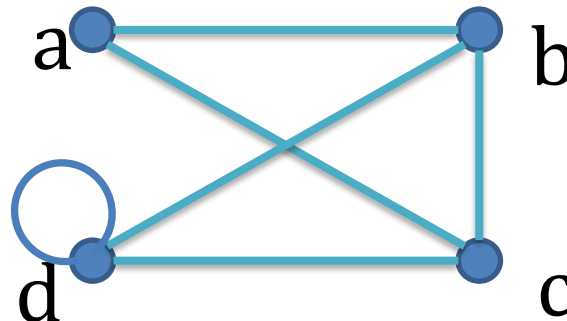
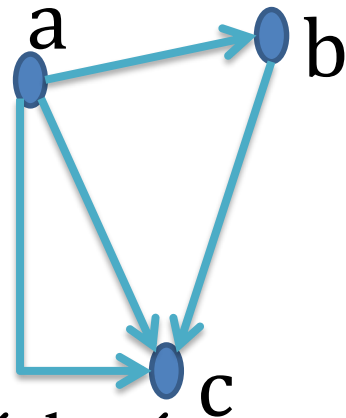
- ❑ Mỗi cạnh kết nối hai đỉnh khác nhau và không có hai cạnh nào cùng kết nối một cặp đỉnh.

❑ Đa đồ thị

- ❑ Có thể có nhiều cạnh cùng kết nối hai đỉnh.

❑ Có vòng lặp (loop), hay khuyên

- ❑ Có ít nhất một cạnh kết nối một đỉnh với chính nó.



Đồ thị

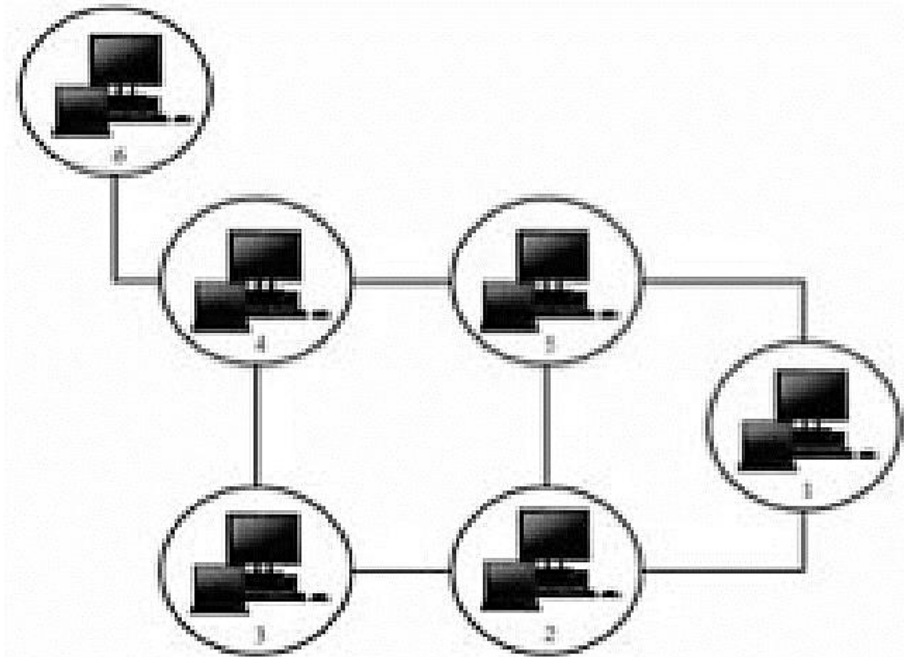
□ Đồ thị có thể sử dụng để mô hình hoá:

- Mạng máy tính
- Mạng xã hội
- Mạng truyền thông
- Mạng thông tin
- Thiết kế phần mềm
- Mạng giao thông
- Mạng sinh học

Đồ thị

□ Mạng máy tính

- Đỉnh – các máy tính
- Cạnh – các kết nối



Đồ thị

□ Mạng xã hội

□ Đồ thị bạn bè

- Vô hướng
- Hai người kết nối với nhau nếu họ là bạn bè (sử dụng trong thực tế, trên Facebook hay trong thế giới ảo, v.v).

□ Đồ thị ảnh hưởng

- Có hướng
- Mỗi cạnh đi từ một người đến người khác nếu người thứ nhất có thể ảnh hưởng đến người thứ hai.

□ Đồ thị cộng tác

- Vô hướng
- Hai người kết nối với nhau nếu họ cộng tác với nhau theo một cách nhất định.

Đồ thị cộng tác

□ Đồ thị Hollywood

- Mô hình hoá sự cộng tác giữa các diễn viên trong các bộ phim.
- Mỗi diễn viên là một đỉnh của đồ thị,
- Hai đỉnh được kết nối với nhau nếu hai diễn viên đóng chung một bộ phim.

□ Đồ thị cộng tác học thuật

- Mô hình hoá sự cộng tác giữa các nhà nghiên cứu cùng viết một bài báo về các chủ đề cụ thể.
- Biểu diễn các nhà nghiên cứu bởi các đỉnh,
- Kết nối hai đỉnh nếu chúng đại diện cho hai nhà nghiên cứu là đồng tác giả một bài báo.

Đồ thị thông tin

□ Mạng Internet

- Các trang web được đại diện bởi các đỉnh và các liên kết được đại diện bởi các cạnh có hướng
- Một đồ thị mạng mô hình hoá mạng tại một thời điểm nhất định.

□ Mạng trích dẫn:

- Các bài báo được biểu diễn bởi các đỉnh,
- Khi một bài báo được trích dẫn bởi bài báo thứ hai, một cạnh kết nối từ đỉnh đại diện cho bài báo này đến đỉnh đại diện cho bài báo thứ hai.

Đồ thị giao thông

❑ Mạng hàng không

- ❑ Đa đồ thị có hướng
- ❑ Các sân bay được biểu diễn bằng các đỉnh,
- ❑ Mỗi chuyến bay được biểu diễn bởi một cạnh có hướng từ đỉnh đại diện cho sân bay khởi hành đến đỉnh đại diện cho sân bay hạ cánh.

❑ Mạng đường bộ

- ❑ Các cạnh đại diện cho các giao lộ và các cạnh đại diện cho các con đường.
- ❑ Các cạnh vô hướng đại diện cho đường hai chiều và các cạnh có hướng đại diện cho đường một chiều.

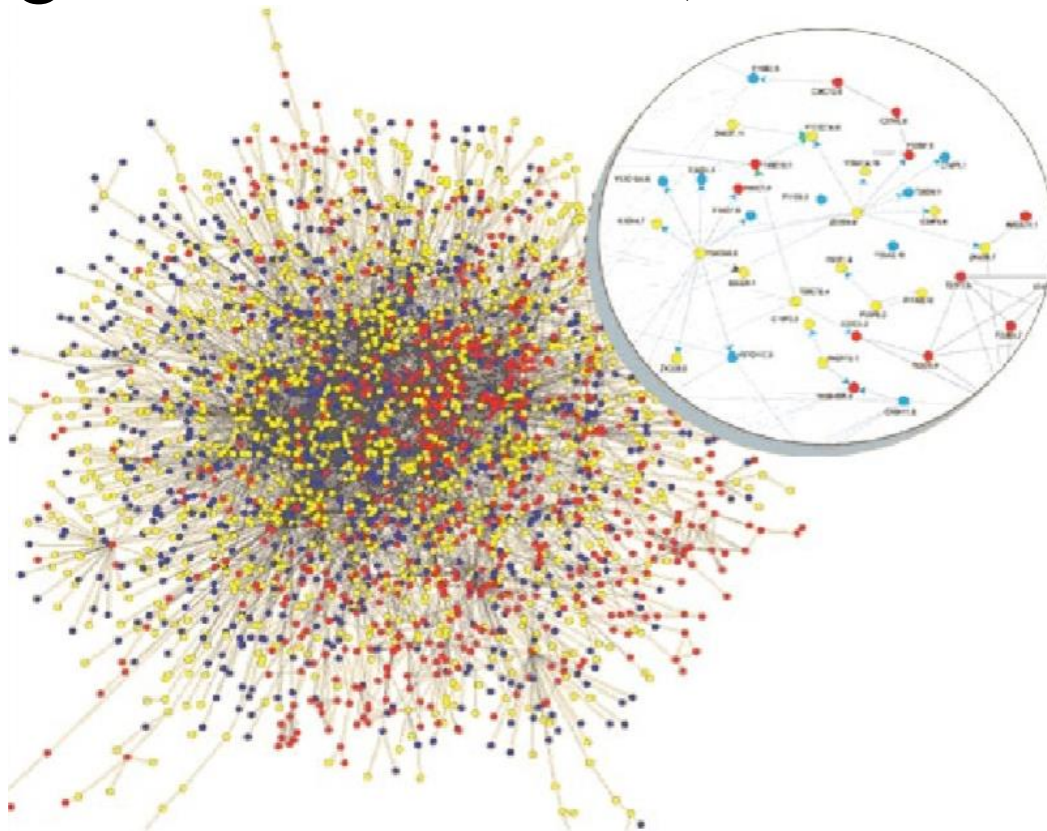
Đồ thị giao thông

- ❑ Các mô hình đồ thị được sử dụng rộng rãi trong các nghiên cứu về mạng giao thông.



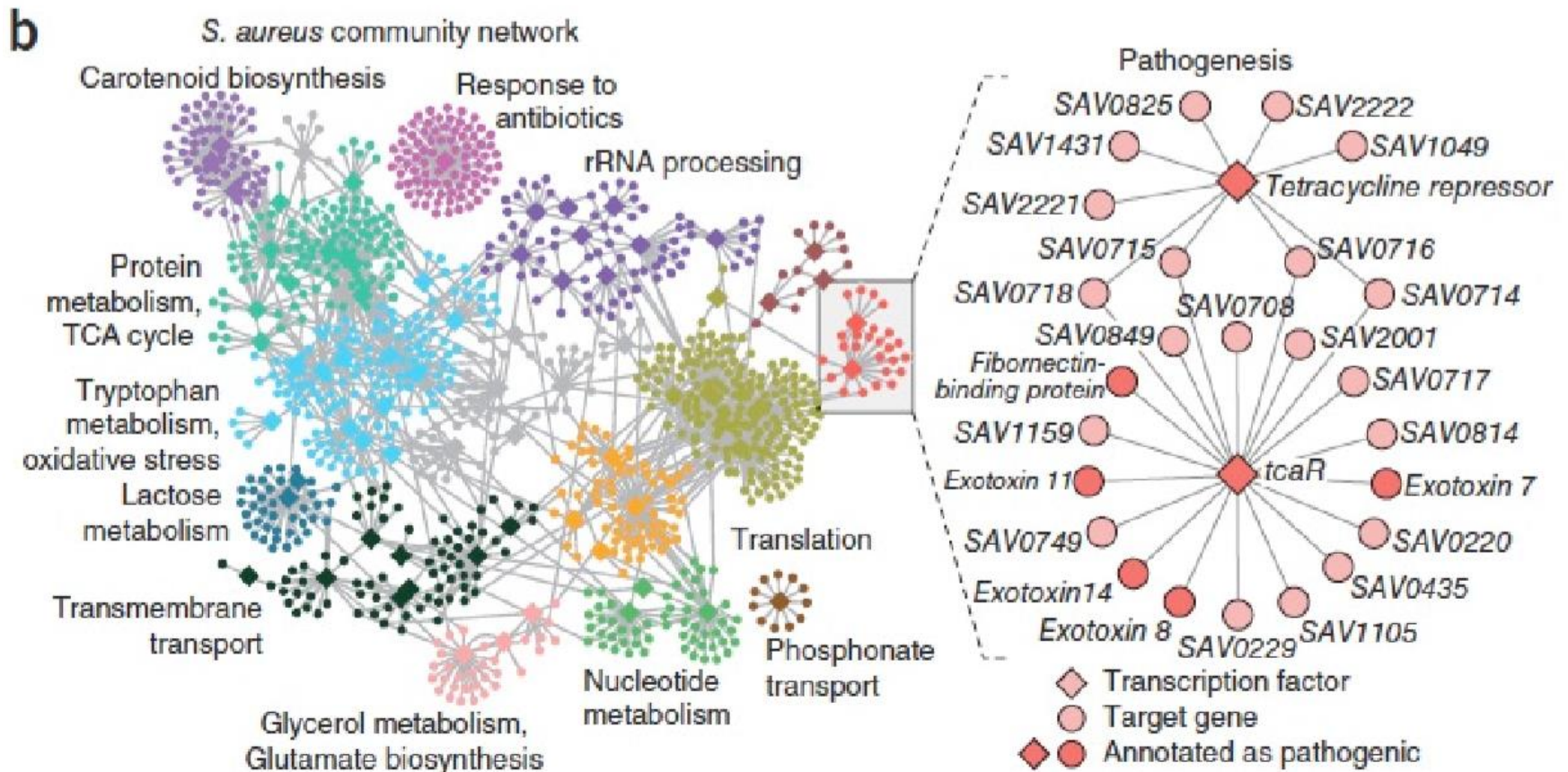
Đồ thị sinh học

- ❑ Mạng tương tác Protein-Protein (2898 protein, 5460 tương tác, Science 2004)



Đồ thị sinh học

□ Mạng tương tác Protein-Protein (Nature Methods 2012)





[Home](#) [About](#) [Search](#) [Browser](#) [Downloads](#) [Cytoscape](#) [RDF](#) [Help](#)

DisGeNET is a discovery platform containing one of the largest publicly available collections of genes and variants associated to human diseases (Piñero *et al.*, 2016; Piñero *et al.*, 2015). DisGeNET integrates data from expert curated repositories, GWAS catalogues, animal models and the scientific literature. DisGeNET data are homogeneously annotated with controlled vocabularies and community-driven ontologies. Additionally, several original metrics are provided to assist the prioritization of genotype–phenotype relationships.

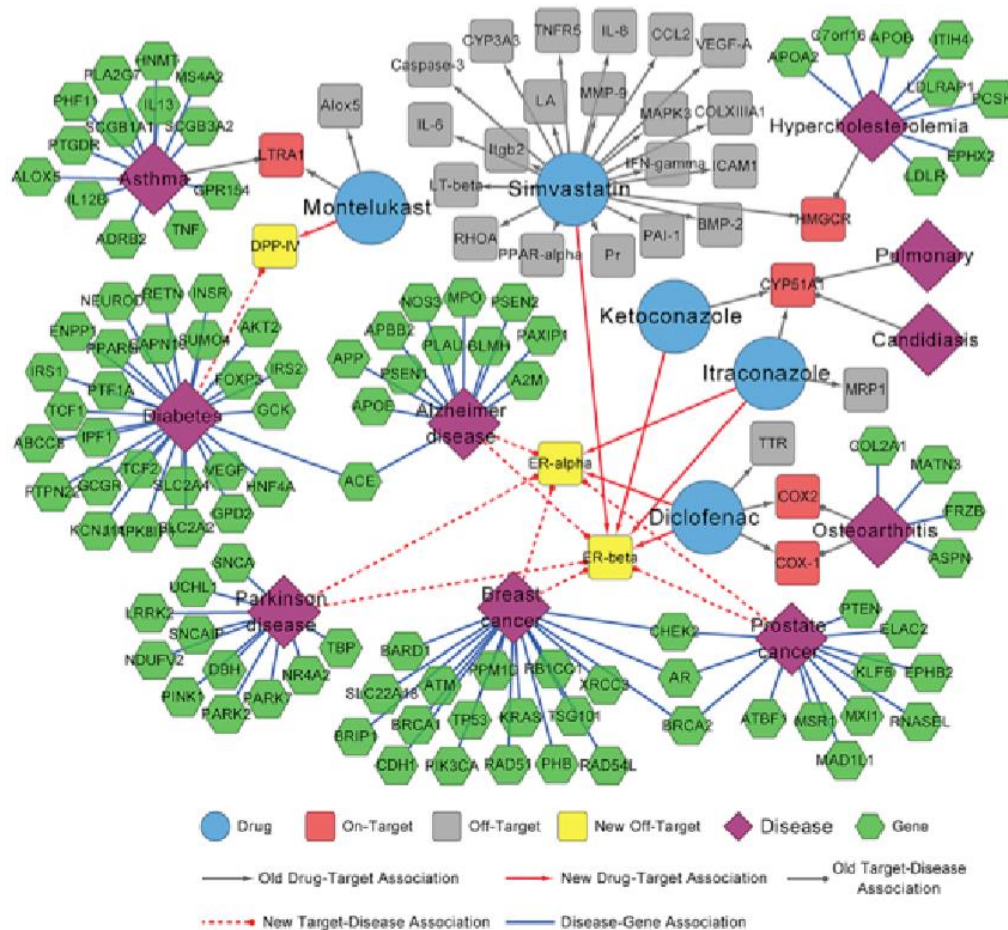
The current version of DisGeNET (v5.0) contains 561,119 gene-disease associations (GDAs), between 17,074 genes and 20,370 diseases, disorders, traits, and clinical or abnormal human phenotypes, and 135,588 variant-disease associations (VDAs), between 83,002 SNPs and 9,169 diseases and phenotypes.

The information in DisGeNET can be accessed in several ways:

- The web interface, through the [Search](#) and [Browse](#) functionalities
- The Resource Description Framework (DisGeNET-RDF) representation via the [SPARQL endpoint](#), and the [Faceted Browser](#)
- The [DisGeNET Cytoscape App](#)
- Scripts in the most commonly used programming languages
- The [disgenet2r](#) package.

Đồ thị sinh học

❑ Mạn drug-target (PLOS Computational Biology 2012)

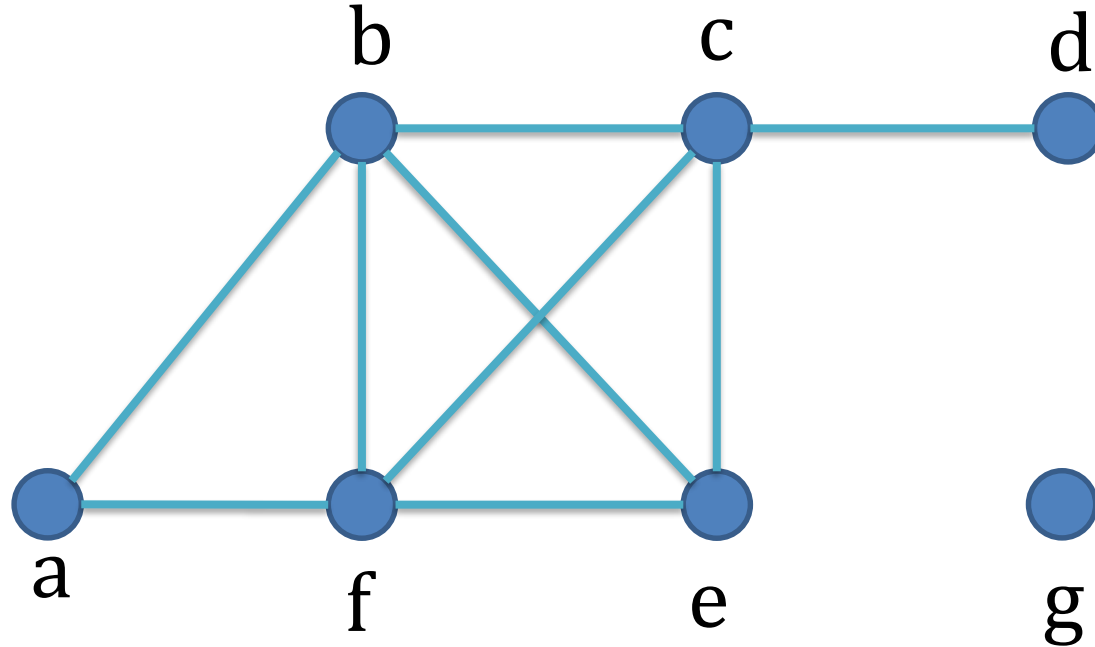


Các đặc trưng của đồ thị: đồ thị vô hướng

- ❑ Hai đỉnh u, v trong một đồ thị vô hướng G được gọi là **liền kề** trong G nếu có một cạnh e giữa u và v . Cạnh e được gọi là **kết nối** u và v .
- ❑ Tập tất cả các đỉnh liền kề của đỉnh v trong đồ thị $G = (V, E)$ ký hiệu là $N(v)$ được gọi là **lân cận** của v . Nếu A là tập con của V , ta ký hiệu $N(A)$ là tập tất cả các đỉnh trong G liền kề với ít nhất một đỉnh trong A .
- ❑ **Bậc của một đỉnh trong đồ thị vô hướng** là số cạnh nối đến nó, trừ các vòng lặp tại một đỉnh làm tăng bậc của đỉnh lên hai. Bậc của một đỉnh v ký hiệu là $\deg(v)$.

Đồ thị vô hướng

□ **Ví dụ:** Tìm bậc và lân cận của các đỉnh trong đồ thị sau.



□ **Đáp án:**

$$\deg(a) = 2, \deg(b) = \deg(c) = \deg(f) = 4, \dots$$

$$N(a) = \{b, f\}, N(b) = \{a, c, e, f\}, N(d) = \{c\}, \dots$$

Đồ thị vô hướng

Định lý bắt tay (Handshaking): Nếu đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có m cạnh, thì

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

□ **Chứng minh:**

Mỗi cạnh đóng góp hai vào tổng bậc của tất cả các cạnh. Do đó cả vế trái và vế phải của đẳng thức bằng hai lần tổng số cạnh.

Xem xét đồ thị trong đó đỉnh đại diện cho người tham gia một bữa tiệc và cạnh kết nối hai người có bắt tay với nhau.

Đồ thị vô hướng

Định lý 2: Một đồ thị vô hướng có một số chẵn các đỉnh có bậc lẻ.

□ **Chứng minh:**

Gọi V_1, V_2 lần lượt là tập các đỉnh có bậc chẵn, lẻ trong đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ với m cạnh.

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

Tổng thứ nhất chẵn vì $\deg(v)$ luôn chẵn.

Tổng thứ hai chẵn vì $2m$ chẵn và tổng thứ nhất chẵn. Do bậc của tất cả các đỉnh đều lẻ nên để tổng chẵn thì cần có một số chẵn đỉnh.

Đồ thị có hướng

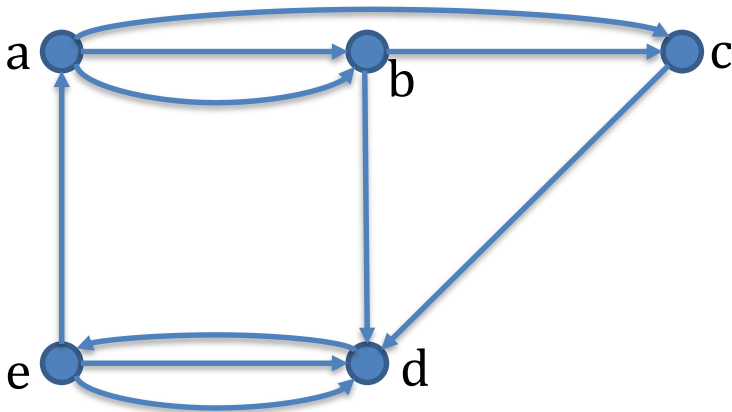
Định nghĩa 1: Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm một tập không rỗng các đỉnh V và một tập các cạnh có hướng E . Mỗi cạnh là một cặp đỉnh có thứ tự. Cạnh có hướng (u, v) được gọi là bắt đầu từ u và kết thúc tại v .

Định nghĩa 2: Với (u, v) là một cạnh của G . Khi đó u là điểm đầu của cạnh và v là điểm cuối của cạnh. Điểm đầu và điểm cuối của một vòng lặp là cùng một đỉnh.

Đồ thị có hướng

Định nghĩa 3: Bậc vào của một đỉnh v ký hiệu là $\deg^-(v)$ là số cạnh kết thúc tại v . Bậc ra của một đỉnh v ký hiệu là $\deg^+(v)$ là số cạnh bắt đầu tại v . Vòng lặp đóng góp một vào cả bậc vào và bậc ra của một đỉnh.

Ví dụ: Xác định bậc vào của các đỉnh trong đồ thị sau:



Giải

$$\begin{aligned}\deg^-(a) &= 1, \deg^-(b) = 2, \\ \deg^-(c) &= 2, \deg^-(d) = 4, \\ \deg^-(e) &= 1\end{aligned}$$

Đồ thị có hướng

Định lý: Với $G = (V, E)$ là đồ thị có hướng, khi đó:

$$|E| = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)$$

□ Chứng minh:

Tổng thứ nhất là tổng số cạnh đi ra từ tất cả các đỉnh, tổng thứ hai là tổng số cạnh đi vào tất cả các đỉnh. Hai tổng này bằng tổng số cạnh của đồ thị.

Đồ thị đầy đủ

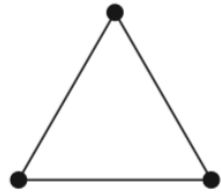
Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu là K_n , là đơn đồ thị chứa chính xác một cạnh giữa hai đỉnh phân biệt bất kỳ.



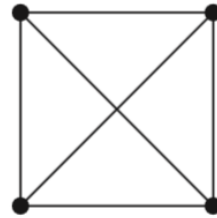
K_1



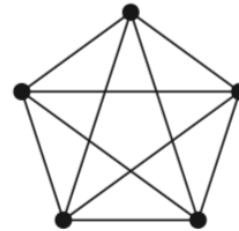
K_2



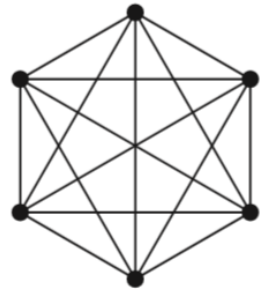
K_3



K_4



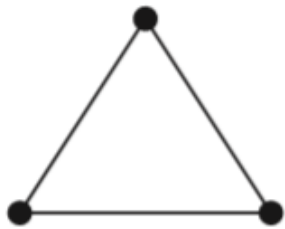
K_5



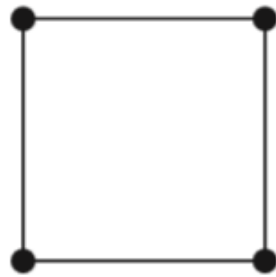
K_6

Chu trình

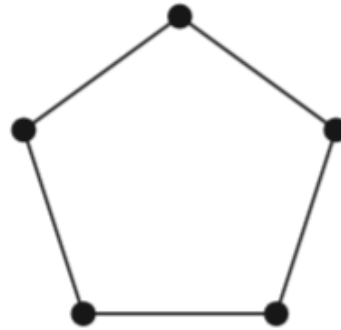
Chu trình C_n với $n \geq 3$ chứa n đỉnh v_1, v_2, \dots, v_n và các cạnh $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_n, v_1\}$



C_3



C_4



C_5



C_6

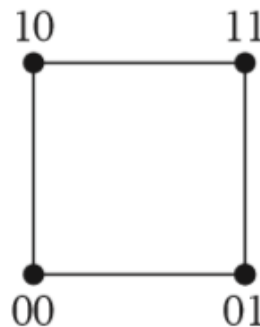
Khối n chiều

□ Khối n chiều Q_n ,

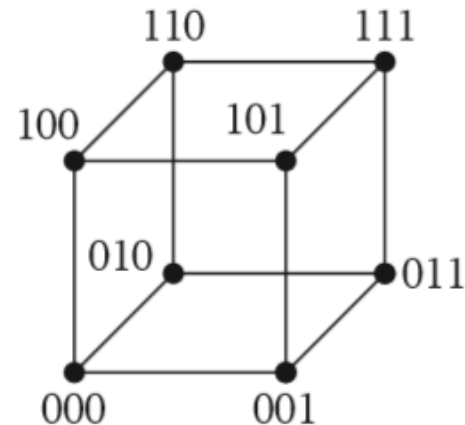
- Đồ thị với 2^n đỉnh biểu diễn bằng xâu nhị phân có độ dài n .
- Hai đỉnh là liền kề khi và chỉ khi các xâu nhị phân biểu diễn của chúng khác nhau đúng một bit.



Q_1



Q_2

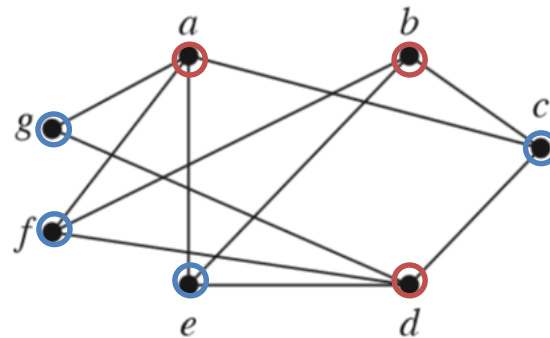


Q_3

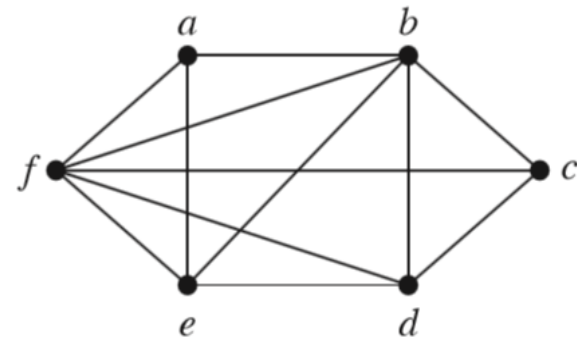
Đồ thị phân đôi (bipartite graph)

- Là đơn đồ thị $G = (V, E)$, V được chia thành hai tập con V_1 và V_2
 - Tất cả các cạnh đều nối một đỉnh trong V_1 với một đỉnh trong V_2 . Nói cách khác, không có một cạnh nào nối hai đỉnh trong V_1 hoặc V_2 .

Nói cách khác: đồ thị phân đôi là một đồ thị mà có thể tô màu đỏ, xanh cho các đỉnh mà không có cạnh nào nối hai đỉnh cùng màu.



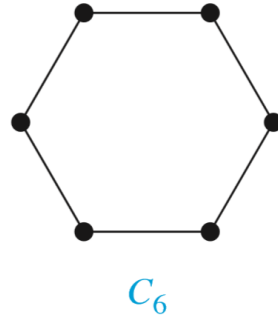
G



H

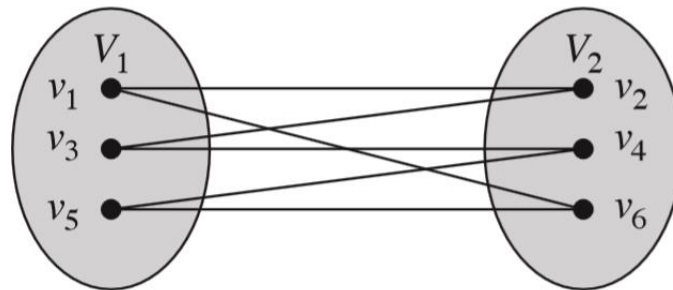
Đồ thị phân đôi

□ **Ví dụ:** Chứng minh rằng C_6 là một đồ thị phân đôi.



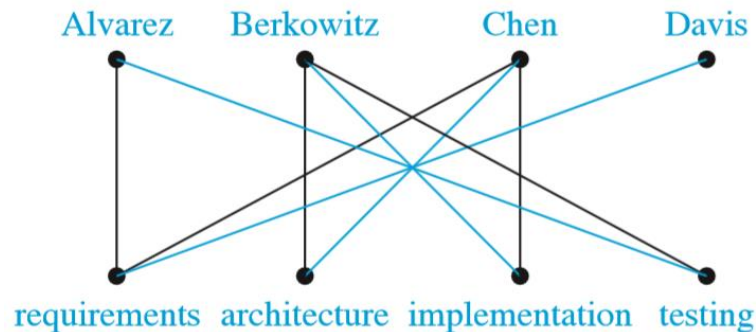
□ **Lời giải:**

Ta có thể chia các đỉnh thành hai tập $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ và $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ khi đó tất cả các cạnh của C_6 nối một đỉnh trong V_1 với một đỉnh trong V_2 .



Đồ thị phân đôi và ghép cặp

- ❑ Đồ thị phân đôi được sử dụng để mô hình hoá việc ghép cặp một phần tử của một tập với một phần tử của một tập khác.
- ❑ **Ví dụ:** Phân công công việc – đỉnh đại diện cho công việc và nhân viên, các cạnh nối nhân viên với công việc họ đã được đào tạo. Mục tiêu là để phân công công việc cho nhân viên sao cho nhiều công việc được hoàn thành nhất.



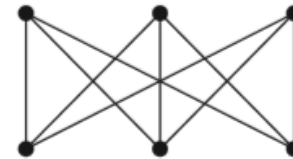
Đồ thị phân đôi đầy đủ (complete)

Định nghĩa: Đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ là một đồ thị có tập các cạnh được chia thành hai tập con V_1 có m đỉnh và V_2 có n đỉnh mà mọi đỉnh trong V_1 nối với mọi đỉnh trong V_2 .

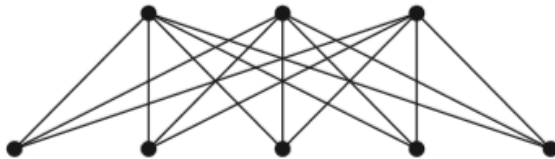
Ví dụ: Một số đồ thị nhân đôi đầy đủ.



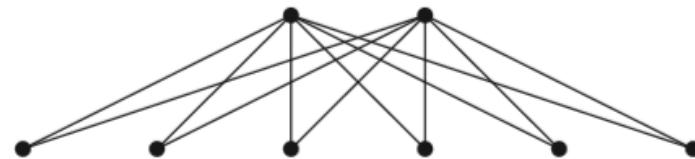
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,5}$

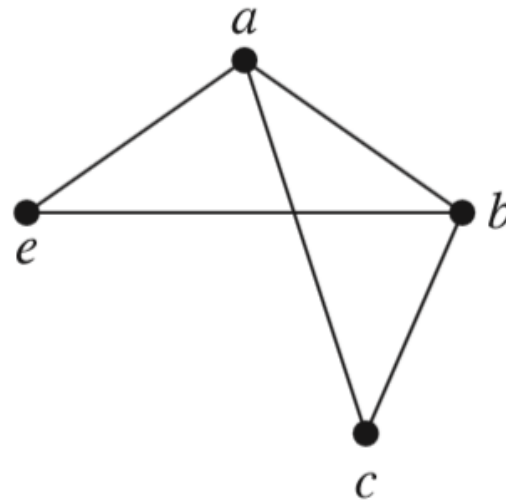
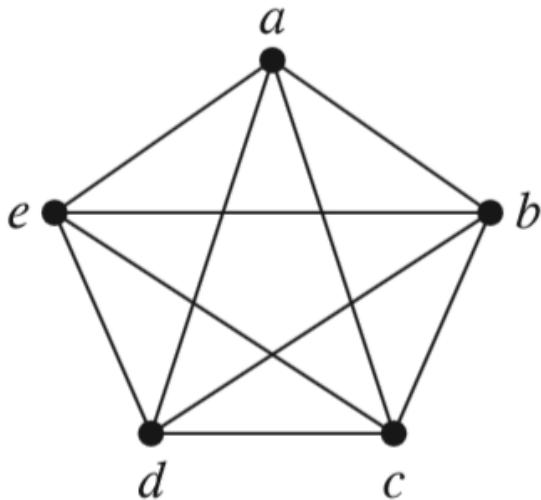


$K_{2,6}$

Đồ thị con (subgraph)

Định nghĩa: Đồ thị con của đồ thị $G = (V, E)$ là đồ thị (W, F) trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$. Một đồ thị con H của G được gọi là đồ thị con thực sự của G nếu $H \neq G$.

Ví dụ: K_5 và một đồ thị con.



Đồ thị con

Định nghĩa: Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị. Đồ thị con sinh bởi tập con W của tập các đỉnh V là một đồ thị (W, F) mà tập các cạnh F chứa một cạnh trong E khi và chỉ khi hai điểm cuối đều nằm trong W .

Ví dụ: K_5 và một đồ thị con sinh bởi $W = \{a, b, c, e\}$

