Logic và Chứng minh

Lô gích (Logic) và Chứng minh

- Logic mệnh đề (Proposition logic)
- Logic vị từ (Predicate logic)
- Chứng minh (Proof)

Lượng từ lồng nhau (Nested quantifiers)

- Nhiều lượng từ cần được sử dụng để thể hiện được ý nghĩa của các phát biểu.

- Ví dụ:
  - Mọi số thực đều có số âm tương đương với nó.
    - Gọi:
      - x là một số thực bất kỳ, và y là số âm tương ứng của nó.
      - Vị từ P(x,y): "x + y =0"
    - Khi đó chúng ta có thể viết:

      $\forall x \exists y P(x,y)$

Lượng từ lồng nhau

- *Ví dụ*:
  - Có một người yêu mọi người.
    - Đặt:
      - Biến x và y chỉ người
      - Vị từ L(x,y): "x yêu y"
    - Khi đó chúng ta có thể viết:
      - $\exists x \forall y\ L(x,y)$

Thứ tự các lượng từ

- **Chỉ quan trọng khi các lượng tự là khác nhau**
  - $\forall x \exists y L(x,y) \# \exists y \forall x L(x,y)$

- Ví dụ:
  - Vị từ L(x,y): “x yêu y”

  - Khi đó: $\forall x \exists y L(x,y)$: Mọi người đều yêu một ai đó.
  - Còn: $\exists y \forall x L(x,y)$: Có một ai đó được mọi người đều yêu.

Thứ tự các lượng từ

- ***Không quan trọng* nếu các lượng từ là giống nhau**

- Ví dụ:
  - Với mọi x và y, nếu x là bố/mẹ của y thì y là con của x
  - Gọi:
    - Parent(x,y): "x là bố/mẹ của y"
    - Child(x,y): "x is a child of y"

  - Hai các viết sau là tương đương:
    - $\forall x \forall y\ Parent(x,y) \rightarrow Child(y,x)$
    - $\forall y \forall x\ Parent(x,y) \rightarrow Child(y,x)$

Lượng từ lồng nhau: thực hành

- Giả sử:
  - Biến x,y chỉ người
  - L(x,y): “x yêu y”.
- Hãy dịch các câu sau sang lô gích vị từ:
  - Mọi người đều yêu Nga. $\forall x\, L(x,Nga)$
  - Mọi người đều yêu một ai đó. $\forall x\, \exists y\, L(x,y)$
  - Có một người mà mọi người đều yêu. $\exists y\, \forall x\, L(x,y)$
  - Có một người mà Nga không yêu.
    - $\exists y \neg L(Nga,y)$
  - Có người mà không ai trong lớp yêu cả.
    - $\exists y\, \forall x\, \neg L(x,y)$

Phủ định lượng từ

- Không có gì là hoàn hảo.
  - $\neg \exists x \, Perfect(x)$
- Mọi thứ đều không hoàn hảo
  - $\forall x \neg Perfect(x)$
- **Kết luận**: $\neg \exists x \, P(x)$ tương đương $\forall x \neg P(x)$

Phủ định lượng từ

- Không phải mọi người dân Việt Nam đều thích bóng đá.
  - $\neg \forall x\ (VN(x) \rightarrow Football(x))$

- Có một người Việt Nam mà …
  - $\exists x(VN(x) \wedge \neg Football(x))$
  - Tương đương với:
    - $\exists x \neg (\ VN(x) \rightarrow Football(x)\ )$
- **Kết luận**: $\neg \rightarrow x\ P\ (x)$ tương đương với $\exists x \neg P(x)$

Phủ định lượng từ
(Luật DeMorgan cho lượng từ)

Phủ định	Tương đương với
$\neg\exists x\ P(x)$	$\forall x\ \neg P(x)$
$\neg\forall x\ P(x)$	$\exists x\ \neg P(x)$

Chứng minh

(Chính tắc và không chính tắc)

Định lý và chứng minh

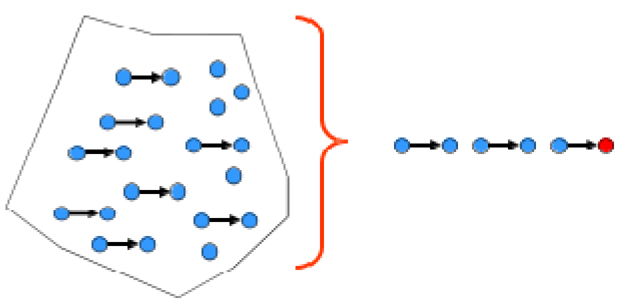
- **Định lý**: một phát biểu cần được chứng minh là đúng.
  - Thường được viết dưới dạng:

$$\underbrace{(p1 \land p2 \land p3 \land \ldots \land pn\ )}_{\text{Các tiền đề (giả thuyết)}} \land \underbrace{q}_{\text{kết luận}}$$

- Ví dụ:
  - Định lý Fermat nhỏ:
    - Nếu p là một số nguyên tố và a là một số không chia hết cho p thì: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Các chứng minh chính tắc (formal proofs)

- **Chứng minh:**
  - Đưa ra một lập luận chỉ ra tính đúng của kết luận trong phát biểu cần chứng minh:
    - Các tiên đề giả thuyết (Premises)
    - Các định đề (Axioms)
    - Các kết quả của các định lý khác đã được chứng minh
- **Chứng minh chính tắc:**
  - Các bước tuân được thực hiện một cách đúng lô gích



Kết luận

Sử dụng các luật tương đương (lô gích)

- Sử dụng một chuỗi các luật biến đổi tương đương lô gích để dẫn đến (thu được) kết luận.

- **Ví dụ:** CMR $(p \wedge q) \rightarrow p$ là hằng đúng.
  (hay là: $(p \wedge q) \rightarrow p \iff T$)
  - $(p \wedge q) \rightarrow p \iff \neg(p \wedge q) \vee p$ *Luật hữu ích*
    $\iff [\neg p \vee \neg q] \vee p$ *DeMorgan*
    $\iff [\neg q \vee \neg p] \vee p$ *Giao hoán*
    $\iff \neg q \vee [\neg p \vee p]$ *Kết hợp*
    $\iff \neg q \vee [T]$ *Luật hữu ích*

Các luật suy diễn (Rules of inference)

- Cho phép suy diễn ra các phát biểu đúng mới từ các phát biểu cũ
  - Tương đương lô gích
- Ví dụ:
  - Modus Ponens (luật phân rã - the Law of Detachment)

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \rightarrow q} \\ \therefore\ q \end{array}$$

p	q	p → q
False	False	True
False	True	True
True	False	False
True	True	True

  - Với p đúng và phép kéo theo $p \rightarrow q$ đúng, khi đó q đúng.
  - **Dạng hằng đúng:** $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Các luật suy diễn

- **Luật cộng (Addition)**

$$\mathbf{p \rightarrow (p \vee q)}$$

$$\frac{\mathbf{p}}{\therefore\ \mathbf{p \vee q}}$$

- Ví dụ: Hà Nội là thủ đô Việt Nam. Do đó, Hà Nội là thủ đô Việt Nam hoặc trời đang mưa.

- **Luật đơn giản hoá (Simplification)**

$$\mathbf{(p \wedge q) \rightarrow p}$$

$$\frac{\mathbf{p \wedge q}}{\therefore\ \mathbf{p}}$$

- Ví dụ: Hà Nội là thủ đô Việt Nam hoặc trời đang mưa. Do đó trời đang mưa.

Các luật suy diễn

- Modus Tollens (modus ponens cho phản đảo)

$$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p \qquad \begin{array}{l} \neg q \\ \underline{p \rightarrow q} \\ \therefore\ \neg p \end{array}$$

- Tam đoạn luận giả thuyết (Hypothetical Syllogism)

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore\ p \rightarrow r \end{array}$$

- Tam đoạn luận tuyển (Disjunctive Syllogism)

$$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore\ q \end{array}$$

Các luật suy diễn

- Tương đương lô gích
  - A <=> B
  - $A \rightarrow B$ là một hằng đúng
- Ví dụ: Luật De Morgan
  - $\neg(p \lor q) \iff \neg p \land \neg q$
  - $\neg(p \lor q) \rightarrow \neg p \land \neg q$ là một hằng đúng

Các luật suy diễn

- Cho các giả thuyết (hypotheses):
  - (1) Chiều nay trời không nắng và lạnh hơn hôm qua.
  - (2) Chúng ta sẽ đi bơi chỉ nếu trời nắng.
  - (3) Nếu không đi bơi chúng ta sẽ đi du thuyền.
  - (4) Nếu đi du thuyền thì chúng ta sẽ về nhà trước hoàng hôn.
- Kết luận:
  - Chúng ta sẽ về nhà trước hoàng hôn.

Các luật suy diễn

- Đặt các mệnh đề:
  - p = Chiều nay trời nắng,
  - q = lạnh hơn hôm qua,
  - r = Chúng ta sẽ đi bơi,
  - s= Chúng ta sẽ đi du thuyền
  - t= Chúng ta sẽ về nhà trước hoàng hôn
- Biểu diễn:
  - Giả thuyết: (1) $\neg p \land q$, (2) $r \to p$, (3) $\neg r \to s$, (4) $s \to t$
  - Kết luận: t

Các luật suy diễn

- Giả thuyết: $\neg p \wedge q$, $r \to p$, $\neg r \to s$, $s \to t$
- Kết luận: t
- Chứng minh:
  - 1. $\neg p \wedge q$ Giả thuyết
  - 2. $\neg p$ Đơn giản hoá
  - 3. $r \to p$ Giả thuyết
  - 4. $\neg r$ Modus tollens (bước 2 và 3)
  - 5. $\neg r \to s$ Giả thuyết
  - 6. s Modus ponens (bước 4 và 5)
  - 7. $s \to t$ Giả thuyết
  - 8. t Modus ponens (bước 6 và 7)
  - **ĐPCM**

Các chứng minh không chính tắc

- Chứng minh các định lý trong thực tế:
  - Các bước có thể không được thể hiện ở ngôn ngữ lô gích
  - Các bước có thể dùng tiếng Anh, các công thức toán, v.v.

Các phương pháp chứng minh

- Chứng minh trực tiếp (Direct proof)
  - $p \rightarrow q$ được chứng minh bằng cách chỉ ra rằng: nếu p đúng thì q đúng.
- Chứng minh giá tiếp (Indirect proof)
  - Chứng minh trực tiếp cho phản đảo $\neg q \rightarrow \neg p$.
- Chứng minh bằng phản ví dụ (Proof by contradiction)
  - Chỉ ra $(p \wedge \neg q)$ mâu thuẫn với các giả thuyết
- Chứng minh bằng các trường hợp (Proof by cases)
- Chứng minh tương đương (Proofs of equivalence)
  - $p \leftrightarrow q$ được thay bằng $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Chứng minh trực tiếp

- CMR: "nếu n lẻ thì n^2 lẻ."
- CM:
  - Giả sử giả thuyết đúng: n là số lẻ.
  - Khi đó $n = 2k + 1$, với k là một số nguyên.

$$n^2 = (2k+1)^2$$
$$= 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

  - Do đó, n^2 là lẻ.

Chứng minh gián tiếp

- CMR: Nếu 3n + 2 lẻ thì n là số lẻ.
- CM:
  - Giả sử n là số chẵn, khi đó n = 2k, với k nguyên bất kỳ.
  - Khi đó: 3n + 2 = 3(2k) + 2

    = 6k + 2

    = 2(3k+1)
- Vậy nên *3n + 2 là chẵn*.

Phản chứng

- Cần chứng minh $p \rightarrow q$
  - Giả sử rằng $p \rightarrow q$ sai, tức là $(p \wedge \neg q)$ đúng
    - Nếu chỉ ra được $(p \wedge \neg q)$ là sai (hoặc q hoặc $\neg$ p là đúng) thì điều giả sử là sai.
      - Điều cần chứng minh là đúng

- Ví dụ: CMR: nếu 3n + 2 lẻ thì n lẻ
  - CM: Giả sử 3n + 2 lẻ và n chẵn, khi đó n = 2k, với k nguyên bất kỳ.
  - Khi đó: $3n + 2 = 3(2k) + 2$

    $= 6k + 2$

    $= 2(3k + 1)$
  - Do vậy 3n + 2 chẵn: Mâu thuẫn với giả thuyết rằng 3n+2 là số lẻ. Do đó n là số lẻ (ĐPCM).

Chứng minh rỗng (Vacuous proof)

- Để chứng minh: $p \rightarrow q$
  - Chứng minh p luôn sai
    - $p \rightarrow q$ luôn đúng.

- Ví dụ:
  - P(n): "Nếu $n > 1$ thì $n^2 > n$".
  - CMR P(0) đúng.
    - Với $n=0$ giả thuyết luôn sai. Do đó P(0) luôn đúng

Chứng minh tầm thường (Trivial proofs)

- Để chứng minh $p \to q$
  - Chỉ ra q luôn đúng
- Ví dụ:
  - P(n): "Nếu a >=b thì $a^n >= b^n$"
  - CMR: P(0) đúng
    - $a^0 >= b^0$ trở thành 1=1 luôn đúng.

Chứng minh qua các ví dụ

- Để chứng minh $p1 \vee p2 \vee \ldots \vee pn \vee q$
  - Cần chứng minh: $(p1 \rightarrow q) \wedge (p2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (pn \rightarrow q)$

- Lý do:
  - $p1 \vee p2 \vee \ldots \vee pn \rightarrow q \iff$
  - $\neg (p1 \vee p2 \vee \ldots \vee pn) \vee q \iff$
  - $(\neg p1 \wedge \neg p2 \wedge \ldots \wedge \neg pn) \vee q \iff$
  - $(\neg p1 \vee q) \wedge (\neg p2 \vee q) \wedge \ldots \wedge (\neg pn \vee q) \iff$
  - $(p1 \rightarrow q) \wedge (p2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (pn \rightarrow q)$

Chứng minh qua các ví dụ

- CMR: |x||y|=|xy|.
- CM
  - 4 cases:
  - x >=0, y>=0
  - x>= 0, y <0
  - x<0, y>=0
  - x<0, y <0

Chứng minh qua các ví dụ

- CMR: $|x||y|=|xy|$.
- CM qua 4 trường hợp:
  - $x >=0, y>=0$: $|xy|=xy=|x||y|$
  - $x>= 0, y <0$: $|xy|=-xy =x (-y)=|x||y|$
  - $x<0, y>=0$ |: $|xy|=-xy =(-x) y=|x||y|$
  - $x<0, y <0$ |: $|xy|= (-x)(-y) =|x||y|$
  - Cả 4 trường hợp đều đúng.

Chứng minh tương đương

- Để chứng minh $p \leftrightarrow q$
  - Cần chứng minh: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

- Ví dụ: CMR: n lẻ nếu và chỉ nếu n^2 lẻ.
- Chứng minh $(p \rightarrow q)$:
  - Sử dụng chứng minh trực tiếp
- Chứng minh $q \rightarrow p$
- **Do cả 2 đều đúng nên có ĐPCM**

Chứng minh với các lượng từ

- Chứng minh tồn tại
  - Các mệnh đề với các lượng từ tồn tại
  - Theo cách kiến thiết (Constructive)
    - Tìm ra ít nhất một ví dụ mà mệnh đề đúng.
  - Theo cách không kiến thiết (Nonconstructive)
    - Chứng minh bằng phản chứng.