Cơ sở và số chiều của không gian vector

Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

Tóm tắt

Tóm tắt

1. Hệ sinh và hệ độc lập tuyến tính
   - Tổ hợp tuyến tính
   - Hệ sinh
   - Hệ độc lập tuyến tính

2. Cơ sở và số chiều
   - Cơ sở của một không gian vector
   - Số chiều của một không gian vector

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa

Cho không gian vector V và các vector $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ trong V.

Ta nói vector $\mathbf{u}$ là một tổ hợp tuyến tính của các vector $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ nếu tồn tại các vô hướng $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sao cho:

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k\,.$$

Thí dụ:

- $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.
  $\mathbf{u} = (-2,5,8) = -2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$
- $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = (0,1,2), \mathbf{v}_2 = (1,0,3)$.
  $\mathbf{u} = (-1,2,1) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$
- $V = M_{2,2}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
  $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A + 2B - C.$

Tổ hợp tuyến tính

Thí dụ: $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 1)$ và $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$. Hỏi $\mathbf{u}$ có phải là một tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$?

Ta cần tìm các số thực x, y, z sao cho $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$. Việc này tương đương với giải hệ pttt sau:

$$\begin{cases} x \qquad\quad - z = 1 \\ 2x + \ \ y \qquad = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm: $x = 1 + z, y = -1 - 2z, z \in \mathbb{R}$.
Chọn chẳng hạn $z = 1$, ta được một biểu diễn của $\mathbf{u}$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,.$$

Tóm tắt

1. Hệ sinh và hệ độc lập tuyến tính
   - Tổ hợp tuyến tính
   - Hệ sinh
   - Hệ độc lập tuyến tính

2. Cơ sở và số chiều
   - Cơ sở của một không gian vector
   - Số chiều của một không gian vector

Định nghĩa và thí dụ

Cho V là một không gian vector.

Định nghĩa

Tập hợp $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ được gọi là một hệ sinh (hay tập hợp sinh) của V nếu mọi vector $\mathbf{v} \in V$ đều là một tổ hợp tuyến tính của S.

Thí dụ:

- Tập hợp $\{(1,0),(0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$.
- Tập hợp $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.
- Tập hợp $\{1, x, x^2\}$ là một hệ sinh của P_2.
- Tập hợp $\{(1,2,3),(0,1,2),(-2,0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.
- Tập hợp $\{(1,2,3),(0,1,2),(-1,0,1)\}$ không phải là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$ (xét $\mathbf{w} = (1,-2,2)$).

Không gian con sinh bởi một tập hợp

Cho V là một không gian vector và $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset V$.
Đặt *span*(S) là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vector trong S:

$$span(S) = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\}.$$

Định lý

Tập hợp span(S) là một không gian con của V. Đó là không gian con bé nhất (theo nghĩa bao hàm) của V chứa S (nói cách khác, nếu W là một không gian con của V và $S \subset W$ thì span$(S) \subset W$).

Thí dụ: Xét không gian $\mathbb{R}^2$.

- Nếu $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, *span* $\{\mathbf{v}_1\}$ là đường thẳng có phương $\mathbf{v}_1$.
- Nếu $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$ không cùng phương, *span* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ là mặt phẳng chứa $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$.
- Nếu $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ không cùng phương, không đồng phẳng thì *span* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^3$.

Tóm tắt

Thí dụ: so sánh hai hệ sinh

Trong $\mathbb{R}^3$, xét $\mathbf{v}_1 = (1,2,3), \mathbf{v}_2 = (0,1,2), \mathbf{v}_3 = (-1,0,1)$ và xét không gian con $W = \mathit{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Vì $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ nên $\mathit{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathit{span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Giữa hai hệ sinh $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ và $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ của W, hệ sinh thứ hai "nhỏ" hơn.

Nhưng đó liệu đã phải là hệ sinh "nhỏ" nhất?

Hệ độc lập tuyến tính

Định nghĩa

Tập hợp $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ *được gọi là* độc lập tuyến tính *nếu phương trình*

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

chỉ có nghiệm tầm thường ($x_i = 0$)*. Ngược lại, nếu phương trình trên có nghiệm không tầm thường thì* S *được gọi là* phụ thuộc tuyến tính.

Chú ý:

- Đẳng thức $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ được gọi là một *ràng buộc tuyến tính* của S.
- Nếu các $x_i = 0$ với mọi i thì ràng buộc tuyến tính được gọi là tầm thường, nếu tồn tại một $x_i \neq 0$ thì ràng buộc tuyến tính được gọi là không tầm thường.

Kiểm tra tính độc lập tuyến tính

Thí dụ:

1. $\{(1,2,3),(0,1,2),(-1,0,1)\}$ phụ thuộc tuyến tính.
2. $\{(1,2,3),(0,1,2),(-2,0,1)\}$ độc lập tuyến tính.
3. $\{1+x-2x^2, 2+5x-x^2, x+x^2\}$ phụ thuộc tuyến tính.
4. $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ độc lập tuyến tính.

Tính chất của hệ phụ thuộc tuyến tính

Giả sử $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ là một ràng buộc tuyến tính không tầm thường. Giả sử $c_k \neq 0$.
Khi đó $\mathbf{v}_k$ là một tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại:

$$\mathbf{v}_k = -\frac{c_1}{c_k}\mathbf{v}_1 - \frac{c_2}{c_k}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{c_{k-1}}{c_k}\mathbf{v}_{k-1}\,.$$

Định lý

Tập hợp $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ $(k \geq 2)$ là phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu một trong các vector $\mathbf{v}_i$ là một tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại

Hệ quả

- *Hai vector $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ là phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu một trong hai vector là bội của vector còn lại.*
- *Nếu S chứa $\mathbf{0}$ thì S phụ thuộc tuyến tính.*
- *Nếu S chứa một tập hợp phụ thuộc tuyến tính T thì S cũng phụ thuộc tuyến tính.*

Tóm tắt

1. Hệ sinh và hệ độc lập tuyến tính
   - Tổ hợp tuyến tính
   - Hệ sinh
   - Hệ độc lập tuyến tính

2. Cơ sở và số chiều
   - Cơ sở của một không gian vector
   - Số chiều của một không gian vector

Cơ sở của một không gian vector

Định nghĩa

Cho V là một không gian vector. Tập hợp $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ được gọi là một cơ sở *của V nếu:*

1. *S là một hệ sinh của V;*
2. *S độc lập tuyến tính.*

Chú ý: Định nghĩa này thừa nhận rằng V có một hệ sinh hữu hạn. Điều này không phải lúc nào cũng đúng, nhưng trong phần còn lại của môn học, chúng ta chỉ xét những không gian *hữu hạn sinh*.

Cơ sở của một không gian vector

Thí dụ:

1. $\{(1,0),(0,1)\}$ là một cơ sở, gọi là *cơ sở chính tắc* của $\mathbb{R}^2$.
2. $\{(1,-1),(1,2)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
3. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
4. $\{1,x,x^2\}$ là cơ sở chính tắc của P_2.
5. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ là cơ sở chính tắc của $M_{2,2}$.

Biểu diễn của vector theo cơ sở

Định lý

Nếu $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ là một cơ sở của không gian vector V thì mọi vector của V đều có thể biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của S.

Chứng minh:

- Biểu diễn được: do S là hệ sinh.
- Duy nhất: Giả sử một vector $\mathbf{u}$ nào đó có hai cách biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của S là $\mathbf{u} = \sum c_i \mathbf{v}_i = \sum c_i' \mathbf{v}_i$.
  Suy ra $\sum (c_i - c_i')\mathbf{v}_i$ là một ràng buộc tuyến tính của S. Do S độc lập tuyến tính nên ràng buộc tuyến tính này là tầm thường, tức là $c_i = c_i'$ với mọi i.

Chú ý: Chiều ngược lại của định lý cũng đúng (chứng minh: bài tập).

Biểu diễn của vector theo cơ sở

Thí dụ: Trong $\mathbb{R}^3$, xét $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1,2,3),(0,1,2),(-2,0,1)\}$.

1. Chứng minh rằng S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2. Viết $\mathbf{w} = (1,0,0)$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của S.

Giải:

1. Xét vector $\mathbf{u} = (a,b,c)$ bất kỳ trong $\mathbb{R}^3$. Phương trình $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ tương đương với hệ phương trình tuyến tính:
$$\begin{cases} x \qquad\quad - 2z = a \\ 2x + \ \ y \qquad\ \ = b \\ 3x + 2y + \ \ z = c \end{cases}$$
Ma trận hệ số của hệ này khả nghịch, nên hệ có nghiệm duy nhất với mọi a, b, c.
Do đó mọi vector $\mathbf{u}$ có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của S, có nghĩa S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2. Giải hệ trên với $a = 1, b = 0, c = 0$ ta được $x = -1, y = 2, z = -1$.
Vậy $\mathbf{w} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

Cơ sở và độc lập tuyến tính

Định lý

Nếu $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *là một cơ sở của không gian vector* V *thì mọi hệ có nhiều hơn* n *vector của* V *đều phụ thuộc tuyến tính.*

Chứng minh: Giả sử $T = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ với $m > n$. Ta cần tìm các số $x_1, \dots, x_m$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}\,. \tag{1}$$

Vì S là một cơ sở nên mỗi vector $\mathbf{u}_j$ $(j = 1, \dots, m)$ đều biểu diễn được (duy nhất) dưới dạng tổ hợp tuyến tính của S:

$$\mathbf{u}_j = a_{1,j}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n,j}\mathbf{v}_n\,.$$

Thay vào (1) và nhóm các hệ số của từng $\mathbf{v}_i$ lại với nhau, ta thu được:

Cơ sở và độc lập tuyến tính

$$b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}\,,$$

ở đó

$$b_i = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,m}x_m\,,$$

với mọi $i = 1, \ldots, n$.
Vì S độc lập tuyến tính nên $b_1 = \cdots = b_n = 0$, hay:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,m}x_m & = 0 \\ \ldots & \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m & = 0\,. \end{cases}$$

Hệ này có số ẩn (m) lớn hơn số phương trình (n) nên có nghiệm không tầm thường.

Cơ sở và độc lập tuyến tính

Hệ quả

Nếu $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ là một cơ sở của không gian vector V thì mọi cơ sở của V có đúng n vector.

Thí dụ:

- Vì cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ có 3 vector nên:
  - Hệ $\{(1,2,3),(-1,0,2),(2,4,0),(5,9,-1)\}$ là phụ thuộc tuyến tính;
  - Hệ $\{(3,2,1),(7,-1,4)\}$ không phải là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
- Vì cơ sở chính tắc của P_3 có 4 vector nên:
  - Hệ $\left\{1, 1+x, 1-x^2, x+x^2+x^3, x-2x^3\right\}$ là phụ thuộc tuyến tính;
  - Hệ $\left\{2x, x^2, 3x^3\right\}$ không phải là một cơ sở của P_3.

Tóm tắt

1. Hệ sinh và hệ độc lập tuyến tính
   - Tổ hợp tuyến tính
   - Hệ sinh
   - Hệ độc lập tuyến tính

2. Cơ sở và số chiều
   - Cơ sở của một không gian vector
   - Số chiều của một không gian vector

Số chiều của một không gian vector

Định nghĩa

Nếu không gian vector V có một cơ sở gồm n vector thì ta nói V là một không gian vector hữu hạn chiều *với* số chiều *bằng n, và viết $\dim(V) = n$. Ta quy ước rằng $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.*

Thí dụ:

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim(P_n) = n + 1$.
- $\dim(M_{m,n}) = m \times n$.

Số chiều của một không gian con

Mệnh đề

Nếu $\dim(V) = n$ *và* W *là một không gian con của* V *thì:*

1. W *hữu hạn chiều.*
2. $\dim(W) \leq n$.

Ý tưởng: Để tìm số chiều của một không gian con, ta tìm một cơ sở (hệ sinh độc lập tuyến tính) của không gian con đó.

Số chiều của một không gian con

Thí dụ:

- Trong $\mathbb{R}^3$, xét không gian con $U = \{(a, b-a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ (bài tập: chứng minh U là một không gian con của $\mathbb{R}^3$). Tìm số chiều của U.
  - Với mọi $\mathbf{u} = (a, b-a, b) \in U$, ta có $\mathbf{u} = a(1, -1, 0) + b(0, 1, 1)$.
  - Từ đó $S = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1)\}$ là một hệ sinh của U.
  - Mặt khác, S độc lập tuyến tính (vì sao?), do đó S là một cơ sở của U.
  - Vậy $\dim(U) = 2$.

- Trong $\mathbb{R}^4$, xét $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(-1, 2, 5, 0), (3, 0, 1, -2), (-5, 4, 9, 2)\}$. Đặt $W = span(S)$. Tìm $\dim(W)$.
  - Phương trình $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ có nghiệm không tầm thường, chẳng hạn $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -1$, do đó S không độc lập tuyến tính và không phải một cơ sở của W.
  - Vì $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ nên $span(S) = span(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\})$, hay $S' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ là một hệ sinh của W.
  - S' độc lập tuyến tính (vì sao?) nên S' là một cơ sở của W.
  - Vậy $\dim(W) = 2$.

Số chiều của một không gian con

Thí dụ:

- Gọi W là không gian con của $M_{2,2}$ gồm các ma trận đối xứng cấp 2. Tìm $\dim(W)$.
  - Ta viết $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ và

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aP_1 + bP_2 + cP_3 \,.$$

  - Có thể chứng minh $\{P_1, P_2, P_3\}$ là độc lập tuyến tính.
  - Vậy $\dim(W) = 3$.

Cơ sở và số chiều

Định lý

Trong một không gian vector n chiều:

1. *Mọi hệ độc lập tuyến tính gồm n vector là một cơ sở.*
2. *Mọi hệ sinh gồm n vector là một cơ sở.*