Hệ phương trình tuyến tính

Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

18/01/2021

Tóm tắt

- **Thời lượng:** 15 tuần $\times$ (2h lý thuyết + 2h bài tập)
- **Công thức điểm (dự kiến):**

$$\text{Điểm TB} = 0.1\times\text{chuyên cần}+0.15\times\text{bài tập}+0.15\times\text{kiểm tra}+0.6\times\text{thi}$$

- **Giáo trình:**
  - Nguyễn Đình Trí. *Toán cao cấp.*
  - Larson, Edwards, Falvo. *Elementary linear algebra (6^{th} edition).*

Tóm tắt

Phương trình tuyến tính

Định nghĩa

- *Một* phương trình tuyến tính *(pttt) n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một phương trình có dạng*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b\,, \tag{1}$$

ở đó các hệ số *a_i $(1 \le i \le n)$ và* hệ số tự do *b là các hằng số.*

- *Một bộ n số $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sao cho*

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

được gọi là một nghiệm *của phương trình (1).*

Phương trình tuyến tính

1. $x_1 + x_2 = 1$
   Giải x_1 theo x_2: $x_1 = 1 - x_2$; x_2 là *biến tự do*.
   Nghiệm *dạng tham số*: $x_1 = 1 - t, x_2 = t(t \in \mathbb{R})$.
   Tập nghiệm $S = \{(1 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

2. $3x + 2y - z = 3$
   Giải x theo y và z: $x = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1$; y và z là các biến tự do.
   $S = \left\{(-\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}t + 1, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\right\}$.

Tóm tắt

Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

- *Một* hệ phương trình tuyến tính *(hệ pttt) m phương trình, n ẩn* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là một hệ phương trình có dạng*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{2}$$

  ở đó các hệ số a_{ij} *và* hệ số tự do b_i *(*$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$*) là các hằng số.*

- *Một bộ n số* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *sao cho*

$$a_{i1}s_{i1} + a_{i2}s_{i2} + \cdots + a_{in}s_{in} = b_i$$

  với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$ *được gọi là một* nghiệm *của hệ (2).*

Số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Nghiệm duy nhất: $x = 2, y = 1$.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Vô số nghiệm: $x = 3 - y, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Vô nghiệm.

Định lý

Mọi hệ phương trình tuyến tính thỏa mãn đúng một trong ba điều sau:

1. *Hệ có nghiệm duy nhất.*
2. *Hệ có vô số nghiệm.*
3. *Hệ vô nghiệm.*

Tóm tắt

Hệ pttt dạng bậc thang

Thí dụ:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y \quad\quad = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Giải hệ thứ hai bằng cách thế từ dưới lên:

$$\begin{aligned} &z = 2 \\ &y = 5 - 3z = 5 - 3 \times 2 = -1 \\ &x = 9 + 2y - 3z = 9 + 2 \times (-1) - 3 \times 2 = 1\,. \end{aligned}$$

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Định nghĩa

Hai hệ pttt được gọi là tương đương *nếu chúng có cùng tập nghiệm.*

Chú ý: Hai hệ pttt vô nghiệm tương đương với nhau.

Định lý (Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng)

Các phép biến đổi sau biến một hệ pttt thành một hệ pttt tương đương với nó:

1. *Đổi chỗ hai phương trình.*
2. *Nhân (hai vế của) một phương trình với một số* khác 0.
3. *Cộng vào một phương trình một bội của một phương trình khác.*

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Thí dụ:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y \qquad = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_2 + pt_1} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ \qquad y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \xrightarrow{pt_3 - 2pt_1} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ \qquad y + 3z = 5 \\ \quad - y - z = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_3 + pt_2} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ \qquad y + 3z = 5 \\ \qquad\quad 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow{pt_3 \times \frac{1}{2}} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ \qquad y + 3z = 5 \\ \qquad\quad z = 2 \end{cases}$$

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Một hệ vô nghiệm:

$$\begin{cases} x - 3y + \ \ z = 1 \\ 2x - \ \ y - 2z = 2 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cdots} \quad \begin{cases} x - 3y + \ \ z & = 1 \\ \quad\ \ 5y - 4z & = 0 \\ \qquad\qquad\quad 0 & = -2 \end{cases}$$

Phương trình thứ ba vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Một hệ vô số nghiệm:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x - 3z = -1 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cdots} \begin{cases} x - 3z = -1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Biến z là biến tự do: $z \in \mathbb{R}$.
- Biểu diễn x và y theo z: $x = 3z - 1, y = z$.

Hệ có vô số nghiệm: $S = \{(3t - 1, t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Tóm tắt

Ma trận

Định nghĩa

- *Một* ma trận *cỡ $m \times n$ là một bảng có m* hàng *và n* cột*:*

$$M = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  ở đó mỗi phần tử *a_{ij} là một số.*
- *Nếu $m = n$, ma trận M được gọi là một* ma trận vuông *cấp n. Khi đó, các phần tử a_{ii} $(1 \le i \le n)$ tạo thành* đường chéo chính *của ma trận M.*

Ma trận

Thí dụ:

- $$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

  là một ma trận 2×4; $a_{13} = 3, a_{22} = 1$.

- $$N = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3/5} & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -\mathbf{3/5} \end{pmatrix}$$

  là một ma trận vuông cấp 3.

Ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

- Ma trận hệ số *của hệ (2) là ma trận*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ma trận hệ số mở rộng *của hệ (2) là ma trận*

$$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Tóm tắt

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

Định nghĩa

- *Các phép biến đổi ma trận sau đây được gọi là các phép biến đổi sơ cấp theo hàng:*
  1. *Đổi chỗ hai hàng.*
  2. *Nhân một hàng với một số* khác 0*.*
  3. *Cộng vào một hàng một bội của một hàng khác.*
- *Hai ma trận là tương đương theo hàng nếu một ma trận có thể được nhận từ ma trận kia bằng một số (hữu hạn) phép biến đổi sơ cấp theo hàng.*

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

Thí dụ:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y \qquad = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2+h_1} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ \qquad y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\cdots} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ \qquad y + 3z = 5 \\ \qquad\qquad z = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Các phép biến đổi sơ cấp biến ma trận hệ số (mở rộng) của một hệ pttt thành ma trận hệ số (mở rộng) của một hệ pttt tương đương.

Ma trận bậc thang theo hàng

Định nghĩa

Một ma trận là ma trận bậc thang theo hàng *nếu:*

- *Các hàng bằng 0 (nếu có) nằm ở dưới cùng.*
- *Mỗi hàng khác 0 có phần tử khác 0 đầu tiên (tính từ bên trái) bằng 1 (gọi là* số 1 dẫn đầu*).*
- *Mọi số 1 dẫn đầu nằm ở bên trái các số 1 dẫn đầu ở dưới nó.*

Thí dụ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 3 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

Nhận xét: Tất cả các phần tử nằm bên dưới mỗi số 1 dẫn đầu đều bằng 0.

Ma trận bậc thang theo hàng

Định nghĩa

Một ma trận bậc thang theo hàng là thu gọn *nếu mọi phần tử bên trên mỗi số 1 dẫn đầu đều bằng 0.*
(Nói cách khác, nếu mọi số 1 dẫn đầu là phần tử khác 0 duy nhất trong cột của nó.)

Thí dụ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

Tóm tắt

Thuật toán khử Gauss

Giải hệ pttt bằng thuật toán khử Gauss:

1. Viết ma trận hệ số mở rộng của hệ pttt.
2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng, đưa về ma trận dạng bậc thang theo hàng tương đương.
3. Viết hệ pttt dạng bậc thang tương ứng và giải bằng phép thế ngược từ dưới lên.

Thuật toán khử Gauss

Thí dụ:

$$\begin{cases} \quad\; y + \; z - 2t = -3 \\ x + 2y - \; z \qquad = 2 \\ 2x + 4y + \; z - 3t = -2 \\ x - 4y - 7z - \; t = -19 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Thuật toán khử Gauss

Thí dụ (tiếp):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + 2y - z \phantom{{}-2t} = 2 \\ y + z - 2t = -3 \\ \phantom{x+2y+{}} z - t = -2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Giải bằng phép thế ngược:

$$\begin{aligned} t &= 3 \\ z &= t - 2 = 1 \\ y &= -z + 2t - 3 = 2 \\ x &= -2y + z + 2 = -1 \end{aligned}$$

Thuật toán khử Gauss

Thí dụ:

$$\begin{cases} x - \ \ y + 2z = 4 \\ x \qquad + \ \ z = 6 \\ 2x - 3y + 5z = 4 \\ 3x + 2y - \ \ z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\cdots}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

Hàng 3 tương ứng với phương trình $0 = -2$, vô nghiệm!

Tóm tắt

Thuật toán Gauss-Jordan

Giải hệ pttt bằng thuật toán Gauss-Jordan:

1. Viết ma trận hệ số mở rộng của hệ pttt.
2. Dùng các phép biển đổi sơ cấp theo hàng, đưa về ma trận dạng bậc thang theo hàng tương đương.
3. Tiếp tục dùng các phép biển đổi sơ cấp theo hàng, đưa về ma trận dạng bậc thang theo hàng *thu gọn* tương đương.

Thuật toán Gauss-Jordan

Thí dụ:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y \qquad = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{\cdots}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \stackrel{\cdots}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm duy nhất: $x = 1, y = -1, z = 2$.

Thuật toán Gauss-Jordan

Thí dụ:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 0 \\ 3x + 5y \qquad\quad = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Biến z là biến tự do (cột tương ứng không có số 1 dẫn đầu).
Hệ có vô số nghiệm: $S = \{(2 - 5t, -1 + 3t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Tóm tắt

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa

Một hệ pttt là thuần nhất *nếu tất cả các hệ số tự do (vế phải) của nó đều bằng 0.*

Nhận xét: Mọi hệ pttt thuần nhất đều có ít nhất một nghiệm là $(0, 0, \ldots, 0)$ (gọi là *nghiệm tầm thường*).

Định lý

Mọi hệ pttt thuần nhất đều có nghiệm. Hơn nữa, nếu một hệ pttt thuần nhất có số phương trình ít hơn số ẩn thì hệ đó có vô số nghiệm.