Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

19/05/2020

Tóm tắt

Tóm tắt

1. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

2. Ma trận đồng dạng

Ma trận chính tắc

Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Gọi $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ tương ứng là các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^m$.

Định nghĩa

Ma trận chính tắc *của T là ma trận $A \in M_{m,n}$ gồm n cột $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$. Cụ thể, $A = (a_{ij})$ sao cho*

$$T(\mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix},$$

với mọi $j = 1, 2, \ldots, n$.

Nhận xét: Nếu A là ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ thì với mọi $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Thí dụ: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sao cho $T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y)$

Ta có:

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, T(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

do đó ma trận chính tắc của T là:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hợp thành của hai ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *và* $T_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *là các ánh xạ tuyến tính. Ánh xạ hợp thành của* T_1 *và* T_2*, ký hiệu là* $T_2 \circ T_1$*, là một ánh xạ* $\mathbb{R}^n \to R_p$ *được định nghĩa bởi*

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}) = T_2\left(T_1(\mathbf{v})\right) .$$

Định lý

Nếu T_1 *và* T_2 *là các ánh xạ tuyến tính thì* $T_2 \circ T_1$ *cũng là một ánh xạ tuyến tính. Nếu* A_1 *và* A_2 *là các ma trận chính tắc của* T_1 *và* T_2 *thì ma trận chính tắc của* $T_2 \circ T_1$ *là* $A_2 A_1$.

Thí dụ: $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_1(x, y, z) = (2x + y, 0, x + z),\ T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$
$T_2(x, y, z) = (x - y, z, y)$.
$(T_2 \circ T_1)(x, y, z) = (2x + y, x + z, 0)$
$(T_1 \circ T_2)(x, y, z) = (2x - 2y + z, 0, x)$

Ánh xạ tuyến tính khả nghịch

Định nghĩa

Nếu các ánh xạ tuyến tính $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *và* $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *thỏa mãn* $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2 = id$ *thì ta nói rằng* T_1 khả nghịch *và* T_2 *là* ánh xạ nghịch đảo *của* T_1.

Nhận xét:

- Nếu $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ khả nghịch thì $m = n$.
- Nếu T là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch thì ánh xạ nghịch đảo của nó là duy nhất và được ký hiệu là T^{-1}.

Định lý

Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *với ma trận chính tắc* A. *Các khẳng định sau là tương đương:*

1. T *là khả nghịch.*
2. T *là một đẳng cấu.*
3. A *là khả nghịch.*

Hơn nữa, nếu T *là khả nghịch thì ma trận chính tắc của* T^{-1} *là* A^{-1}.

Ánh xạ tuyến tính khả nghịch

Thí dụ: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho
$T(x, y, z) = (2x + 3y + z, 3x + 3y + z, 2x + 4y + z)$.

Ma trận chính tắc của T là $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ma trận này khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Từ đó, T là khả nghịch và $T^{-1}(x, y, z) = (-x + y, -x + z, 6x - 2y - 3z)$.

Không gian và cơ sở bất kỳ

Cho V, W là các không gian vector hữu hạn chiều. Giả sử $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ tương ứng là cơ sở của V và W.

Định nghĩa

Ma trận của T trong cặp cơ sở B, B' *là ma trận* $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ *sao cho với mọi* $j = 1, \dots, n$:

$$[T(\mathbf{v}_j)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Mệnh đề

Nếu A *là ma trận của ánh xạ tuyến tính* $T : V \to W$ *trong cặp cơ sở* B, B' *thì với mọi* $\mathbf{v} \in V$,

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = A[\mathbf{v}]_B .$$

Không gian và cơ sở bất kỳ

Thí dụ: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.
$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(1, 2), (-1, 1)\},\ B' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= (3, 0) = 3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{u}_2) &= (0, -3) = 0\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Từ đó, ma trận của T trong cặp cơ sở B, B' là $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Ma trận của ánh xạ hợp thành

Cho U, V, W là các không gian vector hữu hạn chiều và B, B', B'' tương ứng là cơ sở của U, V, W.

Định lý

Nếu $T_1 : U \to V$ và $T_2 : V \to W$ là các ánh xạ tuyến tính thì $T_2 \circ T_1$ cũng là một ánh xạ tuyến tính.
Hơn nữa, nếu A_1 là ma trận của T_1 trong cặp cơ sở B, B' và A_2 là ma trận của T_2 trong cặp cơ sở B', B'' thì A_2A_1 là ma trận của $T_2 \circ T_1$ trong cặp cơ sở B, B''.

Ma trận của ánh xạ khả nghịch

Định nghĩa

Một ánh xạ tuyến tính $T_1 : V \to V$ là khả nghịch *nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính $T_2 : V \to V$ sao cho $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = id$.*
Khi đó, T_2 được gọi là ánh xạ nghịch đảo *của T_1.*

Mệnh đề

Nếu $T : V \to V$ là khả nghịch thì ánh xạ nghịch đảo của nó là duy nhất. Khi đó, ánh xạ nghịch đảo của T được ký hiệu là T^{-1}.

Định lý

Cho ánh xạ tuyến tính $T : V \to V$ với ma trận A trong cơ sở B. Các khẳng định sau là tương đương:

1. *T là khả nghịch.*
2. *T là một đẳng cấu.*
3. *A là khả nghịch.*

Hơn nữa, nếu T là khả nghịch thì ma trận của T^{-1} trong cơ sở B là A^{-1}.

Tóm tắt

Chuyển cơ sở

Cho V là một không gian tuyến tính hữu hạn chiều, B và B' là hai cơ sở của V và $T : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính.
Gọi A (tương ứng, A') là ma trận của T trong cơ sở B (tương ứng, B'). Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

Định lý

$$A' = P^{-1}AP\,.$$

Chứng minh: Với mọi $\mathbf{v} \in V$, ta có $[T(\mathbf{v})]_B = A\,[\mathbf{v}]_B$; $[T(\mathbf{v})]_{B'} = A'\,[\mathbf{v}]_{B'}$; $[\mathbf{v}]_B = P\,[\mathbf{v}]_{B'}$; $[T(\mathbf{v})]_{B'} = P^{-1}\,[T(\mathbf{v})]_B$.
Kết hợp lại:

$$T(\mathbf{v})_{B'} = P^{-1}\,[T(\mathbf{v})]_B = P^{-1}A\,[\mathbf{v}]_B = P^{-1}AP\,[\mathbf{v}]_{B'}\;.$$

Suy ra $P^{-1}AP$ cũng là ma trận của T trong cơ sở B', do đó $P^{-1}AP = A'$.

Chuyển cơ sở

Thí dụ: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 2y, -x + 3y)$, B là cơ sở chính tắc và $B' = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

Ta có $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Từ đó $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ma trận đồng dạng

Định nghĩa

Hai ma trận vuông cấp n A và A' được gọi là đồng dạng *với nhau nếu tồn tại một ma trận khả nghịch P (cấp n) sao cho $A' = P^{-1}AP$.*

Định lý

Cho các ma trận vuông cùng cấp A, B, C. Khi đó:

1. *A đồng dạng với chính nó.*
2. *Nếu A đồng dạng với B thì B đồng dạng với A.*
3. *Nếu A đồng dạng với B và B đồng dạng với C thì A đồng dạng với C.*

Nhận xét: Hai ma trận của cùng một ánh xạ tuyến tính trong hai cơ sở khác nhau là hai ma trận đồng dạng với nhau.