Logic và Chứng minh

Lô gích (Logic) và Chứng minh

- Logic mệnh đề (Proposition logic)
- Logic vị từ (Predicate logic)
- Chứng minh (Proof)

Lô gích (Logic)

- Lô gích (Logic)
  - Định nghĩa một ngôn ngữ chính tắc (hình thức; formal language) cho việc biểu diễn tri thức (knowledge) và thực hiện các suy luận [hợp] lô gích (logical inferences)
  - Giúp chúng ta hiểu được cách xây dựng các lập luận đúng
- Lô gích quy định:
  - Cấu trúc của các mệnh đề (Syntax of statements)
  - Ý nghĩa của các mệnh đề (Meaning of statements)
  - Các luật suy luận lô gích (rules of logical inference)

Lô gích mệnh đề (Propositional logic)

- Lô gích đơn giản nhất

- Định nghĩa:
  - Một mệnh đề là một phát biểu (statement) chỉ có thể hoặc đúng (True) hoặc sai (False).
- Ví dụ:
  - Hà Nội là thủ đô của Việt Nam (đúng/T)
  - 5+2=8 (Sai/F)
  - Hôm nay trời mưa (hoặc T hoặc F)

Lô gích mệnh đề

- Ví dụ (tiếp):
  - Bạn có khoẻ không?
    - Câu hỏi không phải là một mệnh đề
  - x+5=3
    - Vì x chưa xác định -> không đúng cũng không sai
  - 7 là một số nguyên tố (prime number)
    - (T)
  - Cô ta rất tài năng
    - Vì "Cô ta" chưa được xác định -> không đúng cũng không sai
  - Có sự sống trên các hành tinh khác trong vũ trụ.
    - Hoặc T hoặc F

Các mệnh đề phức (Composite statements)

- Gồm các mệnh đề cơ sở (elementary) được kết hợp lại bởi các kết nối lô gích (logical connectives).
- Ví dụ:
  - Mệnh đề A: Trời đang mưa
  - Mệnh đề B: Chúng ta sẽ xem phim
  - Mệnh đề phức:
    - Nếu trời đang mưa thì chúng ta sẽ xem phim

Phép phủ định (Negation)

- Cho p là một mệnh đề. Mệnh đề "Không phải p" được gọi là phủ định của p
  - Được kí hiệu bởi ¬p (đọc là "không p").
- Ví dụ :
  - Trường ĐH Công nghệ trực thuộc ĐHQGHN →
    - Trường ĐH Công nghệ không phải trực thuộc ĐHQGHN
- Ví dụ khác:
  - 5+2≠8
  - 10 không phải là số nguyên tố.
  - Không phải xe buýt ngừng chạy lúc 9g tối.

Phép phủ định (Negation)

- Hãy phủ định các mệnh đề sau:
  - Trời đang mưa.
    - Không phải trời đang mưa.
  - 11 là một số nguyên tố.
    - 11 không phải là số nguyên tố
- Tồn tại sự sống trên các hành tinh khác trong vũ trụ
  - Không tồn tại sự sống trên các hành tinh khác trong vũ trụ

Phép phủ định (Negation)

- Bảng chân lý/trị
  - Biểu diễn mối quan hệ giữa các giá trị chân lý (T hoặc F) của các mệnh đề khác nhau.

P	¬p
T	F
F	T

Các dòng: Tất cả các giá trị có thể có của các mệnh đề cơ sở

Phép hội (Conjunction)

- Cho p và q là 2 mệnh đề
  - Mệnh đề "p và q" được gọi là Hội của p và q
    - Ký hiệu bởi $p \wedge q$,
    - Chỉ đúng khi cả p và q đều đúng; và sai khi ngược lại.

- Ví dụ:
  - Hà Nội là thủ đô của Việt Nam VÀ $5 + 2 = 8$
  - Ngoài trời đang mưa VÀ 3 là số một nguyên tố.
  - 2 là một số nguyên tố VÀ $5 + 2 \neq 8$.

Phép tuyển (Disjunction)

- Cho p và q là 2 mệnh đề
  - Mệnh đề "p hoặc q" được gọi là tuyển của p và q
    - Được ký hiệu bởi $p \vee q$
    - Chỉ Sai (False) khi cả p và q đều sai, và Đúng (T) khi ngược lại
- Ví dụ:
  - Hà Nội là thủ đô của Việt Nam HOẶC 5 + 2= 8.
  - Ngoài trời đang mưa HOẶC 2 là một số nguyên tố.
  - 2 là một số nguyên tố HOẶC $5 + 2 \neq 8$.

Bảng chân lý/trị (Truth table)

- Với phép hội và phép tuyển
  - 4 tổ hợp khác nhau của các giá trị của p và q

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

Các hàng: tất cả các tổ hợp các giá trị của các mệnh đề cơ sở: 2^n giá trị

Phép tuyển loại trừ (Exclusive or)

- Cho p và q là hai mệnh đề
  - Mệnh đề "p tuyển loại trừ q", hoặc "p XOR q"
    - Được ký hiệu bởi $p \oplus q$
    - Chỉ đúng khi có đúng một mệnh đề thành phần đúng, và sai khi ngược lại.

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Phép kéo theo (Implication)

- Cho 2 mệnh đề p và q.
  - Mệnh đề "p kéo theo (implies) q"
    - Được ký hiệu bởi $p \rightarrow q$
    - Chỉ sai khi p đúng và q sai, ngược lại đúng.
  - p được gọi là "giả thuyết", q là "kết luận".

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Phép kéo theo

- $p \to q$ có thể được đọc theo 1 trong các cách sau:
  - Nếu p thì q (if p then q)
  - p chỉ nếu q (p only if q)
  - p là đủ cho q (p is sufficient for q)
  - q bất kể khi nào có p (q whenever p)

- Ví dụ:
  - Nếu ngoài trời đang mưa thì 2 là một số nguyên tố.
  - Nếu hôm nay là thứ Ba thì 2*3 = 8.

Phép kéo theo

- Cho mệnh đề $p \rightarrow q$
  - Mệnh đề đảo (đảo đề, converse): $q \rightarrow p$
  - Phản đề (inverse): $\neg p \rightarrow \neg q$
  - Phản đảo (contrapositive): $\neg q \rightarrow \neg p$

- Ví dụ:
  - Nếu ngoài trời đang mưa, giao thông đi lại chậm.
    - p: ngoài trời đang mưa   q: giao thông đi lại chậm.
    - $p \rightarrow q$

Điều kiện hai phía (Biconditional)

- Cho 2 mệnh đề p và q.
  - Mệnh đề kéo theo hai phía $p \leftrightarrow q$
    - Đọc là p nếu và chỉ nếu q (p if and only if q)
    - Chỉ đúng khi cả p và q có cùng giá trị chân lý, ngược lại là sai.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- **Chú ý:** Hai giá trị chân lý luôn giống nhau.

Xây dựng bảng chân lý

- Ví dụ:
  - Xây dựng bảng chân lý cho mệnh đề
    - $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
- Phân rã mệnh đề gốc thành các thành phần con

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p\rightarrow q)\wedge(\neg p\leftrightarrow q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

Xây dựng bảng chân lý

- Ví dụ:
  - Xây dựng bảng chân lý cho mệnh đề
    - $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
- Phân rã mệnh đề gốc thành các thành phần con

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

Lô gích mệnh đề: Tổng kết

- Một ngôn ngữ hình thức (chính quy) có thể dùng để biểu diễn tri thức và suy luận [hợp] lô gích.
- Một mệnh đề là một phát biểu có thể hoặc đúng (T) hoặc sai (F).
- Một mệnh đề phức có thể được tạo thành từ các mệnh đề thành phần sử dụng các kết nối lô gích.
- Giá trị chân lý của mệnh đề phức hợp được định nghĩa bởi các giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần và ý nghĩa của các phép kết nối lô gích.
- Bảng chân lý cho một mệnh đề phức:
  - Các dòng cho tất cả tổ hợp có thể có của các giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần.

Mệnh đề phức

- Gọi p: 2 là một số nguyên tố (T)
  q: 6 là một số nguyên tố (F)
- Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau:
  - $\neg p$: F
  - $p \land q$: F
  - $p \land \neg q$: T
  - $p \lor q$: T
  - $p \oplus q$: T
  - $p \to q$: F
  - $q \to p$: T

Xây dựng bảng chân lý

- Xây dựng bảng chân lý cho mệnh đề $(p \to q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

Ứng dụng của lô gích mệnh đề

- Biểu diễn tri thức (được viết bằng ngôn ngữ tự nhiên)
- Suy diễn và lập luận:
  - Suy diễn ra các mệnh đề lô gích mới từ các mệnh đề cũ.
  - Sử dụng trong trí tuệ nhân tạo:
    - Các hệ chuyên gia dựa trên luật (Rule based expert systems)
    - Các hệ thống chứng minh định lý tự động
- Thiết kế mạch lô gích

Biểu diễn tri thức

- Xác định các kết nối lô gích trong câu (tri thức được viết bằng ngôn ngữ tự nhiên)
  - Xác định các mệnh đề cơ sở từ các kết nối lô gích.

- Ví dụ:
  - $\underbrace{\text{Bạn được học bổng}}_{a}$ nếu $\underbrace{\text{điểm tổng kết} \geq 8.0}_{b}$ và $\underbrace{\text{bạn không thi lại môn nào}}_{c}$

Được viết lại trong lô gích mệnh đề như sau:

$$b \wedge c \rightarrow a$$

Biểu diễn tri thức

- Giả sử có 2 mệnh đề cơ sở:
  - p: bạn lái xe trên 65 km/h; q: bạn bị phạt
- Chuyển các câu sau sang lô gích mệnh đề
  - Bạn không lái xe trên 65 km/h. $(\neg p)$
  - Bạn lái xe trên 65 km/h, nhưng không bị phạt. $(p \wedge \neg q)$
  - Bạn sẽ bị phạt nếu bạn lái xe trên 65 km/h $(p \rightarrow q)$
  - Nếu bạn không lái xe trên 65 km/h bạn sẽ không bị phạt. $(\neg p \rightarrow \neg q)$
  - Lái xe trên 65 km/h là đủ để bị phạt $(p \rightarrow q)$
  - Bạn bị phạt nhưng lại không lái xe trên 65 km/h $(q \wedge \neg p)$

Ứng dụng: suy diễn

- Giả sử các câu sau là đúng:
  - Nếu bạn trên 18 tuổi hoặc bạn có sự đồng ý của bố mẹ thì bạn có thể đăng ký kết hôn. Bạn trên 18 tuổi.
- Biểu diễn "tri thức":
  - Nếu (bạn trên 18 tuổi hoặc bạn có sự đồng ý của bố mẹ) thì (bạn có thể đăng ký kết hôn) . (Bạn trên 18 tuổi).
    - A= Bạn trên 18 tuổi
    - B= Bạn có sự đồng ý của bố mẹ
    - C= Bạn có thể đăng ký kết hôn
  - $(A \vee B \rightarrow C)$, A
  - $(A \vee B \rightarrow C) \wedge A$ là đúng (T)
  - Với lô gích mệnh đề chúng ta có thể suy diễn được phát biểu (mệnh đề) sau:
    - Bạn có thể đăng ký kết hôn (C đúng (T))

Mệnh đề hằng (Contingency)

- Mệnh đề luôn đúng hoặc luôn sai
  - Luôn đúng: Mệnh đề hằng đúng (Tautology).
  - Luôn sai: Mệnh đề hằng sai (Contradiction).

Mệnh đề hằng (Contingency)

- **Ví dụ:** $p \vee \neg p$ là một hằng đúng (**tautology).**

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

- Ví dụ: $p \wedge \neg p$ là một hằng sai (**contradiction).**

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

Tương đương (lô gích)

- Hai mệnh đề tương đương lô gích với nhau
  - Bảng chân lý của chúng là giống nhau cho các giá trị tương ứng.
  - Ví dụ: $p \to q$ tương đương với $\neg q \to \neg p$ (phản đảo)

p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

Tương đương (lô gích)

- Mệnh đề p và q được gọi là tương đương nếu $p \leftrightarrow q$ là một hằng đúng (tautology)
  - Được ký hiệu bằng p <=> q.

- Ví dụ:
  - **Luật DeMorgan**:
    - $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$
    - $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$

- Ví dụ: Phủ định ”Mùa hè ở châu Âu vừa lạnh vừa có nắng" sử dụng luật DeMorgan
  - Mùa hè ở châu Âu không lạnh hoặc không có nắng.

Tương đương (lô gích)

- Ví dụ quan trọng về tương đương lô gích
  - **Luật DeMorgan**:
    - $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$
    - $\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$
  - Chứng minh bằng bảng chân lý

p	q	¬p	¬q	¬(p ∨ q)	¬p ∧ ¬q
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

Các luật tương đương quan trọng

- **Luật đồng nhất (Identity)**
  - $p \wedge T \iff p$
  - $p \vee F \iff p$
- **Luật trội (Domination)**
  - $p \vee T \iff T$
  - $p \wedge F \iff F$
- **Luật luỹ đẳng (Idempotent)**
  - $p \vee p \iff p$
  - $p \wedge p \iff p$

Các luật tương đương quan trọng

- **Luật phủ định kép (Double negation)**
  - $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
- **Luật giao hoán (Commutative)**
  - $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
  - $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- **Luật kết hợp (Associative)**
  - $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
  - $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Các luật tương đương quan trọng

- **Luật phân phối (Distributive)**
  - $p \lor (q \land r) <=> (p \lor q) \land (p \lor r)$
  - $p \land (q \lor r) <=> (p \land q) \lor (p \land r)$
- **Luật De Morgan**
  - $\neg(p \lor q) <=> \neg p \land \neg q$
  - $(p \land q) <=> \neg p \lor \neg q$
- **Các luật hữu ích khác**
  - $p \lor \neg p <=> T$
  - $p \land \neg p <=> F$
  - $p \rightarrow q <=> (\neg p \lor q)$

Sử dụng các luật tương đương

- Có thể được sử dụng trong các chứng minh
  - Biến đổi một mệnh đề hoặc một phần của nó
    - Thu được kết luận.

- Ví dụ: Chứng minh $(p \wedge q) \rightarrow p$ là một hằng đúng.
- Chứng minh: (Cần chỉ ra rằng $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow T$)
  - $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee p$ Luật hữu ích

$\Leftrightarrow [\neg p \vee \neg q] \vee p$ DeMorgan

$\Leftrightarrow [\neg q \vee \neg p] \vee p$ Giao hoán

$\Leftrightarrow \neg q \vee [\neg p \vee p]$ Kết hợp

$\Leftrightarrow \neg q \vee [T]$ Luật hữu ích

$\Leftrightarrow T$ Luật trội

Sử dụng các luật tương đương

- CMR: $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Chứng minh:

- $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

<=>	$\neg(\neg q) \vee (\neg p)$	Luật hữu ích
<=>	$q \vee (\neg p)$	Phủ định kép
<=>	$\neg p \vee q$	Giao hoán
<=>	$p \to q$	Luật hữu ích

ĐPCM.

Các hạn chế của lô gích mệnh đề

- Phải lặp lại các phát biểu đúng cho nhiều đối tượng
  - Ví dụ:
    - An đã tốt nghiệp UET → An đã qua môn TRR
    - Nga đã tốt nghiệp UET → Nga đã qua môn TRR
    - Hằng đã tốt nghiệp UET → Hằng đã qua môn TRR
    - – …
- **Giải pháp**: Sử dụng các biến (**variables**)
  - **x** đã tốt nghiệp UET → **x** đã qua môn TRR

Các hạn chế của lô gích mệnh đề

- **Các phát biểu về đặc trưng của một nhóm các đối tượng**

- Ví dụ:
  - Tất cả xe ô tô mới phải được đăng kiểm.
  - Một số sinh viên UET tốt nghiệp loại xuất sắc.

- **Giải pháp**: sử dụng các lượng từ (**quantifiers**)
  - Lượng từ với mọi (Universal quantifier)
    - Đúng cho mọi đối tượng trong nhóm
  - Lượng từ tồn tại (Existential quantifier)
    - Đúng với ít nhất một đối tượng trong nhóm

Lô gích vị từ (Predicate logic)

- Khắc phục được những hạn chế của logic mệnh đề
- Lô gích vị từ:
  - Hằng: biểu diễn một đối tượng cụ thể
    - Ví dụ: “Đông”, “Nước Pháp”, “7”
  - Biến: biểu diễn các đối tượng của một loại/nhóm cụ thể (được định nghĩ bởi “tập vũ trụ” đang làm việc).
    - Ví dụ: x, y

  (tập vũ trụ có thể là: con người, sinh viên, số)
  - Vị từ: được định nghĩa trên 1, 2 hoặc nhiều biến, nhiều hằng.
    - – Thể hiện đặc trưng hoặc mối quan hệ giữa các đối tượng

  Ví dụ: Đỏ(xe23), UET(x), cưới(John,Ann)

Vị từ

- Thể hiện các đặc trưng hoặc các quan hệ giữa các đối tượng
  - Vị từ P(x) nhận giá trị Đúng (T) hoặc Sai (F) cho mỗi đối tượng x tuỳ thuộc vào việc thuộc tính (đặc trưng) có đúng hay không với x.
- Ví dụ:
  - Giả sử vị từ UET(x) được định nghĩa trên tập vũ trụ là con người
  - UET(Đông) …. T (nếu Đông là sinh viên UET)
  - UET(Cát) …. T (nếu Cát là sinh viên UET)
  - UET(Trang) ….. F (nếu Trang không phải là sinh viên UET)

Vị từ

- Giả sử vị từ P(x) thể hiện phát biểu sau:
  - x là một số nguyên tố

- Mỗi x sẽ có một giá trị chân lý khác nhau:
  - P(2) T
  - P(3) T
  - P(4) F
  - P(5) T
  - P(6) F

Tất cả phát biểu P(2), P(3), P(4), P(5), P(6) đều là các mệnh đề…

Nhưng P(x) không phải là một mệnh đề!

Các phát biểu lượng hoá

- Lô gích vị từ cho phép xây dựng các phát biểu về một nhóm các đối tượng.

- Sử dụng các lượng từ (Quantifiers):
  - **Lượng từ với mọi (universal)**
    - Ví dụ: ‘tất cả sinh viên tốt nghiệp UET đều phải qua môn TRR”
  - **Lượng từ tồn tại (existentia**l)
    - Ví dụ: ‘Có một vài sinh viên UET tốt nghiệp xuất sắc.’

Lượng từ với mọi

- Gán một biến vào một tập các giá trị/đối tượng trong tập vũ trụ đang xét.

- Ví dụ:
  - Cho P(x): x > x – 1. (Tập vũ trụ: số thực).
    - P(x) có phải là một mệnh đề không? Không. Có nhiều cách gán x.
    - ∀ x P(x) có phải là một mệnh đề không? Có.
    - Giá trị chân lý của ∀ x P(x) là gì?
    - – Đúng (*True*), vì P(x) đúng với mọi x.

Lượng từ tồn tại

- Gán một biến vào một vài giá trị/đối tượng trong tập vũ trụ đang xét.

- Ví dụ:
  - Cho T(x): x > 5 và x là các số thực.
    - T(x) có phải là một mệnh đề không?.
    - ∃x T(x) có phải là một mệnh đề không?.
    - Giá trị chân lý của ∃ x T(x) là gì?
      - *Đúng* (*True*).

Dịch các lượng từ

- Cho câu: "Tất cả sinh viên UET đều thông minh".

  - Giả sử: miền đang xét của x là sinh viên UET.
    - Dịch sang lô gích: $\forall$ x Smart(x)

  - Giả sử: miền đang xét của x là tất cả sinh viên:
    - $\forall$ x at(x,UET) $\rightarrow$ Smart(x)

  - Giả sử: miền đang xét của x là con người:
    - $\forall$ x student(x) $\wedge$ at(x,UET) $\rightarrow$ Smart(x)

Dịch các lượng từ

- Cho câu: Có ai đó ở UET rất thông minh.
  - Giả sử: miền đối tượng đang xét là tất cả cán bộ UET
    - $\exists$ x Thongminh(x)
  - Giả sử: tập vũ trụ đang xét là con người:
    - $\exists$ x Lamviec(x, UET) $\wedge$ Thongminh(x)

Dịch với lượng từ

- *Giả sử có 02 vị từ S(x) và P(x)*

❑ Phát biểu "với mọi" sẽ ngầm chỉ phép "kéo theo"

- *Tất cả S(x) đều P(x)*
  - □ $\forall x\ (\ S(x) \rightarrow P(x)\ )$
- *Không S(x) nào là P(x)*
  - □ $\forall x(\ S(x) \rightarrow \neg P(x)\ )$

❑ Phát biểu "tồn tại" sẽ ngầm chỉ phép "hội"

- *Một số S(x) là P(x)*
  - □ $\exists x\ (S(x) \wedge P(x)\ )$
- *Một vài S(x) không là P(x)*
  - □ $\exists x\ (S(x) \wedge \neg P(x)\ )$