Ứng dụng của định thức

Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

Tóm tắt

1. Định thức và ma trận nghịch đảo
2. Quy tắc Cramer
3. Định thức và hình học
   - Hình học phẳng
   - Hình học không gian

Tóm tắt

1. Định thức và ma trận nghịch đảo
2. Quy tắc Cramer
3. Định thức và hình học
   - Hình học phẳng
   - Hình học không gian

Ma trận phụ hợp

Định nghĩa

Xét ma trận vuông $A = (a_{ij})$. Gọi C_{ij} là phần bù đại số của A tương ứng với hàng i và cột j.

Ma trận phụ hợp *của A, ký hiệu là $adj(A)$, được định nghĩa bởi:*

$$adj(A) = (C_{ij})^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chú ý: Các phần bù đại số tương ứng với cùng một *hàng* của A tạo thành một *cột* của ma trận phụ hợp.

Ma trận phụ hợp

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = 4\,,\, C_{12} = 1\,,\, C_{13} = 2$$

$$C_{21} = 6\,,\, C_{22} = 0\,,\, C_{23} = 3$$

$$C_{31} = 7\,,\, C_{32} = 1\,,\, C_{33} = 2$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \times \operatorname{adj}(A) = ?$$

Ma trận phụ hợp

Định lý

Với mọi ma trận vuông A, $A \times adj(A) = \det(A) I_n$.

Hệ quả

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) \, .$$

Ma trận phụ hợp

Thí dụ:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ta biết A khả nghịch nếu và chỉ nếu $ad - bc \neq 0$. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Thí dụ:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Nhận xét: Phương pháp tính nghịch đảo này không hiệu quả khi n lớn.

Tóm tắt

Hệ 2 phương trình 2 ẩn

Xét hệ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Khi $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

Nếu gọi A_1 (A_2) là ma trận nhận được bằng cách thay cột 1 (cột 2) của A bằng vế phải thì nghiệm của hệ được viết lại thành:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}.$$

Quy tắc Cramer

Định lý

Xét hệ pttt n phương trình, n ẩn $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với A không suy biến. Khi đó nghiệm duy nhất của hệ được cho bởi

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

ở đó A_i là ma trận nhận được bằng cách thay cột i của A bằng $\mathbf{b}$.

Thí dụ:

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 1 \\ 2x \qquad\quad + \ z = 0 \\ 3x - 4y + 4z = 2 \end{cases}$$

Nhận xét: Phương pháp này chỉ áp dụng được cho các hệ pttt "vuông", và cũng không hiệu quả trong thực hành.

Tóm tắt

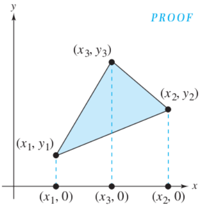
Diện tích tam giác

Định lý

Diện tích của tam giác có 3 đỉnh $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *và* (x_3, y_3) *được cho bởi công thức:*

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ở đó dấu được chọn sao cho diện tích là một số dương.



Hình: Larson et al., p. 164

Thí dụ: Tính diện tích tam giác có các đỉnh $(1, 0), (2, 2), (4, 3)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{3}{2}.$$

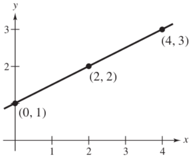
Điều kiện thẳng hàng

Định lý

Ba điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *và* (x_3, y_3) *thẳng hàng nếu và chỉ nếu*

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Chứng minh: Ba điểm thẳng hàng nếu và chỉ nếu diện tích "tam giác" tạo bởi chúng bằng 0.



Hình: Larson et al., p. 165

Thí dụ: Ba điểm $(0,1)\,,(2,2)\,,(4,3)$ thẳng hàng vì

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Phương trình đường thẳng

Định lý

Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *được xác định bởi phương trình:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Thí dụ: Đường thẳng đi qua $(2, 4)$ và $(-1, 3)$ có phương trình

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

hay $x - 3y + 10 = 0$.

Thể tích tứ diện

Định lý

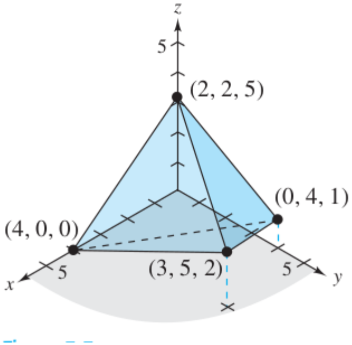
Thể tích của tứ diện có 4 đỉnh $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ *và* (x_4, y_4, z_4) *được cho bởi công thức:*

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

ở đó dấu được chọn sao cho thể tích là một số dương.

Thể tích tứ diện

Thí dụ:



Hình: Larson et al., p. 167

Điều kiện đồng phẳng và phương trình mặt phẳng

Định lý

Bốn điểm $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ *và* (x_4, y_4, z_4) *thuộc cùng một mặt phẳng nếu và chỉ nếu:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Điều kiện đồng phẳng và phương trình mặt phẳng

Định lý

Mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ *được xác định bởi phương trình:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Điều kiện đồng phẳng và phương trình mặt phẳng

Thí dụ: Xác định phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$, $(-2, -1, 1)$.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

$$5x - 9y + 6z = 5\,.$$