BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1 Phương trình, hệ phương trình tuyến tính, hệ bậc thang

Câu 1. Giải các phương trình sau và vẽ tập nghiệm trong không gian tương ứng.

(a) $2x - 5y = 10$

(b) $x + y + z = 1.$

Câu 2. Giải các hệ phương trình dạng bậc thang sau

(a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2y + z = 6 \\ 3z = 6 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15 \end{cases}$

Câu 3. Giải các hệ phương trình sau bằng cách đưa về dạng bậc thang:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 6 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 3y + 2z = 8 \\ 4x + y = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - z = 7 \\ x - 11y + 4z = 3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y + z + w = 6 \\ 2x + 3y - w = 0 \\ -3x + 4y + z + 2w = 4 \\ x + 2y - z + w = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 4x + 3y + 17z = 0 \\ 5x + 4y + 22z = 0 \\ 4x + 2y + 19z = 0 \end{cases}$

Câu 4. Giải các hệ phương trình sau:

(a) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 0 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} = -\dfrac{25}{6} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{3}{z} = 4 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{z} = 10 \\ -\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{13}{z} = -8 \end{cases}$

Câu 5. Biện luận số nghiệm các hệ phương trình sau theo k:

(a) $\begin{cases} 4x + ky = 6 \\ kx + y = -3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y + kz = 6 \\ 3x + 6y + 8z = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + kz = 3 \\ x + ky + z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ 2x + 7z = -3 \\ -3x + y + (k-8)z = 5 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} (k-1)x + 3y + 3z = 3 \\ 6x + 6y + 12z = 13 \\ 12x + 9y - z = 2 \end{cases}$

Câu 6. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình với tham số m, các ẩn x, y, z sau có nghiệm duy nhất? $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x + 7z = -3 \\ -3x + y + mz = 5 \end{cases}$

2 Ma trận của hệ phương trình tuyến tính, thuật toán Gauss

Câu 1. Xác định cỡ của các ma trận sau, xác định ma trận nào có dạng bậc thang, viết các hệ phương trình sao cho các ma trận trên là ma trận mở rộng của các hệ đó:

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính với ma trận mở rộng (ma trận tăng) sau:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

Câu 3. Giải các hệ phương trình sau bằng thuật toán Gauss:

(a) $\begin{cases} -3x + 5y = -22 \\ 3x + 4y = 4 \\ 4x - 8y = 32 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 3z = -2 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y - 5z = 3 \\ x - 2z = 1 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 24 \\ 2y - z = 14 \\ 7x - 5y = 6 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3x - 6y - 3z = -21 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x + y - z + 2w = -6 \\ 3x + 4y + w = 1 \\ x + 5y + 2z + 6w = -3 \\ 5x + 2y - z - w = 3 \end{cases}$

Câu 4. Xét ma trận $A := \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$.

(a) Giả sử A là ma trận mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính, tìm k để hệ có nghiệm.

(b) Giả sử A là ma trận hệ số của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, tìm k để hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 5. Xét ma trận $B := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & k \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Giả sử B là ma trận mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính, tìm k để hệ có nghiệm.

(b) Giả sử B là ma trận hệ số của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, tìm k để hệ có nghiệm duy nhất.

3 Thuật toán Gauss-Jodan

Câu 1. Trong các ma trận sau, xác định ma trận nào có dạng bậc thang thu gọn, nếu chưa hãy đưa về dạng thu gọn và tìm nghiệm của các hệ phương trình tương ứng (tức các hệ phương trình sao cho các ma trận trên là ma trận tăng của các hệ đó):

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -3 & 22 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 2. Giải các hệ phương trình sau bằng thuật toán Gauss-Jordan:

(a) $\begin{cases} 2x + 3z = 3 \\ 4x - 3y + 7z = 5 \\ 8x - 9y + 15z = 10 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 3 \\ 6x + 6y + 12z = 13 \\ 12x + 9y - z = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 6z = -9 \\ 3x - 2y + 11z = -16 \\ 3x - y + 7z = -11 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x + 5y - 19z = 34 \\ 3x + 8y - 31z = 54 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x + 12y - 7z - 20w = 22 \\ 3x + 9y - 5z - 28w = 30 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + 2y + 6z = 1 \\ 2x + 5y + 15z = 4 \\ 3x + y + 3z = -6 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ 2x + 2y = 5 \\ 2x - y + 6z = 2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 2x + y + z + 2w = -1 \\ 5x - 2y + z - 3w = 0 \\ -x + 3y + 2z + 2w = 1 \\ 3x + 2y + 3z - 5w = 12 \end{cases}$

Câu 3. Xác định k để hệ phương trình sau có đúng một nghiệm và tìm nghiệm đó:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x + ky + z = 0 \end{cases}$$

Câu 4. Biện luận số nghiệm các hệ phương trình sau theo các hằng số a, b, c:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ ax + by = -9 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ x + z = 2 \\ ax + by + cz = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + y + 2z = b \\ 3y + 3z = c \end{cases}$

Câu 5*. Xét hệ phương trình tuyến tính (P) với ma trận mở rộng sau $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & m & 0 \end{array}\right]$. Với giá trị nào của m thì ta có thể giải (P) bằng phương pháp Gauss-Jordan mà chỉ cần dùng duy nhất phép biến đổi sơ cấp "nhân một dòng (hàng) với một hằng số rồi cộng vào một dòng (hàng) khác?"

Câu 6*. Với giá trị nào của m, trong quá trình giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss, ta cần đổi chỗ hai dòng?

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3t = 0 \\ 4x + 5y + 2z + 5t = 0 \\ x + (m+1)y + 6z + 2t = 0 \\ 3x + 3y + z + t = 0 \end{cases}$$

4 Ma trận và các phép toán trên ma trận

Câu 1. Tìm $A+B,\ A-B,\ 2A,\ B+\frac{1}{2}A$ với $A,\ B$ là các ma trận sau:

(a) $A=\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tìm $AB^t,\ BA^t,\ A^tB$ với $A,\ B$ là các ma trận trong Câu 1.

Câu 3. Tìm X với: $A=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ và

(a) 3X+2A=B

(b) 2A-5B=3X

(c) X-3A+2B=O

(d) 6X-4A-3B=O

Câu 4. Cho các ma trận A, B thỏa mãn $A+2B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ và $2A+5B=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận B.

Câu 5. Chứng minh rằng $AC=BC$ không suy ra $A=B$ với các ma trận sau:

(a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Câu 6. Tìm nghiệm của các phương trình ma trận sau:

(a) $4\begin{bmatrix} x & y \\ z & -1 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} w & x \\ y & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} y & w \\ z & x \end{bmatrix}$

Câu 7. Giải các phương trình ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Câu 8. Tìm điều kiện để $AB=BA$ với: $A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Câu 9. Viết ma trận cột b thành tổ hợp tuyến tính của các cột của ma trận A với A, b là các ma trận sau:

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(d) $A=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} -22 \\ 4 \\ 32 \end{bmatrix}$

Câu 10. Xét các ma trận cột sau: $X=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Z=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $W=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $O=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a) Tìm a và b sao cho $Z = aX + bY$.

(b) Chứng minh rằng không tồn tại a và b sao cho $W = aX + bY$.

(c) Chứng minh rằng nếu $aX + bY + cW = O$ thì $a = b = c = 0$.

(d) Tìm $a,\ b$ và c sao cho $aX + bY + cZ = O$.

Câu 11. Tính A^5 và A^{10} với $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Câu 12. Tính A^n với $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Câu 13. Tìm m để $A^2 = I$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ m^2 - m & m & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 14. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ a & b \end{bmatrix}$ và $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm a và b để

(a) $A^2 = I$;

(b) $A = -I$.

Câu 15.* Anton nói tiếng Pháp và tiếng Đức; Geraldine nói tiếng Anh, Pháp và Ý; James nói tiếng Anh, tiếng Ý và tiếng Tây Ban Nha; Lauren nói tất cả các ngôn ngữ mà những người trên nói ngoại trừ tiếng Pháp; và không ai nói bất kỳ ngôn ngữ nào khác. Lập ma trận $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,5}}$ với các hàng mang thông tin bốn người nói trên và các cột mang thông tin ngôn ngữ họ nói. Đặt $a_{ij} = 1$ nếu người i nói ngôn ngữ j và $a_{ij} = 0$ nếu ngược lại. Giải thích ý nghĩa của ma trận AA^t và A^tA.

Câu 16.* Một công ty thực phẩm sản xuất 256 sản phẩm thực phẩm, tất cả đều được làm từ 91 nguyên liệu cơ bản, muốn thiết lập một cấu trúc dữ liệu đơn giản để họ có thể nhanh chóng rút ra câu trả lời cho các câu hỏi sau:

(a) Một sản phẩm nhất định chứa bao nhiêu thành phần?

(b) Một cặp nguyên liệu đã cho được sử dụng cùng nhau để tạo ra bao nhiêu sản phẩm?

(c) Hai sản phẩm đã cho có bao nhiêu thành phần chung?

(d) Có bao nhiêu sản phẩm được sử dụng một thành phần?

Đặc biệt, công ty muốn thiết lập một bảng theo cách:

(i) câu trả lời cho bất kỳ câu hỏi nào ở trên có thể được trích xuất một cách dễ dàng và nhanh chóng (tất nhiên là cho phép các phép toán trên ma trận); và

(ii) nếu một trong 91 thành phần được thêm vào hoặc xóa khỏi sản phẩm, thì chỉ cần thay đổi một mục duy nhất trong bảng.

Điều này có khả thi không? Giải thích.

5 Ma trận nghịch đảo

Câu 1. Chứng minh ma trận B là ma trận nghịch đảo của ma trận A với $A,\ B$ là các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu tồn tại):

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -10 \\ 7 & 16 & -21 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

Câu 3. Tìm $(AB)^{-1},\ (A^t)^{-1},\ A^{-2},\ (2B)^{-1}$ với:

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$

(c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4} & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Câu 4. Tìm x để $A = A^{-1}$ với

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 5. Tìm x để A không có ma trận nghịch đảo với A là các ma trận trong Câu 4.
Câu 6. Tìm A với

(a) $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $(4A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Câu 7. Viết các hệ phương trình tuyến tính sau dưới dạng ma trận $Ax = b$, sau đó tìm A^{-1} và tìm nghiệm của các hệ đó:

(a) $\begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ -x + y = -22 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 4y = -3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = -2 \\ 5x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y + z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

Câu 8. Cho ma trận vuông M thỏa mãn $3M^3 + 2M^2 + 5M + I = 0$ (trong đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với M). Vậy M có khả nghịch không? Nếu có tìm ma trận nghịch đảo của M.
Câu 9.* Cho A, B là hai ma trận thực khả nghịch. Giả sử

$$A^5 = I,\ AB^2 = BA \text{ và } B \neq I.$$

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho $B^k = I$?

6 Định thức, định lý Laplace

Câu 1. Tìm các định thức con và các phần bù đại số (hệ số kép, đối nhân tử) của các ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 4 & \lambda-1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \\ -8 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tính định thức của các ma trận trong Câu 1 bằng cách khai triển theo hàng và cột thứ 2.
Câu 3. Tính định thức của các ma trận sau bằng cách khai triển theo hàng hoặc theo cột:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 11 & 12 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Câu 4. Tìm x sao cho

(a) $\begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ 2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (d) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 3 \\ 2 & 2 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

Câu 5. Chứng minh

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$

(c) $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b)$

(d) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\Big(1+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\Big)$
$(a, b, c \neq 0)$

Câu 6. Với giá trị nào của x thì $\begin{vmatrix} 2 & 1+x & 1 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 0 & -3 & 2+x \end{vmatrix}$ đạt giá trị lớn nhất?

Câu 7.* Cho hai ma trận vuông A và B với $A^6 = 0$ và $AB = BA$. Chứng minh rằng nếu $\det B \neq 0$ thì $\det(A+B) \neq 0$.
Câu 8.* Cho $A \in M_2(\mathbb{R})$ thỏa mãn $\det A = -1$. Chứng minh rằng $\det\left(A^2 + I_2\right) \geq 4$.
Câu 9.** Cho các vectơ nguyên $v_1, \ldots, v_n$ trong $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $|\det(v_1, \ldots, v_n)| = 1$ thì đa diện $Ov_1 \ldots v_n$ không chứa điểm nguyên nào ngoài các đỉnh. Điều ngược lại có đúng không?

7 Các tính chất của định thức và ứng dụng

Câu 1. Tính định thức của các ma trận sau bằng cách sử dụng các phép toán cơ bản trên dòng hay cột:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 9 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 9 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tính $|A|$, $|B|$, AB, $|AB|$; sau đó kiểm tra lại $|A||B| = |AB|$:

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Câu 3. Tính $|A^t|$, $|A^2|$, $|AA^t|$, $|2A|$, $|A^{-1}|$ với

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Câu 4. Dùng ma trận phụ hợp để tính ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có thể):

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Câu 5. Dùng phương pháp Cramer để giải các hệ phương trình sau:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x + 3y + 5z = 1 \\ 3x + 5y + 9z = 2 \\ 5x + 9y + 17z = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x - y - z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ 5x - 2y - 2z = -1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 4 \\ 3x + 5y + 9z = 7 \\ 5x + 9y + 17z = 13 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x - 2y + 3z = -2 \\ 2x + 2y + 5z = 16 \\ 8x - 5y - 2z = 4 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \end{cases}$

Câu 6. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình sau theo k và giải hệ bằng phương pháp Cramer (với các giá trị k hệ có duy nhất nghiệm):

$$\begin{cases} kx + (1-k)y = 1 \\ (1-k)x + ky = 3 \end{cases}$$

Câu 7. Tính diện tích tam giác với tọa độ các đỉnh cho trước sau:

(a) $(0,0),(2,0),(0,3)$;

(b) $(1,1),(2,4),(4,2)$.

Câu 8. Kiểm tra xem các điểm sau có thẳng hàng hay không?

(a) $(1,2),(3,4),(5,6)$;

(b) $(-1,0),(1,1),(3,3)$.

Câu 9. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm sau:

(a) $(-4,7),(2,4)$;

(b) $(-2,3),(-2,-4)$.

Câu 10. Tính thể tích của đa diện với tọa độ các đỉnh như sau:

(a) $(1,1,1),(0,0,0),(2,1,-1),(-1,1,2)$;

(b) $(3,-1,1),(4,-4,4),(1,1,1),(0,0,1)$.

Câu 11. Kiểm tra xem các điểm sau có đồng phẳng hay không?

(a) $(-4,1,0),(0,1,2),(4,3,-1),(0,0,1)$;

(b) $(1,2,3),(-1,0,1),(0,-2,-5),(2,6,11)$;

(c) $(0,0,-1),(0,-1,0),(1,1,0),(2,1,2)$;

(d) $(1,2,7),(-3,6,6),(4,4,2),(3,3,4)$.

Câu 12. Viết phương trình mặt phẳng đi qua các điểm sau:

(a) $(1,-2,1),(-1,-1,7),(2,-1,3)$;

(b) $(0,-1,0),(1,1,0),(2,1,2)$;

(c) $(0,0,0),(1,-1,0),(0,1,-1)$;

(d) $(1,2,7),(4,4,2),(3,3,4)$.

Câu 13. Với mỗi ký tự trong bảng chữ cái và ký tự trống _, ta gán cho một số thứ tự như sau:

$$\begin{array}{lllllllll} \_=0 & A=1 & B=2 & C=3 & D=4 & E=5 & F=6 & G=7 & H=8 \\ I=9 & J=10 & K=11 & L=12 & M=13 & N=14 & O=15 & P=16 & Q=17 \\ R=18 & S=19 & T=20 & U=21 & V=22 & W=23 & X=24 & Y=25 & Z=26. \end{array}$$

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Với mỗi thông điệp cho trước, ta chia thông điệp đó thành cụm 3 ký tự và viết thành ma trận D như ví dụ sau:

$$\text{Thông điệp: } \begin{array}{cccccc} T & H & U & \_ & B & A \\ 20 & 8 & 21 & 0 & 2 & 1, \end{array} \quad D = \begin{bmatrix} 20 & 8 & 21 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ma trận $DA = \begin{bmatrix} 20 & 8 & 21 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 49 & 70 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận mã hóa của "THU BA" bằng ma trận A. Hỏi ma trận $B = \begin{bmatrix} 27 & 42 & 56 \\ 29 & 30 & 55 \end{bmatrix}$ là ma trận mã hóa của từ nào bằng ma trận A?

Câu 14. Tương tự câu trên, cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Hỏi ma trận $B = \begin{bmatrix} 33 & 51 & 60 \\ 30 & 31 & 56 \end{bmatrix}$ là ma trận mã hóa của từ nào bằng ma trận A?

8 Không gian vector, không gian con

Câu 1. Cho các vector sau $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 2, -1)$, và $w = (4, 0, -4)$.

(a) Tìm $v-u$, $u-v+2w$, $2u+4v-w$, $5u-3v-\frac{1}{2}w$.

(b) Tìm z sao cho $2z - 3u = w$.

(c) Tìm z sao cho $2u + v - w + 3z = 0$.

Câu 2. Xác định vector không và phần tử đối của một phần tử trong các không gian vector sau với phép cộng và phép nhân thông thường:

(a) $\mathbb{R}^4$

(b) $M_{2,3}$

(c) P_3 với P_3 là không gian các đa thức có bậc bị chặn bởi 3.

Câu 3. Với phép cộng và phép nhân thông thường, trong các tập hợp sau, tập nào là không gian vector:

(a) Tập các đa thức bậc 1 có dạng $f(x) = ax + b$;

(b) Tập các đa thức bậc 1 có dạng $f(x) = ax$ với $a \neq 0$;

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$;

(d) Tập các ma trận có dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$;

(e) Tập các ma trận có dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$;

(f) Tập các ma trận 3×3 có định thức bằng 0;

(g) Tập các ma trận 3×3 có định thức khác 0.

Câu 4. $\mathbb{R}^2$ với một trong các cặp phép toán sau có phải không gian vector không?

(a) $(x_1, y_1) \uplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ và $c * (x, y) = (cx, y)$;

(b) $(x_1, y_1) \uplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ và $c * (x, y) = (\sqrt{c}x, \sqrt{c}y)$;

(c) $(x_1, y_1) \uplus (x_2, y_2) = (x_1, 0)$ và $c * (x, y) = (cx, cy)$;

(d) $(x_1, y_1) \uplus (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$ và $c * (x, y) = (cx, cy)$;

Câu 5. $\mathbb{R}^3$ với một trong các cặp phép toán sau có phải không gian vector không?

(a) $(x_1, y_1, z_1) \uplus (x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$ và $c * (x, y, z) = (cx, cy, cz)$;

(b) $(x_1, y_1, z_1) \uplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1, z_1 + z_2 + 1)$ và $c * (x, y, z) = (cx, cy, cz)$;

Câu 6. Với phép cộng và phép nhân thông thường, W có là không gian con của V với:

(a) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : z = 2x + 3y\}$;

(b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix} \in V = M_{2,2} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

(c) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \in V = M_{3,2} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

(d) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : z = 1\}$;

(e) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Z}\}$;

(f) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Q}\}$;

(g) $W = \{(x, y) \in V = \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$;

(h) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : z = 1/x, x \neq 0\}$;

(i) $W = \{(x, y, z) \in V = \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$;

(j) $W = \{x \in V = \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ với A là một ma trận cỡ $m \times n$ cho trước;

(k) $W = \{x \in V = \mathbb{R}^n : Ax = b \neq 0\}$ với A là một ma trận cỡ $m \times n$ cho trước.

9 Tổ hợp tuyến tính, độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Câu 1. Trong các vector u, v, w sau, vector nào là tổ hợp tuyến tính các vector trong S, với:

(a) $S = \{(2,-1,3),(5,0,4)\},\ u = (1,1,-1),\ v = (-1,-2,2),\ w = (1,-8,12)$;

(b) $S = \{(1,2,-2),(2,-1,1)\},\ u = (1,-5,-5),\ v = (-4,-3,3),\ w = (-2,-6,6)$.

Câu 2. Cho các vector $u = (1,2),\ v = (1,-1)$. Nếu có thể, hãy viết các vector sau thành tổ hợp tuyến tính của u và v:

(a) $(2,1)$; (b) $(3,0)$; (c) $(0,3)$; (d) $(1,-1)$.

Câu 3. Nếu có thể, hãy viết z thành tổ hợp tuyến tính của $u,\ v$ và w với:

(a) $z = (10,1,4)$ với $u = (2,3,5),\ v = (1,2,4),\ w = (-2,2,3)$;

(b) $z = (-1,7,2)$ với $u = (1,3,5),\ v = (2,-1,3),\ w = (-3,2,-4)$;

(c) $z = (0,5,3,0)$ với $u = (1,1,2,2),\ v = (2,3,5,6),\ w = (-3,1,-4,2)$;

(d) $z = (2,5,-4,0)$ với $u = (1,3,2,1),\ v = (2,-2,-5,4),\ w = (2,-1,3,6)$.

Câu 4. Trong các tập sau, xác định tập nào độc lập tuyến tính, tập nào phụ thuộc tuyến tính:

(a) $\{(0,0),(1,2)\}$;

(b) $\{(1,0),(1,1),(2,-1)\}$;

(c) $\{(1,-4,1),(6,3,2)\}$;

(d) $\{(6,2,1),(-1,3,2)\}$;

(e) $\{(1,1,1),(2,2,2),(1,2,3)\}$;

(f) $\{(-4,-3,4),(1,-2,3),(6,0,0)\}$;

(g) $\{(1,0,0),(0,4,0),(0,0,-6),(1,5,-3)\}$;

(h) $\{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}$.

Câu 5. Tìm một tổ hợp tuyến tính không tầm thường bằng 0 của mỗi tập các vector sau:

(a) $\{(3,4),(-1,1),(2,0)\}$;

(b) $\{(2,4),(-1,-2),(0,6)\}$;

(c) $\{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$;

(d) $\{(1,2,3,4),(1,0,1,2),(1,4,5,6)\}$.

Câu 6. Với giá trị t nào, mỗi tập sau đây là độc lập tuyến tính:

(a) $\{(t,1,1),(1,t,1),(1,1,t))\}$;

(b) $\{(t,1,1),(1,0,1),(1,1,3t))\}$;

(c) $\{(t,0,0),(0,1,0),(0,0,1))\}$;

(d) $\{(t,t,t),(t,1,0),(t,0,1))\}$.

Câu 7. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Trong các ma trận sau, ma trận nào là tổ hợp tuyến tính của A và B?

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & -19 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & 28 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$

Câu 8. Các ma trận sau $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 22 & 23 \end{bmatrix}$ có phụ thuộc tuyến tính không?

Câu 9. Trong các tập sau, xác định tập nào độc lập tuyến tính, tập nào phụ thuộc tuyến tính trong P_2:

(a) $\{2-x, 2x-x^2, 6-5x+x^2\}$;

(b) $\{x^2-1, 2x+5\}$;

(c) $\{x^2+3x+1, 2x^2+x-1, 4x\}$;

(d) $\{x^2, x^2+1\}$;

Câu 10. Cho a, b, c là các số thực phân biệt. Chứng minh rằng các vectơ $(1, 1, 1), (a, b, c), (a^2, b^2, c^2)$ lập thành một tập con độc lập tuyến tính của $\mathbb{R}^3$.
Câu 11. Cho $\{u, v, w\}$ là một tập độc lập tuyến tính trong không gian vectơ V. Chứng minh rằng tập $\{u+v, v+w, w+u\}$ độc lập tuyến tính trong V.

10 Tập sinh, không gian con sinh bởi một tập vector

Câu 1. Trong các tập sau, tập nào là hệ sinh của $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(2,1), (-1,2)\}$

(b) $\{(1,1)\}$

(c) $\{(1,-2), (-3,9)\}$

(d) $\{(1,3), (-2,-6), (3,9)\}$

(e) $\{(-1,4), (4,-1), (1,1)\}$

(f) $\{(1,-2), (-2,1), (1,1)\}$

Câu 2. Trong các tập sau, tập nào là tập sinh của $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(4,7,3), (-1,2,6), (2,-3,5)\}$

(b) $\{(6,7,6), (3,2,-4), (1,-3,2)\}$

(c) $\{(-2,5,0), (4,6,3)\}$

(d) $\{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$

(e) $\{(1,-2,0), (0,0,1), (-1,2,0)\}$

(f) $\{(1,0,3), (2,0,-1), (4,0,5), (2,0,6)\}$

Câu 3. Tập $\{1, x^2, x^2+2\}$ có phải là tập sinh của P_2?
Câu 4. Tập $\{x^2-2x, x^3+8, x^3-x^2, x^2-4\}$ có phải là tập sinh của P_3?
Câu 5. Trong $\mathbb{R}^3$, xét hai không gian con

$$V_1 = \text{span}\{(1,2,1), (1,0,2)\} \quad \text{và} \quad V_2 = \text{span}\{(3, m^2, 4), (2m-2, m, 3)\}.$$

Tìm m để $V_1 = V_2$.

11 Cơ sở và số chiều

Câu 1. Viết cơ sở chính tắc của các không gian sau:

(a) $\mathbb{R}^4$ (b) $M_{2,3}$ (c) $M_{2,2}$

Câu 2. Xác định tập nào trong các tập sau là cơ sở của $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(1,2),(1,0),(0,1)\}$ (b) $\{(1,1)\}$ (c) $\{(-4,5),(0,0)\}$ (d) $\{(1,2),(3,4)\}$

Câu 3. Xác định tập nào trong các tập sau là cơ sở của $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(1,3,0),(4,1,2),(-2,5,-2)\}$ (b) $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$ (c) $\{(1,5,3),(0,1,2),(0,0,6)\}$

Câu 4. Xác định tập nào trong các tập sau là cơ sở của P_2:

(a) $\{1, 2x, x^2-4, 5x\}$

(b) $\{1-x, 1-x^2, 3x^2-2x-1\}$

(c) $\{6x-3, 3x^2, 1-2x-x^2\}$

(d) $\{x-1, x^2-1, 1-2x-x^2\}$

Câu 5. Chứng minh các tập sau là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và biểu diễn $u=(8,3,8)$ qua cơ sở đó:

(a) $\{(4,3,2),(0,3,2),(0,0,2)\}$ (b) $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ (c) $\{(1,4,7),(3,0,1),(2,1,2)\}$

Câu 6. Xác định tập nào trong các tập sau là cơ sở của $M_{2,2}$:

(a) $\left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$

Câu 7. Tìm một cơ sở của không gian các ma trận cấp 2 đối xứng và số chiều của không gian đó.
Câu 8. Tìm một cơ sở của không gian các ma trận cấp 3 đối xứng và số chiều của không gian đó.
Câu 9. Tìm tất cả các tập con là cơ sở của $\mathbb{R}^2$ của tập sau $\{(1,0),(0,1),(1,2)\}$.
Câu 10. Tìm tất cả các tập con là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ của tập sau $\{(1,3,-2),(-4,1,1),(-2,7,-3),(2,1,1)\}$.
Câu 11. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^2$ chứa $\{(1,1)\}$.
Câu 12. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ chứa $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$.
Câu 13. Tìm một cơ sở, số chiều và mô tả hình học các không gian con của $\mathbb{R}^2$ sau:

(a) $W=\{(2t,t):\ t\in\mathbb{R}\}$ (b) $W=\{(0,t):\ t\in\mathbb{R}\}$

Câu 14. Tìm một cơ sở, số chiều và mô tả hình học các không gian con của $\mathbb{R}^3$ sau:

(a) $W=\{(2t,t,-t):\ t\in\mathbb{R}\}$ (b) $W=\{(2s-t,s,t):\ t,s\in\mathbb{R}\}$

Câu 15. Tìm một cơ sở, số chiều của các không gian con của $\mathbb{R}^4$ sau:

(a) $W=\{(2s-t,s,t,s):\ t,s\in\mathbb{R}\}$

(b) $W=\{(5t,-3t,t,t):\ t\in\mathbb{R}\}$

(c) $W=\{(t,2s-3t,w,t):\ t,s,w\in\mathbb{R}\}$

12 Hạng của ma trận, tập nghiệm hệ phương trình tuyến tính

Câu 1. Tìm hạng, 1 cơ sở cho không gian dòng và 1 cơ sở cho không gian cột của các ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \\ 8 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -6 & -4 \\ -2 & -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & -6 \\ 7 & 14 & -6 & -3 \\ -2 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Câu 2. Tìm một cơ sở cho không gian con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi S với S là một trong các tập sau:

(a) $\{(1,2,4),(-1,3,4),(2,3,1)\}$

(b) $\{(4,2,-1),(1,2,-8),(0,1,2)\}$

(c) $\{(1,1,2),(4,4,8),(1,1,1)\}$

(d) $\{(1,2,2),(-1,0,0),(1,1,1)\}$

Câu 3. Tìm một cơ sở cho không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi S với S là một trong các tập sau:

(a) $\{(2,9,-2,53),(-3,2,3,-2),(8,-3,-8,17),(0,-3,0,15)\}$

(b) $\{(2,5,-3,-2),(-2,-3,2,-5),(1,3,-2,2),(-1,-5,3,5)\}$

Câu 4. Tìm một cơ sở và chiều của không gian nghiệm của $Ax = 0$ với A là một trong các ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

Câu 5. Tìm một cơ sở và chiều của không gian nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

(a) $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - 4y - 5z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + 6y - 9z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ -3x - 6y + 12z = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x + 3y + 15z + 11t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \\ 2x + 3y + 11z + 8t = 0 \end{cases}$

Câu 6. Các phương trình $Ax = b$ sau có nghiệm hay không? Nếu có hãy viết nghiệm dưới dạng $x = x_h + x_p$ với x_h là nghiệm của hệ thuần nhất $Ax = 0$ và x_p là một nghiệm của hệ $Ax = b$:

(a) $\begin{cases} x + 3y + 10z = 18 \\ -2x + 7y + 32z = 29 \\ -x + 3y + 14z = 12 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x - 6y + z = 12 \\ -7x + 14y + 4z = -28 \\ 2x - 4y + 5z = 8 \end{cases}$

Câu 7. Xác định b có nằm trong không gian cột của A hay không, nếu có hãy viết b thành tổ hợp tuyến tính của các vector cột của A:

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

13 Tọa độ và chuyển cơ sở

Câu 1. Tìm tọa độ của các đa thức sau trong cơ sở chính tắc của P_2 :

(a) $p = x^2 + 11x + 4$

(b) $p = 3x^2 + 114x + 13$

(c) $p = -2x^2 + 5x + 1$

(d) $p = 4x^2 - 3x - 2$

Câu 2. Tìm tọa độ của x trong cơ sở chính tắc từ tọa độ của x trong cơ sở B với:

(a) $B = \{(2, -1), (0, 1)\},\ [x]_B = [4, 1]^t$

(b) $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\},\ [x]_B = [2, 3, 1]^t$

(c) $B = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\},\ [x]_B = [1, -2, 3, -1]^t$

Câu 3. Tìm tọa độ của x trong cơ sở B với:

(a) $B = \{(-6, 7), (4, -3)\},\ x = (-26, 32)$

(b) $B = \{(8, 11, 0), (7, 0, 10), (1, 4, 6)\},\ x = (3, 19, 2)$

(c) $B = \{(9, -3, 15, 4), (3, 0, 0, 1), (0, -5, 6, 8), (3, -4, 2, -3)\},\ x = (0, -20, 7, 15)$

Câu 4. Không dùng Gauss-Jordan, tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B' với:

(a) $B = \{(1, 0), (0, 1)\},\ B' = \{(2, 4), (1, 3)\}$

(b) $B = \{(1, 1), (1, 0)\},\ B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$

(c) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},\ B' = \{(1, 0, 0), (0, 2, 8), (6, 0, 12)\}$

(d) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},\ B' = \{(1, 3, -1), (2, 7, -4), (2, 9, -7)\}$

Câu 5. Tìm ma trận chuyển cơ sở P từ B sang B' và ma trận chuyển cơ sở Q từ B' sang B, kiểm tra lại $P = Q^{-1}$ và tìm $[x]_B$ với:

(a) $B = \{(1, 3), (-2, -2)\},\ B' = \{(-12, 0), (-4, 4)\},\ [x]_{B'} = [-1, 3]^t$

(b) $B = \{(2, -2), (6, 3)\},\ B' = \{(1, 1), (32, 31)\},\ [x]_{B'} = [2, -1]^t$

(c) $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 3), (1, 1, 1)\},\ B' = \{(2, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 2, 1)\},\ [x]_{B'} = [1, 2, -1]^t$

(d) $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\},\ B' = \{(2, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\},\ [x]_{B'} = [2, 3, 1]^t$

Câu 6. Tìm tọa độ của X trong cơ sở $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ của $M_{3,1}$ với

(a) $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(c) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(d) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

14 Không gian Euclid $\mathbb{R}^n$

Câu 1. Tìm độ dài, một vectơ cùng hướng, một vectơ ngược hướng của các vectơ sau:

(a) $v = (2, 0, -4, 5)$;

(b) $v = (1, -3, -5, 6, 2)$.

Câu 2. Cho $v = (8, 8, 6)$. Tìm u sao cho:

(a) u cùng hướng với v và có độ dài gấp đôi;

(b) u ngược hướng với v và có độ dài bằng một nửa.

Câu 3. Tìm khoảng cách và tích vô hướng giữa các vectơ sau:

(a) $u = (1, 2, -4, 3)$ và $v = (5, 1, 2, 3)$;

(b) $u = (1, -3, -5, 4, 2)$ và $u = (2, -1, -2, 3, 1)$;

(c) $u = (0, 1, 2, 3)$ và $v = (1, 0, 4, -1)$.

Câu 4.

(a) Giả sử $\|u\|^2 = 4,\ \|v\|^2 = 10$ và $\langle u, v\rangle = -5$. Tìm $\langle u + v, 2u - v\rangle$;

(b) Giả sử $\|u\|^2 = 8,\ \|v\|^2 = 6$ và $\langle u, v\rangle = 7$. Tìm $\langle 3u - v, u - 3v\rangle$.

Câu 5. Kiểm tra bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức tam giác cho các cặp vectơ sau:

(a) $u = (1, 1, -2)$ và $v = (1, -3, -2)$;

(b) $u = (1, 2, 3, 4)$ và $v = (4, 3, 2, 1)$;

(c) $u = (1, 1, 1)$ và $v = (0, 1, -2)$;

(d) $u = (-1, 1, -1, 1)$ và $v = (1, 2, 3, 4)$.

Câu 6. Tìm góc giữa các vectơ sau:

(a) $u = (3, 1)$ và $v = (-2, 4)$;

(b) $u = (1, 0, 1, 0)$ và $v = (3, 3, 3, 3)$;

(c) $u = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$ và $v = \left(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

(d) $u = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$ và $v = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 7. Tìm các vectơ vuông góc với vectơ sau và tìm một cơ sở của không gian con lập bởi các vectơ đó:

(a) $u = (2, 7)$;

(b) $u = (2, -1, 1)$;

(c) $u = (0, 0, -1, 1)$.

Câu 8. Xác định các vectơ sau có vuông góc hay song song với nhau không bằng cách tìm góc giữa chúng:

(a) $u = (\cos x, \sin x, -1)$ và $v = (\sin x, -\cos x, 0)$;

(b) $u = (-\sin x, \cos x, 1)$ và $v = (\sin x, -\cos x, 0)$.

Câu 9. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cùng với tích chấm (tích vô hướng thông thường) xét 3 vector

$$v_1 = (1, m, m), \quad v_2 = (2, m - 1, 2), \quad v_3 = (m, 2, 1).$$

Tìm m để ba vector trên có độ dài bằng nhau.

15 Không gian Euclid trừu tượng

Câu 1. Tìm $\langle u,v\rangle$, $\|u\|$, $\|v\|, d(u,v)$ theo tích vô hướng tương ứng:

(a) $u=(4,3)$ và $v=(0,5)$, với $\langle u,v\rangle = 3u_1v_1+u_2v_2$;

(b) $u=(1,1,1)$ và $v=(2,5,2)$, với $\langle u,v\rangle = u_1v_1+2u_2v_2+3u_3v_3$;

Câu 2. Tìm $\langle A,B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|, d(A,B)$ theo tích vô hướng sau $\langle A,B\rangle = 2a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+2a_{22}b_{22}$:

(a) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3\\ 4 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$;

(b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$.

Câu 3. Giải thích tại sao $\langle u,v\rangle$ không là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$ trong các trường hợp sau:

(a) $\langle u,v\rangle = u_1v_1$;

(b) $\langle u,v\rangle = u_1v_1-u_2v_2$;

(c) $\langle u,v\rangle = u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2$;

(d) $\langle u,v\rangle = u_1u_2+v_1v_2$.

Câu 4. Kiểm tra bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức tam giác theo tích vô hướng tương ứng:

(a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -3 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ với $\langle A,B\rangle = 2a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+2a_{22}b_{22}$;

(b) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ với $\langle A,B\rangle = a_{11}b_{11}+2a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+2a_{22}b_{22}$.

Câu 5. Tìm góc giữa các vectơ sau theo tích vô hướng tương ứng:

(a) $u=(-4,3)$ và $v=(0,5)$, với $\langle u,v\rangle = 3u_1v_1+u_2v_2$;

(b) $u=(1,1,1)$ và $v=(2,-2,2)$, với $\langle u,v\rangle = u_1v_1+2u_2v_2+u_3v_3$.

Câu 6. Tìm $\mathrm{proj}_u v$ và $\mathrm{proj}_v u$ với

(a) $u=(1,2)$ và $v=(2,1)$, vẽ $\mathrm{proj}_u v$ và $\mathrm{proj}_v u$ trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$;

(b) $u=(-1,3)$ và $v=(4,4)$, vẽ $\mathrm{proj}_u v$ và $\mathrm{proj}_v u$ trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$;

(c) $u=(1,3,-2)$ và $v=(0,-1,1)$;

(d) $u=(0,1,3,-6)$ và $v=(-1,1,2,2)$.

Câu 7. Cho $u=(5,1,4)$ và $v=(2,1,-1)$. Hỏi u và v có trực giao nhau theo tích vô hướng $\langle u,v\rangle = u_1v_1+2u_2v_2+3u_3v_3$ không? Hỏi u và v có trực giao với nhau theo tích vô hướng Euclid không?

Câu 8. Tìm các vectơ vuông góc với vectơ sau theo tích vô hướng tương ứng và tìm một cơ sở của không gian con lập bởi các vectơ đó:

(a) $w=(2,7)$ với $\langle u,v\rangle = u_1v_1+3u_2v_2$;

(b) $w=(2,-1,1)$ với $\langle u,v\rangle = 2u_1v_1+3u_2v_2+u_3v_3$;

(c) $w=(-1,1,-1,1)$ với $\langle u,v\rangle = u_1v_1+3u_2v_2+3u_3v_3+u_4v_4$.

Câu 9. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ xét tích trong

$$\langle u,v\rangle = u_1v_1+2u_2v_2+u_3v_3, \quad \text{với} \quad u=(u_1,u_2,u_3), v=(v_1,v_2,v_3).$$

Cho $p=(m^2,2m+1,2)$ và $q=(1,1,1)$. Tìm m để $\langle p,q\rangle$ đạt giá trị nhỏ nhất.

16 Cơ sở trực giao, trực chuẩn, trực giao hóa Gram-Schmidt

Câu 1. Các tập sau có phải cơ sở trực giao hay trực chuẩn hay không:

(a) $S = \{(4, -1, 1), (-1, 0, 4), (-4, -17, -1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$;

(b) $S = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$ trong $\mathbb{R}^3$;

(c) $S = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

Câu 2. Viết tọa độ của x trong cơ sở trực chuẩn tương ứng:

(a) $S = \left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$, $x = (-3, 4)$;

(b) $S = \left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), (0, 0, 1)\right\}$, $x = (5, 10, 15)$.

Câu 3. Dùng phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt để đưa các cơ sở sau về dạng trực chuẩn:

(a) $S = \{(1, -2, 2), (2, 2, 1), (2, -1, -2)\}$;

(b) $S = \{(4, -3, 0), (1, 2, 0), (0, 0, 4)\}$;

(c) $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$;

(d) $S = \{(0, 1, 2), (2, 0, 0), (1, 1, 1)\}$;

(e) $S = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$;

Câu 4. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian nghiệm của các hệ phương trình thuần nhất sau:

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

(d) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

Câu 5. Các không gian con sau có trực giao với nhau không:

(a) $V_1 = \text{span}\{(2, 1, -1), (0, 1, 1)\}$ và $V_2 = \text{span}\{(-1, 2, 0)\}$;

(b) $V_1 = \text{span}\{(0, 0, 2, 1), (0, 0, 1, -2)\}$ và $V_2 = \text{span}\{(3, 2, 0, 0), (0, 1, -2, 0)\}$.

Câu 6. Tìm phần bù trực giao của các không gian sau:

(a) $V = \text{span}\{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$;

(b) $V = \text{span}\{(1, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\}$.

Câu 7. Tìm hình chiếu của v lên không gian con V theo 2 cách (trực giao/chuẩn hóa Gram-Schmidt và bình phương nhỏ nhất) với:

(a) $V = \text{span}\{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ và $v = (1, 0, 1, 1)$;

(b) $V = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ và $v = (2, 3, 4)$.

Câu 8. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cùng với tích chấm (tích vô hướng thông thường), gọi W là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x - 2y + z + w = 0. \end{cases}$$

Tìm hình chiếu vuông góc của vector $v = (1, 1, 1, 1)$ lên W.

17 Ánh xạ tuyến tính, ảnh, hạt nhân, định lý hạng

Câu 1. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x, 1)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$;

(d) $T : M_{2,2} \to \mathbb{R},\ T(A) = |A| = \det A$;

(e) $T : M_{3,3} \to M_{3,3},\ T(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$;

(f) $T : M_{2,2} \to M_{2,2},\ T(A) = A^T$.

Câu 2. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ với $T(1, 0, 0) = (2, 4, -1),\ T(0, 1, 0) = (1, 3, -2)$ và $T(0, 0, 1) = (0, -2, 2)$, tìm

(a) $T(0, 3, -1)$;

(b) $T(2, -1, 0)$.

Câu 3. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ với $T(1, 1, 1) = (2, 0, -1),\ T(0, -1, 2) = (-3, 2, -1)$ và $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$, tìm

(a) $T(2, 1, 0)$;

(b) $T(2, -1, 1)$.

Câu 4. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, tìm $T(2, 4)$ và $T^{-1}(-1, 2, 2)$.

Câu 5. Tìm hạch (hạt nhân) của các ánh xạ tuyến tính sau:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, 0, z)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (z, y, x)$.

Câu 6. Tìm một cơ sở của $\ker T$ và một cơ sở của $\mathrm{im}T$ với T là ánh xạ tuyến tính cho bởi $T(v) = Av$ với:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Xác định số chiều của $\ker T$ và hạng của T trong từng trường hợp.

Câu 7. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ với

$$T(1, 0) = (1, 1) \text{ và } T(0, 1) = (1, 0).$$

Khi đó T biến tam giác MNP với các đỉnh $M = (0, 0),\ N = (1, 0),\ P(1, 1)$ thành một tam giác có diện tích là bao nhiêu?

18 Ma trận của một ánh xạ tuyến tính, ánh xạ hợp, ánh xạ ngược

Câu 1. Tìm ma trận chuẩn tắc của các ánh xạ tuyến tính T sau:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x + 2y, x - 2y)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (2x - 3y, x - y, z)$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (0, 0, 0)$;

(d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4)$.

Câu 2. Tìm ma trận chuẩn tắc của các ánh xạ tuyến tính $T = T_2 \circ T_1$ với:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$,
$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x, y) = (2x, x - y)$;

(b) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_1(x, y) = (x - 2y, x + y, x - y)$,
$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x, y, z) = (x - 3y, 3x + z)$;

(c) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T_1(x, y, z) = (x - 3y, 3x + z)$,
$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_2(x, y) = (x - 2y, x + y, x - y)$.

Câu 3. Xét các ánh xạ sau:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T_1(v) = -v$;

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T_2(x, y, z) = -(x + 1, y + z)$;

(c) T_3 là phép chiếu của $\mathbb{R}^3$ lên trục hoành $Ox : T(x, y, z) = (x, 0, 0)$.

Những ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính? Giải thích câu trả lời. Tìm ma trận chính tắc (chuẩn tắc) của các ánh xạ tuyến tính này.

Câu 4. Trong các ánh xạ tuyến tính sau, ánh xạ nào là đẳng cấu tuyến tính? Nếu có tìm ánh xạ ngược:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$;

(c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2, x_2, x_3 + x_4, x_3)$;

(d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_3, x_2, x_1)$.

Câu 5. Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính T trong các cơ sở B, B', sau đó tính $[v]_B$ và $[T(v)]_{B'}$ (tọa độ của $T(v)$ trong cơ sở B') với: (Gợi ý: $[T(v)]_{B'} = A[v]_B$)

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (2x - 12y, x - 5y),\quad v = (10, 5)$,
$B = B' = \{(4, 1), (3, 1)\}$;

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (x + y, x, y),\quad v = (5, 4)$,
$B = \{(1, -1), (0, 1)\},\ B' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z) = (x - y, y - z),\quad v = (1, 2, -3)$,
$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\},\ B' = \{(1, 2), (1, 1)\}$;

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2z, 2y - z),\quad v = (4, -5, 10)$,
$B = \{(2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 1)\},\ B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

Câu 6. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 3z, 2x - y + z).$$

(a) Tìm ma trận của T trong cở sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm ma trận của T trong cơ sở $\{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Câu 7. Gọi V là không gian tất cả các đa thức hệ số thực biến x với bậc nhỏ hơn hay bằng 2. Xét ánh xạ $T : V \to \mathbb{R}^3$ cho bởi: với $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V$ thì

$$T(p) = (p(1), p(2), p(3)) = (a_0 + a_1 + a_2, a_0 + 2a_1 + 4a_2, a_0 + 3a_1 + 9a_2)\,.$$

(a) Chứng minh rằng T là một ánh xạ tuyến tính. Tìm ma trận của T đối với cơ sở $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ của V và cơ sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm hạt nhân (hay không gian hạch) của T.

Câu 8. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x - 4y + 3z, -x + 3y - z).$$

(a) Tìm ma trận của T đối với các cở sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

(b) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker T$ của T.

(c) Tìm số chiều của không gian ảnh $\mathrm{im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$.

(d) Tập $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = (0, 1)\}$ có phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không? Tại sao?

Câu 9. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 3y + z, 4x + 7y - z).$$

(a) Tìm ma trận của T đối với các cở sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$.

(b) Xác định xem $(0, 3, 3)$ có nằm trong ảnh của T hay không?

(c) Tìm một cơ sở của không gian ảnh $\mathrm{im}(T)$ của T.

Câu 10. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x - z, 2x - y - 2z, -x + 2y + z).$$

(a) Tìm ma trận chính tắc (chuẩn tắc) của T.

(b) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker T$. Ánh xạ T có phải là đơn cấu không? Vì sao?

(c) Véc tơ $(0, -1, 1)$ có thuộc không gian ảnh $\mathrm{im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$ hay không? Vì sao?

Câu 11. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x + 2z, x - y + 2z, 2x + y + 4z).$$

(a) Tìm ma trận chính tắc (chuẩn tắc) của T.

(b) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker T$.

(c) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian ảnh $\mathrm{im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$. T có phải là toàn cấu không? Vì sao?

Câu 12. Cho $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính cho bởi:

$$T(x, y, z) = (x + 16y - 12z, 2x + 5y - 2z, -z).$$

Cho B là cơ sở chính tắc (chuẩn tắc) từ $\mathbb{R}^3$ và $B' = \{(2, 1, 0), (-1, 1, 0), (-2, 1, 1)\}$.

(a) Chứng minh rằng B' là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm ma trận của T đối với cơ sở B, và ma trận của T đối với cơ sở B'.

19 Ma trận đồng dạng

Câu 1. Tìm ma trận A' của ánh xạ tuyến tính T trong cơ sở B', sau đó chỉ ra rằng A' đồng dạng với ma trận A của T trong cơ sở chuẩn tắc B (Hướng dẫn: Tìm ma trận P chuyển cơ sở từ B' sang B, sau đó tìm P^{-1} rồi kiểm tra $A' = P^{-1}AP$):

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (2x - y, -x + y)$,
$B' = \{(1, -2), (0, 3)\}$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, y, z)$,
$B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x, x + 2y, x + y + 3z)$,
$B' = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, -1)\}$.

Câu 2. Cho $B = \{(1, 3), (-2, -2)\}$ và $B' = \{(-12, 0), (-4, 4)\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận của $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ trong cơ sở B.

(a) Tìm ma trận chuyển P cơ sở từ B' sang B.

(b) Dùng A và P để tìm $[v]_B$ và $[T(v)]_B$ với $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
(Chú ý: $[v]_B = P[v]_{B'},\ [T(v)]_B = A[v]_B = AP[v]_{B'}$)

(c) Tìm P^{-1} và ma trận A' của $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ trong cơ sở B'.

(d) Tìm $[T(v)]_{B'}$ theo hai cách: $[T(v)]_{B'} = A'[v]_{B'}$ và $[T(v)]_{B'} = P^{-1}[T(v)]_B$.

Câu 3. Lặp lại các ý của câu 2 với $B = \{(1, 1), (-2, 3)\},\ B' = \{(1, -1), (0, 1)\}$,
$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, và $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Câu 4. Lặp lại các ý của câu 2 với $B = \{(1, 2), (-1, -1)\},\ B' = \{(-4, 1), (0, 2)\}$,
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, và $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Câu 5. Lặp lại các ý của câu 2 với $B = \{(1, -1), (-2, 1)\},\ B' = \{(-1, 1), (1, 2)\}$,
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, và $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Câu 6. Lặp lại các ý của câu 2 với $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\},\ B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,
$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$, và $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Câu 7. Lặp lại các ý của câu 2 với $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},\ B' = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$,
$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$, và $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Câu 8*. Chứng minh rằng hai ma trận đồng dạng có cùng vết.

20 Giá trị riêng, vector riêng, đa thức đặc trưng

Câu 1. Kiểm tra λ_i là giá trị riêng và x_i là vectơ riêng tương ứng của các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1, & x_1 = (1,0), \\ \lambda_2 = -1, & x_2 = (0,1); \end{array}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2, & x_1 = (1,0,0), \\ \lambda_2 = -1, & x_2 = (1,-1,0), \\ \lambda_3 = 3, & x_3 = (5,1,2). \end{array}$

Câu 2. Xác định những vectơ x_i nào là vectơ riêng của A với:

(a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $x_1 = (1,2)$, $x_2 = (2,1)$, $x_3 = (1,-2)$, $x_4 = (-1,0)$;

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = (2,-4,6)$, $x_2 = (2,0,6)$, $x_3 = (2,2,0)$, $x_4 = (-1,0,1)$.

Câu 3. Tìm phương trình đặc trưng, các giá trị riêng, các vectơ riêng và số chiều của không gian riêng tương ứng của các ma trận sau:

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

Câu 4. Cho ma trận vuông M cấp 3 với các giá trị riêng $1, 2, 3$. Tìm các giá trị riêng của các ma trận sau:

(a) M^{-1}; (b) M^2; (c) $M + I_3$.

Câu 5. Giả sử ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 99 & a & 17 \\ 2 & 0 & b \end{bmatrix}$ có hai giá trị riêng là 2 và 3, trong đó giá trị riêng 2 có bội 2. Khi đó $(a, b) =$?

Câu 6. Tìm các giá trị thực của tham số m để ma trận $\begin{bmatrix} m-2 & -3 & 5 \\ -4 & m+2 & -10 \\ 0 & m^2-2m & 4 \end{bmatrix}$ nhận vector $(-1, 2, 0)$ làm vector riêng?

Câu 7. Nếu đa thức đặc trưng của $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ là $\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 6$ thì $(a, b, c) =$?

Câu 8. Giả sử 2 là một giá trị riêng ma trận vuông A. Tính định thức của ma trận $A^2 + A - 6I$.

Câu 9. Giả sử $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -2 & b \end{bmatrix}$ và $B = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 114 & 48 \\ 48 & 86 \end{bmatrix}$ có cùng giá trị riêng. Tìm a và b.

Câu 10. Cho T là ánh xạ tuyến tính $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ với ma trận trong cơ sở chính tắc là $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Tìm các giá trị riêng của $T^5 - 3T^4 + T^3 - T^2 + T - 3I$.

Câu 11*. Giả sử ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{3} & a & 17 \\ 2 & 0 & b \end{bmatrix}$ có các giá trị riêng 2 (bội 2) và 3. Tìm a và b.

Câu 12.* Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 9/2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 5 & m & 0 \end{bmatrix}$. Với mọi giá trị thực của m, A luôn có một giá trị riêng bằng bao nhiêu?

21 Chéo hoá ma trận và ánh xạ tuyến tính

Câu 1. Kiểm tra ma trận A là chéo hóa được bằng cách tính $P^{-1}AP$, với:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Câu 2. Chứng minh các ma trận sau đây không chéo hóa được:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Câu 3. Với mỗi ma trận A sau đây, tìm (nếu tồn tại) ma trận P chéo hóa ma trận A (tức $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo), viết ma trận $P^{-1}AP$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Câu 4. Tìm cơ sở B sao cho ma trận của ánh xạ tuyến tính T trong B là ma trận đường chéo:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x + y, x + y)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (-2x + 2y - 3z, 2x + y - 6z, -x - 2y)$.

Câu 5. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hỏi A và B có đồng dạng không? Nếu có, tìm ma trận P sao cho $B = P^{-1}AP$.

Câu 6. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & a & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, trong đó a là một số thực.

(a) Chứng minh rằng với mọi số thực a ta luôn có 2 là một giá trị riêng của A.

(b) Khi $a = 3$, hãy tìm một ma trận P khả nghịch (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Câu 7. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, trong đó a là một số thực.

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng của ma trận A. Chứng minh rằng khi $a = 0$ thì ma trận A không chéo hóa được.

(b) Khi $a = \frac{1}{2}$, hãy tìm một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Câu 8. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & -3a & 0 \\ 1 & 2a & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, trong đó a là một số thực.

(a) Viết đa thức đặc trưng của A. Chứng minh rằng với mọi a ta luôn có $\lambda = 1$ là một giá trị riêng của A.

(b) Khi $a = -1$, hãy tìm một ma trận P khả nghịch (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Câu 9.** Cho hai ma trận A và B vuông cùng cấp chéo hóa được. Chứng minh rằng A và B chéo hóa được bởi cùng một ma trận khi và chỉ khi $AB = BA$.

Câu 10.** Giả sử V là một không gian con chiều d của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng ma trận $A_{n\times n}$ của phép chiếu vuông góc lên V (trong bất kỳ cơ sở nào của $\mathbb{R}^n$ và V) thỏa mãn $A^2 = A,\ A^t = A$ và $\operatorname{trace}(A) = d$.

22 Chéo hoá trực giao các ma trận đối xứng

Câu 1. Trong các ma trận sau, ma trận nào là ma trận đối xứng

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Câu 2. Trong các ma trận sau, ma trận nào là ma trận trực giao:

(a) $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$

Câu 3*. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}$ (các phần tử trên đường chéo bằng a và ngoài đường chéo bằng b). Khi đó A có hai giá trị riêng $\lambda_1 =$? bội ? và $\lambda_2 =$? bội ?

Câu 4. Tìm ma trận trực giao P để P^TAP là ma trận đường chéo và viết P^TAP với:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Câu 5. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng và các không gian riêng tương ứng của A.

(b) Tìm một ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Câu 6. Lặp lại các ý của Câu 5 cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 7. Lặp lại các ý của Câu 5 cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Câu 8. Lặp lại các ý của Câu 5 cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Câu 9. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, trong đó a là một số thực.

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A, từ đó hãy tìm điều kiện của a để ma trận A có 3 giá trị riêng khác nhau.

(b) Khi $a = 2$, hãy tìm một ma trận trực giao P (nếu có) sao cho P^tAP là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

23 Bài tập khó

Câu 1. Có tồn tại tập compact lồi Ω các ma trận cỡ 2×3 có cùng hạng bằng 2 thỏa mãn điều kiện sau hay không: Với mỗi vector dòng $v \in M_{1\times 3}$, tồn tại ma trận $A \in \Omega$ sao cho v nằm trong không gian dòng của A?