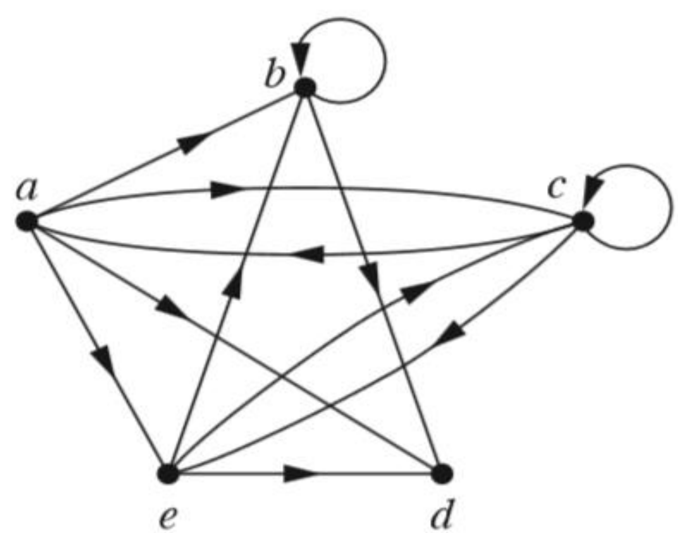
Lý thuyết đồ thị

Biểu diễn của đồ thị

Một danh sách kề có thể được sử dụng để biểu diễn đồ thị không có cạnh bội bằng cách liệt kê các đỉnh nối với mỗi đỉnh trong đồ thị

Ví dụ:



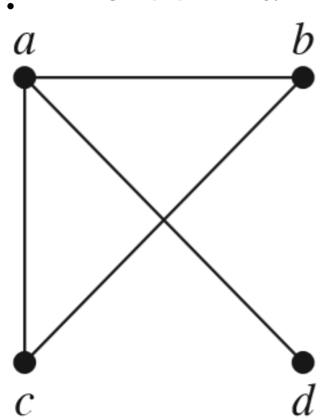
Đỉnh	Đỉnh kề
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

Ma trận [liền] kề (Adjacent matrix)

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị với $|V| = n$. Danh sách cạnh tuỳ ý của G là $v_1, v_2, \dots, v_n$. Ma trận kề A_G của G ứng với danh sách các đỉnh này là một ma trận không-một cấp $n \times n$ có phần tử hàng i cột j bằng 1 nếu v_i và v_j kề nhau, và bằng 0 nếu chúng không được nối với nhau. Nói cách khác, ma trận kề của đồ thị là ma trận $A = [a_{ij}]$ trong đó

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } \{v_i, v_j\} \text{ là một cạnh của } G \\ 0 \text{ nếu không có cạnh nối đỉnh } v_i \text{ với } v_j \end{cases}$$

Ví dụ: ma trận kề có thứ tự đỉnh là a, b, c, d.

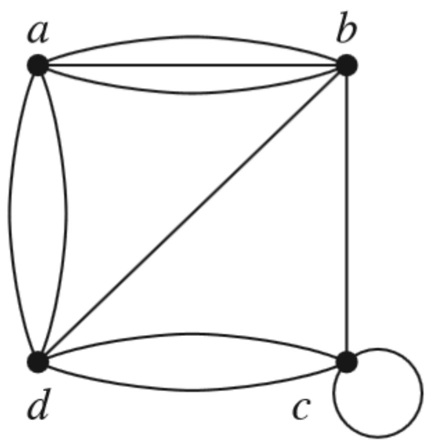


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận kề

- Có thể sử dụng để biểu diễn đồ thị có vòng lặp và cạnh bội.
- Vòng lặp tại đỉnh v_i biểu diễn bởi 1 tại vị trí (i, i) trong ma trận.
- Khi cạnh bội nối cùng cặp đỉnh v_i và v_j (hoặc nhiều vòng lặp bội trên cùng một đỉnh) vị trí (i, j) bằng số cạnh nối hai đỉnh.

Ví dụ: ma trận kề có thứ tự đỉnh là a, b, c, d.

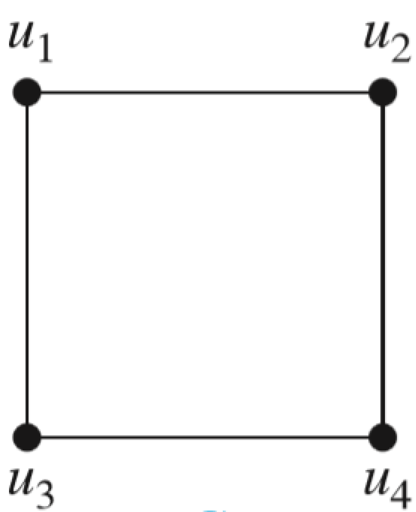


$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

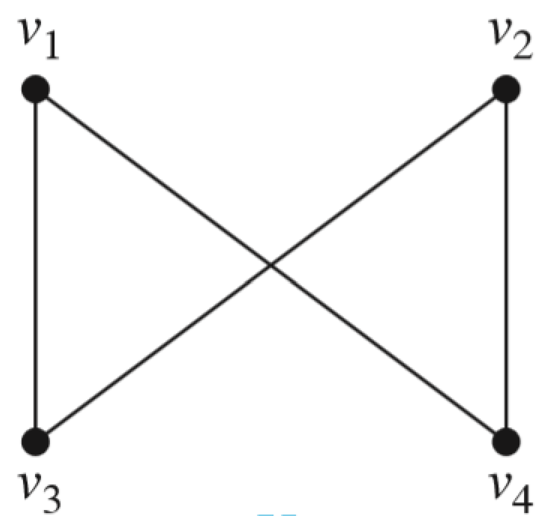
Đồ thị đẳng cấu

Định nghĩa: Các đồ thị đơn $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là đẳng cấu nếu có hàm song ánh f từ V_1 lên V_2 sao cho các đỉnh a và b là liền kề trong G_1 khi và chỉ khi $f(a)$ và $f(b)$ là liền kề trong G_2 với mọi a và b trong V_1. Hàm f như thế được gọi là một đẳng cấu.

Ví dụ: đồ thị H và G là hai đồ thị đẳng cấu.



G



H

Đường đi, chu trình

Tính liên thông, đường đi

Một đường đi (Path) là một chuỗi các cạnh bắt đầu từ một đỉnh của đồ thị và đi từ đỉnh đến đỉnh qua các cạnh của đồ thị.

Ứng dụng: Nhiều bài toán có thể mô hình hoá bằng các đường đi qua các cạnh của đồ thị, ví dụ:

- Xác định xem một thông điệp có thể truyền giữa hai máy tính.
- Định tuyến thư điện tử, tin nhắn gửi đi một cách hiệu quả.

Tính liên thông (Connectivity)

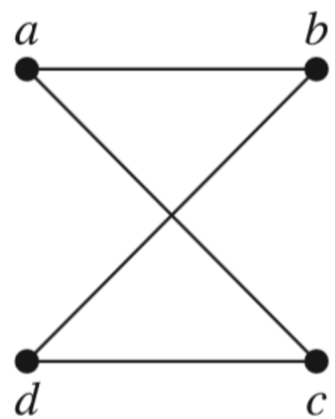
- Ta có thể sử dụng ma trận kề của một đồ thị để tính số lượng đường đi khác nhau giữa hai đỉnh của đồ thị.

Định lý: Cho G là một đồ thị có ma trận kề A với thứ tự đỉnh $v_1, \ldots, v_n$. Số lượng đường đi có độ dài r từ v_i đến v_j, với $r > 0$ là số nguyên dương, bằng phần tử (i, j) của A^r.

Tính liên thông

Định lý: Cho G là một đồ thị có ma trận kề A với thứ tự đỉnh $v_1, \ldots, v_n$. Số lượng đường đi có độ dài r từ v_i đến v_j, với $r > 0$ là số nguyên dương, bằng phần tử (i, j) của A^r.

Ví dụ:



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

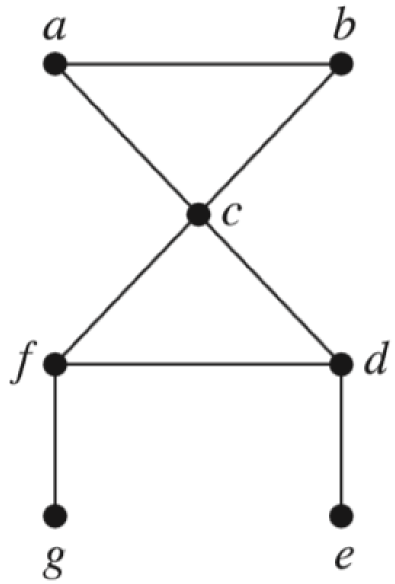
Đường đi có độ dài 4

Là phần tử $(1, 4)$ của ma trận A^4

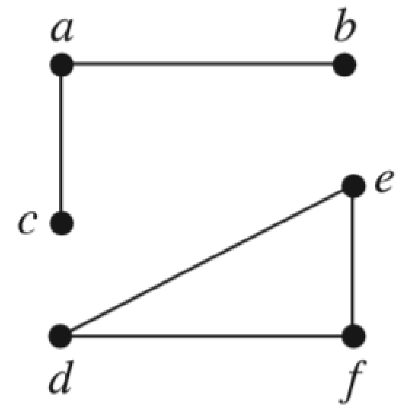
$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Tính liên thông trong đồ thị vô hướng

Định nghĩa: Một đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu có đường đi giữa tất cả các cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.



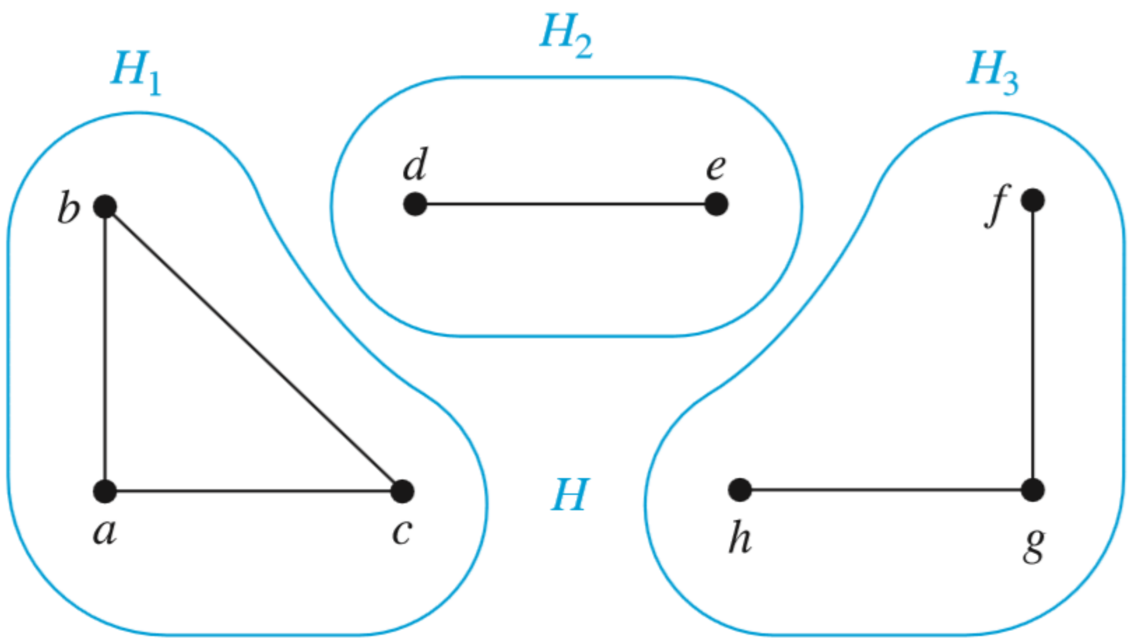
G_1



G_2

Các thành phần liên thông

Một thành phần liên thông (Connected component) của đồ thị G là một đồ thị con liên thông của G không chung đỉnh với một đồ thị con liên thông nào khác của G.



Độ liên thông của đồ thị

- Đỉnh cắt (khớp), cutting vertex
  - Khi xoá bỏ nó và tất cả các cạnh nối với nó sẽ tạo ra một đồ thị con mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị ban đầu.
- Cạnh cắt (cầu), cutting edge
  - Khi xoá bỏ nó sẽ tạo ra một đồ thị mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị ban đầu.

Kết nối đỉnh (Vertex connectivity)

- Không phải mọi đồ thị đều có đỉnh cắt. Ví dụ, đồ thị đầy đủ K_n với $n \geq 3$ không có đỉnh cắt nào.
- Đồ thị không có đỉnh cắt nào được gọi là đồ thị không phân tách được (nonseparable)
- Một tập con V' của tập các đỉnh V của đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là tập đỉnh cắt hay tập phân tách nếu $G - V'$ không liên thông.
  - Tập đỉnh cắt nhỏ nhất là kết nối đỉnh (vertex connectivity) của đồ thị không đầy đủ G, ký hiệu $\kappa(G)$.
  - Một đồ thị được gọi là k-connected nếu $\kappa(G) \geq k$.

Kết nối cạnh (Edge connectivity)

- Độ liên thông của đồ thị $G = (V, E)$
  - Có thể đo bằng số lượng cạnh nhỏ nhất mà khi xoá bỏ chúng thì đồ thị không còn liên thông.

Tính liên thông trong đồ thị có hướng

- Liên thông mạnh (strong connected)
  - Có đường đi từ a đến b và từ b đến a với mọi cặp đỉnh a, b bất kỳ trong đồ thị.

- Liên thông yếu (weak connected)
  - Có đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của đồ thị vô hướng nền.

Đường đi và sự đẳng cấu

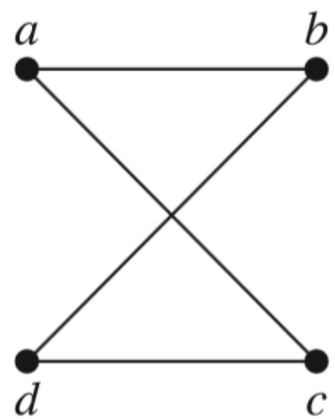
- Có một số cách dùng đường đi và chu trình để xác định xem hai đồ thị có đẳng cấu hay không.

- Đường đi có thể dùng để xây dựng các ánh xạ có khả năng là phép đẳng cấu.
  - Để tìm một đẳng cấu có thể có, ta có thể đi theo các đường đi qua tất cả các đỉnh khi đó tất cả các đỉnh tương ứng trong hai đồ thị có cùng bậc.

Số đường đi giữa các đỉnh

Định lý: Cho G là một đồ thị có ma trận kề A với thứ tự đỉnh $v_1, \ldots, v_n$. Số lượng đường đi có độ dài r từ v_i đến v_j, với $r > 0$ là số nguyên dương, bằng phần tử (i, j) của A^r.

Ví dụ



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Đường đi có độ dài 4

Là phần tử $(1, 4)$ của ma trận A^4

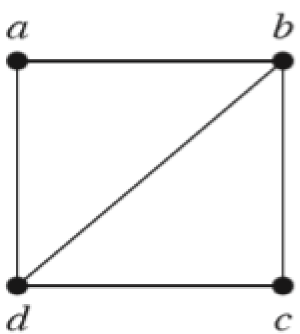
$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Chu trình Euler và Hamilton

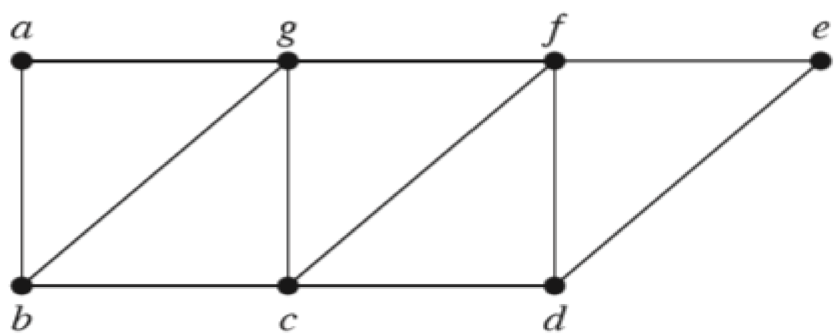
- Chu trình Euler
  - Liệu ta có thể đi qua các cạnh của đồ thị bắt đầu từ một đỉnh và quay lại điểm xuất phát mà chỉ đi qua mỗi cạnh một lần duy nhất?
- Chu trình Hamilton
  - Liệu ta có thể đi qua các cạnh của đồ thị bắt đầu từ một đỉnh và quay lại điểm xuất phát mà chỉ đi qua mỗi đỉnh một lần duy nhất?

Chu trình Euler

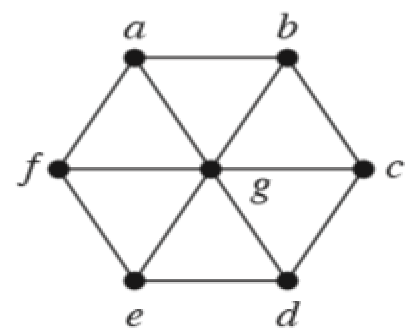
- Là chu trình đơn đi qua tất cả các cạnh của đồ thị G, mỗi cạnh đi đúng 1 lần.
- **Định lý**: Một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler nếu và chỉ nếu mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.
- **Ví dụ**: đồ thị nào sau đây có chu trình Euler?



G_1



G_2



G_3

Thuật toán xây dựng chu trình Euler

```
procedure Euler(G: đa đồ thị liên thông với tất cả
   các đỉnh bậc chẵn)
chu_trình := chu trình trong G bắt đầu tại một đỉnh
   được chọn tuỳ ý và các cạnh được thêm vào để xây
   dựng đường đi qua các đỉnh và cuối cùng quay lại
   đỉnh này.
H := G với các cạnh của G sau khi bỏ đi chu trình
while H còn các cạnh
   chu_trình_con := chu trình trong H bắt đầu tại
      đỉnh trong H cũng là đỉnh đầu mút của một cạnh
      thuộc chu_trình
   H := H với các cạnh của chu_trình_con và tất cả
      các đỉnh cô lập bị loại bỏ.
   chu_trình := chu_trình với chu_trình_con được
      chèn cào tại một đỉnh thích hợp
return chu trình {chu trình là chu trình Euler}
```

Chu trình Hamilton

- Không có các điều kiện “cần và đủ” đơn giản để xác định xem có tồn tại chu trình Hamilton hay không.

- Có một số định lý về điều kiện đủ để tồn tại chu trình Hamilton.

Chu trình Hamilton

- Một đồ thị có một đỉnh có bậc một không thể có chu trình Halmilton.
- Nếu một đỉnh trong đồ thị có bậc hai, khi đó cả hai cạnh nối với nó phải nằm trong chu trình Halmilton.
  - Một chu trình Hamilton đã đi qua một đỉnh thì tất cả những cạnh nối với đỉnh đó khác với hai cạnh đã sử dụng trong chu trình có thể loại bỏ khỏi danh sách xem xét.
- Chu trình Hamilton không thể chứa một vòng lặp nhỏ hơn.

Chu trình Hamilton

- Định lý Dirac (1952)
  - Nếu G là một đơn đồ thị với n đỉnh $(n \geq 3)$ mà bậc của tất cả các đỉnh trong G lớn hơn hoặc bằng $n/2$, thì G chứa một chu trình Hamilton.

- Định lý Ore (1960)
  - Nếu G là một đơn đồ thị với n đỉnh $(n \geq 3)$ mà $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ với mọi đỉnh không liền kề u, v trong G, thì G có một chu trình Hamilton.