Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Алтайский государственный университет

Физико-технический факультет

Кафедра радиофизики и теоретической физики

«Физическая реализация квантовых логических элементов »

(Отчет по производственной практике)

Выполнил
студент группы 511м
________________Донцов А. А.
Руководитель практики
к.ф.-м.н.
________________Волков Н. В.
Отчет представлен на кафедру
РТФ

«____»________________ 2011 г.
Оценка ________________
Заведующий кафедрой РТФ
д.ф.-м.н., проф.
________________Лагутин А. А.

Барнаул — 2012

Оглавление

Введение

Актуальность. В настоящее время сделана большая работа в области построения квантовых вычислительных машин, разработана большая теоретическая база. Хотя до сих пор полноценный квантовых компьютер не был построен, но уже сейчас реализованные некоторые опыты и небольшие прототипы компьютера. При построении квантовых вычислительных машин встают так же технологические трудности, например такие как потеря когерентности. Отсутствие хороших средств для моделирования и разработки квантовых алгоритмов затрудняет работу по построению новых алгоритмов, что подтверждается наличием малого числа действительно квантовых алгоритмов [1], [2]. Для реализации квантовых алгоритмов нужно выполнить следующие условия:

- адекватно представлять квантовую информацию;
- выполнять универсальный набор квантовых унитарных преобразований;
- приготавливать начальное состояние;
- измерять конечный результат.

Для реализации этих требований хорошо подходят квантовые точки – системы атомов, имеющие размер $\sim$1 нм (то есть 10^{-9} м). Электрон в квантовой точке локализован, поэтому энергетический спектр квантовой точки является дискретным, как у атома, так что квантовые точки можно считать искусственными атомами. Дискретность электронных состояний в квантовой точке и наличие у электрона собственного вращательного момента (спина) могут быть использованы при конструировании логических элементов (вентилей) [**?**].

Цель. Построение и описание математической модели квантовых вычислений, основанных на применении квантовых точек, основанных полупроводниковых гетероструктурах.

Разработка математического представления квантовых вычислений и квантовой памяти.

0.1. Квантовая точка, квантовый гармонический осциллятор

Квантовая точка - это фрагмент проводника или полупроводника, содержащий в себе электрон или электроны, ограниченные со всех сторон каким-либо потенциальным барьером, в качестве барьера довольно часть применяют примеси каких-либо других веществ. Потенциал, создаваемый в квантовой точке, ограничивает движение носителей заряда во всех трёх пространственных измерениях. Характерные размеры квантовой точки от 10 нм до 100 нм.

Квантовую точку можно рассматривать как потенциальную яму содержащую в себе частицу, поведение такой частицы описывается уравнением гармонического осциллятора, при рассмотрении двумерного случая, гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \tag{1}$$

где $V(x) = 0$ при $0 < x < L$ и $V(x) = \infty$ в противном случае. Собственные состояние в координатном представлении имеют вид

$$|\psi_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi x n}{L}) \tag{2}$$

и

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2}{2mL^2} \tag{3}$$

Таким образом гамильтониан принимает дискретные значения [3]. Рассморим двумерную потенциальную яму с бесконечными стенками и пусть в ней у частицы только два энергетических уровня. Тогда волновую функцию можно записать как $|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle$. Поскольку

$$|\psi\rangle = e^{(E_1 - E_2)/2t}[ae^{-i\omega t}|\psi_1\rangle + be^{i\omega t}|\psi_2\rangle], \tag{4}$$

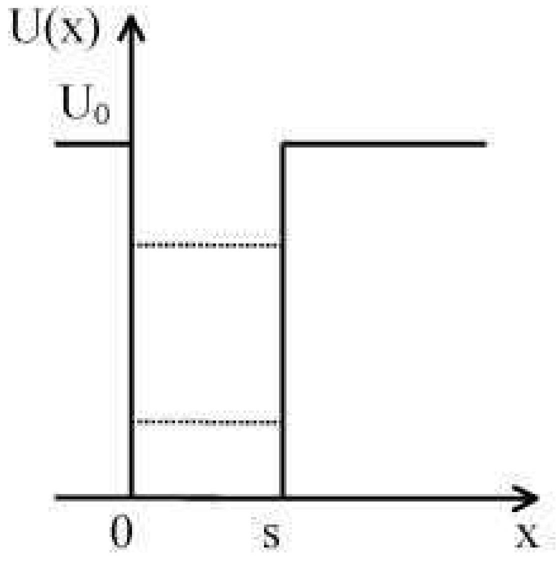

Рис. 1. Одномерная прямоугольная потенциальная яма, $U(x)$ - потенциальная энергия

где $\omega = (E_1 - E_2)/2$, можно рассматривать только амплитуды a и b, так что соостояние представляется абстрактным двухкомпонентным вектором

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_n \\ \psi_m \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Таким образом, эта двухуровневая система представляет кубит. Его эволюция во времени описывается эффективным гамильтонианом $H = h\omega Z$ [4], [5].

Предположим, что данная система подвергается внешнему воздействию электромагнитного поля, изменяющегося во времени по закону $\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{-t/|\tau|}$, и направленному вдоль оси Oz.

Если внешнее возмущение удовлетворяет условию применимости теории возмущений, вероятность перехода может быть вычислена в рамках нестационарной теории возмущений. Амплитуда процесса в первом порядке теории возмущений имеет вид:

$$A_{mn} = \frac{1}{i\hbar} \int_t^\tau \langle f_n | \hat{V}(\mathbf{r}, t) | f_m \rangle e^{i\omega f_{mn} t} dt, \tag{6}$$

где $\omega_{mn} = (E_n - E_m)/\hbar$ - частота перехода. С амплитудой простым способом связана вероятность перехода:

$$W_{mn} = |A_{mn}|^2 = \frac{1}{i\hbar}\Big|\int_t^\tau \langle f_n|\hat{V}(\mathbf{r},t)|f_m\rangle e^{i\omega f_{mn}t}dt\Big|^2. \tag{7}$$

Вводя начале введём повышающий и понижающий операторы a^+ и a, соответственно определённые

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip), \tag{8}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x - ip), \tag{9}$$

$a^+|\psi\rangle$ является собственным состоянием гамильтониана H с энергией $E + \hbar\omega$, $a|\psi\rangle$ собственное состояние с энергией $E - \hbar\omega$ [3].

Физически понижающий и повышающий операторы можно реализовать следующим образом: если на потенциальную яму с электроном действует магнитное поле, то в зависимости от направления магнитного поля и проекции спина электрона, электрон может переходить с уровня на уровень.

Кубиты можно представить энергетическими собственными состояниями $|n\rangle$

$$|00\rangle_L \longleftrightarrow |0\rangle \tag{10}$$

$$|01\rangle_L \longleftrightarrow |1\rangle \tag{11}$$

$$|10\rangle_L \longleftrightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

$$|10\rangle_L \longleftrightarrow \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

Здесь индекс L означает логические состояния, а не состояния осциллятора. Пусть система эволюционирует в течении времени $t = \pi/\hbar\omega$, при этом собственные состояния преобразуются по закону

$$|n\rangle \to exp(-i\pi a^+ a)|n\rangle = (-1)^n|n\rangle \tag{14}$$

Состояние $|0\rangle$ остаётся неизменным, $|1\rangle$ меняет свой знак. Состояние (12) и (13) изображены на сфере Блоха следующем образом:

а) б)

Рис. 2. Состояния (12) и (13) изображеные на сфере Блоха.

Решения для уравнения гармонического осциллятора, представленны на рисунке:

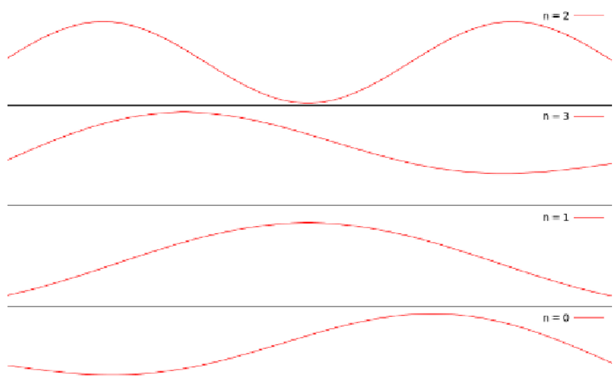

Рис. 3. Собственные функции

В общем случае необходимым и достаточным условием того, что с помощью данной физической системы можно реализовать унитарный оператор U, является приближенное равенство собственных значений оператора U и оператора эволюции $T = exp(-iHt)$ [6].

Реализация однокубитных вычислений

Для реализации вычислений запишем матрицу плотности, представленной системы:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi^*| = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n^* & \psi_m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_n\psi_n^* & \psi_n\psi_m^* \\ \psi_m\psi_n^* & \psi_m\psi_m^* \end{pmatrix} \tag{15}$$

Матрицу плотности можно рассматривать как оператор (оператор плотности). Если умножить её слева на произвольный вектор-столбец, то вектор-строка $\langle\psi|$ умножится на него, дав скалярное произведение, а последующий за ним вектор-столбец $|\psi\rangle$ умножится на это скалярное произведение как на численный коэффициент. Итого, произвольный вектор-столбец будет рассмотрен в проекции на ось, и потом заменён на вектор вдоль этой оси, длиной в проекцию. То есть, оператор - это ровно проектор на направление, заданное исходным вектором состояния $|\psi\rangle$.

Кубит может быть преобразован при помощи квантовых логических гейтов, которые осуществляются при помощи унитарного преобразования U, которое преобразует исходное состояние ψ_i в состояние ψ_f соответственно с формулой

$$|\psi\rangle = U|\psi\rangle. \tag{16}$$

Квантовый элемент NOT можно представить в матричном виде. Определим матрицу X для представления квантового элемента NOT:

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Квантовые элементы на одном кубите могут быть записаны матрицами размера 2×2. Матрица U, описывающая квантовый элемент должна быть унитарна, т.е. $U^+U = I$, где U^+ — сопряжённая матрица, получаемая транспонированием и последующим комплексным сопряжением U, а I— единичная матрица.

Условие унитарности является единственным ограничением на квантовые элементы. Любая унитарная матрица описывает физически возможный квантовый элемент.

0.2. Спин кубита

Частица со спином равным $1/2$ хорошо подходит для реализации кубитов. Кубит может быть образован из спиновых состояний одного электрона, одного ядра, пары электронов или электронно-дырочной системы (экситонов). Для электрона z компонента спина равна $\pm\hbar/2$. Оператор z спина

$$s_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z, \tag{18}$$

где σ_z матрица Паули

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Соответствующие уравнения имеют собственные формы

$$s_z|0\rangle = +\frac{\hbar}{2}, s_z|1\rangle = -\frac{\hbar}{2}. \tag{20}$$

Собственные значения могут так же записанны в виде спиноров,

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Спиновый магнитный диполь задан формулой:

$$\mu_z = -\frac{1}{2}g^*\mu_B\sigma_z, \tag{22}$$

где μ_B магнетон Бора ($\mu_B = 0.927 \times 10^{-23} Am^2$), g^* является эффективным фактором Ланде, который в полупроводниковых материалах может принимать как положительные, так как отрицательные значения например, для электрона в Si $g^* = 1.998$, в Ge $g^* = 1.563$, в $GaAs$ $g^* = -0.44$, для электрона в ваккууме $g^* = 2.0$.

Спин может быть определён с помощью взаимодействия спинов магнитных диполей с внешнем магнитным полем $\vec{B}$. Для магнитного паля вида $\vec{B} = (0, 0, \vec{B})$ гамильтониан взаимодействия будет иметь вид:

$$H_{int} = -\mu_z B = \frac{1}{2}g^*\mu_B\sigma_z B. \tag{23}$$

Если квантовая система обладает энергией E_ν в отсутствии внешнего магнитного поля, тогда согластно (18), (20) и (23) взаимодействие спинового магнитного диполя с магнитным полем приводит к расщеплению этого уровня энергии на два подуровня энергии.

$$E_{\nu\pm} = E_\nu \pm \frac{1}{2} g^* \mu_B B, \tag{24}$$

где знак $+$ соответствует состоянию $|0\rangle$ со спином $\hbar/2$, а знак $-$ соответствует состоянию $|1\rangle$ со спином $-\hbar/2$. Уравнение (24) описывает спиновый эффект Зеемана [7].

Чтобы выполнять произвольные квантовые вычисления, нужно иметь возможность реализовывать произвольный унитарный оператор. Например, манипулируя параметрами P_x и P_y, в гамильтониане $H = P_x X + P_y Y$, описывающем динамику отдельного спина, можно реализовать произвольные вращения этого спина [8].

Результаты

В ходе данной работы были проделанны следующие задания:

- Обзор электронных и печатных ресурсов по реализации квантовых вычислений на основе КТ. Сравнительная характеристика имеющихся языков.

- Изучение синтаксиса языка QCL.

- Реализация квантовых схем с использованием языка QCL.

Литература

1. *Omer B.* Classical concepts in quantum programming // *Institute for Theoretical Physics Technical University Vienna.* — 2003. — Pp. 1–11.
2. *Vizzotto J. K.* Concurrent Quantum Programming in Haskell // *Solid State Communications.* — 2010. — no. 143. — P. 76.
3. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. — Пер. с англ. — М.: Мир, 2006. — 824 с.
4. *Вонсонский С. В, Кацнельсон М. И.* Квантовая физика твёрдого тела. — М.: Наука, 1983. — 337 с.
5. *Sau J. D., Lutchyn R. M., Tewari S., el al.* A generic new platform for topological quantum computation using semiconductor heterostructures // *Phys. Rev. Lett. 104, 040502 (2010).* — 2010. — no. 104.
6. *Мединский М. Б.* Квантовые измерения и декогеренция. Модели ифеноменология. — Пер. с англ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 232 с.
7. *Janusz Adamowski., Stanislaw Bednarek., Bartlomiej Szafran.* Quantum Computing with Quantum Dots // *SCHEDAE INFORMATICAE.* — 2005. — **58**. — Pp. 95–111.
8. *Блум К.* Теория матрицы плотности и её приложения. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 248 с.