Kapitola 1

(draft) Nerozhodnutelnost a neúplnost

V této, závěrečné kapitole se budeme zabývat tím, jak lze s teoriemi pracovat algoritmicky. Zlatým hřebem budou *Gödelovy věty o neúplnosti* z roku 1930, které ukazují limity formálního přístupu, a které zastavily desetiletí trvající program formalizace matematiky. Nemáme zde dostatek prostoru k uvedení formálních definic a úplných důkazů, proto se místy budeme pohybovat na poněkud intuitivní úrovni. Zaměříme se na pochopení smyslu tvrzení a myšlenek důkazů.

Pojem *algoritmu* budeme chápat také jen intuitivně. Pokud bychom ho chtěli formalizovat, potom nejběžnější (ale zdaleka ne jedinou) volbou je koncept *Turingova stroje*.[1]

1.1 Rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

V důkazových systémech, kterými jsme se zabývali (tablo metoda, rezoluce, hilbertův kalkulus) jsme povolili, aby teorie T, ve které dokazujeme, byla nekonečná. Vůbec jsem se ale zatím nezabývali tím, jak je zadaná. Pokud chceme ověřit, že je daný objekt (tablo, rezoluční strom, posloupnost formulí) korektním důkazem, potřebujeme nějaký algoritmický přístup ke všem axiomům T.

Jednou z možností by bylo požadovat *enumerátor* T, tj. algoritmus, který vypisuje na výstup axiomy z T, a každý axiom někdy vypíše.[2] Potom by bylo snadné potvrdit, že je daný důkaz korektní. Pokud bychom ale dostali důkaz, který použil chybný axiom, který v T není, nikdy bychom se to nedozvěděli: nekonečně dlouho bychom čekali, zda jej enumerátor přeci jen nevypíše. Požadujeme proto silnější vlastnost, která umožňuje rozpoznat i chybné důkazy *rekurzivní axiomatizaci*:[3]

Definice 1.1.1 (Rekurzivní axiomatizace)**.** Teorie T je *rekurzivně axiomatizovaná*, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ doběhne a odpoví, zda $\varphi \in T$.

[1] Viz přednáška NTIN090 Základy složitosti a vyčíslitelnosti.

[2] Nutným předpokladem je, aby T byla spočetná. K tomu stačí předpokládat, že jazyk je spočetný.

[3] Slovo *rekurzivní* zde neznamená běžně známou rekurzi, ale odkazuje na formalizaci algoritmu pomocí ‘rekurzivních funkcí’ od Gödela. Rekurzivní funkce zde znamená totéž, co vyčíslitelná nějakým Turingovým strojem, a teorii vyčíslitelnosti (*computability theory*) se někdy také říká *recursion theory*.

Poznámka 1.1.2. Ve skutečnosti by nám stačil enumerátor pro T, pokud by bylo garantováno, že vypisuje axiomy v lexikografickém uspořádání. To už je ekvivalentní rekurzivní axiomatizaci. (Rozmyslete si proč.)

Zaměříme se na otázku, zda můžeme v dané teorii T 'algoritmicky rozhodovat pravdu' (tj. platnost vstupní formule). Pokud ano, říkáme, že je teorie *rozhodnutelná*. To je ale poměrně silná vlastnost, definujeme proto také *částečnou rozhodnutelnost*, která znamená, že pokud formule platí, algoritmus nám to řekne, ale pokud neplatí, nikdy se nemusíme dočkat odpovědi.

Definice 1.1.3 (Rozhodnutelnost)**.** O teorii T říkáme, že je

- *rozhodnutelná*, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$,
- *částečně rozhodnutelná*, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli:
  - pokud $T \models \varphi$, doběhne a odpoví 'ano',
  - pokud $T \not\models \varphi$, buď nedoběhne, nebo doběhne a odpoví 'ne'.

Můžeme jako obvykle předpokládat, že φ v definici je sentence. Ukážeme si jednoduché tvrzení:

Tvrzení 1.1.4. *Nechť T je rekurzivně axiomatizovaná. Potom:*

(i) T je částečně rozhodnutelná,

(ii) je-li T navíc kompletní, potom je rozhodnutelná.

Důkaz. Algoritmem ukazujícím částečnou rozhodnutelnost je konstrukce systematického tabla pro $\mathrm{F}\varphi$.[4] Pokud φ v T platí, konstrukce skončí v konečně mnoha krocích a snadno ověříme, že je tablo sporné, jinak ale skončit nemusí.

Je-li T kompletní, víme, že $T \vdash \varphi$ právě když $T \not\vdash \neg\varphi$. Budeme tedy paralelně kostruovat tablo pro $\mathrm{F}\varphi$ a tablo pro $\mathrm{T}\varphi$ (důkaz a zamítnutí φ z T): jedna z konstrukcí po konečně mnoha krocích skončí.

1.1.1 Rekurzivně spočetná kompletace

Požadavek kompletnosti je příliš silný, ukážeme, že stačí pokud jsme schopni efektivně popsat všechny kompletní jednoduché extenze[5]

[TODO]

Tvrzení 1.1.5. *Pokud lze* efektivně (algoritmicky) popsat *všechny kompletní jednoduché extenze*[6] efektivně dané *teorie T,*[7] *potom je T* (algoritmicky) rozhodnutelná.

[4] Zde nám stačí enumerátor axiomů T, nebo postupně generujeme všechny sentence (např. v lexikografickém pořadí) a pro každou testujeme, zda je axiomem.

[5] Tj. 'všechny modely až na elementární ekvivalenci'.

[6] Představte si algoritmus, který pro daná vstupní i, j odpoví j-tý axiom i-té kompletní jednoduché extenze (v nějakém pevném očíslování); takový algoritmus ne vždy existuje!

[7] T může být nekonečná, ale musí existovat algoritmus, který generuje všechny axiomy T.

Důkaz. Pro danou sentenci φ buď $T \vdash \varphi$, nebo existuje protipříklad $\mathcal{A} \not\models \varphi$, tedy kompletní jednoduchá extenze T_i teorie T taková, že $T_i \not\vdash \varphi$. Z kompletnosti ale plyne, že $T_i \vdash \neg\varphi$. Náš algoritmus bude paralelně konstruovat tablo důkaz φ z T a tablo důkaz $\neg\varphi$ ze všech kompletních jednoduchých extenzí $T_1, T_2, \ldots$ teorie T.[8] Víme, že alespoň jedno z paralelně konstruovaných tabel je sporné, a můžeme předpokládat, že konečné (neprodlužujeme-li sporné větve tabla), tedy algoritmus ho po konečně mnoha krocích zkonstruuje. □

Důsledek 1.1.6. *Následující teorie mají rekurzivně spočetné, jsou tedy rozhodnutelné:*

[TODO]teorie hustých lineárních uspořádání DeLO (kompletní jednoduché extenze jsou popsané v Důsledku **??**)*

Rekurzivně spočetná kompletace

Co když efektivně popíšeme všechny jednoduché kompletní extenze?

Řekneme, že množina všech (až na ekvivalenci) jednoduchých kompletních extenzí teorie T je *rekurzivně spočetná*, existuje-li algoritmus $\alpha(i, j)$, který generuje i-tý axiom j-té extenze (při nějakém očíslování), případně oznámí, že (takový axiom či extenze) neexistuje.

Tvrzení *Je-li teorie T rekurzivně axiomatizovaná a množina všech (až na ekvivalenci) jejích jednoduchých kompletních extenzí je rekurzivně spočetná, je T rozhodnutelná.*

Důkaz Díky rek. axiomatizaci poskytuje konstrukce systematického tabla z T s $F\varphi$ v kořeni algoritmus pro rozpoznání $T \vdash \varphi$. Pokud ale $T \not\vdash \varphi$, pak $T' \vdash \neg\varphi$ v nějaké jednoduché kompletní extenzi T' teorie T. To lze rozpoznat paralelní postupnou konstrukcí systematických tabel pro $T\varphi$ z jednotlivých extenzí. V i-tém stupni se sestrojí tabla do i kroků pro prvních i extenzí. □

1.1.2 Rozhodnutelné teorie

[TODO]

Příklady rozhodnutelných teorií

Následující teorie jsou rozhodnutelné, ačkoliv jsou nekompletní.

- teorie čisté rovnosti; bez axiomů v jazyce $L = \langle\rangle$ s rovností,
- teorie unárního predikátu; bez axiomů v jazyce $L = \langle U \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol,
- teorie hustých lineárních uspořádání $DeLO^*$,

[8] Nevadí, že je jich nekonečně mnoho, můžeme využít tzv. *dovetailing*: Provedeme 1. krok konstrukce 1. tabla, potom 2. krok 1. tabla a 1. krok 2. tabla, 3. krok 1. tabla, 2. krok 2. tabla, 1. krok 3. tabla, atd.

- teorie algebraicky uzavřených těles v jazyce $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ s rovností,

  s axiomy teorie těles a navíc axiomy pro každé $n \geq 1$,

$$(\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0 = 0),$$

  kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \ \cdots \ \cdot y$ ($\cdot$ aplikováno $(k-1)$-krát).

- teorie komutativních grup,
- teorie Booleových algeber.

1.1.3 Rekurzivní axiomatizovatelnost

[TODO]

Rekurzivní axiomatizovatelnost

Dají se matematické struktury "efektivně" popsat?

- Třída $K \subseteq M(L)$ je *rekurzivně axiomatizovatelná*, pokud existuje rekurzivně axiomatizovaná teorie T jazyka L s $M(T) = K$.
- Teorie T je rekurzivně axiomatizovatelná, pokud $M(T)$ je rekurzivně axiomatizovatelná.

Tvrzení *Pro každou konečnou strukturu $\mathcal{A}$ v konečném jazyce s rovností je* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *rekurzivně axiomatizovatelná. Tedy,* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *je rozhodnutelná.*

Důkaz Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Teorii $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ axiomatizujeme jednou sentencí (tedy rekurzivně) kompletně popisující $\mathcal{A}$. Bude tvaru *"existuje právě n prvků $a_1, \dots, a_n$ splňujících právě ty základní vztahy o funkčních hodnotách a relacích, které platí ve struktuře $\mathcal{A}$."* □

Příklady rekurzivní axiomatizovatelnosti

Následující struktury $\mathcal{A}$ mají rekurzivně axiomatizovatelnou teorii $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$.

- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, teorií diskrétních lineárních uspořádání,
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, teorií hustých lineárních uspořádání bez konců ($DeLO$),
- $\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$, teorií následníka s nulou,
- $\langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle$, tzv. Presburgerovou aritmetikou,

- $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$, teorií reálně uzavřených těles,
- $\langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$, teorií algebraicky uzavřených těles charakteristiky 0.

Důsledek *Pro uvedené struktury je* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *rozhodnutelná.*

Poznámka Uvidíme, že ale $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq\rangle$ *rekurzivně axiomatizovat* nelze. *(Vyplývá to z první Gödelovy věty o neúplnosti).*

1.2 Aritmetika

[TODO]

1.2.1 Robinsonova a Peanova aritmetika

[TODO]

Robinsonova aritmetika

Jak efektivně a přitom co nejúplněji axiomatizovat $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq\rangle$*?*

Jazyk aritmetiky je $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq\rangle$ s rovností.

Robinsonova aritmetika Q má axiomy (konečně mnoho)

$$
\begin{array}{ll}
S(x) \neq 0 & x \cdot 0 = 0 \\
S(x) = S(y) \to x = y & x \cdot S(y) = x \cdot y + x \\
x + 0 = x & x \neq 0 \to (\exists y)(x = S(y)) \\
x + S(y) = S(x + y) & x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)
\end{array}
$$

Poznámka Q *je velmi slabá, např. nedokazuje komutativitu či asociativitu operací* $+$, $\cdot$ *ani tranzitivitu* $\leq$*. Nicméně postačuje například k důkazu existenčních tvrzení o numerálech, která jsou pravdivá v* $\underline{\mathbb{N}}$*.*

Např. pro $\varphi(x, y)$ *tvaru* $(\exists z)(x + z = y)$ *je*

$$Q \vdash \varphi(\underline{1}, \underline{2}), \quad \textit{kde } \underline{1} = S(0) \textit{ a } \underline{2} = S(S(0)).$$

Peanova aritmetika

Peanova aritmetika PA má axiomy

(a) Robinsonovy aritmetiky Q,

(b) schéma indukce, tj. pro každou formuli $\varphi(x, \overline{y})$ jazyka L axiom

$$(\varphi(0, \overline{y}) \land (\forall x)(\varphi(x, \overline{y}) \to \varphi(S(x), \overline{y}))) \to (\forall x)\varphi(x, \overline{y}).$$

Poznámka *PA je poměrně dobrou aproximací* $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$*, dokazuje všechny základní vlastnosti platné v* $\underline{\mathbb{N}}$ *(např. komutativitu +). Na druhou stranu existují sentence pravdivé v* $\underline{\mathbb{N}}$ *ale nezávislé v* PA*.*

Poznámka *V jazyce 2. řádu lze axiomatizovat* $\underline{\mathbb{N}}$ *(až na izomorfismus), vezmeme-li místo schéma indukce přímo axiom indukce (2. řádu)*

$$(\forall X)\ ((X(0) \land (\forall x)(X(x) \to X(S(x)))) \to (\forall x)\ X(x)).$$

1.2.2 Hilbertův desátý problém

[TODO]

Hilbertův 10. problém

- Nechť $p(x_1, \ldots, x_n)$ je polynom s celočíselnými koeficienty.

  Má *Diofantická rovnice* $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ celočíselné řešení?

- Hilbert (1900) *"Nalezněte algoritmus, který po konečně mnoha krocích určí, zda daná Diofantická rovnice s libovolným počtem proměnných a celočíselnými koeficienty má celočíselné řešení."*

Poznámka *Ekvivalentně lze požadovat algoritmus rozhodující, zda existuje řešení v přirozených číslech.*

Věta (DPRM, 1970) *Problém existence celočíselného řešení dané Diofantické rovnice s celočíselnými koeficienty je alg. nerozhodnutelný.*

Důsledek *Neexistuje algoritmus rozhodující pro dané polynomy* $p(x_1, \ldots, x_n)$, $q(x_1, \ldots, x_n)$ *s přirozenými koeficienty, zda*

$$\underline{\mathbb{N}} \models (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n)).$$

1.3 Nerozhodnutelnost predikátové logiky

[TODO]

Nerozhodutelnost predikátové logiky

Existuje algoritmus, rozhodující o dané sentenci, zda je logicky pravdivá?

- Víme, že Robinsonova aritmetika Q má konečně axiomů, má za model $\underline{\mathbb{N}}$ a stačí k důkazu existenčních tvrzení o numerálech, která platí v $\underline{\mathbb{N}}$.
- Přesněji, pro každou existenční formuli $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ jazyka aritmetiky

$$Q \vdash \varphi(x_1/\underline{a_1}, \dots, x_n/\underline{a_n}) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbb{N}} \models \varphi[e(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)]$$

  pro každé $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, kde $\underline{a_i}$ značí a_i-tý numerál.
- Speciálně, pro φ tvaru $(\exists x_1)\dots(\exists x_n)(p(x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_n))$, kde p, q jsou polynomy s přirozenými koeficienty (numerály), platí

$$\underline{\mathbb{N}} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad Q \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash \psi \to \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi \to \varphi,$$

  kde ψ je konjunkce (uzávěrů) všech axiomů Q.
- Tedy, pokud by existoval algoritmus rozhodující logickou pravdivost, existoval by i algoritmus rozhodující, zda $\underline{\mathbb{N}} \models \varphi$, což není možné.

1.4 Gödelovy věty

[TODO]

1.4.1 První věta o neúplnosti

[TODO]

Gödelova 1. věta o neúplnosti

Věta (Gödel) *Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi T Robinsonovy aritmetiky existuje sentence pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$ a nedokazatelná v T.*

Poznámky

- *"Rekurzivně axiomatizovaná" znamená, že je* "efektivně zadaná".
- *"Extenze R. aritmetiky" znamená, že je* "základní aritmetické síly".
- *Je-li navíc $\underline{\mathbb{N}} \models T$, je teorie T nekompletní.*
- *V důkazu sestrojená sentence vyjadřuje* "nejsem dokazatelná v T".

- *Důkaz je založen na dvou principech:*

  (*a*) *aritmetizaci syntaxe,*

  (*b*) *self-referenci.*

Aritmetizace dokazatelnosti

Aritmetizace - predikát dokazatelnosti

- Konečné objekty syntaxe (symboly jazyka, termy, formule, konečná tabla, tablo důkazy) lze vhodně zakódovat přirozenými čísly.
- Nechť $\ulcorner\varphi\urcorner$ značí kód formule φ a nechť $\underline{\varphi}$ značí numerál (term jazyka aritmetiky) reprezentující $\ulcorner\varphi\urcorner$.
- Je-li T rekurzivně axiomatizovaná, je relace $\mathrm{Prf}_T \subseteq \mathbb{N}^2$ rekurzivní.

$$\mathrm{Prf}_T(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \textit{(tablo) } y \textit{ je důkazem (sentence) } x \textit{ v } T.$$

- Je-li T navíc extenze Robinsonovy aritmetiky Q, dá se dokázat, že Prf_T je reprezentovatelná nějakou formulí $Prf_T(x,y)$ tak, že pro každé $x,y \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{lll} Q \vdash Prf_T(\underline{x},\underline{y}), & \textit{je-li} & \mathrm{Prf}_T(x,y), \\ Q \vdash \neg Prf_T(\underline{x},\underline{y}), & \textit{jinak.} & \end{array}$$

- $Prf_T(x,y)$ vyjadřuje *"y je důkaz x v T"*.
- $(\exists y)Prf_T(x,y)$ vyjadřuje *"x je dokazatelná v T"*.
- Je-li $T \vdash \varphi$, pak $\underline{\mathbb{N}} \models (\exists y)Prf_T(\underline{\varphi},y)$ a navíc $T \vdash (\exists y)Prf_T(\underline{\varphi},y)$.

Self-reference

Princip self-reference

- *Tato věta má 16 písmen.*

  Self-reference ve formálních systémech většinou není přímo k dispozici.

- *Následující věta má 24 písmen "Následující věta má 24 písmen".*

  Přímá reference obvykle je k dispozici, stačí, když umíme "mluvit" o posloupnostech symbolů. Uvedená věta ale není self-referenční.

- *Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má 116 písmen "Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má 116 písmen".*

  Pomocí přímé reference lze dosáhnout self-reference. Namísto *"má x písmen"* může být jiná vlastnost.

- `main(){char *c="main(){char *c=%c%s%c; printf(c,34, c,34);}"; printf(c,34,c,34);}`

Věta o pevném bodě

Věta *Nechť T je bezesporné rozšíření Robinsonovy aritmetiky. Pro každou formuli $\varphi(x)$ jazyka teorie T existuje sentence ψ taková, že $T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\underline{\psi})$.*

Poznámka *Sentence ψ je self-referenční, říká* "splňuji podmínku φ".

Důkaz (idea) Uvažme *zdvojující* funkci d takovou, že pro každou formuli $\chi(x)$

$$d(\ulcorner\chi(x)\urcorner) = \ulcorner\chi(\underline{\chi(x)})\urcorner$$

- Platí, že d je reprezentovatelná v T. Předpokládejme *(pro jednoduchost)*, že nějakým termem, který si označme d, stejně jako funkci d.
- Pak pro každou formuli $\chi(x)$ jazyka teorie T platí

$$T \vdash d(\underline{\chi(x)}) = \underline{\chi(\underline{\chi(x)})} \tag{1.1}$$

- Za ψ vezměme sentenci $\varphi(d(\underline{\varphi(d(x))}))$. Stačí ověřit $T \vdash d(\underline{\varphi(d(x))}) = \underline{\psi}$.
- To plyne z (**??**) pro $\chi(x)$ tvaru $\varphi(d(x))$, neboť v tom případě

$$T \vdash d(\underline{\varphi(d(x))}) = \underline{\varphi(d(\underline{\varphi(d(x))}))} \quad \square$$

Nedefinovatelnost pravdy

Nedefinovatelnost pravdy

Řekneme, že formule $\tau(x)$ *definuje pravdu* v aritmetické teorii T, pokud pro každou sentenci φ platí $T \vdash \varphi \leftrightarrow \tau(\underline{\varphi})$.

Věta *V žádném bezesporném rozšíření Robinsonovy aritmetiky neexistuje definice pravdy.*

Důkaz Dle věty o pevném bodě pro $\neg\tau(x)$ existuje sentence φ taková, že

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\tau(\underline{\varphi}).$$

Kdyby formule $\tau(x)$ definovala pravdu v T, bylo by

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\varphi,$$

což v bezesporné teorii není možné. $\square$

Poznámka Důkaz je založen na paradoxu lháře, sentence φ by vyjadřovala "nejsem pravdivá v T".

1. věta o neúplnosti

Důkaz 1. věty o neúplnosti

Věta (Gödel) *Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi T Robinsonovy aritmetiky existuje sentence pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$ a nedokazatelná v T.*

Důkaz Nechť $\varphi(x)$ je $\neg(\exists y)Prf_T(x,y)$, vyjadřuje *"x není dokazatelná v T"*.

- Dle věty o pevném bodě pro $\varphi(x)$ existuje sentence ψ_T taková, že

$$T \vdash \psi_T \leftrightarrow \neg(\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y). \tag{1.2}$$

  ψ_T říká *"nejsem dokazatelná v T"*. Přesněji, ψ_T je ekvivalentní sentenci vyjadřující, že ψ_T není dokazatelná v T. (Ekvivalence platí v $\underline{\mathbb{N}}$ i v T).

- Nejprve ukážeme, že ψ_T *není dokazatelná v T*. Kdyby $T \vdash \psi_T$, tj. ψ_T je lživá v $\underline{\mathbb{N}}$, pak $\underline{\mathbb{N}} \models (\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$ a navíc $T \vdash (\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$. Tedy z (**??**) plyne $T \vdash \neg\psi_T$, což ale není možné, neboť T je bezesporná.

- Zbývá dokázat, že ψ_T je pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$. Kdyby ne, tj. $\underline{\mathbb{N}} \models \neg\psi_T$, pak $\underline{\mathbb{N}} \models (\exists y)Prf_T(\underline{\psi_T}, y)$. Tedy $T \vdash \psi_T$, což jsme již dokázali, že neplatí. $\square$

1.4.2 Důsledky první věty

[TODO]

Důsledky a zesílení 1. věty

Důsledek *Je-li navíc* $\underline{\mathbb{N}} \models T$*, je teorie* T *nekompletní.*

Důkaz Kdyby byla T kompletní, pak $T \vdash \neg\psi_T$ a tedy $\underline{\mathbb{N}} \models \neg\psi_T$, což je ve sporu s $\underline{\mathbb{N}} \models \psi_T$. $\square$

Důsledek $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ *není rekurzivně axiomatizovatelná.*

Důkaz $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ je bezesporná extenze Robinsonovy aritmetiky a má model $\underline{\mathbb{N}}$. Kdyby byla rekurzivně axiomatizovatelná, dle předchozího důsledku by byla nekompletní, ale $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ je kompletní. $\square$

Gödelovu 1. větu o neúplnosti lze následovně zesílit.

Věta (Rosser) *Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi* T *Robinsonovy aritmetiky existuje nezávislá sentence. Tedy* T *je nekompletní.*
Poznámka Tedy předpoklad, že $\underline{\mathbb{N}} \models T$*, je v prvním důsledku nadbytečný.*

1.4.3 Druhá věta o neúplnosti

[TODO]

Gödelova 2. věta o neúplnosti

Označme Con_T sentenci $\neg(\exists y)Prf_T(\underline{0=1}, y)$. Platí $\underline{\mathbb{N}} \models Con_T \Leftrightarrow T \nvdash 0 = \underline{1}$. Tedy Con_T vyjadřuje, že *"T je bezesporná"*.

Věta (Gödel) *Pro každou bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi* T *Peanovy aritmetiky platí, že* Con_T *není dokazatelná v* T.

Důkaz (náznak) Nechť ψ_T je Gödelova sentence *"nejsem dokazatelná v T"*.

- V první části důkazu 1. věty o neúplnosti jsme ukázali, že

  $$\text{“Je-li } T \text{ bezesporná, pak } \psi_T \text{ není dokazatelná v } T.\text{”} \tag{1.3}$$

  Jinak vyjádřeno, platí $Con_T \rightarrow \psi_T$.
- Je-li T extenze Peanovy aritmetiky, důkaz tvrzení (**??**) lze formalizovat v rámci T. Tedy $T \vdash Con_T \rightarrow \psi_T$.
- Jelikož T je bezesporná dle předpokladu věty, podle (**??**) je $T \nvdash \psi_T$.
- Z předchozích dvou bodů vyplývá, že $T \nvdash Con_T$. $\square$

Poznámka Taková teorie T tedy neumí dokázat vlastní bezespornost.

1.4.4 Důsledky druhé věty

[TODO]

Důsledky 2. věty

Důsledek *Existuje model $\mathcal{A}$ Peanovy aritmetiky t.ž.* $\mathcal{A} \models (\exists y) Prf_{PA}(\underline{0=1}, y)$.

Poznámka *$\mathcal{A}$ musí být nestandardní model PA, svědkem musí být nestandardní prvek (jiný než hodnoty numerálů).*

Důsledek *Existuje bezesporná rekurzivně axiomatizovaná extenze T Peanovy aritmetiky taková, že $T \vdash \neg Con_T$.*

Důkaz Nechť $T = PA \cup \{\neg Con_{PA}\}$. Pak T je bezesporná, neboť $PA \nvdash Con_{PA}$. Navíc $T \vdash \neg Con_{PA}$, tj. T dokazuje spornost $PA \subseteq T$, tedy i $T \vdash \neg Con_T$. $\square$

Poznámka *$\underline{\mathbb{N}}$ nemůže být modelem teorie T.*

Důsledek *Je-li teorie množin ZFC bezesporná, není Con_{ZFC} dokazatelná v ZFC.*