

Témata: Predikátová logika (jazyk, teorie, logika prvního řádu, vyšších řádů). Vyjadřování různých vlastností ve výrokové a predikátové logice.

Příklad 1. Ztratili jsme se v labyrintu a před námi jsou troje dveře - červené, zelené a modré. Víme, že za právě jedněmi dveřmi je cesta ven, za ostatními je drak. Na dveřích jsou nápisy:

- Červené dveře: “Cesta ven je za těmito dveřmi.”
- Modré dveře: “Cesta ven není za těmito dveřmi.”
- Zelené dveře: “Cesta ven není za modrými dveřmi.”

Víme, že alespoň jeden z nápisů je pravdivý a alespoň jeden je lživý. Formalizujte naše znalosti.

Příklad 2. Víme, že:

- (i) Každý zná sám sebe.
- (ii) Když člověk studuje na škole, musel se na ni hlásit a ta škola ho přijala.
- (iii) Alfons se nehlásil na školu, která přijala někoho, kdo Alfonse zná.

Formalizujte naše znalosti. Umíte ukázat, že “Alfons nestuduje na žádné škole.”?

Příklad 3. Najděte vhodný jazyk a teorii prvního řádu pro

- a) orientované grafy (bez násobných hran)
- b) grafy (neorientované, bez smyček),
- c) relace ekvivalence,
- d) částečná uspořádání.

Příklad 4. Mějme graf G (neorientovaný, bez smyček). Najděte formule (v jazyce grafů), které vyjadřují následující vlastnosti. Kdy to lze v logice prvního řádu, a kdy je třeba logika druhého řádu?

- (a) G obsahuje vrchol stupně 1
- (b) existuje cesta délky k z u do v v G (pro nějaké fixní k)
- (c) G je regulární stupně 3,
- (d) G obsahuje a k -kliku (pro nějaké fixní k),
- (e) G má vrcholové 3-obarvení.
- (f) G je bipartitní,
- (g) G má perfektní párování,
- (h) existuje cesta z u do v v G

Příklad 5. Najděte FO-formule (v jazyce \leq) vyjadřující následující vlastnosti uspořádaných množin:

- (a) “ x je nejmenší prvek”, “ x je minimální prvek”,
- (b) “ x má bezprostředního následníka”,
- (c) “každé dva prvky mají největšího společného předchůdce”.

Příklad 6. Najděte formule prvního řádu (v jazyce rovnosti), které vyjadřují pro dané $n > 0$, že

- (a) “existuje alespoň n prvků”,
- (b) “existuje nejvíce n prvků”,
- (c) “existuje právě n prvků”

Je možné vyjádřit, za pomoci (možná nekonečné) množiny formulí, že “existuje nekonečně mnoho prvků”?

Příklad 7. Lze \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} a \mathbb{C} rozlišit pomocí vlastností prvního řádu

- (a) v jazyce uspořádaných množin?
- (b) v jazyce aritmetiky?

Příklad 8. Uvažte konečnou hru dvou střídajících se hráčů, Alice a Boba. Hra končí po n kolech výhrou jednoho z hráčů. První tah má Alice. Hra je daná formulí $\varphi(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ vyjadřující, že hra z tahy $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ končí výhrou Alice. Najděte formule (v logice prvního řádu), které vyjadřují

- (a) “Alice nemůže prohrát”,
- (b) “Bob nemůže prohrát”,
- (c) “Alice má vyhrávající strategii”,
- (d) “Bob má vyhrávající strategii”.