NAIL062 V&P Logika: 10. cvičení

Témata: Aplikace Věty o kompaktnosti. Převod do prenexní normální formy. Skolemizace. Herbrandova věta.

Příklad 1.

Příklad 2. Buď L jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T teorie v tomto jazyce taková, že T má nekonečný model a platí v ní axiomy lineárního uspořádání T. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*; tj. že existují prvky c_i pro každé $i \in \mathbb{N}$ v A takové, že

$$\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0.$$

(Z toho plyne, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v logice prvního řádu.)

Příklad 3. Převeďte následující formule do prenexní normální formy. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

(a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x,y) \vee Q(x,y))$

(b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$

(c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$

Příklad 4. Ověřte, že platí následující:

(a) $\models (\forall x)P(x,f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$

(b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\forall x)P(x,f(x))$

(Z toho plyne, že Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli.)

Příklad 5. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ obsahuje jeden axiom φ, který není otevřený:

$$x \neq 0 \;\rightarrow\; (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models \; (x \neq 0 \;\wedge\; x \cdot y = 1 \;\wedge\; x \cdot z = 1) \;\rightarrow\; y = z$.

(a) Najděte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.

(b) Uvažme teorii T' vzniklou z T nahrazením φ za φ_S. Platí φ v T'?

(c) Lze každý model T *jednoznačně* rozšířit na model T'?

Nyní uvažme následující formuli ψ:

$$x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$$

(d) Platí v T axiomy existence a jednoznačnosti pro $\psi(x,y)$ a proměnnou y?

(e) Sestrojte extenzi T'' teorie T o definici symbolu f formulí ψ.

(f) Je T'' ekvivalentní teorii T'?

(g) Najděte formuli v původním jazyce L, která je v T'' ekvivalentní s následující formulí:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

Příklad 6.

Příklad 7. Popište Herbrandovo univerzum a uveďte příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky:

(a) $L = \langle P, Q, f, a, b\rangle$ kde P, Q jsou relační symboly, P unární a Q binární, f je unární funkční symbol, a a, b jsou konstantní symboly.

(b) $L = \langle P, f, g, a\rangle$ kde P je binární relační symbol, f, g jsou unární funkční symboly, a symbol a je konstantní.

Příklad 8. Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nesplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů (a, b jsou konstantní symboly v daném jazyce).

(a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$

(b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$

(c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$

(d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \to P(x, y)\}$

Příklad 9. Převeďte následující formule na ekvisplnitelné CNF formule, zapište je v množinové reprezentaci.

(a) $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

(b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

(c) $\neg(\exists x)((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$

(d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \to R(x, y))$

Domácí úkol (2 body)**.**