NAIL062 V&P Logika: 1. cvičení

Témata: Úvod. Vyjadřování různých vlastností ve výrokové a predikátové logice. Připomenutí matematických pojmů.

Příklad 1. Ztratili jsme se v labyrintu a před námi jsou troje dveře: červené, zelené a modré. Víme, že za právě jedněmi dveřmi je cesta ven, za ostatními je drak. Na dveřích jsou nápisy:

- Červené dveře: *"Cesta ven je za těmito dveřmi."*
- Modré dveře: *"Cesta ven není za těmito dveřmi."*
- Zelené dveře: *"Cesta ven není za modrými dveřmi."*

Víme, že alespoň jeden z nápisů je pravdivý a alespoň jeden je lživý. Formalizujte naše znalosti. Určete, za kterými dveřmi je cesta ven.

Příklad 2. Víme, že:

- *Každý zná sám sebe.*
- *Když člověk studuje na škole, musel se na ni hlásit a ta škola ho přijala.*
- *Alfons se nehlásil na školu, která přijala někoho, kdo Alfonse zná.*

Formalizujte naše znalosti. (Uměli byste ukázat, že *"Alfons nestuduje na žádné škole."*?)

Příklad 3. Mějme daný graf G (neorientovaný, bez smyček) a dva jeho vrcholy u, v. Formalizujte následující vlastnosti ve výrokové logice:

(a) G je bipartitní,

(b) G má perfektní párování,

(c) u a v leží v jedné komponentě souvislosti,

(d) G je souvislý.

Příklad 4. Najděte formule v predikátové logice v jazyce grafů, které v *teorii grafů* (neorientovaných, bez smyček) vyjadřují následující vlastnosti. Kdy to lze v logice prvního řádu, a kdy je třeba logika druhého řádu?

(a) graf obsahuje vrchol stupně 1

(b) graf je regulární stupně 3,

(c) graf obsahuje k-kliku (pro nějaké fixní k),

(d) existuje cesta délky k z vrcholu u do vrcholu v (pro nějaké fixní k),

(e) vrcholy u a v mají alespoň jednoho společného souseda,

(f) graf je bipartitní,

(g) graf má perfektní párování,

(h) vrcholy u a v leží v jedné komponentě souvislosti,

(i) graf je souvislý.

Příklad 5. Najděte formule prvního řádu vyjadřující následující vlastnosti v jazyce uspořádaných množin:

(a) x je nejmenší prvek,

(b) x je minimální prvek,

(c) x má bezprostředního následníka,

(d) každé dva prvky mají největšího společného předchůdce.

Příklad 6. Najděte formule prvního řádu (v jazyce rovnosti), které vyjadřují pro dané $k > 0$, že existuje (a) alespoň k prvků, (b) nejvýše k prvků, (c) právě k prvků.

Příklad 7. Vyjádřete v logice prvního řádu v jazyce s jedním unárním funkčním symbolem f, že funkce je (a) prostá, (b) na, (c) bijekce.

Příklad 8. Vyjádřete v logice druhého řádu, že daná binární relace je

(a) (unární) funkce,

(b) prostá funkce,

(c) funkce na,

(d) bijekce (vyjádřete tak, že k ní existuje inverzní funkce).

Příklad 9. Lze $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ rozlišit pomocí vlastností prvního řádu

(a) v jazyce uspořádaných množin?

(b) v jazyce těles?