

## NAIL062 V&P Logika: 6. cvičení

**Témata:** Ještě tablo metoda: aplikace a pokročilejší problémy. Ukázka rezoluční metody.

**Příklad 1.** Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: *“Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad.”*
- Na truhle B je nápis: *“V truhle A je smrtonosná past.”*

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

- (a) Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii  $T$  nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných  $\mathbb{P}$ . (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v  $\mathbb{P}$ .)
- (b) Pomocí tablo metody najděte všechny modely teorie  $T$ .
- (c) Může Aladin zvolit truhlu tak, aby si byl jistý, že v ní bude poklad?

**Příklad 2.** V prezidentských volbách kandidují pan A a pan B.

- Pan A říká: *“Budu zvolen nebo pan B lže.”*
  - Pan B říká: *“Pan A nebude zvolen nebo lžu.”*
  - Bude zvolen právě jeden z nich.
- (a) Formalizujte jako teorii  $T$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{z_a, z_b, p_a, p_b\}$ , kde  $z_a$  resp.  $z_b$  znamená, že zvolen bude pan A resp. pan B, a  $p_a$  resp.  $p_b$  znamená, že A resp. B mluví pravdu.
  - (b) Sestrojte dokončená tabla z teorie  $T$  s položkami  $Fz_a$  resp.  $Fz_b$  v kořeni. Jaký z těchto tabel můžeme učinit závěr? [Tabla mohou být poměrně velká.]
  - (c) Uveďte příklad výroku nad  $\mathbb{P}$ , který je v teorii  $T$  nezávislý, anebo zdůvodněte, proč takový výrok neexistuje.
  - (d) Existuje teorie  $S$  nad  $\{z_a, z_b\}$  taková, že  $T$  je konzervativní extenzí  $S$ ? Uveďte příklad, nebo zdůvodněte, proč ne.

**Příklad 3.** Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a)  $T = \{p_{i+1} \rightarrow p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  (b)  $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Pomocí tablo metody najděte všechny modely  $T$ , a to tak, že sestrojíte tablo z  $T$  s položkou  $Tp_0 \rightarrow p_1$  v kořeni. Je každý model  $T$  kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla? Pokuste se sestrojit také *systematické* tablo.

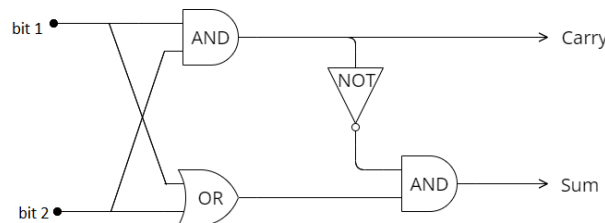
**Příklad 4.** Navrhněte vhodná atomická tabla a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví:

- pro Peirceovu spojku  $\downarrow$  (NOR),
- pro Shefferovu spojku  $\uparrow$  (NAND),
- pro  $\oplus$  (XOR),
- pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE).

**Příklad 5.** Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. že pro každou teorii  $T$  a výroky  $\varphi, \psi$  platí

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ právě když } T, \varphi \vdash \psi.$$

**Příklad 6.** *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



- Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétně, vyjádřete jej jako výrokovou teorii  $T = \{c \leftrightarrow \varphi, s \leftrightarrow \psi\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$ , kde výrokové proměnné znamenají po řadě “bit 1”, “bit 2”, “carry” a “sum”, a formule  $\varphi, \psi$  neobsahují proměnné  $c, s$ .
- Dokažte tablo metodou, že  $T \models c \rightarrow \neg s$ .
- Dokažte totéž rezoluční metodou (připomeňte si ji).

**Příklad 7.** Celá čísla postihla záhadná nemoc šířící se (v diskretních krocích) dle následujících pravidel (platících pro všechna čísla ve všech krocích).

- Zdravé číslo onemocní, právě když je právě jedno číslo nemocné (v předchozím čase).*
  - Nemocné číslo se uzdraví, právě když je předchozí číslo nemocné (v předchozím čase).*
  - V čase 0 bylo nemocné číslo 0, ostatní čísla byla zdravá.*
- Napište teorie  $T_1, T_2, T_3$  vyjadřující (po řadě) tvrzení (i), (ii), (iii) nad množinou prvovýroků  $\mathbb{P} = \{p_i^t \mid i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}_0\}$ , kde prvovýrok  $p_i^t$  vyjadřuje, že “číslo  $i$  je v čase  $t$  nemocné.”
  - Převedte axiomy z  $T_1, T_2, T_3$  do CNF a napište teorii  $S$  v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když  $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \neg p_1^2$ , tj.: “Číslo 1 je zdravé v čase 2.” (Stačí převést jen konkrétní axiomy z  $T_1, T_2, T_3$ , ze kterých plyne  $\neg p_1^2$ , a do  $S$  uvést jen příslušné klauzule.)
  - Rezolucí dokažte, že  $S$  je nesplnitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem.