

Devátá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Program

- Löwenheim-Skolemova věta
- věta o kompaktnosti
- hilbertovský kalkulus.
- úvod do rezoluce v predikátové logice
- skolemizace

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 7.5-7.6 z Kapitoly 7, Sekce 8.1-8.2 z Kapitoly 8

7.5 Důsledky korektnosti a úplnosti

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit '**platnost**' pojmem '**dokazatelnost**'. Např:

- T je **sporná**, je-li v ní dokazatelný spor (tj. $T \vdash \perp$)
- T je **kompletní**, je-li pro každou sentenci buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$, ale ne obojí (jinak by byla sporná)

Věta (O dedukci): $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Důkaz: Stačí dokázat: $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \rightarrow \psi$. To je snadné. \square

Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

Věta (Löwenheim-Skolemova): Je-li L spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná L -teorie má spočetně nekonečný model.

Důkaz: V T není dokazatelný spor. Dokončené tablo z T s $F \perp$ v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je L -redukt kanonického modelu pro tuto větev. \square

Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

Věta (O kompaktnosti): Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Důkaz: Model teorie je modelem každé části. Naopak, pokud T nemá model, je sporná, tedy $T \vdash \perp$. Vezměme nějaký **konečný** tablo důkaz \perp z T . K jeho konstrukci stačí konečně mnoho axiomů T , ty tvoří konečnou podteorii $T' \subseteq T$, která nemá model. \square

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury** $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence **pravdivé** v $\underline{\mathbb{N}}$
- **n -tý numerál**: term $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$, kde S je n -krát

Přidáme nový konstantní symbol c a vyjádříme, že je ostře větší než každý n -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část T má model
- dle věty o kompaktnosti: i T má model
- říkáme mu **nestandardní model** (označme \mathcal{A})
- platí v něm tytéž sentence, které platí ve standardním modelu
- ale zároveň obsahuje prvek $c^{\mathcal{A}}$, který je větší než každé $n \in \mathbb{N}$ (tzn. větší než hodnota termu \underline{n} v nestandardním modelu \mathcal{A})

7.6 Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

KAPITOLA 8: REZOLUCE V PREDIKÁTOVÉ LOGICE

8.1 Úvod

8.2 Skolemizace
