

## NAIL062 V&P Logika: 0. cvičení

**Témata:** Úvod. Vyjadřování různých vlastností ve výrokové a predikátové logice. Připomenutí matematických pojmů.

**Příklad 1.** Ztratili jsme se v labyrintu a před námi jsou troje dveře - červené, zelené a modré. Víme, že za právě jedněmi dveřmi je cesta ven, za ostatními je drak. Na dveřích jsou nápisy:

- Červené dveře: “Cesta ven je za těmito dveřmi.”
- Modré dveře: “Cesta ven není za těmito dveřmi.”
- Zelené dveře: “Cesta ven není za modrými dveřmi.”

Víme, že alespoň jeden z nápisů je pravdivý a alespoň jeden je lživý. Formalizujte naše znalosti. Určete, za kterými dveřmi je cesta ven.

**Příklad 2.** Víme, že:

- Každý zná sám sebe.
- Když člověk studuje na škole, musel se na ni hlásit a ta škola ho přijala.
- Alfons se nehlásil na školu, která přijala někoho, kdo Alfonse zná.

Formalizujte naše znalosti. (Uměli byste ukázat, že “Alfons nestuduje na žádné škole.”?)

**Příklad 3.** Mějme daný graf  $G$  (neorientovaný, bez smyček) a dva jeho vrcholy  $u, v$ . Formalizujte následující vlastnosti ve výrokové logice:

- (a)  $G$  je bipartitní,
- (b)  $G$  má perfektní párování,
- (c)  $u$  a  $v$  leží v jedné komponentě souvislosti,
- (d)  $G$  je souvislý.

**Příklad 4.** Najděte formule v predikátové logice v jazyce grafů, které v *teorii grafů* (neorientovaných, bez smyček) vyjadřují následující vlastnosti. Kdy to lze v logice prvního řádu, a kdy je třeba logika druhého řádu?

- (a) graf obsahuje vrchol stupně 1
- (b) graf je regulární stupně 3,
- (c) graf obsahuje  $k$ -kliku (pro nějaké fixní  $k$ ),
- (d) existuje cesta délky  $k$  z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$  (pro nějaké fixní  $k$ ),
- (e) vrcholy  $u$  a  $v$  mají alespoň jednoho společného souseda,
- (f) graf je bipartitní,
- (g) graf má perfektní párování,
- (h) vrcholy  $u$  a  $v$  leží v jedné komponentě souvislosti,
- (i) graf je souvislý.

**Příklad 5.** Najděte formule prvního řádu vyjadřující následující vlastnosti v jazyce uspořádaných množin:

- (a)  $x$  je nejmenší prvek,
- (b)  $x$  je minimální prvek,
- (c)  $x$  má bezprostředního následníka,
- (d) každé dva prvky mají největšího společného předchůdce.

**Příklad 6.** Najděte formule prvního řádu (v jazyce rovnosti), které vyjadřují pro dané  $k > 0$ , že

- (a) existuje alespoň  $k$  prvků,
- (b) existuje nejvýše  $k$  prvků,
- (c) existuje právě  $k$  prvků.

**Příklad 7.** Vyjádřete v logice prvního řádu v jazyce s jedním unárním funkčním symbolem  $f$ , že funkce je

- (a) prostá,
- (b) na,
- (c) bijekce.

**Příklad 8.** Vyjádřete v logice druhého řádu, že daná binární relace je

- (a) (unární) funkce,
- (b) prostá funkce,
- (c) funkce na,
- (d) bijekce (vyjádřete tak, že k ní existuje inverzní funkce).

**Příklad 9.** Lze  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  rozlišit pomocí vlastností prvního řádu

- (a) v jazyce uspořádaných množin?
- (b) v jazyce těles?

**Domácí úkol.** Zatím žádný není.