Sedmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Sedmá přednáška

Program

- podstruktury, expanze, redukty
- extenze teorií, extenze o definice
- definovatelnost a databázové dotazy
- vztah výrokové a predikátové logiky

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 6.6-6.9 z Kapitoly 6

6.6 Podstruktura, expanze, redukt

Podstruktura

- podstruktura zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která "zdědí" relace, funkce a konstanty
- B musí být uzavřená na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je (indukovaná) podstruktura struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ (v též signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$), značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\mathrm{ar(R)}}$ pro každý relační symbol $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\mathrm{ar(f)}} \times B)$ pro každý funkční symbol $f \in \mathcal{F}$, tj. $f^{\mathcal{B}}$ je restrikce $f^{\mathcal{A}}$ na množinu B, a výstupy jsou všechny z B

speciálně, pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$

Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina $C \subseteq A$ je uzavřená na funkci $f : A^n \to A$, pokud $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$.

Pozorování: Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant). V tom případě je to restrikce $\mathcal{A}$ na množinu C, značíme $\mathcal{A} \restriction C$.

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, můžeme psát: $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou obou těchto struktur, platí: $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \restriction \mathbb{N}$
- Množina $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}$ není univerzem podstruktury $\underline{\mathbb{Z}}$ ani $\underline{\mathbb{Q}}$, není uzavřená na násobení.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ, pro atomickou zřejmé. $\square$

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie T je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek: Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme). Podstruktura tělesa $\mathbb{Q}$ na množině $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \restriction \mathbb{Z}$, není těleso. (Je to tzv. okruh.)

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza není uzavřená? Vezmeme její uzávěr.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce $\mathcal{A}$ (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \restriction B$ je generovaná X, značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$:

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$ je podstruktura $\underline{\mathbb{N}}$ na množině všech sudých čísel

Pokud $\mathcal{A}$ nemá žádné funkce (ani konstanty), např. graf či uspořádání, potom není čím generovat, a $\mathcal{A}\langle X \rangle = \mathcal{A} \restriction X$.

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$ a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

- $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do L' (L'-expanze struktury $\mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L (L-redukt struktury $\mathcal{A}'$)

Například:

- Mějme grupu celých čísel $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$. Potom:
  - struktura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ je její redukt
  - struktura $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ (okruh celých čísel) je její expanze
- Mějme graf $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$. Potom expanze $\mathcal{G}$ o jména prvků (z množiny G) je struktura $\langle G, E^G, c_v^{\mathcal{G}} \rangle_{v \in G}$ v jazyce $\langle E, c_v \rangle_{v \in G}$, kde $c_v^{\mathcal{G}} = v$ pro všechny vrcholy $v \in G$.

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena novým konstantním symbolem c
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

Věta (O konstantách): Mějme L-formuli φ s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$. Označme jako L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a buď T' stejná teorie jako T, ale v jazyce L'. Potom:

$$T \models \varphi \ \text{ právě když } \ T' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$$

Důkaz: stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukcí

$\Rightarrow$ **Víme:** φ platí v každém modelu T. **Chceme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. Mějme model $\mathcal{A}' \models T'$ a ohodnocení $e\colon \text{Var} \to A'$ a ukažme, že $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e', speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$.

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

$\Leftarrow$ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. **Chceme:** φ platí v každém modelu T. Zvolme $\mathcal{A} \models T$ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ do L', kde c interpretujeme jako $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$. Dle předpokladu platí $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$ pro všechna ohodnocení e'. Tedy $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$, což znamená $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$ ($e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$), z toho plyne $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$).

Formule φ neobsahuje c (je nový), máme tedy i $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. $\square$

6.7 Extenze teorií

Extenze teorie

Stejně jako ve výrokové logice, je-li T teorie v jazyce L:

- extenze: T' v jazyce $L' \supseteq L$ splňující $\mathrm{Csq}_L(T) \subseteq \mathrm{Csq}_{L'}(T')$
- jednoduchá: $L' = L$
- konzervativní: $\mathrm{Csq}_L(T) = \mathrm{Csq}_L(T') = \mathrm{Csq}_{L'}(T') \cap \mathrm{Fm}_L$
- ekvivalentní: T' extenzí T a T extenzí T' (obě v témž jazyce)

Jsou-li T, T' ve stejném jazyce L:

- T' je extenze T, právě když $\mathrm{M}_L(T') \subseteq \mathrm{M}_L(T)$
- T' je ekvivalentní s T, právě když $\mathrm{M}_L(T') = \mathrm{M}_L(T)$

Zvětšíme-li jazyk:

- ve výrokové logice: přidáváme/zapomínáme hodnoty pro nové prvovýroky
- v predikátové logice: expandujeme/redukujeme modely (přidáváme/zapomínáme nové relace, funkce, konstanty)

Extenze teorie: sémantický popis

Mějme jazyky $L \subseteq L'$, L-teorii T a L'-teorii T':

(i) T' je extenzí T $\Leftrightarrow$ L-redukt každého modelu T' je model T

(ii) T' je konzervativní extenzí T $\Leftrightarrow$ T' je extenzí T, a každý model T lze expandovat do L' na nějaký model T'

Poznámka: Důkaz (ii) $\Leftarrow$ vynecháme (problém je jak získat z modelu T který nelze expandovat na model T' L-sentenci, která platí v T ale ne v T')

Důkaz: (i) $\Rightarrow$ Buď $\mathcal{A}'$ model T', $\mathcal{A}$ jeho L-redukt. Protože T' je extenzí, platí v ní, tedy i v $\mathcal{A}'$, každý axiom $\varphi \in T$. Ten ale obsahuje jen symboly z L, tedy platí i v $\mathcal{A}$.

(i) $\Leftarrow$ **Mějme:** L-sentenci φ, $T \models \varphi$. **Chceme:** $T' \models \varphi$. Pro lib. model $\mathcal{A}' \in \mathrm{M}_{L'}(T')$ víme, že jeho L-redukt $\mathcal{A}$ je modelem T, tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. Z toho plyne i $\mathcal{A}' \models \varphi$ (opět φ je v L).

(ii) $\Leftarrow$ **Mějme:** L-sentenci φ, $T' \models \varphi$. **Chceme:** $T \models \varphi$. Každý

Definice relačního symbolu

Definice funkčního symbolu

Definice konstantního symbolu

Extenze o definice

6.8 Definovatelnost ve struktuře

Definovatelné množiny

Definovatelnost s parametry

Aplikace: databázové dotazy

6.9 Vztah výrokové a predikátové logiky

Booleovy algebry

Vztah výrokové a predikátové logiky