[2 body] *Před vypracováním si přečtěte pokyny popsané v podmínkách na zápočet!*

Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při jejich výslechu bylo zjištěno následující:

- *Alespoň jeden z vyslýchaných říká pravdu a alespoň jeden lže.*
- *Adam říká: "Barbora nebo Cyril lžou"*
- *Barbora říká: "Cyril lže"*
- *Cyril říká: "Adam nebo Barbora lžou"*

(1) Vyjádřete naše znalosti jako výroky φ_1 až φ_4 nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, přičemž a, b, c znamená (po řadě), že *"Adam/Barbora/Cyril říká pravdu"*.
(2) Najděte všechny modely teorie $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$.
(3) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii T.
(4) Ukažte (libovolnou metodou), že z teorie T plyne, že: *Adam říká pravdu.*

[2 body]

label=0. Převeďte následující výrok do CNF a DNF:

$$((p \to \neg q) \to \neg r) \to \neg p.$$

(a) tabulkou (určením modelů),
(b) ekvivalentními úpravami (pokuste se najít co nejkratší CNF a DNF ekvivalenty).

lbbel=0. Uvažte teorii $S = \{p_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad var(S).

(a) Které výroky ve tvaru $p_i \to p_j$ jsou důsledky S?
(b) Které výroky ve tvaru $p_i \to (p_j \vee q_j)$ jsou důsledky S?
(c) Určete všechny modely S.

[3 body]

label=0. Pomocí algoritmu implikačního grafu najděte všechny modely následující teorie:

$$T = \{p, \neg q \to \neg r, \neg q \to \neg s, r \to p, \neg s \to \neg p\}$$

lbbel=0. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely následující teorie:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge$$
$$(\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

lcbel=0. Uvažme následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \to (p \wedge r)$$
$$\psi = s \to q$$

(a) Určete počet (až na ekvivalenci) výroků χ nad $\mathbb{P}$ takových, že $\varphi \wedge \psi \models \chi$.
(b) Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \models \varphi \wedge \psi$.
(c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) kompletní teorii T nad $\mathbb{P}$ takovou, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

[3 body]

label=0. Pomocí tablo metody:

(a) dokažte, že následující výrok je tautologie:

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

(b) dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezespornou větev:

$$\{p \to r,\ p \vee q,\ \neg s \to \neg q\} \models r \to s$$

(c) určete všechny modely:

$$\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\}$$

lbbel=0.

[2 body] Nechť T je teorie jazyka $L = \langle T \rangle$ s rovností, kde T je ternární relační symbol, s axiomy:

$$T(x,y,z) \to x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z$$
$$T(x,y,z) \to T(y,x,z) \wedge T(y,z,x) \wedge T(z,y,x) \wedge T(z,x,y) \wedge T(x,z,y)$$
$$x \neq y \to (\exists z)(T(x,y,z) \wedge (\forall u)(T(x,y,u) \to u = z))$$

Modely teorie T jsou tzv. *Steinerovy systémy trojic*, v našem případě uspořádaných. Uvažme model $\mathcal{F} = \langle \{1,2,\dots,7\}, T^F \rangle$ teorie T na obrázku (tzv. *Fanova rovina*), kde každá "přímka" reprezentuje trojici prvků, jež jsou v relaci T^F v libovolném pořadí, tedy $T^F = \{(2,4,6),(6,2,4),\dots\}$.

[height=4cm]files/fano.png

(1) Nalezněte co nejmenší množinu parametrů A, která v modelu $\mathcal{F}$ umožňuje definovat libovolný jeho prvek (formulí jazyka L). Pro každý prvek napište příslušnou definující formuli (s dosazenými parametry). Zdůvodněte, proč je A nejmenší možná.

(2) Jsou teorie $T' = T \cup \{f(x,y) = z \leftrightarrow T(x,y,z)\}$ a $T'' = T \cup \{f(x,y) = z \leftrightarrow T(x,y,z) \vee (x = y \wedge y = z)\}$, kde f je nový binární funkční symbol, (korektními) extenzemi teorie T o definici? Uveďte zdůvodnění.

CVIČENÍ Z LOGIKY: DOMÁCÍ ÚKOL Č. 1

Úkol odevzdávejte v Moodle. Ponechte si dostatečný čas pro odevzdání, tak aby vám krátkodobé technické potíže s Moodle nezabránily úkol odevzdat. Pozdě odevzdané úkoly nebudou hodnoceny, kromě případů hodných zvláštního zřetele. Odevzdané řešení musí být vaše vlastní, není dovoleno hledat nápovědy ani řešení konzultovat s kýmkoliv kromě mne. Své odpovědi dostatečně podrobně zdůvodněte, uveďte všechny pomocné výpočty apod.

Úkol 1. Převeďte následující výrok do CNF a do DNF. (Uveďte celý postup, ne jen odpověď.)

$$((p \to \neg q) \to \neg r) \vee \neg p.$$

Úkol 2. Rozhodněte, zda je následující 2-CNF výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení. Nakreslete příslušný implikační graf, a graf silně souvislých komponent v topologickém uspořádání.

$$(a \vee c) \wedge (a \vee \neg d) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (b \vee \neg e) \wedge (\neg c \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg f) \wedge$$
$$\wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee f) \wedge (c \vee \neg f) \wedge \neg f$$

Úkol 3. Rozhodněte, zda je následující výrok v Hornově tvaru splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení. (Uveďte celý postup, ne jen odpověď.)

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge$$
$$\wedge (\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

Úkol 4. Uvažme následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p,q,r,s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \to (p \wedge r)$$
$$\psi = s \to q$$

(a) Určete počet (až na ekvivalenci) výroků χ nad $\mathbb{P}$ takových, že $\varphi \wedge \psi \models \chi$.
(b) Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \models \varphi \wedge \psi$.
(c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) úplnou teorii T nad $\mathbb{P}$ takovou, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

Úkol 5. Uvažme následující tvrzení:

(*i*) *Ten, kdo je dobrý běžec a má dobrou kondici, uběhne maraton.*
(*ii*) *Ten, kdo nemá štěstí a nemá dobrou kondici, neuběhne maraton.*
(*iii*) *Ten, kdo uběhne maraton, je dobrý běžec.*
(*iv*) *Budu-li mít štěstí, uběhnu maraton.*
(*v*) *Mám dobrou kondici.*

(a) Přeložte tvrzení (i) až (v) po řadě do výroků φ_1 až φ_5 v jazyce $L = \langle b, k, m, s\rangle$, kde výrokové proměnné mají po řadě význam "být dobrý běžec", "mít dobrou kondici", "uběhnout maraton" a "mít štěstí".
(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_5\}$ s položkou $F(k \wedge \neg k)$ v kořeni. Sestrojte kanonický model pro nejlevější bezespornou větev tohoto tabla.
(c) Najděte příklad výroků v jazyce L, které jsou T-ekvivalentní, ale ne logicky ekvivalentní.
(d) Určete počet navzájem neekvivalentních jednoduchých extenzí teorie T.