NAIL062 V&P Logika: 11. cvičení

Témata: Aplikace Věty o kompaktnosti. Ještě tablo metoda. Převod do PNF. Skolemizace. Herbrandova věta.

Příklad 1. Buď L jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T L-teorie, která má nekončený model a platí v ní axiomy lineárního uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že T má model s *nekonečným klesajícím řetězcem.* (Z toho plyne, že *dobré uspořádání*, tj. lineární a každá neprázdná podmnožina má nejmenší prvek, není definovatelné v logice prvního řádu.)

Příklad 2. Dokažte syntakticky, pomocí transformací tabel:

(a) *Větu o konstantách:* Buď φ L-formule s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$ a T L-teorie. Označme L' extenzi L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a T' teorii T v L'. Potom platí: $T \models (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\varphi$ právě když $T' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$

(b) *Větu o dedukci:* Pro každou (uzavřenou) teorii T a sentence φ, ψ platí: $T \models \varphi \to \psi$ právě když $T, \varphi \models \psi$

Příklad 3. Ukažme, že platí následující pravidla, kde φ a ψ jsou sentence nebo formule s volnou proměnnou x (značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$). Najděte tablo důkazy dané formule. (Viz převod do PNF, stejně lze dokázat i ostatní pravidla o vytýkání kvantifikátorů.)

(a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \to (\forall x)\neg\varphi(x)$,

(b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \to \neg(\exists x)\varphi(x)$,

(c) $(\exists x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\forall x)\varphi(x) \to \psi)$ kde x není volná v ψ,

(d) $((\exists x)\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x)(\varphi(x) \to \psi)$ kde x není volná v ψ.

Příklad 4. Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

(a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \to Q(y,z)) \land (\exists y)((\forall x)R(x,y) \lor Q(x,y))$

(b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$

(c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \land (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$

Příklad 5. Převeďte na ekvisplnitelnou CNF formuli, zapište v množinové reprezentaci.

(a) $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

(b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

(c) $\neg(\exists x)((P(x) \to P(c)) \land (P(x) \to P(d)))$

(d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \land P(z,y) \to R(x,y))$

Příklad 6. Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, ověřte, že platí:

(a) $\models (\forall x)P(x, f(x)) \to (\forall x)(\exists y)P(x, y)$

(b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \to (\forall x)P(x, f(x))$

Příklad 7. Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R \rangle$ s rovností, kde:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = &\quad (\exists y)R(y, x) \\ \varphi_2 = &\quad (\exists z)(R(z, x) \land R(z, y) \land (\forall w)(R(w, x) \land R(w, y) \to R(w, z))) \end{aligned}$$

(a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T.

(b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, R^A \rangle$, kde $(n, m) \in R^A$ právě když n dělí m. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ L-struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$.

Příklad 8. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ obsahuje jeden axiom φ, který není otevřený: $x \neq 0 \ \to \ (\exists y)(x \cdot y = 1)$. Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models \ (x \neq 0 \ \land \ x \cdot y = 1 \ \land \ x \cdot z = 1) \ \to \ y = z$.

(a) Najděte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.

(b) Uvažme teorii T' vzniklou z T nahrazením φ za φ_S. Platí φ v T'?

(c) Lze každý model T *jednoznačně* rozšířit na model T'?

Nyní uvažme formuli $\psi = x \cdot y = 1 \lor (x = 0 \land y = 0)$.

(d) Platí v T axiomy existence a jednoznačnosti pro $\psi(x, y)$ a proměnnou y?

(e) Sestrojte extenzi T'' teorie T o definici symbolu f formulí ψ.

(f) Je T'' ekvivalentní teorii T'?

(g) Najděte L-formuli, která je v T''-ekvivalentní s formulí: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Příklad 9. Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nesplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů (a, b jsou konstantní symboly v daném jazyce).

(a) $T = \{\neg P(x) \lor Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$

(b) $T = \{\neg P(x) \lor Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$

(c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$

(d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \to P(x, y)\}$