

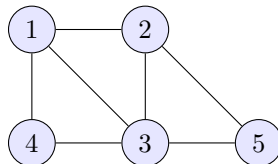
## NAIL062 V&P Logika: 1. cvičení

**Témata:** Syntaxe výrokové logiky (strom výrazu, vytvářející strom, prefixový, infixový a postfixový zápis), sémantika výrokové logiky (Booleovské operátory, pravdivostní tabulka, Vennův diagram, tautologie, modely, důsledky). Univerzálnost logických spojek.

**Příklad 1.** Uvažme následující tvrzení:

- Ten, kdo je dobrý běžec a má dobrou kondici, uběhne maraton.
  - Ten, kdo nemá štěstí a nemá dobrou kondici, neuběhne maraton.
  - Ten, kdo uběhne maraton, je dobrý běžec.
  - Budu-li mít štěstí, uběhnu maraton.
  - Mám dobrou kondici.
- (a) Formalizujte tato tvrzení jako teorii  $T$  ve výrokové logice v jazyce  $L = \langle b, k, m, s \rangle$ , kde výrokové proměnné mají po řadě význam “být dobrý běžec”, “mít dobrou kondici”, “uběhnout maraton” a “mít štěstí”.
- (b) Najděte všechny modely teorie  $T$ . Pokuste se využít k tomu *tablo*.
- (c) Napište několik různých důsledků teorie  $T$ .
- (d) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii  $T$ .
- (e) Výrok je v *disjunktivní normální formě (DNF)*, je-li disjunkcí konjunkcí literálů. Najděte DNF teorii ekvivalentní teorii  $T$ .

**Příklad 2.** Uvažme *vrcholová pokrytí* následujícího grafu:



- (a) Formalizujte ve výrokové logice problém, zda graf na obrázku má nejvýše  $k$ -prvkové vrcholové pokrytí, pro pevně zvolené  $k$ . Označme výslednou teorii jako  $T_k$ .
- (b) Ukažte, že  $T_2$  nemá žádné modely, tj. graf nemá 2-prvkové vrcholové pokrytí.
- (c) Najděte všechna 3-prvková vrcholová pokrytí.

**Příklad 3.** Sestrojte strom výrazu (a vytvářející strom), запиšte v prefixovém, infixovém a postfixovém formátu:

- (a)  $(3 + 5) * (-2) + (2 * 3)$
- (b)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
- (c)  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$

**Příklad 4.** Sestrojte pravdivostní tabulky a Vennův diagram pro následující výrokové formule. Najděte jejich množiny modelů. Které z nich jsou tautologie?

- (a)  $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$
- (b)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
- (c)  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- (d)  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

**Příklad 5.** Uveďte příklad výroku v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ , který

- (a) je pravdivý,
- (b) je sporný,
- (c) je nezávislý,
- (d) je ekvivalentní s, ale různý od, výroku  $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$ ,
- (e) má za modely právě  $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ .

**Příklad 6.** Ukažte, že  $\wedge$  a  $\vee$  nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že  $\{\wedge, \vee\}$  není *univerzální* množina logických spojek.

**Příklad 7.** Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

- (a)  $\{\downarrow\}$  kde  $\downarrow$  je Peirce arrow (NOR),
- (b)  $\{\uparrow\}$  kde  $\uparrow$  je Sheffer stroke (NAND),
- (c)  $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ,
- (d)  $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ .

**Příklad 8.** Uvažte ternární Booleovský operátor IFTE( $p, q, r$ ) definovaný jako “if  $p$  then  $q$  else  $r$ ”.

- (a) Zkonstruuje pravdivostní tabulku.
- (b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory ( $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \dots$ ) lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.

**Domácí úkol (2 body).** *Před vypracováním si přečtete pokyny popsané v podmínkách na zápočet!*

Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při jejich výsledku bylo zjištěno následující:

- (i) Alespoň jeden z vyslýcháných říká pravdu a alespoň jeden lže.
- (ii) Adam říká: “Barbora nebo Cyril lžou”
- (iii) Barbora říká: “Cyril lže”
- (iv) Cyril říká: “Adam nebo Barbora lžou”
- (a) Vyjádřete naše znalosti jako výroky  $\varphi_1$  až  $\varphi_4$  nad množinou prvovýroků  $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$ , přičemž  $a, b, c$  znamená (po řadě), že “Adam/Barbora/Cyril říká pravdu”.
- (b) Najděte všechny modely teorie  $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$ .
- (c) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii  $T$ .
- (d) Ukažte (libovolnou metodou), že z teorie  $T$  plyne, že Adam říká pravdu.