NAIL062 V&P Logika: 1. cvičení

Témata: Syntaxe výrokové logiky (strom výrazu, vytvořující strom, prefixový, infixový a postfixový zápis), sémantika výrokové logiky (Booleovské operátory, pravdivostní tabulka, Vennův diagram, tautologie, modely, důsledky). Univerzálnost logických spojek.

Příklad 1. Uvažme následující tvrzení:

- Ten, kdo je dobrý běžec a má dobrou kondici, uběhne maraton.
- Ten, kdo nemá štěstí a nemá dobrou kondici, neuběhne maraton.
- Ten, kdo uběhne maraton, je dobrý běžec.
- Budu-li mít štěstí, uběhnu maraton.
- Mám dobrou kondici.

(a) Formalizujte tato tvrzení jako teorii T ve výrokové logice v jazyce $L = \langle b, k, m, s \rangle$, kde výrokové proměnné mají po řadě význam "být dobrý běžec", "mít dobrou kondici", "uběhnout maraton" a "mít štěstí".

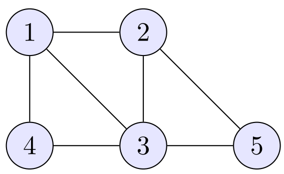
(b) Najděte všechny modely teorie T. Pokuste se využít k tomu *tablo*.

(c) Napište několik různých důsledků teorie T.

(d) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii T.

(e) Výrok je v *disjunktivní normální formě (DNF)*, je-li disjunkcí konjunkcí literálů. Najděte DNF teorii ekvivalentní teorii T.

Příklad 2. Uvažme *vrcholová pokrytí* následujícího grafu:



(a) Formalizujte ve výrokové logice problém, zda graf na obrázku má nejvýše k-prvkové vrcholové pokrytí, pro pevně zvolené k. Označme výslednou teorii jako T_k.

(b) Ukažte, že T_2 nemá žádné modely, tj. graf nemá 2-prvkové vrcholové pokrytí.

(c) Najděte všechna 3-prvková vrcholová pokrytí.

Příklad 3. Sestrojte strom výrazu (a vytvořující strom), zapište v prefixovém, infixovém a postfixovém formátu:

(a) $(3 + 5) * (-2) + (2 * 3)$

(b) $(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

(c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \to (p \wedge q))$

Příklad 4. Sestrojte pravdivostní tabulky a Vennův diagram pro následující výrokové formule. Najděte jejich množiny modelů. Které z nich jsou tautologie?

(a) $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$

(b) $(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

(c) $((p \to q) \to p) \to p$

(d) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Příklad 5. Uveďte příklad výroku v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, který

(a) je pravdivý,

(b) je sporný,

(c) je nezávislý,

(d) je ekvivalentní s, ale různý od, výroku $(p \wedge q) \to \neg r$,

(e) má za modely právě $\{(1,0,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$.

Příklad 6. Ukažte, že $\wedge$ a $\vee$ nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že $\{\wedge, \vee\}$ není *univerzální* množina logických spojek.

Příklad 7. Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

(a) $\{\downarrow\}$ kde $\downarrow$ je Peirce arrow (NOR),

(b) $\{\uparrow\}$ kde $\uparrow$ je Sheffer stroke (NAND),

(c) $\{\vee, \to, \leftrightarrow\}$,

(d) $\{\vee, \wedge, \to\}$.

Příklad 8. Uvažte ternární Booleovský operátor IFTE(p, q, r) definovaný jako "if p then q else r".

(a) Zkonstruujte pravdivostní tabulku.

(b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory $(\neg, \to, \wedge, \vee, \ldots)$ lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.

Domácí úkol (2 body). *Před vypracováním si přečtěte pokyny popsané v podmínkách na zápočet!*

Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při jejich výslechu bylo zjištěno následující:

(i) Alespoň jeden z vyslýchaných říká pravdu a alespoň jeden lže.

(ii) Adam říká: "Barbora nebo Cyril lžou"

(iii) Barbora říká: "Cyril lže"

(iv) Cyril říká: "Adam nebo Barbora lžou"

(a) Vyjádřete naše znalosti jako výroky φ_1 až φ_4 nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, přičemž a, b, c znamená (po řadě), že *"Adam/Barbora/Cyril říká pravdu"*.

(b) Najděte všechny modely teorie $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$.

(c) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii T.

(d) Ukažte (libovolnou metodou), že z teorie T plyne, že Adam říká pravdu.