

# Osmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

---

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

## Program

- tablo metoda v predikátové logice
- jazyky s rovností
- korektnost a úplnost, kanonický model

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 7.1-7.4 z Kapitoly 7

## KAPITOLA 7: TABLO METODA V PREDIKÁTOVÉ LOGICE

---

## **7.1 Neformální úvod**

---

# Úvodní příklady: dva tablo důkazy

$$F(\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$T(\exists x)\neg P(x)$$

$$\mid$$
$$F\neg(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$T(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$T\neg P(c_0)$$

$$\mid$$
$$FP(c_0)$$

$$\mid$$
$$T(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$TP(c_0)$$



$$F\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$$

$$\mid$$
$$T\neg(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$F(\exists x)\neg P(x)$$

$$\mid$$
$$F(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$FP(c_0)$$

$$\mid$$
$$F(\exists x)\neg P(x)$$

$$\mid$$
$$F\neg P(c_0)$$

$$\mid$$
$$TP(c_0)$$



# Tablo metoda v predikátové logice

- opět vždy předpokládáme, že jazyk  $L$  je spočetný (nejprve bez rovnosti, později metodu rozšíříme pro rovnost)
- v položkách musí být **sentence**: pravdivostní hodnota nesmí záviset na ohodnocení (ale můžeme vzít **generální uzávěry**)
- **redukce položek**: stejná atomická tabla pro logické spojky (kde  $\varphi, \psi$  jsou sentence), ale čtyři nové případy **pro kvantifikátory**:
  - typ “**svědek**”: položky tvaru  $T(\exists x)\varphi(x)$  a  $F(\forall x)\varphi(x)$
  - typ “**všichni**”: položky tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  a  $F(\exists x)\varphi(x)$
- kvantifikátor nelze odstranit,  $\varphi(x)$  by typicky nebyla sentence
- místo toho za  $x$  **substituujeme konstantní term**  $t$ :  $\varphi(x/t)$
- jaký? podle typu položky (“**svědek**” vs. “**všichni**”)

# Redukce položek s kvantifikátorem

- jazyk  $L$  rozšíříme o spočetně mnoho nových (pomocných) konstantních symbolů  $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ , označíme  $L_C$
- vždy máme k dispozici nový, dosud nepoužitý symbol  $c \in C$
- **typ “svědek”**: dosadíme nový  $c \in C$  (dosud na větvi není)
  - pro  $T(\exists x)\varphi(x)$  tedy máme  $T\varphi(x/c)$
  - $c$  hraje roli prvku, který položku ‘splňuje’
- **typ “všichni”**: substituujeme libovolný konstantní  $L_C$ -term
  - pro  $T(\forall x)\varphi(x)$  tedy máme  $T\varphi(x/t)$
  - bezesporná větev je dokončená jen pokud dosadíme všechny  $t$  (‘použijeme vše, co víme’)
- **konvence**: kořeny atomických tabel nekreslíme kromě položek typu “všichni” (po jednom dosazení ještě nejsme hotovi!)
- **typický postup**: nejprve zredukujeme položky typu “svědek”, poté zjistíme, co ‘o svědcích říkají’ položky typu “všichni”

## 7.2 Formální definice

---



- buď  $L$  **spočetný** jazyk **bez rovnosti**.
- označme  $L_C$  rozšíření  $L$  o spočetně mnoho nových **pomocných** konstantních symbolů  $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- zvolme očíslování konstantních  $L_C$ -termů:  $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- mějme nějakou  $L$ -teorii  $T$  a  $L$ -sentenci  $\varphi$
- **položka** je nápis  $T\varphi$  nebo  $F\varphi$ , kde  $\varphi$  je  $L_C$ -sentence
- položky tvaru  $T(\exists x)\varphi(x)$  a  $F(\forall x)\varphi(x)$  jsou **typu** “**svědek**”
- položky tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  a  $F(\exists x)\varphi(x)$  jsou **typu** “**všichni**”
- **atomická tabla** jsou násl. položkami označované stromy:

# Atomická tabla pro kvantifikátory

$\varphi$  je libovolná  $L_C$ -sentence,  $x$  proměnná,  $t_i$  konstantní  $L_C$ -term,  $c_i \in C$  je nový pomocný konstantní symbol (při konstrukci tabla nesměl dosud být na dané větvi)

	$\forall$	$\exists$
True	$\begin{array}{c} T(\forall x)\varphi(x) \\   \\ T\varphi(x/t_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} T(\exists x)\varphi(x) \\   \\ T\varphi(x/c_i) \end{array}$
False	$\begin{array}{c} F(\forall x)\varphi(x) \\   \\ F\varphi(x/c_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\exists x)\varphi(x) \\   \\ F\varphi(x/t_i) \end{array}$

# Atomická tabla pro logické spojky

$\varphi$  a  $\psi$  jsou libovolné  $L_C$ -sentence

	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
True	$T\neg\varphi$	$T\varphi \wedge \psi$			$T\varphi \leftrightarrow \psi$
					/ \
	$F\varphi$	$T\varphi$	$T\varphi \vee \psi$	$T\varphi \rightarrow \psi$	$T\varphi$ $F\varphi$
			/ \	/ \	
		$T\psi$	$T\varphi$ $T\psi$	$F\varphi$ $T\psi$	$T\psi$ $F\psi$
False	$F\neg\varphi$		$F\varphi \vee \psi$	$F\varphi \rightarrow \psi$	$F\varphi \leftrightarrow \psi$
		$F\varphi \wedge \psi$			/ \
	$T\varphi$	$F\varphi$ $F\psi$	$F\varphi$	$T\varphi$	$T\varphi$ $F\varphi$
		/ \			
		$F\varphi$ $F\psi$	$F\psi$	$F\psi$	$F\psi$ $T\psi$

# Formální definice tabla

- **konečné tablo z teorie  $T$**  je uspoř., položkami označ. strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
  - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie  $T$
  - pro libovolnou položku  $P$  na libovolné větvi  $V$  můžeme na konec větve  $V$  připojit atomické tablo pro položku  $P$   
je-li  $P$  typu “svědek”, můžeme použít jen  $c_i \in C$ , který dosud na  $V$  není (pro typ “všichni” lze použít lib. konst.  $L_C$ -term  $t_i$ )
  - na konec libovolné větve můžeme připojit položku  $T\alpha$  pro libovolný axiom  $\alpha \in T$
- **tablo z teorie  $T$**  je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ , kde:
  - $\tau_i$  jsou konečná tabla z  $T$
  - $\tau_0$  je jednoprvkové tablo
  - $\tau_{i+1}$  vzniklo z  $\tau_i$  v jednom kroku
- **tablo pro položku  $P$**  je tablo, které má položku  $P$  v kořeni

**konvence:** kořen atom. tabla nezapisujeme není-li  $P$  typu “všichni”

# Dokončené a sporné tablo

- Tablo je **sporné**, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je **sporná**, pokud obsahuje položky  $T\psi$  a  $F\psi$  pro nějakou **sentenci**  $\psi$ , jinak je **bezesporná**.
- Tablo je **dokončené**, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je **dokončená**, pokud je sporná, nebo
  - každá její položka je na této větvi **redukována**,
  - a zároveň obsahuje položku  $T\alpha$  pro každý axiom  $\alpha \in T$ .
- Položka  $P$  je **redukována** na větvi  $V$  procházející  $P$ , pokud
  - je tvaru  $T\psi$  resp.  $F\psi$  pro **atomickou sentenci**, nebo
  - **není typu "všichni"** a vyskytuje se na  $V$  jako kořen atomického tabla (tj., typicky, již došlo k jejímu rozvoji na  $V$ ), nebo
  - je typu **"všichni"** a všechny její **výskyty** na větvi  $V$  jsou na  $V$  **redukováné**.

## Kdy je výskyt položky typu “všichni” redukováný?

Výskyt položky  $P$  typu “všichni” na  $V$  je  $i$ -tý, má-li právě  $i - 1$  předků označených  $P$ , a  $i$ -tý výskyt je redukováný na  $V$ , pokud

- $P$  má  $(i + 1)$ -ní výskyt na  $V$ , a zároveň
- na  $V$  je položka  $\mathsf{T}\varphi(x/t_i)$  (je-li  $P = \mathsf{T}(\forall x)\varphi(x)$ ) resp.  $\mathsf{F}\varphi(x/t_i)$  (je-li  $P = \mathsf{F}(\exists x)\varphi(x)$ ), kde  $t_i$  je  $i$ -tý konstantní  $L_C$ -term (tj., typicky, už jsme za  $x$  substituovali  $t_i$ )

**NB:** je-li položka typu “všichni” na  $V$  redukována, má na  $V$  nekonečně výskytů, a dosadili jsme všechny konstantní  $L_C$ -termy

- **tablo důkaz** sentence  $\varphi$  z teorie  $T$  je **sporné** tablo z teorie  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni
- pokud existuje, je  $\varphi$  **(tablo) dokazatelný** z  $T$ , píšeme  $T \vdash \varphi$
- podobně, **tablo zamítnutí** je sporné tablo s  $T\varphi$  v kořeni
- existuje-li, je  $\varphi$  **(tablo) zamítnutelný** z  $T$ , tj. platí  $T \vdash \neg\varphi$

## Příklad: tablo důkaz (v logice)

$$F(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$$

$$T(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$F(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$T(\forall x)P(x)$$

$$F(\forall x)Q(x)$$

$$FQ(c_0)$$

$$T(\forall x)P(x)$$

$$TP(c_0)$$

$$T(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$TP(c_0) \rightarrow Q(c_0)$$

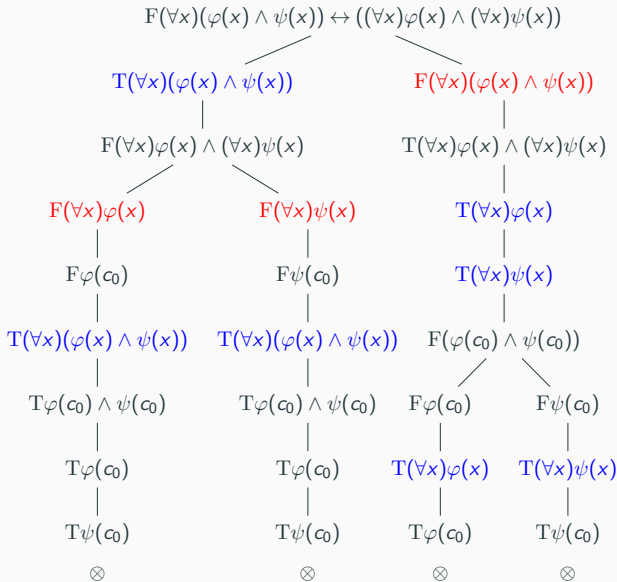
$$FP(c_0)$$

$$TQ(c_0)$$





## Ještě příklad ( $\varphi, \psi$ jsou formule s jedinou volnou proměnnou $x$ )



( $c_0$  lze použít jako **nový** ve všech případech: **na dané větvi** se dosud nevyskytuje)

# Systematické tablo

musí někdy zredukovat každou položku, použít každý axiom, a nově ve všech položkách typu “**všichni**” dosadit každý  $L_C$  term  $t_i$

**Systematické tablo** z  $T = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$  pro položku  $R$  je  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ , kde  $\tau_0$  je jednoprvkové s položkou  $R$ , a pro  $i \geq 0$ :

- buď  $P$  nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukována na nějaké bezesporné větvi procházející  $P$  (resp. je-li typu “**všichni**”, její **výskyt** není redukován)
- nejprve definujeme  $\tau'_i$  vzniklé z  $\tau_i$  připojením atomického tabla pro  $P$  na každou bezespornou větev procházející  $P$ , kde je-li  $P$  typu “**všichni**” a má-li ve vrcholu  $k$ -tý výskyt, dosadíme  $k$ -tý  $L_C$ -term  $t_k$ , je-li typu “**svědek**”, substituujeme  $c_i \in C$  s nejmenším  $i$ , které na větvi zatím není
- pokud taková položka  $P$  neexistuje, potom  $\tau'_i = \tau_i$
- $\tau_{i+1}$  vznikne z  $\tau'_i$  připojením  $T\alpha_{i+1}$  na vš. bezesporné větve (pokud už jsme použili všechny axiomy, definujeme  $\tau_{i+1} = \tau'_i$ )

# Konečnost a systematicčnost důkazů

**Lemma:** Systematické tablo je dokončené.

**Důkaz:**  $k$ -tý výskyt položky typu “**všichni**” redukuje se když na něj narazíme: připojíme  $(k + 1)$ -ní výskyt a dosadíme  $k$ -tý  $L_C$ -term  $t_k$ . Zbytek důkazu jako ve výrokové logice.  $\square$

Neprodlužujeme-li sporné větve (což nemusíme), je sporné tablo vždy konečné. Důkaz stejný jako ve výrokové logice:

**Důsledek (Konečnost důkazů):** Pokud  $T \vdash \varphi$ , potom existuje i konečný tablo důkaz  $\varphi$  z  $T$ .

Stejně jako ve výrokové logice z důkazu plyne:

**Důsledek (Systematicčnost důkazů):** Pokud  $T \vdash \varphi$ , potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem  $\varphi$  z  $T$ .

## 7.3 Jazyky s rovností

---

$1 + 0 = 0 + 1$ ? identita celých čísel, výrazů, množin,  
unifikovatelnost termů (v Prologu), ...

Tablo je čistě **syntaktický** objekt, ale  $=^A$  má být **identita** na  $A$ . Jak toho docílit?

Mějme dokončenou bezespornou větev tabla s položkou  $Tc_1 = c_2$ .  
V **kanonickém modelu** musí platit nejen  $(c_1^A, c_2^A) \in =^A$ , ale také:

- $c_2^A =^A c_1^A$
- $f^A(c_1^A) =^A f^A(c_2^A)$
- $c_1^A \in P^A$  právě když  $c_2^A \in P^A$

To vynutíme přidáním **axiomů rovnosti**,  $=^A$  bude **kongruence**  $\mathcal{A}$  (ekvivalence, která se chová dobře k funkcím a relacím).

Poté vezmeme **faktorstrukturu**  $\mathcal{B} = \mathcal{A}/_{=A}$ , v ní už je  $=^B$  **identita**.

# Kongruence a faktorstruktura

Bud'  $\sim$  ekvivalence na  $A$ ,  $f: A^n \rightarrow A$ ,  $R \subseteq A^n$ . Říkáme, že  $\sim$  je:

- **kongruence pro  $f$** , pokud pro všechna  $a_i, b_i \in A$  taková, že  $a_i \sim b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), platí  $f(a_1, \dots, a_n) \sim f(b_1, \dots, b_n)$
- **kongruence pro  $R$** , pokud pro všechna  $a_i, b_i \in A$  taková, že  $a_i \sim b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), platí  $R(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R(b_1, \dots, b_n)$

**Kongruence** struktury  $\mathcal{A}$  je ekvivalence na  $A$ , která je kongruencí pro všechny funkce a relace  $\mathcal{A}$ .

**Faktorstruktura (podílová struktura)**  $\mathcal{A}$  podle  $\sim$  je struktura  $\mathcal{A}/\sim$  v témž jazyce, doména  $A/\sim$  je množina všech rozkladových tříd  $A$  podle  $\sim$ , funkce a relace definujeme **pomocí reprezentantů**:

- $f^{\mathcal{A}/\sim}([a_1]_\sim, \dots, [a_n]_\sim) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)]_\sim$
- $R^{\mathcal{A}/\sim}([a_1]_\sim, \dots, [a_n]_\sim) \Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$

# Axiomy rovnosti

Axiomy rovnosti pro jazyk  $L$  s rovností:

(i)  $x = x$

(ii) pro každý  $n$ -ární funkční symbol  $f$  jazyka  $L$ :

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$$

(iii) pro každý  $n$ -ární relační symbol  $R$  jazyka  $L$  **včetně rovnosti**:

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$$

- symetrie a tranzitivita plynou z (iii) pro  $=$  (dokažte si)
- z axiomů (i) a (iii) tedy plyne, že relace  $=^A$  je ekvivalence
- axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že  $=^A$  je kongruence

V tablo metodě pro jazyk s rovností implicitně přidáme axiomy rovnosti (přesněji jejich generální uzávěry, potřebujeme sentence).

## Tablo důkaz s rovností

Je-li  $T$  teorie v jazyce  $L$  s rovností, označme jako  $T^*$  rozšíření  $T$  o generální uzávěry axiomů rovnosti pro  $L$ .

- **tablo důkaz** z teorie  $T$  je **tablo důkaz** z  $T^*$
- podobně pro tablo zamítnutí, a obecně jakékoliv tablo z  $T$

### Pozorování:

- Je-li  $\mathcal{A} \models T^*$ , potom i  $\mathcal{A}/_{=\mathcal{A}} \models T^*$ , a ve struktuře  $\mathcal{A}/_{=\mathcal{A}}$  je symbol rovnosti interpretován jako identita.
- Na druhou stranu, v každém modelu, ve kterém je symbol rovnosti interpretován jako identita, platí axiomy rovnosti.

(Použijeme při konstrukci **kanonického modelu** v důkazu úplnosti.)



## 7.4 Korektnost a úplnost

---

Stejně jako ve výrokové logice:

dokazatelnost je totéž, co platnost

- $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$  (korektnost) “co jsme dokázali, platí”
- $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$  (úplnost) “co platí, lze dokázat”

(Důkazy mají stejnou strukturu, liší se jen v implementačních detailech pomocných lemmat.)

## Korektnost: pomocné lemma

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s položkou  $P$ , pokud  $P = T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = F\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , a s větví  $V$ , shoduje-li s každou položkou na  $V$ .

**Lemma:** Shoduje-li se model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  (v jazyce  $L$ ) s položkou v kořeni tablu z  $T$ , potom lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  (interpretovat symboly  $c_i \in C$ ) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly  $c_i$  vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

**Důkaz:** Indukcí podle konstrukce  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$  najdeme posloupnost větví  $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$  a expanzí  $\mathcal{A}_i$  o konstanty na  $V_i$  tak, že:

- $V_i$  je větev v tablu  $\tau_i$  shodující se s modelem  $\mathcal{A}_i$
- $V_{i+1}$  je prodloužením  $V_i$  a  $\mathcal{A}_{i+1}$  je expanzí  $\mathcal{A}_i$

Hledaná větev v  $\tau$  je  $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$ ,  $L_C$ -expanze  $\mathcal{A}$  je 'limita'  $\mathcal{A}_i$ : vyskytuje-li se  $c \in C$  na  $V_i$ , interpretuj jako v  $\mathcal{A}_i$ , jinak libovolně.

**Báze:**  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$  se shoduje s kořenem, tj. s (jednoprvkovou)  $V_0$  v  $\tau_0$ .

## Pokračování důkazu pomocného lemmatu

**Indukční krok:** Pokud jsme neprodloužili  $V_i$ :  $V_{i+1} = V_i$ ,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ .

Pokud jsme připojili  $T\alpha$  (pro  $\alpha \in T$ ) na konec  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1}$  jako tuto prodlouženou větev,  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  (nepřidali jsme nový symbol). Protože  $\mathcal{A} \models T$ , máme i  $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$ , tedy se shoduje.

Nechť  $\tau_{i+1}$  vzniklo připojením atomického tabla pro  $P$  na konec  $V_i$ .

- **logická spojka:**  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme  $V_i$  na  $V_{i+1}$
- **typ “svědek”:** SÚNO  $P = T(\exists x)\varphi(x)$ :  $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$ , tedy existuje  $a \in A$ , že  $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$ .  $V_{i+1}$  je prodloužení  $V_i$  o nově přidanou  $T\varphi(x/c)$ ,  $\mathcal{A}_{i+1}$  je expanze  $\mathcal{A}_i$  o  $c^{\mathcal{A}_{i+1}} = a$ .
- **typ “všichni”:**  $V_{i+1}$  je prodloužení  $V_i$  o atomické tablo. SÚNO nová položka  $T\varphi(x/t)$  pro nějaký  $L_C$ -term  $t$ . Model  $\mathcal{A}_{i+1}$  je libovolná expanze  $\mathcal{A}_i$  o nové symboly z  $t$ .  $\mathcal{A}_i \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models \varphi(x/t)$ , tedy se shoduje.  $\square$

# Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

**Věta (O korektnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  tablo dokazatelná z teorie  $T$ , potom je  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

**Myšlenka důkazu:** Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

**Důkaz:** Sporem, necht'  $T \not\models \varphi$ , tj. existuje  $\mathcal{A} \in M(T)$ , že  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ .

Protože  $T \vdash \varphi$ , existuje tablo důkaz  $\varphi$  z  $T$ , což je sporné tablo z  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni.

Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s kořenem  $F\varphi$ , tedy podle Lemmatu lze interpretovat symboly  $c \in C$  tak, že se výsledná  $L_C$ -expanze  $\mathcal{A}'$  shoduje s nějakou větví  $V$ . Všechny větve jsou ale sporné, musela by se shodovat s  $T\psi$  a zároveň  $F\psi$  pro nějakou  $L_C$ -sentenci  $\psi$ .  $\square$

## Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z **bezesporné dokončené** větve  $V$  (tabla z  $T$ ) vyrobíme model jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$  bez rovnosti, **kanonický model** pro bezespornou dokončenou  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup C^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$ , kde:

- doména  $A$  je množina všech konstantních  $L_C$ -termů
- pro  $n$ -ární relační symbol  $R \in \mathcal{R}$  a " $s_1$ ", ..., " $s_n$ " z  $A$ :

$$("s_1", \dots, "s_n") \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } \text{TR}(s_1, \dots, s_n)$$

- pro  $n$ -ární funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$  a " $s_1$ ", ..., " $s_n$ " z  $A$ :

$$f^{\mathcal{A}}("s_1", \dots, "s_n") = "f(s_1, \dots, s_n)"$$

- speciálně, pro konstantní symbol  $c$  máme  $c^{\mathcal{A}} = "c"$

(funkce  $f^{\mathcal{A}}$  je "vytvoření" termu ze symbolu  $f$  a vstupních termů)

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti ( $R$  unární relační,  $f$  unární funkční,  $d$  konstantní). Protipříklad:  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T$  s položkou  $\neg R(d)$  v kořeni má jedinou, bezespornou větev  $V$
- **kanon. model:**  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$
- doména je  $A = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “c_0”, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “c_1”, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
  - $d^{\mathcal{A}} = “d”$
  - $c_i^{\mathcal{A}} = “c_i”$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$
  - $f^{\mathcal{A}}(“d”) = “f(d)”, f^{\mathcal{A}}(“f(d)”) = “f(f(d))”, \dots$
  - $R^{\mathcal{A}} = A \setminus C = \{“d”, “f(d)”, “f(f(d))”, \dots, “f(c_0)”, “f(f(c_0))”, \dots, “f(c_1)”, “f(f(c_1))”, \dots\}$ .
- redukt na původní jazyk  $L$ :  $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle$

# Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li  $L$  s rovností:

- vezmeme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jako by byl  $L$  bez rovnosti
- definujeme relaci  $=^B$  stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$"s_1" =^B "s_2" \Leftrightarrow \text{na } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

- **kanonický model** pro  $V$  je faktorstruktura  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie  $T^*$  (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$  je opravdu kongruence struktury  $\mathcal{B}$  a  $=^A$  je identita na  $A$
- **Pozorování:** pro lib. formuli  $\varphi$  platí  $\mathcal{B} \models \varphi$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi$   
(symbol  $=$  interpretujeme jako  $=^B$  v  $\mathcal{B}$  a jako identitu v  $\mathcal{A}$ )

**Všimněte si:**

- v jazyce bez rovnosti je kanonický model spočetně nekonečný
- v jazyce s rovností může být i konečný



$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$   $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností  
opět chceme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z  $T^*$  pro  $\neg R(d)$  má jedinou, bezespornou  $V$
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

- '=' jako obyčejný symbol:  $s_1 =^B s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$   
nebo  $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$  pro sudý počet  $f$

$$B/_{=B} = \{[“d”]_{=B}, [“f(d)”]_{=B}, [“c_0”]_{=B}, [“f(c_0)”]_{=B}, [“c_1”]_{=B}, [“f(c_1)”]_{=B}, \dots\}$$

- kanonický model:  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$ 
  - $A = B/_{=B}$ ,  $d^{\mathcal{A}} = [“d”]_{=B}$ ,  $c_i^{\mathcal{A}} = [“c_i”]_{=B}$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ ,
  - $f^{\mathcal{A}}([“d”]_{=B}) = [“f(d)”]_{=B}$ ,  
 $f^{\mathcal{A}}([“f(d)”]_{=B}) = [“f(f(d))”]_{=B} = [“d”]_{=B}, \dots$
  - $R^{\mathcal{A}} = A = B/_{=B}$ .
- redukt na původní jazyk  $L$ :  $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle$

# Úplnost: pomocné lemma

**Lemma:** Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .

**Důkaz:** Jazyk bez rovnosti: indukci podle struktury sentence v  $P$

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ “svědek”:**  $P = \mathsf{T}(\exists x)\varphi(x)$ , potom je na  $V$  i  $\mathsf{T}\varphi(x/c)$  pro nějaké “ $c$ ”  $\in A$ ; z indukčního předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“c”)]$  tedy i  $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ “všichni”:**  $P = \mathsf{T}(\forall x)\varphi(x)$ , na  $V$  jsou i položky  $\mathsf{T}\varphi(x/t)$  pro každý konstantní  $L_C$ -term, tj. pro každý prvek “ $t$ ”  $\in A$ ; z ind. předpokladu je  $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/“t”)]$  pro každé “ $t$ ”  $\in A$ , tedy  $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$

Jazyk s rovností:  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B}$ , pro  $\mathcal{B}$  máme, zbytek z Pozorování  $\square$

# Věta o úplnosti

**Věta (O úplnosti):** Je-li sentence  $\varphi$  pravdivá v teorii  $T$ , potom je tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

**Důkaz:** Ukážeme, že libovolné dokončené (např. **systematické**) tablo z  $T$  s  $\mathbb{F}\varphi$  v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: **Není-li sporné**, má bezespornou (dokončenou) větev  $V$ , a dle Lemmatu se kanonický model  $\mathcal{A}$  s větví  $V$  shoduje.

Bud'  $\mathcal{A}'$  redukt  $\mathcal{A}$  na jazyk teorie  $T$  (zapomeň pomocné symboly).

Protože je  $V$  dokončená, obsahuje  $\mathbb{T}\alpha$  pro všechny axiomy  $T$ . Model  $\mathcal{A}$ , tedy i  $\mathcal{A}'$ , splňuje všechny axiomy a máme  $\mathcal{A}' \models T$ .

Protože se ale  $\mathcal{A}$ , tedy i  $\mathcal{A}'$ , shoduje i s položkou  $\mathbb{F}\varphi$  v kořeni, máme  $\mathcal{A}' \not\models \varphi$ , což dává protipříklad, a máme  $T \not\models \varphi$ , spor.  $\square$