Pátá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Pátá přednáška

Program

- věta o kompaktnosti
- hilbertovský kalkulus
- rezoluční metoda
- korektnost a úplnost rezoluce
- LI-rezoluce a Horn-SAT

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 4.7-4.8 z Kapitoly 4, Kapitola 5

4.7 Věta o kompaktnosti

Kompaktnost

Věta (O kompaktnosti): Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Důkaz: $\Rightarrow$ Snadné: Model T je zjevně modelem každé její části.

$\Leftarrow$ Nepřímo: buď T sporná, najdeme spornou konečnou $T' \subseteq T$.

Z úplnosti víme, že $T \vdash \bot$, tedy existuje i konečný tablo důkaz τ výroku $\bot$ z T. Konstrukce τ má konečně mnoho kroků, použili jsme tedy jen konečně mnoho axiomů z T. Definujme:

$$T' = \{\alpha \in T \mid \mathrm{T}\alpha \text{ je položka v tablu } \tau\}$$

Tedy τ je tablo jen z teorie T', máme tablo důkaz $T' \vdash \bot$, dle korektnosti je T' sporná. $\square$

Aplikace kompaktnosti

vlastnost nekonečného objektu $\mathcal{O}$

$$\Updownarrow$$

vlastnost všech konečných podobjektů $\mathcal{O}'$

- vlastnost popíšeme pomocí (nekonečné) teorie T
- ke každé konečné $T' \subseteq T$ sestrojíme konečný podobjekt $\mathcal{O}'$
- $\mathcal{O}'$ splňuje danou vlastnost
- to nám dává model T'
- dle Věty o kompaktnosti má i T model
- což ukazuje, že i nekonečný objekt $\mathcal{O}$ splňuje vlastnost

Věta o kompaktnosti má mnoho aplikací (několik z nich uvidíme později), následující příklad chápejte jako 'šablonu'.

Aplikace kompaktnosti: příklad

Důsledek: Spočetně nekonečný graf je bipartitní, právě když je každý jeho konečný podgraf bipartitní.

Důkaz: $\Rightarrow$ Každý podgraf bipartitního grafu je bipartitní.

$\Leftarrow$ G je bipartitní, právě když je obarvitelný 2 barvami. Mějme jazyk $\mathbb{P} = \{p_v \mid v \in V(G)\}$ (kde p_v je barva v) a uvažme teorii

$$T = \{p_u \to \neg p_v \mid \{u, v\} \in E(G)\}$$

Zřejmě G je bipartitní, právě když T má model. Dle Věty o kompaktnosti stačí ukázat, že každá konečná $T' \subseteq T$ má model.

Buď G' podgraf G indukovaný na vrcholech, o kterých T' mluví:

$$V(G') = \{v \in V(G) \mid p_v \in \mathrm{Var}(T')\}$$

Protože je T' konečná, je G' také konečný, tedy je dle předpokladu 2-obarvitelný. Libovolné 2-obarvení $V(G')$ ale určuje model T'. $\square$

4.8 Hilbertovský kalkulus

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky $\neg$, $\rightarrow$
- schémata logických axiomů (φ, ψ, χ jsou libovolné výroky)
  (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  (ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  (iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- odvozovací pravidlo: tzv. modus ponens

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

- hilbertovský důkaz výroku φ z teorie T je konečná posloupnost výroků $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$, ve které pro každé $i \leq n$:
  - φ_i je logický axiom, nebo
  - φ_i je axiom teorie ($\varphi_i \in T$), nebo
  - φ_i lze odvodit z předchozích pomocí odvozovacího pravidla
- existuje-li hilbertovský důkaz, píšeme: $T \vdash_H \varphi$

Příklad hilbertovského důkazu

Ukažme, že pro teorii $T = \{\neg\varphi\}$ a pro libovolný výrok ψ platí:

$$T \vdash_H \varphi \rightarrow \psi$$

Hilbertovským důkazem je následující posloupnost výroků:

1. $\neg\varphi$ — *axiom teorie*
2. $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ — *logický axiom (i)*
3. $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ — *modus ponens na 1. a 2.*
4. $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ — *logický axiom (iii)*
5. $\varphi \rightarrow \psi$ — *modus ponens na 3. a 4.*

Korektnost a úplnost

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu ukážeme, že každý výrok φ_i z důkazu (tedy i $\varphi_n = \varphi$) platí v T.

- Je-li φ_i logický axiom, $T \models \varphi_i$ platí protože logické axiomy jsou tautologie.
- Je-li $\varphi_i \in T$, jistě platí $T \models \varphi_i$.
- Získáme-li φ_i pomocí modus ponens z φ_j a $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ (pro nějaká $j, k < i$), víme z indukčního předpokladu, že platí $T \models \varphi_j$ a $T \models \varphi_j \to \varphi_i$. Potom ale platí i $T \models \varphi_i$. (Modus ponens je korektní odvozovací pravidlo) $\square$

Věta (o úplnosti hilbertovského kalkulu): $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash_H \varphi$

Důkaz vynecháme.

Kapitola 5: Rezoluční metoda

Rezoluční metoda

- jiný důkazový systém než tablo metoda
- mnohem efektivnější implementace
- logické programování, automatické dokazování, SAT solvery (důkaz jako certifikát nesplnitelnosti)
- pracuje s CNF (každý výrok/teorii lze převést do CNF)
- jediné inferenční pravidlo: rezoluční pravidlo

$$\frac{\{p\} \cup C_1, \{\neg p\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

- platí obecnější pravidlo řezu:

$$\frac{\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

5.1 Množinová reprezentace

Množinová reprezentace

- literál ℓ je p nebo $\neg p$ (pro $p \in \mathbb{P}$), $\overline{\ell}$ je opačný literál k ℓ
- klauzule C je konečná množina literálů
- prázdná klauzule $\square$ je nesplnitelná
- CNF formule S je množina klauzulí (může být i nekonečná!)
- prázdná formule $\emptyset$ je vždy splněna

Modely reprezentujeme jako množiny literálů:

- (částečné) ohodnocení je libovolná konzistentní množina literálů (tj. nesmí obsahovat dvojici opačných literálů)
- úplné ohodnocení obsahuje p nebo $\neg p$ pro každý prvovýrok
- ohodnocení $\mathcal{V}$ splňuje formuli S, píšeme $\mathcal{V} \models S$, pokud $\mathcal{V}$ obsahuje nějaký literál z každé klauzule v S:

$$\mathcal{V} \cap C \neq \emptyset \text{ pro každou } C \in S$$

Množinová reprezentace: příklad

$$\varphi = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge p_4$$

- v množinové reprezentaci:
  $S = \{\{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_1, \neg p_2, p_3\}, \{\neg p_3, \neg p_4\}, \{\neg p_4, \neg p_5\}, \{p_4\}\}$
- ohodnocení $\mathcal{V} = \{\neg p_1, \neg p_3, p_4, \neg p_5\}$ splňuje S, $\mathcal{V} \models S$
- není úplné, můžeme rozšířit libovolným literálem pro p_2, platí
  - $\mathcal{V} \cup \{p_2\} \models S$
  - $\mathcal{V} \cup \{\neg p_2\} \models S$
- tato dvě úplná ohodnocení odpovídají modelům
  - $(0, 1, 0, 1, 0)$
  - $(0, 0, 0, 1, 0)$

5.2 Rezoluční důkaz

Rezoluční pravidlo

Mějme klauzule C_1 a C_2 a literál ℓ takový, že $\ell \in C_1$ a $\overline{\ell} \in C_2$. Potom rezolventa klauzulí C_1 a C_2 přes literál ℓ je klauzule:

$$C = (C_1 \setminus \{\ell\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{\ell}\})$$

tedy z první klauzule odstraníme ℓ a z druhé $\overline{\ell}$ (musely tam být!) a zbylé literály sjednotíme, mohli bychom také psát:

$$C_1' \cup C_2' \text{ je rezolventou klauzulí } C_1' \,\dot{\sqcup}\, \{\ell\} \text{ a } C_2' \,\dot{\sqcup}\, \{\overline{\ell}\}$$

- z klauzulí $C_1 = \{\neg q, r\}$ a $C_2 = \{\neg p, \neg q, \neg r\}$ odvodíme klauzuli $\{\neg p, \neg q\}$ přes literál r
- z $\{p, q\}$ a $\{\neg p, \neg q\}$ odvodíme $\{p, \neg p\}$ přes literál q, nebo $\{q, \neg q\}$ přes literál p (obojí jsou ale tautologie)
- nelze z nich ale odvodit $\square$ *"rezolucí přes p a q najednou"*! ($S = \{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ je splnitelná, např. $(1, 0)$ je model)

Rezoluční důkaz

Rezoluční pravidlo je korektní, tj. pro libovolné ohodnocení $\mathcal{V}$ platí:

Pokud $\mathcal{V} \models C_1$ a $\mathcal{V} \models C_2$, potom $\mathcal{V} \models C$.

V rezolučním důkazu můžeme vždy napsat buď axiom, nebo rezolventu již napsaných klauzulí; tím zaručíme korektnost důkazů:

Rezoluční důkaz (odvození) klauzule C z formule S je konečná posloupnost klauzulí $C_0, C_1, \ldots, C_n = C$ taková, že pro každé i:

- $C_i \in S$, nebo
- C_i je rezolventou nějakých C_j, C_k kde $j, k < i$

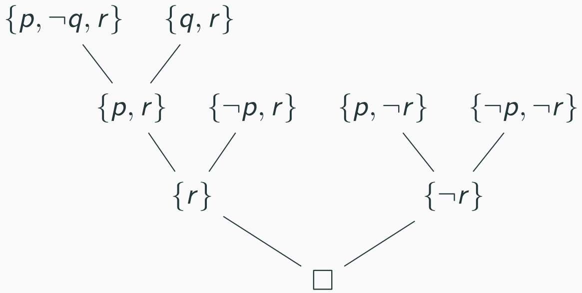
- existuje-li rez. důkaz, je C rezolucí dokazatelná z S, $S \vdash_R C$
- rezoluční zamítnutí formule S je rezoluční důkaz $\square$ z S
- v tom případě je S rezolucí zamítnutelná

Příklad

Formule $S = \{\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg r\}, \{q, r\}\}$ je rezolucí zamítnutelná, jedno z možných zamítnutí je:

$$\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{p, r\}, \{\neg p, r\}, \{r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, \neg r\}, \{\neg r\}, \square$$

Rezoluční důkaz má přirozeně stromovou strukturu, tzv. rezoluční strom: na listech jsou axiomy, vnitřní vrcholy jsou rezoluční kroky.



Rezoluční strom

Rezoluční strom klauzule C z formule S je konečný binární strom s vrcholy označenými klauzulemi, kde

- v kořeni je C,
- v listech jsou klauzule z S,
- v každém vnitřním vrcholu je rezolventa klauzulí ze synů tohoto vrcholu.

Pozorování: C má rezoluční strom z S, právě když $S \vdash_R C$. (Důkaz snadno indukcí dle hloubky stromu a délky důkazu.)

- rezolučnímu důkazu odpovídá jednoznačný rezoluční strom
- z rezolučního stromu můžeme získat více důkazů (jsou dané libovolnou procházkou po vrcholech, která navštíví vnitřní vrchol až poté, co navštívila oba jeho syny)

Rezoluční uzávěr

jaké všechny klauzule se můžeme rezolucí 'naučit' z dané formule? (není praktické je všechny najít, jde o užitečný teoretický pohled)

Rezoluční uzávěr $\mathcal{R}(S)$ formule S je definován induktivně jako nejmenší množina klauzulí splňující:

- $C \in \mathcal{R}(S)$ pro všechna $C \in S$,
- jsou-li $C_1, C_2 \in \mathcal{R}(S)$ a C jejich rezolventa, potom i $C \in \mathcal{R}(S)$

Pro $S = \{\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg r\}, \{q, r\}\}$ máme:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(S) = \{&\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\},\\ &\{p, \neg q\}, \{\neg q, r\}, \{r, \neg r\}, \{p, \neg p\}, \{r, s\},\\ &\{p, r\}, \{p, q\}, \{r\}, \{p\}\}\end{aligned}$$

5.3 Korektnost a úplnost rezoluční metody

Korektnost rezoluce

Korektnost dokážeme snadno indukcí podle délky důkazu (nebo alternativně indukcí dle hloubky rezolučního stromu).

Věta (O korektnosti rezoluce): Je-li CNF formule S rezolucí zamítnutelná, potom je S nesplnitelná.

Důkaz: Nechť $S \vdash_R \square$, a vezměme nějaký rezoluční důkaz $C_0, C_1, \ldots, C_n = \square$. Sporem: nechť existuje ohodnocení $\mathcal{V} \models S$. Indukcí podle i dokážeme, že $\mathcal{V} \models C_i$. Potom i $\mathcal{V} \models \square$, což je spor.

Pro $i = 0$ to platí, neboť $C_0 \in S$. Pro $i > 0$ máme dva případy:

- $C_i \in S$: v tom případě $\mathcal{V} \models C_i$ plyne z předpokladu, že $\mathcal{V} \models S$,
- C_i je rezolventou C_j, C_k, kde $j, k < i$: z indukčního předpokladu víme $\mathcal{V} \models C_j$ a $\mathcal{V} \models C_k$, $\mathcal{V} \models C_i$ plyne z korektnosti rezolučního pravidla $\square$

Dosazení

Je-li S CNF formule a ℓ literál, potom dosazení ℓ do S je formule

$$S^\ell = \{C \setminus \{\bar{\ell}\} \mid \ell \notin C \in S\}$$

- S^ℓ je výsledkem jednotkové propagace aplikované na $S \cup \{\{\ell\}\}$.
- S^ℓ neobsahuje v žádné klauzuli literál ℓ ani $\bar{\ell}$ (vůbec tedy neobsahuje prvovýrok z ℓ)
- Pokud S neobsahovala literál ℓ ani $\bar{\ell}$, potom $S^\ell = S$.
- Pokud S obsahovala jednotkovou klauzuli $\{\bar{\ell}\}$, potom $\square \in S^\ell$, tedy S^ℓ je sporná.

Větvení

Lemma: S je splnitelná, právě když je splnitelná S^ℓ nebo $S^{\bar{\ell}}$.

Důkaz: $\Rightarrow$ Ohodnocení $\mathcal{V} \models S$ nemůže obsahovat ℓ i $\bar{\ell}$; BÚNO $\bar{\ell} \notin \mathcal{V}$. Ukážeme, že potom $\mathcal{V} \models S^\ell$.

Vezměme libovolnou klauzuli v S^ℓ. Ta je tvaru $C \setminus \{\bar{\ell}\}$ pro klauzuli $C \in S$ (neobsahující literál ℓ). Víme, že $\mathcal{V} \models C$, protože ale $\mathcal{V}$ neobsahuje $\bar{\ell}$, muselo ohodnocení $\mathcal{V}$ splnit nějaký jiný literál v C, takže platí i $\mathcal{V} \models C \setminus \{\bar{\ell}\}$.

$\Leftarrow$ BÚNO mějme ohodnocení $\mathcal{V} \models S^\ell$. Protože se $\bar{\ell}$ (ani ℓ) nevyskytuje v S^ℓ, platí také $\mathcal{V} \setminus \{\bar{\ell}\} \models S^\ell$. Ohodnocení $\mathcal{V}' = (\mathcal{V} \setminus \{\bar{\ell}\}) \cup \{\ell\}$ potom splňuje všechny $C \in S$, tedy $\mathcal{V}' \models S$:

- pokud $\ell \in C$, potom $\ell \in C \cap \mathcal{V}'$ a $C \cap \mathcal{V}' \neq \emptyset$
- jinak $C \cap \mathcal{V}' = C \cap (\mathcal{V} \setminus \{\bar{\ell}\}) = (C \setminus \{\bar{\ell}\}) \cap (\mathcal{V} \setminus \{\bar{\ell}\}) \neq \emptyset$ neboť $\mathcal{V} \setminus \{\bar{\ell}\} \models C \setminus \{\bar{\ell}\} \in S^\ell$ $\square$

Strom dosazení

Zda je *konečná* formule S splnitelná můžeme zjišťovat rekurzivně, dosazením obou literálů pro některý prvovýrok p, a rozvětvením na $S^p, S^{\bar{p}}$ (jako v DPLL). Výslednému stromu říkáme strom dosazení.

Např. pro $S = \{\{p\}, \{\neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:

$$S$$

$$S^p = \{\{\neg q\}\} \qquad S^{\bar{p}} = \{\square, \{\neg q\}\}$$

$$\otimes$$

$$S^{pq} = \{\square\} \qquad S^{p\bar{q}} = \emptyset$$

$$\otimes \qquad \mathcal{V} = \{p, \bar{q}\}$$

- jakmile větev obsahuje $\square$, je nesplnitelná a nepokračujeme v ní
- listy jsou buď nesplnitelné, nebo prázdné teorie: v tom případě z posloupnosti dosazení získáme splňující ohodnocení.

Strom dosazení a nesplnitelnost

Důsledek: CNF formule S (ve spočetném jazyce, může být i nekonečná) je nesplnitelná, právě když každá větev stromu dosazení obsahuje $\square$.

Důkaz: Pro konečnou S snadno dokážeme indukcí dle $|\mathrm{Var}(S)|$:

- Je-li $|\mathrm{Var}(S)| = 0$, máme $S = \emptyset$ nebo $S = \{\square\}$, v obou případech je strom dosazení jednoprvkový a tvrzení platí.
- V indukčním kroku vybereme libovolný literál $\ell \in \mathrm{Var}(S)$ a aplikujeme Lemma.

Je-li S nekonečná a splnitelná, má splňující ohodnocení, to se 'shoduje' s odpovídající (nekonečnou) větví ve stromu dosazení.

Je-li nekonečná a nesplnitelná, dle Věty o kompaktnosti existuje konečná $S' \subseteq S$, která je také nesplnitelná. Po dosazení pro všechny proměnné z $\mathrm{Var}(S')$ bude v každé větvi $\square$, to nastane po konečně mnoha krocích. $\square$

Úplnost rezoluce

Věta (O úplnosti rezoluce): Je-li CNF formule S nesplnitelná, je rezolucí zamítnutelná (tj. $S \vdash_R \square$).

Důkaz: Je-li S nekonečná, má z kompaktnosti konečnou nesplnitelnou část, její rezoluční zamítnutí je také zamítnutí S.

Je-li S konečná, ukážeme indukcí dle počtu proměnných: Je-li $|\mathrm{Var}(S)| = 0$, jediná možná nesplnitelná formule bez proměnných je $S = \{\square\}$, a máme jednokrokový důkaz $S \vdash_R \square$.

Jinak vyberme $p \in \mathrm{Var}(S)$. Podle Lemmatu jsou S^p i $S^{\bar{p}}$ nesplnitelné. Mají o proměnnou méně, tedy dle ind. předpokladu existují rezoluční stromy T pro $S^p \vdash_R \square$ a T' pro $S^{\bar{p}} \vdash_R \square$.

Ukážeme, jak z T vyrobit rezoluční strom $\widehat{T}$ pro $S \vdash_R \neg p$. Analogicky $\widehat{T'}$ pro $S \vdash_R p$ a potom už snadno vyrobíme rezoluční strom pro $S \vdash_R \square$: ke kořeni $\square$ připojíme kořeny stromů $\widehat{T}$ a $\widehat{T'}$ jako levého a pravého syna (tj. získáme $\square$ rezolucí z $\{\neg p\}$ a $\{p\}$).

Dokončení důkazu

Rezoluční strom T pro $S^p \vdash_R \square \rightsquigarrow \widehat{T}$ pro $S \vdash_R \neg p$:

Vrcholy i uspořádání jsou stejné, jen do některých klauzulí ve vrcholech přidáme literál $\neg p$.

Na každém listu stromu T je nějaká klauzule $C \in S^p$, a

- buď $C \in S$,
- nebo $C \notin S$, ale $C \cup \{\neg p\} \in S$

V prvním případě necháme label stejný. Ve druhém případě přidáme do C a do všech klauzulí nad tímto listem literál $\neg p$.

Listy jsou nyní klauzule z S, a každý vnitřní vrchol je nadále rezolventou svých synů. V kořeni jsme $\square$ změnili na $\neg p$ (ledaže každý list T už byl klauzule z S, to ale už T dává $S \vdash_R \square$). $\square$

5.4 LI-rezoluce a Horn-SAT

Lineární důkaz: neformálně

Rezoluční důkaz můžeme kromě rezolučního stromu zorganizovat i jinak, jako tzv. lineární důkaz:

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
C_0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & \cdots\cdots\cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r] & C_{n+1} \\
B_0 \arrow[ur] & B_1 \arrow[ur] & & B_{n-1} \arrow[ur] & B_n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- v každém kroku máme jednu centrální klauzuli
- tu rezolvujeme s boční (‘side’) klauzulí
- boční klauzule je buď axiom z S, nebo některá z předchozích centrálních (jako bychom odvozené klauzule přidávali k axiomům)
- výsledná rezolventa je novou centrální klauzulí

(Tento pohled lépe odpovídá procedurálnímu výpočtu, jde jen o to, jak vybírat vhodné boční klauzle.)

Lineární důkaz: formálně

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, dash] & C_1 \arrow[r, dash] & C_2 \arrow[r, dash] & \cdots\cdots\cdots \arrow[r, dash] & C_n \arrow[r, dash] & C_{n+1} \\
B_0 \arrow[ur, dash] & B_1 \arrow[ur, dash] & & B_{n-1} \arrow[ur, dash] & B_n \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Lineární důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

kde C_i říkáme centrální klauzule, C_0 je počáteční, $C_{n+1} = C$ je koncová, B_i jsou boční klauzule, a platí:

- $C_0 \in S$, pro $i \leq n$ je C_{i+1} rezolventou C_i a B_i,
- $B_0 \in S$, pro $i \leq n$ je $B_i \in S$ nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$.

Lineární zamítnutí S je lineární důkaz $\square$ z S.

Příklad a ekvivalence s rezolučním důkazem

Lineární zamítnutí $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:

$$\begin{tikzcd}
\{p,q\} \arrow[r, dash] & \{p\} \arrow[r, dash] & \{q\} \arrow[r, dash] & \{\neg p\} \arrow[r, dash] & \square \\
\{p,\neg q\} \arrow[ur, dash] & \{\neg p, q\} \arrow[ur, dash] & \{\neg p,\neg q\} \arrow[ur, dash] & \{p\} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Poslední boční klauzule $\{p\}$ není z S, ale je rovna předchozí centrální klauzuli.

Poznámka: C má lineární důkaz z S, právě když $S \vdash_R C$.

$\Rightarrow$ Z lineárního důkazu snadno vyrobíme rezoluční strom. Indukcí dle délky důkazu: máme-li boční klauzuli $B_i \notin S$, potom $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$: místo B_i připojíme rezoluční strom pro C_j z S.

$\Leftarrow$ Plyne z úplnosti lineární rezoluce, důkaz najdete v učebnici.