

# Jedenáctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

---

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

## Program

- korektnost rezoluce
- lifting lemma a úplnost rezoluce
- LI-rezoluce a Prolog
- elementární ekvivalence

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 8.6-8.7 z Kapitoly 8, Sekce 9.1 z Kapitoly 9

## 8.6 Korektnost a úplnost

---

## Korektnost rezolučního kroku

**Tvrzení:** Mějme klauzule  $C_1$ ,  $C_2$  a jejich rezolventu  $C$ . Platí-li v nějaké struktuře  $\mathcal{A}$  klauzule  $C_1$  a  $C_2$ , potom v ní platí i  $C$ .

**Důkaz:** Buď  $C_1 = C'_1 \sqcup \{A_1, \dots, A_n\}$ ,  $C_2 = C'_2 \sqcup \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\}$ , a  $C = C'_1\sigma \cup C'_2\sigma$ , kde  $S\sigma = \{A_1\sigma\}$  (a  $\sigma$  je nejobecnější). Klauzule jsou otevřené formule, proto platí i jejich instance:

$$\mathcal{A} \models C_1\sigma \quad \text{a} \quad \mathcal{A} \models C_2\sigma$$

Po aplikaci unifikace máme:

$$C_1\sigma = C'_1\sigma \cup \{A_1\sigma\}$$

$$C_2\sigma = C'_2\sigma \cup \{\neg A_1\sigma\}$$

Chceme ukázat, že  $\mathcal{A} \models C[e]$  pro lib. ohodnocení  $e$ .

- Je-li  $\mathcal{A} \models A_1\sigma[e]$ , potom  $\mathcal{A} \not\models \neg A_1\sigma[e]$  a musí  $\mathcal{A} \models C'_2\sigma[e]$ .  
Tedy i  $\mathcal{A} \models C[e]$ .
- Je-li  $\mathcal{A} \not\models A_1\sigma[e]$ , musí být  $\mathcal{A} \models C'_1\sigma[e]$  a opět  $\mathcal{A} \models C[e]$ .  $\square$

**Věta (O korektnosti rezoluce):** Pokud je CNF formule  $S$  rezolucí zamítnutelná, potom je nespílitelná.

**Důkaz:** Víme, že  $S \vdash_R \square$ , vezměme tedy nějaký rezoluční důkaz  $\square$  z  $S$ . Kdyby existoval model  $\mathcal{A} \models S$ , díky korektnosti rezolučního pravidla bychom dokázali (indukcí podle délky důkazu) i  $\mathcal{A} \models \square$ , což ale není možné.  $\square$

# Lifting lemma

úplnost rezoluce dokážeme převedením na případ výrokové logiky: rezoluční důkaz 'na úrovni VL' je možné 'zvednout' na úroveň PL

**Lifting lemma:** Bud'  $C_1$  a  $C_2$  klauzule s disj. množ. proměnných,  $C_1^*$  a  $C_2^*$  jejich základní instance,  $C^*$  rezolventa  $C_1^*$  a  $C_2^*$ . Potom  $C_1$  a  $C_2$  mají rezolventu  $C$  takovou, že  $C^*$  je základní instance  $C$ .

(důkaz na příštím slidu)

**Důsledek:** Bud'  $S$  CNF formule a označme  $S^*$  množinu všech jejích základních instancí. Pokud  $S^* \vdash_R C^*$  pro nějakou základní klauzuli  $C^*$  ('na úrovni VL'), potom existuje klauzule  $C$  a základní substituce  $\sigma$  taková, že  $C^* = C\sigma$  a  $S \vdash_R C$  ('na úrovni PL').

**Důkaz:** Snadno z Lifting lemmatu indukcí dle délky důkazu.  $\square$

## Důkaz Lifting lemmatu

Nechť  $C_1^* = C_1\tau_1$  a  $C_2^* = C_2\tau_2$ ,  $\tau_1$  a  $\tau_2$  zákl. substituce nesdílející žádnou proměnnou. Najdeme rezolventu  $C$ , že  $C^* = C\tau_1\tau_2$ .

Bud'  $C^*$  rezolventa  $C_1^*$  a  $C_2^*$  přes literál  $P(t_1, \dots, t_k)$ . Víme, že:

$$C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \dots, A_n\}, \text{ kde } \{A_1, \dots, A_n\}\tau_1 = \{P(t_1, \dots, t_k)\}$$

$$C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\}, \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\}\tau_2 = \{\neg P(t_1, \dots, t_k)\}$$

Tedy  $(\tau_1\tau_2)$  unifikuje  $S = \{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$ . Bud'  $\sigma$  nejob. unifikace pro  $S$  z Unifikačního algoritmu. Zvolme  $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$ .

$$\begin{aligned} C\tau_1\tau_2 &= (C_1'\sigma \cup C_2'\sigma)\tau_1\tau_2 = C_1'\sigma\tau_1\tau_2 \cup C_2'\sigma\tau_1\tau_2 = C_1'\tau_1\tau_2 \cup C_2'\tau_1\tau_2 \\ &= C_1'\tau_1 \cup C_2'\tau_2 = (C_1 \setminus \{A_1, \dots, A_n\})\tau_1 \cup (C_2 \setminus \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\})\tau_2 \\ &= (C_1^* \setminus \{P(t_1, \dots, t_k)\}) \cup (C_2^* \setminus \{\neg P(t_1, \dots, t_k)\}) = C^* \end{aligned}$$

Zde  $=$  plyne z vlastnosti 'navíc' Unif. algoritmu  $(\tau_1\tau_2) = \sigma(\tau_1\tau_2)$ ,

a  $=$  z toho, že jde o základní substituce nesdílející proměnnou.  $\square$

**Věta (O úplnosti rezoluce):** Je-li CNF formule  $S$  nespílitelná, potom je zamítnutelná rezolucí.

**Důkaz:** Množina  $S^*$  všech základních instancí klauzulí z  $S$  je také nespílitelná (důsledek Herbrandovy věty). Úplnost **výrokové** rezoluce dává  $S^* \vdash_R \square$  ('na úrovni VL').

Z důsledku Lifting lemmatu dostáváme klauzuli  $C$  a základní substituci  $\sigma$  takové, že  $C\sigma = \square$  a  $S \vdash_R C$  ('na úrovni PL').

Ale protože prázdná klauzule  $\square$  je instancí  $C$ , musí být  $C = \square$ .  
Tím jsme našli rezoluční zamítnutí  $S \vdash_R \square$ . □



## 8.7 LI-rezolute

---

# Lineární důkaz a LI-důkaz

- **Lineární důkaz** klauzule  $C$  z formule  $S$  je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

kde:  $B_0$  a  $C_0$  jsou varianty klauzulí z  $S$ ,  $C_{n+1} = C$ ,

- $C_{i+1}$  je rezolventa  $C_i$  a  $B_i$
- $B_i$  **varianta** klauzule z  $S$  nebo  $B_i = C_j$  pro nějaké  $j < i$ .
- **Lineární zamítnutí**  $S$  je lineární důkaz  $\square$  z  $S$
- **LI-důkaz** je lin. důkaz, kde vš.  $B_i$  jsou varianty klauzulí z  $S$
- $C$  **LI-dokazatelná** z  $S$ ,  $S \vdash_{LI} C$ , pokud existuje LI-důkaz
- $S$  je **LI-zamítnutelná**, pokud  $S \vdash_{LI} \square$
- korektnost (lineární i LI-rezoluce) je zřejmá

# Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

**Věta (O úplnosti lineární rezoluce):**  $C$  má lineární důkaz z  $S$ , právě když má rezoluční důkaz z  $S$  (tj.  $S \vdash_R C$ ).

**Důkaz:** převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu)  $\square$

**Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule):** Je-li Hornova formule  $T$  splnitelná, a  $T \cup \{G\}$  je nespjitelná pro cíl  $G$ , potom  $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$ , a to LI-zamítnutím, které začíná cílem  $G$ .

**Důkaz:** úplnost ve VL + Herbrandova věta + Lifting lemma  $\square$

- **Hornova formule:** množina Hornových klauzulí
- **Hornova klauzule:** nejvýše jeden pozitivní literál
- **Pravidlo:** klauzule s 1 pozitivním a alespoň 1 negativním literálem
- **Fakt:** pozitivní jednotková klauzule
- **Cíl:** neprázdná klauzule bez pozitivního literálu
- **Programové klauzule:** pravidla a fakta
- **Program:** Hornova formule obsahující jen programové klauzule

```
son(X,Y):-father(Y,X),man(X).    {son(X, Y), ¬father(Y, X), ¬man(X)}
son(X,Y):-mother(Y,X),man(X).    {son(X, Y), ¬mother(Y, X), ¬man(X)}
man(charlie).                     {man(charlie)}
father(bob,charlie).              {father(bob, charlie)}
mother(alice,charlie).            {mother(alice, charlie)}

?-son(charlie,X).                 {¬son(charlie, X)}
```

Platí v programu daný **existenční dotaz**,  $P \models (\exists X)son(charlie, X)$ ?

**Důsledek:** Pro program  $P$  a cíl  $G = \{\neg A_1, \dots, \neg A_k\}$  v proměnných  $X_1, \dots, X_n$  jsou následující ekvivalentní:

- $P \models (\exists X_1) \dots (\exists X_n)(A_1 \wedge \dots \wedge A_k)$
- $P \cup \{G\}$  má LI-zamítnutí začínající  $G$

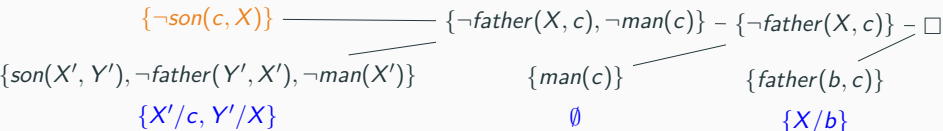
**Důkaz:** Plyne z Důkazu sporem a Úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule (Program je vždy splnitelný). □

Je-li odpověď na dotaz kladná, chceme znát i **výstupní substituci**  $\sigma$ , tj. složení unifikací z rez. kroků, zúžené na proměnné v  $G$ . Platí:

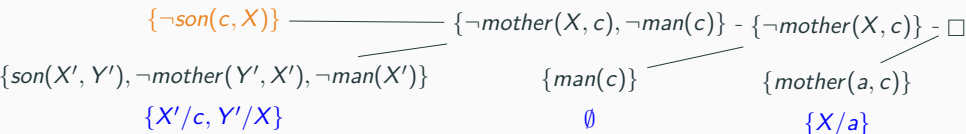
$$P \models (A_1 \wedge \dots \wedge A_k)\sigma$$

# Příklady

?-son(charlie,X).



X=bob      výstupní substituce  $\sigma = \{X/b\}$



X=alice      výstupní substituce  $\sigma = \{X/a\}$

## ČÁST III – POKROČILÉ PARTIE

---

# KAPITOLA 9: TEORIE MODELŮ

---



- vztah mezi vlastnostmi teorií a tříd jejich modelů
  - bližší matematice než informatice a aplikacím
  - jen několik vybraných dostupných výsledků
- + co je třeba pro Gödelovy věty (Kapitola 10)
- + co se nevešlo jinam

## 9.1 Elementární ekvivalence

---

Teorie struktury  $\mathcal{A}$  (v jazyce  $L$ ):

$$\text{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Např. pro standardní model aritmetiky  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  říkáme  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$  aritmetika přirozených čísel, je nerozhodnutelná (neexistuje algoritmus, který pro každou  $\varphi$  doběhne a odpoví, zda  $T \models \varphi$ )

**Pozorování:** Nechť  $\mathcal{A}$  je  $L$ -struktura a  $T$  je  $L$ -teorie.

- $\text{Th}(\mathcal{A})$  je kompletní teorie
- $\mathcal{A} \in M_L(T) \Rightarrow \text{Th}(\mathcal{A})$  je (kompletní) jednoduchá extenze  $T$
- $\mathcal{A} \in M_L(T)$ ,  $T$  kompletní  $\Rightarrow \text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Csq}_L(T) \sim T$

$L$ -struktury  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  jsou **elementárně ekvivalentní** ( $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ), pokud v nich platí tytéž  $L$ -sentence, neboli:  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B})$

Například pro  $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ ,  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ ,  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ : snadno pomocí **hustoty**
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ : v  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$  má každý prvek bezprostředního následníka, v  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  ne, tedy  $\varphi \in \text{Th}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle) \setminus \text{Th}(\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle)$  pro následující sentenci:

$$\varphi = (\forall x)(\exists y)(x \leq y \wedge \neg x = y \wedge (\forall z)(x \leq z \rightarrow z = x \vee y \leq z))$$

# Kompletní jednoduché extenze

Pro teorii  $T$  nás hlavně zajímá, jak vypadají modely.

- $T$  je **kompletní**, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci (všechny modely jsou elementárně ekvivalentní)
- Modely  $T$  až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají **kompletním jednoduchým extenzím**  $T$ , ty jsou tvaru  $\text{Th}(\mathcal{A})$  pro  $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(T)$ , kde  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B})$

Místo hledání modelů stačí najít kompletní jednoduché extenze!

**Motivace:** ukážeme, že lze-li **efektivně popsat** všechny kompletní jednoduché extenze **efektivně dané** teorie, potom je **rozhodnutelná**.

- algoritmus, který pro vstup  $(i, j)$  vypíše  $j$ -tý axiom  $i$ -té kompletní jednoduché extenze (v nějakém očíslování)
- algoritmus, který postupně vygeneruje všechny axiomy teorie

Schopnost efektivně popsat kompletní jedn. extenze je vzácná, vyžaduje silné předpoklady, ale u mnoha důležitých teorií to lze.

## Příklad: DeLO\*

Teorie **hustého lin. uspořádání (DeLO\*)** je extenze teorie uspořádání o **linearitu (dichotomii)**, **hustotu**, a někdy se přidává **netrivialita**:

- $x \leq y \vee y \leq x$
- $x \leq y \wedge \neg x = y \rightarrow (\exists z)(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg z = x \wedge \neg z = y)$
- $(\exists x)(\exists y)(\neg x = y)$

**Tvrzení:** Bud'  $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$  a  $\psi = (\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ . Následující jsou právě všechny kompletní jednoduché extenze DeLO\*:

- $\text{DeLO} = \text{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}$
- $\text{DeLO}^+ = \text{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}$
- $\text{DeLO}^- = \text{DeLO}^* \cup \{\varphi, \neg\psi\}$
- $\text{DeLO}^\pm = \text{DeLO}^* \cup \{\varphi, \psi\}$

Stačí ukázat, že jsou kompletní. Potom už je zřejmé, že žádná další kompletní jednoduchá extenze DeLO\* nemůže existovat.

Jak ukážeme, kompletnost plyne z faktu, že jsou  **$\omega$ -kategorické**, tj. mají jediný spočetný model až na **izomorfismus**.

# Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty bez rovnosti

Připomeňme:

**Věta (L.-S. bez rovnosti):** Ve spočetném jazyce bez rovnosti má každá bezesporná teorie spočetně nekonečný model.

Jednoduchý důsledek:

**Důsledek:** Je-li  $L$  spočetný bez rovnosti, potom ke každé  $L$ -struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

**Důkaz:**  $\text{Th}(\mathcal{A})$  je bezesporná (má model  $\mathcal{A}$ ), tedy dle L.-S. věty má spočetně nekonečný model  $\mathcal{B} \models \text{Th}(\mathcal{A})$ , to znamená  $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ .  $\square$

Bez rovnosti tedy nelze vyjádřit např. 'model má právě 42 prvků'.

## Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty s rovností

V důkazu L.-S. věty máme kanonický model pro bezespornou větev tabla z  $T$  pro  $F \perp$ ; pro jazyk s rovností stačí faktorizovat dle  $=^A$ :

**Věta (L.-S. s rovností):** Ve spočetném jazyce s rovností má každá bezesporná teorie spočetný model (konečný, nebo nekonečný).

I tato verze má snadný důsledek pro konkrétní struktury:

**Důsledek:** Je-li  $L$  spočetný s rovností, ke každé **nekonečné**  $L$ -struktuře existuje elem. ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

**Důkaz:** Mějme nekonečnou  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$ . Stejně jako v důkazu Důsledku bez rovnosti najdeme spočetně nekonečnou  $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ .

Protože v  $\mathcal{A}$  neplatí pro žádné  $n \in \mathbb{N}$  sentence vyjadřující 'existuje nejvýše  $n$  prvků' (což lze pomocí rovnosti snadno zapsat), neplatí ani v  $\mathcal{B}$ , tedy  $\mathcal{B}$  nemůže být konečná. □



# Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen
- $\mathbb{Q}$  není,  $x^2 - 2$  nemá v  $\mathbb{Q}$  kořen
- $\mathbb{R}$  není,  $x^2 + 1$  nemá v  $\mathbb{R}$  kořen
- $\mathbb{C}$  je algebraicky uzavřené, ale je nespočetné

Algebraickou uzavřenost vyjádříme sentencemi  $\psi_n$ , pro  $n > 0$ :

$$(\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0) = 0$$

kde  $y^k$  je zkratka za term  $y \cdot y \cdot \dots \cdot y$

**Důsledek:** Existuje spočetné algebraicky uzavřené těleso.

**Důkaz:** Dle Důsledku L.S. věty (s rovností) existuje spočetně nekonečná  $\mathcal{A} \equiv \mathbb{C}$ . Protože  $\mathbb{C}$  je těleso a splňuje  $\psi_n$  pro všechna  $n > 0$ , je i  $\mathcal{A}$  algebraicky uzavřené těleso. □