

# NAIL062 V&P Logika: 11. cvičení

**Témata:** Unifikace. Rezoluce v predikátové logice.

**Příklad 1.** Víme, že platí následující:

- *Je-li cihla na (jiné) cihle, potom není na zemi.*
- *Každá cihla je na (jiné) cihle nebo na zemi.*
- *Žádná cihla není na cihle, která by byla na (jiné) cihle.*

Vyjádřete tato fakta ve vhodném jazyce logiky prvního řádu a dokažte rezolucí následující tvrzení: “*Je-li cihla na (jiné) cihle, spodní cihla je na zemi.*”

**Příklad 2.** Víme, že platí následující:

- *Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe*
- *Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe.*

Formalizujte ve vhodném jazyce predikátové logiky a dokažte rezolucí, že: *Neexistují žádní holiči.*

**Příklad 3.** Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:

- (i) *Každá ovce byla buď porozena jinou ovčí, nebo byla naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).*
- (ii) *Žádná naklonovaná ovce neporodila.*

Chceme ukázat rezolucí, že pak: (iii) *Pokud ovce porodila, byla sama porozena.* Konkrétně:

- (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  v jazyce  $L = \langle P, K \rangle$  bez rovnosti, kde  $P$  je binární relační symbol,  $K$  je unární relační symbol a  $P(x, y)$ ,  $K(x)$  značí, že “*ovce  $x$  porodila ovci  $y$* ” a “*ovce  $x$  byla naklonována*”.
- (b) S využitím Skolemizace těchto formulí nebo jejich negací sestrojte množinu klauzulí  $S$  (může být ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$ . Zapište ji v množinové reprezentaci.
- (c) Najděte rezoluční zamítnutí  $S$ , znázorněte je rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.

**Příklad 4.** Mějme jazyk  $L = \langle <, j, h, s \rangle$  bez rovností, kde  $j, h, q$  jsou konstantní symboly značící (po řadě) jablka, hrušky, švestky, dále  $<$  je binární relační symbol a  $x < y$  značí, že “*ovoce  $y$  je lepší než ovoce  $x$* ”. Víme, že:

(i) Relace “být lepší” je ostré částečné uspořádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní relace).

(ii) Hrušky jsou lepší než jablka.

Chceme rezolucí dokázat následující tvrzení.

(iii) Jsou-li švestky lepší než hrušky, nejsou jablka lepší než švestky.

Konkrétně:

- (a) Tvrzení (i), (ii), (iii) vyjádřete otevřenými formulemi jazyka  $L$ .
- (b) Pomocí předchozích formulí či jejich negací nalezněte otevřenou teorii  $T$  nad  $L$  axiomatizovanou klauzulemi, která je nesplnitelná, právě když z (i), (ii) vyplývá (iii). Napište  $T$  v množinové reprezentaci.
- (c) Rezolucí dokažte, že  $T$  není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.*
- (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů  $T$ , která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (c).*
- (e) Je  $T$  zamítnutelná LI-rezolucí? Uveďte zdůvodnění.

**Příklad 5.** Nechtě  $T = \{\neg(\exists x)R(x), (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)), (\forall x)((\exists y)(P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow R(x)), (\forall x)(\exists y)P(x, y)\}$  je teorie jazyka  $L = \langle P, R \rangle$  bez rovnosti.

- (a) Skolemizací nalezněte k  $T$  otevřenou ekvisplnitelnou teorii  $T'$  (nad vhodně rozšířeným jazykem).
- (b) Převeďte  $T'$  na ekvivalentní teorii  $S$  v CNF. Zapište  $S$  v množinové reprezentaci.
- (c) Nalezněte rezoluční zamítnutí teorie  $S$ . U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
- (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů  $S$ , která je nesplnitelná.
- (e) Má teorie  $T$  jednoduchou kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění.

**Příklad 6.** Ukažte, že daná množina klauzulí je zamítnutelná (rezolucí). Popište zamítnutí pomocí rezolučního stromu. V každém kroku rezoluce napište použitou unifikaci a podtrhněte rezolvované literály.

$$\begin{aligned} S = \{ \{ & P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z) \}, \\ & \{ \neg Q(h(b), w), H(w, a) \}, \\ & \{ \neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a) \}, \\ & \{ P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b) \}, \\ & \{ \neg H(v, a) \} \} \end{aligned}$$

**Domácí úkol** (3 body). Známe následující informace o zadávání zakázek:

- (i) Každý úředník, který je odpovědný za nějakou zakázku a vezme od nějaké společnosti úplatek, je kriminálník.
- (ii) Zakázku vyhraje pouze společnost, která podplatí všechny úředníky odpovědné za tuto zakázku.
- (iii) Pan Lubor je úředník.
- (iv) Někáká společnost vyhrála nějakou zakázku, za kterou je pan Lubor odpovědný.

Pomocí rezoluce dokažte, že: (v) Pan Lubor je kriminálník.

- (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi  $\varphi_1, \dots, \varphi_5$  v jazyce  $L = \langle U, Z, S, K, P, V, O, l \rangle$  bez rovnosti, kde  $U, Z, S$  a  $K$  jsou unární relační symboly a  $U(x), Z(x), S(x), K(x)$  znamenají (po řadě) “ $x$  je úředník / zakázka / společnost / kriminálník”,  $P, V, O$  jsou binární relační symboly, kde  $P(x, y), V(x, y), O(x, y)$  značí (po řadě) “ $x$  podplatil  $y$ ”, “ $x$  vyhrál  $y$ ” a “ $x$  je odpovědný za  $y$ ” a  $l$  je konstanta označující pana Lubora.
- (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii  $T$  (případně ve větším jazyce), která je nespílitelná, právě když  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$ .
- (c) Převedením axiomů  $T$  do CNF nalezněte teorii  $T'$  ekvivalentní  $T$  a axiomatizovanou klauzulemi. Napište  $T'$  v množinové reprezentaci.
- (d) Rezolucí dokažte, že  $T'$  není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
- (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů  $T'$ , která je nespílitelná.

Kromě tohoto úkolu se připravte na zápočtový test. Vyřešte vzorový test (na webu).