

Kapitola 1

Tablo metoda v predikátové logice

V této kapitole ukážeme, jak lze zobecnit *metodu analytického tabla* z výrokové na predikátovou logiku.¹ Metoda funguje velmi podobně, musíme si ale poradit *kvantifikátory*.

1.1 Neformální úvod

V této sekci tablo metodu neformálně představíme. K formálním definicím se vrátíme později. Začneme dvěma příklady, na kterých ilustruje, jak tablo metoda v predikátové logice funguje, a jak se vypořádá s kvantifikátory.

Příklad 1.1.1. Na Obrázku 1.1.1 jsou znázorněna dvě tabla. Jsou to tablo důkazy (v logice, tj. z prázdné teorie) *sentencí* $(\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$ (vpravo) a $\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$ (vlevo) jazyka $L = \langle P \rangle$ (bez rovnosti), kde P je unární relační symbol. Symbol c_0 je *pomocný konstantní symbol*, který do jazyka při konstrukci tabla přidáváme.

Položky

Formule v položkách musí být vždy *sentence*, neboť potřebujeme, aby měly v daném modelu *pravdivostní hodnotu* (nezávisle na ohodnocení proměnných). To ale není zásadní omezení, chceme-li dokázat, že formule φ platí v teorii T , můžeme nejprve nahradit formuli φ a všechny axiomy T jejich *generálními uzávěry* (tj. univerzálně kvantifikujeme všechny volné proměnné). Získáme tak *uzavřenou* teorii T' a sentenci φ' a platí: $T' \models \varphi'$ právě když $T \models \varphi$.

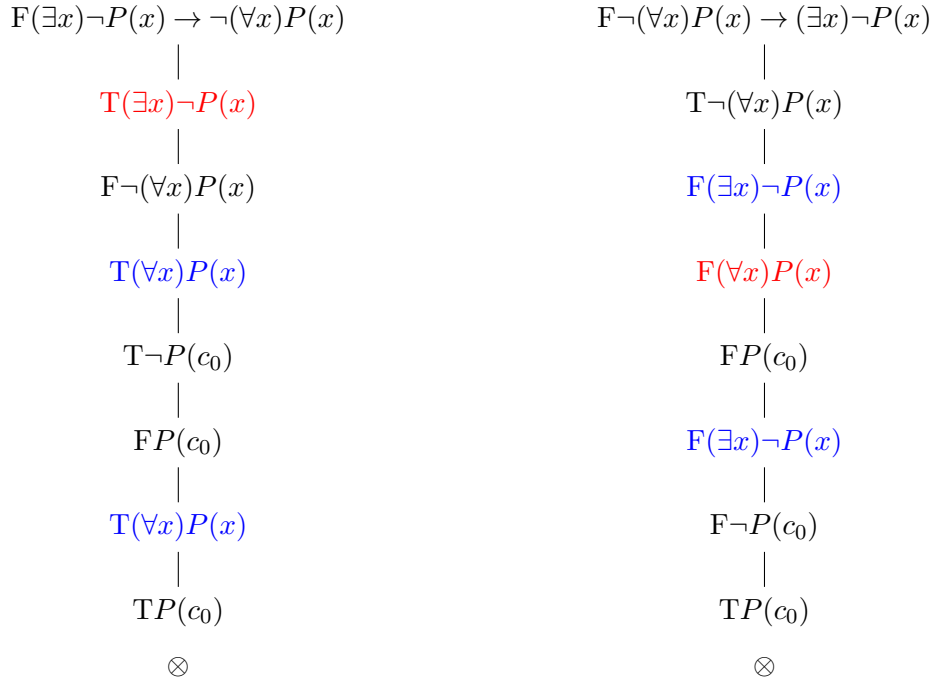
Kvantifikátory

Redukce položek funguje stejně, použijeme tatáž atomická tabla pro logické spojky (viz Tabulka ??, kde místo výroků jsou φ, ψ sentence). Musíme ale přidat 4 nová atomická tabla pro T/F a univerzální/existenční kvantifikátor. Tyto položky dělíme na dva typy:

- typ “*svědek*”: položky tvaru $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$
- typ “*všichni*”: položky tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ a $F(\exists x)\varphi(x)$

Příklady vidíme v tablech na Obrázku 1.1.1 (‘svědci’ jsou červeně, ‘všichni’ modře).

¹Na tomto místě je dobré připomenout si tablo metodu ve výrokové logice, viz Kapitola ??.



Obrázek 1.1: Příklady tabel. Položky typu ‘svědek’ jsou znázorněny červeně, položky typu ‘všichni’ modře.

Kvantifikátor nemůžeme pouze odstranit, neboť výsledná formule $\varphi(x)$ by nebyla sentencí. Místo toho současně s odstraněním kvantifikátoru *substituujeme* za x nějaký *konstantní term*, v nové položce tedy bude *sentence* $\varphi(x/t)$. Jaký konstantní term t substituujeme záleží na tom, zda jde o položku typu “svědek” nebo “všichni”.

Pomocné konstantní symboly

Jazyk L teorie T , ve které dokazujeme, rozšíříme o spočetně mnoho *nových* (*pomocných*) *konstantních symbolů* $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ (ale budeme psát i c, d, \dots), výsledný rozšířený jazyk označíme L_C . Konstantní termy v jazyce L_C tedy existují, i pokud původní jazyk L nemá žádné konstanty. A vždy při konstrukci tabla máme k dispozici nějaký *nový*, dosud *nepoužitý* (ani v teorii, ani v konstruovaném tablu) pomocný konstantní symbol $c \in C$.

Svědci

Při redukci položky typu “svědek” substituujeme za proměnnou jeden z těchto nových, pomocných symbolů, a to takový, který *dosud nebyl na dané větvi použit*. V případě položky $T(\exists x)\varphi(x)$ tedy máme $T\varphi(x/c)$. Tento konstantní symbol c bude hrát roli (nějakého) prvku, který danou formuli splňuje (resp. vyvrací, jde-li o položku tvaru $F(\forall x)\varphi(x)$). Zde používáme větu o konstantách (Věta ??). Je důležité, že symbol c dosud nebyl na větvi ani v teorii nijak použit. Typicky ale poté použijeme položky typu “všichni”, abychom se dozvěděli, co musí o tomto svědku platit.

Na Obrázku 1.1.1 vidíme příklad: položka $T(\exists x)\neg P(x)$ v levém tablu je redukována, její redukcí vznikla položka $T\neg P(c_0)$; $c_0 \in C$ je pomocný symbol, na větvi se dosud nevyskytoval

(a je první takový). Podobně pro položku $F(\forall x)P(x)$ a $FP(c_0)$ v pravém tablu.

Všichni

Při redukci položky typu “všichni” substituujeme za proměnnou x libovolný *konstantní term* t rozšířeného jazyka L_C . Z položky tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ tedy získáme položku $T\varphi(x/t)$.

Aby byla bezesporná větev *dokončená*, budou na ní ale muset být položky $T\varphi(x/t)$ pro *všechny* konstantní L_C -termy t . (Musíme ‘použít’ vše, co položka $T(\forall x)\varphi(x)$ ‘říká’.) A stejně pro položku tvaru $F(\exists x)\varphi(x)$.

Ve výrokové logice jsme používali konvenci, že při připojování atomických tabel vynecháváme jejich kořeny (jinak bychom opakovali na větvi tutéž položku dvakrát). V predikátové logice použijeme stejnou konvenci, ale *s výjimkou položek typu ‘svědek’*. U těch zapíšeme i kořen připojovaného atomického tabla. Proč to děláme? Abychom si připomněli, že s touto položkou ještě nejsme hotovi, že musíme připojit atomická tabla s jinými konstantními termy.

Na Obrázku 1.1.1 v levém tablu *není* položka $T(\forall x)P(x)$ *redukována*. Její *první výskyt* (4. vrchol shora) jsme zredukovali, substituujeme term $t = c_0$, máme tedy $\varphi(x/t) = P(c_0)$. Připojili jsme atomické tablo v sestávající z téže položky v kořeni $T(\forall x)P(x)$, kterou do tabla *zapíšeme*, a z položky $TP(c_0)$ pod ní. Zatímco *první výskyt* položky $T(\forall x)P(x)$ je tímto redukováný, *druhý výskyt* (7. vrchol shora) redukováný není. Podobně pro položku $F(\exists x)\neg P(x)$ v pravém tablu.

Tento poněkud technický přístup k definici *redukovatosti* (výskytů) položek typu ‘všichni’ se nám bude hodit v definici *systematického tabla*.

Jazyk

Nadále budeme předpokládat, že jazyk L je *spočetný*.² Z toho plyne, že každá L -teorie T má jen spočetně mnoho axiomů, a také že konstantních termů v jazyce L_C je jen spočetně mnoho. Toto omezení potřebujeme, neboť každé, i nekonečné tablo má jen spočetně mnoho položek, a musíme být schopni použít všechny axiomy dané teorie, a substituovat všechny konstantní termy jazyka L_C .

Nejprve také budeme předpokládat, že jde o jazyk *bez rovnosti*, což je jednodušší. Problémem je, že *tablo* je čistě syntaktický objekt, ale *rovnost* má speciální sémantický význam, totiž musí být v každém modelu interpretována relací identity. Jak adaptovat metodu pro jazyky s rovností si ukážeme později.

1.2 Formální definice

V této sekci definujeme všechny pojmy potřebné pro tablo metodu pro jazyky bez rovnosti. K jazykům s rovností se vrátíme v Sekci 1.3.

Buď L *spočetný* jazyk bez rovnosti. Označme jako L_C rozšíření jazyka L o spočetně mnoho nových *pomocných* konstantních symbolů $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Zvolme nějaké očíslování konstantních termů jazyka L_C , označme tyto termy $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Mějme nějakou L -teorii T a L -sentenci φ .

²Z hlediska výpočetní logiky to není velké omezení.

1.2.1 Atomická tabla

Položka je nápis $T\varphi$ nebo $F\varphi$, kde φ je nějaká L_C -sentence. Položky tvaru $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$ jsou *typu ‘svědek’*, položky tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ a $F(\exists x)\varphi(x)$ jsou *typu ‘všichni’*

Atomická tabla jsou položkami označované stromy znázorněné v Tabulkách 1.1 a 1.2.

	\neg	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow
True	$\begin{array}{c} T\neg\varphi \\ \\ F\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} T\varphi \wedge \psi \\ \\ T\varphi \\ \\ T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \vee \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \rightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ F\varphi & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \leftrightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & F\varphi \\ \quad & \\ T\psi & F\psi \end{array}$
False	$\begin{array}{c} F\neg\varphi \\ \\ T\varphi \end{array}$	$\begin{array}{cc} F\varphi \wedge \psi & \\ / \quad \backslash & \\ F\varphi & F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F\varphi \vee \psi \\ \\ F\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F\varphi \rightarrow \psi \\ \\ T\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} F\varphi \leftrightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & F\varphi \\ \quad & \\ F\psi & T\psi \end{array}$

Tabulka 1.1: Atomická tabla pro logické spojky; φ a ψ jsou libovolné L_C -sentence.

	\forall	\exists
True	$\begin{array}{c} T(\forall x)\varphi(x) \\ \\ T\varphi(x/t_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} T(\exists x)\varphi(x) \\ \\ T\varphi(x/c_i) \end{array}$
False	$\begin{array}{c} F(\forall x)\varphi(x) \\ \\ F\varphi(x/c_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\exists x)\varphi(x) \\ \\ F\varphi(x/t_i) \end{array}$

Tabulka 1.2: Atomická tabla pro kvantifikátory; φ je L_C -sentence, x proměnná, t_i libovolný konstantní L_C -term, $c_i \in C$ je nový pomocný konstantní symbol (který se dosud nevyskytuje na dané větvi konstruovaného tabla).

1.2.2 Tablo důkaz

Definice v této části jsou téměř identické odpovídajícím definicím z výrokové logiky. Hlavní technický problém je jak definovat redukovanost položek typu ‘všichni’ na větvi tabla: chceme aby za proměnnou byly substituovány *všechny* možné konstantní L_C -termy t_i .

Definice 1.2.1 (Tablo). *Konečné tablo z teorie T* je uspořádaný, položkami označovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:

- jednoprvkový strom označovaný libovolnou položkou je tablo z teorie T ,

- pro libovolnou položku P na libovolné větvi V , můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P , přičemž je-li P typu ‘svědek’, můžeme použít jen pomocný konstantní symbol $c_i \in C$, který se na větvi V dosud nevyskytuje (pro položky typu ‘všichni’ můžeme použít libovolný konstantní L_C -term t_i),
- na konec libovolné větve můžeme připojit položku $T\alpha$ pro libovolný axiom teorie $\alpha \in T$.

Tablo z teorie T je buď konečné, nebo i *nekonečné*: v tom případě vzniklo ve spočetně mnoha krocích. Můžeme ho formálně vyjádřit jako sjednocení $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_i jsou konečná tabla z T , τ_0 je jednoprvkové tablo, a τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku.³

Tablo *pro položku P* je tablo, které má položku P v kořeni.

Připomeňme konvenci, že pokud P *není* typu ‘všichni’, potom kořen atomického tabla nebudeme zapisovat (neboť vrchol s položkou P už v tablu je).

Cvičení 1.1. Ukažte v jednotlivých krocích jak byla tabla z Obrázku 1.1.1 zkonstruována.

Definice 1.2.2 (Tablo důkaz). *Tablo důkaz* sentence φ z teorie T je *sporné* tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni. Pokud existuje, je φ (tablo) *dokazatelná* z T , píšeme $T \vdash \varphi$. (Definujme také *tablo zamítnutí* jako sporné tablo s $T\varphi$ v kořeni. Pokud existuje, je φ (tablo) *zamítnutelná* z T , tj. platí $T \vdash \neg\varphi$.)

- Tablo je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je *sporná*, pokud obsahuje položky $T\psi$ a $F\psi$ pro nějaký výrok ψ , jinak je *beze-sporná*.
- Tablo je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je *dokončená*, pokud
 - je sporná, nebo
 - je každá položka na této větvi *redukována* a zároveň větev obsahuje položku $T\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je *redukována* na větvi V procházející touto položkou, pokud
 - není typu ‘všichni’ a při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V , tj. vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla.⁴
 - je typu ‘všichni’ a všechny její *výskyty* na V jsou na větvi V *redukovány*.
- Výskyt položky P typu ‘všichni’ na větvi V je *i -tý*, pokud má na V právě $i - 1$ předků označených touto položkou, a *i -tý výskyt* je *redukováný* na V , pokud
 - položka P má $(i + 1)$ -ní výskyt na V , a zároveň
 - na V se vyskytuje položka $T\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = T(\forall x)\varphi(x)$) resp. $F\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = F(\exists x)\varphi(x)$), kde t_i je i -tý konstantní L_C -term.⁵

³Sjednocení proto, že v jednotlivých krocích přidáváme do tabla nové vrcholy, τ_i je tedy podstromem τ_{i+1} .

⁴Byť podle konvence tento kořen nezapisujeme.

⁵Tj. (typicky) už jsme za x substituovali term t_i .

Všimněte si, že je-li položka typu ‘všichni’ na nějaké větvi redukována, musí mít na této větvi nekonečně mnoho výskytů, a museli jsme v nich použít při substituci všechny možnosti, tj. všechny konstantní L_C -termy.

Příklad 1.2.3. Jako příklad sestrojme tablo důkazy v logice (z prázdné teorie) následujících sentencí:

- (a) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$, kde P, Q jsou unární relační symboly.
- (b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$, kde $\varphi(x), \psi(x)$ jsou libovolné formule s jedinou volnou proměnnou x .

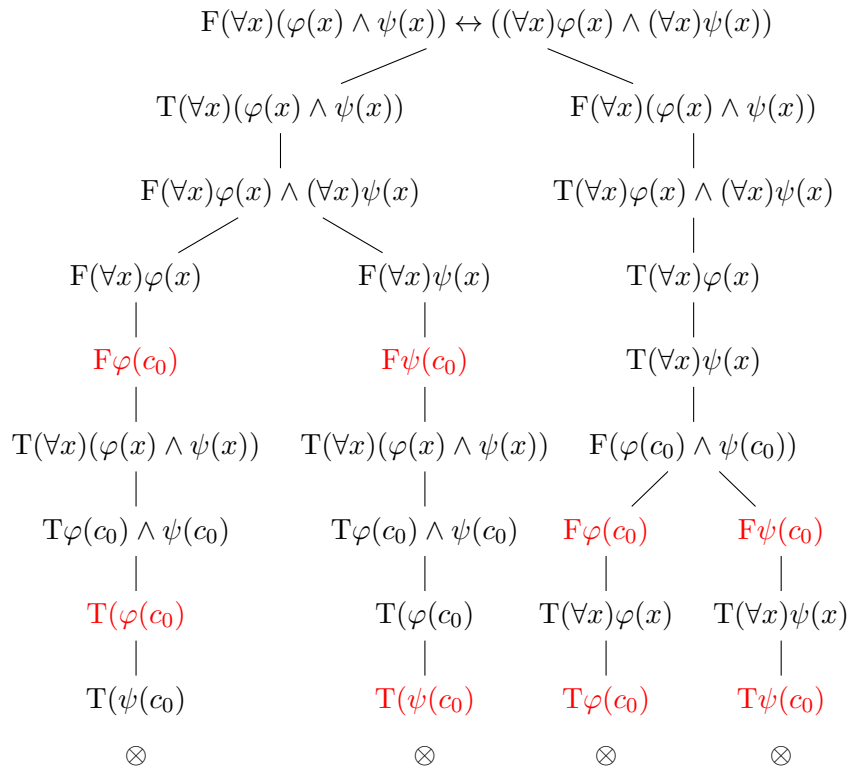
Výsledná tabla jsou na Obrázcích 1.2 a 1.3. Dvojice sporných položek jsou znázorněny červeně. Rozmyslete si, jak byla tabla po krocích zkonstruována.



Obrázek 1.2: Tablo důkaz z Příkladu 1.2.3 (a).

1.2.3 Systematické tablo a konečnost důkazů

V Sekci ?? jsme ukázali, že neprodlužujeme-li sporné větve (což nemusíme dělat), potom sporné tablo, speciálně tablo důkaz, bude vždy konečný. Stejný důkaz funguje i v logice predikátové.



Obrázek 1.3: Tablo důkaz z Příkladu 1.2.3 (b). Konstantu c_0 můžeme použít jako *novou* ve všech třech případech. Stačí, že se zatím nevyskytuje *na dané větvi*.

Důsledek 1.2.4 (Konečnost důkazů). *Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i konečný tablo důkaz φ z T .*

Důkaz. Stejný jako ve výrokové logice, viz důkaz Důsledku ??.

Ve stejné sekci jsme si ukázali konstrukci *systematického tabla*. Tu lze také snadno adaptovat na predikátovou logiku. Musíme zajistit, abychom někdy zredukovali každou položku, použili každý axiom, a nově v predikátové logice také substituovali každý L_C term t_i za proměnnou v položkách typu ‘všichni’.

Definice 1.2.5. Mějme položku R a teorii $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$. *Systematické tablo* z teorie T pro položku R je tablo $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové tablo s položkou R , a pro každé $i \geq 0$:

Buď P položka v nejlevějším vrcholu v na co nejmenší úrovni tabla τ_i , která není redukována na nějaké bezesporné větvi procházející P (resp. jde-li o položku typu ‘všichni’, její výskyt v tomto vrcholu není redukován). Potom τ'_i je tablo vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející v , kde

- je-li P typu ‘všichni’ a má-li ve vrcholu v k -tý výskyt, potom za proměnnou substituujeme k -tý L_C -term t_k ,
- je-li P typu ‘svědek’, potom na dané větvi V za proměnnou substituujeme $c_i \in C$ s nejmenším možným i (takovým, že na V se c_i dosud nevyskytuje).

Jinak, pokud taková položka P a vrchol v neexistují, tj. všechny položky jsou redukovány, definujeme $\tau'_i = \tau_i$.

Tablo τ_{i+1} je potom tablo vzniklé z τ'_i připojením $T\alpha_i$ na každou bezespornou větev τ'_i , pokud $i \leq |T|$. Jinak (je-li T konečná a už jsme použili všechny axiomy) tento krok přeskočíme a definujeme $\tau_{i+1} = \tau'_i$.

Stejně jako ve výrokové logice platí, že systematické tablo je vždy dokončené, a poskytuje konečný důkaz:

Lemma 1.2.6. *Systematické tablo je dokončené.*

Důkaz. Obdobný jako důkaz ve výrokové logice (Lemma ??). Pro položky typu ‘všichni’ si všimněte, že k -tý výskyt redukuje v momentě, kdy na něj při konstrukci narazíme: připojením vrcholu s $(k+1)$ -ním výskytem a substitucí k -tého L_C -termu t_k .

Důsledek 1.2.7 (Systematicčnost důkazů). *Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem φ z T .*

Důkaz. Stejný jako důkaz ve výrokové logice (Důsledek 1.2.7).

1.3 Jazyky s rovností

Nyní si ukážeme, jak aplikovat tablo metodu na jazyky s rovností. Co je to rovnost? V matematice může v různém kontextu znamenat různé relace. Platí $1 + 0 = 0 + 1$? Mluvíme-li

o celých číslech, pak ano, ale máme-li na mysli aritmetické výrazy (nebo např. termy v jazyce těles), potom si levá a pravá strana nejsou rovny: jde o jiné výrazy.⁶

Představte si, že máme teorii T v jazyce s rovností obsahujícím konstantní symboly c_1, c_2 , unární funkční symbol f a unární relační symbol P . Mějme nějaké dokončené tablo z této teorie, a v něm bezespornou větev, na kterém najdeme položku $Tc_1 = c_2$. Budeme chtít sestrojit *kanonický model* \mathcal{A} pro tuto větev, podobně jako ve výrokové logice. Položka bude znamenat, že v kanonickém modelu platí $c_1^{\mathcal{A}} =^{\mathcal{A}} c_2^{\mathcal{A}}$, tj. $(c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}) \in =^{\mathcal{A}}$. To nám ale nestačí, chceme také, aby platilo také např.:

- $c_2^{\mathcal{A}} =^{\mathcal{A}} c_1^{\mathcal{A}}$,
- $f^{\mathcal{A}}(c_1^{\mathcal{A}}) =^{\mathcal{A}} f^{\mathcal{A}}(c_2^{\mathcal{A}})$,
- $c_1^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$, právě když $c_2^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$.

Obecně tedy chceme, aby relace $=^{\mathcal{A}}$ byla tzv. *kongruencí*,⁷ tj. ekvivalencí, která se chová ‘dobře’ vůči funkcím a relacím struktury \mathcal{A} . Toho docílíme tak, že k teorii T přidáme tzv. *axiomy rovnosti*, které tyto vlastnosti vynutí, a tablo sestrojíme z výsledné teorie T^* .

V modelu \mathcal{A} potom bude relace $=^{\mathcal{A}}$ kongruencí. To nám ale nestačí, chceme, aby rovnost byla *identita*, tj. aby $(a, b) \in =^{\mathcal{A}}$ platilo jedině když a a b jsou týmž prvkem univerza. Toho docílíme identifikací všech $=^{\mathcal{A}}$ -ekvivalentních prvků do jediného prvku. Této konstrukci se říká *faktorstruktura* podle kongruence $=^{\mathcal{A}}$.⁸ Nyní tyto pojmy formalizujeme.

Definice 1.3.1 (Kongruence). Mějme ekvivalenci \sim na množině A , funkci $f: A^n \rightarrow A$, a relaci $R \subseteq A^n$. Říkáme, že \sim je

- *kongruencí pro funkci* f , pokud pro všechna $x_i, y_i \in A$ taková, že $x_i \sim y_i$ ($1 \leq i \leq n$) platí $f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n)$,
- *kongruencí pro relaci* f , pokud pro všechna $x_i, y_i \in A$ taková, že $x_i \sim y_i$ ($1 \leq i \leq n$) platí $f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n)$.

Kongruence struktury \mathcal{A} je ekvivalence \sim na množině A , která je kongruencí pro všechny funkce a relace \mathcal{A} .

Definice 1.3.2 (Faktorstruktura). Mějme strukturu \mathcal{A} a její kongruenci \sim . *Faktorstruktura* (*podílová struktura*) \mathcal{A}/\sim podle \sim je struktura \mathcal{A}/\sim v témž jazyce, jejíž univerzum A/\sim je množina všech rozkladových tříd A podle \sim , a jejíž funkce a relace jsou definované *pomocí reprezentantů*, tj:

- $f^{\mathcal{A}/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) = [f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)]_{\sim}$, pro každý (n -ární) funkční symbol f , a
- $R^{\mathcal{A}/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim})$ právě když $R^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)$, pro každý (n -ární) relační symbol R .

Definice 1.3.3 (Axiomy rovnosti). *Axiomy rovnosti* pro jazyk L s rovností jsou následující:

⁶Podobně např. $t_1 = t_2$ v Prologu neznamená, že jde o tentýž term, ale že termy t_1 a t_2 jsou *unifikovatelné*, viz kapitola o rezoluci v predikátové logice.

⁷Název pochází z kongruence modulo n , která je kongruencí v tomto smyslu na množině všech celých čísel, např. splňuje: $a + b \equiv c + d \pmod{n}$ kdykoliv $a \equiv c \pmod{n}$ a $b \equiv d \pmod{n}$.

⁸Stejně jako grupa \mathbb{Z}_n je faktorstrukturou grupy \mathbb{Z} podle $\equiv \pmod{n}$; např. prvek $2 \in \mathbb{Z}_n$ představuje množinu všech celých čísel, jejichž zbytek po dělení n je roven 2.

- (i) $x = x$,
- (ii) $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$ pro každý n -ární funkční symbol f jazyka L ,
- (iii) $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$ pro každý n -ární relační symbol R jazyka L včetně rovnosti.

Cvičení 1.2. První z axiomů rovnosti znamená reflexivitu relace $=^A$. Kam se poděly symetrie a tranzitivita? Ukažte, že plynou z axiomu (iii) pro symbol rovnosti $=$.

Z axiomů (i) a (iii) tedy plyne, že relace $=^A$ je ekvivalence na A , a axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že $=^A$ je kongruencí \mathcal{A} . V tablo metodě v případě jazyka s rovností implicitně přidáme všechny axiomy rovnosti:

Definice 1.3.4 (Tablo důkaz s rovností). Je-li T teorie v jazyce L s rovností, potom označme jako T^* rozšíření teorie T o generální uzávěry⁹ axiomů rovnosti pro jazyk L . *Tablo důkaz* z teorie T je *tablo důkaz* z T^* , podobně pro tablo zamítnutí (a obecně jakékoliv tablo).

Platí následující jednoduché pozorování:

Pozorování 1.3.5. Jestliže $\mathcal{A} \models T^*$, potom platí i $\mathcal{A}/_{=^A} \models T^*$, a ve struktuře $\mathcal{A}/_{=^A}$ je symbol rovnosti interpretován jako identita. Na druhou stranu, v každém modelu, ve kterém je symbol rovnosti interpretován jako identita, platí axiomy rovnosti.

Toto pozorování využijeme při konstrukci *kanonického modelu*, který budeme potřebovat v důkazu Věty o úplnosti. Nejprve ale dokážeme Větu o korektnosti.

1.4 Korektnost a úplnost

V této sekci dokážeme, že tablo metoda je i v predikátové logice korektní a úplná. Důkazy obou vět mají stejnou strukturu jako ve výrokové logice, liší se jen v implementačních detailech.

1.4.1 Věta o korektnosti

Model (struktura) \mathcal{A} se *shoduje* s položkou P , pokud $P = T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = F\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Dále \mathcal{A} se shoduje s větví V , pokud se shoduje s každou položkou na této větvi.

Ukážeme nejprve pomocné lemma analogické Lemmatu 1.4.1:

Lemma 1.4.1. *Shoduje-li se model \mathcal{A} teorie T s položkou v kořeni tablu z teorie T (v jazyce L), potom lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s některou větví v tablu.*

Všimněte si, že stačí expandovat \mathcal{A} o nové konstanty c^A vyskytující se na větvi V . Ostatní konstantní symboly lze interpretovat libovolně.

Důkaz. Mějme tablo $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ z teorie T a model $\mathcal{A} \in M_L(T)$ shodující se s kořenem τ , tedy s (jednoprvkovou) větví V_0 v (jednoprvkovém) τ_0 .

Indukcí podle i najdeme posloupnost větví V_i a expanzí \mathcal{A}_i modelu \mathcal{A} o konstanty $c^A \in C$ vyskytující se na V_i takových, že V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem \mathcal{A}_i , V_{i+1} je prodloužením V_i , a \mathcal{A}_{i+1} je expanzí \mathcal{A}_i (mohou si být i rovny). Požadovaná větev tablu τ je

⁹Neboť v tablo metodě potřebujeme *sentence*.

potom $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$. Expanzi modelu \mathcal{A} do jazyka L_C získáme jako ‘limitu’ expanzí \mathcal{A}_i , tj. vyskytuje-li se symbol $c \in C$ na V , vyskytuje se na nějaké z větví V_i a interpretujeme ho stejně jako v \mathcal{A}_i (ostatní pomocné symboly interpretujeme libovolně).

- Pokud τ_{i+1} vzniklo z τ_i bez prodloužení větve V_i , definujeme $V_{i+1} = V_i$ a $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.
- Pokud τ_{i+1} vzniklo z τ_i připojením položky $T\alpha$ (pro nějaký axiom $\alpha \in T$) na konec větve V_i , definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev a $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme žádný nový pomocný konstantní symbol). Protože \mathcal{A}_{i+1} je modelem T , platí v něm axiom α , tedy shoduje se i s novou položkou $T\alpha$.
- Nechť τ_{i+1} vzniklo z τ_i připojením atomického tabla pro nějakou položku P na konec větve V_i . Protože se model \mathcal{A}_i shoduje s položkou P (která leží na větvi V_i), shoduje se i s kořenem připojeného atomického tabla.
 - Pokud jsme připojili atomické tablo pro logickou spojku, položíme $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový pomocný symbol). Protože \mathcal{A}_{i+1} se shoduje s kořenem atomického tabla, shoduje se i s některou z jeho větví (stejně jako ve výrokové logice); definujeme V_{i+1} jako prodloužení V_i o tuto větev.
 - Je-li položka P typu ‘svědek’: Pokud je $P = T(\exists x)\varphi(x)$, potom $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$, tedy existuje $a \in A$ takové, že $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$. Větev V_{i+1} definujeme jako prodloužení V_i o nově přidanou položku $T\varphi(x/c)$ a model \mathcal{A}_{i+1} jako expanzi \mathcal{A}_i o konstantu $c^A = a$. Příklad $P = F(\forall x)\varphi(x)$ je obdobný.
 - Je-li položka P typu ‘všichni’, větev V_{i+1} definujeme jako prodloužení V_i o atomické tablo. Nově přidaná položka je $T\varphi(x/t)$ nebo $F\varphi(x/t)$ pro nějaký L_C -term t . Předpokládejme, že jde o první z těchto dvou možností, pro druhou je důkaz analogický. Model \mathcal{A}_{i+1} definujeme jako *libovolnou* expanzi \mathcal{A}_i o nové konstanty vyskytující se v t . Protože $\mathcal{A}_i \models (\forall x)\varphi(x)$, platí i $\mathcal{A}_{i+1} \models (\forall x)\varphi(x)$ a tedy i $\mathcal{A}_{i+1} \models \varphi(x/t)$; model \mathcal{A}_{i+1} se tedy shoduje s větvi V_i .

□

Připomeňme stručně myšlenku důkazu Věty o korektnosti: Pokud by existoval důkaz a zároveň protipříklad, protipříklad by se musel shodovat s některou větví důkazu, ty jsou ale všechny sporné. Důkaz je tedy téměř stejný jako ve výrokové logice.

Věta 1.4.2 (O korektnosti). *Je-li výrok φ tablo dokazatelný z teorie T , potom je φ pravdivý v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že $T \not\models \varphi$, tj. existuje $\mathcal{A} \in M(T)$ takový, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Protože $T \vdash \varphi$, existuje sporné tablo z T s $F\varphi$ v kořeni. Model \mathcal{A} se shoduje s $F\varphi$, tedy podle Lemmatu 1.4.1 lze expandovat do jazyka L_C tak, že se expanze shoduje s nějakou větví V . Všechny větve jsou ale sporné. □

1.4.2 Věta o úplnosti

Stejně jako ve výrokové logice ukážeme, že *bezesporná* větev v *dokončeném* tablo důkazu poskytuje protipříklad: model teorie T , který se shoduje s položkou $F\varphi$ v kořeni tabla, tj. neplatí v něm φ . Takových modelů může být více, definujeme proto opět jeden konkrétní, *kanonický*.

Model musí mít nějakou doménu. Jak ji získat z tabla, což je čistě sémantický objekt? Využijeme standardní (v matematice) trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické. Konkrétně, za doménu zvolíme množinu všech *konstantních termů* jazyka L_C .¹⁰ Ty chápeme jako konečné řetězce. V následujícím budeme někdy (neformálně) místo termu t psát “ t ”, abychom zdůraznili, že v daném místě chápeme t jako řetězec znaků, a ne např. jako termovou funkci, kterou je třeba vyhodnotit.¹¹

Definice 1.4.3 (Kanonický model). Mějme teorii T v jazyce $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ a necht’ V je bezesporná větev nějakého dokončeného tabla z teorie T . Potom *kanonický model* pro V je L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$ definovaná následovně:

Je-li jazyk L bez rovnosti, potom:

- Doména A je množina všech konstantních L_C -termů.
- Pro každý n -ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a “ s_1 ”, ..., “ s_n ” z A :

$$(\text{“}s_1\text{”}, \dots, \text{“}s_n\text{”}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ právě když na větvi } V \text{ je položka } TR(s_1, \dots, s_n)$$

- Pro každý n -ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a “ s_1 ”, ..., “ s_n ” z A :

$$f^{\mathcal{A}}(\text{“}s_1\text{”}, \dots, \text{“}s_n\text{”}) = \text{“}f(s_1, \dots, s_n)\text{”}$$

Speciálně, pro konstantní symbol c máme $c^{\mathcal{A}} = \text{“}c\text{”}$.

Funkci $f^{\mathcal{A}}$ tedy interpretujeme jako ‘vytvoření’ nového termu ze symbolu f a vstupních termů (řetězců).

Necht’ je L jazyk s rovností. Připomeňme, že naše tablo je nyní z teorie T^* , tj. z rozšíření T o axiomy rovnosti pro L . Nejprve vytvoříme kanonický model \mathcal{B} pro V jakoby byl L bez rovnosti (jeho doména B je tedy množina všech konstantních L_C -termů). Dále definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$\text{“}s_1\text{”} =^B \text{“}s_2\text{”} \text{ právě když na větvi } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

Kanonický model pro V je potom faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$.

Jak plyne z diskuze v Sekci 1.3, relace $=^B$ je opravdu kongruence struktury \mathcal{B} , definice je tedy korektní, a relace $=^{\mathcal{A}}$ je identita na A . Všimněte si, že v jazyce bez rovnosti je kanonický model vždy spočetně nekonečný. V jazyce s rovností může ale být konečný, jak uvidíme v následujících příkladech.

[TODO]Příklady

[TODO]Cvičení $x = y \vee y = z \vee x = z$

¹⁰Tj. termů zbudovaných aplikací funkčních symbolů jazyka L na konstantní symboly jazyka L (má-li nějaké) a pomocné konstantní symboly z C .

¹¹Srovnejte aritmetický výraz “ $1+1$ ” a $1+1=2$.

1.4.3 Věta o úplnosti

1.5 Důsledky korektnosti a úplnosti

1.5.1 Löwenheim-Skolemova věta

1.5.2 Věta o kompaktnosti

1.5.3 Aplikace

1.6 Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

[TODO]