NAIL062 V&P Logika: 3. cvičení

Témata: Syntaxe a sémantika výrokové logiky. Převod do CNF a DNF. Univerzálnost logických spojek.

Příklad 1. Mějme teorii $T = \{\neg q \to (\neg p \vee q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$ v jazyce $\{p, q, r\}$.

(a) Uveďte příklad následujícího: výrok pravdivý v T, lživý v T, nezávislý v T, splnitelný v T, a dvojice T-ekvivalentních výroků.

(b) Které z následujících výroků jsou pravdivé, lživé, nezávislé, splnitelné v T? T-ekvivalentní?

$$p,\ \neg q,\ \neg p \vee q,\ p \to r,\ \neg q \to r,\ p \vee q \vee r$$

Příklad 2. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\mathrm{var}(T)$.

(a) Které výroky ve tvaru $p_i \to p_j$ jsou důsledky T?

(b) Určete všechny modely T.

Příklad 3. Určete množinu modelů dané formule. Využijte toho, že je v DNF resp. v CNF.

(a) $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$

(b) $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$

(c) $(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) \vee (p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) \vee (\neg p_3) \vee (p_2 \wedge p_4) \vee (p_1 \wedge p_3 \wedge p_5)$

(d) $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_3) \wedge (p_2 \vee p_4) \wedge (p_1 \vee p_3 \vee p_5)$

Příklad 4. Převeďte následující výroky do CNF a DNF

(a) $(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r)$,

(b) $(\neg p \to (\neg q \to r)) \to p$,

Proveďte to:

(I) sémanticky (pomocí pravdivostní tabulky),

(II) ekvivalentními úpravami.

Příklad 5. Najděte (co nejkratší) CNF a DNF reprezentace Booleovské funkce $maj : {}^3 2 \to 2$, která vrací převládající hodnotu mezi 3 vstupy.

Příklad 6. Najděte CNF a DNF reprezentaci n-ární parity, tj. Booleovské funkce par : ${}^{n}2 \to 2$, která vrací XOR všech vstupních hodnot:

$$\mathrm{par}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n) \bmod 2$$

Zkuste to pro malé hodnoty n.

Příklad 7. Buď $\mathbb{P}$ spočetně nekonečná množina prvovýroků.

- Ukažte, že již neplatí, že každou $K \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$ lze axiomatizovat výrokem v CNF i výrokem v DNF.
- Uveďte příklad množiny modelů K, kterou nelze axiomatizovat ani výrokem v CNF, ani výrokem v DNF.

Příklad 8. Ukažte, že $\wedge$ a $\vee$ nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že $\{\wedge, \vee\}$ není *univerzální* množina logických spojek.

Příklad 9. Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

(a) $\{\downarrow\}$ kde $\downarrow$ je Peirce arrow (NOR),

(b) $\{\uparrow\}$ kde $\uparrow$ je Sheffer stroke (NAND),

(c) $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

(d) $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.

Příklad 10. Uvažte ternární Booleovský operátor IFTE(p, q, r) definovaný jako 'if p then q else r'.

(a) Zkonstruujte pravdivostní tabulku.

(b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory $(\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \ldots)$ lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.