Osmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

Osmá přednáška

Program

- tablo metoda v predikátové logice
- jazyky s rovností
- korektnost a úplnost, kanonický model

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 7.1-7.4 z Kapitoly 7

Kapitola 7: Tablo metoda v predikátové logice

7.1 Neformální úvod

Úvodní příklady: dva tablo důkazy

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \to \neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}\neg P(c_0) \\
| \\
\mathrm{F}P(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \\
\\
\otimes
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{T}\neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{F}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{F}P(c_0) \\
| \\
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{F}\neg P(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \\
\\
\otimes
\end{array}
$$

Tablo metoda v predikátové logice

- opět vždy předpokládáme, že jazyk L je spočetný (nejprve bez rovnosti, později metodu rozšíříme pro rovnost)
- v položkách musí být sentence: pravdivostní hodnota nesmí záviset na ohodnocení (ale můžeme vzít generální uzávěry)
- redukce položek: stejná atomická tabla pro logické spojky (kde φ, ψ jsou sentence), ale čtyři nové případy pro kvantifikátory:
  - typ "svědek": položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
  - typ "všichni": položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$
- kvantifikátor nelze odstranit, $\varphi(x)$ by typicky nebyla sentence
- místo toho za x substituujeme konstantní term t: $\varphi(x/t)$
- jaký? podle typu položky ("svědek" vs. "všichni")

Redukce položek s kvantifikátorem

- jazyk L rozšíříme o spočetně mnoho nových (pomocných) konstantních symbolů $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$, označíme L_C
- vždy máme k dispozici nový, dosud nepoužitý symbol $c \in C$
- **typ "svědek":** dosadíme nový $c \in C$ (dosud na větvi není)
  - pro $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/c)$
  - c hraje roli prvku, který položku 'splňuje'
- **typ "všichni":** substituujeme libovolný konstantní L_C-term
  - pro $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/t)$
  - bezesporná větev je dokončená jen pokud dosadíme všechny t ('použijeme vše, co víme')
- **konvence:** kořeny atomických tabel nekreslíme kromě položek typu "všichni" (po jednom dosazení ještě nejsme hotovi!)
- **typický postup:** nejprve zredukujeme položky typu "svědek", poté zjistíme, co 'o svědcích říkají' položky typu "všichni"

7.2 Formální definice

Jazyk, položky, atomická tabla

- buď L spočetný jazyk bez rovnosti.
- označme L_C rozšíření L o spočetně mnoho nových pomocných konstantních symbolů $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- zvolme očíslování konstantních L_C-termů: $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- mějme nějakou L-teorii T a L-sentenci φ
- položka je nápis $\mathrm{T}\varphi$ nebo $\mathrm{F}\varphi$, kde φ je L_C-sentence
- položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ jsou typu "svědek"
- položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ jsou typu "všichni"
- atomická tabla jsou násl. položkami označkované stromy:

Atomická tabla pro kvantifikátory

φ je libovolná L_C-sentence, x proměnná, t_i konstantní L_C-term, $c_i \in C$ je nový pomocný konstantní symbol (při konstrukci tabla nesměl dosud být na dané větvi)

	$\forall$	$\exists$
True	$\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ $\vert$ $\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$	$\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ $\vert$ $\mathrm{T}\varphi(x/c_i)$
False	$\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ $\vert$ $\mathrm{F}\varphi(x/c_i)$	$\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ $\vert$ $\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$

Atomická tabla pro logické spojky

φ a ψ jsou libovolné L_C-sentence

	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
True	$\mathrm{T}\neg\varphi$ $\mathrm{F}\varphi$	$\mathrm{T}\varphi\wedge\psi$ $\mathrm{T}\varphi$ $\mathrm{T}\psi$	$\mathrm{T}\varphi\vee\psi$ $\mathrm{T}\varphi \quad \mathrm{T}\psi$	$\mathrm{T}\varphi\rightarrow\psi$ $\mathrm{F}\varphi \quad \mathrm{T}\psi$	$\mathrm{T}\varphi\leftrightarrow\psi$ $\mathrm{T}\varphi \quad \mathrm{F}\varphi$ $\mathrm{T}\psi \quad \mathrm{F}\psi$
False	$\mathrm{F}\neg\varphi$ $\mathrm{T}\varphi$	$\mathrm{F}\varphi\wedge\psi$ $\mathrm{F}\varphi \quad \mathrm{F}\psi$	$\mathrm{F}\varphi\vee\psi$ $\mathrm{F}\varphi$ $\mathrm{F}\psi$	$\mathrm{F}\varphi\rightarrow\psi$ $\mathrm{T}\varphi$ $\mathrm{F}\psi$	$\mathrm{F}\varphi\leftrightarrow\psi$ $\mathrm{T}\varphi \quad \mathrm{F}\varphi$ $\mathrm{F}\psi \quad \mathrm{T}\psi$

Formální definice tabla

- konečné tablo z teorie T je uspoř., položkami označ. strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
    - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie T
    - pro libovolnou položku P na libovolné větvi V můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P
      je-li P typu "svědek", můžeme použít jen $c_i \in C$, který dosud na V není (pro typ "všichni" lze použít lib. konst. L_C-term t_i)
    - na konec libovolné větve můžeme připojit položku $\mathrm{T}\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$
- tablo z teorie T je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde:
    - τ_i jsou konečná tabla z T
    - τ_0 je jednoprvkové tablo
    - τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku
- tablo pro položku P je tablo, které má položku P v kořeni

konvence: kořen atom. tabla nezapisujeme není-li P typu "všichni"

Dokončené a sporné tablo

- Tablo je sporné, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je sporná, pokud obsahuje položky $\mathrm{T}\psi$ a $\mathrm{F}\psi$ pro nějakou sentenci ψ, jinak je bezesporná.
- Tablo je dokončené, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je dokončená, pokud je sporná, nebo
  - každá její položka je na této větvi redukovaná,
  - a zároveň obsahuje položku $\mathrm{T}\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je redukovaná na větvi V procházející P, pokud
  - je tvaru $\mathrm{T}\psi$ resp. $\mathrm{F}\psi$ pro atomickou sentenci, nebo
  - není typu "všichni" a vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla (tj., typicky, již došlo k jejímu rozvoji na V), nebo
  - je typu "všichni" a všechny její výskyty na větvi V jsou na V redukované.

Kdy je výskyt položky typu “všichni” redukovaný?

Výskyt položky P typu “všichni” na V je i-tý, má-li právě $i - 1$ předků označených P, a i-tý výskyt je redukovaný na V, pokud

- P má $(i + 1)$-ní výskyt na V, a zároveň
- na V je položka $\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$) resp. $\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$), kde t_i je i-tý konstantní L_C-term (tj., typicky, už jsme za x substituovali t_i)

NB: je-li položka typu “všichni” na V redukovaná, má na V nekonečně výskytů, a dosadili jsme všechny konstantní L_C-termy

Tablo důkaz a tablo zamítnutí

- tablo důkaz sentence φ z teorie T je sporné tablo z teorie T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni
- pokud existuje, je φ (tablo) dokazatelný z T, píšeme $T \vdash \varphi$
- podobně, tablo zamítnutí je sporné tablo s $\mathrm{T}\varphi$ v kořeni
- existuje-li, je φ (tablo) zamítnutelný z T, tj. platí $T \vdash \neg\varphi$

Příklad: tablo důkaz (v logice)

$$\mathrm{F}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

$$\mathrm{F}(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)P(x)$$

$$\mathrm{F}(\forall x)Q(x)$$

$$\mathrm{F}Q(c_0)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)P(x)$$

$$\mathrm{T}P(c_0)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

$$\mathrm{T}P(c_0) \to Q(c_0)$$

$$\begin{array}{cc} / & \backslash \\ \mathrm{F}P(c_0) & \mathrm{T}Q(c_0) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

Ještě příklad (φ, ψ jsou formule s jedinou volnou proměnnou x)

$\mathrm{F}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$

- $\mathrm{T}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
  - $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$
    - $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
      - $\mathrm{F}\varphi(c_0)$
      - $\mathrm{T}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
      - $\mathrm{T}\varphi(c_0) \wedge \psi(c_0)$
      - $\mathrm{T}\varphi(c_0)$
      - $\mathrm{T}\psi(c_0)$
      - $\otimes$
    - $\mathrm{F}(\forall x)\psi(x)$
      - $\mathrm{F}\psi(c_0)$
      - $\mathrm{T}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
      - $\mathrm{T}\varphi(c_0) \wedge \psi(c_0)$
      - $\mathrm{T}\varphi(c_0)$
      - $\mathrm{T}\psi(c_0)$
      - $\otimes$
- $\mathrm{F}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
  - $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$
  - $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$
  - $\mathrm{T}(\forall x)\psi(x)$
  - $\mathrm{F}(\varphi(c_0) \wedge \psi(c_0))$
    - $\mathrm{F}\varphi(c_0)$
      - $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$
      - $\mathrm{T}\varphi(c_0)$
      - $\otimes$
    - $\mathrm{F}\psi(c_0)$
      - $\mathrm{T}(\forall x)\psi(x)$
      - $\mathrm{T}\psi(c_0)$
      - $\otimes$

(c_0 lze použít jako nový ve všech případech: na dané větvi se dosud nevyskytuje)

Systematické tablo

musí někdy zredukovat každou položku, použít každý axiom, a nově ve všech položkách typu "všichni" dosadit každý L_C term t_i

Systematické tablo z $T = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ pro položku R je $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové s položkou R, a pro $i \geq 0$:

- buď P nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející P (resp. je-li typu "všichni", její výskyt není redukovaný)
- nejprve definujeme τ_i' vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející P, kde je-li P typu "všichni" a má-li ve vrcholu k-tý výskyt, dosadíme k-tý L_C-term t_k, je-li typu "svědek", substituujeme $c_i \in C$ s nejmenším i, které na větvi zatím není
- pokud taková položka P neexistuje, potom $\tau_i' = \tau_i$
- τ_{i+1} vznikne z τ_i' připojením $\mathrm{T}\alpha_{i+1}$ na vš. bezesporné větve (pokud už jsme použili všechny axiomy, definujeme $\tau_{i+1} = \tau_i'$)

Konečnost a systematičnost důkazů

Lemma: Systematické tablo je dokončené.

Důkaz: k-tý výskyt položky typu "všichni" redukujeme když na něj narazíme: připojíme $(k+1)$-ní výskyt a dosadíme k-tý L_C-term t_k. Zbytek důkazu jako ve výrokové logice. $\square$

Neprodlužujeme-li sporné větve (což nemusíme), je sporné tablo vždy konečné. Důkaz stejný jako ve výrokové logice:

Důsledek (Konečnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i konečný tablo důkaz φ z T.

Stejně jako ve výrokové logice z důkazu plyne:

Důsledek (Systematičnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem φ z T.

7.3 Jazyky s rovností

Rovnost

$1 + 0 = 0 + 1$? identita celých čísel, výrazů, množin, unifikovatelnost termů (v Prologu), ...

Tablo je čistě syntaktický objekt, ale $=^{\mathcal{A}}$ má být identita na A. Jak toho docílit?

Mějme dokončenou bezespornou větev tabla s položkou $\mathrm{T} c_1 = c_2$. V kanonickém modelu musí platit nejen $(c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}) \in =^{\mathcal{A}}$, ale také:

- $c_2^{\mathcal{A}} =^{\mathcal{A}} c_1^{\mathcal{A}}$
- $f^{\mathcal{A}}(c_1^{\mathcal{A}}) =^{\mathcal{A}} f^{\mathcal{A}}(c_2^{\mathcal{A}})$
- $c_1^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$ právě když $c_2^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$

To vynutíme přidáním axiomů rovnosti, $=^{\mathcal{A}}$ bude kongruence $\mathcal{A}$ (ekvivalence, která se chová dobře k funkcím a relacím).

Poté vezmeme faktorstrukturu $\mathcal{B} = \mathcal{A}/_{=^{\mathcal{A}}}$, v ní už je $=^{\mathcal{B}}$ identita.

Kongruence a faktorstruktura

Buď $\sim$ ekvivalence na A, $f\colon A^n \to A$, $R \subseteq A^n$. Říkáme, že $\sim$ je:

- kongruence pro f, pokud pro všechna $a_i, b_i \in A$ taková, že $a_i \sim b_i$ $(1 \leq i \leq n)$, platí $f(a_1, \ldots, a_n) \sim f(b_1, \ldots, b_n)$
- kongruence pro R, pokud pro všechna $a_i, b_i \in A$ taková, že $a_i \sim b_i$ $(1 \leq i \leq n)$, platí $R(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R(b_1, \ldots, b_n)$

Kongruence struktury $\mathcal{A}$ je ekvivalence na A, která je kongruencí pro všechny funkce a relace $\mathcal{A}$.

Faktorstruktura (podílová struktura) $\mathcal{A}$ podle $\sim$ je struktura $\mathcal{A}/_\sim$ v témž jazyce, doména $A/_\sim$ je množina všech rozkladových tříd A podle $\sim$, funkce a relace definujeme pomocí reprezentantů:

- $f^{\mathcal{A}/\sim}([a_1]_\sim, \ldots, [a_n]_\sim) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\sim$
- $R^{\mathcal{A}/\sim}([a_1]_\sim, \ldots, [a_n]_\sim) \Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$

Axiomy rovnosti

Axiomy rovnosti pro jazyk L s rovností:

(i) $x = x$

(ii) pro každý n-ární funkční symbol f jazyka L:

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

(iii) pro každý n-ární relační symbol R jazyka L včetně rovnosti:

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$$

- symetrie a tranzitivita plynou z (iii) pro $=$ (dokažte si)
- z axiomů (i) a (iii) tedy plyne, že relace $=^{\mathcal{A}}$ je ekvivalence
- axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že $=^{\mathcal{A}}$ je kongruence

V tablo metodě pro jazyk s rovností implicitně přidáme axiomy rovnosti (přesněji jejich generální uzávěry, potřebujeme sentence).

Tablo důkaz s rovností

Je-li T teorie v jazyce L s rovností, označme jako T^* rozšíření T o generální uzávěry axiomů rovnosti pro L.

- tablo důkaz z teorie T je tablo důkaz z T^*
- podobně pro tablo zamítnutí, a obecně jakékoliv tablo z T

Pozorování:

- Je-li $\mathcal{A} \models T^*$, potom i $\mathcal{A}/_{=^\mathcal{A}} \models T^*$, a ve struktuře $\mathcal{A}/_{=^\mathcal{A}}$ je symbol rovnosti interpretován jako identita.
- Na druhou stranu, v každém modelu, ve kterém je symbol rovnosti interpretován jako identita, platí axiomy rovnosti.

(Použijeme při konstrukci kanonického modelu v důkazu úplnosti.)

7.4 Korektnost a úplnost

Korektnost a úplnost

Stejně jako ve výrokové logice:

dokazatelnost je totéž, co platnost

- $T \vdash \varphi \;\Rightarrow \mathrm{T} \models \varphi$ (korektnost) *"co jsme dokázali, platí"*
- $T \models \varphi \;\Rightarrow \mathrm{T} \vdash \varphi$ (úplnost) *"co platí, lze dokázat"*

(Důkazy mají stejnou strukturu, liší se jen v implementačních detailech pomocných lemmat.)

Korektnost: pomocné lemma

Model $\mathcal{A}$ se shoduje s položkou P, pokud $P = \mathrm{T}\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = \mathrm{F}\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V, shoduje-li s každou položkou na V.

Lemma: Shoduje-li se model $\mathcal{A}$ teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tabla z T, potom lze $\mathcal{A}$ expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly c_i vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

Důkaz: Indukcí podle konstrukce $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ najdeme posloupnost větví $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots$ a expanzí $\mathcal{A}_i$ o konstanty na V_i tak, že:

- V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem $\mathcal{A}_i$
- V_{i+1} je prodloužením V_i a $\mathcal{A}_{i+1}$ je expanzí $\mathcal{A}_i$

Hledaná větev v τ je $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$, L_C-expanze $\mathcal{A}$ je 'limita' $\mathcal{A}_i$: vyskytuje-li se $c \in C$ na V_i, interpretuj jako v $\mathcal{A}_i$, jinak libovolně.

Báze: $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ se shoduje s kořenem, tj. s (jednoprvkovou) V_0 v τ_0.

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok: Pokud jsme neprodloužili V_i: $V_{i+1} = V_i$, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.

Pokud jsme připojili $\mathrm{T}\alpha$ (pro $\alpha \in T$) na konec V_i, definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový symbol). Protože $\mathcal{A} \models T$, máme i $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$, tedy se shoduje.

Nechť τ_{i+1} vzniklo připojením atomického tabla pro P na konec V_i.

- **logická spojka:** $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme V_i na V_{i+1}
- **typ "svědek":** SÚNO $P = \mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$: $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$, tedy existuje $a \in A$, že $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$. V_{i+1} je prodloužení V_i o nově přidanou $\mathrm{T}\varphi(x/c)$, $\mathcal{A}_{i+1}$ je expanze $\mathcal{A}_i$ o $c^{\mathcal{A}_{i+1}} = a$.
- **typ "všichni":** V_{i+1} je prodloužení V_i o atomické tablo. SÚNO nová položka $\mathrm{T}\varphi(x/t)$ pro nějaký L_C-term t. Model $\mathcal{A}_{i+1}$ je libovolná expanze $\mathcal{A}_i$ o nové symboly z t. $\mathcal{A}_i \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models \varphi(x/t)$, tedy se shoduje. $\square$

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T, potom je φ pravdivá v T, tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{T} \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

Důkaz: Sporem, nechť $T \not\models \varphi$, tj. existuje $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Protože $T \vdash \varphi$, existuje tablo důkaz φ z T, což je sporné tablo z T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni.

Model $\mathcal{A}$ se shoduje s kořenem $\mathrm{F}\varphi$, tedy podle Lemmatu lze interpretovat symboly $c \in C$ tak, že se výsledná L_C-expanze $\mathcal{A}'$ shoduje s nějakou větví V. Všechny větve jsou ale sporné, musela by se shodovat s $\mathrm{T}\psi$ a zároveň $\mathrm{F}\psi$ pro nějakou L_C-sentenci ψ. $\square$

Kanonický model: jazyk bez rovnosti

opět z bezesporné dokončené větve V (tabla z T) vyrobíme model

jeho doména? trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické

Je-li $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ bez rovnosti, kanonický model pro bezespornou dokončenou V je L_C-struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup C^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde:

- doména A je množina všech konstantních L_C-termů
- pro n-ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a "s_1", …, "s_n" z A:

$$(\text{“}s_1\text{”}, \dots, \text{“}s_n\text{”}) \in R^{\mathcal{A}} \;\Leftrightarrow\; \text{na } V \text{ je položka } \mathrm{T}R(s_1, \dots, s_n)$$

- pro n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a "s_1", …, "s_n" z A:

$$f^{\mathcal{A}}(\text{“}s_1\text{”}, \dots, \text{“}s_n\text{”}) = \text{“}f(s_1, \dots, s_n)\text{”}$$

- speciálně, pro konstantní symbol c máme $c^{\mathcal{A}} = \text{“}c\text{”}$

(funkce $f^{\mathcal{A}}$ je "vytvoření" termu ze symbolu f a vstupních termů)

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ v jazyce $L = \langle R, f, d\rangle$ bez rovnosti (R unární relační, f unární funkční, d konstantní). Protipříklad: $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T s položkou $\mathrm{F}\neg R(d)$ v kořeni má jedinou, bezespornou větev V
- kanon. model: L_C-struktura $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots\rangle$
- doména je $A = \{\text{“}d\text{”}, \text{“}f(d)\text{”}, \text{“}f(f(d))\text{”}, \dots, \text{“}c_0\text{”}, \text{“}f(c_0)\text{”}, \text{“}f(f(c_0))\text{”}, \dots, \text{“}c_1\text{”}, \text{“}f(c_1)\text{”}, \text{“}f(f(c_1))\text{”}, \dots\}$
- interpretace symbolů jsou:
  - $d^{\mathcal{A}} = \text{“}d\text{”}$
  - $c_i^{\mathcal{A}} = \text{“}c_i\text{”}$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$
  - $f^{\mathcal{A}}(\text{“}d\text{”}) = \text{“}f(d)\text{”}$, $f^{\mathcal{A}}(\text{“}f(d)\text{”}) = \text{“}f(f(d))\text{”}$, ...
  - $R^{\mathcal{A}} = A \setminus C = \{\text{“}d\text{”}, \text{“}f(d)\text{”}, \text{“}f(f(d))\text{”}, \dots, \text{“}f(c_0)\text{”}, \text{“}f(f(c_0))\text{”}, \dots, \text{“}f(c_1)\text{”}, \text{“}f(f(c_1))\text{”}, \dots\}$.
- redukt na původní jazyk L: $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle$

Kanonický model: jazyk s rovností

Je-li L s rovností:

- vezmeme kanonický model $\mathcal{B}$ pro V jako by byl L bez rovnosti
- definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$\text{“}s_1\text{”} =^B \text{“}s_2\text{”} \;\Leftrightarrow\; \text{na } V \text{ je položka } \mathrm{T} s_1 = s_2$$

- kanonický model pro V je faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$
- tablo je nyní z teorie T^* (rozšíření o axiomy rovnosti)
- $=^B$ je opravdu kongruence struktury $\mathcal{B}$ a $=^{\mathcal{A}}$ je identita na A
- **Pozorování:** pro lib. formuli φ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi$ (symbol $=$ interpretujeme jako $=^B$ v $\mathcal{B}$ a jako identitu v $\mathcal{A}$)

Všimněte si:

- v jazyce bez rovnosti je kanonický model spočetně nekonečný
- v jazyce s rovností může být i konečný

Příklad

$T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ $L = \langle R, f, d\rangle$ s rovností

opět chceme protipříklad ukazující, že $T \not\models \neg R(d)$

- dokončené tablo z T^* pro $\mathrm{F}\neg R(d)$ má jedinou, bezespornou V
- sestrojíme kanonický model jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots\rangle$$

- '$=$' jako obyčejný symbol: $s_1 =^B s_2 \Leftrightarrow s_1 = f(\cdots(f(s_2))\cdots)$ nebo $s_2 = f(\cdots(f(s_1))\cdots)$ pro sudý počet f

$$B/_{=^B} = \{[\text{“}d\text{”}]_{=^B}, [\text{“}f(d)\text{”}]_{=^B}, [\text{“}c_0\text{”}]_{=^B}, [\text{“}f(c_0)\text{”}]_{=^B}, [\text{“}c_1\text{”}]_{=^B}, [\text{“}f(c_1)\text{”}]_{=^B}, \dots\}$$

- kanonický model: $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots\rangle$
  - $A = B/_{=^B}$, $d^{\mathcal{A}} = [\text{“}d\text{”}]_{=^B}$, $c_i^{\mathcal{A}} = [\text{“}c_i\text{”}]_{=^B}$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$,
  - $f^{\mathcal{A}}([\text{“}d\text{”}]_{=^B}) = [\text{“}f(d)\text{”}]_{=^B}$,
    $f^{\mathcal{A}}([\text{“}f(d)\text{”}]_{=^B}) = [\text{“}f(f(d))\text{”}]_{=^B} = [\text{“}d\text{”}]_{=^B}$, ...
  - $R^{\mathcal{A}} = A = B/_{=^B}$.
- redukt na původní jazyk L: $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle$

Úplnost: pomocné lemma

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V.

Důkaz: Jazyk bez rovnosti: indukcí podle struktury sentence v P

- **atomická sentence:** stejně jako ve VL (báze indukce)
- **logická spojka:** stejně jako ve VL
- **typ "svědek":** $P = \mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$, potom je na V i $T\varphi(x/c)$ pro nějaké "c" $\in A$; z indukčního předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/\text{"}c\text{"})]$ tedy i $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$
- **typ "všichni":** $P = \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$, na V jsou i položky $T\varphi(x/t)$ pro každý konstantní L_C-term, tj. pro každý prvek "t" $\in A$; z ind. předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi(x)[e(x/\text{"}t\text{"})]$ pro každé "t" $\in A$, tedy $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$

Jazyk s rovností: $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^{\mathcal{B}}}$, pro $\mathcal{B}$ máme, zbytek z Pozorování $\square$

Věta o úplnosti

Věta (O úplnosti): Je-li sentence φ pravdivá v teorii T, potom je tablo dokazatelná z T, tj. $T \models \varphi \Rightarrow \mathrm{T} \vdash \varphi$.

Důkaz: Ukážeme, že libovolné dokončené (např. systematické) tablo z T s $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: Není-li sporné, má bezespornou (dokončenou) větev V, a dle Lemmatu se kanonický model $\mathcal{A}$ s větví V shoduje.

Buď $\mathcal{A}'$ redukt $\mathcal{A}$ na jazyk teorie T (zapomeň pomocné symboly).

Protože je V dokončená, obsahuje $\mathrm{T}\alpha$ pro všechny axiomy T. Model $\mathcal{A}$, tedy i $\mathcal{A}'$, splňuje všechny axiomy a máme $\mathcal{A}' \models T$.

Protože se ale $\mathcal{A}$, tedy i $\mathcal{A}'$, shoduje i s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni, máme $\mathcal{A}' \not\models \varphi$, což dává protipříklad, a máme $T \not\models \varphi$, spor. $\square$