Kapitola 1

Tablo metoda v predikátové logice

V této kapitole ukážeme, jak lze zobecnit *metodu analytického tabla* z výrokové na predikátovou logiku.[1] Metoda funguje velmi podobně, musíme si ale poradit *kvantifikátory*.

1.1 Neformální úvod

V této sekci tablo metodu neformálně představíme. K formálním definicím se vrátíme později. Začneme dvěma příklady, na kterých ilustruje, jak tablo metoda v predikátové logice funguje, a jak se vypořádá s kvantifikátory.

Příklad 1.1.1. Na Obrázku 1.1.1 jsou znázorněna dvě tabla. Jsou to tablo důkazy (v logice, tj. z prázdné teorie) *sentencí* $(\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$ (vpravo) a $\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$ (vlevo) jazyka $L = \langle P \rangle$ (bez rovnosti), kde P je unární relační symbol. Symbol c_0 je *pomocný konstantní symbol*, který do jazyka při konstrukci tabla přidáváme.

Položky

Formule v položkách musí být vždy *sentence*, neboť potřebujeme, aby měly v daném modelu *pravdivostní hodnotu* (nezávisle na ohodnocení proměnných). To ale není zásadní omezení, chceme-li dokázat, že formule φ platí v teorii T, můžeme nejprve nahradit formuli φ a všechny axiomy T jejich *generálními uzávěry* (tj. univerzálně kvantifikujeme všechny volné proměnné). Získáme tak *uzavřenou* teorii T' a sentenci φ' a platí: $T' \models \varphi'$ právě když $T \models \varphi$.

Kvantifikátory

Redukce položek funguje stejně, použijeme tatáž atomická tabla pro logické spojky (viz Tabulka **??**, kde místo výroků jsou φ, ψ sentence). Musíme ale přidat 4 nová atomická tabla pro T/F a univerzální/existenční kvantifikátor. Tyto položky dělíme na dva typy:

- typ "*svědek*": položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
- typ "*všichni*": položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$

Příklady vidíme v tablech na Obrázku 1.1.1 ('svědci' jsou červeně, 'všichni' modře).

[1] Na tomto místě je dobré připomenout si tablo metodu ve výrokové logice, viz Kapitola **??**.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \to \neg(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{T}(\exists x)\neg P(x)\\
|\\
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{T}(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{T}\neg P(c_0)\\
|\\
\mathrm{F}P(c_0)\\
|\\
\mathrm{T}(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{T}P(c_0)\\
\otimes
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)\neg P(x)\\
|\\
\mathrm{T}\neg(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x)\\
|\\
\mathrm{F}(\forall x)P(x)\\
|\\
\mathrm{F}P(c_0)\\
|\\
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x)\\
|\\
\mathrm{F}\neg P(c_0)\\
|\\
\mathrm{T}P(c_0)\\
\otimes
\end{array}
$$

Obrázek 1.1: Příklady tabel. Položky typu ‘svědek’ jsou znázorněny červeně, položky typu ‘všichni’ modře.

Kvantifikátor nemůžeme pouze odstranit, neboť výsledná formule $\varphi(x)$ by nebyla sentencí. Místo toho současně s odstraněním kvantifikátoru *substituujeme* za x nějaký *konstantní term*, v nové položce tedy bude *sentence* $\varphi(x/t)$. Jaký konstantní term t substituujeme záleží na tom, zda jde o položku typu “svědek” nebo “všichni”.

Pomocné konstantní symboly

Jazyk L teorie T, ve které dokazujeme, rozšíříme o spočetně mnoho *nových (pomocných) konstantních symbolů* $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ (ale budeme psát i $c, d, \dots$), výsledný rozšířený jazyk označíme L_C. Konstantní termy v jazyce L_C tedy existují, i pokud původní jazyk L nemá žádné konstanty. A vždy při konstrukci tabla máme k dispozici nějaký *nový*, dosud *nepoužitý* (ani v teorii, ani v konstruovaném tablu) pomocný konstantní symbol $c \in C$.

Svědci

Při redukci položky typu “svědek” substituujeme za proměnnou jeden z těchto nových, pomocných symbolů, a to takový, který *dosud nebyl na dané větvi použit.* V případě položky $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/c)$. Tento konstantní symbol c bude hrát roli (nějakého) prvku, který danou formuli splňuje (resp. vyvrací, jde-li o položku tvaru $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$). Zde používáme větu o konstantách (Věta **??**). Je důležité, že symbol c dosud nebyl na větvi ani v teorii nijak použit. Typicky ale poté použijeme položky typu “všichni”, abychom se dozvěděli, co musí *o tomto svědku platit.*

Na Obrázku 1.1.1 vidíme příklad: položka $\mathrm{T}(\exists x)\neg P(x)$ v levém tablu je redukovaná, její redukcí vznikla položka $\mathrm{T}\neg P(c_0)$; $c_0 \in C$ je pomocný symbol, na větvi se dosud nevyskytoval (a je první takový). Podobně pro položku $\mathrm{F}(\forall x)P(x)$ a $\mathrm{F}P(c_0)$ v pravém tablu.

Všichni

Při redukci položky typu "všichni" substituujeme za proměnnou x libovolný *konstantní term* t rozšířeného jazyka L_C. Z položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ tedy získáme položku $\mathrm{T}\varphi(x/t)$.

Aby byla bezesporná větev *dokončená*, budou na ní ale muset být položky $\mathrm{T}\varphi(x/t)$ pro *všechny* konstantní L_C-termy t. (Musíme 'použít' vše, co položka $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ 'říká'.) A stejně pro položku tvary $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$.

Ve výrokové logice jsme používali konvenci, že při připojování atomických tabel vynecháváme jejich kořeny (jinak bychom opakovali na větvi tutéž položku dvakrát). V predikátové logice použijeme stejnou konvenci, ale *s výjimkou položek typu 'svědek'*. U těch zapíšeme i kořen připojovaného atomického tabla. Proč to děláme? Abychom si připomněli, že s touto položkou ještě nejsme hotovi, že musíme připojit atomická tabla s jinými konstantními termy.

Na Obrázku 1.1.1 v levém tablu *není* položka $\mathrm{T}(\forall x)P(x)$ *redukovaná*. Její *první výskyt* (4. vrchol shora) jsme zredukovali, substituujeme term $t = c_0$, máme tedy $\varphi(x/t) = P(c_0)$. Připojili jsme atomické tablo v sestávající z téže položky v kořeni $\mathrm{T}(\forall x)P(x)$, kterou do tabla *zapíšeme*, a z položky $\mathrm{T}P(c_0)$ pod ní. Zatímco *první výskyt* položky $\mathrm{T}(\forall x)P(x)$ je tímto redukovaný, *druhý výskyt* (7. vrchol shora) redukovaný není. Podobně pro položku $\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x)$ v pravém tablu.

Tento poněkud technický přístup k definici *redukovanosti* (výskytů) položek typu 'všichni' se nám bude hodit v definici *systematického tabla*.

Jazyk

Nadále budeme předpokládat, že jazyk L je *spočetný*.[2] Z toho plyne, že každá L-teorie T má jen spočetně mnoho axiomů, a také že konstantních termů v jazyce L_C je jen spočetně mnoho. Toto omezení potřebujeme, neboť každé, i nekonečné tablo má jen spočetně mnoho položek, a musíme být schopni použít všechny axiomy dané teorie, a substituovat všechny konstantní termy jazyka L_C.

Nejprve také budeme předpokládat, že jde o jazyk *bez rovnosti*, což je jednodušší. Problémem je, že *tablo* je čistě syntaktický objekt, ale *rovnost* má speciální sémantický význam, totiž musí být v každém modelu interpretována relací identity. Jak adaptovat metodu pro jazyky s rovností si ukážeme později.

1.2 Formální definice

V této sekci definujeme všechny pojmy potřebné pro tablo metodu pro jazyky bez rovnosti. K jazykům s rovností se vrátíme v Sekci 1.3.1.

Buď L *spočetný* jazyk bez rovnosti. Označme jako L_C rozšíření jazyka L o spočetně mnoho nových *pomocných* konstantních symbolů $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Zvolme nějaké očíslování konstantních termů jazyka L_C, označme tyto termy $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Mějme nějakou L-teorii T a L-sentenci φ.

[2] Z hlediska výpočetní logiky to není velké omezení.

1.2.1 Atomická tabla

Položka je nápis $\mathrm{T}\varphi$ nebo $\mathrm{F}\varphi$, kde φ je nějaká L_C-sentence. Položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ jsou *typu 'svědek'*, položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ jsou *typu 'všichni'*

Atomická tabla jsou položkami označkované stromy znázorněné v Tabulkách 1.1 a 1.2.

	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
True	$\begin{array}{c} \mathrm{T}\neg\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{T}\varphi\wedge\psi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\vee\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\rightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{F}\varphi & \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\leftrightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{F}\varphi \\ \vert & \vert \\ \mathrm{T}\psi & \mathrm{F}\psi \end{array}$
False	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\neg\varphi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}\varphi\wedge\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{F}\varphi & \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\varphi\vee\psi \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\varphi\rightarrow\psi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}\varphi\leftrightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{F}\varphi \\ \vert & \vert \\ \mathrm{F}\psi & \mathrm{T}\psi \end{array}$

Tabulka 1.1: Atomická tabla pro logické spojky; φ a ψ jsou libovolné L_C-sentence.

	$\forall$	$\exists$
True	$\begin{array}{c} \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x) \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi(x/t_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{T}(\exists x)\varphi(x) \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi(x/c_i) \end{array}$
False	$\begin{array}{c} \mathrm{F}(\forall x)\varphi(x) \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi(x/c_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{F}(\exists x)\varphi(x) \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi(x/t_i) \end{array}$

Tabulka 1.2: Atomická tabla pro kvantifikátory; φ je L_C-sentence, x proměnná, t_i libovolný konstantní L_C-term, $c_i \in C$ je nový pomocný konstantní symbol (který se dosud nevyskytuje na dané větvi konstruovaného tabla).

1.2.2 Tablo důkaz

Definice v této části jsou téměř identické odpovídajícím definicím z výrokové logiky. Hlavní technický problém je jak definovat redukovanost položek typu 'všichni' na větvi tabla: chceme aby za proměnnou byly substituovány *všechny* možné konstantní L_C-termy t_i.

Definice 1.2.1 (Tablo)**.** *Konečné tablo z teorie T* je uspořádaný, položkami označkovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:

- jednoprvkový strom označkovaný libovolnou položkou je tablo z teorie T,

- pro libovolnou položkou P na libovolné větvi V, můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P, přičemž je-li P typu 'svědek', můžeme použít jen pomocný konstantní symbol $c_i \in C$, který se na větvi V dosud nevyskytuje (pro položky typu 'všichni' můžeme použít libovolný konstantní L_C-term t_i),
- na konec libovolné větve můžeme připojit položku $\mathrm{T}\alpha$ pro libovolný axiom teorie $\alpha \in T$.

Tablo z teorie T je buď konečné, nebo i *nekonečné*: v tom případě vzniklo ve spočetně mnoha krocích. Můžeme ho formálně vyjádřit jako sjednocení $\tau = \bigcup_{i\geq 0} \tau_i$, kde τ_i jsou konečná tabla z T, τ_0 je jednoprvkové tablo, a τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku.[3]

Tablo *pro položku* P je tablo, které má položku P v kořeni.

Připomeňme konvenci, že pokud P *není* typu 'všichni', potom kořen atomického tabla nebudeme zapisovat (neboť vrchol s položkou P už v tablu je).

Cvičení 1.1. Ukažte v jednotlivých krocích jak byla tabla z Obrázku 1.1.1 zkonstruována.

Definice 1.2.2 (Tablo důkaz)**.** *Tablo důkaz* sentence φ z teorie T je *sporné* tablo z teorie T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni. Pokud existuje, je φ *(tablo) dokazatelná* z T, píšeme $T \vdash \varphi$. (Definujme také *tablo zamítnutí* jako sporné tablo s $\mathrm{T}\varphi$ v kořeni. Pokud existuje, je φ *(tablo) zamítnutelná* z T, tj. platí $T \vdash \neg\varphi$.)

- Tablo je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je *sporná*, pokud obsahuje položky $\mathrm{T}\psi$ a $\mathrm{F}\psi$ pro nějaký výrok ψ, jinak je *bezesporná.*
- Tablo je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je *dokončená*, pokud
  - je sporná, nebo
  - je každá položka na této větvi *redukovaná* a zároveň větev obsahuje položku $\mathrm{T}\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je *redukovaná* na větvi V procházející touto položkou, pokud
  - není typu 'všichni' a při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V, tj. vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla.[4]
  - je typu 'všichni' a všechny její *výskyty* na V jsou na větvi V *redukované.*
- Výskyt položky P typu 'všichni' na větvi V je *i-tý*, pokud má na V právě $i-1$ předků označených touto položkou, a i-tý výskyt je *redukovaný* na V, pokud
  - položka P má $(i+1)$-ní výskyt na V, a zároveň
  - na V se vyskytuje položka $\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$) resp. $\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$), kde t_i je i-tý konstantní L_C-term. (Tj. už jsme za x substituovali term t_i.)

[3] Sjednocení proto, že v jednotlivých krocích přidáváme do tabla nové vrcholy, τ_i je tedy podstromem τ_{i+1}.

[4] Byť podle konvence tento kořen nezapisujeme.

Všimněte si, že je-li položka typu ‘všichni’ na nějaké větvi redukovaná, musí mít na této větvi nekonečně mnoho výskytů, a museli jsme v nich použít při substituci všechny možnosti, tj. všechny konstantní L_C-termy.

Příklad 1.2.3. Jako příklad sestrojme tablo důkazy *v logice* (z prázdné teorie) následujících sentencí:

(a) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$, kde P, Q jsou unární relační symboly.

(b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$, kde $\varphi(x), \psi(x)$ jsou libovolné formule s jedinou volnou proměnnou x.

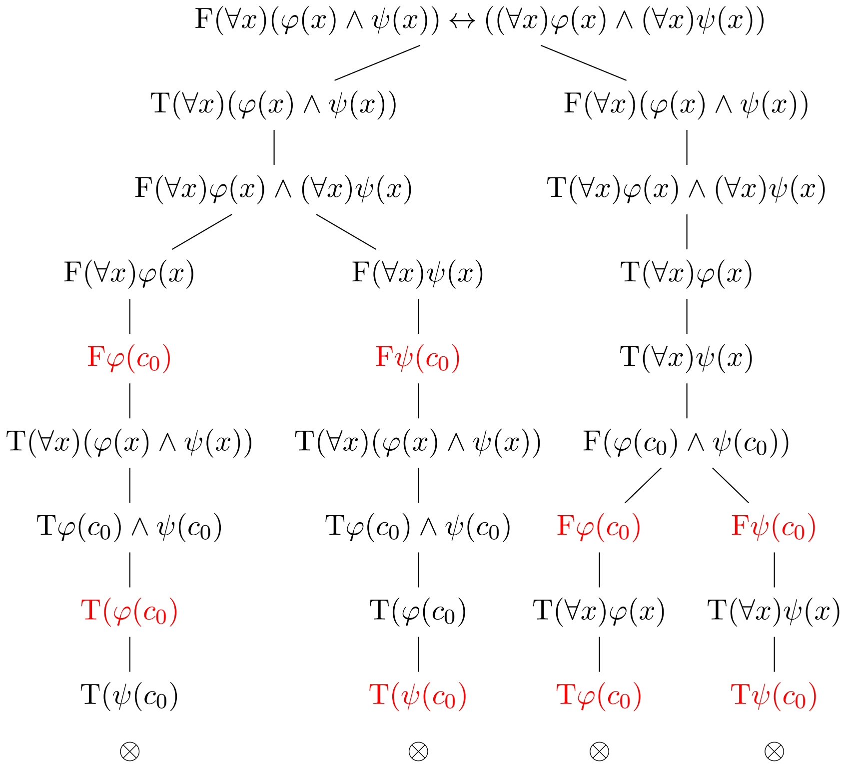
Výsledná tabla jsou na Obrázcích 1.2 a 1.3. Dvojice sporných položek jsou znázorněny červeně. Rozmyslete si, jak byla tabla po krocích zkonstruována.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\
| \\
\mathrm{F}(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{F}(\forall x)Q(x) \\
| \\
\color{red}{\mathrm{F}Q(c_0)} \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)P(x) \\
| \\
\color{red}{\mathrm{T}P(c_0)} \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \to Q(c_0) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\color{red}{\mathrm{F}P(c_0)} & \color{red}{\mathrm{T}Q(c_0)} \\
\otimes & \otimes
\end{array}
\end{array}
$$

Obrázek 1.2: Tablo důkaz z Příkladu 1.2.3 (a).

1.2.3 Systematické tablo a konečnost důkazů

V Sekci **??** jsme ukázali, že neprodlužujeme-li sporné větve (což nemusíme dělat), potom sporné tablo, speciálně tablo důkaz, bude vždy konečný. Stejný důkaz funguje i v logice predikátové.



Obrázek 1.3: Tablo důkaz z Příkladu 1.2.3 (b). Konstantu c_0 můžeme použít jako *novou* ve všech třech případech. Stačí, že se zatím nevyskytuje *na dané větvi.*

Důsledek 1.2.4 (Konečnost důkazů)**.** *Pokud* $T \vdash \varphi$*, potom existuje i* konečný *tablo důkaz* φ *z* T*.*

Důkaz. Stejný jako ve ve výrokové logice, viz důkaz Důsledku **??**. □

Ve stejné sekci jsme si ukázali konstrukci *systematického tabla*. Tu lze také snadno adaptovat na predikátovou logiku. Musíme zajistit, abychom někdy zredukovali každou položku, použili každý axiom, a nově v predikátové logice také substituovali každý L_C term t_i za proměnnou v položkách typu 'všichni'.

Definice 1.2.5. Mějme položku R a teorii $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$. *Systematické tablo* z teorie T pro položku R je tablo $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové tablo s položkou R, a pro každé $i \geq 0$:

Je-li P položka v nejlevějším vrcholu v na co nejmenší úrovni tabla τ_i, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející P (resp. jde-li o položky typu 'všichni', její *výskyt* v tomto vrcholu není redukovaný) definujeme:

- τ_i' je tablo vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející P, a
- τ_{i+1} je tablo vzniklé z τ_i' připojením $\mathrm{T}\alpha_i$ na každou bezespornou větev τ_i', pokud $i \leq |T|$. Jinak (je-li T konečná a už jsme použili všechny axiomy) tento krok přeskočíme a definujeme $\tau_{i+1} = \tau_i'$.

[TODO]

1.3 Jazyky s rovností

1.3.1 Axiomy rovnosti

1.3.2 Kongruence a faktorstruktura

1.4 Korektnost a úplnost

1.4.1 Věta o korektnosti

1.4.2 Kanonický model

1.4.3 Věta o úplnosti

1.5 Důsledky korektnosti a úplnosti

1.5.1 Löwenheim-Skolemova věta

1.5.2 Věta o kompaktnosti

1.5.3 Aplikace

1.6 Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

[TODO]