Cvičení z logiky: 4. sada příkladů

Témata: Více o Tablo metodě. Věta o dedukci. Věta o kompaktnosti a aplikace. Rezoluční metoda, množinová reprezentace formulí v CNF, rezoluční uzávěr, strom dosazení. Hilbertovský kalkulus.

Příklad 1. Navrhněte vhodná atomická tabla pro Peirceovu spojku $\downarrow$ (NOR), pro Shefferovu spojku $\uparrow$ (NAND), a pro ternárí operátor "if p then q else r" (IFTE).

Příklad 2. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. že pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí

$$T \vdash \varphi \to \psi \;\text{ právě když }\; T, \varphi \vdash \psi.$$

Příklad 3. Ukažte, že každý spočetný rovinný graf je obarvitelný čtyřmi barvami.

Příklad 4. Ukažte, že každé spočetné částečné uspořádání lze rozšířit na úplné (lineární) uspořádání.

Příklad 5. Označme jako φ výrok $\neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$.

(a) Převeďte $\neg\varphi$ do CNF a množinové reprezentace.
(b) Najděte rezoluční zamítnutí $\neg\varphi$, tj. důkaz φ.

Příklad 6. Najděte rezoluční uzávěry $\mathcal{R}(S)$ pro následující výroky S:

(1) $\{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}$
(2) $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$
(3) $\{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

Příklad 7. Najděte rezoluční zamítnutí následujících výroků:

(1) $(p \leftrightarrow (q \to r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$
(2) $\neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q)$

Příklad 8. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \to \neg q, \neg q \to \neg r, (r \to p) \to s\}$ platí výrok s.

Příklad 9. Dokažte, že je-li $S = \{C_1, C_2\}$ splnitelná a C je rezolventa C_1 a C_2, potom je i C splnitelná.

Příklad 10. Zkonstruujte *strom dosazení* pro formuli $S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$.

Příklad 11. Předpokládejme, že máme k dispozici MgO, H_2, O_2, a C a můžeme provádět následující reakce:

$$\begin{array}{ll} (1) & MgO + H_2 \;\to\; Mg + H_2O \\ (2) & C + O_2 \;\to\; CO_2 \\ (3) & CO_2 + H_2O \;\to\; H_2CO_3 \end{array}$$

(1) Reprezentujte naše možnosti výrokem (nad vhodně zvoleným jazykem) a převeďte ho do množinové reprezentace
(2) Pomocí LI-rezoluce dokažte, že můžeme získat H_2CO_3.

Příklad 12. V Hilbertově kalkulu dokažte pro libovolné formule následující vztahy:

(a) $\vdash_H \; p \to p$

(b) $\{\neg p\} \vdash_H p \to q$
(c) $\{\neg(\neg p)\} \vdash_H p$
(d) $\{p \to q, q \to r\} \vdash_H p \to r$
(e) $\{p, q \to (p \to r)\} \vdash_H q \to r$

Příklad 13. Dokažte korektnost hilbertovského kalkulu:

- Dokažte, že logické axiomy jsou tautologie.
- Dokažte, že modus ponens je korektní, tj. když $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \to \psi$, tak $T \models \psi$.
- Ukažte, že $T \vdash_H \varphi$ implikuje $T \models \varphi$.

Příklad 14. Vyslovte a dokažte větu o dedukci pro hilbertovský kalkulus.

Hilbert's calculus. The *Hilbert's propositional calculus* is a proof system for propositional logic where

- we only use the logical connectives $\neg, \to$
- we have the following (schemes of) *logical axioms*:
  (i) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  (ii) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  (iii) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
- and the following *rule of inference*:

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

  i.e. "from φ and $\varphi \to \psi$ infer ψ" (called "modus ponens")

In Hilbert's calculus, a *proof* of a proposition φ from a theory T is a finite sequence $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ of formulas such that for every $i \leq n$,

- φ_i is a logical axiom, or
- $\varphi_i \in T$ (an axiom of the theory), or
- φ_i can be inferred from a pair of preceding propositions φ_j, φ_k ($j < i, k < i$) by applying the rule of inference.

If such a proof exists, we write $T \vdash_H \varphi$.