NAIL062 Výroková a predikátová logika: zápisky z přednášky

Jakub Bulín[1]

Zimní semestr 2022, verze 0.1

[1]KTIML MFF UK, jakub.bulin@mff.cuni.cz

Přednáška je postavena na učebnici *A. Nerode, R. Shore: Logic for Applications* [3], některé části jsou z knihy *M. Ben-ari: Mathematical Logic for Computer Science* [1]. Struktura kurzu i převážná většina obsahu jsou převzaty z přednášek Petra Gregora z předchozích let [2], viz také anglická skripta Martina Piláta [4]. Najdete-li překlepy nebo jiné chyby, případně těžko srozumitelné části, prosím, napište mi.

Obsah

Kapitola 1

Úvod do logiky

Slovo *logika* se používá ve dvou významech:

- soubor principů, které jsou základem uspořádání prvků nějakého systému (např. počítačového programu, elektronického zařízení, komunikačního protokolu)
- uvažování prováděné podle striktních pravidel zachovávajících platnost

V informatice se tyto dva významy setkávají: nejprve formálně popíšeme daný systém, a poté o něm *formálně uvažujeme* (v praktických aplikacích automaticky), tj. odvozujeme platné *inference* o systému, za použití nějakého *(formálního) dokazovacího systému*.

Mezi praktické aplikace logiky v informatice patří například software verification, logic programming, SAT solving, automated reasoning, nebo knowledge-based representation. Kromě toho je logika (ve větší míře než matematika) základním nástrojem pro popis teoretické informatiky. Více o aplikacích logiky najdete v příloze A; v příloze B je shrnuta historie logiky.

1.1 Výroková logika

Nyní si ukážeme logiku v akci na dvou příkladech ze života (hledače pokladů, a teoretického informatika):

1.1.1 Příklad: Hledání pokladu

Příklad 1.1.1. Při hledání pokladu v dračí sluji jsme narazili na rozcestí dvou chodeb. Víme, že na konci každé chodby je buď poklad, nebo drak, ale ne obojí. Trpaslík, kterého jsme na rozcestí potkali, nám řekl, že: "Alespoň jedna z těch dvou chodeb vede k pokladu", a po dalším naléhání (a menším úplatku), ještě řekl, že "První chodba vede k drakovi." Je známo, že trpaslíci, které člověk potká v dračí sluji, buď vždy mluví pravdu, nebo vždy lžou. Kterou cestou se máme vydat?

1.1.2 Formalizace ve výrokové logice

Začneme tím, že situaci a naše znalosti formalizujeme ve výrokové logice. *Výrok* je tvrzení, kterému můžeme přiřadit pravdivostní hodnotu: *pravdivý* (*True*, 1), nebo *lživý* (*False*, 0).

Některé výroky lze vyjádřit pomocí jednodušších výroků a logických spojek, např. "(Trpaslík lže,) *právě když* (druhá chodba vede k drakovi.)" nebo "(První chodba vede k pokladu) *nebo* (první chodba vede k drakovi.)" Pokud výrok takto rozložit nelze, říká se mu *prvovýrok*, *atomický výrok*, nebo *výroková proměnná*.

Popíšeme tedy celou situaci pomocí *výrokových proměnných*. Můžeme si je také představit jako jednoduché zjišťovací (ano/ne) otázky, na které musíme znát odpověď, abychom věděli vše o dané situaci. Jako naše výrokové proměnné zvolme "Poklad je v první chodbě." (označme p_1), a "Poklad je v druhé chodbě." (p_2). V úvahu přichází i jiné výrokové proměnné, např. "V první chodbě je drak." (d_1) nebo "Trpaslík mluví pravdu." (t). Ty lze ale vyjádřit pomocí $\{p_1, p_2\}$, např. platí t, právě když neplatí p_1. Tj. známe-li pravdivostní hodnoty p_1, p_2, pravdivostní hodnoty d_1, t jsou jednoznačně určené. A menší počet výrokových proměnných znamená menší prohledávací prostor.

Vyjádříme tedy všechny naše znalosti jako (*složené*) výroky a zapíšeme je ve formálním zápisu v *jazyce* výrokové logiky nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p_1, p_2\}$, za použití symbolů reprezentujících logické spojky $\neg$ ("neplatí X", *negace*), $\wedge$ ("X a Y", *konjunkce*), $\vee$ ("X nebo Y", *disjunkce*), $\rightarrow$ ("pokud X, potom Y", *implikace*), $\leftrightarrow$ ("X, právě když Y", *ekvivalence*) a závorek (,). Zde je dobré zmínit, že disjunkce není exkluzivní, tj. "X nebo Y" platí i pokud platí jak X tak Y, a implikace je čistě logická: "pokud X, potom Y" platí kdykoliv neplatí X nebo platí Y.

Informace o tom, že v chodbě je poklad nebo drak, ale ne obojí, už je zakódovaná v naší volbě výrokových proměnných: přítomnost draka je totéž co absence pokladu. Tvrzení trpaslíka, že "První chodba vede k drakovi." tedy vyjádříme jako "Neplatí, že poklad je v první chodbě.", formálně $\neg p_1$. Tvrzení, že "Alespoň jedna z těch dvou chodeb vede k pokladu." vyjádříme jako "Poklad je v první chodbě nebo poklad je v druhé chodbě.", formálně $p_1 \vee p_2$. Informaci, že trpaslíci buď vždy mluví pravdu, nebo vždy lžou, si přeložíme tak, že buď platí oba naše výroky, nebo platí negace obou našich výroků, formálně:

$$(\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge \neg(p_1 \vee p_2))$$

Označme tento výrok jako φ (od slova "formule", výrokům se někdy také říká *výrokové formule*). V našem příkladě lze všechny informace vyjádřit jediným výrokem, v praxi ale často potřebujeme výroků více, někdy i nekonečně mnoho (například pokud chceme popsat výpočet nějakého programu a nevíme apriori kolik kroků bude mít), potom popíšeme situaci pomocí množiny výroků, tzv. *teorie*, zde $T = \{\varphi\}$. Výrokům z T říkáme také *axiomy* teorie T[1].

1.1.3 Modely a důsledky

Jsou naše informace dostačující k určení, zda je v některé z chodeb poklad? Jinými slovy, ptáme se, zda je jeden z výroků p_1, p_2 logickým *důsledkem* výroku φ, resp. teorie T. Co to znamená?

Představme si, že existuje více různých "světů" lišících se v tom, co je na konci první a na konci druhé chodby. Například, v jednom ze světů je na konci první chodby poklad a na konci druhé chodby drak. Tento svět můžeme popsat pomocí pravdivostního ohodnocení výrokových proměnných: $p_1 = 1, p_2 = 0$. Takovému ohodnocení říkáme *model* jazyka $\mathbb{P} = \{p_1, p_2\}$ a zapisujeme ho zkráceně jako $v = (1, 0)$ (v od slova "valuation"). Celkem tedy máme čtyři

[1] Terminologie v logice často pochází z jejích aplikace v matematice, viz příloha B o historii logiky.

různé světy, popsané *modely jazyka*

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}.$$

Je svět popsaný modelem $v = (1,0)$ konzistentní s informacemi, které máme, tj. *platí* v něm výrok φ, resp. teorie T? Pravdivostní hodnotu (složeného) výroku φ v modelu v, označme ji $v(\varphi)$, můžeme snadno zjistit: Víme, že $v(p_1) = 1$ a $v(p_2) = 0$, takže $v(\neg p_1) = 0$, a také $v(\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)) = 0$ (jde o konjunkci dvou výroků, a první z konjunktů je v modelu v nepravdivý). Podobně $v(p_1 \vee p_2) = 1$ (neboť $v(p_1) = 1$), takže $v(\neg(p_1 \vee p_2)) = 0$, a $v(\neg(\neg p_1) \wedge \neg(p_1 \vee p_2)) = 0$. Výrok φ je disjunkcí dvou výroků, z nichž ani jeden v modelu v neplatí, tedy $v(\varphi) = 0$.

Bystrý čtenář jistě vidí stromovou strukturu výroku φ a postupné vyhodnocování $v(\varphi)$ od listů směrem ke kořeni. Formální definice představíme v příští kapitole.

Podobně určíme pravdivostní hodnoty výroku φ v ostatních modelech. Zjistíme, že množina *modelů výroku* φ (resp. *modelů teorie* T), tj. množina všech modelů jazyka, ve kterých platí φ (resp. všechny výroky z teorie T), je

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \{(0,1)\}.$$

Vidíme, že naše informace jednoznačně určují model $(0,1)$, tedy svět, ve kterém je v první chodbě drak a ve druhé poklad. Obecně modelů může být více, stačí nám vědět, že v každém modelu φ, resp. T, platí výrok p_2, tedy že p_2 je *důsledkem* teorie T; také říkáme, že p_2 *platí* v teorii T.

1.1.4 Dokazovací systémy

Postup, který jsme zvolili, je velmi neefektivní. Máme-li n výrokových proměnných[2], existuje 2^n modelů jazyka a není prakticky možné ověřovat platnost teorie v každém z nich. Na řadu přichází tzv. *dokazovací systémy*. V daném dokazovacím systému je *důkaz* výroku ψ z teorie T přesně, formálně definovaný syntaktický objekt, který v sobě zahrnuje snadno (mechanicky) ověřitelný "důkaz" (důvod), proč ψ platí v T, a který můžeme hledat (pomocí počítače) čistě na základě struktury výroku ψ a axiomů teorie T ("syntaxe"), tj. aniž bychom se museli zabývat modely ("sémantikou").

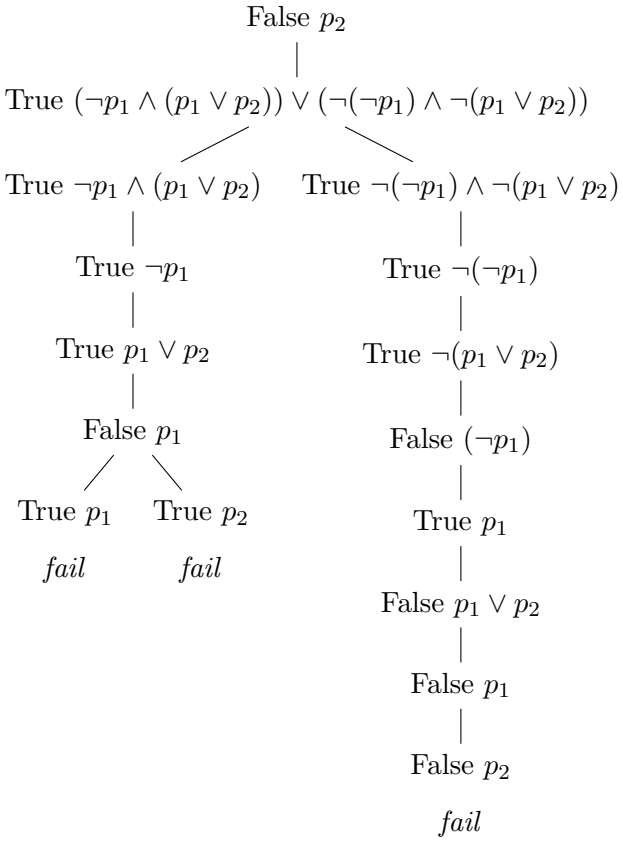
Po důkazovém systému chceme dvě vlastnosti:

- *korektnost*, tj. pokud máme důkaz ψ z T, potom ψ platí v T, a
- *úplnost*, tj. pokud ψ platí v T, potom existuje důkaz ψ z T,

přičemž korektnost je nutností (bez ní nemá smysl důkazy hledat), a úplnost je dobrá vlastnost, ale efektivní důkazový systém může být užitečný, i pokud v něm nelze dokázat vše, co platí.

Zde stručně nastíníme dva důkazové systémy: *metodu analytického tabla* a *rezoluční metodu*. Později budou představeny formálně, a u obou si dokážeme i jejich korektnost a úplnost. Oba tyto důkazové systémy jsou založeny na *důkazu sporem*, tj. předpokládají platnost axiomů z T a negace výroku ψ, a snaží se dojít ke sporu.

[2] V praxi máme běžně tisíce proměnných.



Obrázek 1.1: Tablo důkaz výroku p_2 z teorie T

1.1.5 Tablo metoda

V metodě analytického tabla je důkazem *tablo*: strom jehož vrcholy jsou označkované předpoklady o platnosti výroků. Podívejme se na příklad tabla na obrázku 1.1.

Začneme předpokladem, že neplatí výrok p_2 (neboť dokazujeme sporem). Poté připojíme platnost všech axiomů teorie T (v našem případě je jen jeden: výrok φ sestrojený výše). Dále budujeme tablo tak, že zjednodušujeme výroky v předpokladech, a to podle jistých pravidel, která zaručují následující invariant:

> *Každý model teorie T, ve kterém neplatí p_2, se musí* shodovat *s některou z větví tabla (tj. splňovat všechny předpoklady na dané větvi).*

Výrok φ je disjunkcí dvou výroků, $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$. Pokud tedy platí v nějakém modelu, potom buď v tomto modelu platí φ_1, nebo v něm platí φ_2. Rozvětvíme strom podle těchto dvou možností. V dalším kroku máme předpoklad o pravdivosti výroku $\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)$. V tom případě musí platit jak $\neg p_1$, tak $p_1 \vee p_2$, připojíme tedy na konec větve oba tyto předpoklady. Pravdivost $\neg p_1$ znamená lživost p_1, a tak dále.

Takto postupujeme, dokud je možné výroky v předpokladech zjednodušit, tj. dokud to nejsou jen výrokové proměnné. Pokud na jedné větvi najdeme dvojici opačných předpokladů o nějakém výroku ψ, tj. že platí, a zároveň že neplatí, víme, že se s touto větví nemůže

shodovat žádný model. Takové větvi říkáme *sporná*. Protože dokazujeme sporem, důkaz je takové tablo, ve kterém je každá větev sporná. Tím je zaručeno, že neexistuje model T, ve kterém neplatí p_2. Z toho plyne, že p_2 platí v každém modelu T, neboli je to důsledek T, což jsme chtěli dokázat.

Zatím se spokojíme s pochopením základní myšlenky této metody, detaily představíme v budoucí kapitole.

1.1.6 Rezoluční metoda

Není těžké naprogramovat systematické hledání tablo důkazu. V praxi se ale používá jiný důkazový systém, který má mnohem jednodušší a efektivnější implementaci: tzv. *rezoluční metoda*. Tato metoda pochází z roku 1965, a je základem většiny *systémů automatického dokazování*, *SAT solverů*, nebo třeba interpreterů jazyka Prolog (o kterém si budeme povídat později).

Rezoluční metoda je založena na faktu, že každý výrok lze ekvivalentně vyjádřit ve speciálním tvaru, v tzv. *konjunktivní normální formě (CNF)*. *Literál* je výroková proměnná p nebo její negace $\neg p$ (tj. literály jsou výroky, které jen určují hodnotu jedné výrokové proměnné). Disjunkci několika literálů, např. $p \vee \neg q \vee \neg r$, říkáme *klauzule*. A výrok je v CNF, pokud je konjunkcí klauzulí. Ke každému výroku ψ existuje *ekvivalentní* výrok ψ' v CNF. Ekvivalentní znamená mající stejný význam (stejné modely), píšeme $\psi \sim \psi'$. Později si ukážeme dvě metody převodu do CNF, nyní jen na našem příkladě: ve výroku

$$(\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge \neg(p_1 \vee p_2))$$

nejprve nahradíme $\neg(\neg p_1) \sim p_1$ a $\neg(p_1 \vee p_2) \sim (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$:

$$(\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)) \vee (p_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2)$$

a dále opakovaně použijeme *distributivitu* $\vee$ vůči $\wedge$ (představte si, že $\vee$ je operace násobení a $\wedge$ je operace sčítání):

$$(\neg p_1 \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_1) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_2)$$

Tento výrok už je v CNF, ale dále ho zjednodušíme: vynecháme z klauzulí duplicitní literály, a uvědomíme si, že obsahuje-li klauzule dvojici opačných literálů $p, \neg p$, je to *tautologie* (platí v každém modelu) a proto ji můžeme odstranit. Dostáváme CNF výrok

$$\neg p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2)$$

který je ekvivalentní původnímu výroku ϕ Protože chceme dokázat p_2 sporem, přidáme ještě klauzuli $\neg p_2$:

$$\neg p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_2$$

Výrok p_2 platí v teorii T, právě když je tento CNF výrok *nesplnitelný* (nemá žádný model). Výroky v CNF budeme zapisovat také v *množinové reprezentaci*[3]:

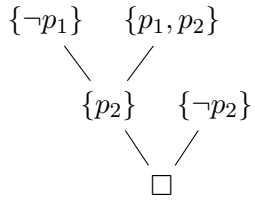
$$\{\{\neg p_1\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{p_1, p_2\}, \{\neg p_2\}\}$$

[3] V praktické implementaci bychom mohli použít seznam klauzulí, kde každá klauzule je seznam (unikátních) literálů v nějakém zvoleném uspořádání. Představte si opět tisíce výrokových proměnných a klauzulí.

Rezoluční pravidlo říká, že pokud máme dvojici klauzulí, z nichž jedna obsahuje literál p a druhá opačný literál $\neg p$, potom z nich logicky plyne také jejich *rezolventa*: klauzule vzniklá odstraněním literálu p z první a $\neg p$ z druhé klauzule a sjednocením zbylých literálů. Například, z $p \vee \neg q \vee \neg r$ a $\neg p \vee \neg q \vee s$ můžeme odvodit rezolventu $\neg q \vee \neg r \vee s$. *Rezoluční zamítnutí* formule v CNF je potom posloupnost klauzulí, která končí *prázdnou klauzulí* $\square$ (znamenající spor) a kde každá klauzule je buď z dané formule, nebo je rezolventou nějakých dvou předchozích klauzulí. V našem případě:

$$\{\neg p_1\}, \{p_1, p_2\}, \{p_2\}, \{\neg p_2\}, \square$$

Třetí klauzule je rezolventou první a druhé, pátá je rezolventou třetí a čtvrté. Rezoluci lze také přirozeně znázornit pomocí *rezolučního stromu*, kde listy jsou klauzule z dané formule, a vnitřní vrcholy jsou rezolventy svých potomků:

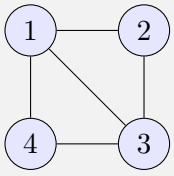


Pokud by formule měla model, musely by v něm platit její klauzule, tedy i postupně všechny rezolventy v posloupnosti, a nakonec prázdná klauzule. Ta ale neplatí v žádném modelu. Máme tedy důkaz sporem a víme, že ve druhé chodbě najdeme poklad.

1.1.7 Příklad: Barvení grafů

Ve druhém příkladu se trochu přiblížíme aplikacím. Na rozdíl od logických hádanek ve formě slovních úloh, různé varianty problému barvení grafů se objevují v rozmanitých úlohách z praxe, od rozvrhovacích problémů přes návrh fyzických a síťových systémů po zpracování obrazu.

Příklad 1.1.2. Najděte vrcholové obarvení následujícího grafu třemi barvami, tj. přiřaďte vrcholům barvy R, G, B tak, aby žádná hrana nebyla monochromatická.



Graf si reprezentujeme jako množinu vrcholů a množinu hran, kde každá hrana je dvojice vrcholů. Lépe se nám bude pracovat s uspořádanými dvojicemi, zvolíme tedy (libovolnou) orientaci hran.

$$\mathcal{G} = \langle V; E \rangle = \langle \{1,2,3,4\}; \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\} \rangle$$

Začneme opět formalizací ve výrokové logice. Označme si množinu barev jako $C = \{R, G, B\}$. Přirozená volba výrokových proměnných je "vrchol v má barvu c", označme p_v^c, pro každý

vrchol $v \in V$ a každou barvu $c \in C$. Naše (uspořádaná) množina výrokových proměnných má 12 prvků:

$$\mathbb{P} = \{p_v^c \mid v \in V, c \in C\} = \{p_1^R, p_1^G, p_1^B, p_2^R, p_2^G, p_2^B, p_3^R, p_3^G, p_3^B, p_4^R, p_4^G, p_4^B\}$$

Máme celkem $|\,\mathrm{M}_{\mathbb{P}}\,| = 2^{12} = 4096$ modelů jazyka (reprezentovaných 12-dimenzionálními 0–1 vektory). Většinu z nich není nelze interpretovat jako obarvení grafu. Například $v = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ říká, že vrchol 1 je obarvený červeně, a také zeleně. Začneme tedy teorií vyjadřující, že každý vrchol má nejvýše jednu barvu. Existuje více způsobů, jak to můžeme vyjádřit. My řekneme pro každý vrchol, že nesmí mít (alespoň) jednu z každé dvojice barev. Tím dostaneme teorii v CNF:

$$\begin{aligned} T_1 = \{&(\neg p_1^R \vee \neg p_1^G) \wedge (\neg p_1^R \vee \neg p_1^B) \wedge (\neg p_1^G \vee \neg p_1^B),\\ &(\neg p_2^R \vee \neg p_2^G) \wedge (\neg p_2^R \vee \neg p_2^B) \wedge (\neg p_2^G \vee \neg p_2^B),\\ &(\neg p_3^R \vee \neg p_3^G) \wedge (\neg p_3^R \vee \neg p_3^B) \wedge (\neg p_3^G \vee \neg p_3^B),\\ &(\neg p_4^R \vee \neg p_4^G) \wedge (\neg p_4^R \vee \neg p_4^B) \wedge (\neg p_4^G \vee \neg p_4^B)\}\\ = \{&(\neg p_v^R \vee \neg p_v^G) \wedge (\neg p_v^R \vee \neg p_v^B) \wedge (\neg p_v^G \vee \neg p_v^B) \mid v \in V\} \end{aligned}$$

Teorii T_1 bychom mohli říkat teorie částečných vrcholových obarvení grafu $\mathcal{G}$. Teorie T_1 má $|\,\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T_1)| = 4^4 = 2^8 = 256$ modelů. (Proč?) Pokud chceme úplná obarvení, přidáme podmínku, že každý vrchol má alespoň jednu barvu.[4]

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \cup \{p_1^R \vee p_1^G \vee p_1^B, p_2^R \vee p_2^G \vee p_2^B, p_3^R \vee p_3^G \vee p_3^B, p_4^R \vee p_4^G \vee p_4^B\}\\ &= T_1 \cup \{p_v^R \vee p_v^G \vee p_v^B \mid v \in V\}\\ &= T_1 \cup \{\bigvee_{c \in C} p_v^c \mid v \in V\} \end{aligned}$$

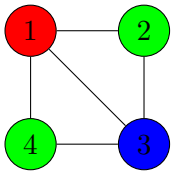
Teorie T_2 má $3^4 = 81$ modelů. Jde o *extenzi* teorie T_1, neboť každý důsledek teorie T_1 platí i v teorii T_2. Platí dokonce, že $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T_2) \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T_1)$.[5] Zbývá přidat podmínku zakazující monochromatické hrany. Pro každou hranu a každou barvu specifikujeme, že alespoň jeden z vrcholů hrany nesmí mít danou barvu. Zde pro názornost naposledy napíšeme úplný seznam výroků, nadále budeme využívat zkráceného zápisu.

$$\begin{aligned} T_3 = T_2 \cup \{&(\neg p_1^R \vee \neg p_2^R) \wedge (\neg p_1^G \vee \neg p_2^G) \wedge (\neg p_1^B \vee \neg p_2^B),\\ &(\neg p_1^R \vee \neg p_3^R) \wedge (\neg p_1^G \vee \neg p_3^G) \wedge (\neg p_1^B \vee \neg p_3^B),\\ &(\neg p_1^R \vee \neg p_4^R) \wedge (\neg p_1^G \vee \neg p_4^G) \wedge (\neg p_1^B \vee \neg p_4^B),\\ &(\neg p_2^R \vee \neg p_3^R) \wedge (\neg p_2^G \vee \neg p_3^G) \wedge (\neg p_2^B \vee \neg p_3^B),\\ &(\neg p_3^R \vee \neg p_4^R) \wedge (\neg p_3^G \vee \neg p_4^G) \wedge (\neg p_3^B \vee \neg p_4^B)\}\\ = T_2 \cup \{&\bigwedge_{c \in C} (\neg p_u^c \vee \neg p_v^c) \mid (u, v) \in E\} \end{aligned}$$

[4]Symbol $\bigvee$ používáme podobně jako symboly $\sum$ pro součet a $\prod$ pro součin: ke zjednodušení zápisu výroku, který je ve formě disjunkce. Např. pokud $v = 1$, potom $\bigvee_{c \in C} p_v^c$ reprezentuje výrok $p_1^R \vee p_1^G \vee p_1^B$. Analogicky $\bigwedge$ pro konjunkci.

[5]Zde vidíme typickou ukázku antimonotónního vztahu tzv. Galoisovy korespondence: čím více vlastností (výroků) požadujeme, tím méně objektů (modelů) splňuje tyto vlastnosti.

Výsledná teorie T_3 je *splnitelná* (má model), právě když graf $\mathcal{G}$ je 3-obarvitelný. Má 6 modelů jednoznačně odpovídajících 3-obarvení grafu $\mathcal{G}$. Model $v = (1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,1,0)$ odpovídá následujícímu obarvení, ostatní obarvení získáme permutací barev.



Jakmile máme teorii T_3 formalizující 3-obarvení grafu $\mathcal{G}$, můžeme snadno řešit související otázky, například najít všechna obarvení, ve kterých vrchol 1 je modrý a vrchol 2 zelený: odpovídají modelům teorie $T_3 \cup \{p_1^B, p_2^G\}$. Nebo můžeme dokázat, že vrcholy 2 a 4 musejí být obarveny stejnou barvou. Můžeme použít tablo metodu: v kořeni tabla bude předpoklad

$$\text{False } (p_2^R \wedge p_2^R) \vee (p_2^G \wedge p_2^G) \vee (p_2^B \wedge p_2^B)$$

Nebo můžeme najít rezoluční zamítnutí teorie vzniklé převedením axiomů teorie T_3 do CNF, a přidáním CNF ekvivalentu *negace* výroku $(p_2^R \wedge p_2^R) \vee (p_2^G \wedge p_2^G) \vee (p_2^B \wedge p_2^B)$ (neboť jde o důkaz sporem, tedy pro spor předpokládáme, že *nemají* stejnou barvu).

1.2 Predikátová logika

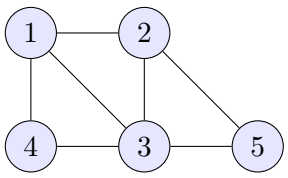
Nyní si velmi stručně a neformálně představíme *predikátovou logiku*. Predikátová logika se zabývá vlastnostmi objektů a vztahy mezi objekty. Například:

Všichni lidé jsou smrtelní.
Sókratés je člověk.
Sókratés je smrtelný.

Ve skutečnosti výroková logika vznikla později (asi o století) než Aristotelova predikátová logika, a byla poté na dlouho převážně zapomenuta.

1.2.1 Nevýhody formalizace ve výrokové logice

Nevýhodou formalizace našeho problému ve výrokové logice je fakt, že výsledná teorie T_3 je poměrně velká, a navíc byla vytvořena ad hoc pro graf $\mathcal{G}$. Představme si, že potřebujeme graf $\mathcal{G}$ změnit, například přidáním vrcholu 5 spojeného hranami s vrcholy 2 a 3:



Abychom byli schopni formalizovat nový problém, musíme přidat do našeho jazyka tři nové výrokové proměnné: $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \cup \{p_5^R, p_5^G, p_5^B\}$, a vytvořit nové teorie T_1', T_2', T_3' přidáním axiomů týkajících se vrcholu 5 a hran $(2,5), (3,5)$. Problémem je, že strukturu grafu $\mathcal{G}$ a přirozené vlastnosti jako "z vrcholu u vede hrana do vrcholu v", nebo "vrchol u je zelený" jsme ('natvrdo', 'nepřirozeně') zakódovali do 0–1 proměnných. Tento nedostatek odstraňuje *predikátová logika*.

1.2.2 Stručné představení predikátové logiky

Modelem v predikátové logice není 0–1 vektor, ale *struktura*. Příkladem struktur jsou naše (orientované) grafy:

$$\mathcal{G} = \langle V^{\mathcal{G}}; E^{\mathcal{G}} \rangle = \langle \{1,2,3,4\}; \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\} \rangle$$
$$\mathcal{G}' = \langle V^{\mathcal{G}'}; E^{\mathcal{G}'} \rangle = \langle \{1,2,3,4,5\}; \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4),(2,5),(3,5)\} \rangle$$

Oba grafy sestávají z množiny vrcholů, a z binární relace na této množině. Jde o struktury v *jazyce teorie grafů* $\mathcal{L} = \langle E \rangle$, kde E je binární *relační symbol*. *Jazyk* predikátové logiky specifikuje jaké relace (kolik a jakých arit — unární, binární, ternární, atd.) mají struktury mít, a jaké symboly pro ně budeme používat. Kromě toho používáme symbol rovnosti $=$ a struktury mohou obsahovat také (jako například funkce $+, -, \cdot$ v *tělese* reálných čísel), ty si ale necháme na později.

Predikátová logika používá tytéž logické spojky jako výroková logika, ale základním stavebním kamenem *predikátových formulí* nejsou výrokové proměnné, nýbrž tzv. *atomické formule*, například: $E(x, y)$ představuje tvrzení, že v grafu vede hrana z vrcholu x do vrcholu y. Zde x, y jsou *proměnné* reprezentující vrcholy daného grafu. Kromě toho ve formulích můžeme používat *kvantifikátory*: $(\forall x)$ "pro všechny vrcholy x" a $(\exists y)$ "existuje vrchol y".[6]

Nyní můžeme formalizovat tvrzení, která dávají smysl pro libovolný graf. Například:

- "V grafu nejsou smyčky": $(\forall x)(\neg E(x, x))$
- "Existuje vrchol výstupního stupně 1": $(\exists x)(\forall y)(\forall z)((E(x, y) \wedge E(x, z)) \rightarrow y = z)$

V daném grafu $\mathcal{G}$ a při dosazení vrcholu u za proměnnou x a vrcholu v za proměnnou y vyhodnotíme $E(x, y)$ jako True, právě když $(u, v) \in E^{\mathcal{G}}$.

1.2.3 Formalizace barvení grafů v predikátové logice

Vraťme se zpět k barvení grafů. Přirozený způsob jak formalizovat náš problém 3-obarvitelnosti je v jazyce $\mathcal{L}' = \langle E, R, G, B \rangle$, kde E je binární a R, G, B jsou unární relační symboly, tedy $R(x)$ znamená "vrchol x je červený". Strukturou pro tento jazyk je (orientovaný) graf spolu s trojicí množin vrcholů, např.

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_C &= \langle V^{\mathcal{G}_C}; E^{\mathcal{G}_C}, R^{\mathcal{G}_C}, G^{\mathcal{G}_C}, B^{\mathcal{G}_C} \rangle \\ &= \langle \{1,2,3,4\}; \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\}, \{1\}, \{2,3\}, \{4\} \rangle\end{aligned}$$

reprezentuje graf $\mathcal{G}$ s validním obarvením z obrázku výše. Budeme říkat, že $\mathcal{G}_C$ je *expanze* $\mathcal{L}$-struktury $\mathcal{G}$ do jazyka $\mathcal{L}'$.

Podobně jako ve výrokové logice musíme nejprve zajistit, aby naše modely reprezentovaly obarvené grafy. Začneme požadavkem, aby každý vrchol byl obarven nejvýše jednou barvou:

$$(\forall x)((\neg R(x) \vee \neg G(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg B(x)) \wedge (\neg G(x) \vee \neg B(x)))$$

Obarvení alespoň jednou barvou vyjádříme takto:

$$(\forall x)(R(x) \vee G(x) \vee B(x))$$

A hranovou podmínku formalizujeme pomocí predikátu $E(x, y)$ například takto:

$$(\forall x)(\forall y)(E(x, y) \rightarrow ((\neg R(x) \vee \neg R(y)) \wedge (\neg G(x) \vee \neg G(y)) \wedge (\neg B(x) \vee \neg B(y))))$$

Modely takto vzniklé teorie reprezentují orientované grafy s vrcholovým 3-obarvením.

[6] Kvantifikátory si můžeme představit jako "konjunkci" resp. "disjunkci" přes všechny vrcholy grafu.

1.3 Další druhy logických systémů

Predikátové logice, kde proměnné reprezentují jednotlivé vrcholy, říkáme logika *prvního řádu* (anglicky *first-order (FO) logic*). V logice *druhého řádu* (anglicky *second-order (SO) logic*) máme také proměnné reprezentující množiny vrcholů nebo i množiny n-tic vrcholů (tj. relace, funkce). Například tvrzení, že každá neprázdná zdola omezená podmnožina má infimum[7], můžeme formalizovat v logice druhého řádu takto:[8]

$$(\forall S)((\exists x)S(x) \wedge (\exists x)(\forall y)(S(y) \to x \leq y) \to$$
$$(\exists x)((\forall y)(S(y) \to x \leq y) \wedge (\forall z)((\forall y)(S(y) \to z \leq y) \to z \leq x)))$$

V logice třetího řádu máme i proměnné reprezentující množiny množin (což je užitečné např. v topologii), atd.

Kromě výrokové a predikátové logiky existují i další typy logických systémů, například intuicionistická logika (která povoluje jen konstruktivní důkazy), temporální logiky (kde mluvíme o platnosti 'vždy', 'někdy v budoucnosti', 'dokud' apod.), modální logiky ('je možné', 'je nutné'), nebo fuzzy logiky (kde máme výroky '0.35 pravdivé'). Tyto logiky mají důležité aplikace v informatice, např. v umělé inteligenci (modální logiky pro uvažování autonomních agentů o svém okolí), v paralelním programování (temporální logiky), nebo v automatických pračkách (fuzzy logiky). Více viz Příloha C. V tomto kurzu se omezíme na výrokovou logiku a predikátovou logiku prvního řádu.

1.4 O přednášce

Přednášku lze rozdělit do třech částí.

První část se zabývá výrokovou logikou. Nejprve představíme syntaxi a sémantiku, dále problém splnitelnosti CNF formulí (známý NP-úplný problém SAT) a jeho polynomiálně řešitelné fragmenty (2-SAT, Horn-SAT). Budeme pokračovat tablo metodu, u níž si dokážeme korektnost a úplnost, a také několik aplikací, například Větu u kompaktnosti. A na závěr představíme rezoluční metodu ve výrokové logice a její aplikaci v programovacím jazyce Prolog.

Ve druhé části představíme predikátovou logiku. Začneme opět syntaxí a sémantiku,ukážeme si jak lze adaptovat tablo metodu pro predikátovou logiku, opět včetně několika aplikací, a skončíme znovu rezoluční metodou.

Třetí část je úvodem do teorie modelů, definovatelnosti, axiomatizovatelnosti, a algoritmické rozhodnutelnosti. Na závěr si představíme slavné Gödelovy věty o neúplnosti, které ukazují meze formální metody (formální dokazatelnosti v axiomatickém systému).

[7] Což platí v uspořádané množině reálných čísel, ale neplatí v racionálních číslech, např. $\{x \mid x^2 > 2, x > 0\}$.

[8] I když je tato formule velmi složitá, pokuste se porozumět jednotlivým částem.

Část I

Výroková logika

Kapitola 2

Syntaxe a sémantika výrokové logiky

Syntaxe je soubor formálních pravidel pro tvoření korektních vět sestávajících ze slov (v případě přirozených jazyků), nebo formálních výrazů sestávajících ze symbolů (např. příkazy v programovacím jazyce). Naproti tomu *sémantika* popisuje význam takových výrazů. Vztah mezi syntaxí a sémantikou se prolíná celou logikou a je klíčem k jejímu pochopení.

2.1 Syntaxe výrokové logiky

Nejprve definujeme formální 'nápisy', se kterými budeme v logice pracovat.

2.1.1 Jazyk

Jazyk výrokové logiky je určený neprázdnou množinou *výrokových proměnných* $\mathbb{P}$ (také jim říkáme *prvovýroky* nebo *atomické výroky*). Tato množina může být konečná nebo i nekonečná, obvykle ale bude spočetná[1] (pokud neřekneme jinak), a bude mít dané uspořádání. Pro výrokové proměnné budeme obvykle používat označení p_i (od slova "proposition"), ale pro lepší čitelnost, zejména je-li $\mathbb{P}$ konečná, také $p, q, r, \ldots$ Například:

$$\mathbb{P}_1 = \{p, q, r\}$$
$$\mathbb{P}_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots\} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Do jazyka patří kromě výrokových proměnných také *logické symboly*: symboly pro logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ a závorky $(,)$. Budeme ale pro jednoduchost mluvit o "jazyce $\mathbb{P}$".

Poznámka 2.1.1. Pokud budeme potřebovat formálněji vyjádřit uspořádání jazyka $\mathbb{P}$, představíme si ho jako bijekci $\iota\colon \{0, 1, \ldots, n-1\} \to \mathbb{P}$ (pro konečný, n-prvkový jazyk) resp. $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ (je-li $\mathbb{P}$ spočetně nekonečný). V našich příkladech $\iota_1(0) = p$, $\iota_1(1) = q$, $\iota_1(2) = r$, a $\iota_2(i) = p_i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$.[2]

[1] To je důležité v mnoha aplikacích v informatice, nespočetné množiny se do počítače nevejdou.

[2] Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ obsahuje nulu, viz standard ISO 80000-2:2019.

2.1.2 Výrok

Základním stavebním kamenem výrokové logiky je *výrok* neboli *výroková formule*. Je to konečný řetězec sestavený z výrokových proměnných a logických symbolů podle jistých pravidel. Prvovýroky jsou výroky, a dále můžeme vytvářet výroky z jednodušších výroků a logických symbolů: například pro logickou spojku $\wedge$ vypíšeme nejprve symbol '(', potom první výrok, symbol '$\wedge$', druhý výrok, a nakonec symbol ')'.

Definice 2.1.2 (Výrok)**.** *Výrok* (*výroková formule*) v jazyce $\mathbb{P}$ je prvek množiny $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ definované následovně: $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ je nejmenší množina splňující[3]

- pro každý prvovýrok $p \in \mathbb{P}$ platí $p \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$,
- pro každý výrok $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ je $(\neg\varphi)$ také prvek $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$
- pro každé $\varphi, \psi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ jsou $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ také prvky $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$.

Výroky označujeme obvykle řeckými písmeny φ, ψ, χ (φ od slova "formule"). Abychom nemuseli vypisovat všechny čtyři binární logické spojky, používáme pro ně někdy zástupný symbol $\square$. Třetí bod definice bychom tedy mohli vyjádřit takto:

- pro každé $\varphi, \psi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ a $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ je $(\varphi \square \psi)$ také prvek $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$.

Podvýrok (*podformule*) je podřetězec, který je sám o sobě výrokem. Uvědomte si, že všechny výroky jsou nutně konečné řetězce, vzniklé aplikací konečně mnoha kroků z definice na své podvýroky.

Příklad 2.1.3. Výrok $\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \to (p \wedge q)))$ má následující podvýroky: $p, q, (\neg q), (p \vee (\neg q)), r, (p \wedge q), (r \to (p \wedge q)), \varphi$.

Výrok v jazyce $\mathbb{P}$ nemusí obsahovat všechny prvovýroky z $\mathbb{P}$ (ani nemůže pokud je $\mathbb{P}$ nekonečná množina). Bude se nám proto hodit značení $\mathrm{Var}(\varphi)$ pro množinu prvovýroků vyskytujících se ve φ.[4] V našem příkladě $\mathrm{Var}(\varphi) = \{p, q, r\}$.

Zavedeme si zkratky pro dva speciální výroky: $\top = (p \vee (\neg p))$ (*pravda*) a $\bot = (p \wedge (\neg p))$ (*spor*), kde $p \in \mathbb{P}$ je pevně zvolený (např. první prvovýrok z $\mathbb{P}$). Tedy výrok $\top$ je vždy pravdivý a výrok $\bot$ je vždy nepravdivý.

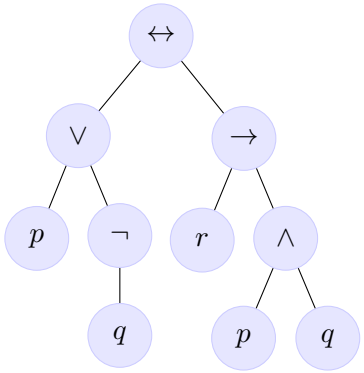
Při zápisu výroků můžeme pro lepší čitelnost některé závorky vynechat. Např. výrok φ z příkladu 2.1.3 můžeme reprezentovat nápisem $p \vee \neg q \leftrightarrow (r \to p \wedge q)$. Vynecháváme vnější závorky a používáme prioritu operátorů: $\neg$ má nejvyšší prioritu, dále $\wedge, \vee$, a konečně $\to, \leftrightarrow$ mají nejnižší prioritu. Dále nápisem $p \wedge q \wedge r \wedge s$ myslíme výrok $(p \wedge (q \wedge (r \wedge s)))$, a podobně pro $\vee$.[5][6]

[3] Takovému druhu definice říkáme *induktivní*. Lze také přirozeně vyjádřit pomocí *formální gramatiky*, viz předmět NTIN071 Automaty a gramatiky.

[4] Pokud nespecifikujeme v jakém jazyce je výrok (a pokud to není jasné z kontextu), myslíme tím, že je v jazyce $\mathrm{Var}(\varphi)$.

[5] Díky asociativitě $\wedge, \vee$ na uzávorkování nezáleží.

[6] Někdy se zavádí jemnější priority, $\wedge$ mívá vyšší prioritu než $\vee$, $\to$ vyšší než $\leftrightarrow$. A někdy se píše $p \to q \to r$ místo $(p \to (r \to q))$, byť $\to$ není asociativní a na uzávorkování záleží. Obojímu se ale raději vyhneme.



Obrázek 2.1: Strom výroku $\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q)))$

2.1.3 Strom výroku

V definici výroku jsme zvolili *infixový* zápis se závorkami čistě z důvodu čitelnosti pro člověka. Nic by nám nebránilo použít *prefixový* zápis ("polskou notaci"), tj. definovat výroky takto:

- každý prvovýrok je výrok, a
- jsou-li φ, ψ výroky, jsou také $\neg\varphi$, $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$, a $\leftrightarrow\varphi\psi$ výroky.

Výrok $\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q)))$ bychom potom zapsali jako $\varphi = \leftrightarrow\vee p\neg q\rightarrow r\wedge pq$. Také bychom mohli použít *postfixový* zápis a psát $\varphi = pq\neg\vee rpq\wedge\rightarrow\leftrightarrow$. Vše podstatné o výroku ve skutečnosti obsahuje jeho stromová struktura, která zachycuje, jak je sestaven z jednodušších výroků, obdobně jako strom aritmetického výrazu.

Příklad 2.1.4. Strom výroku $\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q)))$ je znázorněný na obrázku 2.1. Všimněte si také, že podvýroky φ odpovídají podstromům. Výrok φ získáme průchodem stromem od kořene, v každém vrcholu:

- pokud je label prvovýrok, vypíšeme ho
- pokud je label negace: vypíšeme '(¬', rekurzivně zavoláme syna, vypíšeme ')',
- jinak (pro binární logické spojky): vypíšeme '(', zavoláme levého syna, vypíšeme label, zavoláme pravého syna, vypíšeme ')'.[7]

Nyní si strom výroku definujeme formálně, *indukcí podle struktury výroku*:[8]

Definice 2.1.5 (Strom výroku)**.** *Strom výroku* φ, označme $\mathrm{Tree}(\varphi)$ je zakořeněný uspořádaný strom, definovaný induktivně takto:

- Je-li φ prvovýrok p, obsahuje $\mathrm{Tree}(\varphi)$ jediný vrchol, jeho label je p.
- Je-li φ tvaru $(\neg\varphi')$, má $\mathrm{Tree}(\varphi)$ kořen s labelem $\neg$, a jeho jediný syn je kořen $\mathrm{Tree}(\varphi')$.

[7] Prefixový a postfixový zápis bychom získali podobně, ale nevypisujeme závorky a label vypíšeme hned při vstupu resp. těsně před opuštěním vrcholu.

[8] Jakmile máme definovaný strom výroku, můžeme indukci podle struktury výroku chápat jako indukci podle hloubky stromu. Zatím tím ale chápejme indukci podle počtu kroků z definice 2.1.2, kterými výrok vznikl. Alternativně postačí indukce podle délky výroku, nebo podle počtu logických spojek.

- Je-li φ tvaru $(\varphi' \square \varphi'')$ pro $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, má $\mathrm{Tree}(\varphi)$ kořen s labelem $\square$ a dvěma syny: levý syn je kořen stromu $\mathrm{Tree}(\varphi')$, pravý je kořen $\mathrm{Tree}(\varphi'')$.

Cvičení 2.1. Dokažte, že každý výrok má jednoznačně určený strom výroku, a naopak.

2.1.4 Teorie

V praktických aplikacích nevyjádříme požadované vlastnosti jediným výrokem — to by musel být velmi dlouhý a složitý a špatně by se s ním pracovalo — ale mnoha jednoduššími výroky.

Definice 2.1.6 (Teorie)**.** *Teorie* v jazyce $\mathbb{P}$ je libovolná množina výroků v $\mathbb{P}$, tedy libovolná podmnožina $T \subseteq \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$. Jednotlivým výrokům $\varphi \in T$ říkáme také *axiomy*.

Konečné teorie by tedy bylo možné (byť ne praktické) nahradit jediným výrokem: konjunkcí všech jejich axiomů. Připouštíme ale i nekonečné teorie, triviálním příkladem je teorie $T = \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$, a prázdná teorie $T = \emptyset$.[9]

2.2 Sémantika výrokové logiky

V naší logice je sémantika daná jednou ze dvou možných hodnot: *pravda*, nebo *nepravda*. (V jiných logických systémech může být sémantika zajímavější, viz příloha C.)

2.2.1 Pravdivostní hodnota

Výrokům můžeme přiřadit jednu ze dvou možných pravdivostních hodnot: *pravdivý* (*True*, 1), nebo *lživý* (*False*, 0). Prvovýroky reprezentují jednoduchá, nadále nedělitelná tvrzení (proto jim také říkáme *atomické* výroky); pravdivostní hodnotu jim musíme přiřadit tak, aby odpovídala tomu, co chceme modelovat (proto jim říkáme *výrokové proměnné*). Jakmile ale *ohodnotíme* prvovýroky, pravdivostní hodnota libovolného složeného výroku je jednoznačně určená, a snadno ji spočteme podle stromu výroku:

Příklad 2.2.1. Spočtěme pravdivostní hodnotu výroku $\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \to (p \wedge q)))$ při ohodnocení (a) $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, (b) $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$. Postupujeme od listů směrem ke kořeni, podobně jako bychom vyhodnocovali např. aritmetický výraz. Výrok φ *platí* při ohodnocení z (a), *neplatí* při ohodnocení z (b). Viz obrázek 2.2.1.

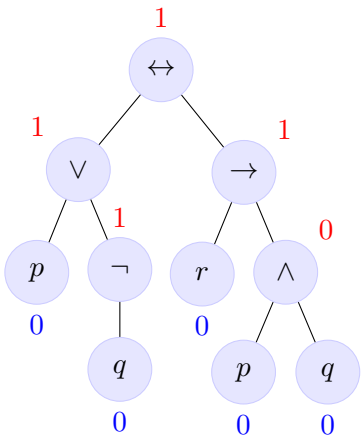
Logické spojky ve vnitřních vrcholech vyhodnocujeme podle jejich *pravdivostních tabulek*, viz tabulka 2.1.[10]

2.2.2 Výroky a booleovské funkce

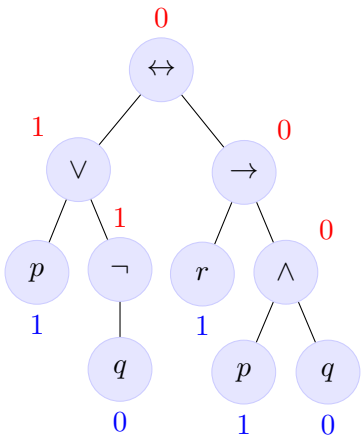
Abychom mohli formalizovat pravdivostní hodnotu výroku, podíváme se nejprve na souvislost výroků a booleovských funkcí.

Booleovská funkce je funkce $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, tedy vstupem je n-tice nul a jedniček, a výstupem 0 nebo 1. Každá logická spojka reprezentuje booleovskou funkci. V případě negace jde o unární funkci $f_\neg(x) = 1 - x$, ostatním logickým spojkám odpovídají binární funkce popsané v tabulce 2.2.

[9] Nekonečné teorie se hodí například pro popis vývoje nějakého systému v (diskrétním) čase $t = 0, 1, 2, \ldots$ Prázdná teorie se nehodí k ničemu, ale bylo by nešikovné formulovat věty o logice, pokud by teorie musely být



(a) $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$



(b) $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$

Obrázek 2.2: Pravdivostní ohodnocení výroku

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tabulka 2.1: Pravdivostní tabulky logických spojek.

$f_\wedge(x,y)$:

	0	1
0	0	0
1	0	1

$f_\vee(x,y)$:

	0	1
0	0	1
1	1	1

$f_\to(x,y)$:

	0	1
0	1	1
1	0	1

$f_\leftrightarrow(x,y)$:

	0	1
0	1	0
1	0	1

Tabulka 2.2: Booleovské funkce logických spojek

Definice 2.2.2 (Pravdivostní funkce)**.** *Pravdivostní funkce* výroku φ v konečném jazyce $\mathbb{P}$ je funkce $f_{\varphi,\mathbb{P}}\colon \{0,1\}^{|\mathbb{P}|} \to \{0,1\}$ definovaná induktivně:

- je-li φ i-tý prvovýrok z $\mathbb{P}$, potom $f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0,\ldots,x_{n-1}) = x_i$,
- je-li $\varphi = (\neg\varphi')$, potom
$$f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0,\ldots,x_{n-1}) = f_{\neg}(f_{\varphi',\mathbb{P}}(x_0,\ldots,x_{n-1})),$$
- je-li $(\varphi' \square \varphi'')$ kde $\square \in \{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$, potom
$$f_{\varphi,\mathbb{P}}(x_0,\ldots,x_{n-1}) = f_{\square}(f_{\varphi',\mathbb{P}}(x_0,\ldots,x_{n-1}), f_{\varphi'',\mathbb{P}}(x_0,\ldots,x_{n-1})).$$

Příklad 2.2.3. Spočtěme pravdivostní funkci výroku $\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \to (p \wedge q)))$ v jazyce $\mathbb{P}' = \{p,q,r,s\}$:

$$f_{\varphi,\mathbb{P}'}(x_0,x_1,x_2,x_3) = f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(x_0, f_{\neg}(x_1)), f_{\to}(x_2, f_{\wedge}(x_0,x_1)))$$

Pravdivostní hodnotu výroku φ při ohodnocení $p=1$, $q=0$, $r=1$, $s=1$ spočteme takto (srovnejte s obrázkem 2.2.1(b)):

$$\begin{aligned} f_{\varphi,\mathbb{P}'}(1,0,1,1) &= f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(1, f_{\neg}(0)), f_{\to}(1, f_{\wedge}(1,0))) \\ &= f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(1,1), f_{\to}(1,0)) \\ &= f_{\leftrightarrow}(1,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pozorování 2.2.4. *Pravdivostní funkce výroku φ nad $\mathbb{P}$ závisí pouze na proměnných odpovídajících prvovýrokům z* $\mathrm{Var}(\varphi) \subseteq \mathbb{P}$.

Tedy i pokud máme výrok φ v *nekonečném* jazyce $\mathbb{P}$, můžeme se omezit na jazyk $\mathrm{Var}(\varphi)$ (který je konečný) a uvažovat pravdivostní funkci nad tímto jazykem.

2.2.3 Modely

Konkrétní pravdivostní ohodnocení výrokových proměnných představuje reprezentaci 'reálného světa' (systému) v námi zvoleném 'formálním světě', proto mu také říkáme *model*.

Definice 2.2.5 (Model jazyka)**.** *Model* jazyka $\mathbb{P}$ je libovolné pravdivostní ohodnocení $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$. *Množinu (všech) modelů jazyka* $\mathbb{P}$ označíme $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}$:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}} = \{v \mid v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{P}}$$

Modely budeme označovat písmeny v,u,w apod. (v od slova 'valuation'). Model jazyka je tedy funkce, formálně množina dvojic (vstup, výstup). Například pro jazyk $\mathbb{P} = \{p,q,r\}$ a pravdivostní ohodnocení ve kterém p je pravda, q nepravda, a r pravda máme model

$$v = \{(p,1),(q,0),(r,1)\}.$$

Pro jednoduchost ale budeme psát jen $v = (1,0,1)$. Pro jazyk $\mathbb{P} = \{p,q,r\}$ tedy máme $2^3 = 8$ modelů:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}} = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

neprázdné.

[10] Připomeňme ještě jednou, že disjunkce není exkluzivní, tj. $p \vee q$ platí i pokud platí p i q, a že implikace je čistě logická, tj. $p \to q$ platí kdykoliv p neplatí.

Poznámka 2.2.6. Formálně vzato, ztotožňujeme množinu $\{0,1\}^{\mathbb{P}}$ s množinou $\{0,1\}^{|\mathbb{P}|}$ pomocí uspořádání ι jazyka $\mathbb{P}$ (viz Poznámka 2.1.1). Konkrétně, místo prvku $v = \{(p,1),(q,0),(r,1)\} \in \{0,1\}^{\mathbb{P}}$ píšeme $(1,0,1) = (v \circ \iota)(0,1,2) = (v(\iota(0)), v(\iota(1)), v(\iota(2))) \in \{0,1\}^{|\mathbb{P}|}$ (kde funkcím v, ι dovolíme působit 'po složkách').[11] Pokud by se to zdálo matoucí, představte si model v jako množinu prvovýroků, které jsou ohodnocené jako pravda, tj. $\{p,r\} \subseteq \mathbb{P}$, náš zápis $v = (1,0,1)$ je potom charakteristický vektor této množiny. Toto ztotožnění budeme nadále používat bez dalšího upozornění.

2.2.4 Platnost

Nyní můžeme definovat klíčový pojem logiky, *platnost* výroku v daném modelu. Neformálně, výrok platí v modelu (tj. při konkrétním pravdivostním ohodnocení prvovýroků), pokud jeho pravdivostní hodnota, tak jak jsme ji počítali v Příkladu 2.2.1, je rovna 1. Ve formální definici využijeme pravdivostní funkci výroku (Definice 2.2.2).[12]

Definice 2.2.7 (Platnost výroku v modelu, model výroku)**.** Mějme výrok φ v jazyce $\mathbb{P}$ a model $v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$. Pokud platí $f_{\varphi,\mathbb{P}}(v) = 1$, potom říkáme, že výrok φ *platí* v modelu v, v je *modelem* φ, a píšeme $v \models \varphi$. Množinu všech modelů výroku φ označujeme $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)$.

Modelům jazyka, které nejsou modely φ, budeme někdy říkat *nemodely* φ. Tvoří doplněk množiny modelů φ. S pomocí zápisu pro inverzní relaci můžeme psát:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}} \mid v \models \varphi\} = f^{-1}_{\varphi,\mathbb{P}}[1]$$
$$\overline{\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)} = M_{\mathbb{P}} \setminus M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}} \mid v \not\models \varphi\} = f^{-1}_{\varphi,\mathbb{P}}[0]$$

Je-li jazyk zřejmý z kontextu, můžeme psát jen $\mathrm{M}(\varphi)$. Musíme si ale být opravdu jistí: například v jazyce $\mathbb{P} = \{p,q\}$ máme

$$\mathrm{M}_{\{p,q\}}(p \to q) = \{(0,0),(0,1),(1,1)\},$$

zatímco v jazyce $\mathbb{P}' = \{p,q,r\}$ bychom měli

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(p \to q) = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\}.$$

Definice 2.2.8 (Platnost teorie, model teorie)**.** Je-li T teorie v jazyce $\mathbb{P}$, potom T *platí* v modelu v, pokud každý axiom $\varphi \in T$ platí ve v. V tom případě říkáme také, že v je *modelem* T, a píšeme $T \models \varphi$. Množinu všech modelů teorie T v jazyce $\mathbb{P}$ označíme $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$.

Pracujeme-li s konečnou teorií, nebo přidáváme-li k nějaké teorii konečně mnoho nových axiomů, budeme používat následující zjednodušený zápis:

- $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ místo $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\})$,
- $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T, \varphi)$ místo $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T \cup \{\varphi\})$.

Všimněte si, že $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T,\varphi) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) \cap \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)$, $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \bigcap_{\varphi \in T} \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)$, a že pro konečnou teorii (podobně i pro spočetnou) platí

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_1) \supseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_1,\varphi_2) \supseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n).$$

Toho můžeme využít při hledání modelů hrubou silou.

[11] Alternativně bychom mohli při formalizaci syntaxe vyžadovat (alespoň pro spočetné jazyky), aby jazyk *byl* $\mathbb{P} = \{0,1,2,\ldots\}$ a symboly p_0, p_1, p, q, r používat jen pro zvýšení čitelnosti.

[12] Pro *platnost* používáme symbol $\models$, který čteme jako 'splňuje' nebo 'modeluje', v LaTeXu \models.

Příklad 2.2.9. Modely teorie $T = \{p \vee q \vee r, q \to r, \neg r\}$ (v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$) můžeme najít tak, najdeme tak, že nejprve najdeme modely výroku $\neg r$:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(r) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \{0, 1\}\} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\},$$

poté určíme, ve který z těchto modelů platí výrok $q \to r$:

- $(0, 0, 0) \models q \to r$,
- $(0, 1, 0) \not\models q \to r$,
- $(1, 0, 0) \models q \to r$,
- $(1, 1, 0) \not\models q \to r$,

Tedy $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(r, q \to r) = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}$. Výrok $p \vee q \vee r$ platí jen v prvním z těchto modelů, dostáváme tedy

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(r, q \to r, p \vee q \vee r) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \{(1, 0, 0)\}.$$

Tento postup je efektivnější než určit množiny modelů jednotlivých axiomů a udělat jejich průnik. (Ale mnohem méně efektivní než postup založený na tablo metodě, který si ukážeme později.)

2.2.5 Další sémantické pojmy

V návaznosti na pojem platnosti budeme používat řadu dalších pojmů. Pro některé vlastnosti existuje více různých termínů, v závislosti na kontextu v jakém se vyskytnou.

Definice 2.2.10 (Sémantické pojmy)**.** Říkáme, že výrok φ (v jazyce $\mathbb{P}$) je

- *pravdivý*, *tautologie*, *platí (v logice/logicky)*, a píšeme $\models \varphi$, pokud platí v každém modelu (jazyka $\mathbb{P}$), $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$,
- *lživý*, *sporný*, pokud nemá žádný model, $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$.[13]
- *nezávislý*, pokud platí v nějakém modelu, a neplatí v nějakém jiném modelu, tj. není pravdivý ani lživý, $\emptyset \subsetneq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$,
- *splnitelný*, pokud má nějaký model, tj. není lživý, $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) \neq \emptyset$.

Dále říkáme, že výroky φ, ψ (ve stejném jazyce $\mathbb{P}$) jsou *(logicky) ekvivalentní*, píšeme $\varphi \sim \psi$ pokud mají stejné modely, tj.

$$\varphi \sim \psi \text{ právě když } \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\psi).$$

Příklad 2.2.11. Například platí následující:

- výroky $\top$, $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ jsou pravdivé,
- výroky $\bot$, $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$ jsou lživé,
- výroky $p, p \wedge q$ jsou nezávislé, a také splnitelné, a

[13] Všimněte si, že být *lživý* není totéž, co nebýt *pravdivý*!

- následující výroky jsou ekvivalentní:
  - $p \sim p \vee p \sim p \vee p \vee p$,
  - $p \to q \sim \neg p \vee q$,
  - $\neg p \to (p \to q) \sim \top$.

Pojmy z Definice 2.2.10 můžeme také relativizovat vzhledem k dané teorii. To znamená, že se v jednotlivých definicích omezíme na modely této teorie:

Definice 2.2.12 (Sémantické pojmy vzhledem k teorii)**.** Mějme teorii T v jazyce $\mathbb{P}$. Říkáme, že výrok φ v jazyce $\mathbb{P}$ je

- *pravdivý v T*, *důsledek T*, *platí v T*, a píšeme $T \models \varphi$, pokud φ platí v každém modelu teorie T, neboli $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)$,
- *lživý v T*, *sporný v T*, pokud neplatí v žádném modelu T, neboli $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) \cap \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \emptyset$.
- *nezávislý v T*, pokud platí v nějakém modelu T, a neplatí v nějakém jiném modelu T, tj. není pravdivý v T ani lživý v T, $\emptyset \subsetneq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \subsetneq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$,
- *splnitelný v T*, *konzistentní s T*, pokud platí v nějakém modelu T, tj. není lživý v T, $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \neq \emptyset$.

A říkáme, že výroky φ, ψ (ve stejném jazyce $\mathbb{P}$) jsou *ekvivalentní v T*, *T-ekvivalentní*, píšeme $\varphi \sim_T \psi$ pokud platí v týchž modelech T, tj.

$$\varphi \sim_T \psi \text{ právě když } \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T, \psi).$$

Všimněte si, že pro prázdnou teorii $T = \emptyset$ platí $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$ a výše uvedené pojmy pro T se proto shodují s původními. Opět si pojmy ilustrujeme na několika příkladech:

Příklad 2.2.13. Mějme teorii $T = \{p \vee q, \neg r\}$. Platí následující:

- výroky $q \vee p$, $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ jsou v T jsou pravdivé,
- výrok $\neg p \vee \neg q \vee r$ je v T lživý,
- výroky $p \leftrightarrow q, p \wedge q$ jsou v T nezávislé, a také splnitelné, a
- platí $p \vee r \sim_T q \vee r$ (ale $p \vee r \not\sim q \vee r$).

2.2.6 Univerzálnost logických spojek

V jazyce výrokové logiky používáme následující logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. To ale není jediná možná volba, k vybudování plnohodnotné logiky by nám stačila například negace a implikace,[14] nebo negace, konjunkce, a disjunkce.[15] A jak uvidíme níže, mohli bychom použít i jiné logické spojky. Naše volba je zlatou střední cestou mezi bohatostí vyjadřování na jedné straně, a úsporností syntaktických pravidel na straně druhé.

[14] Negaci potřebujeme k popisu stavu systému, a implikaci k popisu chování v čase.
[15] Ty stačí k vybudování logických obvodů.

Co myslíme tím, že je logika plnohodnotná? Řekneme, že množina logických spojek S je *univerzální*, pokud lze každou booleovskou funkci f vyjádřit jako pravdivostní funkci $f_{\varphi,\mathbb{P}}$ nějakého výroku φ vybudovaného z logických spojek z S (kde $|\mathbb{P}| = n$ je-li f n-ární funkce). Ekvivalentně, pro každý konečný jazyk $\mathbb{P}$ (řekněme, že n-prvkový) a každou množinu modelů $M \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$ musí existovat výrok φ takový, že $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) = M$. (Ekvivalence těchto dvou vyjádření plyne z toho, že máme-li booleovskou funkci f a zvolíme-li $M = f^{-1}[1]$, potom $f_{\varphi,\mathbb{P}} = f$ právě když $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) = M$.)

Tvrzení 2.2.14. *Množiny logických spojek* $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *a* $\{\neg, \to\}$ *jsou univerzální.*

Důkaz. Mějme funkci $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, resp. množinu modelů $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0,1\}^n$. Náš jazyk bude $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Pokud by množina M obsahovala jediný model, např. $v = (1,0,1,0)$ mohli bychom ji reprezentovat výrokem $\varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$, který říká 'musím být model v'. Pro obecný model v bychom výrok φ_v zapsali takto:

$$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \cdots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{v(p_i)} = \bigwedge_{p\in\mathbb{P}} p^{v(p)}$$

kde zavádíme následující užitečné značení: $p^{v(p)}$ je výrok p pokud $v(p) = 1$, a výrok $\neg p$ pokud $v(p) = 0$.

Obsahuje-li množina M více modelů, řekneme 'musím být alespoň jeden z modelů z M':

$$\varphi_M = \bigvee_{v\in M} \varphi_v = \bigvee_{v\in M} \bigwedge_{p\in\mathbb{P}} p^{v(p)}$$

Zřejmě platí $M_{\mathbb{P}}(\varphi_M) = M$ neboli $f_{\varphi_M,\mathbb{P}} = f$. (Pokud $M = \emptyset$, potom z definice $\bigvee_{v\in M} \varphi_v = \bot$.)[16]

Univerzálnost $\{\neg, \to\}$ plyne z univerzálnosti $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a faktu, že konjunkci a disjunkci můžeme vyjádřit pomocí negace a implikace: $p \wedge q \sim \neg(p \to \neg q)$ a $p \vee q \sim \neg p \to q$. □

Poznámka 2.2.15. Všimněte si, že při konstrukci výroku φ_M je klíčové, že množina M je konečná (má nejvýše 2^n prvků). Kdyby byla nekonečná, symbol '$\bigvee_{v\in M}$' by znamenal 'disjunkci' nekonečně mnoha výroků, a výsledkem by tedy nebyl konečný nápis, tj. 'φ_M' by vůbec nebyl výrok. (Máme-li spočetně nekonečný jazyk $\mathbb{P}'$, potom ne každou podmnožinu $M \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}'}$ lze reprezentovat výrokem—takových podmnožin je nespočetně mnoho, zatímco výroků je jen spočetně mnoho.)

Jaké další logické spojky bychom mohli použít? Nulární booleovské funkce,[17] neboli konstanty 0, 1, bychom mohli zavést jako symboly TRUE a FALSE, my si ale vystačíme s výroky $\top, \bot$. Unární booleovské funkce jsou čtyři ($4 = 2^{2^1}$), ale negace je jediná 'zajímavá': ostatní jsou $f(x) = x$, $f(x) = 0$, a $f(x) = 1$. Zajímavých binárních logických spojek už je více, v přírodě se vyskytují například tyto:

- NAND neboli *Shefferova spojka*, někdy se používá symbol $p \uparrow q$, platí $p \uparrow q \sim \neg(p \wedge q)$,
- NOR neboli *Pierceova spojka*, někdy se používá symbol $p \downarrow q$, platí $p \downarrow q \sim \neg(p \vee q)$,

[16] Podobně jako součet prázdné množiny sčítanců je roven 0.

[17] Ve formalizaci matematiky resp. informatiky funkce arity 0 znamená, že nemá žádné vstupy, výstup tedy nemůže záviset na vstupu a je konstantní. Formálně, jde o funkce $f\colon \emptyset \to \{0,1\}$. Pokud je to matoucí, představte si, že funkce musí mít aritu alespoň 1, a místo 'nulární funkce' říkejme 'konstanta'.

- XOR, neboli *exclusive-OR*, někdy se píše také $\oplus$, platí $p \oplus q \sim (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$, neboli součet pravdivostní hodnot modulo 2.

Cvičení 2.2. Vyjádřete $(p \oplus q) \oplus r$ pomocí $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Cvičení 2.3. Ukažte, že {NAND} a také {NOR} jsou univerzální.

Cvičení 2.4. Uvažme ternární logickou spojku IFTE, kde $IFTE(p, q, r)$ je splněno, právě když platí 'if p then q else r'. Určete pravdivostní tabulku této logické spojky (tj. funkci f_{IFTE}) a ukažte, že {TRUE, FALSE, IFTE} je univerzální.

2.3 Normální formy

Připomeňme, že výroky jsou ekvivalentní, pokud mají stejnou množinu modelů. Pro každý výrok existuje nekonečně mnoho ekvivalentních výroků; často se hodí vyjádřit výrok v nějakém 'hezkém' (užitečném) 'tvaru', tj. najít ekvivalentní výrok v daném tvaru. Takovému konceptu tvaru se v matematice říká *normální forma*. My si představíme dvě nejznámější: *konjunktivní normální formu (conjunctive normal form, CNF)* a *disjunktivní normální formu (DNF)*.

Používá se následující terminologie a značení:

- *Literál* ℓ je buď prvovýrok p nebo negace prvovýroku $\neg p$. Pro prvovýrok p označme $p^0 = \neg p$ a $p^1 = p$. Je-li ℓ literál, potom $\bar{\ell}$ označuje *opačný literál* k ℓ. Je-li $\ell = p$ (*pozitivní literál*), potom $\bar{\ell} = \neg p$, je-li $\ell = \neg p$ (*negativní literál*), potom $\bar{\ell} = p$
- *Klauzule (clause)* je disjunkce literálů $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \cdots \vee \ell_n$. *Jednotková klauzule (unit clause)* je samotný literál ($n = 1$) a *prázdnou klauzulí* ($n = 0$) myslíme $\bot$.
- Výrok je *v konjunktivní normální formě (v CNF)* pokud je konjunkcí klauzulí. *Prázdný výrok v CNF* je $\top$.
- *Elementární konjunkce* je konjunkce literálů $E = \ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \cdots \wedge \ell_n$. *Jednotková elementární klauzule* je samotný literál ($n = 1$). *Prázdná elementární konjunkce* ($n = 0$) je $\top$.
- Výrok je *v disjunktivní normální formě (v DNF)* pokud je disjunkcí elementárních konjunkcí. *Prázdný výrok v DNF* je $\bot$.

Příklad 2.3.1. Výrok $p \vee q \vee \neg r$ je v CNF (je to jediná klauzule) a zároveň v DNF (je to disjunkce jednotkových elementárních konjunkcí). Výrok $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$ je v CNF, výrok $\neg p \vee (p \wedge q)$ je v DNF.

Příklad 2.3.2. Výrok φ_v z důkazu Tvrzení 2.2.14 je v CNF (je to konjunkce jednotkových klauzulí, tj. literálů) a také v DNF (je to jediná elementární konjunkce). Výrok φ_M je v DNF.

Pozorování 2.3.3. *Všimněte si, že výrok v CNF je pravdivý, právě když každá jeho klauzule obsahuje dvojici opačných literálů. Podobně, výrok v DNF je splnitelný, pokud ne každá elementární konjunkce obsahuje dvojici opačných literálů.*

2.3.1 O dualitě

Všimněte si, že pokud ve výrokové logice zaměníme hodnoty pro pravdu a nepravdu, tj. 0 a 1, pravdivostní tabulka negace zůstává stejná, z konjunkce se stává disjunkce, a naopak. Tomuto konceptu se říká *dualita*; v logice uvidíme mnoho příkladů.

Platí $\neg(p \wedge q) \sim (\neg p \vee \neg q)$ a *z duality* víme také $\neg(\neg p \vee \neg q) \sim (\neg\neg p \wedge \neg\neg q)$, z čehož snadno odvodíme $\neg(p \vee q) \sim (\neg p \wedge \neg q)$.[18] Obecněji, n-ární booleovské funkce f, g jsou navzájem *duální*, pokud platí pokud $f(\neg x) = \neg g(x)$. Máme-li výrok φ vybudovaný z $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a zaměníme-li v něm $\wedge$ a $\vee$, a znegujeme-li výrokové proměnné (resp. zaměníme-li literály za opačné literály), dostáváme výrok $\psi \sim \neg\varphi$ (tj. modely φ jsou nemodely ψ a naopak), a funkce $f_{\varphi,\mathbb{P}}, f_{\psi,\mathbb{P}}$ jsou navzájem duální.

Pojem DNF je duální k pojmu CNF, 'je pravdivý' je duální k 'není splnitelný', předchozí pozorování tedy můžeme chápat jako příklad duality. Ke každému tvrzení ve výrokové logice získáváme 'zdarma' tvrzení *duální*, vzniklé záměnou $\wedge$ and $\vee$, pravdy a nepravdy.

2.3.2 Převod do normální formy

Disjunktivní normální formu jsme již potkali, v důkazu Tvrzení 2.2.14. Klíčovou část důkazu bychom mohli zformulovat takto: 'Je-li jazyk konečný, lze každou množinu modelů *axiomatizovat* výrokem v DNF'. Z duality dostáváme také axiomatizaci v CNF, neboť doplněk množiny modelů je také množina modelů:

Tvrzení 2.3.4. *Mějme konečný jazyk $\mathbb{P}$ a libovolnou množinu modelů $M \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$. Potom existuje výrok φ_{DNF} v DNF a výrok φ_{CNF} v CNF takový, že $M = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_{\mathrm{DNF}}) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi_{\mathrm{CNF}})$. Konkrétně:*

$$\varphi_{\mathrm{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$
$$\varphi_{\mathrm{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

Důkaz. Pro výrok φ_{DNF} viz důkaz Tvrzení 2.2.14, každá elementární konjunkce popisuje jeden model. Výrok φ_{CNF} je duální k výroku φ'_{DNF} sestrojenému pro doplněk $M' = \overline{M}$. Nebo můžeme dokázat přímo: modely klauzule $C_v = \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$ jsou všechny modely kromě v, $\mathrm{M}_C = \mathrm{M}_P \setminus \{v\}$, tedy každá klauzule v konjunkci zakazuje jeden nemodel. □

Tvrzení 2.3.4 dává návod, jak převádět výrok do disjunktivní nebo do konjunktivní normální formy:

Příklad 2.3.5. Uvažme výrok $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$. Nejprve najdeme množinu modelů: $M = \mathrm{M}_\varphi = \{(0,0,1), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$. Nyní najdeme výroky $\varphi_{\mathrm{DNF}}, \varphi_{\mathrm{CNF}}$ podle Tvrzení 2.3.4, ty mají stejnou množinu modelů jako φ, jsou tedy ekvivalentní.

Výrok φ_{DNF} najdeme tak, že pro každý model sestrojíme elementární konjunkci vynucující právě tento model:

$$\varphi_{\mathrm{DNF}} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

Při konstrukci φ_{CNF} budeme potřebovat *nemodely* φ, $\overline{M} = \{(0,0,0), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$. Každá klauzule zakáže jeden nemodel:

$$\varphi_{\mathrm{CNF}} = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

[18] Neboť p, q jsou proměnné, mohou za ně být dosazeny obě hodnoty 0 i 1, tedy je můžeme zaměnit za k nim opačné literály.

Důsledek 2.3.6. *Každý výrok (v libovolném, i nekonečném jazyce $\mathbb{P}$) je ekvivalentní nějakému výroku v CNF a nějakému výroku v DNF.*

Důkaz. I když je jazyk $\mathbb{P}$ nekonečný, výrok φ obsahuje jen konečně mnoho výrokových proměnných, můžeme tedy použít Tvrzení 2.3.4 pro jazyk $\mathbb{P}' = \mathrm{Var}(\varphi)$, a množinu modelů $M = \mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(\varphi)$. Protože $M = \mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(\varphi_{\mathrm{DNF}}) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(\varphi_{\mathrm{CNF}}) = M$, máme $\varphi \sim \varphi_{\mathrm{DNF}} \sim \varphi_{\mathrm{CNF}}$. □

Cvičení 2.5. Rozmyslete si, jak lze z DNF výroku snadno vygenerovat jeho modely, a z CNF výroku jeho nemodely.

Poznámka 2.3.7. Kdy lze axiomatizovat *teorii* výrokem v DNF nebo výrokem v CNF? Mějme jazyk $\mathbb{P}' = \mathrm{Var}(T)$ (tj. všechny výrokové proměnné vyskytující se v axiomech T). Má-li T v jazyce $\mathbb{P}'$ konečně mnoho modelů (tj. je-li $\mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T)$ konečná), můžeme sestrojit výrok v DNF, a má-li konečně mnoho *nemodelů*, můžeme sestrojit výrok v CNF. Obecně ale ne každou teorii lze axiomatizovat *jediným* výrokem v CNF nebo v DNF. Vždy můžeme převést jednotlivé axiomy do CNF (nebo DNF), a můžeme také axiomatizovat teorii jen pomocí (potenciálně nekonečně mnoha) klauzulí.

Tento způsob převodu do CNF resp. do DNF vyžaduje znalost množiny modelů výroku, je tedy poměrně neefektivní. A také výsledná normální forma může být velmi dlouhá. Ukážeme si ještě jeden postup.

Převod pomocí ekvivalentních úprav

Využijeme následujícího pozorování: Nahradíme-li nějaký podvýrok ψ výroku φ ekvivalentním výrokem ψ', výsledný výrok φ' bude také ekvivalentní φ. Nejprve si ukážeme postup na příkladě:

Příklad 2.3.8. Převedeme opět výrok $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$. Nejprve se zbavíme ekvivalence, vyjádříme ji jako konjunkci dvou implikací. V dalším kroku odstraníme implikace, pomocí pravidla $\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$:

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow (q \vee \neg r) &\sim (p \to (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg r) \to p) \\ &\sim (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee p) \end{aligned}$$

Nyní si představme strom výroku, v dalším kroku chceme dostat negace na co nejnižší úroveň stromu, bezprostředně nad listy: využijeme toho, že $\neg(q \vee \neg r) \sim \neg q \wedge \neg\neg r$ a zbavíme se dvojité negace $\neg\neg r \sim r$. Dostáváme výrok

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee p)$$

Nyní již necháme literály nedotčené, a použijeme distributivitu $\wedge$ vůči $\vee$, nebo naopak, podle toho, zda chceme DNF nebo CNF. Pro převod do CNF použijeme úpravu $(\neg q \wedge r) \vee p \sim (\neg q \vee p) \wedge (r \vee p)$, kterou jsme dostali symbol $\vee$ na nižší úroveň stromu. (Nakreslete si!) Tím už dostáváme výrok v CNF, pro přehlednost ještě seřadíme literály v klauzulích:

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)$$

Při převodu do DNF bychom postupovali obdobně, opakovanou aplikací distributivity. Zde vyjdeme v CNF formy a zkombinujeme každý literál z první klauzule s každým literálem z druhé a s každým literálem z třetí klauzule. Všimneme si, že stejný literál nemusíme v elementární konjunkci opakovat dvakrát, a že obsahuje-li elementární klauzule dvojici opačných

literálů, je sporná, a můžeme ji tedy v DNF vynechat. Také můžeme vynechat elementární konjunkci E', pokud máme jinou elementární konjunkci E takovou, že E' obsahuje všechny literály obsažené v E, např. $E = p \wedge \neg r$ a $E' = (p \wedge q \wedge \neg r)$. (Rozmyslete si proč, a zformulujte duální zjednodušení při převodu do CNF.) Výsledný výrok v DNF je:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$$

Nyní vypíšeme všechny potřebné ekvivalentní úpravy. Důkaz, že každý výrok lze převést do DNF a do CNF lze snadno provést indukcí podle struktury výroku (podle hloubky stromu výroku).

- Implikace a ekvivalence:

  $$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$$
  $$\varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

- Negace:

  $$\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$$
  $$\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi$$
  $$\neg\neg\varphi \sim \varphi$$

- Konjunkce (převod do DNF):

  $$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$
  $$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \sim (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$$

- Disjunkce (převod do CNF):

  $$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$
  $$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \sim (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$$

Jak uvidíme v příští kapitole, CNF je v praxi mnohem důležitější než DNF (byť jde o duální pojmy). Při popisu reálného systému je přirozenější vyjádření pomocí konjunkce mnoha jednodušších vlastností, než jako jednu velmi dlouhou disjunkci. Existuje mnoho dalších forem reprezentace booleovských funkcí. Podobně jako datové struktury, vhodnou formu reprezentace volíme podle toho, jaké operace potřebujeme s funkcí dělat.[19]

2.4 Vlastnosti a důsledky teorií

Podívejme se nyní hlouběji na vlastnosti teorií. Podobně jako pro výroky řekneme, že dvě teorie T, T' v jazyce $\mathbb{P}$ jsou *ekvivalentní*, pokud mají stejnou množinu modelů:

$$T \sim T' \text{ právě když } \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T')$$

Jde tedy o teorie vyjadřující tytéž vlastnosti, jen jinak vyjádřené (*axiomatizované*). Zajímat nás budou vlastnosti nezávislé na konkrétní *axiomatizaci*.

Příklad 2.4.1. Například teorie $T = \{p \to q, p \leftrightarrow r\}$ je ekvivalentní teorii $T' = \{(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)\}$.

Definice 2.4.2 (Vlastnosti teorií)**.** Řekneme, že teorie T v jazyce $\mathbb{P}$ je

- *sporná*, jestliže v ní platí $\bot$ (spor), ekvivalentně, jestliže nemá žádný model, ekvivalentně, jestliže v ní platí všechny výroky,
- *bezesporná* (*splnitelná*), pokud není sporná, tj. má nějaký model,

[19] Viz například přednáška NAIL031 Reprezentace booleovských funkcí.

- *kompletní*, jestliže není sporná a každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (tj. nemá žádné nezávislé výroky), ekvivalentně, pokud má právě jeden model.

Rozmysleme si, proč platí ekvivalence vlastností v definici. Uvědomme si, že ve sporné teorii platí skutečně platí všechny výroky! Vskutku, výrok platí v T, pokud platí v každém modelu T, ty ale žádné nejsou. Naopak, pokud teorie má alespoň jeden model, v tomto modelu nemůže platit $\bot = p \wedge \neg p$.

A je-li teorie kompletní, nemůže mít dva různé modely $v \neq v'$. Výrok $\varphi_v = \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$ (který jsme potkali v důkazu Tvrzení 2.2.14) by totiž byl nezávislý v T, protože platí v modelu v ale ne v modelu v'. Naopak, má-li T jediný model v, potom každý výrok buď platí ve v, a tedy platí v T, nebo neplatí ve v a potom je lživý v T.

Příklad 2.4.3. Příkladem sporné teorie je třeba $T = \{p, p \to q, \neg q\}$. Teorie $T = \{p \vee q, r\}$ je bezesporná, ale není kompletní, například výrok $p \wedge q$ v ní není pravdivý (neplatí v modelu $(1, 0, 1)$) ale ani lživý (platí v modelu $(1, 1, 1)$). Teorie $T \cup \{\neg p\}$ je kompletní, jejím jediným modelem je $(0, 1, 1)$.

2.4.1 Důsledky teorií

Připomeňme, že důsledek teorie T je každý výrok, který v T platí (tj. platí v každém modelu T) a označme si *množinu všech důsledků* teorie T v jazyce $\mathbb{P}$ jako

$$\mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \models \varphi\}$$

Pokud je teorie T v jazyce $\mathbb{P}$, můžeme psát:

$$\mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}} \mid \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$$

(Dává ale smysl mluvit i o důsledcích teorie v nějakém menším jazyce, který je podmnožinou jazyka T).

Ukážeme si několik jednoduchých vlastností důsledků:

Tvrzení 2.4.4. *Mějme teorie T, T' a výroky $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ v jazyce $\mathbb{P}$. Potom platí:*

(i) $T \subseteq \mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$,

(ii) $\mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(\mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T))$,

(iii) pokud $T \subseteq T'$, *potom* $\mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T')$,

(iv) $\varphi \in \mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$ *právě když je výrok* $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi$ *tautologie.*

Důkaz. Důkaz je snadný, použijeme-li, že φ je důsledek T právě když $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)$, a uvědomíme-li si následující vztahy:

- $\mathrm{M}(\mathrm{Csq}(T)) = \mathrm{M}(T)$,
- je-li $T \subseteq T'$ potom $\mathrm{M}(T) \supseteq \mathrm{M}(T')$,[20]
- $\psi \to \varphi$ je tautologie, právě když platí $\mathrm{M}(\psi) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$,
- $\mathrm{M}(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) = \mathrm{M}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

□

Cvičení 2.6. Dokažte podrobně Tvrzení 2.4.4.

[20] Čím více vlastností předepíšeme, tím méně objektů je bude všechny splňovat.

2.4.2 Extenze teorií

Neformálně řečeno, rozšířením, neboli *extenzí* teorie T myslíme jakoukoliv teorii T', která splňuje vše, co platí v teorii T (a něco navíc, nejde-li o triviální případ). Modeluje-li T nějaký systém, lze ji rozšířit dvěma způsoby: přidáním dodatečných požadavků o systému (tomu budeme říkat *jednoduchá extenze*) nebo i rozšířením systému o nějaké nové části. Pokud ve druhém případě nemáme dodatečné požadavky na původní část systému, tedy platí-li o původní části totéž, co předtím, říkáme, že je extenze *konzervativní*.

Příklad 2.4.5. Vraťme se k úvodnímu příkladu o barvení grafů, Příklad 1.1.2. Teorie T_3 (úplná obarvení grafu zachovávající hranovou podmínku) je jednoduchou extenzí teorie T_1 (částečná obarvení množiny vrcholů bez ohledu na hrany). Teorie T_3' z Sekce 1.2.1 (přidání nového vrcholu do grafu) je konzervativní, ale ne jednoduchou extenzí T_3. A jde o extenzi T_1, která není ani jednoduchá ani konzervativní.

Uveďme nyní konečně formální definice:

Definice 2.4.6 (Extenze teorie)**.** Mějme teorii T v jazyce $\mathbb{P}$.

- *Extenze* teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $\mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \mathrm{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$,
- je to *jednoduchá extenze*, pokud $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$,
- je to *konzervativní extenze*, pokud $\mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \mathrm{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$.

Extenze tedy znamená, že splňuje všechny důsledky původní teorie. Extenze je jednoduchá, pokud do jazyka nepřidáváme žádné nové výrokové proměnné, a konzervativní, pokud neměníme platnost tvrzení vyjádřitelných v původním jazyce, každý nový důsledek tedy musí obsahovat nějakou nově přidanou výrokovou proměnnou.

Co tyto pojmy znamenají *sémanticky*, v řeči modelů? Zformulujme nejprve obecné pozorování, které ihned poté ilustrujeme na příkladě:

Pozorování 2.4.7. *Je-li T teorie v jazyce $\mathbb{P}$ a T' teorie v jazyce $\mathbb{P}'$ obsahujícím jazyk P. Potom platí:*

- *T' je jednoduchou extenzí T, právě když $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ a $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T') \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$,*
- *T' je extenzí T, právě když $\mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T)$. Uvažujeme tedy modely teorie T nad rozšířeným jazykem $\mathbb{P}'$.*[21] *Jinými slovy,* restrikce[22] *libovolného modelu $v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T')$ na původní jazyk $\mathbb{P}$ musí být modelem T, mohli bychom psát $v\restriction_{\mathbb{P}} \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$ nebo:*

$$\{v\restriction_{\mathbb{P}} \mid v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T')\} \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$$

- *T' je konzervativní extenzí T, pokud je extenzí a navíc platí, že každý model T (v jazyce $\mathbb{P}$) lze nějak* expandovat *(rozšířit)*[23] *na model T' (v jazyce $\mathbb{P}'$), neboli* každý *model T (v jazyce $\mathbb{P}$) získáme restrikcí* nějakého *modelu T' na jazyk $\mathbb{P}$. Mohli bychom psát:*

$$\{v\restriction_{\mathbb{P}} \mid v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T')\} = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$$

[21] Pozor, nemůžeme psát $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T')$, protože modely T' musí být ohodnoceními většího jazyka $\mathbb{P}'$, hodnoty jen pro proměnné z $\mathbb{P}$ nestačí k určení pravdivostní hodnoty. A nelze psát ani $\mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$, jde o množiny vektorů jiné dimenze.

[22] *Restrikce* znamená zapomenutí hodnot pro nové výrokové proměnné, resp. smazání příslušných souřadnic při reprezentaci modelu vektorem.

[23] Přidáním hodnot pro nové výrokové proměnné, resp. přidáním odpovídajících souřadnic ve vektorové reprezentaci

- *T' je extenzí T a zároveň T je extenzí T', právě když $P' = \mathbb{P}$ a $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T') = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$, neboli $T' \sim T$.*

- *Kompletní jednoduché extenze T jednoznačně až na ekvivalenci odpovídají modelům T.*

Příklad 2.4.8. Mějme teorii $T = \{p \to q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$. Teorie T_1 v jazyce $\mathbb{P}$ je jednoduchou extenzí T, máme $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T_1) = \{(1,1)\} \subseteq \{(0,0),(0,1),(1,1)\} = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$. Je to kompletní teorie, další kompletní jednoduché extenze teorie T jsou např. $T_2 = \{\neg p, q\}$ a $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$. Každá kompletní jednoduchá extenze teorie T je ekvivalentní s T_1, T_2, nebo T_3.

Uvažme nyní teorii $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$ v jazyce $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$. Je extenzí T, neboť $\mathbb{P} = \{p, q\} \subseteq \{p, q, r\} = \mathbb{P}'$ a platí:

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T') &= \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\} \\ &\subseteq \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,0),(1,1,0),(1,1,1)\} = \mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T)\end{aligned}$$

Jinými slovy, zúžením modelů T' na jazyk $\mathbb{P}$ dostáváme $\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$ což je podmnožina $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$.

Protože platí dokonce $\{(0,0),(0,1),(1,0)\} = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$, jinými slovy, každý model $v \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$ lze rozšířit na model $v' \in \mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T')$ (např. $(0,1)$ lze rozšířit dodefinováním $v'(r) = 0$ na model $(0,1,0)$), je T' dokonce konzervativní extenzí T. To znamená, že každý výrok v jazyce $\mathbb{P}$ platí v T, právě když platí v T'. Ale výrok $p \to r$ (který je v jazyce $\mathbb{P}'$, ale ne v jazyce $\mathbb{P}$) je novým důsledkem: platí v T' ale ne v T (viz model $(1,1,0)$).

Teorie $T'' = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, \neg r \vee p\}$ v jazyce $\mathbb{P}'$ je extenzí T, ale ne konzervativní extenzí, neboť v ní platí $p \leftrightarrow q$, což neplatí v T. Nebo také proto, že model $(0,1)$ teorie T nelze rozšířit na model teorie T'': $(0,1,0)$ ani $(0,1,1)$ nesplňují axiomy T''.

Teorie T je (jednoduchou) extenzí teorie $\{\neg p \vee q\}$ v jazyce $\mathbb{P}$ a naopak, $T \sim \{\neg p \vee q\}$. Je také, jako každá teorie, jednoduchou konzervativní extenzí sebe sama.

Cvičení 2.7. Ukažte (podrobně), že má-li teorie T kompletní konzervativní extenzi, potom je sama nutně kompletní.

2.5 Algebra výroků

V logice nás většinou[24] zajímají výroky (resp. teorie) *až na ekvivalenci.*[25] Na otázku 'Kolik existuje různých výroků v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$?' je správná odpověď 'Nekonečně mnoho.' Nejspíše nás ale zajímaly výroky *až na ekvivalenci* (neboli *navzájem neekvivalentní*). Těch je tolik, kolik existuje různých podmnožin modelů jazyka, tedy $2^{|\,\mathrm{M}_{\mathbb{P}}\,|} = 2^8 = 256$. Skutečně, mají-li dva výroky stejnou množinu modelů, jsou z definice ekvivalentní. A pro každou množinu modelů můžeme najít odpovídající výrok, např. v DNF (viz 2.3.4). Zkusme trochu složitější úvahu:

Příklad 2.5.1. Mějme teorii T v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ mající právě pět modelů. Kolik existuje (až na ekvivalenci) výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou nezávislé v teorii T? Označme $|\mathbb{P}| = n = 3$ a $|\,\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)| = k = 5$.

Počítáme množiny $M = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi)$ a požadujeme, aby $\emptyset \neq M \cap \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) \neq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$. Máme tedy celkem $2^m - 2 = 6$ možností, jak může vypadat množina $M \cap \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$. A pro každý model

[24] Pokud např. neprovádíme konkrétní algoritmus založený na syntaktických úpravách, třeba převod do CNF.
[25] Můžeme je chápat jako jakési abstraktní 'vlastnosti' modelů bez ohledu na jejich konkrétní vyjádření.

jazyka, který není modelem T (těch je $2^n - m = 3$) můžeme zvolit libovolně, zda bude či nebude v M. Celkově tedy dostáváme $(2^m - 2) \cdot 2^{2^n - m} = 6 \cdot 2^{8-5} = 48$ možných množin M, tolik je tedy výroků nezávislých v T, až na ekvivalenci.

Podívejme se na věc abstraktněji. Formálně, uvažujeme množinu ekvivalenčních tříd $\sim$ na množině všech výroků $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$, kterou označíme ${}^{\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}}/{\sim}$. Prvky této množiny jsou množiny ekvivalentních výroků, např. $[p{\to}q]_\sim = \{p{\to}q, \neg p{\vee}q, \neg(p{\wedge}\neg q), \neg p{\vee}q{\vee}q, \dots\}$. A máme zobrazení $h : {}^{\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}}/{\sim} \to \mathcal{P}(\mathrm{M}_{\mathbb{P}})$ (kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin X) definované předpisem:

$$h([\varphi]_\sim) = \mathrm{M}(\varphi)$$

tj. třídě ekvivalentních výroků přiřadíme množinu modelů libovolného z nich. Je snadné ověřit, že toto zobrazení je korektně definované (nezáleží na tom, jaký výrok z třídy ekvivalence jsme si vybrali) a prosté, a že je-li jazyk $\mathbb{P}$ konečný, je h dokonce bijekce. (Ověřte!)

Na množině ${}^{\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}}/{\sim}$ můžeme zavést operace $\neg, \wedge, \vee$ pomocí předpisu

$$\begin{aligned} \neg[\varphi]_\sim &= [\neg\varphi]_\sim \\ [\varphi]_\sim \wedge [\psi]_\sim &= [\varphi \wedge \psi]_\sim \\ [\varphi]_\sim \vee [\psi]_\sim &= [\varphi \vee \psi]_\sim \end{aligned}$$

tedy vybereme reprezentanta resp. reprezentanty, a provedeme operaci s nimi, např. 'konjunkce' tříd $[p \to q]_\sim$ a $[q \vee \neg r]_\sim$ je:

$$[p \to q]_\sim \wedge [q \vee \neg r]_\sim = [(p \to q) \wedge (q \vee \neg r)]_\sim$$

Přidáme-li také *konstanty* $\bot = [\bot]_\sim$ a $\top = [\top]_\sim$, dostáváme *(matematickou) strukturu*[26]

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle {}^{\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}}/{\sim}; \neg, \wedge, \vee, \bot, \top \rangle$$

které říkáme *algebra výroků* jazyka $\mathbb{P}$. Je to příklad tzv. *Booleovy algebry*. To znamená, že její operace se 'chovají' jako operace $^-, \cap, \cup$ na množině všech podmnožin $\mathcal{P}(X)$ nějaké neprázdné množiny X, a konstanty odpovídají $\emptyset$, X (takové Booleově algebře říkáme *potenční algebra*).[27]

Zobrazení $h : {}^{\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}}/{\sim} \to \mathcal{P}(\mathrm{M}_{\mathbb{P}})$ je tedy zobrazení z algebry výroků $\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}$ *na* potenční algebru

$$\mathcal{P}(\mathrm{M}_{\mathbb{P}}) = \langle \mathcal{P}(\mathrm{M}_{\mathbb{P}}); ^-, \cap, \cup, \emptyset, \mathrm{M}_{\mathbb{P}} \rangle$$

a je-li jazyk konečný, je to bijekce. Toto zobrazení 'zachovává' operace a konstanty, tj. platí $h(\bot) = \emptyset$, $h(\top) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$, a

$$\begin{aligned} h(\neg[\varphi]_\sim) &= \overline{h([\varphi]_\sim)} = \overline{\mathrm{M}(\varphi)} = \mathrm{M}_{\mathbb{P}} \setminus \mathrm{M}(\varphi) \\ h([\varphi]_\sim \wedge [\psi]_\sim) &= h([\varphi]_\sim) \cap h([\psi]_\sim) = \mathrm{M}(\varphi) \cap \mathrm{M}(\psi) \\ h([\varphi]_\sim \vee [\psi]_\sim) &= h([\varphi]_\sim) \cup h([\psi]_\sim) = \mathrm{M}(\varphi) \cup \mathrm{M}(\psi) \end{aligned}$$

Takovému zobrazení říkáme *homomorfismus* Booleových algeber, a je-li to bijekce, jde o *izomorfismus*.

[26] Struktura je neprázdná množina spolu s relacemi, operacemi, a konstantami. Například (orientovaný) graf, grupa, těleso, vektorový prostor. Struktury budou hrát důležitou roli v predikátové logice.

[27] Tj. splňují určité algebraické zákony, například distributivitu $\wedge$ vůči $\vee$. Booleovy algebry definujeme formálně později, uveďme ale ještě jeden důležitý příklad: množina všech n-bitových vektorů s operacemi $\sim$, &, | (po složkách) a s konstantami $(0, 0, \dots, 0)$ a $(1, 1, \dots, 1)$.

Poznámka 2.5.2. Tyto vztahy můžeme také využít při hledání modelů: například pro výrok $\varphi \to (\neg\psi \wedge \chi)$ platí (s využitím toho, že $\mathrm{M}(\varphi \to \varphi') = M(\neg\varphi \vee \varphi')$):

$$\mathrm{M}(\varphi \to (\neg\psi \wedge \chi)) = \overline{\mathrm{M}(\varphi)} \cup (\overline{\mathrm{M}(\psi)} \cap \mathrm{M}(\chi))$$

Všechny předchozí úvahy můžeme také relativizovat vzhledem k dané teorii T v jazyce $\mathbb{P}$, a to tak, že ekvivalenci $\sim$ nahradíme T-ekvivalencí $\sim_T$ a množinu modelů jazyka $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}$ nahradíme množinou modelů teorie $\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T)$. Dostáváme:

$$\begin{aligned} h(\bot) &= \emptyset, \\ h(\top) &= \mathrm{M}(T) \\ h(\neg[\varphi]_{\sim_T}) &= \mathrm{M}(T) \setminus \mathrm{M}(T, \varphi) \\ h([\varphi]_{\sim_T} \wedge [\psi]_{\sim_T}) &= \mathrm{M}(T, \varphi) \cap \mathrm{M}(T, \psi) \\ h([\varphi]_{\sim_T} \vee [\psi]_{\sim_T}) &= \mathrm{M}(T, \varphi) \cup \mathrm{M}(T, \psi) \end{aligned}$$

Algebra výroků jazyka je tedy totéž co algebra výroků vzhledem k prázdné teorii. Z technických důvodů potřebujeme, aby $\mathrm{M}(T)$ byla neprázdná, tj. T musí být bezesporná. Shrňme naše úvahy:

Důsledek 2.5.3. *Je-li T bezesporná teorie nad* konečným *jazykem $\mathbb{P}$, potom je algebra výroků $\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}$ izomorfní potenční algebře $\mathcal{P}(\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\mathbf{T})$ prostřednictvím zobrazení $h([\varphi]_{\sim_T}) = M(T, \varphi)$.*

Víme tedy, že negace, konjunkce, a disjunkce odpovídají doplňku, průniku a sjednocení množin modelů, a že chceme-li najít počet výroků až na ekvivalenci resp. T-ekvivalenci, stačí určit počet příslušných množin modelů. Shrňme si několik takových výpočtů ve formě tvrzení, jeho důkaz necháme jako cvičení.

Tvrzení 2.5.4. *Mějme n-prvkový jazyk $\mathbb{P}$ a bezespornou teorii T mající právě k modelů. Potom v jazyce $\mathbb{P}$ existuje* až na ekvivalenci*:*

- 2^{2^n} *výroků (resp. teorií),*
- 2^{2^n-k} *výroků pravdivých (resp. lživých) v T,*
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n-k}$ *výroků nezávislých v T,*
- 2^k *jednoduchých extenzí teorie T (z toho 1 sporná),*
- k *kompletních jednoduchých extenzí T.*

Dále až na T-ekvivalenci *existuje:*

- 2^k *výroků,*
- 1 *výrok pravdivý v T,* 1 *lživý v T,*
- $2^k - 2$ *výroků nezávislých v T.*

Cvičení 2.8. Zvolte vhodnou teorii T a ukažte na jejím příkladě, že platí Tvrzení 2.5.4.

Cvičení 2.9. Dokažte podrobně Tvrzení 2.5.4. (Nakreslete si Vennův diagram.)

Kapitola 3

Problém splnitelnosti

Problém splnitelnosti výrokových formulí, známý také jako *problém SAT*[1] je následující výpočetní problém: Vstupem je výrok φ v CNF (v nějakém rozumném kódování[2]), a úkolem je rozhodnout, zda je φ *splnitelný*.

Jak jsme si ukázali v předchozí kapitole, můžeme každý výrok, nebo i každou výrokovou teorii v konečném jazyce, převést do CNF. Problém SAT je tedy v jistém smyslu univerzální; odpovídá na otázku, zda existuje model.

Známá Cook-Levinova věta říká, že problém SAT je *NP-úplný*, tedy je v třídě NP (pokud nám orákulum prozradí správné ohodnocení proměnných, můžeme snadno ověřit, že všechny klauzule jsou splněny) a každý problém z třídy NP na něj lze převést v polynomiálním čase (konkrétně, výpočet Turingova stroje lze popsat pomocí CNF formule).[3]

Praktické SAT solvery si ale umí poradit s instancemi obsahujícími mnoho, dokonce až miliony, výrokových proměnných a klauzulí. V této kapitole si nejprve ukážeme praktickou aplikaci SAT solveru na problém 'ze života', potom dva fragmenty problému SAT, tzv. *2-SAT* a *Horn-SAT*, pro které existují polynomiální algoritmy, a na závěr si ukážeme také algoritmus DPLL, který je základem (téměř?) všech SAT solverů. (V pozdější kapitole uvidíme také souvislost s *rezoluční metodou*.)

3.1 SAT solvery

Praktická ukázka použití řešiče SAT na konkrétní problém. [TODO]

3.2 2-SAT a implikační graf

Výrok φ je v k-CNF, pokud je v CNF a každá klauzule má nejvýše k literálů. Problému k-SAT se ptá, zda je daný k-CNF formule splnitelná. Pro $k \geq 3$ je k-SAT nadále NP-úplný, každou CNF formuli lze zakódovat do 3-CNF formule:

Cvičení 3.1. Ukažte, že pro každý výrok φ v CNF existuje *ekvisplnitelný* výrok v φ' 3-CNF (tj. φ je splnitelný, právě když φ' je splnitelný), který lze zkonstruovat v lineárním čase.

[1] Z anglického 'Boolean satisfiability problem'.
[2] Např. DIMACS-CNF formát, viz Wikipedia.
[3] Viz předmět NTIN090 Základy složitosti a vyčíslitelnosti.

Pro problém 2-SAT ale existuje polynomiální (dokonce lineární) algoritmus, který si nyní představíme. Algoritmus využívá tzv. *implikačního grafu*. Ukážeme si postup na příkladě:

Příklad 3.2.1. Mějme následující 2-CNF výrok φ:

$$(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3) \wedge (p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_1 \vee p_5) \wedge (p_2 \vee p_5) \wedge p_1 \wedge \neg p_4$$

Implikační graf

Implikační graf 2-CNF výroku φ je založený na myšlence, že 2-klauzuli $\ell_1 \vee \ell_2$ (kde ℓ_1, ℓ_2 jsou literály) lze chápat jako dvojici implikací: $\overline{\ell_1} \to \ell_2$ a $\overline{\ell_2} \to \ell_1$.[4] Například, z klauzule $\neg p_1 \vee p_2$ vzniknou implikace $p_1 \to p_2$ a také , $\neg p_2 \to \neg p_1$. Tedy pokud p_1 platí v nějakém modelu, musí platit i p_2, a pokud p_2 neplatí, nesmí platit ani p_1. Jednotkovou klauzuli ℓ můžeme také vyjádřit pomocí implikace jako $\overline{\ell} \to \ell$, např. z p_1 dostáváme $\neg p_1 \to p_1$.

Implikační graf $\mathcal{G}_\varphi$ je tedy orientovaný graf, jehož vrcholy jsou všechny literály (proměnné z $\mathrm{Var}(\varphi)$ a jejich negace) a hrany jsou dané implikacemi popsanými výše:

- $V(\mathcal{G}_\varphi) = \{p, \neg p \mid p \in \mathrm{Var}(\varphi)\}$,
- $E(\mathcal{G}_\varphi) = \{(\overline{\ell_1}, \ell_2), (\overline{\ell_2}, \ell_1) \mid \ell_1 \vee \ell_2 \text{ je klauzule } \varphi\} \cup \{(\overline{\ell}, \ell) \mid \ell \text{ je jednotková klauzule } \varphi\}$

V našem příkladě máme množinu vrcholů

$$V(\mathcal{G}_\varphi) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \neg p_1, \neg p_2, \neg p_3, \neg p_4, \neg p_5\}$$

a hrany jsou:

$$\begin{aligned} E(\mathcal{G}_\varphi) = \{&(p_1, p_2), (\neg p_2, \neg p_1), (p_2, \neg p_3), (p_3, \neg p_2), (\neg p_1, p_3), (\neg p_3, p_1), (\neg p_3, \neg p_4), \\ &(p_4, p_3), (p_1, p_5), (\neg p_5, \neg p_1), (\neg p_2, p_5), (\neg p_5, p_2), (\neg p_1, p_1), (p_4, \neg p_4)\} \end{aligned}$$

Výsledný graf je znázorněný na Obrázku 3.1.

3.2.1 Silně souvislé komponenty

Nyní musíme najít komponenty silné souvislosti[5] tohoto grafu. V našem příkladě dostáváme následující komponenty: $C_1 = \{p_4\}$, $C_2 = \{\neg p_5\}$, $C_3 = \{\neg p_1, \neg p_2, p_3\}$, $\overline{C_3} = \{p_1, p_2, \neg p_3\}$, $\overline{C_2} = \{p_5\}$, $\overline{C_1} = \{\neg p_4\}$.

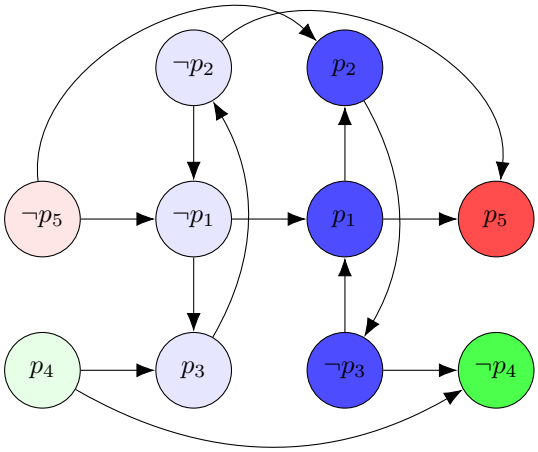
Všechny literály v jedné komponentě musí být ohodnoceny stejně. Pokud bychom tedy našli dvojici opačných literálů v jedné komponentě, znamená to, že výrok je nesplnitelný. V opačném případě vždy můžeme najít splňující ohodnocení, jak si dokážeme v Tvrzení 3.2.2. Potřebujeme zajistit, aby z žádné komponenty ohodnocené 1 nevedla hrana do komponenty ohodnocené 1. Provedeme-li kontrakci komponent, výsledný graf $\mathcal{G}^*_\varphi$ je acyklický (každý cyklus byl uvnitř nějaké komponenty), a můžeme ho tedy nakreslit v *topologickém uspořádání* (tj. uspořádání na přímce, kde hrany vedou jen doprava), viz Obrázek 3.2.

Při hledání splňujícího ohodnocení (pokud nám nestačí informace, že výrok je splnitelný) potom postupujeme tak, že vezmeme nejlevější dosud neohodnocenou komponentu, ohodnotíme ji 0, opačnou komponentu ohodnotíme 1, a postup opakujeme dokud zbývá nějaká neohodnocená komponenta. Například, topologické uspořádání na Obrázku 3.3 odpovídá modelu $v = (1, 1, 0, 0, 1)$.

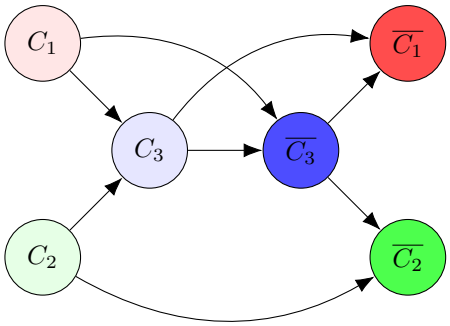
Na závěr shrneme naše úvahy do následujícího tvrzení:

[4] V předchozí kapitole jsme vyjadřovali $p_1 \to p_2$ jako $\neg p_1 \vee p_2$, zde provádíme opačný postup.

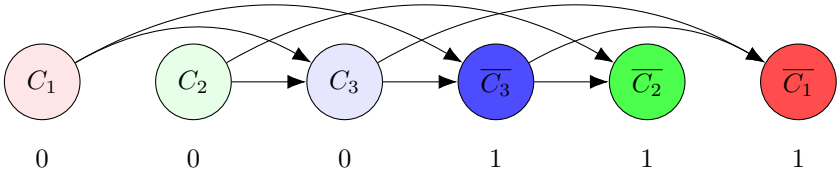
[5] *Silná souvislost* znamená, že existuje orientovaná cesta z u do v i z v do u, neboli každé dva vrcholy v jedné komponentě leží v orientovaném cyklu. A naopak, každý orientovaný cyklus leží uvnitř nějaké komponenty.



Obrázek 3.1: Implikační graf $\mathcal{G}_\varphi$. Komponenty silné souvislosti jsou odlišeny barevně.



Obrázek 3.2: Implikační graf $\mathcal{G}_\varphi$. Graf silně souvislých komponent $\mathcal{G}^*_\varphi$.



Obrázek 3.3: Implikační graf $\mathcal{G}_\varphi$. Topologické uspořádání grafu $\mathcal{G}^*_\varphi$ a splňující ohodnocení komponent.

Tvrzení 3.2.2. *Výrok φ je splnitelný, právě když žádná silně souvislá komponenta v $\mathcal{G}_\varphi$ neobsahuje dvojici opačných literálů $\ell, \overline{\ell}$.*

Důkaz. Každý model, neboli splňující ohodnocení, musí ohodnotit všechny literály ze stejné komponenty stejnou hodnotou. (V opačném případě by nutně existovala implikace $\ell_1 \to \ell_2$, kde ℓ_1 v modelu platí ale ℓ_2 neplatí.) V jedné komponentě tedy nemohou být opačné literály.

Naopak předpokládejme, že žádná komponenta neobsahuje dvojici opačných literálů, a ukažme, že potom existuje model. Označme $\mathcal{G}_\varphi^*$ graf vzniklý z $\mathcal{G}_\varphi$ kontrakcí silně souvislých komponent. Tento graf je acyklický, zvolme nějaké topologické uspořádání. Model zkonstruujeme tak, že zvolíme první dosud neohodnocenou komponentu v našem topologickém uspořádání, všechny literály v ní obsažené ohodnotíme 0, a opačné literály ohodnotíme 1. Takto pokračujeme dokud nejsou všechny komponenty ohodnoceny.

Proč v takto získaném modelu platí výrok φ? Kdyby ne, neplatila by některá z klauzulí. Jednotková klauzule ℓ musí platit, neboť v grafu $\mathcal{G}_\varphi$ máme hranu $\overline{\ell} \to \ell$. Stejná hrana je i v grafu komponent, tedy $\overline{\ell}$ předchází v topologickém uspořádání komponentu obsahující ℓ. Při konstrukci modelu jsme museli ohodnotit $\overline{\ell}$ dříve než ℓ, tedy $\overline{\ell} = 0$ a $\ell = 1$. Podobně, 2-klauzule $\ell_1 \vee \ell_2$ také musí platit: máme hrany $\overline{\ell_1} \to \ell_2$ a $\overline{\ell_2} \to \ell_1$. Pokud jsme ℓ_1 ohodnotili dříve než ℓ_2, museli jsme kvůli hraně $\overline{\ell_1} \to \ell_2$ ohodnotit $\overline{\ell_1} = 0$, tedy ℓ_1 platí. Podobně pokud jsme ohodnotili nejdříve ℓ_2, musí být $\overline{\ell_2} = 0$ a $\ell_2 = 1$. □

Důsledek 3.2.3. *Problém 2-SAT je řešitelný v lineárním čase. V lineárním čase můžeme také zkonstruovat model, pokud existuje.*

Důkaz. Komponenty silné souvislosti lze snadno nalézt v v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, topologické uspořádání můžeme také zkonstruovat v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$. □

Cvičení 3.2. Najděte nějaký nesplnitelný 2-CNF výrok, sestrojte jeho implikační graf, a přesvědčete se, že existuje dvojice opačných literálů ve stejné komponentě silné souvislosti.

Cvičení 3.3. Najděte všechna topologická uspořádání grafu $\mathcal{G}_\varphi^*$ z příkladu výše a jim odpovídající modely. Rozmyslete si, proč takto získáme právě všechny modely výroku φ.

Cvičení 3.4. Rozmyslete si, proč lze komponenty i topologické uspořádání nalézt v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

3.3 Horn-SAT a jednotková propagace

Nyní si ukážeme další fragment SATu řešitelný v polynomiálním čase, tzv. *Horn-SAT* neboli problém splnitelnosti *hornovských výroků*. Výrok je v *hornovský (v Hornově tvaru)*[6], pokud je konjunkcí *hornovských klauzulí*, tj. klauzulí obsahujících *nejvýše jeden *pozitivní* literál.* Význam Hornovských klauzulí vyplývá z ekvivalentního vyjádření ve formě implikace:

$$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee q \;\sim\; (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$$

Hornovské formule tedy dobře modelují systémy, kde splnění určitých podmínek zaručuje splnění jiné podmínky. Upozorněme, že jednotková klauzule ℓ je také hornovská. V kontextu logického programování se jí říká *fakt*, pokud je literál pozitivní, a *cíl* pokud je negativní.[7]

[6] Matematik Alfred Horn objevil význam tohoto tvaru logických formulí (a položil tak základ logickému programování) v roce 1951.

[7] Neboť dokazujeme sporem, více v pozdější kapitole o rezoluci a Prologu.

Hornovské formule s alespoň jedním pozitivním a alespoň jedním negativním literálem jsou *pravidla*.

Příklad 3.3.1. Příkladem výroku, který je v CNF, ale není hornovský, je třeba $(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_3)$. Jako příklad, na kterém budeme ilustrovat algoritmus, nám poslouží následující hornovský výrok:

$$\varphi = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_4) \wedge p_4$$

Polynomiální algoritmus pro řešení problému Horn-SAT je založený na jednoduché myšlence *jednotkové propagace*: Pokud náš výrok obsahuje *jednotkovou* klauzuli, víme, jak musí být ohodnocenena výroková proměnná obsažená v této klauzuli. A tuto znalost můžeme *propagovat*—využít k zjednodušení výroku.

Náš výrok φ obsahuje jednotkovou klauzuli p_4. Víme tedy, že v každém jeho modelu $v \in \mathrm{M}(\varphi)$ musí platit $v(p_4) = 1$. To ale znamená, že v libovolném modelu výroku φ

- každá klauzule obsahující pozitivní literál p_4 je splněna, můžeme ji tedy z výroku odstranit,
- negativní literál $\neg p_4$ nemůže být splněn, můžeme ho tedy odstranit ze všech klauzulí, které ho obsahují.

Tomu kroku se říká *jednotková propagace*. Výsledkem je následující zjednodušený výrok, který označíme φ^{p_4} (obecně φ^ℓ máme-li jednotkovou klauzuli ℓ):

$$\varphi^{p_4} = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg_3 \vee \neg p_4) \wedge \neg p_5$$

Pozorování 3.3.2. *Všimněte si, že φ^ℓ už neobsahuje literál ℓ ani $\overline{\ell}$, a zřejmě platí, že modely φ jsou právě modely $\{\varphi^\ell, \ell\}$, neboli modely φ^ℓ v původním jazyce $\mathbb{P}$, ve kterých platí ℓ.*

Jednotkovou propagací jsme získali ve výroku φ^{p_4} novou jednotkovou klauzuli $\neg p_5$, můžeme tedy pokračovat nastavením $v(p_5) = 0$ a další jednotkovou propagací:

$$(\varphi^{p_4})^{\neg p_5} = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4)$$

Výsledný výrok už neobsahuje jednotkovou klauzuli. To ale znamená, že každá klauzule obsahuje alespoň dva literály, a nejvýše jeden z nich může být pozitivní! (Zde potřebujeme hornovskost výroku.) Protože každá klauzule obsahuje negativní literál, stačí ohodnotit všechny zbývající proměnné 0, a výrok bude splněn: $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$. Dostáváme tedy model $v = (0, 0, 0, 1, 1)$.

Příklad 3.3.3. Co by se stalo, pokud by výrok nebyl splnitelný? Podívejme se na výrok

$$\psi = p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \vee \neg r$$

a provádějme jednotkovou propagaci jako v předchozím příkladě: máme $v(p) = 1$ a $\psi^p = q \wedge (\neg q \vee r) \vee \neg r$, dále $v(q) = 1$ a $(\psi^p)^q = r \vee \neg r$. Tento výrok je nesplnitelný, neboť obsahuje dvojici opačných jednotkových klauzulí. [8]

[8] Jinými slovy, v dalším kroku bychom provedli jednotkovou propagaci r, odstranili jednotkovou klauzuli r, a ze zbývající jednotkové klauzule $\neg r$ bychom odstranili literál $\neg r$, čímž by vznikla *prázdná klauzule*, která je nesplnitelná.

Shrňme si nyní algoritmus pro řešení problému Horn-SAT:

Algoritmus (Horn-SAT)**. vstup**: Vstup: výrok φ v Hornově tvaru, výstup: model φ nebo informace, že φ není splnitelný

1. Pokud φ obsahuje dvojici opačných jednotkových klauzulí $\ell, \overline{\ell}$, není splnitelný.
2. Pokud φ neobsahuje žádnou jednotkovou klauzuli, je splnitelný, ohodnoť všechny zbývající proměnné 0.
3. Pokud φ obsahuje jednotkovou klauzuli ℓ, ohodnoť literál ℓ hodnotou 1, proveď jednotkovou propagaci, nahraď φ výrokem φ^ℓ, a vrať se na začátek.

Tvrzení 3.3.4. *Algoritmus je korektní.*

Důkaz. Korektnost plyne z Pozorování a z předchozí diskuze. □

Důsledek 3.3.5. *Horn-SAT lze řešit v lineárním čase.*

Důkaz. V každém kroku stačí projít výrok jednou, a jednotková propagace výrok vždy zkrátí. Z toho snadno plyne kvadratický horní odhad, ale při vhodné implementaci lze dosáhnout lineárního času vzhledem k délce φ. □

Cvičení 3.5. Navrhněte implementaci algoritmu pro Horn-SAT v lineárním čase.

Cvičení 3.6. Navrhněte modifikaci algoritmu pro Horn-SAT, která najde všechny modely.

3.4 DPLL algoritmus pro řešení problému SAT

Na závěr kapitoly o problému splnitelnosti si představíme zdaleka nejpoužívanější algoritmus pro řešení obecného problému SAT, algoritmus DPLL.[9] Ačkoliv v nejhorším případě má exponenciální složitost, v praxi funguje velmi efektivně.

Algoritmus používá jednotkovou propagaci spolu s následujícím pozorováním: Řekneme, že literál ℓ má *čistý výskyt* v φ, pokud se vyskytuje ve φ, ale opačný literál $\overline{\ell}$ se ve φ nevyskytuje. Máme-li literál s čistým výskytem, můžeme jeho hodnotu nastavit na 1, a splnit (a odstranit) tak všechny klauzule, které ho obsahují. Pokud výrok neumíme takto zjednodušit, rozvětvíme výpočet dosazením obou možných hodnot pro vybranou výrokovou proměnnou.

Algoritmus (DPLL)**. vstup**: Vstup: výrok φ v CNF, výstup: model φ nebo informace, že φ není splnitelný

1. Dokud φ obsahuje jednotkovou klauzuli ℓ, ohodnoť literál ℓ hodnotou 1, proveď jednotkovou propagaci, a nahraď φ výrokem φ^ℓ.
2. Dokud existuje literál ℓ, který má ve φ čistý výskyt, ohodnoť ℓ hodnotou 1, a odstraň klauzule obsahující ℓ.
3. Pokud φ neobsahuje žádnou klauzuli, je splnitelný.
4. Pokud φ obsahuje prázdnou klauzuli, není splnitelný.

[9] Pojmenovaný po svých tvůrcích, Davis-Putnam-Logemann-Loveland, pochází z roku 1961.

5. Jinak zvol dosud neohodnocenou výrokovou proměnnou p, a zavolej algoritmus rekurzivně na $\varphi \wedge p$ a na $\varphi \wedge \neg p$.

To, že je algoritmus v nejhorším případě exponenciální, lze snadno nahlédnout na příkladě jediné klauzule $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$. Korektnost není těžké ověřit.

Tvrzení 3.4.1. *Algoritmus DPLL řeší problém SAT.*

Příklad 3.4.2. Ukážeme si běh algoritmu na následujícím příkladě:

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee s)$$

Výrok nemá žádnou jednotkovou klauzuli. Literál $\neg r$ má čistý výskyt, nastavíme $v(r) = 0$ a odstraníme klauzule obsahující $\neg r$:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee s)$$

Žádný další literál nemá čistý výskyt. Spustíme proto rekurzivně algoritmus:

(p=1) Přidáme jednotkovou klauzuli p:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee s) \wedge p$$

Nastavíme $v(p) = 1$ a provedeme jednotkovou propagaci: $(\neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee s)$. Nyní rozvětvíme na proměnné q:

(q=1) $(\neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee s) \wedge q$. Po nastavení $v(q) = 1$ a jednotkové propagaci dostáváme s, po nastavení $v(s) = 1$ a jednotkové propagaci dostáváme výrok neobsahující žádnou klauzuli, je tedy splnitelný ohodnocením $(1, 1, 0, *, *)$. Odpověď na problém splnitelnosti už máme, pokud chceme znát všechny modely, můžeme dokončit ostatní větve výpočtu.

(q=0) $(\neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee s) \wedge \neg q$. Dostáváme modely $(1, 0, 0, *, *)$.

(p=0) Přidáme jednotkovou klauzuli $\neg p$:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (q \vee s) \wedge \neg p$$

Po provedení jednotkové propagace $\neg p$ máme $s \wedge \neg s \wedge (q \vee s)$. Po provedení jednotkové propagace s máme $\square \wedge q$, kde $\square$ je prázdná klauzule. Výrok je tedy nesplnitelný a v této větvi nedostaneme žádné modely.

Zjistili jsme, že původní výrok je splnitelný, má 8 modelů, konkrétně: $\mathrm{M}_\varphi = \{(1, a, 0, b, c) \mid a, b, c \in \{0, 1\}, \}$.[10]

[10] To znamená, že je ekvivalentní výroku $p \wedge \neg r$.

Kapitola 4

Metoda analytického tabla

V této kapitole představíme *Metodu analytického tabla*. Jde o syntaktickou proceduru, kterou můžeme použít pro zjištění, zda daný výrok platí v dané teorii, aniž bychom se museli zabývat sémantikou (např. hledat všechny modely, což je nepraktické). Dokážeme si její *korektnost* ('dává správné odpovědi') a *úplnost* ('funguje vždy'), a použijeme ji také k důkazu tzv. *Věty o kompaktnosti* ('vlastnosti nekonečného objektu stačí ukázat pro jeho konečné části').

4.1 Formální dokazovací systémy

Formální dokazovací systém formalizuje 'dokazování' (např. v matematice) jako přesně (algoritmicky) danou syntaktickou proceduru. *Důkaz* faktu, že v teorii T platí výrok φ (neboli $T \models \varphi$) je konečný syntaktický objekt vycházející z axiomů T a výroku φ. Pokud důkaz existuje, lze ho nalézt 'algoritmicky',[1] a algoritmicky jsme také schopni ověřit, že je daný objekt opravdu důkaz.

Existuje-li důkaz, říkáme, že φ je (v daném dokazovacím systému) *dokazatelný* z T, a píšeme $T \vdash \varphi$. Po dokazovacím systému požadujeme dvě vlastnosti:

- *korektnost*: je-li výrok dokazatelný z teorie, je v ní pravdivý ($T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$)
- *úplnost*: je-li výrok pravdivý v teorii, je z ní dokazatelný ($T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$)

(Přičemž korektnost vyžadujeme vždy, ale efektivní důkazový systém může být praktický, i pokud není úplný, zejména pokud je úplný pro nějakou zajímavou třídu výroků resp. teorií.)

V této kapitole si ukážeme kromě *tablo metody* také *Hilbertovský kalkulus*, a v příští kapitole představíme další dokazovací systém, tzv. *rezoluční metodu*.

4.2 Úvod do tablo metody

Po zbytek této kapitoly budeme předpokládat, že máme daný *spočetný* jazyk $\mathbb{P}$. Z toho plyne, že i každá teorie nad $\mathbb{P}$ je spočetná. Nejprve se soustředíme na případ, kdy $T = \emptyset$, tedy dokazujeme, že výrok φ platí *logicky* (je to *tautologie*).

Tablo je olabelovaný strom představující hledání protipříkladu, tj. modelu, ve kterém φ neplatí. Labely na vrcholech, kterým budeme říkat *položky*, sestávají ze symbolu T resp. F

[1] Zde ale musíme být opatrní v případě nekonečné teorie T, jak je zadaná? Algoritmus musí mít efektivní přístup ke všem axiomům.

('True'/'False') následovaného nějakým výrokem ψ a představují předpoklad (požadavek), že v modelu výrok ψ platí resp. neplatí. Do kořene tabla dáme položku $\mathrm{F}\varphi$, tj. hledáme model, ve kterém *neplatí* φ. Dále budeme tablo rozvíjet pomocí pravidel pro *redukci* položek. Tato pravidla zajišťují následující invariant:

> Každý model, který se *shoduje* s položkou v kořeni (tj. ve kterém neplatí φ), se musí *shodovat* i s některou větví tabla (tj. splňovat všechny požadavky vyjádřené položkami na této větvi).

Pokud na některé větvi dostaneme položky tvaru $\mathrm{T}\psi$ a $\mathrm{F}\psi$, říkáme, že větev *selhala* (je *sporná*) a víme, že žádný model s ní nemůže souhlasit. Pokud selžou všechny větve, víme, že neexistuje žádný model, ve kterém by neplatilo φ, a máme tedy *důkaz*, že φ platí. (Všimněte si, že jde o *důkaz sporem*.)

Pokud nějaká větev neselhala, ale je *dokončená*, tj. všechny položky jsou zredukované, víme, že φ neplatí, a budeme z této větve schopni zkonstruovat konkrétní model, ve kterém neplatí.

Příklad 4.2.1. Ukažme si celý postup na dvou příkladech, viz Obrázek 4.2.1.

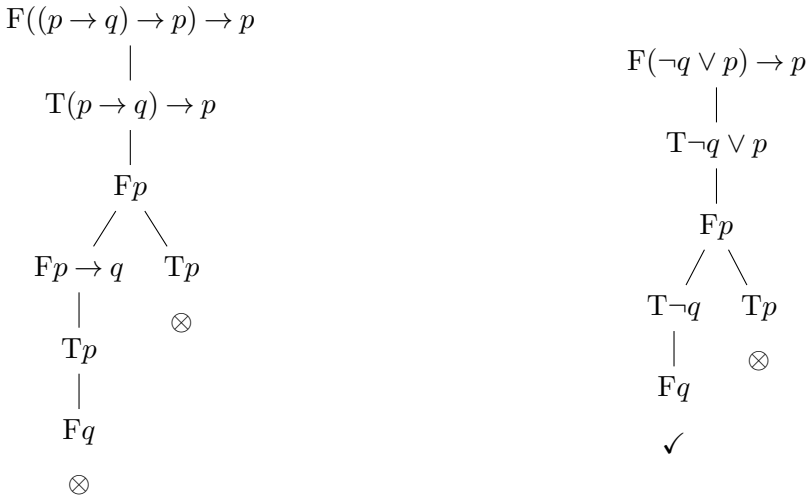
(a) Nejprve sestrojme tablo důkaz výroku $\varphi = ((p \to q) \to p) \to p$. Začneme kořenem s položkou $\mathrm{F}\varphi$. Tato položka je tvaru $\mathrm{F}\varphi_1 \to \varphi_2$ ('neplatí implikace'), pokud se s ní shoduje nějaký model, musí splňovat $\mathrm{T}(p \to q) \to p$ a $\mathrm{F}p$, připojíme tedy tyto dvě položky. (Ve skutečnosti připojíme *atomické tablo* pro tento případ, viz Tabulka 4.1, kořen tohoto atomického tabla ale vynecháme, abychom zbytečně nezopakovali tutéž položku.) Tím jsme *zredukovali* položku v kořeni.

Pokračujeme položkou $\mathrm{T}(p \to q) \to p$, ta je tvaru 'platí implikace', rozvětvíme na dvě větve: model buď splňuje $\mathrm{F}(p \to q)$, nebo $\mathrm{T}p$. Pravá větev *selhala* (je *sporná*), neboť obsahuje položky $\mathrm{T}p$, $\mathrm{F}p$, neshoduje se tedy s žádným modelem, označíme ji symbolem $\otimes$. V levé větvi ještě zredukujeme položku $\mathrm{F}p \to q$ a také dostaneme spornou větev. Všechny větve jsou sporné, neexistuje tedy žádný protipříklad a máme důkaz výroku φ. Píšeme $\vdash \varphi$.

(b) Nyní sestrojíme tablo s položkou $\mathrm{F}(\neg q \vee p) \to p$. Snažíme se tedy najít protipříklad: model, ve kterém neplatí $\neg q \vee p) \to p$. Nejprve jsme použili atomické tablo pro 'neplatí implikace', a dále redukujeme položku $\mathrm{T}\neg q \vee p$ připojením atomického tabla pro 'platí disjunkce'. Pravá větev selhala. V levé větvi ještě zredukujeme $\mathrm{T}\neg q$ na $\mathrm{F}q$ (atomické tablo pro 'platí negace') tím dostáváme dokončenou větev, neboť všechny položky už jsme zredukovali. Tato dokončená větev ale není sporná (označíme ji tedy symbolem ✓). To znamená, že protipříklad existuje: máme položky $\mathrm{F}p$ a $\mathrm{F}q$, kterým odpovídá model $(0, 0)$, ve kterém opravdu $(\neg q \vee p) \to p$ neplatí.

V následující sekci celý postup zformalizujeme a vysvětlíme, co dělat, když chceme dokazovat ne v logice, ale v nějaké teorii T (spoiler alert: při konstrukci připojujeme položky $\mathrm{T}\alpha$ pro axiomy $\alpha \in T$). Také si ukážeme příklad s nekonečnou teorií, kde *dokončená* větev někdy musí být nekonečná.

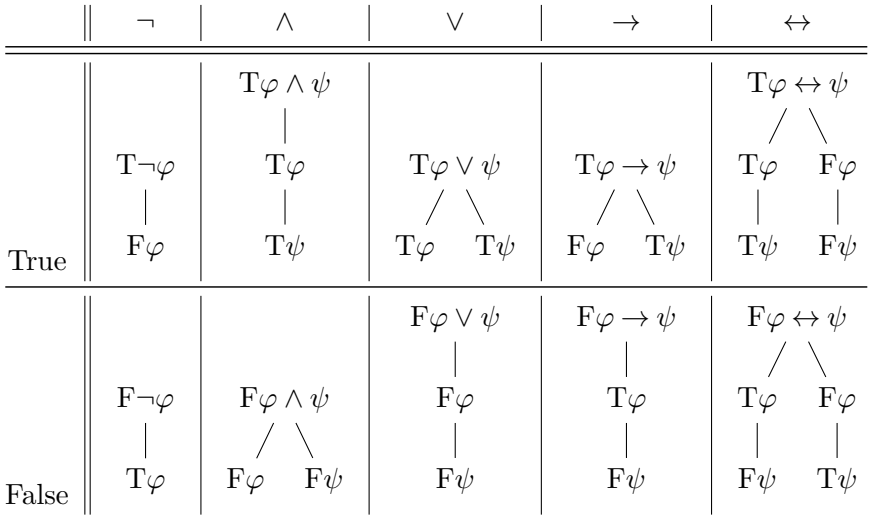
Ve zbytku této sekce ale nejprve definujeme všechna *atomická tabla* potřebná při konstrukci, a také formalizujeme pojem *stromu*.



Obrázek 4.1: Příklady tabel. (a) Tablo důkaz výroku $((p \to q) \to p) \to p$. (b) Tablo pro výrok $(\neg q \vee p) \to p$. Levá větev dává protipříklad, model $(0, 0)$ ve kterém výrok neplatí.

4.2.1 Atomická tabla

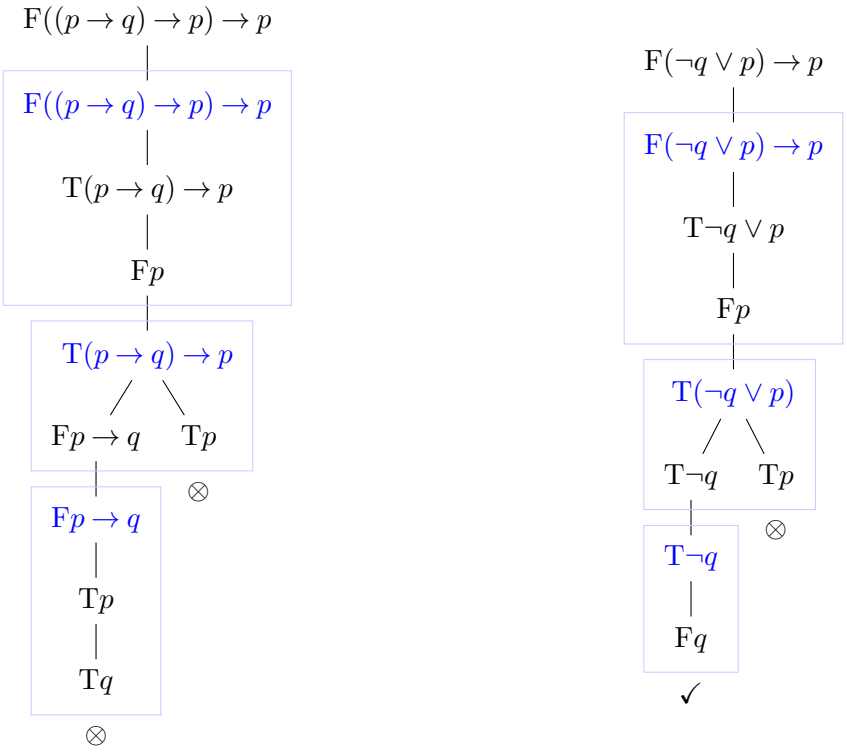
Atomická tabla představují pravidla, pomocí kterých redukujeme položky. Pro každou logickou spojku a každý ze dvou příznaků T/ F máme jedno atomické tablo, znázorněné v Tabulce 4.1.



Tabulka 4.1: Atomická tabla

Tabla z Příkladu 4.2.1 jsou zkonstruovaná postupným připojováním atomických tabel, viz Obrázek 4.2.1. Kořeny atomických tabel jsou označené modře, zavedeme konvenci, že je nebudeme zakreslovat.

Cvičení 4.1. Pokuste se zkonstruovat tablo s položkou $\mathrm{F}((\neg p \wedge \neg q) \vee p) \to (\neg p \wedge \neg q)$ v kořeni a také tablo s položkou $\mathrm{T}(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$. Při konstrukci používejte jen atomická tabla (zkontrolujte, zda vaše konstrukce souhlasí s definicí tabla z následující sekce). Rozmyslete si, co tato tabla říkají o výrocích ve svých kořenech.



Obrázek 4.2: Konstrukce tabel z Příkladu 4.2.1.

Cvičení 4.2. Ověřte, že všechna atomická tabla splňují invariant: shoduje-li se model s položkou v kořeni, shoduje se s některou z větví.

Cvičení 4.3. Navrhněte atomická tabla pro logické spojky NAND, NOR, XOR, IFTE.

4.2.2 O stromech

Než se pustíme do formální definice a důkazů, specifikujme, co myslíme pojmem strom. V teorii grafů bychom stromem nazvali souvislý graf bez cyklů, naše stromy jsou ale zakořeněné, uspořádané (tzv. pravolevým uspořádáním množiny synů každého vrcholu), a označkované. A mohou, často i budou, nekonečné. Formálně:

Definice 4.2.2 (Strom).

- *Strom* je neprázdná množina T s částečným uspořádáním $<_T$, které má (jediný) minimální prvek (*kořen*) a ve kterém je množina předků libovolného vrcholu *dobře uspořádaná*.[2]
- *Větev* stromu T je maximální[3] lineárně uspořádaná podmnožina T.
- *Uspořádaný strom* je strom T spolu s lineárním uspořádáním $<_L$ množiny synů každého vrcholu. Uspořádání synů budeme říkat *pravolevé* zatímco uspořádání $<_T$ je *stromové*.
- *Označkovaný strom* je strom spolu se značkovací funkcí label: $V(T) \to$ Labels.

[2] Tj. každá její neprázdná podmnožina má nejmenší prvek.
[3] Tj. nelze do ní přidat další vrcholy stromu.

Budeme používat standardní terminologii o stromech, např. budeme mluvit o *n-té úrovni stromu*, nebo o *hloubce* stromu (ta je nekonečná, právě když máme nekonečnou větev). V jedné větě, kterou si níže dokážeme, budeme potřebovat následující slavné tvrzení, které je důsledkem axiomu výběru.

Lemma 4.2.3 (Köenigovo lemma)**.** *Nekonečný, konečně větvící strom má nekonečnou větev.*

(Strom je *konečně větvící*, pokud má každý vrchol konečně mnoho synů.)

4.3 Tablo důkaz

Nyní uvedeme formální definici tabla. Do definice přidáme také teorii T, jejíž axiomy můžeme můžeme při konstrukci připojovat s příznakem T. Připomeňme, že *položka* je nápis Tφ nebo Fφ, kde φ je nějaký výrok.

Definice 4.3.1 (Tablo)**.** *Konečné tablo z teorie T* je uspořádaný, položkami označkovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:

- jednoprvkový strom označkovaný libovolnou položkou je tablo z teorie T,
- pro libovolnou položkou P na libovolné větvi V, můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P,
- na konec libovolné větve můžeme připojit položku Tα pro libovolný axiom teorie $\alpha \in T$.

Tablo z teorie T je buď konečné, nebo i *nekonečné*: v tom případě vzniklo ve spočetně mnoha krocích. Můžeme ho formálně vyjádřit jako sjednocení $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_i jsou konečná tabla z T, τ_0 je jednoprvkové tablo, a τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku.[4]

Tablo *pro položku P* je tablo, které má položku P v kořeni.

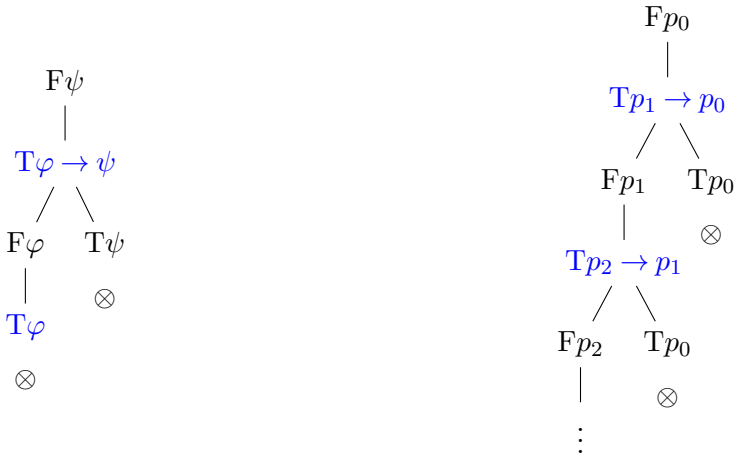
Připomeňme konvenci, že kořen atomického tabla nebudeme zapisovat (neboť vrchol s položkou P už v tablu je). V definici neurčujeme, v jakém pořadí provádět jednotlivé kroky, později ale specifikujeme konkrétní postup konstrukce (algoritmus), kterému budeme říkat *systematické tablo*.

Abychom získali důkazový systém, zbývá definovat pojem *tablo důkazu* (a související pojmy). Připomeňme ještě jednou, že jde o důkaz sporem, tedy předpokládáme, že výrok neplatí, a najdeme spor(né tablo):

Definice 4.3.2 (Tablo důkaz)**.** *Tablo důkaz* výroku φ z teorie T je *sporné* tablo z teorie T s položkou Fφ v kořeni. Pokud existuje, je φ *(tablo) dokazatelný* z T, píšeme $T \vdash \varphi$. (Definujme také *tablo zamítnutí* jako sporné tablo s Tφ v kořeni. Pokud existuje, je φ *(tablo) zamítnutelný* z T, tj. platí $T \vdash \neg\varphi$.)

- Tablo je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je *sporná*, pokud obsahuje položky Tψ a Fψ pro nějaký výrok ψ, jinak je *bezesporná*.
- Tablo je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.

[4] Sjednocení proto, že v jednotlivých krocích přidáváme do tabla nové vrcholy, τ_i je tedy podstromem τ_{i+1}.



Obrázek 4.3: Tabla z Příkladu 4.3.3. Položky vycházející z axiomů jsou označeny modře.

- Větev je *dokončená*, pokud
  - je sporná, nebo
  - je každá její položka na této větvi *redukovaná* a zároveň obsahuje položku Tα pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je *redukovaná* na větvi V procházející touto položkou, pokud
  - je tvaru Tp resp. Fp pro nějakou výrokovou proměnnou $p \in \mathbb{P}$, nebo
  - při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V, tj. vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla.[5]

Příklad 4.3.3. Ukážeme si dva příklady. Tabla jsou znázorněná na Obrázku 4.3.3.

(a) Tablo důkaz výroku ψ z teorie $T = \{\varphi, \varphi \to \psi\}$, tj. $T \vdash \psi$ (kde φ, ψ jsou nějaké pevně dané výroky). Tomuto faktu se říká *Věta o dedukci*.

(b) Dokončené tablo pro výrok p_0 z teorie $T = \{p_{n+1} \to p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nejlevější větev je bezesporná dokončená. Obsahuje položky T$p_{i+1} \to p_i$ a Fp_i pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Shoduje se tedy s modelem $v = (0, 0, \dots)$, tj. $v : \mathbb{P} \to \{0, 1\}$ kde $v(p_i) = 0$ pro všechna i.

Cvičení 4.4. Vraťme se k tablům z Cvičení 4.1. Jde o tablo důkazy nebo zamítnutí (z teorie $T = \emptyset$)? Které položky na kterých větvích jsou redukované? Které větve jsou sporné, které jsou dokončené?

4.4 Konečnost a systematičnost důkazů

V této sekci dokážeme, že pokud existuje tablo důkaz, existuje vždy také *konečný* tablo důkaz. Představíme také algoritmus, kterým nějaký tablo důkaz můžeme vždy najít, pro důkaz tohoto faktu ale budeme potřebovat Věty o korektnosti a úplnosti z následující sekce. Prozatím ukážeme, že tento algoritmus nám umožní vždy sestrojit dokončené tablo.

[5] Byť podle konvence tento kořen nezapisujeme.

Všimněte si, že při redukci položky přidáváme do tabla pouze položky obsahující kratší výroky. Pokud tedy máme konečnou teorii, a neděláme zbytečné kroky (například nepřidáváme opakovaně tentýž axiom, nebo totéž atomické tablo), je snadné sestrojit dokončené tablo, které bude konečné.

Je-li teorie T nekonečná, musíme ale být opatrnější. Mohli bychom nekonečně dlouho konstruovat tablo, a přitom se nikdy nedostat k redukci určité položky, nebo nikdy nepoužít některý z axiomů. Definujeme tedy konkrétní algoritmus pro konstrukci tabla, výsledku budeme říkat *systematické tablo*. Myšlenka konstrukce je jednoduchá: střídáme krok redukce položky (zároveň na všech bezesporných větvích, které jí procházejí) a krokem použití axiomu. Položky procházíme po úrovních, a v rámci úrovně v pravolevém uspořádání. A axiomy teorie ve zvoleném očíslování.

Definice 4.4.1. Mějme položku R a (konečnou nebo nekonečnou[6]) teorii $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$. *Systematické tablo* z teorie T pro položku R je tablo $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové tablo s položkou R, a pro každé $i \geq 0$:

Je-li P nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející P, definujeme:

- τ_i' je tablo vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející P, a
- τ_{i+1} je tablo vzniklé z τ_i' připojením $\mathrm{T}\alpha_i$ na každou bezespornou větev τ_i', pokud $i \leq |T|$. Jinak (je-li T konečná a už jsme použili všechny axiomy) tento krok přeskočíme a definujeme $\tau_{i+1} = \tau_i'$.

Lemma 4.4.2. *Systematické tablo je dokončené.*

Důkaz. Ukážeme, že každá větev je dokončená. Sporné větve jsou dokončené. Bezesporné větve obsahují položky $\mathrm{T}\alpha_i$ (ty jsme připojili v i-tém kroku) a každá položka na nich je redukovaná. Vskutku, kdyby P byla neredukovaná na bezesporné větvi V, přišla by na ni v nějakém kroku řada, neboť v úrovních nad P a vlevo od P existuje jen konečně mnoho položek. (Používáme zjevného faktu, že každý prefix bezesporné větve je také bezesporná větev, tedy během konstrukce V nikdy není sporná.) □

Nyní se vraťme k otázce konečnosti důkazů:

Věta 4.4.3 (Konečnost sporu)**.** *Je-li $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ sporné tablo, potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že τ_n je sporné konečné tablo.*

Důkaz. Uvažme množinu S všech vrcholů stromu τ, které nad sebou (ve stromovém uspořádání) neobsahují spor, tj. dvojici položek $\mathrm{T}\psi$, $\mathrm{F}\psi$.

Kdyby množina S byla nekonečná, podle Königova lemmatu použitého na podstrom τ na množině S bychom měli nekonečnou, bezespornou větev v S. To by ale znamenalo, že máme i bezespornou větev v τ, což je ve sporu s tím, že τ je sporné. (Podrobněji: Větev na S by byla podvětví nějaké větve V v τ, která je sporná, tj. obsahuje nějakou (konkrétní) spornou dvojici položek, která ale existuje už v nějakém konečném prefixu V.)

Množina S je tedy konečná. To znamená, že existuje $d \in \mathbb{N}$ takové, že celá S leží v hloubce nejvýše d. Každý vrchol na úrovni $d+1$ má tedy nad sebou spor. Zvolme n tak, že τ_n už obsahuje všechny vrcholy τ z prvních $d+1$ úrovní: každá větev τ_n je tedy sporná. □

[6] Připomeňme, že T je spočetná, neboť jazyk je (v celé kapitole) spočetný.

Důsledek 4.4.4. *Pokud při konstrukci tabla nikdy neprodlužujeme sporné větve, např. pro systematické tablo, potom sporné tablo je konečné.*

Důkaz. Použijeme Větu 4.4.3, máme $\tau = \tau_n$ neboť sporné tablo už neměníme. □

Důsledek 4.4.5 (Konečnost důkazů)**.** *Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i* konečný *tablo důkaz φ z T.*

Důkaz. Snadno plyne z Důsledku 4.4.4: stačí při konstrukci τ ignorovat kroky, které by prodloužily spornou větev. □

Vyslovíme zde také následující důsledek. Dokážeme ho ale až v příští sekci.

Důsledek 4.4.6 (Systematičnost důkazů)**.** *Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem φ z T.*

K důkazu budeme potřebovat dvě fakta: pokud je φ dokazatelná z T, potom v T platí (Věta o korektnosti), tj. nemůže existovat protipříklad. A dále pokud by systematické tablo mělo bezespornou větev, znamenalo by to, že existuje protipříklad (to je klíčem k Větě o úplnosti).

4.5 Korektnost a úplnost

V této sekci dokážeme, že je tablo metoda *korektní* a *úplný* důkazový systém, tj. že $T \vdash \varphi$ platí právě když $T \models \varphi$.

4.5.1 Věta o korektnosti

Řekneme, model v se *shoduje* s položkou P, pokud $P = \mathrm{T}\varphi$ a $v \models \varphi$, nebo $P = \mathrm{F}\varphi$ a $v \not\models \varphi$. Dále v se shoduje s větví V, pokud se shoduje s každou položkou na této větvi.

Jak už jsme zmínili, design atomických tabel zaručuje, že shoduje-li se model s položkou v kořeni tabla, shoduje se s některou větví. Není těžké indukcí podle konstrukce tabla ukázat následující lemma:

Lemma 4.5.1. *Shoduje-li se model teorie T s položkou v kořeni tabla z teorie T, potom se shoduje s některou větví.*

Důkaz. Mějme tablo $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ z teorie T a model $v \in \mathrm{M}(T)$ shodující se s kořenem τ, tedy s (jednoprvkovou) větví V_0 v (jednoprvkovém) τ_0.

Indukcí podle i (podle kroků v při konstrukci tabla) najdeme posloupnost $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots$ takovou, že V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem v, a V_{i+1} je prodloužením V_i. Požadovaná větev tabla τ je potom $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$.

- Pokud τ_{i+1} vzniklo z τ_i bez prodloužení větve V_i, definujeme $V_{i+1} = V_i$.
- Pokud τ_{i+1} vzniklo z τ_i připojením položky $\mathrm{T}\alpha$ (pro nějaký axiom $\alpha \in T$) na konec větve V_i, definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev. Protože v je model T, platí v něm axiom α, tedy shoduje se i s novou položkou $\mathrm{T}\alpha$.

- Nechť τ_{i+1} vzniklo z τ_i připojením atomického tabla pro nějakou položku P na konec větve V_i. Protože se model v shoduje s položkou P (která leží na větvi V_i), shoduje se i s kořenem připojeného atomického tabla, a proto se shoduje i s některou z jeho větví. (Tuto vlastnost snadno ověříme pro všechna atomická tabla.) Definujeme V_{i+1} jako prodloužení V_i o tuto větev atomického tabla.[7]

□

Nyní už můžeme dokázat Větu o korektnosti. Zkráceně řečeno, pokud by existoval důkaz a zároveň protipříklad, protipříklad by se musel shodovat s některou větví důkazu, ty jsou ale všechny sporné.

Věta 4.5.2 (O korektnosti)**.** *Je-li výrok φ tablo dokazatelný z teorie T, potom je φ pravdivý v T, tj. $T \vdash \varphi \;\Rightarrow\; T \models \varphi$.*

Důkaz. Dokážeme sporem. Předpokládejme, že φ v T neplatí, tj. existuje protipříklad: model $v \in \mathrm{M}(T)$, ve kterém φ neplatí.

Protože je φ dokazatelná z T, existuje tablo důkaz φ z T, což je sporné tablo z T s položkou Fφ v kořeni. Model v se shoduje s položkou Fφ, tedy podle Lemmatu 4.5.1 se shoduje s nějakou větví V. Všechny větve jsou ale sporné, včetně V. Takže V obsahuje položky Tψ a Fψ (pro nějaký výrok ψ), a model v se s těmito položkami shoduje. Máme tedy $v \models \psi$ a zároveň $v \not\models \psi$, což je spor.

□

4.5.2 Věta o úplnosti

Ukážeme, že *bezesporná* větev v *dokončeném* tablo důkazu poskytuje protipříklad: model teorie T, který se shoduje s položkou Fφ v kořeni tabla, tj. neplatí v něm φ. Takových modelů může být více, definujeme proto jeden konkrétní:

Definice 4.5.3 (Kanonický model)**.** Je-li V bezesporná větev dokončeného tabla, potom *kanonický model* pro V je model definovaný předpisem (pro $p \in \mathbb{P}$):

$$v(p) = \begin{cases} 1 \text{ pokud se na } V \text{ vyskytuje položka T}p, \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

Lemma 4.5.4. *Kanonický model pro (bezespornou dokončenou) větev V se shoduje s V.*

Důkaz. Ukážeme, že kanonický model v se shoduje se všemi položkami P na větvi V, a to indukcí podle struktury výroku v položce.[8] Nejprve základ indukce:

- Je-li $P = \mathrm{T}p$ pro nějaký prvovýrok $p \in \mathbb{P}$, máme podle definice $v(p) = 1$; v se s P shoduje.
- Je-li $P = \mathrm{F}p$, potom se na větvi V nemůže vyskytovat položka Tp, jinak by V byla sporná. Podle definice máme $v(p) = 0$ a v se s P opět shoduje.

Nyní indukční krok. Rozebereme dva případy, ostatní se dokáží obdobně.

[7] Resp. o libovolnou takovou větev: model v se může shodovat s více větvemi atomického tabla.
[8] Připomeňme, že to znamená indukci podle hloubky stromu výroku.

- Nechť $P = \mathrm{T}\varphi \wedge \psi$. Protože je V dokončená větev, je na ní položka P redukovaná. To znamená, že se na V vyskytují i položky $\mathrm{T}\varphi$ a $\mathrm{T}\psi$. Podle indukčního předpokladu se s nimi model v shoduje, tedy $v \models \varphi$ a $v \models \psi$. Takže platí i $v \models \varphi \wedge \psi$ a v se shoduje s P.
- Nechť $P = \mathrm{F}\varphi \wedge \psi$. Protože je P na V redukovaná, vyskytuje se na V položka $\mathrm{F}\varphi$ nebo položka $\mathrm{F}\psi$. Platí tedy $v \not\models \varphi$ nebo $v \not\models \psi$, z čehož plyne $v \not\models \varphi \wedge \psi$ a v se shoduje s P.

□

Věta 4.5.5 (O úplnosti)**.** *Je-li výrok φ pravdivý v teorii T, potom je tablo dokazatelný z T, tj. $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash \varphi$.*

Důkaz. Ukážeme, že libovolné *dokončené* (tedy např. i *systematické*) tablo z T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni je nutně sporné. Důkaz provedeme sporem: kdyby takové tablo nebylo sporné, existovala by v něm bezesporná (dokončená) větev V. Uvažme kanonický model v pro tuto větev. Protože je V dokončená, obsahuje $\mathrm{T}\alpha$ pro všechny axiomy $\alpha \in T$. Model v se podle Lemmatu 4.5.4 shoduje se všemi položkami na V, splňuje tedy všechny axiomy a máme $v \models T$. Protože se ale v shoduje i s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni, máme $v \not\models \psi$, což znamenám, že $T \not\models \psi$, spor. Tablo tedy muselo být sporné, tj. být tablo důkazem φ z T. □

Důkaz Důsledku 4.4.6. Z předchozího důkazu také dostáváme 'systematičnost důkazů', tj. že důkaz můžeme vždy hledat konstrukcí systematického tabla: Pokud $T \models \varphi$, tak je i systematické tablo pro položku $\mathrm{F}\varphi$ nutně sporné, a je tedy tablo důkazem φ z T. □

Cvičení 4.5. Ověřte zbývající případy v důkazu Lemmatu 4.5.4.

Cvičení 4.6. Popište, jak vypadají *všechny* modely shodující se s danou bezespornou dokončenou větví.

Cvičení 4.7. Navrhněte postup, kterým můžeme za použití tablo metody najít všechny modely dané teorie T.

4.6 Důsledky korektnosti a úplnosti

Věty o korektnosti a úplnosti dohromady říkají, že *dokazatelnost* je totéž, co *platnost*. To nám umožňuje zformulovat syntaktické analogie sémantických pojmů a vlastností.

Analogií *důsledků* jsou *teorémy* teorie T:

$$\mathrm{Thm}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \vdash \varphi\}$$

Důsledek 4.6.1 (Dokazatelnost = platnost)**.** *Pro libovolnou teorii T a výroky φ, ψ platí:*

- *$T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$*
- $\mathrm{Thm}_{\mathbb{P}}(T) = \mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$

Důkaz. Plyne okamžitě z Věty o korektnosti a z Věty o úplnosti. □

Ve všech definicích a větách můžeme tedy nahradit pojem '*platnost*' pojmem '*dokazatelnost*' (tj. symbol '$\models$' symbolem '$\vdash$') a pojem '*důsledek*' pojmem '*teorém*'. Například:

- Teorie je *sporná*, jestliže je v ní dokazatelný spor (tj. $T \vdash \bot$).

- Teorie je *kompletní*, jestliže pro každý výrok φ je buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \nvdash \varphi$ (ale ne obojí, jinak by byla sporná).

Uveďme ještě jeden snadný důsledek:

Věta 4.6.2 (O dedukci)**.** *Pro teorii T a výroky φ, ψ platí: $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \to \psi$.*

Důkaz. Stačí dokázat $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \to \psi$, což je snadné. □

Cvičení 4.8. Dokažte Větu o dedukci přímo, pomocí transformace tablo důkazů.

4.7 Věta o kompaktnosti

Důležitým důsledkem vět o korektnosti a úplnosti je také tzv. *Věta o kompaktnosti*.[9] Tento princip umožňuje převádět tvrzení o nekonečných objektech/procesech na tvrzení o (všech) jejich konečných částech.

Věta 4.7.1 (O kompaktnosti)**.** *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

Důkaz. Každý model teorie T je zjevně modelem každé její části. Druhou implikaci dokážeme nepřímým důkazem: Předpokládejme, že T nemá model, tj. je sporná, a najděme konečnou část $T' \subseteq T$, která je také sporná.

Protože je T sporná, platí $T \vdash \bot$ (zde potřebujeme Větu o úplnosti). Podle Důsledku 4.4.5 potom existuje *konečný* tablo důkaz τ výroku $\bot$ z T. Konstrukce tohoto důkazu má jen konečně mnoho kroků, použili jsme tedy jen konečně mnoho axiomů z T. Definujeme-li $T' = \{\alpha \in T \mid \mathrm{T}\alpha \text{ je položka v tablu } \tau\}$, potom τ je také tablo důkaz sporu z teorie T'. Teorie T' je tedy sporná konečná část T. □

4.7.1 Aplikace kompaktnosti

Následující jednoduchou aplikaci Věty o kompaktnosti můžete chápat jako šablonu, kterou následuje i mnoho dalších, složitějších aplikací této věty.

Důsledek 4.7.2. *Spočetně nekonečný graf je bipartitní, právě když je každý jeho konečný podgraf bipartitní.*

Důkaz. Každý podgraf bipartitního grafu je zjevně také bipartitní. Ukažme opačnou implikaci. Graf je bipartitní, právě když je obarvitelný 2 barvami. Označme barvy $0, 1$.

Sestrojíme výrokovou teorii T v jazyce $\mathbb{P} = \{p_v \mid v \in V(G)\}$, kde hodnota výrokové proměnné p_v reprezentuje barvu vrcholu v.

$$T = \{p_u \to \neg p_v \mid \{u, v\} \in E(G)\}$$

Zřejmě platí, že G je bipartitní, právě když T má model. Podle Věty o kompaktnosti stačí ukázat, že každá konečná část T má model. Vezměme tedy konečnou $T' \subseteq T$. Buď G' podgraf G indukovaný na množině vrcholů, o kterých se zmiňuje teorie T', tj. $V(G') = \{v \in V(G) \mid p_v \in \mathrm{Var}(T')\}$. Protože je T' konečná, je G' také konečný, a podle předpokladu je 2-obarvitelný. Libovolné 2-obarvení $V(G')$ ale určuje model teorie T'. □

[9] Slovo *kompaktnost* pochází z kompaktních (tj. omezených a uzavřených) množin v Euklidovských prostorech, ve kterých lze z každé posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost. Můžete si představit posloupnost zvětšujících se konečných částí 'konvergující' k nekonečnému celku.

Základem této techniky je popis požadované vlastnosti nekonečného objektu pomocí (nekonečné) výrokové teorie. Dále si všimněte, jak z konečné části teorie sestrojíme konečný podobjekt mající danou vlastnost (v našem případě konečný podgraf, který je bipartitní).

Cvičení 4.9. Zobecněte Důsledek 4.7.2 pro více barev, tj. ukažte, že spočetně nekonečný graf je k-obarvitelný, právě když je každý jeho konečný podgraf k-obarvitelný. (Viz Sekce 1.1.7.)

Cvičení 4.10. Ukažte, že každé částečné uspořádání na spočetné množině lze rozšířit na lineární uspořádání.

Cvičení 4.11. Vyslovte a dokažte 'spočetně nekonečnou' analogii Hallovy věty.

4.8 Hilbertovský kalkulus

Na závěr kapitoly o tablo metodě si pro srovnání ukážeme jiný dokazovací systém, tzv. *Hilbertovský deduktivní systém* neboli *Hilbertovský kalkulus*. Jde o nejstarší dokazovací systém, modelovaný podle matematických důkazů. Jak uvidíme na příkladě, dokazování je v něm poměrně pracné, hodí se tedy spíše pro teoretické účely. Jde také o korektní a úplný dokazovací systém (to ale necháme bez důkazu).

[TODO]

Kapitola 5

Rezoluční metoda

V této kapitole představíme jiný důkazový systém, vhodnější pro praktické aplikace, tzv. *rezoluční metodu*. Tato metoda je základem např. *logického programování* nebo systémů *automatického dokazování* a *softwarové verifikace*. V této kapitole se omezíme na rezoluční metodu ve výrokové logice, ale v pozdější kapitole si ukážeme koncept *unifikace*, který umožňuje hledat rezoluční důkazy v logice predikátové.

Rezoluční metoda pracuje s výroky v *konjunktivní normální formě (CNF)*. Připomeňme, že každý výrok lze převést do CNF. Tento převod je v nejhorším případě v exponenciálním čase (dokonce existují výroky jejichž nejkratší CNF ekvivalent je exponenciálně delší), v praxi to ale není problém.

Podobně jako tablo metoda je založena na důkazu sporem, tj. přidáme k teorii, ve které dokazujeme, *negaci* výroku, který chceme dokázat (obojí převedené do CNF), a ukážeme, že to vede ke sporu.

K hledání sporu používá rezoluční metoda jediné inferenční pravidlo, tzv. *rezoluční pravidlo*. To je speciálním případem *pravidla řezu*, které říká: *"z výroků $\varphi \vee \psi$ a $\neg\varphi \vee \chi$ lze odvodit výrok $\psi \vee \chi$,"* píšeme:

$$\frac{\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

V *rezolučním pravidle*, které si ukážeme za chvíli, bude φ *literál*, a ψ, χ budou klauzule.

Cvičení 5.1. Rozmyslete si, že pravidlo řezu je *korektní*. (Co to znamená, a proč to platí?)

5.1 Množinová reprezentace

Nejprve představíme úspornější zápis CNF výroků, tzv. *množinový zápis*. Bylo by totiž nepraktické zapisovat výroky včetně závorek a logických symbolů.

- Připomeňme, že *Literál* ℓ je prvovýrok nebo negace prvovýroku a že $\bar{\ell}$ označuje *opačný literál* k ℓ.
- *Klauzule* C je konečná množina literálů. *Prázdnou klauzuli*, která není nikdy splněna,[1] označíme $\square$.

[1] Reprezentuje disjunkci prázdné množiny literálů, žádný z disjunktů tedy není splněný.

- *(CNF) formule* S je (konečná, nebo i nekonečná) množina klauzulí. *Prázdná formule* $\emptyset$ je vždy splněna.[2]

Poznámka 5.1.1. Všimněte si, že *formule* může být i *nekonečná* množina klauzulí. Pokud tedy převádíme nekonečnou výrokovou teorii do CNF, zapíšeme v množinové reprezentaci všech nekonečně mnoho klauzulí jako prvky jediné formule (množiny). V praktických aplikacích je samozřejmě formule (téměř vždy) konečná.

V množinové reprezentaci odpovídají modely množinám literálů, které obsahují pro každou výrokovou proměnnou p právě jeden z literálů $p, \neg p$:

- *(Částečné) ohodnocení* $\mathcal{V}$ je libovolná množina literálů, která je *konzistentní*, tj. neobsahuje dvojici opačných literálů.
- Ohodnocení je *úplné*, pokud obsahuje pozitivní nebo negativní literál pro každou výrokovou proměnnou.
- Ohodnocení $\mathcal{V}$ *splňuje* formuli S, píšeme $\mathcal{V} \models S$, pokud $\mathcal{V}$ obsahuje nějaký literál z každé klauzule v S, tj.:
$$\mathcal{V} \cap C \neq \emptyset \text{ pro každou } C \in S$$

Příklad 5.1.2. Výrok $\varphi = (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge p_4$ zapíšeme v množinové reprezentaci takto:

$$S = \{\{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_1, \neg p_2, p_3\}, \{\neg p_3, \neg p_4\}, \{\neg p_4, \neg p_5\}, \{p_4\}\}$$

Ohodnocení $\mathcal{V} = \{\neg p_1, \neg p_3, p_4, \neg p_5\}$ splňuje S, píšeme $\mathcal{V} \models S$. Není úplné, ale můžeme ho rozšířit libovolným literálem pro p_2: platí $\mathcal{V} \cup \{p_2\} \models S$ i $\mathcal{V} \cup \{\neg p_2\} \models S$. Tato dvě úplná ohodnocení odpovídají modelům $(0, 1, 0, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.

5.2 Rezoluční důkaz

Nejprve definujeme jeden krok inference v rezolučním důkazu, tzv. *rezoluční pravidlo*, které aplikujeme na dvojici klauzulí; jeho výsledkem je klauzule, které říkáme *rezolventa*, a která je logickým důsledkem původní dvojice klauzulí:

Definice 5.2.1 (Rezoluční pravidlo)**.** Mějme klauzule C_1 a C_2 a literál ℓ takový, že $\ell \in C_1$ a $\bar{\ell} \in C_2$. Potom *rezolventa* klauzulí C_1 a C_2 *přes literál* ℓ je klauzule

$$C = (C_1 \setminus \{\ell\}) \cup (C_2 \setminus \{\bar{\ell}\}).$$

Z první klauzule tedy odstraníme literál ℓ a z druhé literál $\bar{\ell}$ (které tam musely být!) a všechny zbylé literály sjednotíme do výsledné rezolventy. S pomocí symbolu $\dot\cup$ pro disjunktní sjednocení bychom také mohli psát:

$$C_1' \cup C_2' \text{ je rezolventou klauzulí } C_1' \dot\cup \{\ell\} \text{ a } C_2' \dot\cup \{\bar{\ell}\}$$

Příklad 5.2.2. Z klauzulí $C_1 = \{\neg q, r\}$ a $C_2 = \{\neg p, \neg q, \neg r\}$ lze odvodit rezolventu $\{\neg p, \neg q\}$ přes literál r. Z klauzulí $\{p, q\}$ a $\{\neg p, \neg q\}$ lze odvodit $\{p, \neg p\}$ přes literál q nebo $\{q, \neg q\}$ přes literál p (obojí jsou ale tautologie).[3]

[2] Reprezentuje konjunkci prázdné množiny klauzulí, všechny klauzule v S jsou tedy splněny.

[3] Nelze ale odvodit $\square$ 'rezolucí přes p a q najednou' (což je častá chyba). Všimněte si, že $\{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ není nesplnitelná, např. $(1, 0)$ je modelem.

Pozorování 5.2.3 (Korektnost rezolučního pravidla)**.** *Rezoluční pravidlo je korektní, tj. pro libovolné ohodnocení $\mathcal{V}$ platí:*

$$\textit{Pokud } \mathcal{V} \models C_1 \textit{ a } \mathcal{V} \models C_2\textit{, potom } \mathcal{V} \models C.$$

Rezoluční důkaz definujeme podobně jako v Hilbertově kalkulu jako konečnou posloupnost klauzulí, kde je zaručena platnost každé klauzule v této posloupnosti: v každém kroku můžeme buď napsat 'axiom' (klauzuli z S), nebo rezolventu nějakých dvou už napsaných klauzulí.

Definice 5.2.4 (Rezoluční důkaz)**.** *Rezoluční důkaz (odvození)* klauzule C z formule S je *konečná* posloupnost klauzulí $C_0, C_1, \ldots, C_n = C$ taková, že pro každé i buď $C_i \in S$ nebo C_i je rezolventou nějakých C_j, C_k kde $j < i$ a $k < i$.

Pokud rezoluční důkaz existuje, říkáme, že C je *rezolucí dokazatelná* z S, a píšeme $S \vdash_R C$. *(Rezoluční) zamítnutí* formule S je rezoluční důkaz $\square$ z S, v tom případě je S *(rezolucí) zamítnutelná.*

Příklad 5.2.5. Formule $S = \{\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\}\}$ je zamítnutelná, jedno z možných zamítnutí je:

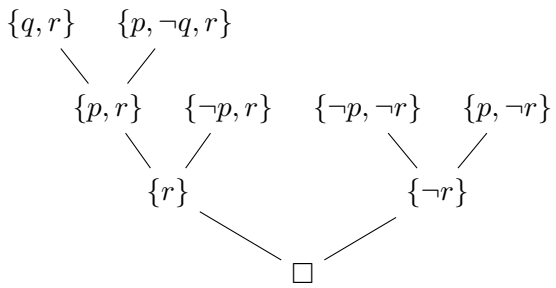
$$\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{p, r\}, \{\neg p, r\}, \{r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, \neg r\}, \{\neg r\}, \square$$

Rezoluční důkaz má přirozenou stromovou strukturu: v listech jsou axiomy a vnitřní vrcholy představují jednotlivé rezoluční kroky.

Definice 5.2.6 (Rezoluční strom)**.** Rezoluční strom klauzule C z formule S je *konečný* binární strom s vrcholy označenými klauzulemi, kde

- v kořeni je C,
- v listech jsou klauzule z S,
- v každém vnitřním vrcholu je rezolventa klauzulí ze synů tohoto vrcholu.

Příklad 5.2.7. Rezoluční strom prázdné klauzule $\square$ z formule S z Příkladu 5.2.5 je:



Je snadné ukázat následující pozorování, indukcí podle hloubky stromu a délky rezolučního důkazu:

Pozorování 5.2.8. *Klauzule C má rezoluční strom z formule S, právě když $S \vdash_R C$.*

Každému rezolučnímu důkazu odpovídá jednoznačný rezoluční strom. Naopak, z jednoho rezolučního stromu můžeme získat více rezolučních důkazů: jsou dané libovolnou procházka po vrcholech stromu, při které navštívíme vnitřní vrchol až poté, co jsme navštívili oba jeho syny.

Zaveďme ještě jeden pojem, tzv. *rezoluční uzávěr*, který obsahuje všechny klauzule, které se můžeme 'naučit' rezolucí z dané formule. Jde spíše o užitečný teoretický pohled na rezoluci, v aplikacích by bylo nepraktické konstruovat celý rezoluční uzávěr

Definice 5.2.9 (Rezoluční uzávěr)**.** *Rezoluční uzávěr* $\mathcal{R}(S)$ formule S je definován induktivně jako nejmenší množina klauzulí splňující:

- $C \in \mathcal{R}(S)$ pro všechna $C \in S$,
- jsou-li $C_1, C_2 \in \mathcal{R}(S)$ a je-li C rezolventa C_1, C_2, potom také $C \in \mathcal{R}(S)$.

Příklad 5.2.10. Spočtěme rezoluční uzávěr formule S z Příkladu 5.2.5. Klauzule z S jsou modře, další klauzule získáváme postupným rezolvováním (první s první, druhá s první, druhá s druhou atd., přes všechny možné literály):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(S) = \{&\{p, \neg q, r\}, \{p, \neg r\}, \{\neg p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\},\\ &\{p, \neg q\}, \{\neg q, r\}, \{r, \neg r\}, \{p, \neg p\}, \{r, s\}, \{p, r\}, \{p, q\}, \{r\}, \{p\}\}\end{aligned}$$

5.3 Korektnost a úplnost rezoluční metody

Rezoluční metoda je také korektní i úplná.

5.3.1 Korektnost rezoluce

Korektnost dokážeme snadno indukcí podle délky rezolučního důkazu.

Věta 5.3.1 (O korektnosti rezoluce)**.** *Je-li formule S rezolucí zamítnutelná, potom je S nesplnitelná.*

Důkaz. Nechť $S \vdash_R \square$ a vezměme nějaký rezoluční důkaz $C_0, C_1, \ldots, C_n = \square$. Předpokládejme pro spor, že S je splnitelná, tedy $\mathcal{V} \models S$ pro nějaké ohodnocení $\mathcal{V}$. Indukcí podle i dokážeme, že $\mathcal{V} \models C_i$. Pro $i = 0$ to platí, neboť $C_0 \in S$. Pro $i > 0$ máme dva případy:

- $C_i \in S$, v tom případě $\mathcal{V} \models C_i$ plyne z předpokladu, že $\mathcal{V} \models S$,
- C_i je rezolventou C_j, C_k, kde $j, k < i$: z indukčního předpokladu víme $\mathcal{V} \models C_j$ a $\mathcal{V} \models C_k$, $\mathcal{V} \models C_i$ plyne z korektnosti rezolučního pravidla.

(Alternativně bychom mohli v důkazu postupovat indukcí podle hloubky rezolučního stromu.) □

5.3.2 Strom dosazení

V důkazu úplnosti budeme potřebovat zkonstruovat rezoluční strom, jeho konstrukce je založena na tzv. *stromu dosazení*. *Dosazením* literálu do formule myslíme zjednodušení formule za předpokladu, že daný literál platí. Dosazení jsme už potkali v Sekci 3.3 při *jednotkové propagaci*: odstraníme klauzule obsahující tento literál, a z ostatních klauzulí odstraníme literál opačný.

Definice 5.3.2 (Dosazení literálu)**.** Je-li S formule a ℓ literál, potom *dosazením* ℓ do S myslíme formuli:

$$S^\ell = \{C \setminus \{\bar{\ell}\} \mid l \notin C \in S\}$$

Pozorování 5.3.3. *Zde shrneme několik jednoduchých faktů o dosazení:*

- S^ℓ *je výsledkem* jednotkové propagace *aplikované na* $S \cup \{\{\ell\}\}$.
- S^ℓ *neobsahuje v žádné klauzuli literál* ℓ *ani* $\bar{\ell}$ *(vůbec tedy neobsahuje prvovýrok z* ℓ*)*
- *Pokud* S *neobsahovala literál* ℓ *ani* $\bar{\ell}$*, potom* $S^\ell = S$.
- *Pokud* S *obsahovala jednotkovou klauzuli* $\{\bar{\ell}\}$*, potom* $\square \in S^\ell$*, tedy* S^ℓ *je sporná.*

Klíčovou vlastnost dosazení vyjadřuje následující lemma:

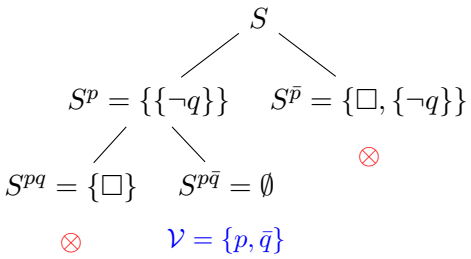
Lemma 5.3.4. *S je splnitelná, právě když je splnitelná S^ℓ nebo $S^{\bar{\ell}}$.*

Důkaz. Mějme ohodnocení $\mathcal{V} \models S$, to nemůže obsahovat ℓ i $\bar{\ell}$ (musí být konzistentní); bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\bar{\ell} \notin \mathcal{V}$, a ukažme, že $\mathcal{V} \models S^\ell$. Vezměme libovolnou klauzuli v S^ℓ. Ta je tvaru $C \setminus \{\bar{\ell}\}$ pro klauzuli $C \in S$ (neobsahující literál ℓ). Víme, že $\mathcal{V} \models C$, protože ale $\mathcal{V}$ neobsahuje $\bar{\ell}$, muselo ohodnocení $\mathcal{V}$ splnit nějaký jiný literál C, takže platí i $\mathcal{V} \models C \setminus \{\bar{\ell}\}$.

Naopak, předpokládejme že existuje ohodnocení $\mathcal{V}$ splňující S^ℓ (opět bez újmy na obecnosti). Protože se $\bar{\ell}$ (ani ℓ) nevyskytuje v S^ℓ, platí také $\mathcal{V} \setminus \{\bar{\ell}\} \models S^\ell$. Ohodnocení $\mathcal{V}' = (\mathcal{V} \setminus \{\bar{\ell}\}) \cup \{\ell\}$ potom splňuje každou klauzuli $C \in S$: pokud $\ell \in C$, potom $\ell \in C \cap \mathcal{V}'$ a $C \cap \mathcal{V}' \neq \emptyset$, jinak $C \cap \mathcal{V}' = (C \setminus \{\bar{\ell}\}) \cap \mathcal{V}' \neq \emptyset$ neboť $\mathcal{V} \setminus \{\bar{\ell}\} \models C \setminus \{\bar{\ell}\} \in S^\ell$. Ověřili jsme, že $\mathcal{V}' \models S$, tedy S je splnitelná. □

Zda je daná *konečná* formule splnitelná bychom tedy mohli zjišťovat rekurzivně (metodou *rozděl a panuj*), dosazením obou možných literálů pro (nějakou, třeba první) výrokovou proměnnou vyskytující se ve formuli, a rozvětvením výpočtu. V zásadě jde o podobný princip jako v algoritmu DPLL (viz Sekce 3.4). Výslednému stromu říkáme *strom dosazení*.

Příklad 5.3.5. Ilustrujeme si tento koncept na příkladě, zkonstruujeme strom dosazení pro formuli $S = \{\{p\}, \{\neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:



Jakmile větev obsahuje prázdnou klauzuli $\square$, je nesplnitelná a nemusíme v ní pokračovat. V listech jsou buď nesplnitelné teorie, nebo prázdná teorie: v tom případě z posloupnosti dosazení získáme splňující ohodnocení.

Z konstrukce je vidět, jak postupovat v případě konečné formule. Strom dosazení ale dává smysl, a následující důsledek platí, i pro nekonečné formule:

Důsledek 5.3.6. *Formule S (nad spočetným jazykem) je nesplnitelná, právě když každá větev stromu dosazení obsahuje prázdnou klauzuli $\square$.*

Důkaz. Pro konečnou formuli S plyne z diskuze výše, můžeme snadno dokázat indukcí podle velikosti $\mathrm{Var}(S)$:

- Je-li $|\mathrm{Var}(S)| = 0$, máme $S = \emptyset$ nebo $S = \{\square\}$, v obou případech je strom dosazení jednoprvkový a tvrzení platí.
- V indukčním kroku vybereme libovolný literál $\ell \in \mathrm{Var}(S)$ a aplikujeme Lemma 5.3.4.

Je-li S nekonečná a splnitelná, potom má splňující ohodnocení, to se 'shoduje' s odpovídající (nekonečnou) větví ve stromu dosazení. Je-li nekonečná a nesplnitelná, potom podle Věty o kompaktnosti existuje konečná část $S' \subseteq S$, která je také nesplnitelná. Po dosazení pro všechny proměnné z $\mathrm{Var}(S')$ bude v každé větvi $\square$, to nastane po konečně mnoha krocích. $\square$

5.3.3 Úplnost rezoluce

Věta 5.3.7 (O úplnosti rezoluce)**.** *Je-li S nesplnitelná, je rezolucí zamítnutelná (tj. $S \vdash_R \square$).*

Důkaz. Je-li S nekonečná, má z Věty o kompaktnosti konečnou nesplnitelnou část S'. Rezoluční zamítnutí S' je také rezolučním zamítnutím S. Předpokládejme tedy, že S je konečná.

Důkaz provedeme indukcí podle počtu proměnných v S. Je-li $|\mathrm{Var}(S)| = 0$, jediná možná nesplnitelná formule bez proměnných je $S = \{\emptyset\}$ a máme jednokrokový důkaz $S \vdash_R \square$. Jinak vyberme $p \in \mathrm{Var}(S)$. Podle Lemmatu 5.3.4 jsou S^p i $S^{\bar{p}}$ nesplnitelné. Mají o jednu proměnnou méně, tedy podle indukčního předpokladu existují rezoluční stromy T pro $S^p \vdash_R \square$ a T' pro $S^{\bar{p}} \vdash_R \square$.

Ukážeme, jak ze stromu T vyrobit rezoluční strom $\widehat{T}$ pro $S \vdash_R p$. Analogicky vyrobíme $\widehat{T}'$ pro $S \vdash_R \neg p$ a potom už snadno vyrobíme rezoluční strom pro $S \vdash_R \square$: ke kořeni $\square$ připojíme kořeny stromů $\widehat{T}$ a $\widehat{T}'$ jako levého a pravého syna (tj. v posledním kroku rezolučního důkazu získáme $\square$ rezolucí z $\{p\}$ a $\{\neg p\}$).

Zbývá ukázat konstrukci stromu $\widehat{T}$: množina vrcholů i uspořádání jsou stejné, změníme jen některé klauzule ve vrcholech, a to přidáním literálu $\neg p$. Na každém listu stromu T je nějaká klauzule $C \in S^p$, a buď je $C \in S$, nebo není, ale $C \cup \{\neg p\} \in S$. V prvním případě necháme label stejný. Ve druhém případě přidáme přidáme do C *a do všech klauzulí nad tímto listem* literál $\neg p$. V listech jsou nyní jen klauzule z S, v kořeni jsme $\square$ změnili na $\neg p$. A každý vnitřní vrchol je nadále rezolventou svých synů. $\square$

Cvičení 5.2. Důkaz Věty o úplnosti rezoluce dává návod, jak rekurzivně 'vypěstovat' rezoluční zamítnutí. Rozmyslete si jak a proveďte na nějakém příkladě nesplnitelné formule.

5.4 LI-rezoluce a Horn-SAT

Začneme jiným pohledem na rezoluční důkaz, tzv. *lineárním důkazem.*

5.4.1 Lineární důkaz

Rezoluční důkaz můžeme kromě rezolučního stromu zorganizovat také ve formě tzv. *lineárního důkazu*, kde v každém kroku máme jednu *centrální* klauzuli, kterou rezolvujeme s *bočním* ('side')

klauzulí, která je buď jednou z předchozích centrálních klauzulí, nebo axiomem z S. Rezolventa je potom novou centrální klauzulí.[4]

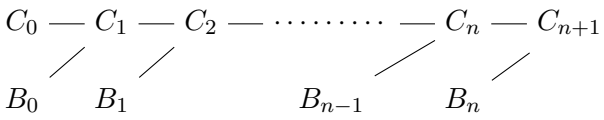
Definice 5.4.1 (Lineární důkaz)**.** *Lineární důkaz* (rezolucí) klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

kde C_i říkáme *centrální* klauzule, C_0 je *počáteční*, $C_{n+1} = C$ je *koncová*, B_i jsou *boční* klauzule, a platí:

- $C_0 \in S$, pro $i \leq n$ je C_{i+1} rezolventou C_i a B_i,
- $B_0 \in S$, pro $i \leq n$ je $B_i \in S$ nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$.

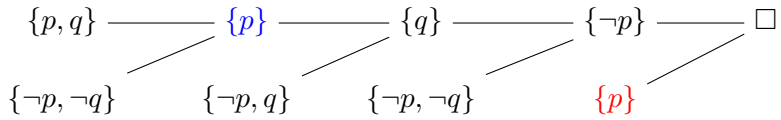
Lineární zamítnutí S je lineární důkaz $\square$ z S. Lineární důkaz můžeme znázornit takto:



Poznámka 5.4.2. C má lineární důkaz z S, právě když $S \vdash_R C$.

Z lineárního důkazu snadno vyrobíme rezoluční strom. Indukcí podle délky důkazu: základ indukce je zřejmý, a máme-li boční klauzuli B_i která není axiomem z S, potom $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$ a stačí připojit místo B_i rezoluční strom pro důkaz C_j z S. Opačnou implikaci si ukážeme jen na příkladě:

Příklad 5.4.3. Zkonstruujme lineární zamítnutí formule $S = \{\{p,\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ (tj. lineární důkaz $\square$ z S). Lineární důkaz může vypadat třeba takto:



Poslední boční klauzule $\{p\}$ (červeně) není z S, ale je rovna předchozí centrální klauzuli (modře).

Cvičení 5.3. Převeďte lineární důkaz z Příkladu 5.4.3 na rezoluční strom.

Cvičení 5.4. Dokažte podrobně obě implikace v Poznámce 5.4.2.

5.4.2 LI-rezoluce

V obecném lineárním důkazu může být každá následující boční klauzule buď axiom z S nebo jedna z předchozích centrálních klauzulí. Pokud zakážeme druhou možnost, budeme-li tedy požadovat, aby všechny boční klauzule byly z S, dostaneme tzv. *LI (linear-input)* rezoluci:

[4] Zatímco konstrukci rezolučního stromu lze snadno popsat rekurzivně, lineární důkaz lépe odpovídá procedurálnímu výpočtu. Jde jen o to, jak najít vhodnou boční klauzuli.

Definice 5.4.4 (LI-důkaz)**.** *LI-důkaz* (rezolucí) klauzule C z formule S je lineární důkaz

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C$$

ve kterém je každá boční klauzule B_i axiom z S. Pokud LI-důkaz existuje, říkáme, že je C *LI-dokazatelná* z S, a píšeme $S \vdash_{LI} C$. Pokud $S \vdash_{LI} \square$, je S *LI-zamítnutelná*.

Poznámka 5.4.5. LI-důkaz přímo dává rezoluční strom (všechny listy jsou axiomy), a to ve speciálním tvaru, kterému bychom mohli říkat 'chlupatá cesta'. A naopak, z rezolučního stromu ve tvaru chlupaté cesty okamžitě získáme LI-důkaz: vrcholy na cestě jsou centrální klauzule, chlupy jsou boční klauzule.

Zatímco lineární rezoluce je jen jiný pohled na obecný rezoluční důkaz, *LI-rezoluce* přináší zásadní omezení: ztrácíme *úplnost* (ne každá nesplnitelná formule má LI-zamítnutí). Na druhou stranu, LI-důkazy je jednodušší konstruovat.[5]

5.4.3 Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Jak si nyní ukážeme, LI-rezoluce je *úplná pro Hornovy formule*. A jak uvidíme v následující sekci, je základem interpreterů jazyka Prolog, který s Hornovými formulemi pracuje. Nejprve připomeňme terminologii týkající se hornovskosti a také programů, a to v množinové reprezentaci:

- *Hornova klauzule* je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál.
- *Hornova formule* je (konečná, nebo i nekonečná) množina Hornových klauzulí.
- *Fakt* je pozitivní jednotková (Hornova) klauzule, tj. $\{p\}$, kde p je výroková proměnná.
- *Pravidlo* je (Hornova) klauzule s právě jedním pozitivním a alespoň jedním negativním literálem.
- Pravidlům a faktům říkáme *programové klauzule*.
- *Cíl* je neprázdná (Hornova) klauzule bez pozitivního literálu.[6]

Bude se nám hodit následující jednoduché pozorování:

Pozorování 5.4.6. *Je-li Hornova formule S nesplnitelná a $\square \notin S$, potom obsahuje fakt i cíl.*

Důkaz. Neobsahuje-li fakt, můžeme ohodnotit všechny proměnné 0; neobsahuje-li cíl, ohodnotíme 1. □

Nyní vyslovíme a dokážeme Větu o úplnosti LI-rezoluce pro Hornovské formule. Důkaz dává také návod, jak LI-zamítnutí zkonstruovat, a to na základě průběhu jednotkové propagace. Tento postup ilustrujeme na příkladu níže, který můžete sledovat souběžně s čtením důkazu.

[5] V každém kroku máme k volbě jen klauzule z S, nikoliv předchozí dokázané centrální klauzule.
[6] Připomeňme, že dokazujeme *sporem*, tedy *cíl* je negací toho, co bychom chtěli dokázat.

Věta 5.4.7 (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule)**.** *Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná pro cíl G, potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G.*

Důkaz. Podobně jako ve Větě o úplnosti rezoluce můžeme díky Věte o kompaktnosti předpokládat, že T je konečná. Důkaz (konstrukci LI-zamítnutí) provedeme indukcí podle počtu proměnných v T.

Z Pozorování 5.4.6 plyne, že T obsahuje fakt $\{p\}$ pro nějakou výrokovou proměnnou p. Protože $T \cup \{G\}$ je nesplnitelná, je podle Lemmatu 5.3.4 nesplnitelná také $(T \cup \{G\})^p = T^p \cup \{G^p\}$, kde $G^p = G \setminus \{\neg p\}$.

Pokud $G^p = \square$, potom $G = \{\neg p\}$, $\square$ je rezolventa G a $\{p\} \in T$, a máme jednokrokové LI-zamítnutí T (to je báze indukce).

Jinak je formule T^p splnitelná (stejným ohodnocením jako T, neboť to musí obsahovat p kvůli faktu $\{p\}$, tedy neobsahuje $\neg p$) a má méně proměnných než T. Tedy podle indukčního předpokladu existuje LI-odvození $\square$ z $T^p \cup \{G^p\}$ začínající $G^p = G \setminus \{\neg p\}$.

Hledané LI-zamítnutí $T \cup \{G\}$ začínající G zkonstruujeme (podobně jako v důkazu Věty o úplnosti rezoluce) přidáním literálu $\neg p$ do všech listů, které už nejsou v $T \cup \{G\}$ (tedy vznikly odebráním $\neg p$). Tím získáme $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \neg p$, na závěr přidáme boční klauzuli $\{p\}$ a odvodíme $\square$. $\square$

Příklad 5.4.8. Mějme (splnitelnou, hornovskou) teorii T, kterou zapíšeme v množinové reprezentaci jako formuli $T = \{\{p, \neg r, \neg s\}, \{\neg q, r\}, \{q, \neg s\}, \{s\}\}$. Představte si, že chceme dokázat, že v teorii T platí $p \wedge q$.[7] V rezoluční metodě uvážíme cíl $G = \{\neg p, \neg q\}$ a ukážeme, že $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$. Nejprve provedeme jednotkovou propagaci:

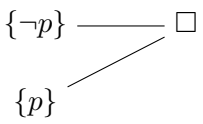
- $T = \{\{p, \neg r, \neg s\}, \{\neg q, r\}, \{q, \neg s\}, \{s\}\}$, $G = \{\neg p, \neg q\}$
- $T^s = \{\{p, \neg r\}, \{\neg q, r\}, \{q\}\}$, $G^s = \{\neg p, \neg q\}$
- $T^{sq} = \{\{p, \neg r\}, \{r\}\}$, $G^{sq} = \{\neg p\}$
- $T^{sqr} = \{\{p\}\}$, $G^{sqr} = \{\neg p\}$
- $T^{sqrp} = \emptyset$, $G^{sqrp} = \square$

Zpětným postupem sestrojíme rezoluční zamítnutí:

- $T^{sqrp}, G^{sqrp} \vdash_{LI} \square$:

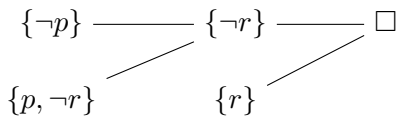
$$\square$$

- $T^{sqr}, G^{sqr} \vdash_{LI} \square$:

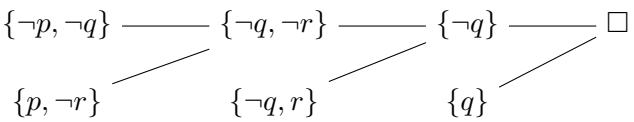


[7] Tj. v Prologu bychom položili ‘dotaz’ (‘query’): `?-p,q.`

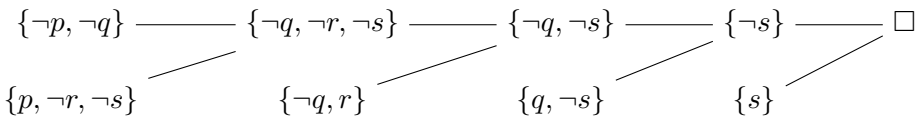
- $T^{sq}, G^{sq} \vdash_{LI} \square$:



- $T^{s}, G^{s} \vdash_{LI} \square$:



- $T, G \vdash_{LI} \square$



5.5 Rezoluce v Prologu

Ačkoliv skutečná síla Prologu vychází z tzv. *unifikace* a z rezoluce v predikátové logice, ukážeme si jak Prolog využívá rezoluční metodu na příkladě *výrokového* programu. Adaptace na predikáty bude později přímočará.

5.5.1 Program v Prologu

Program v Prologu je Hornova formule obsahující pouze *programové klauzule*, tj. *fakta* nebo *pravidla*. *Dotaz* je konjunkce faktů, negace dotazu je *cíl*.

Příklad 5.5.1. Jako příklad programu v Prologu využijeme teorii (formuli) T a dotaz $p \wedge q$ z Příkladu 5.4.8. Například klauzuli $\{p, \neg r, \neg s\}$, která je ekvivalentní $r \wedge s \to p$, zapíšeme v Prologu jako: `p:-r,s.`

```
p:-r,s.
r:-q.
q:-s.
s.
```

A programu položíme dotaz

```
?-p,q.
```

Důsledek 5.5.2. *Mějme program P a dotaz $Q = p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$, a označme $G = \{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\}$ (tj. $G \sim \neg Q$). Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- $P \models Q$,

- $P \cup \{G\}$ *je nesplnitelná,*
- $P \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$*, a existuje LI-zamítnutí začínající cílem* G*.*

Důkaz. Ekvivalence prvních dvou podmínek je důkaz sporem, ekvivalence druhé a třetí je Věta o úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule. □

5.5.2 SLD-rezoluce

[TODO]

Část II

Predikátová logika

Kapitola 6

Syntaxe a sémantika predikátové logiky

Kurzy logiky vesměs začínají výrokovou logikou, která je pro svou jednoduchost vhodnější k prvnímu seznámení. Plná síla logiky v informatice se ale projeví teprve s použitím logiky predikátové. Začněme neformálním úvodem, ve kterém ilustrujeme základní aspekty predikátové logiky. K formálnímu výkladu se vrátíme v následujících sekcích.

6.1 Úvod

Připomeňme, že ve výrokové logice jsme popisovali svět pomocí *výroků* složených z *prvovýroků*—odpovědí na zjišťovací (ano/ne) otázky o světě. V predikátové logice (prvního řádu)[1] jsou základním stavebním kamenem *proměnné* reprezentující *individua*—nedělitelné objekty z nějaké množiny: např. přirozená čísla, vrcholy grafu, nebo stavy mikroprocesoru.

Tato individua mohou mít určité vlastnosti a vzájemné vztahy, kterým říkáme *predikáty*, např. 'Leaf(x)' nebo '$Edge(x, y)$' mluvíme-li o grafu, nebo '$x \leq y$' v přirozených číslech. Kromě toho mohou individua vstupovat do funkcí, např. 'lowest_commot_ancestor(x, y)' v zakořeněném stromu, 'succ(x)' nebo '$x + y$' v přirozených číslech, a být *konstantami* se speciálním významem, např. 'root' v zakořeněném stromu, '0' v přirozených číslech.

Atomické formule popisují predikát (včetně predikátu *rovnosti* $=$) o proměnných nebo o *termech* ('výrazech' složených[2] z funkcí popř. konstant). A složitější tvrzení (*formule*) budujeme z atomických formulí pomocí logických spojek, a dvou *kvantifikátorů*:

- $\forall x$ "pro všechna individua (reprezentovaná proměnnou x)," a
- $\exists x$ "existuje individuum (reprezentované proměnnou x)".

Uveďme příklad: tvrzení *"Každý, kdo má dítě, je rodič."* bychom mohli formalizovat následující formulí:

$$(\forall x)((\exists y)\text{child\_of}(y, x) \rightarrow \text{is\_parent}(x))$$

[1] V logice druhého řádu máme také proměnné reprezentující množiny individuí nebo i množiny n-tic, tj. relace na množině individuí.

[2] Podobně jako vytváříme aritmetické výrazy.

kde child_of(y, x) je binární predikát vyjadřující, že individuum reprezentované proměnnou y je dítětem individua reprezentovaného proměnnou x, a is_parent(x) je unární predikát (tj. 'vlastnost') vyjadřující, že individuum reprezentované x je rodič.

Jak je to s platností této formule? To záleží na konkrétním *modelu* světa/systému, který nás zajímá. Model je (neprázdná) množina objektů spolu s unární relací (tj. podmnožinou) *interpretující unární relační symbol* is_parent a binární relací interpretující *binární relační symbol* child_of. Tyto relace mohou být obecně jakékoliv a snadno sestrojíme model, kde formule neplatí.[3] Pokud ale modelujeme například všechny lidi na světě, a relace mají svůj přirozený význam, potom formule bude platit.[4]

Podívejme se na ještě jeden příklad, tentokrát i s funkčními symboly a s konstantním symbolem: "Je-li $x_1 \leq y_1$ a $x_2 \leq y_2$, potom platí $(y_1 \cdot y_2) - (x_1 \cdot x_2) \geq 0$." Výsledná formule by mohla vypadat takto:

$$\varphi = (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2) \rightarrow ((y_1 \cdot y_2) + (-(x_1 \cdot x_2)) \geq 0)$$

Vidíme dva binární relační symboly $(\leq, \geq)$, binární funkční symbol $+$, unární funkční symbol $-$, a konstantní symbol 0.

Modelem, ve kterém formule platí, je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ s binárními funkcemi $+^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}$, unární funkcí $-^{\mathbb{N}}$, a konstantou $0^{\mathbb{N}} = 0$. Vezmeme-li ale podobně množinu celých čísel, formule už platit nebude.

Poznámka 6.1.1. Mohli bychom chápat symbol $-$ jako binární operaci, obvykle se ale zavádí jako unární. Pro konstantní symbol 0 používáme (jak je zvykem) stejný symbol, jako pro přirozené číslo 0. Ale pozor, v našem modelu může být tento konstantní symbol interpretován jako jiné číslo, nebo náš model vůbec nemusí sestávat z čísel!

Ve formuli nejsou žádné kvantifikátory (takovým formulím říkáme *otevřené*), proměnné x_1, x_2, y_1, y_2 jsou *volné proměnné* této formule (nejsou *vázané* žádným kvantifikátorem), píšeme $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Sémantiku této formule chápeme stejně, jako formule

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

Výraz $(y_1 \cdot y_2) + (-(x_1 \cdot x_2))$ je příkladem *termu*, výrazy $(x_1 \leq y_1)$, $(x_2 \leq y_2)$ a $((y_1 \cdot y_2) + (-(x_1 \cdot x_2)) \geq 0)$ jsou *atomické (pod)formule*. V čem spočívá rozdíl? Máme-li konkrétní model, a konkrétní *ohodnocení proměnných* individui (prvky) tohoto modelu, potom atomickým formulím lze přiřadit pravdivostní hodnotu. Lze je tedy kombinovat s logickými spojkami do složitějších 'logických výrazů', tj. formulí. Na druhou stranu 'výsledkem' termu (při daném ohodnocení) je nějaké konkrétní individuum z modelu.

Upozorníme ještě na to, že v zápisu formule φ jsme použili infixový zápis pro funkční symboly $+, \cdot$ a pro relace $\leq, \geq$, a podobné konvence o uzávorkování jako ve výrokové logice. Jinak bychom formuli φ zapsali takto:

$$((\leq (x_1, y_1) \wedge \leq (x_2, y_2)) \rightarrow \leq (+(\cdot(y_1, y_2), -(\cdot(x_1, x_2))), 0))$$

Cvičení 6.1. Najděte vhodnou definici pojmu *stromu formule* (zobecňující *strom výroku* z výrokové logiky) a nakreslete strom formule $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

[3] Vezměme například jednoprvkovou množinu $A = \{a\}$, a relace child_of$^A = \{a\}$, parent$^A = \emptyset$, tedy jediný objekt je svým vlastním dítětem, ale není rodičem.

[4] Při formalizaci musíme být velmi opatrní, abychom nepřidali dodatečné předpoklady, které v modelovaném systému nemusí platit. Zde se například schovává předpoklad, že má-li někdo dítě, musí to být jeho dítě.

Nyní začneme tím, že formalizujeme tento koncept "*modelu*", tzv. *strukturu*. Zbytek kapitoly sleduje osnovu výkladu o výrokové logice: představíme syntaxi, následně sémantiku, a nakonec pokročilejší vlastnosti formulí, teorií, a struktur. Na závěr si ukážeme jednu jednoduchou, ale velmi užitečnou aplikaci predikátové logiky, takzvanou *definovatelnost* podmnožin a relací, která je základem *relačních databází* (např. SQL), a ještě jednou se podíváme na vztah výrokové a predikátové logiky.

6.2 Struktury

Nejprve specifikujeme, jakého *typu* bude daná struktura, tj. jaké bude mít relace, funkce (jakých arit) a konstanty, a jaké symboly pro ně budeme používat. Této formální specifikaci se někdy říká *typ*, my budeme říkat *signatura*.[5] Připomeňme, že *konstanty* můžeme chápat jako funkce arity 0 (tj. funkce bez vstupů).

Definice 6.2.1. *Signatura* je dvojice $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$, kde $\mathcal{R}, \mathcal{F}$ jsou disjunktní množiny symbolů (*relační* a *funkční*, ty zahrnují *konstantní*) spolu s danými aritami (tj. danými funkcí $\mathrm{ar}\colon \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N}$) a neobsahující symbol '=' (ten je rezervovaný pro *rovnost*).

Často ale budeme signaturu zapisovat jen výčtem symbolů, bude-li jejich arita a to, zda jsou relační nebo funkční, zřejmé z kontextu. Uveďme několik příkladů signatur:

- $\langle E \rangle$ signatura *grafů*: E je binární relační symbol (struktury jsou uspořádané grafy),
- $\langle \leq \rangle$ signatura *částečných uspořádání*: stejná jako signatura grafů, jen jiný symbol,[6]
- $\langle +, -, 0 \rangle$ signatura *grup*: $+$ je binární funkční, $-$ unární funkční, 0 konstantní symbol
- $\langle +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ signatura *těles*: $\cdot$ je binární funkční, 1 konstantní symbol
- $\langle +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ signatura *uspořádaných těles*: $\leq$ je binární relační symbol,
- $\langle -, \wedge, \vee, \bot, \top \rangle$ signatura *Booleových algeber*: $\wedge, \vee$ jsou binární funkční symboly, $\bot, \top$ jsou konstantní symboly,
- $\langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ signatura *aritmetiky*: S je unární funkční symbol ('successor').

Kromě běžných symbolů relací, funkcí a konstant (známých např. z logiky nebo z aritmetiky) typicky používáme pro relační symboly $P, Q, R, \ldots$, pro funkční symboly $f, g, h, \ldots$, a pro konstantní symboly $c, d, a, b, \ldots$

Strukturu dané signatury získáme tak, že na nějaké neprázdné *doméně* zvolíme *realizace* (také říkáme *interpretace*) všech relačních a funkčních symbolů (a konstant), tj. konkrétní relace resp. funkce příslušných arit. (V případě konstantního symbolu je jeho realizací zvolený prvek z domény.)[7]

[5] Signaturu si můžete představovat analogicky definici *třídy* v OOP, struktury potom odpovídají *objektům* této třídy (v 'programovacím jazyce' teorie množin).

[6] Ne každá struktura v této signatuře je částečné uspořádání, k tomu ještě potřebujeme, aby splňovala příslušné *axiomy*.

[7] Na tom, jaké konkrétní symboly v signatuře použijeme, nezáleží, můžeme je interpretovat libovolně. Například to, že máme symbol $+$ neznamená, že by jeho interpretace musela mít cokoliv společného se sčítáním (tedy kromě toho, že to bude také binární funkce).

Příklad 6.2.2. Formální definice *struktury* je uvedena níže, nejprve si ukážeme několik příkladů:

- Struktura v prázdné signatuře $\langle\,\rangle$ je libovolná neprázdná množina.[8] (Nemusí být konečná, dokonce ani spočetná!)
- Struktura v signatuře grafů je $\mathcal{G} = \langle V, E\rangle$, kde $V \neq \emptyset$ a $E \subseteq V^2$, říkáme jí *orientovaný graf*.
  - Je-li E irreflexivní a symetrická, jde o *jednoduchý* graf (tj. neorientovaný, bez smyček).
  - Je-li E reflexivní, tranzitivní, a antisymetrická, jde o *částečné uspořádání*.
  - Je-li E reflexivní, tranzitivní, a symetrická, mluvíme o *ekvivalenci*.
- Struktury v signatuře částečných uspořádání jsou tytéž, jako v signatuře grafů, signatury se liší jen použitým symbolem. (Tedy ne každá struktura v signatuře částečných uspořádání je částečné uspořádání!)
- Struktury v signatuře grup jsou například následující *grupy*:
  - $\underline{\mathbb{Z}_n} = \langle \mathbb{Z}_n, +, -, 0\rangle$, *aditivní grupa celých čísel modulo n* (operace jsou modulo n).[9]
  - $\mathcal{S}_n = \langle \mathrm{Sym}_n, \circ, {}^{-1}, \mathrm{id}\rangle$ je *symetrická grupa* (grupa všech permutací) na n prvcích.
  - $\underline{\mathbb{Q}^*} = \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, {}^{-1}, 1\rangle$ je *multiplikativní grupa (nenulových) racionálních čísel*. Všimněte si, že interpretací *symbolu* 0 je *číslo* 1.

  Všechny tyto struktury *splňují axiomy teorie grup*, snadno ale najdeme jiné struktury, které tyto axiomy nesplňují, a nejsou tedy grupami. Například změníme-li ve struktuře $\mathbb{Z}_n$ interpretaci symbolu $+$ na funkci $\cdot$ (modulo n).
- Struktury $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, 0, \cdot, 1, \leq\rangle$ a $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1, \leq\rangle$, se standardními operacemi a uspořádáním, jsou v signatuře uspořádaných těles (ale jen první z nich je uspořádaným tělesem).
- $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), \bar{}, \cap, \cup, \emptyset, X\rangle$, tzv. *potenční algebra* nad množinou X, je to struktura v signatuře Booleových algeber. (*Booleova algebra* je to pokud $X \neq \emptyset$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq\rangle$, kde $S(x) = x + 1$, a ostatní symboly jsou interpretovány standardně, je *standardní model aritmetiky*.

Definice 6.2.3 (Struktura)**.** *Struktura v signatuře* $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F}\rangle$ je trojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}\rangle$, kde

- A je neprázdná množina, říkáme jí *doména* (také *univerzum*),
- $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ kde $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^{\mathrm{ar}(R)}$ je *interpretace* relačního symbolu R,
- $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ kde $f^{\mathcal{A}} \colon A^{\mathrm{ar}(R)} \to A$ je *interpretace* funkčního symbolu f (speciálně pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{A}} \in A$).

[8] Jak uvidíme v definici níže, formálně vzato je to trojice $\langle A, \emptyset, \emptyset\rangle$, ale tento rozdíl budeme zanedbávat.

[9] Zde $\underline{\mathbb{Z}_n}$ znamená strukturu, zatímco $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ jen její doménu. Často se ale toto nerozlišuje a symbol $\mathbb{Z}_n$ se používá jak pro celou strukturu, tak jen její doménu. Podobně $+, -, 0$ jsou jak symboly, tak i jejich interpretace. To je běžně používané značení, je klíčové být si vždy vědomi toho, v jakém významu daný symbol na daném místě používáme.

Cvičení 6.2. Uvažme signaturu *n konstant* $\langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$. Jak vypadají struktury v této signatuře? Popište např. všechny nejvýše pětiprvkové struktury v signatuře tří konstant. (Interpretace konstant nemusí být různé!) A jak je tomu v případě signatury *spočetně mnoha konstant* $\langle c_1, c_2, \ldots \rangle = \langle c_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$?

6.3 Syntaxe

V této sekci představíme syntaxi predikátové logiky (prvního řádu). Srovnejte co má syntaxe společného, a jak se liší, od syntaxe výrokové logiky.

6.3.1 Jazyk

Při specifikaci jazyka nejprve stanovíme, v jakého typu jsou struktury, které chceme popisovat, tj. určíme *signaturu*. Dále přidáme informaci, zda je jazyk *s rovností* nebo ne, tj. zda ve formulích můžeme také používat symbol '=' vyjadřující rovnost (identitu) prvků v doméně struktur.[10] Do jazyka patří následující:

- spočetně mnoho *proměnných* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (ale píšeme také $x, y, z, \ldots$; množinu všech proměnných označíme Var),
- *relační*, *funkční* a *konstantní symboly* ze signatury, a symbol $=$ jde-li o jazyk s rovností,
- *univerzální* a *existenční kvantifikátory* $(\forall x), (\exists x)$ pro každou proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,[11]
- symboly pro logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ a závorky $(,)$.

Podobně jako symbol $\square$ zastupující libovolnou binární logickou spojku budeme někdy psát (Qx) pro kvantifikátor $(\forall x)$ nebo $(\exists x)$.

Symbolům ze signatury říkáme *mimologické*, ostatní jsou *logické*. Jazyk musí obsahovat alespoň jeden relační symbol (buď rovnost, nebo v signatuře).[12]

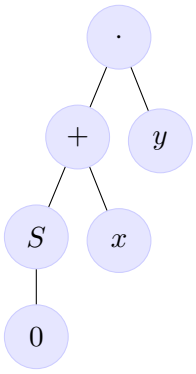
Jazyk tedy specifikujeme pomocí signatury a informace 's rovností' (popř. 'bez rovnosti'). Například:

- Jazyk $L = \langle\rangle$ s rovností je jazyk *čisté rovnosti*,
- jazyk $L = \langle c_0, c_1, c_2, \ldots \rangle$ s rovností je jazyk *spočetně mnoha konstant*,
- jazyk *uspořádání* je $\langle \leq \rangle$ s rovností,
- jazyk *teorie grafů* je $\langle E \rangle$ s rovností,
- jazyky *teorie grup, teorie těles, teorie uspořádaných těles, Booleových algeber, aritmetiky* jsou jazyky s rovností odpovídající signaturám z Příkladu 6.2.2

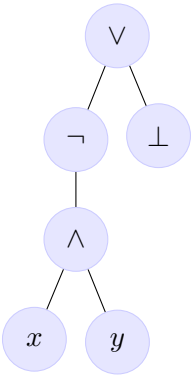
[10] Ve většině aplikací budeme používat jazyky s rovností. V některých speciálních oblastech se ale hodí rovnost nemít. Například pokud se zabýváme velmi rychlými výpočetními modely: zjistit, které proměnné se sobě rovnají, vyžaduje najít tranzitivní uzávěr rovností daných formulí, což je relativně výpočetně náročný problém.

[11] Kvantifikátor chápeme jako jediný symbol, tedy $(\forall x)$ *neobsahuje* proměnnou x. Někdy se také používají symboly $\forall_x, \exists_x$.

[12] Jinak bychom v jazyce nemohli vybudovat žádná 'tvrzení' (*formule*), viz níže.



(a) $(S(0)+x)\cdot y$ v jazyce aritmetiky



(b) $\neg(x\wedge y)\vee\bot$ v jazyce Booleových algeber

Obrázek 6.1: Strom termu

6.3.2 Termy

Termy jsou syntaktické 'výrazy' složené z proměnných, konstantních symbolů a funkčních symbolů.

Definice 6.3.1 (Termy)**.** *Termy* jazyka L jsou konečné nápisy definované induktivně:

- každá proměnná a každý konstantní symbol z L je term,
- je-li f funkční symbol z L arity n a jsou-li $t_1,\ldots,t_n$ termy, potom nápis $f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ je také term.

Množinu všech *termů* jazyka L označíme Term_L.

Při zápisu termů obsahujících binární funkční symbol můžeme používat *infixový* zápis, např. (t_1+t_2) znamená $+(t_1,t_2)$. Závorky někdy vynecháváme, je-li struktura termu ('priorita operátorů') zřejmá.

Podterm je podřetězec termu, který je sám termem (je to tedy buď celý term, nebo se vyskytl jako nějaké t_i při konstrukci termu).

Pokud term neobsahuje proměnnou, říkáme mu *konstantní (ground)*, například $((S(0)+S(0))\cdot S(S(0)))$ je konstantní term v jazyce aritmetiky.[13]

Strom termu t, označme $\mathrm{Tree}(t)$, je definován podobně jako strom výroku, v listech jsou proměnné nebo konstantní symboly, ve vnitřních vrcholech jsou funkční symboly, jejichž arita je rovna počtu synů.

Příklad 6.3.2. Nakresleme stormy termů (a) $(S(0)+x)\cdot y$ v jazyce aritmetiky, (b) $\neg(x\wedge y)\vee\bot$ v jazyce Booleových algeber. Zde $\neg,\wedge,\vee$ nejsou logické spojky z jazyka, ale mimologické symboly ze signatury Booleových algeber (byť používáme stejné symboly)! Termy v tomto jazyce můžeme chápat jako výrokové formule (s konstantami pro spor a tautologii), viz Sekce 6.9. Na obrázku 6.3.2 jsou nakresleny stromy těchto termů.

Není těžké uhádnout, jaká bude *sémantika* termů. Máme-li konkrétní strukturu, odpovídá term funkci na její doméně: vstupem je ohodnocení proměnných prvky domény, konstantní a funkční symboly jsou nahrazeny jejich interpretacemi, a výstupem je hodnota (prvek domény) v kořeni. Formálněji ale až v Sekci 6.4.

[13] Pozor, termy jsou čistě syntaktické, můžeme používat jen symboly z jazyka, nikoliv prvky struktury, tedy např. $(1+1)\cdot 2$ *není* term v jazyce aritmetiky! (Mohli bychom ale *definovat* nové konstantní symboly $1,2$ jako zkratky za $S(0)$ a $S(S(0))$ a *rozšířit* tak náš jazyk, viz Sekce 6.7.1.)

6.3.3 Formule

Termům nelze v žádném smyslu přiřadit pravdivostní hodnotu, k tomu potřebujeme *predikát* (relační symbol nebo rovnost), který mluví o 'vztahu' termů: v konkrétní struktuře při konkrétním ohodnocení proměnných prvky z domény je tento vztah buď splněn, nebo nesplněn.

Nejjednoduššími *formulemi* jsou *atomické formule*. Z nich potom vybudujeme pomocí logických spojek a kvantifikátorů všechny formule.

Definice 6.3.3 (Atomická formule)**.** *Atomická formule* jazyka L je nápis $R(t_1, \ldots, t_m)$, kde R je n-ární relační symbol z L (včetně $=$ jde-li o jazyk s rovností) a $t_i \in \mathrm{Term}_L$.

U binárních relačních symbolů často používáme infixový zápis, např. atomickou formuli $\leq(x, y)$ zapíšeme jako $x \leq y$, a (je-li jazyk s rovností) místo $=(t_1, t_2)$ budeme psát $t_1 = t_2$.

Příklad 6.3.4. Uveďme několik příkladů atomických formulí:

- $R(f(f(x)), c, f(d))$ kde R je ternární relační, f unární funkční, c, d konstantní symboly,
- $(x \cdot x) + (y \cdot y) \leq (x + y) \cdot (x + y)$ v jazyce uspořádaných těles,
- $x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y$ v jazyce aritmetiky,
- $\neg(x \wedge y) \vee \bot = \bot$ v jazyce Booleových algeber

Definice 6.3.5 (Formule)**.** *Formule* jazyka L jsou konečné nápisy definované induktivně:

- každá atomická formule jazyka L je formule,
- jsou-li φ, ψ formule, potom $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou také formule,
- je-li φ formule a x proměnná, potom $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ jsou také formule.

Podformule je podřetězec, který je sám o sobě formulí. *Strom formule*, označíme $\mathrm{Tree}(\varphi)$, je definován takto: strom atomické formule $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ má v kořeni relační symbol R, a k němu jsou připojeny stromy $\mathrm{Tree}(t_i)$. Není-li φ atomická, strom zkonstruujeme obdobně jako strom výroku.[14] Při zápisu formulí používáme obdobné konvence jako ve výrokové logice, přičemž kvantifikátory mají stejnou prioritu jako $\neg$ (vyšší než ostatní logické spojky). Místo $((\forall x)\varphi)$ tedy můžeme psát $(\forall x)\varphi$.[15]

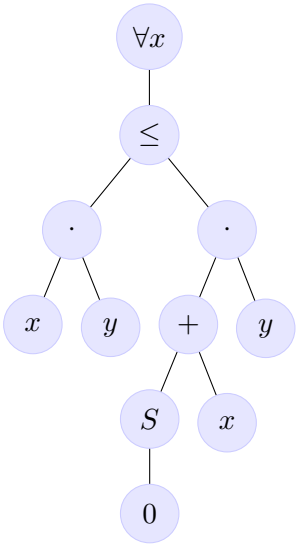
Příklad 6.3.6. Příkladem formule v jazyce aritmetiky je $(\forall x)(x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y)$. Její strom je znázorněn na Obrázku 6.2.

Volné a vázané proměnné

Význam formule[16] může, nebo nemusí záviset na proměnných, které se v ní vyskytují: srovnejte $x \leq 0$ a $(\exists x)(x \leq 0)$ (a co teprve $x \leq 0 \vee (\exists x)(x \leq 0)$). Nyní tento koncept upřesníme a zavedeme potřebnou terminologii.

Výskytem proměnné x ve formuli φ myslíme list $\mathrm{Tree}(\varphi)$ označený x. [17] Výskyt je *vázaný*, je-li součástí nějaké podformule (podstromu) začínající (Qx). Není-li výskyt vázaný, je *volný*.

[14] Kvantifikátory mají, podobně jako negace, jediného syna.
[15] Někdy se také nepíší závorky v kvantifikátorech, tj. jen $\forall x\varphi$, my je ale pro přehlednost psát budeme.
[16] Přesněji, její *pravdivostní hodnota*, kterou formálně definujeme níže v Sekci 6.4.3.
[17] Proměnná x se tedy *nevyskytuje* v symbolu pro kvantifikátor (Qx).



Obrázek 6.2: Strom formule $(\forall x)(x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y)$

Proměnná je *volná* ve φ, pokud má ve φ volný výskyt, a *vázaná* ve φ, pokud má ve φ vázaný výskyt. Zápis $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ znamená, že $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny volné proměnné ve formuli φ.

Příklad 6.3.7. Proměnná může být volná i vázaná, např. ve formuli $\varphi = (\forall x)(\exists y)(x \leq y) \vee x \leq z$ je první výskyt x vázaný a druhý výskyt volný. (Nakreslete si strom formule!) Proměnná y je vázaná (její jediný výskyt je vázaný) a z je volná. Můžeme tedy psát $\varphi(x, z)$.

Poznámka 6.3.8. Jak uvidíme níže, význam (*pravdivostní hodnota*) formule závisí pouze na ohodnocení volných proměnných. Proměnné v kvantifikátorech, spolu s příslušnými vázanými výskyty, můžeme libovolně přejmenovat.

Otevřené a uzavřené formule

Často budeme mluvit o následujících dvou důležitých druzích formulí:

Definice 6.3.9 (Otevřená a uzavřená formule)**.** Formule je *otevřená*, neobsahuje-li žádný kvantifikátor, a *uzavřená* (neboli *sentence*), pokud nemá žádnou volnou proměnnou

Příklad 6.3.10. Uveďme několik příkladů:

- formule $x + y \leq 0$ je otevřená,
- formule $(\forall x)(\forall y)(x + y \leq 0)$ je uzavřená (tedy je to sentence),
- formule $(\forall x)(x + y \leq 0)$ není ani otevřená, ani uzavřená,
- formule $(0 + 1 = 1) \wedge (1 + 1 = 0)$ je otevřená i uzavřená.

Každá atomická formule je otevřená, otevřené formule jsou jen kombinace atomických pomocí logických spojek. Formule může být otevřená i uzavřená zároveň, v tom případě jsou všechny její termy konstantní. Formule je uzavřená, právě když nemá žádnou volnou proměnnou.[18]

[18] Neplatí ale, že formule je otevřená, pokud nemá žádnou vázanou proměnnou, viz formule $(\forall x)0 = 1$.

Poznámka 6.3.11. Jak uvidíme později, *pravdivostní hodnota* formule závisí jen na ohodnocení jejích volných proměnných. Speciálně, sentence má v dané struktuře pravdivostní hodnotu 0 nebo 1 (nezávisle na ohodnocení proměnných). To je důvod, proč hrají sentence v logice důležitou roli.

6.3.4 Instance a varianty

Jak jsme viděli, jedna proměnná se může ve formuli vyskytovat v různých 'rolích'. Jde o velmi podobný princip jako v programování, kde jeden identifikátor může v programu znamenat různé proměnné (buď lokální, nebo globální). Pod pojmem *instance* si představte 'dosazení' (termu) do (globální) proměnné (nebo lépe 'nahrazení' proměnné nějakým výrazem, který ji počítá), a pod pojmem *varianta* 'přejmenování' (lokální) proměnné. Vezměme například formuli $\varphi(x)$:

$$P(x) \wedge (\forall x)(Q(x) \wedge (\exists x)R(x))$$

První výskyt proměnné x je volný, druhý je vázaný kvantifikátorem $(\forall x)$, a třetí je vázaný $(\exists x)$. Pokud 'dosadíme' za proměnnou x term $t = 1+1$, dostáváme *instanci* formule φ, kterou označíme $\varphi(x/t)$:

$$P(1+1) \wedge (\forall x)(Q(x) \wedge (\exists x)R(x))$$

Můžeme také přejmenovat kvantifikátory ve formuli, tak získáme *variantu* formule φ, např.:

$$P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \wedge (\exists z)R(z))$$

Jak víme, kdy a jak toto můžeme provést, abychom zachovali význam, tj. aby instance byla *důsledkem* φ, a varianta byla s φ *ekvivalentní*? To nyní chceme zformalizovat.

Instance

Pokud do formule φ *dosadíme* za volnou proměnnou x term t, požadujeme, aby výsledná formule 'říkala' o t 'totéž', co φ o x.

Příklad 6.3.12. Například formule $\varphi(x) = (\exists y)(x + y = 1)$ říká o x, že 'existuje $x - 1$'. Term $t = 1$ lze dosadit, neboť $\varphi(x/t) = (\exists y)(1 + y = 1)$ říká 'existuje 1-1'. Ale term $t = y$ dosadit nelze, $(\exists y)(y + y = 1)$ říká '1 je dělitelné 2'. Problém spočívá v tom, že term $t = y$ obsahuje proměnnou y, jež bude nově vázaná kvantifikátorem $(\exists y)$. Takové situaci se musíme vyhnout.

Definice 6.3.13 (Substituovatelnost a instance)**.** Term t je *substituovatelný* za proměnnou x ve formuli φ, pokud po simultánním nahrazení všech volných výskytů x ve φ za t nevznikne ve φ žádný vázaný výskyt proměnné z t. V tom případě říkáme vzniklé formuli *instance* φ vzniklá substitucí t za x, a označujeme ji $\varphi(x/t)$.

Poznámka 6.3.14. Všimněte si, že term t *není* substituovatelný za x do φ, právě když x má volný výskyt v nějaké podformuli φ tvaru $(Qy)\psi$ a proměnná y se vyskytuje v t. Speciálně, konstantní termy jsou vždy substituovatelné.

Varianty

Potřebujeme-li substituovat term t do formule φ, můžeme to udělat vždy, pokud nejprve přejmenujeme všechny kvantifikované proměnné na zcela nové (tj. takové, které se nevyskytují ani ve φ ani v t), a potom substituujeme t do takto vzniklé *varianty* formule φ.

Definice 6.3.15 (Varianta)**.** Má-li formule φ podformuli tvaru $(Qx)\psi$ a je-li y proměnná, taková, že

- y je substituovatelná za x do ψ a
- y nemá volný výskyt v ψ,

potom nahrazením podformule $(Qx)\psi$ formulí $(Qy)\psi(x/y)$ vznikne *varianta* formule φ v podformuli $(Qx)\psi$. *Varianta* říkáme i výsledku postupné variace ve více podformulích.

Všimněte si, že požadavek na proměnnou y z definice varianty je vždy splněn, pokud se y nevyskytuje ve formuli φ.

Příklad 6.3.16. Mějme formuli $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$. Potom:

- $(\exists u)(\forall v)(u \leq v)$ je varianta φ,
- $(\exists u)(\forall u)(u \leq u)$ není varianta φ, neboť y není substituovatelná za x do φ,
- $(\exists x)(\forall x)(x \leq x)$ není varianta φ, neboť x má volný výskyt $\psi = (x \leq y)$.

Tím jsme uzavřeli výklad o syntaxi, následuje sémantika.

6.4 Sémantika

Než se pustíme do formálnějšího výkladu, shrňme stručně sémantiku, tak jak jsme ji už naznačili v předchozích sekcích:

- modely jsou struktury dané signatury,
- formule platí ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,
- hodnoty termů se vyhodnocují podle jejich stromů, kde symboly nahradíme jejich interpretacemi (relacemi, funkcemi, a konstantami z domény),
- z hodnot termů získáme pravdivostní hodnoty atomických formulí: je výsledná n-tice v relaci?
- hodnoty složených formulí vyhodnocujeme také podle jejich stromu, přičemž $(\forall x)$ hraje roli 'konjunkce přes všechny prvky' a $(\exists y)$ hraje roli 'disjunkce přes všechny prvky' z domény struktury

Nyní formálněji:

6.4.1 Modely jazyka

Definice 6.4.1 (Model jazyka)**.** *Model jazyka* L, nebo také L-struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka L. *Třídu* všech modelů jazyka označíme M_L.

Poznámka 6.4.2. V definici nehraje roli, zda je jazyk s rovností nebo bez. A proč nemůžeme mluvit o *množině* všech modelů M_L, proč musíme říkat *třída*? Protože doménou struktury může být libovolná neprázdná množina, a 'množina všech množin' neexistuje, je to klasický příklad tzv. vlastní třídy. Třída je *'soubor'* všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v *jazyce teorie množin*).

Příklad 6.4.3. Mezi modely jazyka uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ patří následující struktury: $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$, libovolný orientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$, $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$. Ale také např. $\langle \mathbb{C}, R^{\mathbb{C}} \rangle$ kde $(z_1, z_2) \in R^{\mathbb{C}}$ právě když $|z_1| = |z_2|$ nebo $\langle \{0,1\}, \emptyset \rangle$, což *nejsou* částečná uspořádání.

6.4.2 Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ (s rovností nebo bez), a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$. *Ohodnocení proměnných* v množině A je libovolná funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Definice 6.4.4 (Hodnota termu)**.** *Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e*, kterou značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je dána induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$, a
- je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ složený term, kde $f \in \mathcal{F}$, potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$

Poznámka 6.4.5. Všimněte si, že hodnota termu závisí pouze na ohodnocení proměnných vyskytujících se v něm. Speciálně, je-li t konstantní term, jeho hodnota na ohodnocení nezávisí. Obecně, každý term t reprezentuje *termovou funkci* $f_t^{\mathcal{A}} \colon A^k \to A$, kde k je počet proměnných v t, a konstantním termům odpovídají konstantní funkce.

Příklad 6.4.6. Uveďme dva příklady:

- Hodnota termu $-(x \vee \bot) \wedge y$ v Booleově algebře $\underline{\mathcal{P}(\{0,1,2\})}$ při ohodnocení e ve kterém $e(x) = \{1,2\}$ a $e(y) = \{2,3\}$ je $\{3\}$.
- Hodnota termu $x + 1$ ve struktuře $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$ jazyka $L = \langle +, 1 \rangle$ při ohodnocení e ve kterém $e(x) = 2$ je $(x+1)^{\mathcal{N}}[e] = 6$.

6.4.3 Pravdivostní hodnota formule

Nyní už jsme připraveni definovat *pravdivostní hodnotu*. Lokálně pro ni zavedeme značení PH.

Definice 6.4.7 (Pravdivostní hodnota)**.** Mějme formuli φ v jazyce L, strukturu $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(L)$, a ohodnocení proměnných $e : \mathrm{Var} \to A$. *Pravdivostní hodnota φ v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e*, $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$, je definována induktivně podle struktury formule:

Pro atomickou formuli $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ máme

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Speciálně, je-li φ tvaru $t_1 = t_2$, potom $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$ právě když $(t_1^{\mathcal{A}}[e], t_2^{\mathcal{A}}[e]) \in =^{\mathcal{A}}$, kde $=^{\mathcal{A}}$ je identita na A, tj. právě když $t_1^{\mathcal{A}}[e] = t_2^{\mathcal{A}}[e]$ (obě strany rovnosti jsou stejný prvek $a \in A$).

Pravdivostní hodnota negace je definována takto:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] = f_{\neg}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]) = 1 - \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$$

Obdobně pro binární logické spojky, jsou-li φ, ψ a $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, potom:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi \square \psi)[e] = f_{\square}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

Zbývá definovat pravdivostní hodnotu pro kvantifikátory, tj. formule tvaru $(Qx)\varphi$. Budeme potřebovat následující značení: Změníme-li v ohodnocení $e : \mathrm{Var} \to A$ hodnotu pro proměnnou x na a, výsledné ohodnocení zapíšeme jako $e(x/a)$. Platí tedy $e(x/a)(x) = a$. Pravdivostní hodnotu pro $(Qx)\varphi$ definujeme takto:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$
$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

Tedy v ohodnocení e nastavíme hodnotu proměnné x postupně na všechny prvky $a \in A$ a požadujeme, aby PH byla rovna 1 vždy (v případě $\forall$) nebo alespoň jednou (v případě $\exists$).[19]

Poznámka 6.4.8. Pravdivostní hodnota závisí pouze na ohodnocení volných proměnných. Speciálně, je-li φ sentence, potom její pravdivostní hodnota nezávisí na ohodnocení.

Příklad 6.4.9. Vezměme si uspořádané těleso $\underline{\mathbb{Q}}$. Potom:

- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$ právě když $e(x) \in (0, 1]$,
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$ právě když $e(y) = 0$,
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 1$ pro každé ohodnocení e (je to sentence), ale
- $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 0$ (pro každé e), je-li $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, -, 0, \cdot, 1\rangle$ se standardními operacemi a nerovností.

6.4.4 Platnost

Na základě pravdivostní hodnoty už můžeme definovat klíčový pojem sémantiky, *platnost*.

Definice 6.4.10 (Platnost ve struktuře)**.** Mějme formuli φ a strukturu $\mathcal{A}$ (ve stejném jazyce).

- Je-li e ohodnocení a $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, potom říkáme, že φ *platí v* $\mathcal{A}$ *při ohodnocení* e, a píšeme $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. (V opačném případě říkáme, že φ *neplatí v* $\mathcal{A}$ *při ohodnocení* e, a píšeme $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.)
- Pokud φ platí v $\mathcal{A}$ při každém ohodnocení $e : \mathrm{Var} \to A$, potom říkáme, že φ *je pravdivá (platí) v* $\mathcal{A}$, a píšeme $\mathcal{A} \models \varphi$.

[19] Připomeňme, že $f_{\wedge}(x, y) = \min(x, y)$ a $f_{\vee}(x, y) = \max(x, y)$. Kvantifikátory tedy hrají roli 'konjunkce' ($\forall$) resp.'disjunkce' ($\exists$) přes všechny prvky struktury.

- Pokud $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. φ neplatí v $\mathcal{A}$ při žádném ohodnocení (pro každé e máme $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$), potom je φ *lživá v* $\mathcal{A}$.[20]

Shrňme několik jednoduchých vlastností, nejprve týkajících se platnosti při ohodnocení. Buď $\mathcal{A}$ struktura, φ, ψ formule, a e ohodnocení.

- $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$,
- $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ a $\mathcal{A} \models \psi[e]$,
- $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ nebo $\mathcal{A} \models \psi[e]$,
- $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[e]$ právě když platí: jestliže $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ potom $\mathcal{A} \models \psi[e]$,
- $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e]$ právě když platí: $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$,
- $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro všechna $a \in A$,
- $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro nějaké $a \in A$.
- Je-li term t substituovatelný za proměnnou x do formule φ, potom

$$A \models \varphi(x/t)[e] \text{ právě když } A \models \varphi[e(x/a)] \text{ pro } a = t^{\mathcal{A}}[e].$$

- Je-li ψ varianta φ, potom $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$.

Cvičení 6.3. Dokažte podrobně všechny uvedené vlastnosti platnosti při ohodnocení.

A jak je tomu s pojmem pravdivosti (platnosti) ve struktuře?

- Pokud $\mathcal{A} \models \varphi$, potom $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$. Je-li φ sentence, potom platí i opačná implikace (tj. platí 'právě když').
- $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi$ a $\mathcal{A} \models \psi$,
- Pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \psi$, potom $\mathcal{A} \models \varphi \vee \psi$. Je-li φ sentence, potom platí i opačná implikace (tj. platí 'právě když').
- $\mathcal{A} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$.

Generální uzávěr formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (tj. $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny volné proměnné formule φ) je sentence $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\varphi$. Z posledního bodu plyne, že formule platí ve struktuře, právě když v ní platí její generální uzávěr.

Cvičení 6.4. Dokažte podrobně všechny uvedené vlastnosti platnosti ve struktuře.

Cvičení 6.5. Najděte příklad struktury $\mathcal{A}$ a formule φ takových, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$.

Cvičení 6.6. Najděte příklad struktury $\mathcal{A}$ a formulí φ, ψ takových, že $\mathcal{A} \models \varphi \vee \psi$ ale $\mathcal{A} \not\models \varphi$ ani $\mathcal{A} \not\models \psi$.

[20] Pozor, *lživá* není totéž, co *není pravdivá*! To platí jen pro sentence.

6.5 Vlastnosti teorií

Na základě pojmu *platnosti* vybudujeme syntaktickou terminologii obdobně jako v predikátové logice. *Teorie* jazyka L je libovolná množina T L-formulí, prvkům teorie říkáme *axiomy*. *Model* teorie T je L-struktura, ve které platí všechny axiomy teorie T, tj. $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$, což značíme $\mathcal{A} \models T$. *Třída modelů*[21] teorie T je:

$$\mathrm{M}_L(T) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Stejně jako ve výrokové logice budeme často vynechávat jazyk L, bude-li zřejmý z kontextu, a budeme psát $M(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ místo $M(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$ a $M(T, \varphi)$ místo $M(T \cup \{\varphi\})$.

6.5.1 Platnost v teorii

Je-li T teorie v jazyce L a φ L-formule, potom říkáme, že φ je:

- *pravdivá (platí) v* T, značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$ (neboli: $\mathrm{M}(T) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$),
- *lživá v* T, pokud $T \models \neg\varphi$, tj. pokud je lživá v každém modelu T (neboli: $\mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(\varphi) = \emptyset$),
- *nezávislá v* T, pokud není pravdivá v T ani lživá v T.

Máme-li prázdnou teorii $T = \emptyset$ (tj. $\mathrm{M}(T) = \mathrm{M}_L$), potom teorii T vynecháváme, píšeme $\models \varphi$, a říkáme, že *φ je pravdivá (v logice), (logicky) platí, je tautologie*; podobně pro ostatní pojmy.

Teorie je *sporná*, jestliže v ní platí *spor* $\bot$, který v predikátové logice můžeme definovat jako $R(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg R(x_1, \ldots, R_n)$, kde R je libovolný (třeba první) relační symbol z jazyka nebo rovnost (nemá-li jazyk relační symbol, musí být s rovností). Teorie je sporná, právě když v ní platí každá formule, nebo, ekvivalentně, právě když nemá žádný model. Jinak říkáme, že je teorie *bezesporná* (neplatí-li v ní spor, ekvivalentně má-li alespoň jeden model).

Sentencím pravdivým v T říkáme *důsledky* T; *množina všech důsledků* T v jazyce L je:

$$\mathrm{Csq}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je sentence a } T \models \varphi\}$$

Kompletnost v predikátové logice

Jak je tomu s pojmem *kompletnosti* teorie?[22]

Definice 6.5.1. Teorie je *kompletní*, je-li bezesporná a každá *sentence* je v ní buď pravdivá, nebo lživá.

Nemůžeme ale říci, že je teorie kompletní, právě když má jediný model. Máme-li totiž jeden model, dostáváme z něj nekonečně mnoho jiných, ale *izomorfních* modelů, tj. lišících se jen pojmenováním prvků univerza.[23] Uvažovat jediný model 'až na izomorfismus' by ale nebylo dostatečné. Správným pojmem je tzv. *elementární ekvivalence*:

[21] Připomeňme, že nemůžeme říkat 'množina'.

[22] Připomeňme, že *výroková* teorie je kompletní, je-li bezesporná a každý výrok v ní buď platí, nebo platí jeho negace. Ekvivalentně, má právě jeden model.

[23] Formálně pojem *izomorfismu* definujeme později v části o *teorii modelů*, v Sekci 9.2, jde ale o zobecnění izomorfismu který znáte z teorie grafů.

Definice 6.5.2. Struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (v témž jazyce) jsou *elementárně ekvivalentní*, pokud v nich platí tytéž sentence. Značíme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Příklad 6.5.3. Příkladem struktur, které jsou elementárně ekvivalentní, ale ne izomorfní, jsou uspořádané množiny $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$. Izomorfní nejsou proto, že $\mathbb{Q}$ je spočetná zatímco $\mathbb{R}$ nespočetná množina, neexistuje tedy dokonce žádná *bijekce* mezi jejich univerzy. Není těžké ukázat, že pro každou sentenci φ platí $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$: indukcí podle struktury formule φ, jediný netriviální případ je existenční kvantifikátor, a klíčovou vlastností je *hustota* obou uspořádání, tj. následující vlastnost:

$$(x \leq y \wedge \neg x = y) \to (\exists z)(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg x = z \wedge \neg y = z)$$

Pozorování 6.5.4. *Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model až na elementární ekvivalenci.*

Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku pravdivosti (platnosti) v dané teorii lze převést na problém existence modelu:

Tvrzení 6.5.5 (O nesplnitelnosti a pravdivosti)**.** *Je-li T teorie a φ* sentence *(ve stejném jazyce), potom platí: $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model, právě když $T \models \varphi$.*

Důkaz. Platí následující ekvivalence: $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model, právě když $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu T, právě když (neboť je to sentence) φ platí v každém modelu T. □

Předpoklad, že φ je sentence, je nutný: uvažte teorii $T = \{P(c)\}$ a formuli $\varphi = P(x)$ (což není sentence). Potom $\{P(c), \neg P(x)\}$ nemá model, ale $P(c) \not\models P(x)$. (Zde P je unární relační, a c konstantní symbol.)

6.5.2 Příklady teorií

Uveďme několik příkladů důležitých teorií.

Teorie grafů

Teorie grafů je teorie v jazyce $L = \langle E \rangle$ s rovností, splňující axiomy *ireflexivity* a *symetrie*:

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x,x), E(x,y) \to E(y,x)\}$$

Modely T_{graph} jsou struktury $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$, kde $E^{\mathcal{G}}$ je symetrická irreflexivní relace, jde tedy o tzv. *jednoduché* grafy, kde hranu $\{x, y\}$ reprezentuje dvojice uspořádaných hran $(x, y), (y, x)$.

- Formule $\neg x = y \to E(x, y)$ platí v grafu, právě když je *úplný*. Je tedy nezávislá v T_{graph}.
- Formule $(\exists y_1)(\exists y_2)(\neg y_1 = y_2 \wedge E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge (\forall z)(E(x, z) \to z = y_1 \vee z = y_2)$ vyjadřuje, že každý vrchol má stupeň právě 2. Platí tedy právě v grafech, které jsou disjunktní sjednocení kružnic, a je nezávislá v teorii T_{graph}.

Teorie uspořádání

Teorie uspořádání je teorie v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, jejíž axiomy jsou:

$$\begin{aligned} T = \{ & x \leq x, \\ & x \leq y \wedge y \leq x \to x = y, \\ & x \leq y \wedge y \leq z \to x = z \} \end{aligned}$$

Těmto axiomům říkáme *reflexivita*, *antisymetrie*, *tranzitivita*. Modely T jsou L-struktury $\langle S, \leq^S \rangle$, ve kterých platí axiomy T, tzv. *(částečně) uspořádané množiny*. Např: $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule $x \leq y \vee y \leq x$ (*linearita*) platí v $\mathcal{A}$, ale neplatí v $\mathcal{B}$, neboť neplatí např. při ohodnocení kde $e(x) = \emptyset$, $e(y) = \{1\}$ (píšeme $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$). Je tedy nezávislá v T.
- Sentence $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ (označme ji ψ) je pravdivá v $\mathcal{B}$ a lživá v $\mathcal{A}$, píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$. Je tedy také nezávislá v T.
- Formule $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \to (x = y \wedge y = z)$ (označme ji χ) je pravdivá v T, píšeme $T \models \chi$. Totéž platí pro její *generální uzávěr* $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\chi$.

Algebraické teorie

- *Teorie grup* je teorie v jazyce $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, jejíž axiomy jsou:

$$\begin{aligned} T_1 = \{ & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ & 0 + x = x,\ x + 0 = 0, \\ & x + (-x) = 0,\ (-x) + x = 0 \} \end{aligned}$$

  Těmto vlastnostem říkáme *asociativita* $+$, *neutralita* 0 *vůči* $+$, a $-x$ *je inverzní prvek k* x *(vůči* $+$ *a* 0*)*.

- *Teorie komutativních grup* má navíc axiom $x + y = y + x$ (*komutativita* $+$), je tedy:

$$T_2 = T_1 \cup \{x + y = y + x\}$$

- *Teorie okruhů* je v jazyce $L = \langle +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ s rovností, má navíc axiomy:

$$\begin{aligned} T_3 = T_2 \cup \{ & 1 \cdot x = x \cdot 1, \\ & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \\ & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \\ & (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \} \end{aligned}$$

  Těmto vlastnostem říkáme *neutralita* 0 *vůči* $+$, *asociativita* $\cdot$, a *(levá i pravá) distributivita* $\cdot$ *vůči* $+$.

- *Teorie komutativních okruhů* má navíc axiom *komutativity* $\cdot$, máme tedy:

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

- *Teorie těles* je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy *existence inverzního prvku* $k \cdot$ a *netriviality*:

$$T_5 = T_4 \cup \{\neg(x = y) \to (\exists y)(x \cdot y = 1, \neg(0 = 1)\}$$

- *Teorie uspořádaných těles* je v jazyce $\langle +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ s rovností, sestává z axiomů teorie těles, teorie uspořádání spolu s axiomem linearity, a z následujících axiomů *kompatibility uspořádání*: $x \leq y \to (x + z \leq y + z)$ a $(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \to 0 \leq x \cdot y$. (Modely jsou tedy tělesa s *lineárním (totálním)* uspořádáním, které je kompatibilní s tělesovými operacemi v tomto smyslu.)

6.6 Podstruktura, expanze, redukt

V této sekci se podíváme na způsoby, jak můžeme vytvářet nové struktury z existujících.

Podstruktura

Pojem *podstruktury* zobecňuje podgrupy, podprostory vektorového tělesa, a indukované podgrafy grafu: vybereme nějakou podmnožinu B univerza struktury $\mathcal{A}$, a vytvoříme na ní strukturu $\mathcal{B}$ stejné signatury, která 'zdědí' relace, operace, a konstanty. Abychom to mohli provést, potřebujeme, aby byla množina B *uzavřená* na všechny operace a obsahovala všechny konstanty.[24]

Definice 6.6.1 (Podstruktura)**.** Mějme strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ v signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$. Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je *(indukovaná) podstruktura* $\mathcal{A}$, značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže

- $\emptyset \neq B \subseteq A$,
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\mathrm{ar(R)}}$ pro každý relační symbol $R \in \mathcal{R}$,
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\mathrm{ar(f)}} \times B)$ pro každý funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ (tj. funkce $f^{\mathcal{B}}$ je restrikce $f^{\mathcal{A}}$ na množinu B, a její výstupy jsou všechny také z B),
- speciálně, pro každý konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$.

Množina $C \subseteq A$ je *uzavřená* na funkci $f : A^n \to A$, pokud $f(x_1, \ldots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$. Platí:

Pozorování 6.6.2. *Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury struktury $\mathcal{A}$, právě když je C uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant).*

V tom případě říkáme této podstruktuře *restrikce* $\mathcal{A}$ na množinu C, a značíme ji $\mathcal{A} \restriction C$.

Příklad 6.6.3. $\underline{\mathbb{Z}} = \langle Z, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle Q, +, \cdot, 0 \rangle$, můžeme psát $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z}$. Struktura $\underline{\mathbb{N}} = \langle N, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou obou těchto struktur, $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \restriction \mathbb{N}$.

[24] Stejně jako ne každá množina vektorů je podprostor, k tomu musí obsahovat nulový vektor, ke každému vektoru obsahovat všechny jeho skalární násobky, a pro každou dvojici vektorů obsahovat jejich součet. Jinými slovy, jen (neprázdné) množiny uzavřené na *lineární kombinace* vektorů dávají vzniknout podprostorům.

Platnost v podstruktuře

Jak je tomu s platností formulí v podstruktuře? Uveďme několik jednoduchých pozorování o *otevřených* formulích.

Pozorování 6.6.4. *Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, potom pro každou* otevřenou *formuli φ a ohodnocení proměnných $e\colon \mathrm{Var} \to B$ platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.*

Důkaz. Pro atomické formule je zřejmé, dále snadno dokážeme indukcí podle struktury formule. □

Důsledek 6.6.5. Otevřená *formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.*

Říkáme, že teorie T je *otevřená*, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek 6.6.6. *Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu otevřené teorie je také model této teorie.*

Příklad 6.6.7. Teorie grafů je otevřená. Každá podstruktura grafu (modelu teorie grafů) je také graf, říkáme mu (indukovaný) *podgraf*.[25] Podobně např. pro podgrupy nebo Booleovy podalgebry.

Příklad 6.6.8. Teorie těles není otevřená. Jak si ukážeme později, není dokonce ani *otevřeně axiomatizovatelná*, tj. neexistuje jí ekvivalentní otevřená teorie – kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nelze nijak zbavit. Podstruktura tělesa reálných čísel $\mathbb{Q}$ na množině všech celých čísel $\mathbb{Q} \restriction \mathbb{Z}$ není těleso. (Je to tzv. *okruh*, ale nenulové prvky kromě $1, -1$ nemají multiplikativní inverz, např. rovnice $2 \cdot x = 1$ nemá v $\mathbb{Z}$ řešení).

Generovaná podstruktura

Co dělat, máme-li podmnožinu univerza, která *není* uzavřená na operace struktury? V tom případě uvážíme *uzávěr* této množiny na operace.[26]

Definice 6.6.9. Mějme strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a neprázdnou podmnožinu $X \subseteq A$. Označme jako B nejmenší podmnožinu A, která je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (tj. také obsahuje všechny konstanty). Potom o podstruktuře $\mathcal{A} \restriction B$ říkáme, že je *generovaná* množinou X, a značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Příklad 6.6.10. Uvažme struktury $\underline{\mathbb{Q}} = \langle Q, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle Z, +, \cdot, 0 \rangle$, a $\underline{\mathbb{N}} = \langle N, +, \cdot, 0 \rangle$. Potom $\underline{\mathbb{Q}}\langle\{1\}\rangle = \underline{\mathbb{N}}$, $\underline{\mathbb{Q}}\langle\{-1\}\rangle = \underline{\mathbb{Z}}$, a $\underline{\mathbb{Q}}\langle\{2\}\rangle$ je podstruktura $\underline{\mathbb{N}}$ na množině všech sudých čísel.

Příklad 6.6.11. Pokud $\mathcal{A}$ nemá žádné operace (ani konstanty), např. je-li to graf či uspořádání, potom není čím generovat, a $\mathcal{A}\langle X \rangle = \mathcal{A} \restriction X$.

[25] Samotný pojem *podgraf* v teorii grafů často znamená jen $E^{\mathcal{B}} \subseteq B \times B$, nikoliv $E^{\mathcal{B}} = B \times B$. My ale budeme používat slovo *podgraf* ve striktnějším smyslu, jako indukovaný podgraf.

[26] Viz pojem *lineárního obalu* množiny vektorů.

Expanze a redukt

Prozatím jsme konstruovali nové struktury změnou univerza. Můžeme ale také nechat univerzum stejné, a přidat resp. odebrat relace, operace, a konstanty. Výsledku takové operace říkáme *expanze* resp. *redukt*. Všimněte si, že jde o strukturu v jiné signatuře.

Definice 6.6.12 (Expanze a redukt)**.** Mějme jazyky $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$, a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně $A = A'$. Jestliže je interpretace každého symbolu [relačního, funkčního, konstantního] stejná [relace, funkce, konstanta] v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$ potom říkáme, že struktura $\mathcal{A}'$ je *expanzí* struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' (také říkáme, že je L'*-expanzí*) a že struktura $\mathcal{A}$ je *reduktem* struktury $\mathcal{A}'$ na jazyk L (také říkáme, že je L*-reduktem*).

Příklad 6.6.13. Mějme grupu celých čísel $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0\rangle$. Potom struktura $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$ je jejím reduktem, zatímco struktura $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1\rangle$ (*okruh* celých čísel) je její expanzí.

Příklad 6.6.14. Mějme graf $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}}\rangle$. Potom struktura $\langle G, E^G, c_v^{\mathcal{G}}\rangle_{v\in G}$ v jazyce $\langle E, c_v\rangle_{v\in G}$, kde $c_v^{\mathcal{G}} = v$ pro všechny vrcholy $v \in G$, je *expanzí* $\mathcal{G}$ *o jména prvků (z množiny* G*).*

6.6.1 Věta o konstantách

Věta o konstantách říká (neformálně), že splnit formuli s volnou proměnnou je totéž, co splnit sentenci, ve které je tato volná proměnná nahrazena (substituována) *novým* konstantním symbolem (který není nijak svázaný žádnými axiomy). Klíčem je fakt, že tento nový symbol může být v modelech interpretován jako libovolný (tj. každý) prvek. Tento trik později využijeme v tablo metodě.

Věta 6.6.15 (O konstantách)**.** *Mějme formuli φ v jazyce L s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$. Označme L' rozšíření jazyka o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a buď T' stejná teorie jako T ale v jazyce L'. Potom platí:*

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$$

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pro jednu volnou proměnnou x a jednu konstantu c, indukcí se snadno rozšíří na n konstant.

Předpokládejme nejprve, že φ platí v každém modelu teorie T. Chceme ukázat, že $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu $\mathcal{A}'$ teorie T'. Vezměme tedy takový model $\mathcal{A}'$ a libovolné ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A$ a ukažme, že $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

Označme jako $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na jazyk L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model teorie T (axiomy T jsou tytéž jako T', neobsahují symbol c) tedy v něm platí φ. Protože dle předpokladu platí $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro *libovolné* ohodnocení e', platí i pro ohodnocení $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ ve kterém ohodnotíme proměnnou x interpretací konstantního symbolu c ve struktuře $\mathcal{A}'$, máme tedy $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$. To ale znamená, že $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$, což jsme chtěli dokázat.

Naopak, předpokládejme, že $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu teorie T' a ukažme, že φ platí v každém modelu $\mathcal{A}$ teorie T. Zvolme tedy takový model $\mathcal{A}$ a nějaké ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Označme jako $\mathcal{A}'$ expanzi $\mathcal{A}$ do jazyka L', kde konstantní symbol c interpretujeme jako prvek $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$. Protože dle předpokladu platí $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$ pro všechna ohodnocení e', platí i $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$, což ale znamená, že $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$. (Neboť $e = e(x/c)$ a $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e(x/c)]$ platí právě když $\mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c)]$.) Formule φ ale neobsahuje c (zde používáme, že c je *nový*), máme tedy i $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. □

6.7 Extenze teorií

Pojem *extenze* teorie definujeme stejně jako ve výrokové logice:

Definice 6.7.1 (Extenze teorie)**.** Mějme teorii T v jazyce L.

- *Extenze* teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $L' \supseteq L$ splňující $\mathrm{Csq}_L(T) \subseteq \mathrm{Csq}_{L'}(T')$,
- je to *jednoduchá extenze*, pokud $L' = L$,
- je to *konzervativní extenze*, pokud $\mathrm{Csq}_L(T) = \mathrm{Csq}_L(T') = \mathrm{Csq}_{L'}(T') \cap \mathrm{Fm}_L$, kde Fm_L značí množinu všech formulí v jazyce L.
- Teorie T' (v jazyce L) je *ekvivalentní* teorii T, pokud je T' extenzí T a T extenzí T'.

Podobně jako ve výrokové logice, pro teorie ve stejném jazyce platí následující sémantický popis těchto pojmů:

Pozorování 6.7.2. *Mějme teorie T, T' v jazyce L. Potom:*

- *T' je extenze T, právě když $\mathrm{M}_L(T') \subseteq \mathrm{M}_L(T)$.*
- *T' je ekvivalentní s T, právě když $\mathrm{M}_L(T') = \mathrm{M}_L(T)$.*

Jak je tomu v případě, kdy teorie T' je nad větším jazykem než T? Připomeňme situaci ve výrokové logice, popsanou v Pozorování 2.4.7. Zformulujeme a dokážeme analogické tvrzení: Zatímco ve výrokové logice jsme přidávali hodnoty pro nové prvovýroky, resp. je zapomínali, v predikátové logice budeme expandovat resp. redukovat struktury, tj. přidávat nebo zapomínat interpretace relačních, funkčních, a konstantních symbolů. Princip tvrzení ale zůstává stejný.

Tvrzení 6.7.3. *Mějme jazyky $L \subseteq L'$, teorii T v jazyce L, a teorii T' v jazyce L'.*

(i) T' je extenzí teorie T, právě když redukt každého modelu T' na jazyk L je modelem T.

(ii) Pokud je T' extenzí teorie T, a každý model T lze expandovat do jazyka L' na nějaký model teorie T', potom je T' je konzervativní extenzí teorie T.

Důkaz. Nejprve dokažme (i): Mějme model $\mathcal{A}'$ teorie T' a označme jako $\mathcal{A}$ jeho redukt na jazyk L. Protože T' je extenzí teorie T, platí v T', a tedy i v $\mathcal{A}'$, každý axiom $\varphi \in T$. Potom ale i $\mathcal{A} \models \varphi$ (φ obsahuje jen symboly z jazyka L), tedy $\mathcal{A}$ je modelem T.

Na druhou stranu, mějme L-sentenci φ takovou, že $T \models \varphi$. Chceme ukázat, že $T' \models \varphi$. Pro libovolný model $\mathcal{A}' \in \mathrm{M}_{L'}(T')$ víme, že jeho L-redukt $\mathcal{A}$ je modelem T, tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. Z toho plyne i $\mathcal{A}' \models \varphi$ (opět proto, že φ je v jazyce L).

Nyní (ii): Vezměme libovolnou L-sentenci φ, která platí v teorii T', a ukažme, že platí i v T. Každý model $\mathcal{A}$ teorie T lze expandovat na nějaký model $\mathcal{A}'$ teorie T'. Víme, že $\mathcal{A}' \models \varphi$, takže i $\mathcal{A} \models \varphi$. Tím jsme dokázali, že $T \models \varphi$, tj. jde o konzervativní extenzi.

□

6.7.1 Extenze o definice

Nyní si ukážeme speciální druh konzervativní extenze, tzv. extenzi *o definice* nových (relačních, funkčních, konstantních) symbolů.

Definice relačního symbolu

Nejjednodušším případem je definování nového relačního symbolu $R(x_1, \ldots, x_n)$. Jako definice může sloužit libovolná formule s n volnými proměnnými $\psi(x_1, \ldots, x_n)$.

Příklad 6.7.4. Uveďme nejprve několik příkladů:

- Jakoukoliv teorii v jazyce s rovností můžeme rozšířit o binární relační symbol $\neq$, který *definujeme* formulí $\neg x_1 = x_2$. To znamená, že požadujeme, aby platilo: $x_1 \neq x_2 \leftrightarrow \neg x_1 = x_2$.
- Teorii uspořádání můžeme rozšířit o symbol $<$ pro ostré uspořádání, který *definujeme* formulí $x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$. To znamená, že požadujeme, aby platilo $x_1 < x_2 \leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$.
- V aritmetice můžeme zavést symbol $\leq$, pomocí $x_1 \leq x_2 \leftrightarrow (\exists y)(x_1 + y = x_2)$.

Nyní uvedeme definici:

Definice 6.7.5 (Definice relačního symbolu)**.** Mějme teorii T a formuli $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ v jazyce L. Označme jako L' rozšíření jazyka L o nový n-ární relační symbol R. *Extenze teorie T o definici R formulí ψ* je L'-teorie:

$$T' = T \cup \{R(x_1, \ldots, x_n) \ \leftrightarrow \ \psi(x_1, \ldots, x_n)\}$$

Všimněte si, že každý model T lze *jednoznačně* expandovat na model T'. Z Tvrzení 6.7.3 potom ihned plyne následující:

Důsledek 6.7.6. *T' je konzervativní extenze T.*

Ukážeme si ještě, že nový symbol lze ve formulích nahradit jeho definicí, a získat tak (T'-ekvivalentní) formuli v původním jazyce:

Tvrzení 6.7.7. *Pro každou L'-formuli φ' existuje L-formule φ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Důkaz. Je třeba nahradit atomické podformule s novým symbolem R, tj. tvaru $R(t_1, \ldots, t_n)$. Takovou podformuli nahradíme formulí $\psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$, kde ψ' je varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů, tj. například přejmenujeme všechny vázané proměnné ψ na zcela nové (nevyskytující se ve formuli φ'). □

Definice funkčního symbolu

Nový funkční symbol definujeme obdobným způsobem, musíme si ale být jisti, že definice dává jednoznačnou možnost, jak nový symbol interpretovat.

Příklad 6.7.8. Opět začneme příklady:

- V teorii grup můžeme zavést *binární* funkční symbol $-_b$ pomocí $+$ a unárního $-$ takto:

$$x_1 -_b x_2 = y \ \leftrightarrow \ x_1 + (-x_2) = y$$

Je zřejmé, že pro každá x, y *existuje jednoznačné* z splňující definici.

- Uvažme teorii *lineárních uspořádání*, tj. teorii uspořádání spolu s axiomem linearity $x \leq y \vee y \leq x$. Definujme binární funkční symbol min takto:

$$\min(x_1, x_2) = y \;\leftrightarrow\; y \leq x_1 \wedge y \leq x_2 \wedge (\forall z)(z \leq x_1 \wedge z \leq x_2 \to z \leq y)$$

  Existence a jednoznačnost platí díky linearitě. Pokud bychom ale měli pouze teorii uspořádání, taková formule by nebyla dobrou definicí: v některých modelech by $\min(x_1, x_2)$ pro některé prvky neexistovalo, selhala by tedy požadovaná *jednoznačnost*.

Definice 6.7.9 (Definice funkčního symbolu)**.** Mějme teorii T a formuli $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ v jazyce L. Označme jako L' rozšíření jazyka L o nový n-ární funkční symbol f. Nechť v teorii T platí:

- *axiom existence* $(\exists y)\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$,
- *axiom jednoznačnosti* $\psi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \ldots, x_n, z) \to y = z$.

Potom *extenze teorie T o definici f formulí ψ* je L'-teorie:

$$T' = T \cup \{f(x_1, \ldots, x_n) = y \;\leftrightarrow\; \psi(x_1, \ldots, x_n, y)\}$$

Formule ψ tedy definuje v každém modelu $(n+1)$-ární relaci, a po této relaci požadujeme, aby byla funkcí, tj. aby pro každou n-tici prvků existovala jednoznačná možnost, jak ji rozšířit do $(n+1)$-tice, která je prvkem této relace. Všimněte si, že je-li definující formule ψ tvaru $t(x_1, \ldots, x_n) = y$, kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou proměnné L-termu t, potom axiomy existence a jednoznačnosti vždy platí.

Opět platí, že každý model T lze *jednoznačně* expandovat na model T', tedy:

Důsledek 6.7.10. *T' je konzervativní extenze T.*

A platí také analogické tvrzení o rozvádění definic:

Tvrzení 6.7.11. *Pro každou L'-formuli φ' existuje L-formule φ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Důkaz. Stačí dokázat pro formuli φ' s jediným výskytem symbolu f; je-li výskytů více, aplikujeme postup induktivně, v případě vnořených výskytů v jednom termu $f(\ldots f(\ldots)\ldots)$ postupujeme od vnitřních k vnějším.

Označme φ^* formuli vzniklou z φ' nahrazením termu $f(t_1, \ldots, t_n)$ *novou* proměnnou z. Formuli φ zkonstruujeme takto:

$$(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n, y/z))$$

kde ψ' je varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů.

Mějme model $\mathcal{A}$ teorie T' a ohodnocení e. Označme $a = f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n)[e]$. Díky existenci a jednoznačnosti platí:

$$\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n, y/z)[e] \;\text{ právě když }\; e(z) = a$$

Máme tedy $\mathcal{A} \models \varphi[e]$, právě když $\mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)]$, právě když $\mathcal{A} \models \varphi'[e]$. To platí pro libovolné ohodnocení e, tedy $\mathcal{A} \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ pro každý model T', tedy $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$. □

Definice konstantního symbolu

Konstantní symbol je speciálním případem funkčního symbolu arity 0. Platí tedy stejná tvrzení. Axiomy existence a jednoznačnosti jsou: $(\exists y)\psi(y)$ a $\psi(y) \wedge \psi(z) \to y = z$. A extenze o definici konstantního symbolu c formulí $\psi(y)$ je teorie $T' = T \cup \{c = y \leftrightarrow \psi(y)\}$.

Příklad 6.7.12. Ukážeme si dva příklady:

- Teorii aritmetiky můžeme rozšířit o definici konstantního symbolu 1 formulí $\psi(y)$ tvaru $y = S(0)$, přidáme tedy axiom $1 = y \ \leftrightarrow \ y = S(0)$.
- Uvažme teorii těles a nový symbol $\frac{1}{2}$, definovaný formulí $y \cdot (1 + 1) = 1$, tj. přidáním axiomu:
$$\frac{1}{2} = y \ \leftrightarrow \ y \cdot (1 + 1) = 1$$
Zde nejde o korektní extenzi o definici, neboť neplatí axiom existence. Ve dvouprvkovém tělese $\mathbb{Z}_2$ (a v každém tělese *charakteristiky 2*) nemá rovnice $y \cdot (1+1) = 1$ řešení, neboť $1 + 1 = 0$.
Pokud ale vezmeme teorii těles charakteristiky různé od 2, tj. přidáme-li k teorii těles axiom $\neg(1 + 1 = 0)$, potom už půjde o korektní extenzi o definici. Například v tělese $\mathbb{Z}_3$ máme $\frac{1}{2}^{\mathbb{Z}_3} = 2$.

Extenze o definice

Máme-li L-teorii T a L'-teorii T', potom řekneme, že T' je *extenzí T o definice*, pokud vznikla z T postupnou extenzí o definice relačních a funkčních (příp. konstantních) symbolů. Vlastnosti, které jsme dokázali o extenzích o jeden symbol (ať už relační nebo funkční), se snadno rozšíří indukcí na více symbolů:

Důsledek 6.7.13. *Je-li T' extenze teorie T o definice, potom platí:*

- *Každý model teorie T lze jednoznačně expandovat na model T'.*
- *T' je konzervativní extenze T.*
- *Pro každou L'-formuli φ' existuje L-formule φ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Na závěr ještě jeden příklad, na kterém si ukážeme i rozvádění definic:

Příklad 6.7.14. V teorii $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \to y = z\}$ jazyka $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností lze zavést $<$ a unární funkční symbol $-$ přidáním axiomů:

$$-x = y \ \leftrightarrow \ x + y = 0$$
$$x < y \ \leftrightarrow \ x \leq y \wedge \neg(x = y)$$

Formule $-x < y$ (v jazyce $L' = \langle +, -, 0, \leq, < \rangle$) s rovností) je v této extenzi o definice ekvivalentní následující formuli:

$$(\exists z)((x \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = y)$$

6.8 Definovatelnost ve struktuře

Formuli s jednou volnou proměnnou x můžeme chápat jako *vlastnost* prvků. V dané struktuře taková formule *definuje* množinu prvků, které tuto vlastnost splňují, tj. takových, že formule platí při ohodnocení e, ve kterém $e(x) = a$. Máme-li formuli se dvěma volnými proměnnými, definuje binární relaci, atp. Nyní tento koncept formalizujeme. Připomeňme, že zápis $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ znamená, že $x_1, \ldots, x_n$ jsou právě všechny volné proměnné formule φ.

Definice 6.8.1 (Definovatelné množiny)**.** Mějme formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a strukturu $\mathcal{A}$ v témž jazyce. *Množina definovaná formulí* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *ve struktuře* $\mathcal{A}$, značíme $\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n)$, je:

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)]\}$$

Zkráceně totéž zapíšeme také jako $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a})]\}$.

Příklad 6.8.2. Uveďme několik příkladů:

- Formule $\neg(\exists y)E(x, y)$ definuje množinu všech *izolovaných* vrcholů v daném grafu.
- Uvažme těleso reálných čísel $\underline{\mathbb{R}}$. Formule $(\exists y)(y \cdot y = x) \wedge \neg(x = 0)$ definuje množinu všech kladných reálných čísel.
- Formule $x \leq y \wedge \neg(x = y)$ definuje v dané uspořádané množině $\langle S, \leq^S \rangle$ relaci *ostrého uspořádání* $<^S$.

Často se také hodí mluvit o vlastnostech prvků relativně k jiným prvkům dané struktury. To nelze vyjádřit čistě syntakticky, ale můžeme za některé z volných proměnných dosadit prvky struktury jako *parametry*. Zápisem $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ myslíme, že formule φ má volné proměnné $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$ (pro nějaká n, k).

Definice 6.8.3. Mějme formuli $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, kde $|\bar{x}| = n$ a $|\bar{y}| = k$, strukturu $\mathcal{A}$ v témž jazyce, a k-tici prvků $\bar{b} \in A^k$. *Množina definovaná formulí* $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ *s parametry* $\bar{b}$ *ve struktuře* $\mathcal{A}$, značíme $\varphi^{\mathcal{A},\bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$, je:

$$\varphi^{\mathcal{A},\bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}$$

Pro strukturu $\mathcal{A}$ a podmnožinu $B \subseteq A$ označíme $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ množinu všech množin definovatelných ve struktuře $\mathcal{A}$ s parametry pocházejícími z B.

Příklad 6.8.4. Pro $\varphi(x, y) = E(x, y)$ je $\varphi^{\mathcal{G},v}(x, y)$ množina všech sousedů vrcholu

Pozorování 6.8.5. *Množina* $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ *je uzavřená na doplněk, průnik, sjednocení, a obsahuje* $\emptyset$ *a* A^n*. Jde tedy o podalgebru potenční algebry* $\mathcal{P}(A^n)$*.*

6.8.1 Databázové dotazy

Definovatelnost nachází přirozenou aplikaci v relačních databázích, např. ve známém dotazovacím jazyce SQL. *Relační databáze* sestává z jedné nebo více *tabulek*, někdy se jim říká *relace*, řádky jedné tabulky jsou *záznamy (records)*, nebo také *tice (tuples)*. Jde tedy v principu o strukturu v čistě relačním jazyce. Představme si databázi obsahující dvě tabulky, Program a Movies, znázorněné na Obrázku 6.3.

SQL dotaz ve své nejjednodušší formě (pomineme-li např. *agregační funkce*) je v podstatě formule, a výsledkem dotazu je množina definovaná touto formulí (s parametry). Například, kdy a kde můžeme vidět film s Tomem Hanksem?

cinema	title	time
Atlas	Forrest Gump	20:00
Lucerna	Forrest Gump	21:00
Lucerna	Philadelphia	18:30
⋮	⋮	⋮

title	director	actor
Forrest Gump	R. Zemeckis	T. Hanks
Philadelphia	J. Demme	T. Hanks
Batman Returns	T. Burton	M. Keaton
⋮	⋮	⋮

Obrázek 6.3: Tabulky Program a Movies

select Program.cinema, Program.time **from** Program, Movies **where** Program.title = Movies.title **and** Movies.actor = 'T. Hanks'

Výsledkem bude množina $\varphi^{\text{Database,'T. Hanks'}}(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$ definovaná ve struktuře Database $= \langle D, \text{Program}, \text{Movies}\rangle$, kde $D = \{\text{'Atlas'}, \text{'Lucerna'}, \ldots, \text{'M. Keaton'}\}$, s parametrem 'T. Hanks' následující formulí $\varphi(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$:

$$(\exists y_{\text{title}})(\exists y_{\text{director}})(\text{Program}(x_{\text{cinema}}, y_{\text{title}}, x_{\text{time}}) \wedge \text{Movies}(y_{\text{title}}, y_{\text{director}}, \text{'T. Hanks'}))$$

6.9 Vztah výrokové a predikátové logiky

Nyní si ukážeme, jak lze výrokovou logiku 'simulovat' v logice predikátové, a to v teorii Booleových algeber. Nejprve představíme axiomy této teorie:

Definice 6.9.1 (Booleovy algebry)**.** *Teorie Booleových algeber* je teorie jazyka $L = \langle -, \wedge, \vee, \bot, \top\rangle$ s rovností sestávající z následujících axiomů:[27]

- *asociativita* $\wedge$ a $\vee$:
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
- *komutativita* $\wedge$ a $\vee$:
$$x \wedge y = y \wedge x$$
$$x \vee y = y \vee x$$
- *distributivita* $\wedge$ vůči $\vee$ a $\vee$ vůči $\wedge$:
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
- *absorpce*:
$$x \wedge (x \vee y) = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x$$
- *komplementace*:
$$x \wedge (-x) = \bot$$
$$x \vee (-x) = \top$$
- *netrivialita*:
$$\neg(\bot = \top)$$

Nejmenším modelem je *2-prvková Booleova algebra* $\langle\{0,1\}, f_\neg, f_\wedge, f_\vee, 0, 1\rangle$. Konečné Booleovy algebry jsou (až na *izomorfismus*) právě $\langle\{0,1\}^n, f^n_\neg, f^n_\wedge, f^n_\vee, (0,\ldots,0), (1,\ldots,1)\rangle$, kde f^n znamená, že funkci f aplikujeme po složkách.[28]

[27] Všimněte si *duality*: záměnou $\wedge$ s $\vee$ a $\bot$ s $\top$ získáme tytéž axiomy.

[28] Tyto Booleovy algebry jsou izomorfní *potenčním algebrám* $\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$, izomorfismus je daný bijekcí mezi podmnožinami a jejich charakteristickými vektory.

Výroky tedy můžeme chápat jako *Booleovské termy* (a konstanty $\bot, \top$ představují pravdu a lež), pravdivostní hodnota výroku při daném ohodnocení prvovýroků je potom dána hodnotou odpovídajícího termu v 2-prvkové Booleově algebře. Kromě toho, *algebra výroků* daného výrokového jazyka nebo teorie je Booleovou algebrou (to platí i pro nekonečné jazyky).

Na druhou stranu, máme-li *otevřenou* formuli φ (bez rovnosti), můžeme reprezentovat atomické výroky pomocí prvovýroků, a získat tak výrok, který platí, právě když platí φ. Více o tomto směru se dozvíme v Kapitole 8 (o rezoluci v predikátové logice), kde se nejprve zbavíme kvantifikátorů pomocí tzv. *Skolemizace*.

Výrokovou logiku bychom také mohli zavést jako fragment logiky predikátové, pokud bychom povolili *nulární relace* (a nulární relační symboly v jazyce): $A^0 = \{\emptyset\}$, tedy na libovolné množině jsou právě dvě nulární relace $R^A \subseteq A^0$: $R^A = \emptyset = 0$ a $R^A = \{\emptyset\} = \{0\} = 1$. To ale dělat nebudeme.

Kapitola 7

Tablo metoda v predikátové logice

V této kapitole ukážeme, jak lze zobecnit *metodu analytického tabla* z výrokové na predikátovou logiku.[1] Metoda funguje velmi podobně, musíme si ale poradit *kvantifikátory*.

7.1 Neformální úvod

V této sekci tablo metodu neformálně představíme. K formálním definicím se vrátíme později. Začneme dvěma příklady, na kterých ilustruje, jak tablo metoda v predikátové logice funguje, a jak se vypořádá s kvantifikátory.

Příklad 7.1.1. Na Obrázku 7.1.1 jsou znázorněna dvě tabla. Jsou to tablo důkazy (v logice, tj. z prázdné teorie) *sentencí* $(\exists x)\neg P(x) \to \neg(\forall x)P(x)$ (vpravo) a $\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)\neg P(x)$ (vlevo) jazyka $L = \langle P \rangle$ (bez rovnosti), kde P je unární relační symbol. Symbol c_0 je *pomocný konstantní symbol*, který do jazyka při konstrukci tabla přidáváme.

Položky

Formule v položkách musí být vždy *sentence*, neboť potřebujeme, aby měly v daném modelu *pravdivostní hodnotu* (nezávisle na ohodnocení proměnných). To ale není zásadní omezení, chceme-li dokázat, že formule φ platí v teorii T, můžeme nejprve nahradit formuli φ a všechny axiomy T jejich *generálními uzávěry* (tj. univerzálně kvantifikujeme všechny volné proměnné). Získáme tak *uzavřenou* teorii T' a sentenci φ' a platí: $T' \models \varphi'$ právě když $T \models \varphi$.

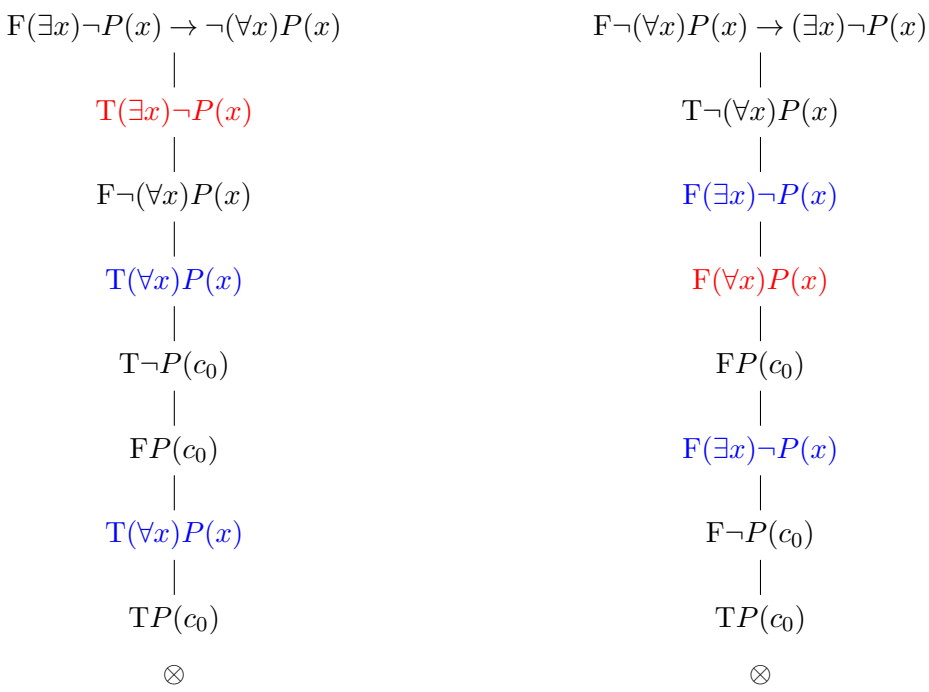
Kvantifikátory

Redukce položek funguje stejně, použijeme tatáž atomická tabla pro logické spojky (viz Tabulka 4.1, kde místo výroků jsou φ, ψ sentence). Musíme ale přidat 4 nová atomická tabla pro T/F a univerzální/existenční kvantifikátor. Tyto položky dělíme na dva typy:

- typ "*svědek*": položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
- typ "*všichni*": položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$

Příklady vidíme v tablech na Obrázku 7.1.1 ('svědci' jsou červeně, 'všichni' modře).

[1] Na tomto místě je dobré připomenout si tablo metodu ve výrokové logice, viz Kapitola 4.



Obrázek 7.1: Příklady tabel. Položky typu 'svědek' jsou znázorněny červeně, položky typu 'všichni' modře.

Kvantifikátor nemůžeme pouze odstranit, neboť výsledná formule $\varphi(x)$ by nebyla sentencí. Místo toho současně s odstraněním kvantifikátoru *substituujeme* za x nějaký *konstantní term*, v nové položce tedy bude *sentence* $\varphi(x/t)$. Jaký konstantní term t substituujeme záleží na tom, zda jde o položku typu "svědek" nebo "všichni".

Pomocné konstantní symboly

Jazyk L teorie T, ve které dokazujeme, rozšíříme o spočetně mnoho *nových (pomocných) konstantních symbolů* $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ (ale budeme psát i $c, d, \dots$), výsledný rozšířený jazyk označíme L_C. Konstantní termy v jazyce L_C tedy existují, i pokud původní jazyk L nemá žádné konstanty. A vždy při konstrukci tabla máme k dispozici nějaký *nový*, dosud *nepoužitý* (ani v teorii, ani v konstruovaném tablu) pomocný konstantní symbol $c \in C$.

Svědci

Při redukci položky typu "svědek" substituujeme za proměnnou jeden z těchto nových, pomocných symbolů, a to takový, který *dosud nebyl na dané větvi použit*. V případě položky $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/c)$. Tento konstantní symbol c bude hrát roli (nějakého) prvku, který danou formuli splňuje (resp. vyvrací, jde-li o položku tvaru $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$). Zde používáme větu o konstantách (Věta 6.6.15). Je důležité, že symbol c dosud nebyl na větvi ani v teorii nijak použit. Typicky ale poté použijeme položky typu "všichni", abychom se dozvěděli, co musí *o tomto svědku platit*.

Na Obrázku 7.1.1 vidíme příklad: položka $\mathrm{T}(\exists x)\neg P(x)$ v levém tablu je redukovaná, její redukcí vznikla položka $\mathrm{T}\neg P(c_0)$; $c_0 \in C$ je pomocný symbol, na větvi se dosud nevyskytoval

(a je první takový). Podobně pro položku $\mathrm{F}(\forall x)P(x)$ a $\mathrm{F}P(c_0)$ v pravém tablu.

Všichni

Při redukci položky typu "všichni" substituujeme za proměnnou x libovolný *konstantní term* t rozšířeného jazyka L_C. Z položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ tedy získáme položku $\mathrm{T}\varphi(x/t)$.

Aby byla bezesporná větev *dokončená*, budou na ní ale muset být položky $\mathrm{T}\varphi(x/t)$ pro *všechny* konstantní L_C-termy t. (Musíme 'použít' vše, co položka $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ 'říká'.) A stejně pro položku tvary $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$.

Ve výrokové logice jsme používali konvenci, že při připojování atomických tabel vynecháváme jejich kořeny (jinak bychom opakovali na větvi tutéž položku dvakrát). V predikátové logice použijeme stejnou konvenci, ale *s výjimkou položek typu 'svědek'*. U těch zapíšeme i kořen připojovaného atomického tabla. Proč to děláme? Abychom si připomněli, že s touto položkou ještě nejsme hotovi, že musíme připojit atomická tabla s jinými konstantními termy.

Na Obrázku 7.1.1 v levém tablu *není* položka $\mathrm{T}(\forall x)P(x)$ *redukovaná*. Její *první výskyt* (4. vrchol shora) jsme zredukovali, substituujeme term $t = c_0$, máme tedy $\varphi(x/t) = P(c_0)$. Připojili jsme atomické tablo v sestávající z téže položky v kořeni $\mathrm{T}(\forall x)P(x)$, kterou do tabla *zapíšeme*, a z položky $\mathrm{T}P(c_0)$ pod ní. Zatímco *první výskyt* položky $\mathrm{T}(\forall x)P(x)$ je tímto redukovaný, *druhý výskyt* (7. vrchol shora) redukovaný není. Podobně pro položku $\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x)$ v pravém tablu.

Tento poněkud technický přístup k definici *redukovanosti* (výskytů) položek typu 'všichni' se nám bude hodit v definici *systematického tabla*.

Jazyk

Nadále budeme předpokládat, že jazyk L je *spočetný*.[2] Z toho plyne, že každá L-teorie T má jen spočetně mnoho axiomů, a také že konstantních termů v jazyce L_C je jen spočetně mnoho. Toto omezení potřebujeme, neboť každé, i nekonečné tablo má jen spočetně mnoho položek, a musíme být schopni použít všechny axiomy dané teorie, a substituovat všechny konstantní termy jazyka L_C.

Nejprve také budeme předpokládat, že jde o jazyk *bez rovnosti*, což je jednodušší. Problémem je, že *tablo* je čistě syntaktický objekt, ale *rovnost* má speciální sémantický význam, totiž musí být v každém modelu interpretována relací identity. Jak adaptovat metodu pro jazyky s rovností si ukážeme později.

7.2 Formální definice

V této sekci definujeme všechny pojmy potřebné pro tablo metodu pro jazyky bez rovnosti. K jazykům s rovností se vrátíme v Sekci 7.3.1.

Buď L *spočetný* jazyk bez rovnosti. Označme jako L_C rozšíření jazyka L o spočetně mnoho nových *pomocných* konstantních symbolů $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Zvolme nějaké očíslování konstantních termů jazyka L_C, označme tyto termy $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Mějme nějakou L-teorii T a L-sentenci φ

[2] Z hlediska výpočetní logiky to není velké omezení.

7.2.1 Atomická tabla

Položka je nápis $\mathrm{T}\varphi$ nebo $\mathrm{F}\varphi$, kde φ je nějaká L_C-sentence. Položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ jsou *typu 'svědek'*, položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ jsou *typu 'všichni'*

Atomická tabla jsou položkami označkované stromy znázorněné v Tabulkách 7.1 a 7.2.

	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
True	$\mathrm{T}\neg\varphi$ | $\mathrm{F}\varphi$	$\mathrm{T}\varphi\wedge\psi$ | $\mathrm{T}\varphi$ | $\mathrm{T}\psi$	$\mathrm{T}\varphi\vee\psi$ / \\ $\mathrm{T}\varphi$ $\mathrm{T}\psi$	$\mathrm{T}\varphi\rightarrow\psi$ / \\ $\mathrm{F}\varphi$ $\mathrm{T}\psi$	$\mathrm{T}\varphi\leftrightarrow\psi$ / \\ $\mathrm{T}\varphi$ $\mathrm{F}\varphi$ | | $\mathrm{T}\psi$ $\mathrm{F}\psi$
False	$\mathrm{F}\neg\varphi$ | $\mathrm{T}\varphi$	$\mathrm{F}\varphi\wedge\psi$ / \\ $\mathrm{F}\varphi$ $\mathrm{F}\psi$	$\mathrm{F}\varphi\vee\psi$ | $\mathrm{F}\varphi$ | $\mathrm{F}\psi$	$\mathrm{F}\varphi\rightarrow\psi$ | $\mathrm{T}\varphi$ | $\mathrm{F}\psi$	$\mathrm{F}\varphi\leftrightarrow\psi$ / \\ $\mathrm{T}\varphi$ $\mathrm{F}\varphi$ | | $\mathrm{F}\psi$ $\mathrm{T}\psi$

Tabulka 7.1: Atomická tabla pro logické spojky; φ a ψ jsou libovolné L_C-sentence.

	$\forall$	$\exists$
True	$\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ | $\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$	$\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ | $\mathrm{T}\varphi(x/c_i)$
False	$\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ | $\mathrm{F}\varphi(x/c_i)$	$\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ | $\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$

Tabulka 7.2: Atomická tabla pro kvantifikátory; φ je L_C-sentence, x proměnná, t_i libovolný konstantní L_C-term, $c_i \in C$ je nový pomocný konstantní symbol (který se dosud nevyskytuje na dané větvi konstruovaného tabla).

7.2.2 Tablo důkaz

Definice v této části jsou téměř identické odpovídajícím definicím z výrokové logiky. Hlavní technický problém je jak definovat redukovanost položek typu 'všichni' na větvi tabla: chceme aby za proměnnou byly substituovány *všechny* možné konstantní L_C-termy t_i.

Definice 7.2.1 (Tablo)**.** *Konečné tablo z teorie T* je uspořádaný, položkami označkovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:

- jednoprvkový strom označkovaný libovolnou položkou je tablo z teorie T,

- pro libovolnou položkou P na libovolné větvi V, můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P, přičemž je-li P typu 'svědek', můžeme použít jen pomocný konstantní symbol $c_i \in C$, který se na větvi V dosud nevyskytuje (pro položky typu 'všichni' můžeme použít libovolný konstantní L_C-term t_i),
- na konec libovolné větve můžeme připojit položku Tα pro libovolný axiom teorie $\alpha \in T$.

Tablo z teorie T je buď konečné, nebo i *nekonečné*: v tom případě vzniklo ve spočetně mnoha krocích. Můžeme ho formálně vyjádřit jako sjednocení $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_i jsou konečná tabla z T, τ_0 je jednoprvkové tablo, a τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku.[3]

Tablo *pro položku* P je tablo, které má položku P v kořeni.

Připomeňme konvenci, že pokud P *není* typu 'všichni', potom kořen atomického tabla nebudeme zapisovat (neboť vrchol s položkou P už v tablu je).

Cvičení 7.1. Ukažte v jednotlivých krocích jak byla tabla z Obrázku 7.1.1 zkonstruována.

Definice 7.2.2 (Tablo důkaz)**.** *Tablo důkaz* sentence φ z teorie T je *sporné* tablo z teorie T s položkou Fφ v kořeni. Pokud existuje, je φ *(tablo) dokazatelná* z T, píšeme $T \vdash \varphi$. (Definujme také *tablo zamítnutí* jako sporné tablo s Tφ v kořeni. Pokud existuje, je φ *(tablo) zamítnutelná* z T, tj. platí $T \vdash \neg\varphi$.)

- Tablo je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je *sporná*, pokud obsahuje položky Tψ a Fψ pro nějaký výrok ψ, jinak je *bezesporná*.
- Tablo je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je *dokončená*, pokud
  - je sporná, nebo
  - je každá položka na této větvi *redukovaná* a zároveň větev obsahuje položku Tα pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je *redukovaná* na větvi V procházející touto položkou, pokud
  - není typu 'všichni' a při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V, tj. vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla.[4]
  - je typu 'všichni' a všechny její *výskyty* na V jsou na větvi V *redukované*.
- Výskyt položky P typu 'všichni' na větvi V je *i-tý*, pokud má na V právě $i-1$ předků označených touto položkou, a i-tý výskyt je *redukovaný* na V, pokud
  - položka P má $(i+1)$-ní výskyt na V, a zároveň
  - na V se vyskytuje položka T$\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$) resp. F$\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$), kde t_i je i-tý konstantní L_C-term. (Tj. už jsme za x substituovali term t_i.)

[3] Sjednocení proto, že v jednotlivých krocích přidáváme do tabla nové vrcholy, τ_i je tedy podstromem τ_{i+1}.
[4] Byť podle konvence tento kořen nezapisujeme.

Všimněte si, že je-li položka typu 'všichni' na nějaké větvi redukovaná, musí mít na této větvi nekonečně mnoho výskytů, a museli jsme v nich použít při substituci všechny možnosti, tj. všechny konstantní L_C-termy.

Cvičení 7.2. Sestrojte tablo důkazy *v logice* (z prázdné teorie) následujících sentencí:

(a) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$

(b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$, kde $\varphi(x), \psi(x)$ jsou libovolné formule s jedinou volnou proměnnou x.

7.2.3 Systematické tablo

7.3 Jazyky s rovností

7.3.1 Axiomy rovnosti

7.3.2 Kongruence a faktorstruktura

7.4 Korektnost a úplnost

7.4.1 Věta o korektnosti

7.4.2 Kanonický model

7.4.3 Věta o úplnosti

7.5 Důsledky korektnosti a úplnosti

7.5.1 Löwenheim-Skolemova věta

7.5.2 Věta o kompaktnosti

7.5.3 Aplikace

7.6 Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

[TODO]

Kapitola 8

Rezoluce v predikátové logice

8.1 Úvod

8.2 Skolemizace

8.2.1 Ekvisplnitelnost

8.2.2 Prenexní normální forma

8.2.3 Skolemova varianta

8.2.4 Skolemova věta

8.3 Grounding

8.3.1 Herbrandův model

8.3.2 Herbrandova věta

8.3.3 Důsledky

8.4 Unifikace

8.4.1 Substituce

8.4.2 Unifikační algoritmus

8.5 Rezoluční metoda

8.5.1 Rezoluční pravidlo

8.5.2 Rezoluční důkaz

8.6 Korektnost a úplnost

8.6.1 Věta o korektnosti

8.6.2 Lifting lemma

8.6.3 Věta o úplnosti

8.7 LI-rezoluce

8.7.1 Rezoluce v Prologu

Část III

Pokročilé partie

Kapitola 9

Teorie modelů

Kapitola 10

Nerozhodnutelnost a neúplnost

10.1 Rozhodnutelnost

10.1.1 Rekurzivní axiomatizovatelnost

10.1.2 Rozhodnutelné teorie

10.2 Aritmetika

10.2.1 Robinsonova a Peanova aritmetika

10.2.2 Hilbertův desátý problém

10.3 Nerozhodnutelnost predikátové logiky

10.4 Gödelovy věty

10.4.1 První věta o neúplnosti

10.4.2 Důsledky první věty

10.4.3 Druhá věta o neúplnosti

10.4.4 Důsledky druhé věty

Příloha A

Aplikace logiky

[TODO]
Viz Wikipedia.

Příloha B

Historie logiky

Historii logiky jako vědního oboru[1] lze velmi zhruba rozdělit do několika fází podle hlavní aplikační domény (a povolání většiny praktikujících logiků). Zde uvádíme jen několik nejdůležitějších milníků.

Logika ve filozofii (od 6. století př. n. l.)

- Helénistická filozofie: Aristotelés (384—322 př. n. l.), základy predikátové logiky, kvantifikátory (*všichni*/*někteří*), proměnné (α, β, γ) zastupující logické formule, dedukce ve formě sylogismů. Stoická škola (3. stol. př. n. l.) (výroková logika).

  > *[Zásada vyloučeného sporu] "Totéž nemůže zároveň náležet a nenáležet témuž a v témž vztahu."*
  >
  > *Všichni lidé jsou smrtelní.*
  > *Sókratés je člověk.*
  > *Závěr: Sókratés je smrtelný.*

- Islámská filozofie a teologie: Avicenna (980-–1037), induktivní uvažování, souvislost implikace a času (inspirace pro pozdější *temporální* logiku).

  > *"Každý, kdo popírá zásadu vyloučeného sporu, by měl být bit a pálen, dokud nepřizná, že být bit není totéž jako nebýt bit, a být pálen není totéž jako nebýt pálen."*
  >
  > *"Bůh vidí celý řetězec příčin a důsledků zvenku (mimo čas), a proto si je vědom každé dílčí události (v čase)"*

- Středověká filozofie a teologie: Ockham (1287?–1347), rozdíl mezi *materiální* a *logickou* implikací.

  > *"Si homo currit, Deus est." [Pokud člověk běží, Bůh existuje.]*

[1] Viz Wikipedia.

"Logika je ze všech [svobodných] umění ten nejužitečnější nástroj, bez kterého žádná věda nemůže být dokonale poznána."

[Ockhamova břitva] "Nic by nemělo být předkládáno bez udání důvodu, pokud to není samozřejmé nebo známé ze zkušenosti nebo dokázané autoritou Písma svatého."

Logika v matematice

- kořeny: Thales (dedukce v geometrii), Pythagoras (koncept důkazu), Eukleidés (axiomatizace geometrie), Descartes (algebraizace geometrie)
- Leibniz (1679–90): *characteristica universalis* a *calculus ratiocinator*, snaha o vytvoření univerzálního symbolického jazyka a kalkulu lidského myšlení.

  "Jediný způsob, jak napravit naše úvahy, je učinit je stejně hmatatelnými jako úvahy matematiků, abychom na první pohled našli naši chybu, a když mezi lidmi dojde ke sporům, můžeme jednoduše říci: Calculemus! [Počítejme!], bez dalších okolků, abychom viděli, kdo má pravdu."

- algebraická škola (od 1847): Boole (*Mathematical Analysis of Logic*, 1847; *The Laws of Thought*, 1854), DeMorgan, Venn, algebraické zákony vyjadřující logické vztahy, Booleova algebra, booleovské funkce jako sémantika výroků.

  Např. Distributivita konjunkce vůči disjunkci:

  $$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

  nebo DeMorganovy zákony:

  $$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
  $$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

- logicismus (od 1872): snaha vyjádřit celou matematiku v logickém jazyce:
- Cantor (1878): naivní teorie množin, pro každou vlastnost $\varphi(x)$ máme množinu $\{x \mid \varphi(x)\}$.
- Frege: predikátové logiky, syntaxe pokus o axiomatizaci aritmetiky, teorie množin.
- Schröder: sémantika predikátové logiky, modely jsou *struktury* (např. graf, grupa, těleso).
- Russel (1903): naivní teorie množin je sporná, tzv. *Russelův paradox* "Platí $x \in x$ pro množinu $x = \{y \mid \neg(y \in y)\}$?", známý také jako *paradox holiče*.

  "Holič holí každého, kdo neholí sám sebe. Holí holič sám sebe?"

- Zermelo, Fraenkel (1908, 1922): axiomatizace ZFC teorie množin ('C' znamená 'choice', tzv. *axiom výběru*).
- [TODO]

Logika v teoretické informatice

[**TODO**]

Logika v aplikované informatice

[TODO]

Příloha C

Další logické systémy

Intuicionistická logika, temporální logiky, modální logiky, fuzzy logiky [TODO]

Literatura

[1] Mordechai Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science*. Springer London, June 2012. Google-Books-ID: hxOpugAACAAJ.

[2] Petr Gregor. Výroková a predikátová logika.

[3] Anil Nerode and Richard A. Shore. *Logic for Applications*. Springer Science & Business Media, December 2012. Google-Books-ID: 90HhBwAAQBAJ.

[4] Martin Pilát. Lecture Notes on Propositional and Predicate Logic. original-date: 2017-10-05T20:42:26Z.