Devátá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

Devátá přednáška

Program

- Löwenheim-Skolemova věta
- věta o kompaktnosti
- hilbertovský kalkulus.
- úvod do rezoluce v predikátové logice
- skolemizace

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 7.5-7.6 z Kapitoly 7, Sekce 8.1-8.2 z Kapitoly 8

7.5 Důsledky korektnosti a úplnosti

$\vdash \; = \; \models$

Syntaktickou analogií důsledků jsou teorémy:

$$\mathrm{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$
- $\mathrm{Thm}_L(T) = \mathrm{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit ‘platnost’ pojmem ‘dokazatelnost’. Např:

- T je sporná, je-li v ní dokazatelný spor (tj. $T \vdash \bot$)
- T je kompletní, je-li pro každou sentenci buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$, ale ne obojí (jinak by byla sporná)

Věta (O dedukci): $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \to \psi$.

Důkaz: Stačí dokázat: $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \to \psi$. To je snadné. $\square$

Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

Věta (Löwenheim-Skolemova): Je-li L spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná L-teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

Důkaz: V T není dokazatelný spor. Dokončené tablo z T s $\mathrm{F}\perp$ v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je L-redukt kanonického modelu pro tuto větev. $\square$

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

Věta (O kompaktnosti): Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Důkaz: Model teorie je modelem každé části. Naopak, pokud T nemá model, je sporná, tedy $T \vdash \perp$. Vezměme nějaký konečný tablo důkaz $\perp$ z T. K jeho konstrukci stačí konečně mnoho axiomů T, ty tvoří konečnou podteorii $T' \subseteq T$, která nemá model. $\square$

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je standardní model přirozených čísel
- teorie struktury $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence pravdivé v $\underline{\mathbb{N}}$
- n-tý numerál: term $\underline{n} = S(S(\cdots(S(0)\cdots))$, kde S je n-krát

Přidáme nový konstantní symbol c a vyjádříme, že je ostře větší než každý n-tý numerál:

$$T = \mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část T má model
- dle věty o kompaktnosti: i T má model
- říkáme mu nestandardní model (označme $\mathcal{A}$)
- platí v něm tytéž sentence, které platí ve standardním modelu
- ale zároveň obsahuje prvek $c^{\mathcal{A}}$, který je větší než každé $n \in \mathbb{N}$ (tzn. větší než hodnota termu $\underline{n}$ v nestandardním modelu $\mathcal{A}$)

7.6 Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

- používá jen $\neg$ a $\rightarrow$, dokazuje lib. formule (nejen sentence)
- schémata log. axiomů (φ, ψ, χ formule, t term, x proměnná)
  - (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - (ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  - (iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - (iv) $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$ je-li t substituovatelný za x do φ
  - (iiv) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$ není-li x volná ve φ

  a navíc **axiomy rovnosti**, je-li jazyk s rovností
- odvozovací pravidla:

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{ (modus ponens)} \qquad \frac{\varphi}{(\forall x)\varphi} \text{ (generalizace)}$$

- hilbertovský důkaz formule φ z T je konečná posloupnost $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$, kde φ_i je logický axiom (vč. axiomů rovnosti), axiom teorie, nebo lze odvodit z předchozích pomocí pravidel
- existuje-li, píšeme $T \vdash_H \varphi$

Korektnost a úplnost

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu: každá φ_i (vč. $\varphi_n = \varphi$) platí v T

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v T
- axiomy z T jistě v T také platí
- modus ponens i generalizace jsou korektní inferenční pravidla:
  - je-li $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \rightarrow \psi$, potom $T \models \psi$
  - je-li $T \models \varphi$, potom $T \models (\forall x)\varphi$ $\square$

Věta (o úplnosti hilbertovského kalkulu): $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash_H \varphi$

Důkaz vynecháme.

Kapitola 8: Rezoluce v predikátové logice

8.1 Úvod

Rezoluce v predikátové logice

$T \models \varphi$? $\rightsquigarrow$ $T \cup \{\neg\varphi\}$ $\rightsquigarrow$ CNF formule S $\rightsquigarrow$ rezoluční zamítnutí

(pozor: φ musí být sentence!)

- literál je atomická formule $R(t_1, \ldots, t_n)$ nebo její negace
- klauzule je konečná množina literálů, formule množina klauzulí
- otevřenou formuli snadno převedeme do CNF, i univerzální kvantifikátor na začátku: $(\forall x)(P(x) \vee \neg Q(x)) \sim \{P(x), \neg Q(x)\}$
- co s existenčními kvantifikátory? nové symboly pro 'svědky' $(\exists x)(P(x) \vee \neg Q(x)) \rightsquigarrow \{P(c), \neg Q(c)\}$ "skolemizace"
- není ekvivalentní, ale zachovává [ne]splnitelnost, to nám stačí
- rezoluční krok? literály nemusí být stejné, stačí unifikovatelné z klauzulí $\{P(x), \neg Q(x)\}$ a $\{Q(f(c))\}$ odvodíme $\{P(f(c))\}$
- unifikace je substituce $\{x/f(c)\}$

Příklady

1. $T = \{(\forall x)P(x), (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))\}$, $\varphi = (\exists x)Q(x)$

$$\neg\varphi = \neg(\exists x)Q(x) \sim (\forall x)\neg Q(x) \sim \neg Q(x)$$

$T \cup \{\neg\varphi\}$ je ekvivalentní $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(x)\}\}$
rezoluční zamítnutí: představte si p místo $P(x)$, q místo $Q(x)$

2. $T = \{(\forall x)(\exists y)R(x,y), R(x,y) \rightarrow Q(x)\}$, $\varphi = (\exists x)Q(x)$

$$T \cup \{\neg\varphi\} \sim \{(\forall x)(\exists y)R(x,y), \neg R(x,y) \vee Q(x), \neg Q(x)\}$$

formuli $(\forall x)(\exists y)R(x,y)$ nahradíme $R(x, f(x))$, kde f je nový unární funkční symbol (reprezentuje výběr svědka):

$$S = \{\{R(x, f(x))\}, \{\neg R(x,y), Q(x)\}, \{\neg Q(x)\}\}$$

není ekvivalentní, ale ekvisplnitelná (zde obě nesplnitelné), vidíme po substituci $y/f(x)$, která unifikuje $R(x, f(x))$ a $R(x,y)$

Unifikace

$$S = \{\{R(x, f(x))\}, \{\neg R(x, y), Q(x)\}, \{\neg Q(x)\}\}$$

- na úrovni výrokové logiky (ground level):
$$\{\{r\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, p\}, \{\neg q\}\}$$
není nesplnitelné! musíme využít, že $R(x, f(x))$ a $R(x, y)$ mají ‘podobnou strukturu’ (jsou unifikovatelné)
- klauzule $\{\neg R(x, y), Q(x)\}$ platí i po provedení libovolné substituce: $\{\neg R(x/t), Q(x/t)\}$ je důsledek S pro lib. term t
- představme si ‘přidání’ všech takto získaných klauzulí do S: potom už je na ground level nesplnitelné (ale nekonečné)
- unifikační algoritmus nám dá správnou substituci $y/f(x)$
- zahrneme už do rezolučního pravidla, tedy rezolventou klauzulí $\{P(c)\}$ a $\{\neg P(x), Q(x)\}$ bude klauzule $\{Q(c)\}$.

Rezoluční pravidlo

- zahrnuje aplikaci unifikace
- lze vybrat více literálů najednou, ale musí být unifikovatelné:

  např. z $\{R(x, f(x)), R(g(y), z)\}, \{\neg R(g(c), u), P(u)\}$
  odvodíme rezolventu $\{P(f(g(c)))\}$ za použití unifikace

  $$\{x/g(c), y/c, z/f(g(c)), u/f(g(c))\}$$

- budeme vyžadovat disjunktní množiny proměnných v klauzulích; lze přejmenovat, proměnné mají lokální význam:

  $$\models (\forall x)(\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\forall x)\psi \wedge (\forall x)\chi$$

8.2 Skolemizace

Ekvisplnitelná otevřená teorie

- teorie T v jazyce L a T' v (ne nutně stejném) jazyce L' jsou ekvisplnitelné, pokud platí: T má model $\Leftrightarrow$ T' má model
- zajímá nás jen [ne]splnitelnost (dokazujeme sporem)
- pro převod do CNF a rezoluci potřebujeme otevřené formule

Cíl: Ke každé teorii T sestrojíme ekvisplnitelnou, otevřenou T'.

1. převod do prenexní normální formy (vytkneme kvantifikátory)
2. nahradíme generálními uzávěry (potřebujeme sentence!)
3. nahradíme sentence Skolemovými variantami (odstranění $\exists$)
4. odstraníme zbývající $\forall$, máme otevřené formule

Prenexní normální forma

Formule φ je v prenexní normální formě (PNF), je-li následujícího tvaru, kde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ a formule φ' je otevřená:

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \varphi'$$

- $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n)$ je kvantifikátorový prefix, φ' otevřené jádro
- univerzální formule: v PNF a všechny kvantifikátory jsou $\forall$

Tvrzení: Ke každé formuli φ existuje ekvivalentní formule v PNF.

Důkaz: nahrazujeme podformule ekvivalentními s cílem posunout kvantifikátory blíž kořeni Tree(φ), dle pravidel z násl. Lemmatu. $\square$

Důsledek: Existuje i ekvivalentní PNF sentence (generální uzávěr).

Pravidla vytýkání kvantifikátorů

Lemma: Označme $\overline{Q}$ opačný kvantifikátor ke Q. Jsou-li φ a ψ formule, kde x není volná v ψ, potom:

$$\begin{aligned}
\neg(Qx)\varphi &\sim (\overline{Q}x)\neg\varphi \\
(Qx)\varphi \land \psi &\sim (Qx)(\varphi \land \psi) \\
(Qx)\varphi \lor \psi &\sim (Qx)(\varphi \lor \psi) \\
(Qx)\varphi \to \psi &\sim (\overline{Q}x)(\varphi \to \psi) \\
\psi \to (Qx)\varphi &\sim (Qx)(\psi \to \varphi)
\end{aligned}$$

Důkaz: snadno ověříme sémanticky, nebo tablo metodou (potom ale nejsou-li sentence, musíme nahradit generálními uzávěry) □

Pozorování: Nahradíme-li ve φ podformuli ψ ekvivalentní ψ', je i výsledná formule φ' ekvivalentní φ. (Připomeňme: $\varphi \sim \varphi'$ právě když mají stejné modely, tj. $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$)

Převod do PNF: příklad

$$(\forall z)P(x,z) \wedge P(y,z) \;\rightarrow\; \neg(\exists x)P(x,y)$$

$$\sim (\forall u)P(x,u) \wedge P(y,z) \;\rightarrow\; (\forall x)\neg P(x,y)$$

$$\sim (\forall u)(P(x,u) \wedge P(y,z)) \;\rightarrow\; (\forall v)\neg P(v,y)$$

$$\sim (\exists u)(P(x,u) \wedge P(y,z) \;\rightarrow\; (\forall v)\neg P(v,y))$$

$$\sim (\exists u)(\forall v)(P(x,u) \wedge P(y,z) \;\rightarrow\; \neg P(v,y))$$

- v prvním kroku přejmenujeme z na u, nesmí být volná v $P(y,z)$
- podobně ve druhém kroku x na v
- která pravidla používáme? sledujte postup na stromu formule
- chceme-li sentenci:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(P(x,u) \wedge P(y,z) \rightarrow \neg P(v,y))$$

Poznámky

1. proč se při vytýkání z antecedentu mění kvantifikátor?

$$\begin{aligned}(Qx)\varphi \rightarrow \psi &\sim \neg(Qx)\varphi \vee \psi \\ &\sim (\overline{Q}x)(\neg\varphi) \vee \psi \\ &\sim (\overline{Q}x)(\neg\varphi \vee \psi) \sim (\overline{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi)\end{aligned}$$

2. proč nesmí být x volná v ψ? neplatilo by, např:

$$(\exists x)P(x) \wedge Q(x) \;\not\sim\; (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

musíme přejmenovat vázanou proměnnou x na novou:

$$(\exists x)P(x) \wedge Q(x) \;\sim\; (\exists y)P(y) \wedge Q(x) \sim (\exists y)(P(y) \wedge Q(x))$$

3. PNF není jednoznačná, lze vytýkat v různém pořadí; lepší je nejprve vytknout ty, ze kterých se nakonec stanou existenční:

$$(\exists y)(\forall x)\varphi(x,y) \text{ je lepší než } (\forall x)(\exists y)\varphi(x,y)$$

(protože "y nezávisí na x")

Skolemova varianta

Je-li PNF sentence univerzální, tvaru $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\psi(x_1,\dots,x_n)$, nahradíme otevřeným jádrem ψ. Jinak musíme provést skolemizaci:

Buď φ L-sentence v PNF, všechny vázané proměnné různé. Nechť

- existenční kvantifikátory jsou $(\exists y_1),\dots,(\exists y_n)$ (v tom pořadí)
- pro každé i jsou $(\forall x_1),\dots,(\forall x_{n_i})$ právě všechny univerzální kvantifikátory předcházející $(\exists y_i)$ v prefixu φ

Buď L' rozšíření L o nové funkční symboly $f_1,\dots,f_n$, kde f_i je n_i-ární. Skolemova varianta φ je L'-sentence φ_S vzniklá odstraněním $(\exists y_i)$ a substitucí termu $f_i(x_1,\dots,x_{n_i})$ za y_i, postupně pro $i = 1,\dots,n$.

$$\varphi = (\exists y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y_2)(\forall x_3)\ R(y_1,x_1,x_2,y_2,x_3)$$

$$\varphi_S = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)\ R(f_1,x_1,x_2,f_2(x_1,x_2),x_3)$$

- musí být sentence! pro $(\exists y)E(x,y)$ ne $\cancel{E(x,c)}$ ale $E(x,f(x))$
- nové symboly! (jedinou rolí je reprezentovat 'svědky' ve φ)

Je to konzervativní extenze

Lemma: Buď φ L-sentence $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\exists y)\psi$, f nový funkční symbol, a φ' sentence $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\psi(y/f(x_1,\ldots,x_n))$. Potom:

(i) L-redukt každého modelu φ' je modelem φ, a

(ii) každý model φ lze expandovat na model φ'.

Důkaz: (i) Buď $\mathcal{A}'$ model φ', $\mathcal{A}$ jeho L-redukt, $e : \mathrm{Var} \to \mathcal{A}$.
$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ platí neboť $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$ pro $a = (f(x_1,\ldots,x_n))^{\mathcal{A}'}[e]$.

(ii) Protože $\mathcal{A} \models \varphi$, existuje funkce $f^A : A^n \to A$, že pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$ pro $a = f^A(e(x_1),\ldots,e(x_n))$.
To znamená, že expanze o funkci f^A splňuje φ'. □

- říká, že $\{\varphi'\}$ je konzervativní extenze $\{\varphi\}$, opakovaná aplikace dává Skolemovu větu (výsledek skolemizace je otevřená konzervativní extenze, speciálně je ekvisplnitelná)
- expanze v (ii) není jednoznačná (na rozdíl od extenze o definici nového funkčního symbolu)

Skolemova věta (shrnutí postupu)

Věta: Každá teorie má otevřenou konzervativní extenzi.

Důkaz Mějme L-teorii T. Axiomy nahradíme generálními uzávěry a převedeme do PNF, máme ekvivalentní L-teorii T'. V ní každý axiom nahradíme jeho Skolemovou variantou.

Tím získáme teorii T'' v rozšířeném jazyce L'. Lemma říká:

- L-redukt každého modelu T'' je model T'
- každý model T' lze expandovat do L' na model T''

Neboli T'' je konzervativní extenzí T', tedy i T. Je axiomatizovaná univerzálními sentencemi, odstraníme kvantifikátorové prefixy (vezmeme jádra) a máme ekvivalentní otevřenou teorii T'''. $\square$

Důsledek: Ke každé teorii můžeme pomocí skolemizace najít ekvisplnitelnou otevřenou teorii. (A tu už snadno převedeme do CNF.)