

NAIL062 V&P Logika: 9. cvičení

Témata: Tablo metoda v predikátové logice, jazyky s rovností.

Příklad 1. Předpokládejme, že

- (a) všichni viníci jsou lháři,
- (b) aspoň jeden z obviněných je také svědkem,
- (c) žádný svědek nelže.

Dokažte tablo metodou, že ne všichni obvinění jsou viníci.

Příklad 2. Nechť $L(x, y)$ reprezentuje “*existuje let z x do y* ” a $S(x, y)$ reprezentuje “*existuje spojení z x do y* ”. Předpokládejme, že

- (a) Z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže,
- (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Příklad 3. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že

- (a) $T^* \models x = y \rightarrow y = x$ (symetrie)
- (b) $T^* \models (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$,
na (b) použijte (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

Příklad 4. Buď T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d \rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, f unární funkční symbol, a c, d konstantní symboly:

$$\begin{aligned} T = \{ & R(x, x), \\ & R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), \\ & R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, \\ & R(f(x), x) \} \end{aligned}$$

Označme jako T' generální uzávěr T . Nechť φ a ψ jsou následující formule:

$$\begin{aligned} \varphi &= R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d), \\ \psi &= (\exists x)R(x, f(x)). \end{aligned}$$

- (a) Sestrojte tablo důkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Pro zjednodušení můžete kromě axiomů rovnosti v tablu přímo používat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$, což je důsledek axiomů rovnosti.)
- (b) Ukažte, že ψ není důsledek teorie T , tím že najdete model T , ve kterém ψ neplatí.

- (c) Kolik jednoduchých úplných extenzí (až na ekvivalenci) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Napište dvě z nich.
- (d) Necht S je následující teorie v jazyce $L' = \langle R \rangle$ s rovností:

$$S = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y\}$$

Je T konzervativní extenzí S ? Zdůvodněte.

Příklad 5. Ukažme, že platí následující pravidla ‘vytýkání’ kvantifikátorů. Používáme je při převodu do tzv. *Prenexní normální formy*. V následujících příkladech jsou φ a ψ sentence nebo formule s volnou proměnnou x (což značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$). Najděte tablo důkazy dané formule:

- (a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$,
- (b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$,
- (c) $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$,
- (d) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,
- (e) $(\varphi \vee (\forall x)\psi(x)) \rightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi(x))$ kde x není volná v φ ,
- (f) $(\varphi \wedge (\exists x)\psi(x)) \rightarrow (\exists x)(\varphi \wedge \psi(x))$ kde x není volná v φ .
- (g) $(\exists x)(\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\exists x)\psi(x))$ kde x není volná v φ ,
- (h) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \rightarrow (\varphi \wedge (\exists x)\psi(x))$ kde x není volná v φ ,
- (i) $(\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$ kde x není volná v ψ ,
- (j) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$ kde x není volná v ψ .

Příklad 6. Dokažte větu o konstantách syntakticky, pomocí transformací tabel.

Věta. Buď φ formula v jazyce L s volnými proměnnými x_1, \dots, x_n a T teorie v L . Označme L' extenzi L o nové konstantní symboly c_1, \dots, c_n a T' teorii T v L' . Potom platí

$$T \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n) \varphi \quad \text{právě když} \quad T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

Příklad 7. Dokažte větu o dedukci syntakticky, pomocí transformací tabel.

Věta. Pro každou teorii T (v uzavřené formě) a sentence φ , ψ ,

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi.$$

Domácí úkol (3 body).