NAIL062 V&P Logika: 9. cvičení

Témata: Tablo metoda v predikátové logice, jazyky s rovností.

Příklad 1. Předpokládejme, že

(a) všichni viníci jsou lháři,

(b) aspoň jeden z obviněných je také svědkem,

(c) žádný svědek nelže.

Dokažte tablo metodou, že ne všichni obvinění jsou viníci.

Příklad 2. Nechť $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z x do y"*. Předpokládejme, že

(a) Z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže,

(b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to L(y, x))$,

(c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to S(x, y))$,

(d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \land L(y, z) \to S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Příklad 3. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že

(a) $T^* \models x = y \ \to \ y = x$ (symetrie)

(b) $T^* \models (x = y \ \land \ y = z) \ \to \ x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$,
na (b) použijte (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

Příklad 4. Ukažme, že platí následující pravidla 'vytýkání' kvantifikátorů. Používáme je při převodu do tzv. *Prenexní normální formy.* V následujících příkladech jsou φ a ψ sentence nebo formule s volnou proměnnou x (což značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$). Najděte tablo důkazy dané formule:

(a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \to (\forall x)\neg\varphi(x)$,

(b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \to \neg(\exists x)\varphi(x)$,

(c) $(\exists x)(\varphi(x) \lor \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \lor (\exists x)\psi(x)$,

(d) $(\forall x)(\varphi(x) \land \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \land (\forall x)\psi(x)$,

(e) $(\varphi \lor (\forall x)\psi(x)) \to (\forall x)(\varphi \lor \psi(x))$ kde x není volná v φ,

(f) $(\varphi \land (\exists x)\psi(x)) \to (\exists x)(\varphi \land \psi(x))$ kde x není volná v φ.

(g) $(\exists x)(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to (\exists x)\psi(x))$ kde x není volná v φ,

(h) $(\exists x)(\varphi \land \psi(x)) \to (\varphi \land (\exists x)\psi(x))$ kde x není volná v φ,

(i) $(\exists x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\forall x)\varphi(x) \to \psi)$ kde x není volná v ψ,

(j) $((\exists x)\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x)(\varphi(x) \to \psi)$ kde x není volná v ψ.

Příklad 5. Dokažte větu o konstantách syntakticky, pomocí transformací tabel.

Věta. *Buď φ formula v jazyce L s volnými proměnnými $x_1, \dots, x_n$ a T teorie v L. Označme L' extenzi L o nové konstantní symboly $c_1, \dots, c_n$ a T' teorii T v L'. Potom platí*

$$T \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\varphi \quad \textit{právě když} \quad T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

Příklad 6. Dokažte větu o dedukci syntakticky, pomocí transformací tabel.

Věta. *Pro každou teorii T (v uzavřené formě) a sentence φ, ψ,*

$$T \vdash \varphi \to \psi \quad \textit{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi.$$

Domácí úkol (3 body)**.**