NAIL062 V&P Logika: 1. sada příkladů

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmům syntaxe výrokové logiky (jazyk, prvovýrok, výrok, strom výroku, podvýrok, teorie), umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům model, důsledek teorie, umí je formálně definovat a uvést příklady
- umí formalizovat daný systém (slovní/výpočetní úlohu, apod.) ve výrokové logice
- umí najít modely dané teorie
- umí rozhodnout, zda je daný výrok důsledkem dané teorie
- má zkušenost s použitím (s pomocí instruktora) tablo metody a rezoluční metody k důkazu vlastností daného systému (např. k řešení slovní úlohy)

Příklady na cvičení

Příklad 1. Ztratili jsme se v labyrintu a před námi jsou troje dveře: červené, modré, a zelené. Víme, že za právě jedněmi dveřmi je cesta ven, za ostatními je drak. Na dveřích jsou nápisy:

- Červené dveře: *"Cesta ven je za těmito dveřmi."*
- Modré dveře: *"Cesta ven není za těmito dveřmi."*
- Zelené dveře: *"Cesta ven není za modrými dveřmi."*

Víme, že alespoň jeden z nápisů je pravdivý a alespoň jeden je lživý. Kudy vede cesta ven?

(a) Zvolte vhodný jazyk (množinu prvovýroků) $\mathbb{P}$.
(b) Formalizujte všechny znalosti jako teorii T v jazyce $\mathbb{P}$. (Pozor: Axiomy nejsou nápisy na dveřích, ty nemusí být pravdivé.)
(c) Najděte všechny modely teorie T.
(d) Formalizujte tvrzení "Cesta ven je za červenými/modrými/zelenými dveřmi" jako výroky $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nad $\mathbb{P}$. Je některý z těchto výroků důsledkem T?
(e) Vyzkoušejte si použití tablo metody: Zkonstruujte tablo z teorie T s položkou $F\varphi_i$ v kořeni, budou všechny větve sporné? (Pokuste se vymyslet správné kroky konstrukce tabla, inspirujte se příkladem z přednášky.)
(f) Vyzkoušejte si použití rezoluční metody: Převeďte axiomy teorie T, a také výrok $\neg\varphi_i$, do konjunktivní normální formy (CNF). Pokuste se sestrojit rezoluční zamítnutí, zakreslete ho ve formě rezolučního stromu. (Pozor: Nezapomeňte znegovat dokazovaný výrok φ_i.)

Řešení. *(a) Přirozenou volbou je jazyk $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$, kde p_i znamená 'za i-tými dveřmi je cesta ven', kde dveře vezměme v pořadí červené, modré, zelené jako v zadání. (Také bychom mohli použít 'za i-tými dveřmi je drak' nebo 'nápis na i-tých dveřích je pravdivý'. Důležité je, aby zvolený jazyk byl co nejmenší. Máme-li p_i, můžeme např. 'za i-tými dveřmi je drak' vyjádřit jako '$\neg p_i$', nepotřebujeme další prvovýrok. Dále chceme, aby šlo vlastnosti ze zadání formalizovat co nejsnáze.)*

(b) Ze zadání chápeme, že 'je drak' znamená totéž, co 'není cesta ven'. To, že cesta ven je za právě jedněmi dveřmi, vyjádříme tak, že řekneme, že je za alespoň jedněmi dveřmi, a pro každou dvojici dveří alespoň za jedněmi není:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3)$$

Nyní k nápisům na dveřích, nejprve formalizujeme jejich význam:

- *Červené dveře: "p_1"*
- *Modré dveře: "$\neg p_2$"*
- *Zelené dveře: "$\neg p_2$"*

Alespoň jeden z těchto nápisů je pravdivý: $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_2$*, zjednodušíme na*

$$\alpha_2 = p_1 \vee \neg p_2$$

Podobně to, že alespoň jeden z nápisů je lživý, formalizujeme jako $\neg p_1 \vee \neg\neg p_2 \vee \neg\neg p_2$*, po zjednodušení (rozmyslete si, proč jde o ekvivalentní výrok):*

$$\alpha_3 = \neg p_1 \vee p_2$$

Výsledná teorie je tedy:

$$\begin{aligned} T &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ &= \{(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3), p_1 \vee \neg p_2, \neg p_1 \vee p_2\} \end{aligned}$$

(c) *Později se naučíme hledat modely pomocí tablo metody, zatím ale 'neefektivní' postup: Nejprve najdeme modely jednoho z axiomů. Protože první axiom je poměrně složitý, možná bude lepší začít axiomem* α_2*. (V principu bychom mohli vyzkoušet postupně všech 8 modelů jazyka* $\mathbb{P}$*, a pro každý z nich spočíst pravdivostní hodnotu* α_2*.) Dostáváme:*

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\alpha_2) = \{(0,0,0), (0,0,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

Nyní zjistíme, ve kterých z těchto modelů platí axiom α_3*:*

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\alpha_2, \alpha_3) = \{(0,0,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

A nakonec ověříme platnost α_1 *v každém z těchto 4 modelů:*

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \{(0,0,1)\}$$

(d) *Při naší volbě jazyka* $\mathbb{P}$ *je formalizace jednoduchá:* $\varphi_1 = p_1$*,* $\varphi_2 = p_2$*,* $\varphi_3 = p_3$*. Být důsledkem teorie* T *znamená platit v každém modelu* T *(pozor, v každém, ne 'v nějakém modelu', to je častá chyba). V našem případě má* T *jen jeden model, ihned vidíme, že v něm platí* φ_3 *a neplatí* φ_1 *ani* φ_2*. Důsledkem* T *je tedy z těchto tří jen* φ_3*.*

(e) *Při použití tablo metody postupujeme stejně jako v úvodní kapitole skript (Sekce 1.1.5). Abychom dokázali, že v* T *platí* φ_3*, sestrojíme tablo z teorie* T*, kde do kořene dáme předpoklad* $\mathrm{F}p_3$*, neboť dokazujeme sporem (*F *znamená 'False',* T *znamená 'True').*

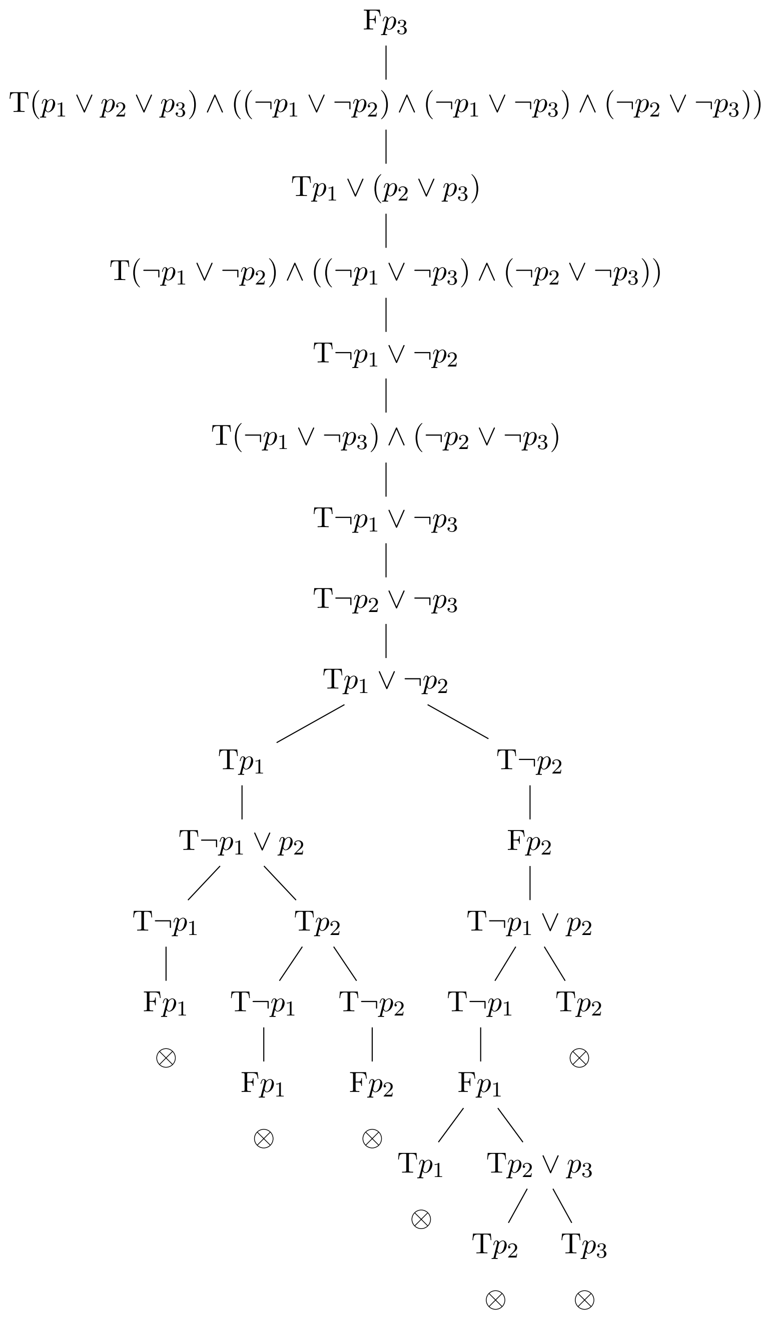
Připomeňme, že tablo rozvíjíme připojováním předpokladů o platnosti axiomů $\mathrm{T}\alpha_i$ *(*$i \in \{1,2,3\}$*) a redukcí položek (připojením příslušných atomických tabel). Pořadí, v jakém to děláme, může značně ovlivnit velikost výsledného tablo důkazu. Dobré je nejprve redukovat položky, jejichž atomická tabla se nevětví, nebo větví, ale některá z větví se ihned stane spornou. Axiomy připojujeme až když jsou potřeba. Často je dobré si rozmyslet, jak bychom v důkazu postupovali my, a podle toho budovat i tablo.*

Všimněte si také, že nedefinujeme atomická tabla pro konjunkce resp. disjunkce tří a více výroků. (Chceme, aby kroky algoritmu byly co nejjednodušší.) Proto např. v $\mathrm{T}p_1 \vee p_2 \vee p_3$ *si nejprve představíme vynechané závorky,* $\mathrm{T}p_1 \vee (p_2 \vee p_3)$*, a potom redukujeme ve dvou krocích připojením* $\mathrm{T}p_1$ *a* $\mathrm{T}p_2 \vee p_3$*:*

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{T}p_1 \vee (p_2 \vee p_3) & & \\ & / & & \backslash & \\ \mathrm{T}p_1 & & & & \mathrm{T}p_2 \vee p_3 \\ & & & / & & \backslash \\ & & & \mathrm{T}p_2 & & \mathrm{T}p_3 \end{array}$$

(Ještě poznamenáme, že z hlediska tablo metody by bylo trochu lepší mít místo axiomu α_1 čtyři samostatné výroky, jichž je konjunkcí. Tím by se konstrukce tabla zkrátila. Algoritmus si ale poradí s jakkoliv složitými axiomy.)

Zde je jeden z možných tablo důkazů ($\oplus$ označuje spornou větev, ✓ dokončenou bezespornou). Na první pohled může vypadat složitě, ve skutečnosti ale provádíme jednoduchý algoritmus. Rozmyslete si, odkud se vzaly jednotlivé položky, a kde vidíme atomická tabla:



Co kdybychom zkusili z teorie T dokázat p_1, nebo p_2? Ukážeme pro p_1 (pro p_2 si zkuste sami). Do kořene dáme položku $\mathrm{F}p_1$. Postupujeme obdobně, ale alespoň jedna z větví bude i *po dokončení (připojení všech axiomů a redukce všech položek) bezesporná. Z bezesporných větví lze potom vyčíst protipříklad (model teorie T, ve kterém p_1 neplatí).*

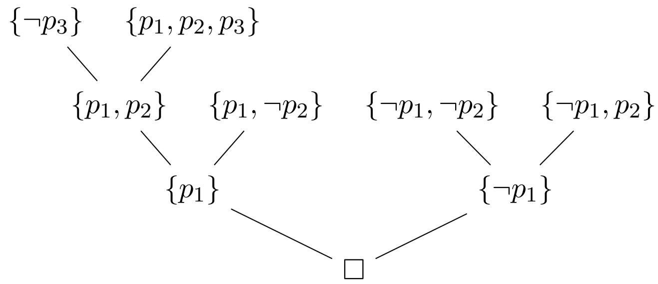
Níže je sestrojené dokončené tablo. Ověřte, že jsou použity všechny axiomy a zredukovány všechny položky. Dostáváme dvě dokončené bezesporné větve. Podíváme se na předpoklady o prvovýrocích, které na nich najdeme: Pro obě jsou to Fp_1, Fp_2, Tp_3. *To odpovídá modelu* $(0, 0, 1)$, *což je opravdu protipříklad: model teorie T, ve kterém neplatí p_1.*

- $\mathrm{F}p_1$
- $\mathrm{T}p_1 \vee \neg p_2$
  - $\mathrm{T}p_1$
    - $\otimes$
  - $\mathrm{T}\neg p_2$
  - $\mathrm{F}p_2$
  - $\mathrm{T}(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge ((\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3))$
  - $\mathrm{T}p_1 \vee (p_2 \vee p_3)$
  - $\mathrm{T}(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge ((\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3))$
    - $\mathrm{T}p_1$
      - $\otimes$
    - $\mathrm{T}p_2 \vee p_3$
      - $\mathrm{T}p_2$
        - $\otimes$
      - $\mathrm{T}p_3$
      - $\mathrm{T}\neg p_1 \vee \neg p_2$
      - $\mathrm{T}(\neg p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3)$
      - $\mathrm{T}\neg p_1 \vee \neg p_3$
      - $\mathrm{T}\neg p_2 \vee \neg p_3$
        - $\mathrm{T}\neg p_1$
        - $\mathrm{F}p_1$
          - $\mathrm{T}\neg p_2$
          - $\mathrm{F}p_2$
          - $\mathrm{T}\neg p_1 \vee p_2$
            - $\mathrm{T}\neg p_1$
            - $\mathrm{F}p_1$
              - $\mathrm{T}\neg p_1$
              - $\mathrm{F}p_1$
              - ✓
              - $\mathrm{T}\neg p_2$
              - $\mathrm{F}p_2$
              - ✓
            - $\mathrm{T}p_2$
              - $\otimes$
          - $\mathrm{T}\neg p_3$
          - $\mathrm{F}p_3$
            - $\otimes$
        - $\mathrm{T}\neg p_3$
        - $\mathrm{F}p_3$
          - $\otimes$

(f) *Při použití rezoluční metody postupujeme stejně jako v úvodní kapitole skript, v Sekci 1.1.6. Abychom dokázali, že v T platí p_3, přidáme k teorii T jako axiom výrok $\neg p_3$. Máme tedy $T' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg p_3\}$. Pomocí ekvivalentních úprav převedeme do CNF (vyjádříme jako konjunkci klauzulí, tj. disjunkcí literálů), v našem případě všechny axiomy už v CNF jsou (α_1 je konjunkce tří klauzulí, ostatní jsou klauzulemi). Výsledná CNF formule v množinovém zápisu (pro přehlednost je dobré zapisovat literály v pevném pořadí):*

$$S = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, \neg p_3\}, \{\neg p_2, \neg p_3\}, \{p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_3\}\}$$

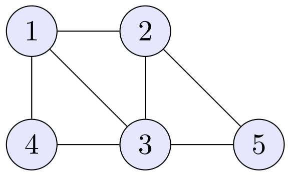
Nyní sestrojíme rezoluční zamítnutí. Jak vybírat jednotlivé rezoluční kroky? Dobrou heuristikou je fakt, že kratší klauzule obsahuje více informací. Snažíme se tedy začít od nejkratších klauzulí, zde $\{\neg p_3\}$, a sledujeme, kde bychom mohli použít nově odvozené ('naučené') klauzule. Klauzule je často potřeba použít opakovaně. Zde je jedno z možných rezolučních zamítnutí, zakreslené ve formě rezolučního stromu:



Ověřte, že všechny listy jsou klauzule z S a všechny vnitřní vrcholy vznikly rezolucí ze svých synů. Rezoluční důkaz budeme definovat jako posloupnost klauzulí (kde klauzule jsou buď axiomy, nebo rezolventy předchozích). Takových posloupností odpovídajících našemu stromu je více, zde je jedna z možných:

$$\{\neg p_3\}, \{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2\}, \{p_1, \neg p_2\}, \{p_1\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_1\}, \square$$

Příklad 2. Uvažme *vrcholové pokrytí* (vertex cover) následujícího grafu:



Chceme pro dané $k > 0$ zjistit, zda má tento graf nejvýše k-prvkové vrcholové pokrytí.

(a) Zvolte vhodný jazyk (množinu prvovýroků) $\mathbb{P}$.
(b) Formalizujte ve výrokové logice problém, zda graf na obrázku má nejvýše k-prvkové vrcholové pokrytí, pro pevně zvolené k. Označme výslednou teorii jako VC_k.
(c) Ukažte, že VC_2 nemá žádné modely, tj. graf nemá 2-prvkové vrcholové pokrytí.
(d) Uměli byste k tomu využít tablo metodu? Rozmyslete si postup.
(e) Uměli byste k tomu využít rezoluční metodu? Rozmyslete si postup.
(f) Najděte všechna 3-prvková vrcholová pokrytí.

Řešení. *Vrcholové pokrytí je množina vrcholů C obsahující alespoň jeden vrchol z každé hrany.*

(a) *Přirozenou volbou je jeden prvovýrok p_v pro každý vrchol $v \in V$, který popisuje, zda je $v \in C$. Máme tedy $\mathbb{P} = \{p_v \mid v \in V\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$.*

(b) *Nejprve formalizujeme, že jde o vrcholové pokrytí (libovolné velikosti). Pro každou hranu $\{u,v\} \in E$ vyjádříme, že u nebo v musí být v C. Máme tedy teorii popisující všechna vrcholová pokrytí:*

$$VC = \{p_u \vee p_v \mid \{u,v\} \in E, u < v\}$$

Zbývá vyjádřit, že platí nejvýše k prvovýroků, což zapíšeme jako disjunkce negací přes všechny $k+1$-prvkové podmnožiny vrcholů:

$$S_{\leq k} = \{\bigvee_{v \in I} \neg p_v \mid I \subseteq V, |I| = k+1\}$$

Výsledná teorie tedy bude $VC_k = VC \cup S_{\leq k}$.

(c) *Pro přehlednost zde vypíšeme všechny axiomy teorie VC_2 (byť to dělat nemusíme):*

$$\begin{aligned} VC_2 = \{&p_1 \vee p_2, p_1 \vee p_3, p_1 \vee p_4, p_2 \vee p_3, p_2 \vee p_5, p_3 \vee p_4, p_3 \vee p_5, \\ &\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4, \neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5, \\ &\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5, \neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5\} \end{aligned}$$

Použijeme-li 'neefektivní' postup, můžeme si například všimnout, že:

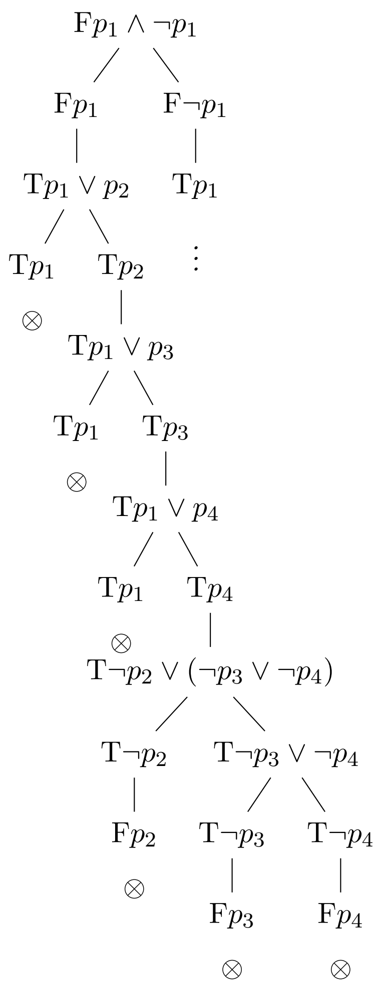
$$\mathrm{M}(p_1 \vee p_3, p_1 \vee p_4, p_3 \vee p_4, \neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) = \{(0,a,1,1,b), (1,a,0,1,b), (1,a,1,0,b) \mid a,b \in \{0,1\}\}$$
$$\mathrm{M}(p_2 \vee p_3, p_2 \vee p_5, p_3 \vee p_5, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) = \{(a,0,1,b,1), (a,1,0,b,1), (a,1,1,b,0) \mid a,b \in \{0,1\}\}$$

Jde o 2-prvková vrcholová pokrytí podgrafů $\{1,3,4\}$ a $\{2,3,5\}$. Průnik těchto množin je

$$\{(0,0,1,1,1), (0,1,1,1,0), (1,1,0,1,1), (1,0,1,0,1), (1,1,1,0,0)\}$$

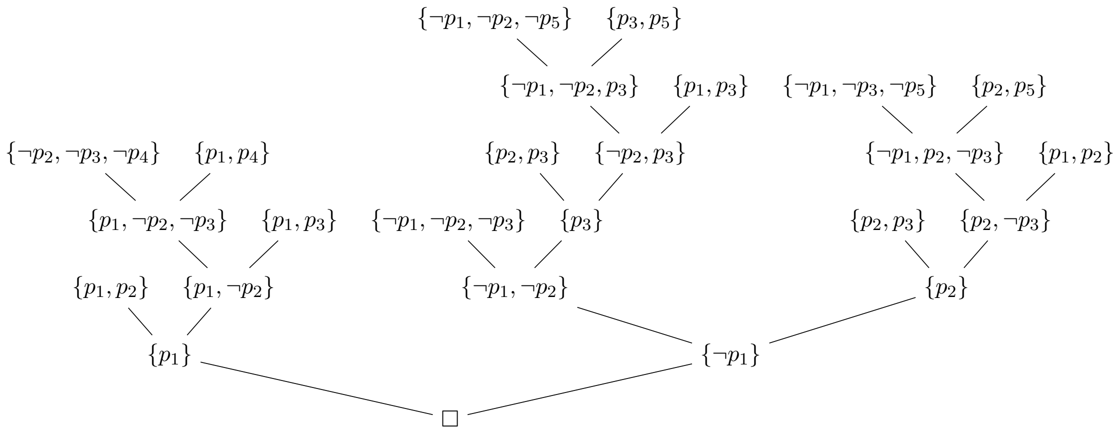
Žádný z těchto modelů ale nesplňuje ostatní axiomy, např. v prvním neplatí $\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5$.

(d) *Tablo metodu použijeme k důkazu, že v teorii VC_2 platí spor, tj. výrok $p_1 \wedge \neg p_1$. Ten vložíme do kořene s příznakem* F *('False'), tj. dokazujeme spor, sporem. Ukážeme jen část konstrukce (levou větev).*



(Alternativně bychom mohli použít tablo metodu adaptovanou přímo na hledání modelů, do kořene dát platnost prvního axiomu, a rozvíjet tablo za přidávání předpokladů platnosti ostatních axiomů: každý model musí souhlasit s některou větví, všechny nám ale vyjdou sporné.)

(e) *Všechny axiomy už jsou v CNF. Stačí najít rezoluční zamítnutí teorie VC_2 (tedy rezoluční důkaz prázdné klauzule $\square$), z toho plyne, že VC_2 nemůže mít model. Nakreslíme jen (jeden možný) rezoluční strom:*



(f) Zde uveďme jen správnou odpověď: $\mathrm{M}(VC_3) = \{(0,1,1,1,0),(1,0,1,0,1),(1,1,1,0,0)\}$ *což odpovídá množinám vrcholů* $\{2,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,2,3\}$. *Použití tablo metody by bylo trochu pracnější, můžete si ale zkusit dokázat (tablo metodou nebo rezolucí), že v pokrytí musí vždy být vrchol 3.*

Další příklady k procvičení

Příklad 3. Uvažme následující tvrzení:

(i) *Ten, kdo je dobrý běžec a má dobrou kondici, uběhne maraton.*
(ii) *Ten, kdo nemá štěstí a nemá dobrou kondici, neuběhne maraton.*
(iii) *Ten, kdo uběhne maraton, je dobrý běžec.*
(iv) *Budu-li mít štěstí, uběhnu maraton.*
(v) *Mám dobrou kondici.*

Podobně jako v prvním příkladu popište situaci pomocí výrokové logiky:

(a) Formalizujte tato tvrzení jako teorii T nad vhodnou množinou prvovýroků.
(b) Najděte všechny modely teorie T.
(c) Pokuste se využít k hledání modelů také *tablo metodu*.
(d) Napište několik různých důsledků teorie T.
(e) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii T.

Příklad 4. Mějme tři bratry, každý z nich buď vždy říká pravdu anebo vždy lže.

(i) Nejstarší říká: *"Oba mí bratři jsou lháři."*
(ii) Prostřední říká: *"Nejmladší je lhář."*
(iii) Nejmladší říká: *"Nejstarší je lhář."*

Pomocí výrokové logiky ukažte, že nejmladší bratr je pravdomluvný.

Příklad 5. Mějme pevně dané Sudoku. Popište, jak vytvořit teorii (ve výrokové logice), jejíž modely jednoznačně odpovídají validním řešením.

Příklad 6. Formalizujte následující tvrzení ve výrokové logice:

(a) Králíčci v oblasti nebyli pozorováni a procházení po cestě je bezpečné, ale borůvky podél cesty jsou zralé.
(b) Pokud jsou borůvky podél cesty zralé, pak je procházení po cestě bezpečné pouze tehdy, pokud králíčci nebyli v oblasti pozorováni.

(c) *Procházet se podél cesty není bezpečné, ale v oblasti nebyli pozorováni králíčci a borůvky podél cesty jsou zralé.*
(d) *Aby bylo procházení po cestě bezpečné, je nezbytné, ale nedostačující, aby borůvky podél cesty nebyly zralé a králíčci nebyli v oblasti pozorováni.*
(e) *Procházení po cestě není bezpečné, kdykoli jsou borůvky podél cesty jsou zralé a v oblasti byli pozorováni králíčci.*

Příklad 7. Formalizujte následující vlastnosti matematických objektů ve výrokové logice:
(a) Pro pevně daný (konečný) graf G, že má perfektní párování.
(b) Pro pevně danou částečně uspořádanou množinu, že je totálně (lineárně) uspořádaná.
(c) Pro pevně danou částečně uspořádanou množinu, že má nejmenší prvek.

Příklad 8. Pro následující výroky nakreslete strom výroku, a najděte množinu modelů:
(a) $(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ (b) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \to (p \wedge q))$

K zamyšlení

Příklad 9. Připomeňte si definici *stromu výroku.*
(a) Dokažte podrobně, že každý výrok má jednoznačně určený strom.
(b) Platilo by to, i kdybychom v definici výroku nahradili symboly '(', ')' symbolem '|'?
(c) Co by se stalo, pokud bychom závorky vůbec nepsali?