NAIL062 V&P Logika: Druhý domácí úkol

Termín odevzdání: 18. 12. v 10:40.

Celkem 10 bodů. Řešení odevzdejte v papírové podobě na cvičení nebo, pokud nebudete moci přijít, emailem před začátkem cvičení. Řešení musí být rozumně čitelné, a v případě odevzdání emailem musí být v jediném PDF souboru a mít bílé pozadí. Je zakázáno o úkolech až do termínu odevzdání jakýmkoliv způsobem komunikovat s kýmkoliv kromě mne. Řešení musí být 100% vaší vlastní prací, a je vaší povinností zajistit, že nikdo nebude mít přístup k vašemu řešení.

Poznámka: Používáte-li tablo metodu, musí řešení obsahovat tablo korektně sestrojené přesně podle definice: nedělejte žádné zkratky, nevynechávejte vrcholy nad rámec konvence z přednášky, apod. Podobně, používáte-li rezoluční metodu, musí řešení obsahovat korektní rezoluční strom. (Rezoluční důkaz zapisovat nemusíte.)

Úkol neobsahuje rezoluci v predikátové logice, protože ji teprve budeme cvičit. V zápočtovém testu se ale velmi pravděpodobně vyskytne.

Příklad 1 (4 body)**.** Uvažte následující tvrzení:

(i) *Každý docent napsal alespoň jednu učebnici.*

(ii) *Každou učebnici napsal nějaký docent.*

(iii) *U každého docenta někdo studuje.*

(iv) *Každý, kdo studuje u nějakého docenta, přečetl všechny učebnice od tohoto docenta.*

(v) *Každou učebnici někdo přečetl.*

(a) Formalizujte tvrzení (i)–(v) po řadě jako <u>sentence</u> $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v predikátové logice v jazyce $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$ bez rovnosti, kde N, S, P jsou binární relační symboly ($N(x, y)$ znamená "x napsal y", $S(x, y)$ znamená "x studuje u y", $P(x, y)$ znamená "x přečetl y") a D, U jsou unární relační symboly ("být docentem", "být učebnicí").

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.

(c) Je sentence φ_5 pravdivá v teorii T? Je lživá v T? Je nezávislá v T? Zdůvodněte.

(d) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Zdůvodněte.

(e) Uvažme teorii $T' = T \cup \{D(x), S(x, y), P(x, y)\}$. Kolik má teorie T' dvouprvkových modelů (až na izomorfismus)? Zdůvodněte.

Příklad 2 (3 body)**.** Známe následující informace o zadávání zakázek:

(i) *Každý úředník, který je odpovědný za nějakou zakázku a vezme od nějaké společnosti úplatek, je kriminálník.*

(ii) Zakázku vyhraje pouze společnost, která podplatí všechny úředníky odpovědné za tuto zakázku.

(iii) Pan Lubor je úředník.

(iv) Nějaká společnost vyhrála nějakou zakázku, za kterou je pan Lubor odpovědný.

Pomocí rezoluce dokažte, že: *(v) Pan Lubor je kriminálník.*

(a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle U, Z, S, K, P, V, O, l\rangle$ bez rovnosti, kde U, Z, S a K jsou unární relační symboly a $U(x), Z(x), S(x), K(x)$ znamenají (po řadě) "x je úředník / zakázka / společnost / kriminálník", P, V, O jsou binární relační symboly, kde $P(x, y), V(x, y), O(x, y)$ značí (po řadě) "x podplatil y", "x vyhrál y" a "x je odpovědný za y" a l je konstanta označující pana Lubora.

(b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nebo jejich negací nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$.

(c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci.

Části (d) a (e) nebudou hodnoceny, zkuste si sami až procvičíme rezoluci:

(d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.

(e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T', která je nesplnitelná.

Příklad 3 (2 body)**.** Nechť $T = \{R(x, x),\ R(x, y) \land R(y, x) \to x = y,\ R(x, y) \land R(y, z) \to R(x, z),\ R(x, y) \lor R(y, x), \neg c = d, \varphi, \psi\}$ je teorie jazyka $L = \langle R, P, f, c, d\rangle$ s rovností, kde R, P jsou binární relační symboly, f je binární funkční symbol, c, d jsou konstantní symboly a φ, ψ jsou následující formule:

$$\begin{aligned} \varphi: &\quad P(x, y) \leftrightarrow R(x, y) \land \neg x = y \\ \psi: &\quad P(x, y) \to P(x, f(x, y)) \land P(f(x, y), y) \end{aligned}$$

(a) Najděte expanzi struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ (v jazyce $L' = \langle R\rangle$) do jazyka L na model teorie T.

(b) Je sentence $(\forall x)R(c, x)$ pravdivá/lživá/nezávislá v T? Zdůvodněte všechny tři odpovědi.

(c) Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T nebo zdůvodněte, proč neexistují.

(d) Nechť $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$ je jazyka $L' = \langle R, f, c, d\rangle$. Je teorie T extenzí teorie T'? Je teorie T konzervativní extenzí teorie T'? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 4 (1 bod)**.** Nechť $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x, y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \lor P(y, z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti. Najděte otevřenou teorii T' ekvisplnitelnou s T. Převeďte T' do CNF a výslednou formuli S zapište v množinové reprezentaci.