Cvičení z logiky: 5. sada příkladů

Témata: Základní syntaxe a sémantika predikátové logiky.

Příklad 1. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

(a) $(\exists x)(\forall y)P(y,z) \vee (y = 0)$
(b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
(c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

Příklad 2. Označme φ formuli $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které z následujících termů jsou substituovatelné do φ?

(a) term z za proměnnou x, term y za proměnnou x,
(b) term z za proměnnou y, term $2 * y$ za proměnnou y,
(c) term x za proměnnou z, term y za proměnnou z,

Příklad 3. Jsou následující formule variantami formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?

(a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
(b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
(c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

Příklad 4. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a,b,c,d\}, \rhd^A)$ v jazyce s jediným binárním relačním symbolem $\rhd$, kde $\rhd^A = \{(a,c),(b,c),(c,c),(c,d)\}$. Které z následujících formulí jsou pravdivé v $\mathcal{A}$?

(a) $x \rhd y$
(b) $(\exists x)(\forall y)(y \rhd x)$
(c) $(\exists x)(\forall y)((y \rhd x) \rightarrow (x \rhd x))$
(d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \rhd z) \wedge (z \rhd y))$
(e) $(\forall x)(\exists y)((x \rhd z) \vee (z \rhd y))$

Příklad 5. Pro každou formuli φ z předchozího příkladu najděte strukturu $\mathcal{B}$ (pokud existuje) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Příklad 6. Jsou následující sentence pravdivé / lživé / nezávislé (v logice)?

(a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$
(b) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
(c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
(d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$
(e) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

Příklad 7. Dokažte (sémanticky) nebo najděte protipříklad: Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, a sentenci ψ,

(a) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$
(b) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$
(c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$
(d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$

Platí to i pro každou formuli ψ s volnou proměnnou x? A pro každou formuli ψ ve které x není volná?

Příklad 8. Rozhodněte, zda následující platí pro každou formuli φ. Dokažte (sémanticky, z definic) nebo najděte protipříklad.
(a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
(b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
(c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
(d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$

Příklad 9. Buď $L = \langle +, -, 0 \rangle$ jazyk teorie grup (s rovností). Teorie grup T sestává z těchto axiomů:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T.
(a) $x + y = y + x$
(b) $x + y = x \;\rightarrow\; y = 0$
(c) $x + y = 0 \;\rightarrow\; y = -x$
(d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

Příklad 10. Uvažme $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0 \rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.
(a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ model teorie T z předchozího příkladu (tj. je to *grupa*)?
(b) Určete všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a \rangle$ generované nějakým $a \in \mathbb{Z}_4$.
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ ještě nějaké další podstruktury?
(d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem T?
(e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}_4}$?
(f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy (tj. grupy, která splňuje $x + y = y + x$) také komutativní grupa?

Příklad 11. Buď $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ těleso racionálních čísel se standardními operacemi.
(a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem T z předchozích příkladů?
(b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ rozšířit na model T?
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?
(d) Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ úplná teorie?

Příklad 12. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností.
(a) Je T (sémanticky) konzistentní?
(b) Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T (sémanticky) úplná?
(c) Najděte všechny jednoduché úplné extenze T.
(d) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchá extenze T? Je T' konzervativní extenze T?