Cvičení z logiky: 6. sada příkladů

Témata: Definovatelné množiny, tablo metoda, rovnost, věta o konstantách, věta o dedukci, prenexní forma, Skolemova varianta.

Příklad 1. Mějme jazyk $L = \langle F \rangle$ s rovností, kde F je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

(a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ kde $\cdot$ je násobení reálných čísel,

(b) množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,

(c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$,

(d) množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$.

Příklad 2. Předpokládejme, že

(a) všichni viníci jsou lháři,

(b) aspoň jeden z obviněných je také svědkem,

(c) žádný svědek nelže.

Dokažte tablo metodou, že ne všichni obvinění jsou viníci.

Příklad 3. Nechť $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z x do y"*. Předpokládejme, že

(a) Z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže,

(b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to L(y, x))$,

(c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to S(x, y))$,

(d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \land L(y, z) \to S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Příklad 4. V následujících příkladech jsou φ a ψ sentence nebo formule s volnou proměnnou x (což značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$). Najděte tablo důkazy dané formule:

(a) $(\exists x)(\varphi(x) \lor \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \lor (\exists x)\psi(x)$,

(b) $(\forall x)(\varphi(x) \land \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \land (\forall x)\psi(x)$,

(c) $(\varphi \lor (\forall x)\psi(x)) \to (\forall x)(\varphi \lor \psi(x))$ kde x není volná v φ,

(d) $(\varphi \land (\exists x)\psi(x)) \to (\exists x)(\varphi \land \psi(x))$ kde x není volná v φ.

(e) $(\exists x)(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to (\exists x)\psi(x))$ kde x není volná v φ,

(f) $(\exists x)(\varphi \land \psi(x)) \to (\varphi \land (\exists x)\psi(x))$ kde x není volná v φ,

(g) $(\exists x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\forall x)\varphi(x) \to \psi)$ kde x není volná v ψ,

(h) $((\exists x)\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x)(\varphi(x) \to \psi)$ kde x není volná v ψ.

Příklad 5. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že

(a) $T^* \models x = y \;\to\; y = x$ (symetrie)

(b) $T^* \models (x = y \;\land\; y = z) \;\to\; x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, na (b) použijte (*iii*) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

Příklad 6. Dokažte větu o konstantách syntakticky, pomocí transformací tabel.

Věta. Buď φ formula v jazyce L s volnými proměnnými $x_1, \dots, x_n$ a T teorie v L. Označme L' extenzi L o nové konstantní symboly $c_1, \dots, c_n$ a T' teorii T v L'. Potom platí

$$T \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\varphi \quad \text{právě když} \quad T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

Příklad 7. Dokažte větu o dedukci syntakticky, pomocí transformací tabel.

Věta. Pro každou teorii T (v uzavřené formě) a sentence φ, ψ,

$$T \vdash \varphi \to \psi \quad \text{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi.$$

Příklad 8. Buď L jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T teorie v tomto jazyce taková, že T má nekončený model a platí v ní axiomy lineárního uspořádání T. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*; tj. že existují prvky c_i pro každé $i \in \mathbb{N}$ v A takové, že

$$\dots < c_{n+1} < c_n < \dots < c_0.$$

(Z toho plyne, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v logice prvního řádu.)

Příklad 9. Buď T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \to y = z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$-x = y \quad \leftrightarrow \quad x + y = 0$$
$$x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y)$$

Najděte formule v jazyce L, které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.

(a) $x + (-x) = 0$

(b) $x + (-y) < x$

(c) $-(x + y) < -x$

Příklad 10. Převeďte následující formule do prenexní normální formy.

(1) $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \to Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$

(2) $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$

(3) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \to (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y)$

Příklad 11. Najděte Skolemovy varianty formulí v PNF z předchozího příkladu.

Příklad 12. Ověřte, že platí následující:

(1) $\models (\forall x)P(x, f(x)) \to (\forall x)(\exists y)P(x, y)$

(2) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \to (\forall x)P(x, f(x))$

(Z toho plyne, že Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli.)