Dvanáctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Dvanáctá přednáška

Program

- izomorfismus a konečné modely
- definovatelnost a automorfismy
- ω-kategoricita a úplnost
- axiomatizovatelnost
- rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 9.2-9.4 z Kapitoly 9, Sekce 10.1 z Kapitoly 10

9.2 Izomorfismus struktur

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h \colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý (n-ární) $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \text{ právě když } R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Existuje-li, jsou izomorfní ('via h'), $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (nebo $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$).
Automorfismus $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$.

- tj. liší se jen 'pojmenováním prvků'
- relace 'být izomorfní' je ekvivalence
- např. potenční algebra $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$, $|X| = n$, je izomorfní s $\underline{2^n} = \langle \{0,1\}^n, -_n, \wedge_n, \vee_n, (0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1) \rangle$ (operace po složkách) via $h(A) = \chi_A$ (charakt. vektor $A \subseteq X$)

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$ je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \ldots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \ldots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu $\square$

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Důkaz: pro každou sentenci φ máme z (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ $\square$

Naopak obecně ne, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\simeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ Platí ale:

Tvrzení: Jsou-li $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ konečné v jazyce s rovností, potom

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

Důsledek Pokud má kompletní teorie v jazyce s rovností konečný model, potom jsou všechny její modely izomorfní.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$. Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$. Ukážeme, že $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}$ tak, že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$. Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Buď Ω množina 'vlastností prvku a', tj. formulí $\varphi(x)$ splňujících $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Protože je A konečná, existuje konečně mnoho $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každou $\varphi \in \Omega$ existuje i takové, že $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$. Potom i $\mathcal{B} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$.

Protože v $\mathcal{A}$ platí sentence $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i$ (je splněna díky $a \in A$) a $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, máme i $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i$. Neboli existuje $b \in B$ takové, že $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i[e(x/b)]$. Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ platí $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$, z toho $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$. $\square$

definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy (např. automorfismus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

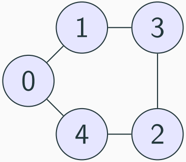
Tvrzení: Je-li $D \subseteq A^n$ definovatelná v $\mathcal{A}$, potom pro každý automorfismus $h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ platí $h[D] = D$ (kde $h[D]$ značí $\{(h(\overline{a}) \mid \overline{a} \in D\}$). Je-li definovatelná s parametry $\overline{b}$, platí to pro automorfismy identické na $\overline{b}$ (tj. $h(\overline{b}) = \overline{b}$ neboli $h(b_i) = b_i$ pro všechna i).

Důkaz: Ukážeme jen verzi s parametry. Nechť $D = \varphi^{\mathcal{A},\overline{b}}(\overline{x}, \overline{y})$. Potom pro každé $\overline{a} \in A^n$ platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned}
\overline{a} \in D &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h(\overline{a}), \overline{y}/h(\overline{b}))] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h(\overline{a}), \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow h(\overline{a}) \in D.
\end{aligned}$$

□

Příklad



Množiny definovatelné s parametrem 0, $\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$?

Jediný netriviální automorfismus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i) \bmod 5$, orbity $\{0\}$, $\{1,4\}$, a $\{2,3\}$.

Tyto množiny jsou definovatelné:

- $\{0\}$ formulí $x = y$, tj. $(x = y)^{\mathcal{G},\{0\}} = \{0\}$
- $\{1,4\}$ lze definovat pomocí $E(x,y)$
- $\{2,3\}$ formulí $\neg E(x,y) \wedge \neg x = y$

$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$ je podalgebra $\underline{\mathcal{P}(V(\mathcal{G}))}$, tedy uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik, obsahuje $\emptyset$ a $V(\mathcal{G})$. Podalgebra generovaná $\{\{0\},\{1,4\},\{2,3\}\}$ už ale obsahuje všechny podmnožiny zachovávající automorfismus h. Dostáváme:

$$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{0,1,4\}, \{0,2,3\}, \{1,4,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}$$

9.3 ω-kategorické teorie

Izomorfní spektrum T je počet modelů T kardinality κ až na $\simeq$.

T je κ-kategorická pokud $I(\kappa, T) = 1$, ω-kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

Tvrzení: Teorie DeLO je ω-kategorická.

Důkaz: Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ spočetně nekonečné modely, $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Z hustoty najdeme indukcí $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \dots$ prosté parciální fce z A do B zach. usp., $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \operatorname{dom} h_n$, $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq \operatorname{rng} h_n$. Potom $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$. □

Důsledek: Izomorfní spektrum teorie DeLO*:

- $I(\kappa, DeLO^*) = 0$ pro $\kappa \in \mathbb{N}$
- $I(\omega, DeLO^*) = 4$

Spočetné modely až na izomorfismus jsou například:

$$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \simeq \mathbb{Q} \restriction (0,1),\ \mathbb{Q} \restriction (0,1],\ \mathbb{Q} \restriction [0,1),\ \mathbb{Q} \restriction [0,1]$$

Důkaz: Husté uspořádání nemůže být konečné. Izomorfismus zobrazí minimum na minimum a maximum na maximum. □

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Důkaz: (i) Důsledek L.-S. věty bez rovnosti říká, že každý model je elementárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému, ten je ale až na izomorfismus jediný.

(ii) Důsledek L.-S. věty s rovností podobně říká, že všechny nekonečné modely jsou elementárně ekvivalentní. Mohla by mít elementárně neekvivalentní konečné modely, to jsme ale zakázali. $\square$

Důsledek: DeLO, DeLO$^+$, DeLO$^-$, a DeLO$^\pm$ jsou kompletní, jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) kompletní jedn. extenze $DeLO^*$.

Analogické kritérium platí i pro kardinality κ větší než ω.

9.4 Axiomatizovatelnost

Axiomatizovatelnost

Třída struktur $K \subseteq \mathrm{M}_L$ je:

- axiomatizovatelná, existuje-li teorie T taková, že $\mathrm{M}_L(T) = K$
- konečně/otevřeně axiomatiz., je-li ax. konečnou/otevřenou T
- teorie T' je konečně/otevřeně axiomatizovatelná, platí-li to o třídě jejích modelů $K = \mathrm{M}_L(T')$

Pozorování: Je-li K axiomatizovatelná, musí být uzavřená na $\equiv$.

Například, jak ukážeme:

- grafy a částečná uspořádání jsou konečně i otevřeně ax.
- tělesa jsou konečně, ale ne otevřeně axiomatizovatelná
- nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně
- konečné grafy nejsou axiomatizovatelné

Neaxiomatizovatelnost konečných modelů

Věta: Má-li T libovolně velké konečné modely, má i nekonečný model. Potom není třída jejích konečných modelů axiomatizovatelná.

Důkaz: Je-li jazyk bez rovnosti, vezmeme kanonický model pro bezespornou větev v tablu z T pro $\mathrm{F}\bot$ (T je bezesporná).

Je-li jazyk s rovností, přidáme spočetně mnoho nových konst. symbolů c_i a vezmeme extenzi: $T' = T \cup \{\neg c_i = c_j \mid i \neq j \in \mathbb{N}\}$

Každá konečná část T' má model: buď k největší, že c_k je v T': lib. $\geq (k+1)$-prvkový model, interpretuj $c_0, \ldots, c_k$ jako různé prvky.

Věta o kompaktnosti dává model T', ten je nekonečný, redukt na původní jazyk (zapomenutí $c_i^{\mathcal{A}}$) je nekonečný model T. $\square$

- např. konečné grafy nejsou axiomatizovatelné
- nekonečné modely teorie jsou vždy axiomatizovatelné, máme-li rovnost: stačí přidat 'existuje alespoň n prvků' pro vš. $n \in \mathbb{N}$

Konečná axiomatizovatelnost

Věta (O konečné axiomatizovatelnosti): $K \subseteq \mathrm{M}_L$ je konečně axiomatizovatelná, právě když K i $\overline{K} = \mathrm{M}_L \setminus K$ jsou axiomatizovatelné.

Důkaz: $\Rightarrow$ Je-li K axiomatizovatelná sentencemi $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (vezmi gen. uzávěry), potom $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ axiomatizuje $\overline{K}$.

$\Leftarrow$ Buď $K = \mathrm{M}(T)$ a $\overline{K} = \mathrm{M}(S)$. Potom $T \cup S$ je sporná, neboť:

$$\mathrm{M}(T \cup S) = \mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(S) = K \cap \overline{K} = \emptyset$$

Věta o kompaktnosti dává konečné $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ takové, že:

$$\emptyset = \mathrm{M}(T' \cup S') = \mathrm{M}(T') \cap \mathrm{M}(S')$$

Nyní si všimněme, že platí:

$$\mathrm{M}(T) \subseteq \mathrm{M}(T') \subseteq \overline{\mathrm{M}(S')} \subseteq \overline{\mathrm{M}(S)} = \mathrm{M}(T)$$

Tím jsme dokázali, že $M(T) = M(T')$, neboli T' je konečná axiomatizace K. $\square$

Tělesa charakteristiky 0 nejsou konečně axiomatizovatelná

Buď T teorie těles. Těleso $\mathcal{A} = \langle A, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ je

- charakteristiky p, je-li p nejmenší prvočíslo takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ je term $1 + 1 + \cdots + 1$ (s p jedničkami),
- charakteristiky 0, pokud není charakteristiky p pro žádné p.
- Tělesa charakteristiky p jsou konečně axiomatizovatelná:

$$T_p = T \cup \{p1 = 0\}$$

- Tělesa char. 0 jsou axiomatizovatelná, ale ne konečně:

$$T_0 = T \cup \{\neg\, p1 = 0 \mid p \text{ prvočíslo}\}$$

Tvrzení: Třída K těles char. 0 není konečně axiomatizovatelná.

Důkaz: Stačí ukázat, že $\overline{K}$ (tělesa nenulové char. a netělesa) není axiomatizovatelná. Sporem: $\overline{K} = \mathrm{M}(S)$. Potom $S' = S \cup T_0$ má model, neboť každá konečná část má model: těleso charakteristiky větší než jakékoliv p z axiomu T_0 tvaru $\neg\, p1 = 0$. Je-li $\mathcal{A}$ je model S', potom $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(S) = \overline{K}$. Zároveň ale $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T_0) = K$, spor. $\square$

Otevřená axiomatizovatelnost

Tvrzení: Je-li T otevřeně axiomatizovatelná, potom je každá podstruktura modelu T také modelem T.

Důkaz: Buď T' otevřená axiomatizace T, $\mathcal{A}$ model T', $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Pro každou $\varphi \in T'$ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ (φ je otevřená), tedy i $\mathcal{B} \models T'$. $\square$

Poznámka: Platí i obráceně, je-li každá podstruktura modelu také model, potom je otevřeně axiomatizovatelná. (Důkaz neuvedeme.)

- DeLO není otevřeně axiomatizovatelná, např. žádná konečná podstruktura modelu DeLO není hustá
- teorie těles není otevřeně axiomatizovatelná, podstruktura $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ není těleso, nemá inverzní prvek k 2 vůči násobení
- pro dané $n \in \mathbb{N}$ jsou nejvýše n-prvkové grupy otevřeně axiomatizovatelné (i jejich podgrupy jsou nejvýše n-prvkové); k (otevřené) teorii grup stačí přidat: $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} x_i = x_j$

Kapitola 10:
Nerozhodnutelnost a neúplnost

Nerozhodnutelnost a neúplnost

Jak lze s teoriemi pracovat algoritmicky?

+ zlatý hřeb přednášky: Gödelovy věty o neúplnosti (1931)

- ukazují limity formálního přístupu
- zastavily program formalizace matematiky
- pojem algoritmu budeme chápat jen intuitivně
- technické podrobnosti důkazů vynecháme

Typicky potřebujeme spočetný jazyk.

10.1 Rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

Rekurzivní axiomatizace

- v dokazování povolujeme nekonečné teorie, jak jsou zadané?
- pro ověření že daný důkaz (např. tablo, rezoluční zamítnutí) je korektní potřebujeme algoritmický přístup ke všem axiomům
- mohli bychom požadovat enumerátor pro T, tj. algoritmus, který vypisuje axiomy z T, a každý axiom někdy vypíše
- ale kdyby byl v důkazu chybný axiom, nikdy bychom se to nedozvěděli: stále bychom čekali, zda ho enumerátor vypíše
- proto požadujeme silnější vlastnost:

T je rekurzivně axiomatizovaná, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ doběhne a odpoví, zda $\varphi \in T$.

(ekvivalentní enumerátoru vypisujícímu axiomy v lexikograf. pořadí)

Rozhodnutelnost

Můžeme v dané teorii 'algoritmicky rozhodovat pravdu'?

- T je rozhodnutelná, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$,
- T je částečně rozhodnutelná, existuje-li algoritmus, který:
  - pokud $T \models \varphi$, doběhne a odpoví "ano"
  - pokud $T \not\models \varphi$, buď nedoběhne, nebo doběhne a odpoví "ne"

Tvrzení: Je-li T je rekurzivně axiomatizovaná, potom:
(i) T je část. rozhod. (ii) je-li navíc kompletní, je rozhodnutelná

Důkaz: (i) Algoritmus konstruuje systematické tablo z T pro $\mathrm{F}\varphi$; stačí enumerátor pro T, nebo postupně generovat vš. sentence a testovat, jsou-li v T. Je-li $T \models \varphi$, konstrukce skončí, ověříme, že je tablo sporné. (Jinak skončit nemusí.)

(ii) Víme, že buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$. Paralelně konstruujeme tablo pro $\mathrm{F}\varphi$ a pro $\mathrm{T}\varphi$ (důkaz a zamítnutí φ z T). Jedna z konstrukcí po konečně mnoha krocích skončí. $\square$

Rekurzivně spočetná kompletace

T má rekurzivně spočetnou kompletaci, je-li (nějaká) množina až na $\sim$ všech jednoduchých kompletních extenzí T rekurzivně spočetná, tj. existuje algoritmus, který pro vstup (i, j) vypíše i-tý axiom j-té extenze (v nějakém uspořádání), nebo odpoví, že už neexistuje.

Tvrzení: Je-li T rekurzivně axiomatizovaná a má rekurzivně spočetnou kompletaci, potom je rozhodnutelná.

Důkaz: Buď $T \vdash \varphi$, nebo existuje protipříklad $\mathcal{A} \not\models \varphi$, tj. kompl. jedn. extenze T_i, že $T_i \nvdash \varphi$. Kompletnost T_i dává $T_i \vdash \neg\varphi$.

Algoritmus paralelně konstruuje tablo důkaz φ z T a (postupně) tablo důkazy $\neg\varphi$ ze všech kompletních jedn. extenzí $T_1, T_2, \ldots$. (Je-li jich nekonečně mnoho, uděláme dovetailing: 1. krok 1. tabla, potom 2. krok 1., 1. krok 2., 3. krok 1., 2. krok 2., 1. krok 3., atd.)

Alespoň jedno z tabel je sporné, můžeme předpokládat konečné, algoritmus ho po konečně mnoha krocích zkonstruuje. $\square$

Příklady

Následující teorie jsou rekurzivně axiomatizované a mají rekurzivně spočetnou kompletaci, tedy jsou rozhodnutelné:

(a) Teorie čisté rovnosti

(b) Teorie unárního predikátu ($T = \emptyset$, $L = \langle U \rangle$ s rovností)

(c) Teorie hustých lineárních uspořádání DeLO*

(d) Teorie Booleových algeber (Alfred Tarski 1940),

(e) Teorie algebraicky uzavřených těles (Tarski 1949),

(f) Teorie komutativních grup (Wanda Szmielew 1955).

Rekurzivní axiomatizovatelnost

Kdy lze třídu struktur ‘efektivně (algoritmicky) popsat’?

$K \subseteq \mathrm{M}_L$ je rek. axiomatizovatelná, pokud existuje rek. axiomatizovaná T, že $K = M_L(T)$. T' je rek. axiomatizovatelná, platí-li to pro třídu jejích modelů (tj. je-li ekvivalentní rek. axiomatizované teorii).

(podobně lze definovat rek. spočetnou axiomatizovatelnost)

Tvrzení: Je-li $\mathcal{A}$ konečná struktura v konečném jazyce s rovností, potom je teorie $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ rekurzivně axiomatizovatelná.

(z toho plyne i rozhodnutelnost $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, ale $\mathcal{A} \models \varphi$ lze ověřit přímo)

Důkaz: Buď $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ axiomatizujeme sentencí “existuje právě n prvků $a_1, \ldots, a_n$ splňujících právě ty základní vztahy o funkčních hodnotách a relacích, které platí v $\mathcal{A}$”.

Např. je-li $f^{\mathcal{A}}(a_4, a_2) = a_{17}$, přidej atom. formuli $f(x_{a_4}, x_{a_2}) = x_{a_{17}}$, pro $(a_3, a_3, a_1) \in R^{\mathcal{A}}$ přidej $R(x_{a_3}, x_{a_3}, x_{a_1})$. $\square$

Příklady

Pro následující struktury je $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ rekurzivně axiomatizovatelná:

- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, jde o tzv. teorii diskrétních lineárních uspořádání
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, jde o teorii DeLO
- $\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$, teorie následníka s nulou
- $\langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle$, Presburgerova aritmetika
- $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, teorie reálně uzavřených těles, znamená že lze algoritmicky rozhodovat Euklid. geometrii (Tarski, 1949)
- $\langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, teorie algebraicky uzavřených těles char. 0

Důsledek: Pro struktury výše platí, že $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je rozhodnutelná.

Důkaz: $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je vždy kompletní.

Teorie standardního modelu aritmetiky $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ ale není rekurzivně axiomatizovatelná (viz První Gödelova věta o neúplnosti).