5.4 LI-rezoluce a Horn-SAT

Lineární důkaz: neformálně

Rezoluční důkaz můžeme kromě rezolučního stromu zorganizovat i jinak, jako tzv. lineární důkaz:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
C_0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & \cdots\cdots\cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r] & C_{n+1} \\
B_0 \arrow[ur] & B_1 \arrow[ur] & & B_{n-1} \arrow[ur] & B_n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

- v každém kroku máme jednu centrální klauzuli
- tu rezolvujeme s boční (‘side’) klauzulí
- boční klauzule je buď axiom z S, nebo některá z předchozích centrálních (jako bychom odvozené klauzule přidávali k axiomům)
- výsledná rezolventa je novou centrální klauzulí

(Tento pohled lépe odpovídá procedurálnímu výpočtu, jde jen o to, jak vybírat vhodné boční klauzle.)

Lineární důkaz: formálně

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, dash] & C_1 \arrow[r, dash] & C_2 \arrow[r, dash] & \cdots\cdots\cdots \arrow[r, dash] & C_n \arrow[r, dash] & C_{n+1} \\
B_0 \arrow[ur, dash] & B_1 \arrow[ur, dash] & & B_{n-1} \arrow[ur, dash] & B_n \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Lineární důkaz klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

kde C_i říkáme centrální klauzule, C_0 je počáteční, $C_{n+1} = C$ je koncová, B_i jsou boční klauzule, a platí:

- $C_0 \in S$, pro $i \leq n$ je C_{i+1} rezolventou C_i a B_i,
- $B_0 \in S$, pro $i \leq n$ je $B_i \in S$ nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$.

Lineární zamítnutí S je lineární důkaz $\square$ z S.

Příklad a ekvivalence s rezolučním důkazem

Lineární zamítnutí $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:

$$
\begin{tikzcd}
\{p, q\} \arrow[r, dash] & {\color{blue}\{p\}} \arrow[r, dash] & \{q\} \arrow[r, dash] & \{\neg p\} \arrow[r, dash] & \square \\
\{p, \neg q\} \arrow[ur, dash] & \{\neg p, q\} \arrow[ur, dash] & \{\neg p, \neg q\} \arrow[ur, dash] & {\color{red}\{p\}} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

Poslední boční klauzule ${\color{red}\{p\}}$ není z S, ale je rovna předchozí centrální klauzuli.

Poznámka: C má lineární důkaz z S, právě když $S \vdash_R C$.

$\Rightarrow$ Z lineárního důkazu snadno vyrobíme rezoluční strom. Indukcí dle délky důkazu: máme-li boční klauzuli $B_i \notin S$, potom $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$: místo B_i připojíme rezoluční strom pro C_j z S.

$\Leftarrow$ Plyne z úplnosti lineární rezoluce, důkaz najdete v učebnici.