

Jedenáctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Program

- korektnost rezoluce
- lifting lemma a úplnost rezoluce
- LI-rezoluce a Prolog
- elementární ekvivalence

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 8.6-8.7 z Kapitoly 8, Sekce 9.1 z Kapitoly 9

8.6 Korektnost a úplnost

Korektnost rezolučního kroku

Tvrzení: Mějme klauzule C_1 , C_2 a jejich rezolventu C . Platí-li v nějaké struktuře \mathcal{A} klauzule C_1 a C_2 , potom v ní platí i C .

Důkaz: Buď $C_1 = C'_1 \sqcup \{A_1, \dots, A_n\}$, $C_2 = C'_2 \sqcup \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\}$, a $C = C'_1\sigma \cup C'_2\sigma$, kde $S\sigma = \{A_1\sigma\}$ (a σ je nejobecnější). Klauzule jsou otevřené formule, proto platí i jejich instance:

$$\mathcal{A} \models C_1\sigma \quad \text{a} \quad \mathcal{A} \models C_2\sigma$$

Po aplikaci unifikace máme:

$$C_1\sigma = C'_1\sigma \cup \{A_1\sigma\}$$

$$C_2\sigma = C'_2\sigma \cup \{\neg A_1\sigma\}$$

Chceme ukázat, že $\mathcal{A} \models C[e]$ pro lib. ohodnocení e .

- Je-li $\mathcal{A} \models A_1\sigma[e]$, potom $\mathcal{A} \not\models \neg A_1\sigma[e]$ a musí $\mathcal{A} \models C'_2\sigma[e]$.
Tedy i $\mathcal{A} \models C[e]$.
- Je-li $\mathcal{A} \not\models A_1\sigma[e]$, musí být $\mathcal{A} \models C'_1\sigma[e]$ a opět $\mathcal{A} \models C[e]$. \square

Věta (O korektnosti rezoluce): Pokud je CNF formule S rezolucí zamítnutelná, potom je nespílitelná.

Důkaz: Víme, že $S \vdash_R \square$, vezměme tedy nějaký rezoluční důkaz \square z S . Kdyby existoval model $\mathcal{A} \models S$, díky korektnosti rezolučního pravidla bychom dokázali (indukcí podle délky důkazu) i $\mathcal{A} \models \square$, což ale není možné. \square

Lifting lemma

úplnost rezoluce dokážeme převedením na případ výrokové logiky: rezoluční důkaz 'na úrovni VL' je možné 'zvednout' na úroveň PL

Lifting lemma: Bud' C_1 a C_2 klauzule s disj. množ. proměnných, C_1^* a C_2^* jejich základní instance, C^* rezolventa C_1^* a C_2^* . Potom C_1 a C_2 mají rezolventu C takovou, že C^* je základní instance C .

(důkaz na příštím slidu)

Důsledek: Bud' S CNF formule a označme S^* množinu všech jejích základních instancí. Pokud $S^* \vdash_R C^*$ pro nějakou základní klauzuli C^* ('na úrovni VL'), potom existuje klauzule C a základní substituce σ taková, že $C^* = C\sigma$ a $S \vdash_R C$ ('na úrovni PL').

Důkaz: Snadno z Lifting lemmatu indukcí dle délky důkazu. \square

Důkaz Lifting lemmatu

Nechť $C_1^* = C_1\tau_1$ a $C_2^* = C_2\tau_2$, τ_1 a τ_2 zákl. substituce nesdílející žádnou proměnnou. Najdeme rezolventu C , že $C^* = C\tau_1\tau_2$.

Bud' C^* rezolventa C_1^* a C_2^* přes literál $P(t_1, \dots, t_k)$. Víme, že:

$$C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \dots, A_n\}, \text{ kde } \{A_1, \dots, A_n\}\tau_1 = \{P(t_1, \dots, t_k)\}$$

$$C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\}, \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\}\tau_2 = \{\neg P(t_1, \dots, t_k)\}$$

Tedy $(\tau_1\tau_2)$ unifikuje $S = \{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$. Bud' σ nejob. unifikace pro S z Unifikačního algoritmu. Zvolme $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$.

$$\begin{aligned} C\tau_1\tau_2 &= (C_1'\sigma \cup C_2'\sigma)\tau_1\tau_2 = C_1'\sigma\tau_1\tau_2 \cup C_2'\sigma\tau_1\tau_2 = C_1'\tau_1\tau_2 \cup C_2'\tau_1\tau_2 \\ &= C_1'\tau_1 \cup C_2'\tau_2 = (C_1 \setminus \{A_1, \dots, A_n\})\tau_1 \cup (C_2 \setminus \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\})\tau_2 \\ &= (C_1^* \setminus \{P(t_1, \dots, t_k)\}) \cup (C_2^* \setminus \{\neg P(t_1, \dots, t_k)\}) = C^* \end{aligned}$$

Zde $=$ plyne z vlastnosti 'navíc' Unif. algoritmu $(\tau_1\tau_2) = \sigma(\tau_1\tau_2)$,

a $=$ z toho, že jde o základní substituce nesdílející proměnnou. \square

Věta (O úplnosti rezoluce): Je-li CNF formule S nespílitelná, potom je zamítnutelná rezolucí.

Důkaz: Množina S^* všech základních instancí klauzulí z S je také nespílitelná (důsledek Herbrandovy věty). Úplnost **výrokové** rezoluce dává $S^* \vdash_R \square$ ('na úrovni VL').

Z důsledku Lifting lemmatu dostáváme klauzuli C a základní substituci σ takové, že $C\sigma = \square$ a $S \vdash_R C$ ('na úrovni PL').

Ale protože prázdná klauzule \square je instancí C , musí být $C = \square$. Tím jsme našli rezoluční zamítnutí $S \vdash_R \square$. □

8.7 LI-rezoluće

Lineární důkaz a LI-důkaz

- **Lineární důkaz** klauzule C z formule S je konečná posloupnost

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} C_n \\ B_n \end{bmatrix}, C_{n+1}$$

kde: B_0 a C_0 jsou varianty klauzulí z S , $C_{n+1} = C$,

- C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i
- B_i **varianta** klauzule z S nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$.
- **Lineární zamítnutí** S je lineární důkaz \square z S
- **LI-důkaz** je lin. důkaz, kde vš. B_i jsou varianty klauzulí z S
- C **LI-dokazatelná** z S , $S \vdash_{LI} C$, pokud existuje LI-důkaz
- S je **LI-zamítnutelná**, pokud $S \vdash_{LI} \square$
- korektnost (lineární i LI-rezoluce) je zřejmá

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta (O úplnosti lineární rezoluce): C má lineární důkaz z S , právě když má rezoluční důkaz z S (tj. $S \vdash_R C$).

Důkaz: převodem na VL (Lifting lemma zachovává linearitu) \square

Věta (O úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule): Je-li Hornova formule T splnitelná, a $T \cup \{G\}$ je nespjitelná pro cíl G , potom $T \cup \{G\} \vdash_{LI} \square$, a to LI-zamítnutím, které začíná cílem G .

Důkaz: úplnost ve VL + Herbrandova věta + Lifting lemma \square

- **Hornova formule:** množina Hornových klauzulí
- **Hornova klauzule:** nejvýše jeden pozitivní literál
- **Pravidlo:** klauzule s 1 pozitivním a alespoň 1 negativním literálem
- **Fakt:** pozitivní jednotková klauzule
- **Cíl:** neprázdná klauzule bez pozitivního literálu
- **Programové klauzule:** pravidla a fakta
- **Program:** Hornova formule obsahující jen programové klauzule

```
son(X,Y):-father(Y,X),man(X).    {son(X, Y), ¬father(Y, X), ¬man(X)}
son(X,Y):-mother(Y,X),man(X).    {son(X, Y), ¬mother(Y, X), ¬man(X)}
man(charlie).                     {man(charlie)}
father(bob,charlie).              {father(bob, charlie)}
mother(alice,charlie).            {mother(alice, charlie)}

?-son(charlie,X).                  {¬son(charlie, X)}
```

Platí v programu daný **existenční dotaz**, $P \models (\exists X)son(charlie, X)$?

Důsledek: Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \dots, \neg A_k\}$ v proměnných X_1, \dots, X_n jsou následující ekvivalentní:

- $P \models (\exists X_1) \dots (\exists X_n)(A_1 \wedge \dots \wedge A_k)$
- $P \cup \{G\}$ má LI-zamítnutí začínající G

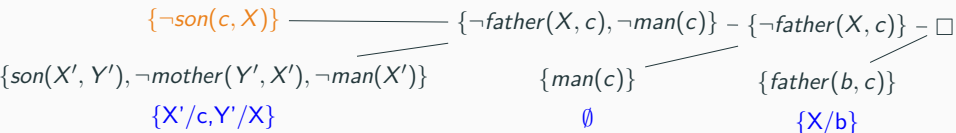
Důkaz: Plyne z Důkazu sporem a Úplnosti LI-rezoluce pro Hornovy formule (Program je vždy splnitelný). □

Je-li odpověď na dotaz kladná, chceme znát i **výstupní substituci** σ , tj. složení unifikací z rez. kroků, zúžené na proměnné v G . Platí:

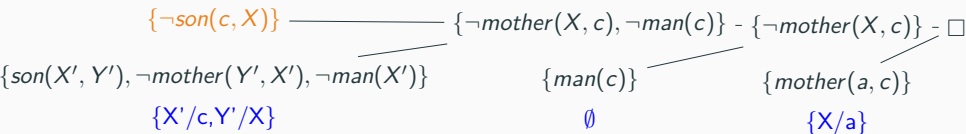
$$P \models (A_1 \wedge \dots \wedge A_k)\sigma$$

Příklady

?-son(charlie,X).



X=bob výstupní substituce $\sigma = \{X/b\}$



X=alice výstupní substituce $\sigma = \{X/a\}$

ČÁST III – POKROČILÉ PARTIE

KAPITOLA 9: TEORIE MODELŮ

- vztah mezi vlastnostmi teorií a tříd jejich modelů
 - bližší matematice než informatice a aplikacím
 - jen několik vybraných dostupných výsledků
- + co je třeba pro Gödelovy věty (Kapitola 10)
- + co se nevešlo jinam

9.1 Elementární ekvivalence

Teorie struktury \mathcal{A} (v jazyce L):

$$\text{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Např. pro standardní model aritmetiky $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ říkáme $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ aritmetika přirozených čísel, je nerozhodnutelná (neexistuje algoritmus, který pro každou φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$)

Pozorování: Nechť \mathcal{A} je L -struktura a T je L -teorie.

- $\text{Th}(\mathcal{A})$ je kompletní teorie
- $\mathcal{A} \in M_L(T) \Rightarrow \text{Th}(\mathcal{A})$ je (kompletní) jednoduchá extenze T
- $\mathcal{A} \in M_L(T)$, T kompletní $\Rightarrow \text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Csq}_L(T) \sim T$

L -struktury \mathcal{A} a \mathcal{B} jsou **elementárně ekvivalentní** ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L -sentence, neboli: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B})$

Například pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$: snadno pomocí **hustoty**
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$: v $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ má každý prvek bezprostředního následníka, v $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ ne, tedy $\varphi \in \text{Th}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle) \setminus \text{Th}(\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle)$ pro následující sentenci:

$$\varphi = (\forall x)(\exists y)(x \leq y \wedge \neg x = y \wedge (\forall z)(x \leq z \rightarrow z = x \vee y \leq z))$$

Kompletní jednoduché extenze

Pro teorii T nás hlavně zajímá, jak vypadají modely.

- T je **kompletní**, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci (všechny modely jsou elementárně ekvivalentní)
- Modely T až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají **kompletním jednoduchým extenzím** T , ty jsou tvaru $\text{Th}(\mathcal{A})$ pro $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(T)$, kde $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B})$

Místo hledání modelů stačí najít kompletní jednoduché extenze!

Motivace: ukážeme, že lze-li **efektivně popsat** všechny kompletní jednoduché extenze **efektivně dané** teorie, potom je **rozhodnutelná**.

- algoritmus, který pro vstup (i, j) vypíše j -tý axiom i -té kompletní jednoduché extenze (v nějakém očíslování)
- algoritmus, který postupně vygeneruje všechny axiomy teorie

Schopnost efektivně popsat kompletní jedn. extenze je vzácná, vyžaduje silné předpoklady, ale u mnoha důležitých teorií to lze.

Příklad: DeLO*

Teorie **hustého lin. uspořádání (DeLO*)** je extenze teorie uspořádání o **linearitu (dichotomii)**, **hustotu**, a někdy se přidává **netrivialita**:

- $x \leq y \vee y \leq x$
- $x \leq y \wedge \neg x = y \rightarrow (\exists z)(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg z = x \wedge \neg z = y)$
- $(\exists x)(\exists y)(\neg x = y)$

Tvrzení: Bud' $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ a $\psi = (\exists x)(\forall y)(y \leq x)$. Následující jsou právě všechny kompletní jednoduché extenze DeLO*:

- $\text{DeLO} = \text{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}$
- $\text{DeLO}^+ = \text{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}$
- $\text{DeLO}^- = \text{DeLO}^* \cup \{\varphi, \neg\psi\}$
- $\text{DeLO}^\pm = \text{DeLO}^* \cup \{\varphi, \psi\}$

Stačí ukázat, že jsou kompletní. Potom už je zřejmé, že žádná další kompletní jednoduchá extenze DeLO* nemůže existovat.

Jak ukážeme, kompletnost plyne z faktu, že jsou **ω -kategorické**, tj. mají jediný spočetný model až na **izomorfismus**.

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty bez rovnosti

Připomeňme:

Věta (L.-S. bez rovnosti): Ve spočetném jazyce bez rovnosti má každá bezesporná teorie spočetně nekonečný model.

Jednoduchý důsledek:

Důsledek: Je-li L spočetný bez rovnosti, potom ke každé L -struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

Důkaz: $\text{Th}(\mathcal{A})$ je bezesporná (má model \mathcal{A}), tedy dle L.-S. věty má spočetně nekonečný model $\mathcal{B} \models \text{Th}(\mathcal{A})$, to znamená $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$. \square

Bez rovnosti tedy nelze vyjádřit např. 'model má právě 42 prvků'.

Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty s rovností

V důkazu L.-S. věty máme kanonický model pro bezespornou větev tabla z T pro $F \perp$; pro jazyk s rovností stačí faktorizovat dle $=^A$:

Věta (L.-S. s rovností): Ve spočetném jazyce s rovností má každá bezesporná teorie spočetný model (konečný, nebo nekonečný).

I tato verze má snadný důsledek pro konkrétní struktury:

Důsledek: Je-li L spočetný s rovností, ke každé **nekonečné** L -struktuře existuje elem. ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.

Důkaz: Mějme nekonečnou L -strukturu \mathcal{A} . Stejně jako v důkazu Důsledku bez rovnosti najdeme spočetně nekonečnou $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$.

Protože v \mathcal{A} neplatí pro žádné $n \in \mathbb{N}$ sentence vyjadřující 'existuje nejvýše n prvků' (což lze pomocí rovnosti snadno zapsat), neplatí ani v \mathcal{B} , tedy \mathcal{B} nemůže být konečná. □

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

- algebraicky uzavřené těleso: každý polynom nenulového stupně v něm má kořen
- \mathbb{Q} není, $x^2 - 2$ nemá v \mathbb{Q} kořen
- \mathbb{R} není, $x^2 + 1$ nemá v \mathbb{R} kořen
- \mathbb{C} je algebraicky uzavřené, ale je nespočetné

Algebraickou uzavřenost vyjádříme sentencemi ψ_n , pro $n > 0$:

$$(\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0) = 0$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \dots \cdot y$

Důsledek: Existuje spočetné algebraicky uzavřené těleso.

Důkaz: Dle Důsledku L.S. věty (s rovností) existuje spočetně nekonečná $\mathcal{A} \equiv \mathbb{C}$. Protože \mathbb{C} je těleso a splňuje ψ_n pro všechna $n > 0$, je i \mathcal{A} algebraicky uzavřené těleso. □