NAIL062 V&P Logika: 5. sada příkladů

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- zná potřebné pojmy z rezoluční metody (rezoluční pravidlo, rezolventa, rezoluční důkaz/zamítnutí, rezoluční strom), umí je formálně definovat, uvést příklady
- umí pracovat s výroky v CNF a jejich modely v množinové reprezentaci
- umí sestrojit rezoluční zamítnutí dané (i nekonečné) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit příslušný rezoluční strom
- zná pojem stromu dosazení, umí ho formálně definovat a pro konkrétní CNF formuli sestrojit
- umí aplikovat rezoluční metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)

Příklady na cvičení

Příklad 1. Označme jako φ výrok $\neg(p \lor q) \rightarrow (\neg p \land \neg q)$. Ukažte, že φ je tautologie:

(a) Převeďte $\neg\varphi$ do CNF a zapište výsledný výrok jako formuli S v množinové reprezentaci.
(b) Najděte rezoluční zamítnutí S.

Příklad 2. Dokažte rezolucí, že v $T = \{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$ platí výrok s.

Příklad 3. Nechť prvovýroky r, s, t reprezentují (po řadě), že *"Radka / Sára / Tom je ve škole"* a označme $\mathbb{P} = \{r, s, t\}$. Víme, že:

- *Není-li Tom ve škole, není tam ani Sára.*
- *Radka bez Sáry do školy nechodí.*
- *Není-li Radka ve škole, je tam Tom.*

(a) Formalizujte naše znalosti jako teorii T v jazyce $\mathbb{P}$.
(b) Rezoluční metodou dokažte, že z T vyplývá, že *Tom je ve škole*: Napište formuli S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když to platí, a najděte rezoluční zamítnutí S. Nakreslete rezoluční strom.
(c) Určete množinu modelů teorie T.

Příklad 4. Zkonstruujte *strom dosazení* pro následující formuli. Na základě tohoto stromu sestrojte rezoluční zamítnutí, dle postupu z důkazu Věty o úplnosti rezoluce.

$$S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$$

Další příklady k procvičení

Příklad 5. Najděte rezoluční zamítnutí následujících výroků:

(a) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$
(b) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \land ((p \leftrightarrow q) \land (p \leftrightarrow \neg r))$

Příklad 6. Tonia a Fabio nám popisují svůj nejnovější recept na nejlepší pizzu na světě.

- Tonia řekla: "Do receptu patří ančovičky nebo bazalka nebo česnek."
- Tonia také řekla: "Jestli tam nepatří dušená šunka, nepatří tam ani bazalka."
- Fabio řekl: "Do receptu patří dušená šunka."
- Fabio dále řekl: "Nepatří tam ančovičky ani bazalka, ale patří tam česnek."

Víme, že Tonia vždy mluví pravdu, zatímco Fabio vždy lže.

(a) Vyjádřete naše znalosti jako výrokovou teorii T v jazyce $\mathbb{P} = \{a, b, c, d\}$, kde výrokové proměnné mají po řadě význam "do receptu patří ančovičky/bazalka/česnek/dušená šunka".

(b) Pomocí rezoluční metody dokažte, že z teorie T vyplývá, že “do receptu patří ančovičky”. Nakreslete rezoluční strom.

Příklad 7. Celá čísla postihla záhadná nemoc šířící se (v diskrétních krocích) dle následujících pravidel (platících pro všechna čísla ve všech krocích).

(i) Zdravé číslo onemocní, právě když je právě jedno číslo nemocné (v předchozím čase).
(ii) Nemocné číslo se uzdraví, právě když je předchozí číslo nemocné (v předchozím čase).
(iii) V čase 0 *bylo nemocné číslo* 0*, ostatní čísla byla zdravá.*

(a) Napište teorie T_1, T_2, T_3 vyjadřující (po řadě) tvrzení $(i), (ii), (iii)$ nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p_i^t \mid i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}_0\}$, kde prvovýrok p_i^t vyjadřuje, že “*číslo i je v čase t nemocné.*”
(b) Převeďte axiomy z T_1, T_2, T_3 do CNF a napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \neg p_1^2$, tj.: “*Číslo* 1 *je zdravé v čase* 2.” (Stačí převést jen konkrétní axiomy z T_1, T_2, T_3, ze kterých plyne $\neg p_1^2$, a do S uvést jen příslušné klauzule.)
(c) Rezolucí dokažte, že S je nesplnitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem.

K zamyšlení

Příklad 8. Dokažte podrobně, že je-li $S = \{C_1, C_2\}$ splnitelná a C je rezolventa C_1 a C_2, potom je i C splnitelná.