Sedmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Sedmá přednáška

Program

- podstruktury, expanze, redukty
- extenze teorií, extenze o definice
- definovatelnost a databázové dotazy
- vztah výrokové a predikátové logiky

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 6.6-6.9 z Kapitoly 6

6.6 Podstruktura, expanze, redukt

Podstruktura

- podstruktura zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která "zdědí" relace, funkce a konstanty
- B musí být uzavřená na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je (indukovaná) podstruktura struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ (v též signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$), značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\mathrm{ar(R)}}$ pro každý relační symbol $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\mathrm{ar(f)}} \times B)$ pro každý funkční symbol $f \in \mathcal{F}$, tj. $f^{\mathcal{B}}$ je restrikce $f^{\mathcal{A}}$ na množinu B, a výstupy jsou všechny z B

speciálně, pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$

Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina $C \subseteq A$ je uzavřená na funkci $f : A^n \to A$, pokud $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$.

Pozorování: Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant). V tom případě je to restrikce $\mathcal{A}$ na množinu C, značíme $\mathcal{A} \restriction C$.

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, můžeme psát: $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou obou těchto struktur, platí: $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \restriction \mathbb{N}$
- Množina $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}$ není univerzem podstruktury $\underline{\mathbb{Z}}$ ani $\underline{\mathbb{Q}}$, není uzavřená na násobení.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ, pro atomickou zřejmé. $\square$

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie T je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek: Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme). Podstruktura tělesa $\mathbb{Q}$ na množině $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \restriction \mathbb{Z}$, není těleso. (Je to tzv. okruh.)

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza není uzavřená? Vezmeme její uzávěr.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce $\mathcal{A}$ (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \restriction B$ je generovaná X, značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$:

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$ je podstruktura $\underline{\mathbb{N}}$ na množině všech sudých čísel

Pokud $\mathcal{A}$ nemá žádné funkce (ani konstanty), např. graf či uspořádání, potom není čím generovat, a $\mathcal{A}\langle X \rangle = \mathcal{A} \restriction X$.

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L-strukturu $\mathcal{A}$ a L'-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

- $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do L' (L'-expanze struktury $\mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L (L-redukt struktury $\mathcal{A}'$)

Například:

- Mějme grupu celých čísel $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$. Potom:
    - struktura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ je její redukt
    - struktura $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ (okruh celých čísel) je její expanze
- Mějme graf $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$. Potom expanze $\mathcal{G}$ o jména prvků (z množiny G) je struktura $\langle G, E^{G}, c_v^{\mathcal{G}} \rangle_{v \in G}$ v jazyce $\langle E, c_v \rangle_{v \in G}$, kde $c_v^{\mathcal{G}} = v$ pro všechny vrcholy $v \in G$.

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena novým konstantním symbolem c
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

Věta (O konstantách): Mějme L-formuli φ s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$. Označme jako L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a buď T' stejná teorie jako T, ale v jazyce L'. Potom:

$$T \models \varphi \;\text{ právě když }\; T' \models \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$$

Důkaz: stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukcí

$\Rightarrow$ **Víme:** φ platí v každém modelu T. **Chceme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. Mějme model $\mathcal{A}' \models T'$ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A'$ a ukažme, že $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e', speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v $\mathcal{A}'$.

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

$\Leftarrow$ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T'. **Chceme:** φ platí v každém modelu T. Zvolme $\mathcal{A} \models T$ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ do L', kde c interpretujeme jako $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$. Dle předpokladu platí $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$ pro všechna ohodnocení e'. Tedy $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$, což znamená $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$ ($e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$, z toho plyne $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$).

Formule φ neobsahuje c (je nový), máme tedy i $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. $\square$

6.7 Extenze teorií

Extenze teorie

Stejně jako ve výrokové logice, je-li T teorie v jazyce L:

- extenze: T' v jazyce $L' \supseteq L$ splňující $\mathrm{Csq}_L(T) \subseteq \mathrm{Csq}_{L'}(T')$
- jednoduchá: $L' = L$
- konzervativní: $\mathrm{Csq}_L(T) = \mathrm{Csq}_L(T') = \mathrm{Csq}_{L'}(T') \cap \mathrm{Fm}_L$
- ekvivalentní: T' extenzí T a T extenzí T' (obě v témž jazyce)

Jsou-li T, T' ve stejném jazyce L:

- T' je extenze T, právě když $\mathrm{M}_L(T') \subseteq \mathrm{M}_L(T)$
- T' je ekvivalentní s T, právě když $\mathrm{M}_L(T') = \mathrm{M}_L(T)$

Zvětšíme-li jazyk:

- ve výrokové logice: přidáváme/zapomínáme hodnoty pro nové prvovýroky
- v predikátové logice: expandujeme/redukujeme modely (přidáváme/zapomínáme nové relace, funkce, konstanty)

Extenze teorie: sémantický popis

Mějme jazyky $L \subseteq L'$, L-teorii T a L'-teorii T':

(i) T' je extenzí T $\Leftrightarrow$ L-redukt každého modelu T' je model T

(ii) T' je konzervativní extenzí T $\Leftrightarrow$ T' je extenzí T, a každý model T lze expandovat do L' na nějaký model T'

Poznámka: Důkaz (ii) $\Rightarrow$ vynecháme (technický problém: model, který nelze expandovat $\rightsquigarrow$ L-sentence platná v T ale ne v T')

Důkaz: (i) $\Rightarrow$ Buď $\mathcal{A}'$ model T', $\mathcal{A}$ jeho L-redukt. Protože T' je extenzí, platí v ní, tedy i v $\mathcal{A}'$, každý axiom $\varphi \in T$. Ten ale obsahuje jen symboly z L, tedy platí i v $\mathcal{A}$.

(i) $\Leftarrow$ **Mějme:** L-sentenci φ, $T \models \varphi$. **Chceme:** $T' \models \varphi$. Pro lib. model $\mathcal{A}' \in \mathrm{M}_{L'}(T')$ víme, že jeho L-redukt $\mathcal{A}$ je modelem T, tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. Z toho plyne i $\mathcal{A}' \models \varphi$ (opět φ je v L).

(ii) $\Leftarrow$ **Mějme:** L-sentenci φ, $T' \models \varphi$. **Chceme:** $T \models \varphi$. Každý $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T)$ lze expandovat na nějaký $\mathcal{A}' \in \mathrm{M}_{L'}(T')$. Víme, že $\mathcal{A}' \models \varphi$, takže i $\mathcal{A} \models \varphi$. Tím jsme dokázali $T \models \varphi$. $\square$

Extenze o definice (neformálně)

- přidáme nový symbol, jehož význam je jednoznačně daný definující formulí (jako procedura/funkce v programování)
- pro relační symboly jednoduché, pro funkční symboly musíme navíc zaručit existenci a jednoznačnost funkční hodnoty

Ukážeme:

- je to konzervativní extenze, dokonce každý model původní teorie lze jednoznačně expandovat na model nové teorie
- každou formuli používající nové symboly lze přepsat na formuli v původním jazyce (tak, že jsou v extenzi ekvivalentní)

Definice relačního symbolu

nový n-ární relační symbol R lze definovat lib. formulí $\psi(x_1, \dots, x_n)$

- teorii v jazyce s rovností lze rozšířit o symbol $\neq$ definovaný formulí $\neg x_1 = x_2$; tj. požadujeme, aby: $x_1 \neq x_2 \leftrightarrow \neg x_1 = x_2$
- teorii uspořádání lze rozšířit o $<$ definovaný formulí $x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$; tj. platí: $x_1 < x_2 \leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$
- v aritmetice lze zavést $\leq$ takto: $x_1 \leq x_2 \leftrightarrow (\exists y)(x_1 + y = x_2)$
- v uspořádaném stromu lze zavést unární predikát $\mathrm{Leaf}(x)$: $\mathrm{Leaf}(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)(x <_T y)$

Mějme teorii T a formuli $\psi(x_1, \dots, x_n)$ v jazyce L. Označme jako L' rozšíření jazyka L o nový n-ární relační symbol R. Extenze teorie T o definici R formulí ψ je L'-teorie:

$$T' = T \cup \{R(x_1, \dots, x_n) \ \leftrightarrow \ \psi(x_1, \dots, x_n)\}$$

Definice relačního symbolu: vlastnosti

Tvrzení:

(i) T' je konzervativní extenze T.

(ii) Pro každou L'-formuli φ' existuje L-formule φ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Důkaz: (i) ihned ze sémantického popisu extenzí, neboť zřejmě každý model T lze jednoznačně expandovat na model T'

(ii) atomickou podformuli s novým symbolem R, tj. tvaru $R(t_1, \ldots, t_n)$, nahradíme formulí

$$\psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$$

kde ψ' je varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů (např. přejmenujeme všechny vázané proměnné ψ na zcela nové) $\square$

Definice funkčního symbolu: příklady

vztah $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ definujeme formulí $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$; pro každý vstup $(x_1, \ldots, x_n)$ musí existovat jednoznačný výstup y

1. Teorie grup: binární funkční symbol $-_b$ pomocí $+$ a unárního $-$

$$x_1 -_b x_2 = y \leftrightarrow x_1 + (-x_2) = y$$

- zřejmě pro každá x, y existuje jednoznačné z splňující definici

2. Teorie lineárních uspořádání: binární funkční symbol min

$$\min(x_1, x_2) = y \leftrightarrow y \leq x_1 \wedge y \leq x_2 \wedge (\forall z)(z \leq x_1 \wedge z \leq x_2 \rightarrow z \leq y)$$

- existence a jednoznačnost platí díky linearitě $(x \leq y \vee y \leq x)$
- pouze v teorii uspořádání by nešlo o dobrou definici: $\min^{\mathcal{A}}(a_1, a_2)$ nemusí existovat

Definice funkčního symbolu: definice

Mějme teorii T a formuli $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ v jazyce L. Označme L' rozšíření L o nový n-ární funkční symbol f. Nechť platí:

- $T \models (\exists y)\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ (existence)
- $T \models \psi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \ldots, x_n, z) \rightarrow y = z$ (jednoznačnost)

Potom extenze teorie T o definici f formulí ψ je L'-teorie:

$$T' = T \cup \{f(x_1, \ldots, x_n) = y \;\leftrightarrow\; \psi(x_1, \ldots, x_n, y)\}$$

- ψ definuje v modelu $(n+1)$-ární relaci, ta musí být funkcí
- je-li ψ tvaru $t(x_1, \ldots, x_n) = y$ pro term t, vždy to platí

Tvrzení:

(i) T' je konzervativní extenze T.

(ii) Pro každou L'-formuli φ' existuje L-formule φ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Důkaz: (i) modely T lze jednoznačně expandovat na modely T'

Pokračování důkazu

(ii) stačí pro jediný výskyt symbolu f, jinak induktivně (je-li více vnořených výskytů $f(\dots f(\dots)\dots)$, potom od vnitřních k vnějším)

1. nahradíme term $f(t_1, \dots, t_n)$ novou proměnnou z: výsledek φ^*
2. φ zkonstruujeme takto: $(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z))$ (kde ψ' je varianta ψ zaručující substituovatelnost)

Ukážeme, že pro libovolný model $\mathcal{A} \models T'$ a ohodnocení e platí:

$$\mathcal{A} \models \varphi'[e] \text{ právě když } \mathcal{A} \models \varphi[e]$$

Označme $a = (f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{A}}[e]$. Díky existenci a jednoznačnosti:

$$\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)[e] \text{ právě když } e(z) = a$$

Máme tedy: $\mathcal{A} \models \varphi'[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$ $\square$

Definice konstantního symbolu

- speciální případ: funkční symbol arity 0
- extenze o definici konstantního symbolu c formulí $\psi(y)$:

$$T' = T \cup \{c = y \leftrightarrow \psi(y)\}$$

- musí platit $T \models (\exists y)\psi(y)$ a $T \models \psi(y) \wedge \psi(z) \rightarrow y = z$
- platí stejná tvrzení

1. teorie v jazyce aritmetiky, rozšíříme o definici symbolu 1 formulí $\psi(y)$ tvaru $y = S(0)$, přidáme tedy axiom $1 = y \ \leftrightarrow \ y = S(0)$

2. teorie těles, nový symbol $\frac{1}{2}$, definice formulí $y \cdot (1+1) = 1$, tj. přidáním $\frac{1}{2} = y \ \leftrightarrow \ y \cdot (1+1) = 1$?

- není extenze o definici! neplatí existence: v tělese charakteristiky 2, např. $\mathbb{Z}_2$, nemá rovnice $y \cdot (1+1) = 1$ řešení
- ale v teorii těles charakteristiky různé od 2, tj. přidáme-li axiom $\neg(1+1=0)$, už ano; např. v $\mathbb{Z}_3$ máme $\frac{1}{2}^{\mathbb{Z}_3} = 2$

Extenze o definice

L'-teorie T' je extenzí L-teorie T o definice, pokud vznikla postupnou extenzí o definice relačních a funkčních (vč. konstantních) symbolů.

Tvrzení: (snadno indukcí)

- Každý model T lze jednoznačně expandovat na model T'.
- T' je konzervativní extenze T.
- Pro L'-formuli φ' existuje L-formule φ, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Příklad: $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$

$L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností, zavedeme $<$ a unární $-$ přidáním axiomů:

$$T' = T \cup \{-x = y \leftrightarrow x + y = 0,$$
$$x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y)\}$$

Formule $-x < y$ v jazyce $L' = \langle +, -, 0, \leq, < \rangle$ s rovností je v T' ekvivalentní formuli: $(\exists z)((z \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = 0)$

6.8 Definovatelnost ve struktuře

Definovatelné množiny

- formule φ s jednou volnou proměnnou x … "vlastnost" prvků
- ve struktuře definuje množinu prvků, které vlastnost splňují (tj. prvků a takových, že φ platí při ohodnocení kde $e(x) = a$)
- $\varphi(x, y)$ definuje binární relaci, atp.

Množina definovaná $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ve struktuře $\mathcal{A}$ (v témž jazyce):

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)]\}$$

Zkráceně píšeme: $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a})]\}$

- formule $\neg(\exists y)E(x, y)$ definuje v daném grafu množinu všech izolovaných vrcholů
- $(\exists y)(y \cdot y = x) \wedge \neg(x = 0)$ definuje v tělese $\mathbb{R}$ množinu všech kladných reálných čísel
- $x \leq y \wedge \neg(x = y)$ definuje v uspořádané množině $\langle S, \leq^S \rangle$ relaci ostrého uspořádání $<^S$

Definovatelnost s parametry

- vlastnosti prvků relativně k jiným prvkům? nelze čistě syntakticky, ale můžeme dosadit prvky jako parametry
- zápis $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$: volné proměnné $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$

Mějme $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ (kde $|\bar{x}| = n$, $|\bar{y}| = k$), strukturu $\mathcal{A}$ (v témž jazyce), $\bar{b} \in A^k$. Množina definovaná $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ s parametry $\bar{b}$ ve struktuře $\mathcal{A}$:

$$\varphi^{\mathcal{A},\bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}$$

Pro $B \subseteq A$ označíme $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ množinu všech množin definovatelných v $\mathcal{A}$ s parametry pocházejícími z B.

Pozorování: $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ je uzavřená na doplněk, průnik, sjednocení, a obsahuje $\emptyset$ a A^n: je to podalgebra potenční algebry $\mathcal{P}(A^n)$.

Např. pro $\varphi(x, y) = E(x, y)$ a vrchol $v \in V(\mathcal{G})$ je $\varphi^{\mathcal{G},v}(x, y)$ množina všech sousedů vrcholu v.

Aplikace: databázové dotazy

- relační databáze: jedna nebo více tabulek, také relace
- řádky tabulky jsou záznamy (records), také tice (tuples)
- struktura v čistě relačním jazyce

Movies

title	director	actor
Forrest Gump	R. Zemeckis	T. Hanks
Philadelphia	J. Demme	T. Hanks
Batman Returns	T. Burton	M. Keaton
⋮	⋮	⋮

Program

cinema	title	time
Atlas	Forrest Gump	20:00
Lucerna	Forrest Gump	21:00
Lucerna	Philadelphia	18:30
⋮	⋮	⋮

Příklad SQL dotazu

- SQL dotaz v nejjednodušší formě je formule (pomineme např. agregační funkce)
- výsledek je množina definovaná touto formulí (s parametry)

"Kdy a kde můžeme vidět film s Tomem Hanksem?"

```
select Program.cinema, Program.time from Program, Movies where
Program.title = Movies.title and Movies.actor = 'T. Hanks'
```

- výsledek je množina $\varphi^{\text{Database},\text{'T. Hanks'}}(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$
- definovaná ve struktuře $\text{Database} = \langle D, \mathrm{Program}, \mathrm{Movies} \rangle$
- jejíž doména je $D = \{\texttt{'Atlas'}, \texttt{'Lucerna'}, \dots, \texttt{'M. Keaton'}\}$
- s parametrem `'T. Hanks'`,
- definující formule $\varphi(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$:

$$(\exists y_{\text{title}})(\exists y_{\text{director}})(\mathrm{Program}(x_{\text{cinema}}, y_{\text{title}}, x_{\text{time}}) \wedge \mathrm{Movies}(y_{\text{title}}, y_{\text{director}}, y_{\text{actor}}))$$

6.9 Vztah výrokové a predikátové logiky

Teorie Booleových algeber $L = \langle -, \wedge, \vee, \bot, \top \rangle$ s rovností

- asociativita $\wedge$ a $\vee$:
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
- komutativita $\wedge$ a $\vee$:
$$x \wedge y = y \wedge x$$
$$x \vee y = y \vee x$$
- distributivita $\wedge$ vůči $\vee$, $\vee$ vůči $\wedge$:
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
- absorpce:
$$x \wedge (x \vee y) = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x$$
- komplementace:
$$x \wedge (-x) = \bot$$
$$x \vee (-x) = \top$$
- netrivialita:
$$\neg(\bot = \top)$$

- dualita: záměnou $\wedge$ s $\vee$ a $\bot$ s $\top$ získáme tytéž axiomy
- nejmenší model: 2-prvková B. algebra $\langle \{0,1\}, f_\neg, f_\wedge, f_\vee, 0, 1 \rangle$
- konečné modely, až na izomorfismus (f^n je f po složkách):
$$\langle \{0,1\}^n, f_\neg^n, f_\wedge^n, f_\vee^n, (0,\ldots,0), (1,\ldots,1) \rangle$$
- jsou izomorfní potenčním algebrám $\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ pomocí bijekce mezi podmnožinami a charakteristickými vektory

Vztah výrokové a predikátové logiky

- výrokovou logiku lze ‘simulovat’ v predikátové logice v teorii Booleových algeber
- výroky jsou Booleovské termy, konstanty $\perp, \top$ představují pravdu a lež
- pravdivostní hodnota výroku (při daném pravdivostním ohodnocení) je hodnota termu v 2-prvkové Booleově algebře
- kromě toho, algebra výroků daného výrokového jazyka nebo teorie je Booleovou algebrou (i pro nekonečné jazyky)

Na druhou stranu. . .

- máme-li otevřenou formuli φ (bez rovnosti), můžeme reprezentovat atomické výroky pomocí prvovýroků, a získat tak výrok, který platí, právě když platí φ
- viz Kapitola 8: Rezoluce v predikátové logice, kde se nejprve zbavíme kvantifikátorů pomocí tzv. Skolemizace
- výrokovou logiku lze také zavést jako fragment logiky predikátové, pokud povolíme nulární relace
- $A^0 = \{\emptyset\}$, tedy na libovolné množině jsou právě dvě nulární relace $R^A \subseteq A^0$: $R^A = \emptyset = 0$ a $R^A = \{\emptyset\} = \{0\} = 1$