

Dvanáctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Program

- izomorfismus a konečné modely
- definovatelnost a automorfismy
- ω -kategoricita a úplnost
- axiomatizovatelnost
- rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 9.2-9.4 z Kapitoly 9, Sekce 10.1 z Kapitoly 10

9.2 Izomorfismus struktur

Definice izomorfismu

Izomorfismus \mathcal{A} a \mathcal{B} ($\forall L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h: A \rightarrow B$ splňující:

- pro každý (n -ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý (n -ární) $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \text{ právě když } R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

Existuje-li, jsou **izomorfní** ('via h '), $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (nebo $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$).

Automorfismus \mathcal{A} je izomorfismus \mathcal{A} a \mathcal{A} .

- tj. liší se jen 'pojmenováním prvků'
- relace 'být izomorfní' je ekvivalence
- např. potenční algebra $\mathcal{P}(X) = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$, $|X| = n$,
je izomorfní s $\underline{2}^n = \langle \{0, 1\}^n, -, \wedge_n, \vee_n, (0, \dots, 0), (1, \dots, 1) \rangle$
(operace po složkách) via $h(A) = \chi_A$ (charakt. vektor $A \subseteq X$)

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah \simeq a \equiv

Tvrzení: Bijekce $h: A \rightarrow B$ je izomorfismus \mathcal{A} a \mathcal{B} , právě když:

(i) pro každý term t a $e: \text{Var} \rightarrow A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e: \text{Var} \rightarrow A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: \Rightarrow snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

\Leftarrow je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \dots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu \square

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Důkaz: pro každou sentenci φ máme z (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ \square

Naopak obecně ne, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ Platí ale:

Tvrzení: Jsou-li \mathcal{A}, \mathcal{B} konečné v jazyce s rovností, potom

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

Důsledek Pokud má kompletní teorie v jazyce s rovností konečný model, potom jsou všechny její modely izomorfní.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky = vyjádříme “existuje právě n prvků”, z toho plyne $|A| = |B|$.

Bud' \mathcal{A}' expanze \mathcal{A} o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.

Ukážeme, že \mathcal{B} lze expandovat na L' -strukturu \mathcal{B} tak, že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.

Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus \mathcal{A}' a \mathcal{B}' , i pro L -redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Bud' Ω množina ‘vlastností prvku a ’, tj. formulí $\varphi(x)$ splňujících $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Protože je A konečná, existuje konečně mnoho $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každou $\varphi \in \Omega$ existuje i takové, že $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$. Potom i $\mathcal{B} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$.

Protože v \mathcal{A} platí sentence $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$ (je splněna díky $a \in A$) a $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, máme i $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$. Neboli existuje $b \in B$ takové, že $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i[e(x/b)]$. Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ platí $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$, z toho $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$. □ 5

Definovatelnost a automorfismy

definovatelné množiny jsou **invariantní** na automorfismy (např. automorfismus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

Tvrzení: Je-li $D \subseteq A^n$ definovatelná v \mathcal{A} , potom pro každý automorfismus $h \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ platí $h[D] = D$ (kde $h[D]$ značí $\{(h(\bar{a}) \mid \bar{a} \in D)\}$).
Je-li definovatelná s parametry \bar{b} , platí to pro automorfismy identické na \bar{b} (tj. $h(\bar{b}) = \bar{b}$ neboli $h(b_i) = b_i$ pro všechna i).

Důkaz: Ukážeme jen verzi s parametry. Nechť $D = \varphi^{A, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$.
Potom pro každé $\bar{a} \in A^n$ platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned}\bar{a} \in D &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/h(\bar{b}))] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow h(\bar{a}) \in D.\end{aligned}$$

Příklad

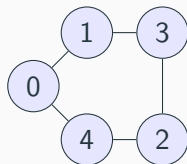
Množiny definovatelné s parametrem 0, $\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$?

Jediný netriviální automorfismus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i) \bmod 5$, orbity $\{0\}$, $\{1, 4\}$, a $\{2, 3\}$.

Tyto množiny jsou definovatelné:

- $\{0\}$ formulí $x = y$, tj. $(x = y)^{\mathcal{G}, \{0\}} = \{0\}$
- $\{1, 4\}$ lze definovat pomocí $E(x, y)$
- $\{2, 3\}$ formulí $\neg E(x, y) \wedge \neg x = y$



$\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$ je podalgebra $\underline{\mathcal{P}(V(\mathcal{G}))}$, tedy uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik, obsahuje \emptyset a $V(\mathcal{G})$. Podalgebra generovaná $\{\{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ už ale obsahuje všechny podmnožiny zachovávající automorfismus h . Dostáváme:

$$\begin{aligned}\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{ & \emptyset, \{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \\ & \{1, 4, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\} \}\end{aligned}$$

9.3 ω -kategorické teorie

Izomorfní spektrum T je počet modelů T kardinality κ až na \simeq .
 T je κ -kategorická pokud $I(\kappa, T) = 1$, ω -kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

Tvrzení: Teorie DeLO je ω -kategorická.

Důkaz: Budte \mathcal{A}, \mathcal{B} spočetně nekonečné modely, $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Z hustoty najdeme indukci $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \dots$ prosté parciální fce z A do B zach. usp., $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \text{dom } h_n$, $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq \text{rng } h_n$. Potom $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$. \square

Důsledek: Izomorfní spektrum teorie DeLO*:

- $I(\kappa, \text{DeLO}^*) = 0$ pro $\kappa \in \mathbb{N}$
- $I(\omega, \text{DeLO}^*) = 4$

Spočetné modely až na izomorfismus jsou například:

$$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \simeq \mathbb{Q} \upharpoonright (0, 1), \mathbb{Q} \upharpoonright (0, 1], \mathbb{Q} \upharpoonright [0, 1), \mathbb{Q} \upharpoonright [0, 1]$$

Důkaz: Husté uspořádání nemůže být konečné. Izomorfismus zobrazí minimum na minimum a maximum na maximum. \square

ω -kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω -kategorická ve spočetném jazyce L . Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Důkaz: (i) Důsledek L.-S. věty bez rovnosti říká, že každý model je elementárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému, ten je ale až na izomorfismus jediný.

(ii) Důsledek L.-S. věty s rovností podobně říká, že všechny nekonečné modely jsou elementárně ekvivalentní. Mohla by mít elementárně neekvivalentní konečné modely, to jsme ale zakázali. \square

Důsledek: DeLO , DeLO^+ , DeLO^- , a DeLO^\pm jsou kompletní, jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) kompletní jedn. extenze DeLO^* .

Analogické kritérium platí i pro kardinality κ větší než ω .

9.4 Axiomatizovatelnost

Třída struktur $K \subseteq M_L$ je:

- **axiomatizovatelná**, existuje-li teorie T taková, že $M_L(T) = K$
- **konečně/otevřeně** axiomatiz., je-li ax. konečnou/otevřenou T
- teorie T' je **konečně/otevřeně** axiomatizovatelná, platí-li to o třídě jejích modelů $K = M_L(T')$

Pozorování: Je-li K axiomatizovatelná, musí být uzavřená na \equiv .

Například, jak ukážeme:

- grafy a částečná uspořádání jsou konečně i otevřeně ax.
- tělesa jsou konečně, ale ne otevřeně axiomatizovatelná
- nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně
- konečné grafy nejsou axiomatizovatelné

Neaxiomatizovatelnost konečných modelů

Věta: Má-li T libovolně velké konečné modely, má i nekonečný model. Potom není třída jejích konečných modelů axiomatizovatelná.

Důkaz: Je-li jazyk bez rovnosti, vezmeme kanonický model pro bezespornou větev v tablu z T pro $F \perp$ (T je bezesporná).

Je-li jazyk s rovností, přidáme spočetně mnoho nových konst.

symbolů c_i a vezmeme extenzi: $T' = T \cup \{\neg c_i = c_j \mid i \neq j \in \mathbb{N}\}$

Každá konečná část T' má model: buď k největší, že c_k je v T' : lib. $\geq (k+1)$ -prvkový model, interpretuj c_0, \dots, c_k jako různé prvky.

Věta o kompaktnosti dává model T' , ten je nekonečný, redukt na původní jazyk (zapomenutí c_i^A) je nekonečný model T . \square

- např. konečné grafy nejsou axiomatizovatelné
- nekonečné modely teorie jsou vždy axiomatizovatelné, máme-li rovnost: stačí přidat 'existuje alespoň n prvků' pro vš. $n \in \mathbb{N}$

Věta (O konečné axiomatizovatelnosti): $K \subseteq M_L$ je konečně axiomatizovatelná, právě když K i $\overline{K} = M_L \setminus K$ jsou axiomatizovatelné.

Důkaz: \Rightarrow Je-li K axiomatizovatelná **sentencemi** $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (vezmi gen. uzávěry), potom $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ axiomatizuje \overline{K} .

\Leftarrow Bud' $K = M(T)$ a $\overline{K} = M(S)$. Potom **$T \cup S$ je sporná**, neboť:

$$M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = K \cap \overline{K} = \emptyset$$

Věta o kompaktnosti dává konečné $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ takové, že:

$$\emptyset = M(T' \cup S') = M(T') \cap M(S')$$

Nyní si všimněme, že platí:

$$M(T) \subseteq M(T') \subseteq \overline{M(S')} \subseteq \overline{M(S)} = M(T)$$

Tím jsme dokázali, že **$M(T) = M(T')$** , neboli T' je konečná axiomatizace K . □

Tělesa charakteristiky 0 nejsou konečně axiomatizovatelná

Bud' T teorie těles. Těleso $\mathcal{A} = \langle A, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ je

- **charakteristiky p** , je-li p nejmenší prvočíslo takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ je term $1 + 1 + \dots + 1$ (s p jedničkami),
- **charakteristiky 0**, pokud není charakteristiky p pro žádné p .
- Tělesa charakteristiky p jsou konečně axiomatizovatelná:

$$T_p = T \cup \{p1 = 0\}$$

- Tělesa char. 0 jsou axiomatizovatelná, ale ne konečně:

$$T_0 = T \cup \{\neg p1 = 0 \mid p \text{ prvočíslo}\}$$

Tvrzení: Třída K těles char. 0 není konečně axiomatizovatelná.

Důkaz: Stačí ukázat, že \overline{K} (tělesa nenulové char. a netělesa) není axiomatizovatelná. **Sporem:** $\overline{K} = M(S)$. Potom $S' = S \cup T_0$ má model, neboť každá konečná část má model: těleso charakteristiky větší než jakékoliv p z axiomu T_0 tvaru $\neg p1 = 0$. Je-li \mathcal{A} je model S' , potom $\mathcal{A} \in M(S) = \overline{K}$. Zároveň ale $\mathcal{A} \in M(T_0) = K$, spor. \square

Otevřená axiomatizovatelnost

Tvrzení: Je-li T otevřeně axiomatizovatelná, potom je každá podstruktura modelu T také modelem T .

Důkaz: Bud' T' otevřená axiomatizace T , \mathcal{A} model T' , $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Pro každou $\varphi \in T'$ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ (φ je otevřená), tedy i $\mathcal{B} \models T'$. \square

Poznámka: Platí i obráceně, je-li každá podstruktura modelu také model, potom je otevřeně axiomatizovatelná. (Důkaz neuvedeme.)

- DeLO není otevřeně axiomatizovatelná, např. žádná konečná podstruktura modelu DeLO není hustá
- teorie těles není otevřeně axiomatizovatelná, podstruktura $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ není těleso, nemá inverzní prvek k 2 vůči násobení
- pro dané $n \in \mathbb{N}$ jsou nejvýše n -prvkové grupy otevřeně axiomatizovatelné (i jejich podgrupy jsou nejvýše n -prvkové); k (otevřené) teorii grup stačí přidat: $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} x_i = x_j$

KAPITOLA 10:

NEROZHODNUTELNOST A NEÚPLNOST

10.1 Rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost
