

# Dvanáctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

---

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

## Program

- izomorfismus a konečné modely
- definovatelnost a automorfismy
- $\omega$ -kategoricita a úplnost
- axiomatizovatelnost
- rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 9.2-9.4 z Kapitoly 9, Sekce 10.1 z Kapitoly 10

## 9.2 Izomorfismus struktur

---

# Definice izomorfismu

**Izomorfismus**  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  ( $\forall L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ ) je bijekce  $h: A \rightarrow B$  splňující:

- pro každý ( $n$ -ární)  $f \in \mathcal{F}$  a pro všechna  $a_i \in A$ :

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li  $c \in \mathcal{F}$  konstantní:  $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý ( $n$ -ární)  $R \in \mathcal{R}$  a pro všechna  $a_i \in A$ :

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \text{ právě když } R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

Existuje-li, jsou **izomorfní** ('via  $h$ '),  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  (nebo  $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$ ).

**Automorfismus**  $\mathcal{A}$  je izomorfismus  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{A}$ .

- tj. liší se jen 'pojmenováním prvků'
- relace 'být izomorfní' je ekvivalence
- např. potenční algebra  $\mathcal{P}(X) = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ ,  $|X| = n$ ,  
je izomorfní s  $\underline{2}^n = \langle \{0, 1\}^n, -, \wedge_n, \vee_n, (0, \dots, 0), (1, \dots, 1) \rangle$   
(operace po složkách) via  $h(A) = \chi_A$  (charakt. vektor  $A \subseteq X$ )

# Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

**Tvrzení:** Bijekce  $h: A \rightarrow B$  je izomorfismus  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$ , právě když:

(i) pro každý term  $t$  a  $e: \text{Var} \rightarrow A$ :  $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou  $\varphi$  a  $e: \text{Var} \rightarrow A$ :  $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

**Důkaz:**  $\Rightarrow$  snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$  je-li  $h$  bijekce splňující (i)&(ii), dosazení  $t = f(x_1, \dots, x_n)$  resp.  $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$  dává vlastnosti z definice izomorfismu  $\square$

**Důsledek:**  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

**Důkaz:** pro každou sentenci  $\varphi$  máme z (ii)  $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$   $\square$

Naopak obecně ne,  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ ,  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$  Platí ale:

**Tvrzení:** Jsou-li  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  konečné v jazyce s rovností, potom

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

**Důsledek** Pokud má kompletní teorie v jazyce s rovností konečný model, potom jsou všechny její modely izomorfní.

## Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky = vyjádříme “existuje právě  $n$  prvků”, z toho plyne  $|A| = |B|$ .

Bud'  $\mathcal{A}'$  expanze  $\mathcal{A}$  o jména prvků, v jazyce  $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$ .

Ukážeme, že  $\mathcal{B}$  lze expandovat na  $L'$ -strukturu  $\mathcal{B}'$  tak, že  $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$ .

Potom je  $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$  izomorfismus  $\mathcal{A}'$  a  $\mathcal{B}'$ , i pro  $L$ -redukty  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ .

Stačí ukázat, že pro  $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$  existuje  $b \in B$  tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu  $c_a$  splňují  $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$ .

Bud'  $\Omega$  množina ‘vlastností prvku  $a$ ’, tj. formulí  $\varphi(x)$  splňujících  $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$ , neboli  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ . Protože je  $A$  konečná, existuje konečně mnoho  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  tak, že pro každou  $\varphi \in \Omega$  existuje  $i$  takové, že  $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$ . Potom i  $\mathcal{B} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$ .

Protože v  $\mathcal{A}$  platí sentence  $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$  (je splněna díky  $a \in A$ ) a  $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ , máme i  $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$ . Neboli existuje  $b \in B$  takové, že  $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i[e(x/b)]$ . Tedy pro každou  $\varphi \in \Omega$  platí  $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$ , tj.  $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$ , z toho  $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$ . □ 5

# Definovatelnost a automorfismy

definovatelné množiny jsou **invariantní** na automorfismy (např. automorfismus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

**Tvrzení:** Je-li  $D \subseteq A^n$  definovatelná v  $\mathcal{A}$ , potom pro každý automorfismus  $h \in \text{Aut}(\mathcal{A})$  platí  $h[D] = D$  (kde  $h[D]$  značí  $\{(h(\bar{a}) \mid \bar{a} \in D)\}$ ). Je-li definovatelná s parametry  $\bar{b}$ , platí to pro automorfismy identické na  $\bar{b}$  (tj.  $h(\bar{b}) = \bar{b}$  neboli  $h(b_i) = b_i$  pro všechna  $i$ ).

**Důkaz:** Ukážeme jen verzi s parametry. Nechť  $D = \varphi^{A, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$ . Potom pro každé  $\bar{a} \in A^n$  platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned}\bar{a} \in D &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/h(\bar{b}))] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow h(\bar{a}) \in D.\end{aligned}$$

## Příklad

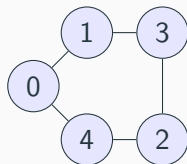
Množiny definovatelné s parametrem 0,  $\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$ ?

Jediný netriviální automorfismus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i) \bmod 5$ , orbity  $\{0\}$ ,  $\{1, 4\}$ , a  $\{2, 3\}$ .

Tyto množiny jsou definovatelné:

- $\{0\}$  formulí  $x = y$ , tj.  $(x = y)^{\mathcal{G}, \{0\}} = \{0\}$
- $\{1, 4\}$  lze definovat pomocí  $E(x, y)$
- $\{2, 3\}$  formulí  $\neg E(x, y) \wedge \neg x = y$



$\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$  je podalgebra  $\underline{\mathcal{P}(V(\mathcal{G}))}$ , tedy uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik, obsahuje  $\emptyset$  a  $V(\mathcal{G})$ . Podalgebra generovaná  $\{\{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$  už ale obsahuje všechny podmnožiny zachovávající automorfismus  $h$ . Dostáváme:

$$\begin{aligned} \text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{ & \emptyset, \{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \\ & \{1, 4, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\} \} \end{aligned}$$



## 9.3 $\omega$ -kategorické teorie

---

**Izomorfní spektrum**  $T$  je počet modelů  $T$  kardinality  $\kappa$  až na  $\simeq$ .  
 $T$  je  $\kappa$ -kategorická pokud  $I(\kappa, T) = 1$ ,  $\omega$ -kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

**Tvrzení:** Teorie DeLO je  $\omega$ -kategorická.

**Důkaz:** Budte  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  spočetně nekonečné modely,  $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Z hustoty najdeme indukci  $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \dots$  prosté parciální fce z  $A$  do  $B$  zach. usp.,  $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \text{dom } h_n$ ,  $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq \text{rng } h_n$ . Potom  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  via  $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$ .  $\square$

**Důsledek:** Izomorfní spektrum teorie DeLO\*:

- $I(\kappa, \text{DeLO}^*) = 0$  pro  $\kappa \in \mathbb{N}$
- $I(\omega, \text{DeLO}^*) = 4$

Spočetné modely až na izomorfismus jsou například:

$$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \simeq \mathbb{Q} \upharpoonright (0, 1), \mathbb{Q} \upharpoonright (0, 1], \mathbb{Q} \upharpoonright [0, 1), \mathbb{Q} \upharpoonright [0, 1]$$

**Důkaz:** Husté uspořádání nemůže být konečné. Izomorfismus zobrazí minimum na minimum a maximum na maximum.  $\square$

## $\omega$ -kategorické kritérium kompletnosti

**Věta:** Buď  $T$   $\omega$ -kategorická ve spočetném jazyce  $L$ . Je-li

(i)  $L$  bez rovnosti, nebo

(ii)  $L$  s rovností a  $T$  nemá konečné modely,

potom je  $T$  kompletní.

**Důkaz:** (i) Důsledek L.-S. věty bez rovnosti říká, že každý model je elementárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému, ten je ale až na izomorfismus jediný.

(ii) Důsledek L.-S. věty s rovností podobně říká, že všechny nekonečné modely jsou elementárně ekvivalentní. Mohla by mít elementárně neekvivalentní konečné modely, to jsme ale zakázali.  $\square$

**Důsledek:**  $\text{DeLO}$ ,  $\text{DeLO}^+$ ,  $\text{DeLO}^-$ , a  $\text{DeLO}^\pm$  jsou kompletní, jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) kompletní jedn. extenze  $\text{DeLO}^*$ .

Analogické kritérium platí i pro kardinality  $\kappa$  větší než  $\omega$ .

## 9.4 Axiomatizovatelnost

---

Třída struktur  $K \subseteq M_L$  je:

- **axiomatizovatelná**, existuje-li teorie  $T$  taková, že  $M_L(T) = K$
- **konečně/otevřeně** axiomatiz., je-li ax. konečnou/otevřenou  $T$
- teorie  $T'$  je **konečně/otevřeně** axiomatizovatelná, platí-li to o třídě jejích modelů  $K = M_L(T')$

**Pozorování:** Je-li  $K$  axiomatizovatelná, musí být uzavřená na  $\equiv$ .

Například, jak ukážeme:

- grafy a částečná uspořádání jsou konečně i otevřeně ax.
- tělesa jsou konečně, ale ne otevřeně axiomatizovatelná
- nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně
- konečné grafy nejsou axiomatizovatelné

# Neaxiomatizovatelnost konečných modelů

**Věta:** Má-li  $T$  libovolně velké konečné modely, má i nekonečný model. Potom není třída jejích konečných modelů axiomatizovatelná.

**Důkaz:** Je-li jazyk bez rovnosti, vezmeme kanonický model pro bezespornou větev v tablu z  $T$  pro  $F \perp$  ( $T$  je bezesporná).

Je-li jazyk s rovností, přidáme spočetně mnoho nových konst.

symbolů  $c_i$  a vezmeme extenzi:  $T' = T \cup \{\neg c_i = c_j \mid i \neq j \in \mathbb{N}\}$

Každá konečná část  $T'$  má model: buď  $k$  největší, že  $c_k$  je v této konečné části: lib.  $\geq (k+1)$ -prvkový model,21 interpretuj  $c_0, \dots, c_k$  jako různé prvky.

**Věta o kompaktnosti** dává model  $T'$ , ten je nekonečný, redukt na původní jazyk (zapomenutí  $c_i^A$ ) je nekonečný model  $T$ .  $\square$

- např. konečné grafy nejsou axiomatizovatelné
- nekonečné modely teorie jsou vždy axiomatizovatelné, máme-li rovnost: stačí přidat 'existuje alespoň  $n$  prvků' pro vš.  $n \in \mathbb{N}$

# Konečná axiomatizovatelnost

**Věta (O konečné axiomatizovatelnosti):**  $K \subseteq M_L$  je konečně axiomatizovatelná, právě když  $K$  i  $\overline{K} = M_L \setminus K$  jsou axiomatizovatelné.

**Důkaz:**  $\Rightarrow$  Je-li  $K$  axiomatizovatelná **sentencemi**  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  (vezmi gen. uzávěry), potom  $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$  axiomatizuje  $\overline{K}$ .

$\Leftarrow$  Bud'  $K = M(T)$  a  $\overline{K} = M(S)$ . Potom  **$T \cup S$  je sporná**, neboť:

$$M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = K \cap \overline{K} = \emptyset$$

**Věta o kompaktnosti** dává konečné  $T' \subseteq T$  a  $S' \subseteq S$  takové, že:

$$\emptyset = M(T' \cup S') = M(T') \cap M(S')$$

Nyní si všimněme, že platí:

$$M(T) \subseteq M(T') \subseteq \overline{M(S')} \subseteq \overline{M(S)} = M(T)$$

Tím jsme dokázali, že  **$M(T) = M(T')$** , neboli  $T'$  je konečná axiomatizace  $K$ .



# Tělesa charakteristiky 0 nejsou konečně axiomatizovatelná

Bud'  $T$  teorie těles. Těleso  $\mathcal{A} = \langle A, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$  je

- **charakteristiky  $p$** , je-li  $p$  nejmenší prvočíslo takové, že  $\mathcal{A} \models p1 = 0$ , kde  $p1$  je term  $1 + 1 + \dots + 1$  (s  $p$  jedničkami),
- **charakteristiky 0**, pokud není charakteristiky  $p$  pro žádné  $p$ .
- Tělesa charakteristiky  $p$  jsou konečně axiomatizovatelná:

$$T_p = T \cup \{p1 = 0\}$$

- Tělesa char. 0 jsou axiomatizovatelná, ale ne konečně:

$$T_0 = T \cup \{\neg p1 = 0 \mid p \text{ prvočíslo}\}$$

**Tvrzení:** Třída  $K$  těles char. 0 není konečně axiomatizovatelná.

**Důkaz:** Stačí ukázat, že  $\overline{K}$  (tělesa nenulové char. a netělesa) není axiomatizovatelná. **Sporem:**  $\overline{K} = M(S)$ . Potom  $S' = S \cup T_0$  má model, neboť každá konečná část má model: těleso charakteristiky větší než jakékoliv  $p$  z axiomu  $T_0$  tvaru  $\neg p1 = 0$ . Je-li  $\mathcal{A}$  je model  $S'$ , potom  $\mathcal{A} \in M(S) = \overline{K}$ . Zároveň ale  $\mathcal{A} \in M(T_0) = K$ , spor.  $\square$



# Otevřená axiomatizovatelnost

**Tvrzení:** Je-li  $T$  otevřeně axiomatizovatelná, potom je každá podstruktura modelu  $T$  také modelem  $T$ .

**Důkaz:** Buď  $T'$  otevřená axiomatizace  $T$ ,  $\mathcal{A}$  model  $T'$ ,  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .  
Pro každou  $\varphi \in T'$  platí  $\mathcal{B} \models \varphi$  ( $\varphi$  je otevřená), tedy i  $\mathcal{B} \models T'$ .  $\square$

**Poznámka:** Platí i obráceně, je-li každá podstruktura modelu také model, potom je otevřeně axiomatizovatelná. (Důkaz neuvedeme.)

- DeLO není otevřeně axiomatizovatelná, např. žádná konečná podstruktura modelu DeLO není hustá
- teorie těles není otevřeně axiomatizovatelná, podstruktura  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$  není těleso, nemá inverzní prvek k 2 vůči násobení
- pro dané  $n \in \mathbb{N}$  jsou nejvýše  $n$ -prvkové grupy otevřeně axiomatizovatelné (i jejich podgrupy jsou nejvýše  $n$ -prvkové);  
k (otevřené) teorii grup stačí přidat:  $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} x_i = x_j$

# KAPITOLA 10:

## NEROZHODNUTELNOST A NEÚPLNOST

---

Jak lze s teoriemi pracovat algoritmicky?

+ zlatý hřeb přednášky: Gödelovy věty o neúplnosti (1931)

- ukazují limity formálního přístupu
- zastavily program formalizace matematiky
- pojem **algoritmu** budeme chápat jen intuitivně
- technické podrobnosti důkazů vynecháme

Typicky potřebujeme spočetný jazyk.

## 10.1 Rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

---

- v dokazování povolujeme nekonečné teorie, jak jsou zadané?
- pro ověření že daný důkaz (např. tablo, rezoluční zamítnutí) je korektní potřebujeme algoritmický přístup ke všem axiomům
- mohli bychom požadovat **enumerátor** pro  $T$ , tj. algoritmus, který vypisuje axiomy z  $T$ , a každý axiom někdy vypíše
- ale kdyby byl v důkazu chybný axiom, nikdy bychom se to nedozvěděli: stále bychom čekali, zda ho enumerátor vypíše
- proto požadujeme silnější vlastnost:

$T$  je **rekurzivně axiomatizovaná**, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli  $\varphi$  doběhne a odpoví, zda  $\varphi \in T$ .

(ekvivalentní enumerátoru vypisujícím axiomy v lexikograf. pořadí)

Můžeme v dané teorii 'algoritmicky rozhodovat pravdu'?

- $T$  je **rozhodnutelná**, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli  $\varphi$  doběhne a odpoví, zda  $T \models \varphi$ ,
- $T$  je **částečně rozhodnutelná**, existuje-li algoritmus, který:
  - pokud  $T \models \varphi$ , doběhne a odpoví "ano"
  - pokud  $T \not\models \varphi$ , buď nedoběhne, nebo doběhne a odpoví "ne"

**Tvrzení:** Je-li  $T$  rekurzivně axiomatizovaná, potom:

(i)  $T$  je část. rozhod.      (ii) je-li navíc kompletní, je rozhodnutelná

**Důkaz:** (i) Algoritmus konstruuje systematické tablo z  $T$  pro  $\mathbb{F}\varphi$ ; stačí enumerátor pro  $T$ , nebo postupně generovat vš. sentence a testovat, jsou-li v  $T$ . Je-li  $T \models \varphi$ , konstrukce skončí, ověříme, že je tablo sporné. (Jinak skončit nemusí.)

(ii) Víme, že buď  $T \vdash \varphi$  nebo  $T \vdash \neg\varphi$ . Paralelně konstruueme tablo pro  $\mathbb{F}\varphi$  a pro  $\mathbb{T}\varphi$  (důkaz a zamítnutí  $\varphi$  z  $T$ ). Jedna z konstrukcí po konečně mnoha krocích skončí.

# Rekurzivně spočetná kompletace

$T$  má **rekurzivně spočetnou kompletaci**, je-li (nějaká) množina až na  $\sim$  všech jednoduchých kompletních extenzí  $T$  **rekurzivně spočetná**, tj. existuje algoritmus, který pro vstup  $(i, j)$  vypíše  $i$ -tý axiom  $j$ -té extenze (v nějakém uspořádání), nebo odpoví, že už neexistuje.

**Tvrzení:** Je-li  $T$  rekurzivně axiomatizovaná a má rekurzivně spočetnou kompletaci, potom je rozhodnutelná.

**Důkaz:** Buď  $T \vdash \varphi$ , nebo existuje protipříklad  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ , tj. kompl. jedn. extenze  $T_i$ , že  $T_i \not\models \varphi$ . Kompletnost  $T_i$  dává  $T_i \vdash \neg\varphi$ .

Algoritmus paralelně konstruuje tablo důkaz  $\varphi$  z  $T$  a (postupně) tablo důkazy  $\neg\varphi$  ze všech kompletních jedn. extenzí  $T_1, T_2, \dots$ . (Je-li jich nekonečně mnoho, uděláme **dovetailing**: 1. krok 1. tabla, potom 2. krok 1., 1. krok 2., 3. krok 1., 2. krok 2., 1. krok 3., atd.)

Alespoň jedno z tabel je sporné, můžeme předpokládat konečné, algoritmus ho po konečně mnoha krocích zkonstruuje. □

Následující teorie jsou rekurzivně axiomatizované a mají rekurzivně spočetnou kompletaci, tedy jsou rozhodnutelné:

- (a) Teorie čisté rovnosti
- (b) Teorie unárního predikátu ( $T = \emptyset$ ,  $L = \langle U \rangle$  s rovností)
- (c) Teorie hustých lineárních uspořádání DeLO\*
- (d) Teorie Booleových algeber (Alfred Tarski 1940),
- (e) Teorie algebraicky uzavřených těles (Tarski 1949),
- (f) Teorie komutativních grup (Wanda Szmielew 1955).



# Rekurzivní axiomatizovatelnost

Kdy lze třídu struktur ‘efektivně (algoritmicky) popsat’?

$K \subseteq M_L$  je **rek. axiomatizovatelná**, pokud existuje rek. axiomatizovaná  $T$ , že  $K = M_L(T)$ .  $T'$  je **rek. axiomatizovatelná**, platí-li to pro třídu jejích modelů (tj. je-li ekvivalentní rek. axiomatizované teorii).

(podobně lze definovat **rek. spočetnou axiomatizovatelnost**)

**Tvrzení:** Je-li  $\mathcal{A}$  konečná struktura v konečném jazyce s rovností, potom je teorie  $\text{Th}(\mathcal{A})$  rekurzivně axiomatizovatelná.

(z toho plyne i rozhodnutelnost  $\text{Th}(\mathcal{A})$ , ale  $\mathcal{A} \models \varphi$  lze ověřit přímo)

**Důkaz:** Buď  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ .  $\text{Th}(\mathcal{A})$  axiomatizujeme sentencí “existuje právě  $n$  prvků  $a_1, \dots, a_n$  splňujících právě ty **základní vztahy** o funkčních hodnotách a relacích, které platí v  $\mathcal{A}$ ”.

Např. je-li  $f^{\mathcal{A}}(a_4, a_2) = a_{17}$ , přidej atom. formuli  $f(x_{a_4}, x_{a_2}) = x_{a_{17}}$ , pro  $(a_3, a_3, a_1) \in R^{\mathcal{A}}$  přidej  $R(x_{a_3}, x_{a_3}, x_{a_1})$ . □

Pro následující struktury je  $\text{Th}(\mathcal{A})$  rekurzivně axiomatizovatelná:

- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ , jde o tzv. teorii **diskrétních lineárních uspořádání**
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ , jde o teorii DeLO
- $\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$ , teorie **následníka s nulou**
- $\langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle$ , **Presburgerova aritmetika**
- $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ , teorie **reálně uzavřených těles**, znamená že lze algoritmicky rozhodovat Euklid. geometrii (Tarski, 1949)
- $\langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ , teorie **algebraicky uzavřených těles char. 0**

**Důsledek:** Pro struktury výše platí, že  $\text{Th}(\mathcal{A})$  je rozhodnutelná.

**Důkaz:**  $\text{Th}(\mathcal{A})$  je vždy kompletní.

Teorie **standardního modelu aritmetiky**  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  ale **není** rekurzivně axiomatizovatelná (viz První Gödelova věta o neúplnosti).