

Osmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Program

- tablo metoda v predikátové logice
- jazyky s rovností
- korektnost a úplnost, kanonický model

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 7.1-7.4 z Kapitoly 7

KAPITOLA 7: TABLO METODA V PREDIKÁTOVÉ LOGICE

7.1 Neformální úvod

Úvodní příklady: dva tablo důkazy

$$F(\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$T(\exists x)\neg P(x)$$

$$\mid$$
$$F\neg(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$T(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$T\neg P(c_0)$$

$$\mid$$
$$FP(c_0)$$

$$\mid$$
$$T(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$TP(c_0)$$



$$F\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$$

$$\mid$$
$$T\neg(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$F(\exists x)\neg P(x)$$

$$\mid$$
$$F(\forall x)P(x)$$

$$\mid$$
$$FP(c_0)$$

$$\mid$$
$$F(\exists x)\neg P(x)$$

$$\mid$$
$$F\neg P(c_0)$$

$$\mid$$
$$TP(c_0)$$



Tablo metoda v predikátové logice

- opět vždy předpokládáme, že jazyk L je spočetný (nejprve bez rovnosti, později metodu rozšíříme pro rovnost)
- v položkách musí být **sentence**: pravdivostní hodnota nesmí záviset na ohodnocení (ale můžeme vzít **generální uzávěry**)
- **redukce položek**: stejná atomická tabla pro logické spojky (kde φ, ψ jsou sentence), ale čtyři nové případy **pro kvantifikátory**:
 - typ “**svědek**”: položky tvaru $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$
 - typ “**všichni**”: položky tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ a $F(\exists x)\varphi(x)$
- kvantifikátor nelze odstranit, $\varphi(x)$ by typicky nebyla sentence
- místo toho za x **substituujeme konstantní term** t : $\varphi(x/t)$
- jaký? podle typu položky (“**svědek**” vs. “**všichni**”)

Redukce položek s kvantifikátorem

- jazyk L rozšíříme o spočetně mnoho nových (pomocných) konstantních symbolů $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$, označíme L_C
- vždy máme k dispozici nový, dosud nepoužitý symbol $c \in C$
- **typ “svědek”**: dosadíme nový $c \in C$ (dosud na větvi není)
 - pro $T(\exists x)\varphi(x)$ tedy máme $T\varphi(x/c)$
 - c hraje roli prvku, který položku ‘splňuje’
- **typ “všichni”**: substituujeme libovolný konstantní L_C -term
 - pro $T(\forall x)\varphi(x)$ tedy máme $T\varphi(x/t)$
 - bezesporná větev je dokončená jen pokud dosadíme všechny t (‘použijeme vše, co víme’)
- **konvence**: kořeny atomických tabel nekreslíme kromě položek typu “všichni” (po jednom dosazení ještě nejsme hotovi!)
- **typický postup**: nejprve zredukujeme položky typu “svědek”, poté zjistíme, co ‘o svědcích říkají’ položky typu “všichni”

7.2 Formální definice

- buď L **spočetný** jazyk **bez rovnosti**.
- označme L_C rozšíření L o spočetně mnoho nových **pomocných** konstantních symbolů $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- zvolme očíslování konstantních L_C -termů: $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- mějme nějakou L -teorii T a L -sentenci φ
- **položka** je nápis $T\varphi$ nebo $F\varphi$, kde φ je L_C -sentence
- položky tvaru $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$ jsou **typu** “**svědek**”
- položky tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ a $F(\exists x)\varphi(x)$ jsou **typu** “**všichni**”
- **atomická tabla** jsou násl. položkami označované stromy:

Atomická tabla pro kvantifikátory

φ je libovolná L_C -sentence, x proměnná, t_i konstantní L_C -term, $c_i \in C$ je nový pomocný konstantní symbol (při konstrukci tabla nesměl dosud být na dané větvi)

	\forall	\exists
True	$\begin{array}{c} T(\forall x)\varphi(x) \\ \\ T\varphi(x/t_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} T(\exists x)\varphi(x) \\ \\ T\varphi(x/c_i) \end{array}$
False	$\begin{array}{c} F(\forall x)\varphi(x) \\ \\ F\varphi(x/c_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\exists x)\varphi(x) \\ \\ F\varphi(x/t_i) \end{array}$

Atomická tabla pro logické spojky

φ a ψ jsou libovolné L_C -sentence

	\neg	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow
True	$T\neg\varphi$	$T\varphi \wedge \psi$			$T\varphi \leftrightarrow \psi$
					/ \
	$F\varphi$	$T\varphi$	$T\varphi \vee \psi$	$T\varphi \rightarrow \psi$	$T\varphi$ $F\varphi$
			/ \	/ \	
		$T\psi$	$T\varphi$ $T\psi$	$F\varphi$ $T\psi$	$T\psi$ $F\psi$
False	$F\neg\varphi$		$F\varphi \vee \psi$	$F\varphi \rightarrow \psi$	$F\varphi \leftrightarrow \psi$
		$F\varphi \wedge \psi$			/ \
	$T\varphi$	$F\varphi$ $F\psi$	$F\varphi$	$T\varphi$	$T\varphi$ $F\varphi$
		/ \			
		$F\varphi$ $F\psi$	$F\psi$	$F\psi$	$F\psi$ $T\psi$

Formální definice tabla

- **konečné tablo z teorie T** je uspoř., položkami označ. strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
 - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie T
 - pro libovolnou položku P na libovolné větvi V můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P
je-li P typu “svědek”, můžeme použít jen $c_i \in C$, který dosud na V není (pro typ “všichni” lze použít lib. konst. L_C -term t_i)
 - na konec libovolné větve můžeme připojit položku $T\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$
- **tablo z teorie T** je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde:
 - τ_i jsou konečná tabla z T
 - τ_0 je jednoprvkové tablo
 - τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku
- **tablo pro položku P** je tablo, které má položku P v kořeni

konvence: kořen atom. tabla nezapisujeme není-li P typu “všichni”

Dokončené a sporné tablo

- Tablo je **sporné**, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je **sporná**, pokud obsahuje položky $T\psi$ a $F\psi$ pro nějakou **sentenci** ψ , jinak je **bezesporná**.
- Tablo je **dokončené**, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je **dokončená**, pokud je sporná, nebo
 - každá její položka je na této větvi **redukována**,
 - a zároveň obsahuje položku $T\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je **redukována** na větvi V procházející P , pokud
 - je tvaru $T\psi$ resp. $F\psi$ pro **atomickou sentenci**, nebo
 - není typu "**všichni**" a vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla (tj., typicky, již došlo k jejímu rozvoji na V), nebo
 - je typu "**všichni**" a všechny její **výskyty** na větvi V jsou na V **redukováné**.

Kdy je výskyt položky typu “všichni” redukováný?

Výskyt položky P typu “všichni” na V je i -tý, má-li právě $i - 1$ předků označených P , a i -tý výskyt je redukováný na V , pokud

- P má $(i + 1)$ -ní výskyt na V , a zároveň
- na V je položka $\mathsf{T}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathsf{T}(\forall x)\varphi(x)$) resp. $\mathsf{F}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathsf{F}(\exists x)\varphi(x)$), kde t_i je i -tý konstantní L_C -term (tj., typicky, už jsme za x substituovali t_i)

NB: je-li položka typu “všichni” na V redukována, má na V nekonečně výskytů, a dosadili jsme všechny konstantní L_C -termy

- **tablo důkaz** sentence φ z teorie T je **sporné** tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni
- pokud existuje, je φ **(tablo) dokazatelný** z T , píšeme $T \vdash \varphi$
- podobně, **tablo zamítnutí** je sporné tablo s $T\varphi$ v kořeni
- existuje-li, je φ **(tablo) zamítnutelný** z T , tj. platí $T \vdash \neg\varphi$

Příklad: tablo důkaz (v logice)

$$F(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$$

$$T(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$F(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$T(\forall x)P(x)$$

$$F(\forall x)Q(x)$$

$$FQ(c_0)$$

$$T(\forall x)P(x)$$

$$TP(c_0)$$

$$T(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

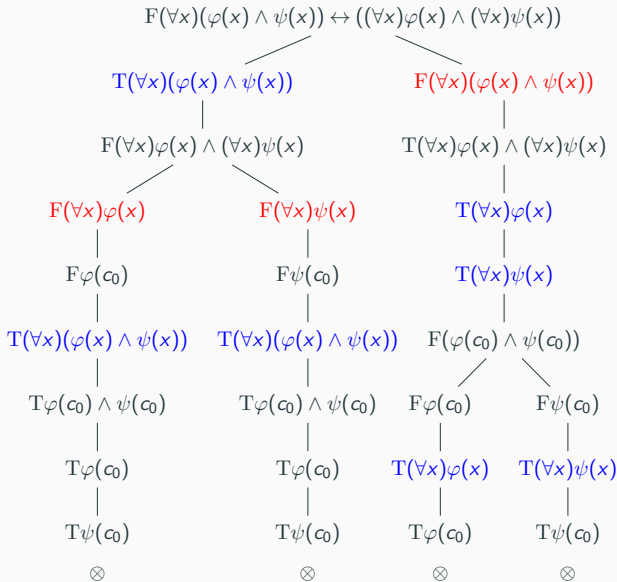
$$TP(c_0) \rightarrow Q(c_0)$$

$$FP(c_0)$$

$$TQ(c_0)$$



Ještě příklad (φ, ψ jsou formule s jedinou volnou proměnnou x)



(c_0 lze použít jako **nový** ve všech případech: **na dané větvi** se dosud nevyskytuje)

Systematické tablo

musí někdy zredukovat každou položku, použít každý axiom, a nově ve všech položkách typu “**všichni**” dosadit každý L_C term t_i

Systematické tablo z $T = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ pro položku R je $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové s položkou R , a pro $i \geq 0$:

- buď P nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukována na nějaké bezesporné větvi procházející P (resp. je-li typu “**všichni**”, její **výskyt** není redukováný)
- nejprve definujeme τ'_i vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející P , kde je-li P typu “**všichni**” a má-li ve vrcholu k -tý výskyt, dosadíme k -tý L_C -term t_k , je-li typu “**svědek**”, substituujeme $c_i \in C$ s nejmenším i , které na větvi zatím není
- pokud taková položka P neexistuje, potom $\tau'_i = \tau_i$
- τ_{i+1} vznikne z τ'_i připojením $T\alpha_{i+1}$ na vš. bezesporné větve (pokud už jsme použili všechny axiomy, definujeme $\tau_{i+1} = \tau'_i$)

Konečnost a systematicčnost důkazů

Lemma: Systematické tablo je dokončené.

Důkaz: k -tý výskyt položky typu “všichni” redukuje se když na něj narazíme: připojíme $(k + 1)$ -ní výskyt a dosadíme k -tý L_C -term t_k . Zbytek důkazu jako ve výrokové logice. \square

Neprodlužujeme-li sporné větve (což nemusíme), je sporné tablo vždy konečné. Důkaz stejný jako ve výrokové logice:

Důsledek (Konečnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i konečný tablo důkaz φ z T .

Stejně jako ve výrokové logice z důkazu plyne:

Důsledek (Systematicčnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem φ z T .

7.3 Jazyky s rovností

$1 + 0 = 0 + 1$? identita celých čísel, výrazů, množin,
unifikovatelnost termů (v Prologu), ...

Tablo je čistě **syntaktický** objekt, ale $=^A$ má být **identita** na A . Jak toho docílit?

Mějme dokončenou bezespornou větev tabla s položkou $Tc_1 = c_2$.
V **kanonickém modelu** musí platit nejen $(c_1^A, c_2^A) \in =^A$, ale také:

- $c_2^A =^A c_1^A$
- $f^A(c_1^A) =^A f^A(c_2^A)$
- $c_1^A \in P^A$ právě když $c_2^A \in P^A$

To vynutíme přidáním **axiomů rovnosti**, $=^A$ bude **kongruence** \mathcal{A}
(ekvivalence, která se chová dobře k funkcím a relacím).

Poté vezmeme **faktorstrukturu** $\mathcal{B} = \mathcal{A}/_{=A}$, v ní už je $=^B$ **identita**.

Kongruence a faktorstruktura

Bud' \sim ekvivalence na A , $f: A^n \rightarrow A$, $R \subseteq A^n$. Říkáme, že \sim je:

- **kongruence pro f** , pokud pro všechna $x_i, y_i \in A$ taková, že $x_i \sim y_i$ ($1 \leq i \leq n$), platí $f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n)$
- **kongruence pro R** , pokud pro všechna $x_i, y_i \in A$ taková, že $x_i \sim y_i$ ($1 \leq i \leq n$), platí $R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow R(y_1, \dots, y_n)$

Kongruence struktury \mathcal{A} je ekvivalence na A , která je kongruencí pro všechny funkce a relace \mathcal{A} .

Faktorstruktura (podílová struktura) \mathcal{A} podle \sim je struktura \mathcal{A}/\sim v témž jazyce, doména A/\sim je množina všech rozkladových tříd A podle \sim , funkce a relace definujeme **pomocí reprezentantů**:

- $f^{\mathcal{A}/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) = [f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)]_{\sim}$
- $R^{\mathcal{A}/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) \Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)$

Axiomy rovnosti

Axiomy rovnosti pro jazyk L s rovností:

(i) $x = x$

(ii) pro každý n -ární funkční symbol f jazyka L :

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$$

(iii) pro každý n -ární relační symbol R jazyka L **včetně rovnosti**:

$$x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$$

- symetrie a tranzitivita plynou z (iii) pro $=$ (dokažte si)
- z axiomů (i) a (iii) tedy plyne, že relace $=^A$ je ekvivalence
- axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že $=^A$ je kongruence

V tablo metodě pro jazyk s rovností implicitně přidáme axiomy rovnosti (přesněji jejich generální uzávěry, potřebujeme sentence).

Tablo důkaz s rovností

Je-li T teorie v jazyce L s rovností, označme jako T^* rozšíření T o generální uzávěry axiomů rovnosti pro L .

- **tablo důkaz** z teorie T je **tablo důkaz** z T^*
- podobně pro tablo zamítnutí, a obecně jakékoliv tablo z T

Pozorování:

- Je-li $\mathcal{A} \models T^*$, potom i $\mathcal{A}/_{=\mathcal{A}} \models T^*$, a ve struktuře $\mathcal{A}/_{=\mathcal{A}}$ je symbol rovnosti interpretován jako identita.
- Na druhou stranu, v každém modelu, ve kterém je symbol rovnosti interpretován jako identita, platí axiomy rovnosti.

(Použijeme při konstrukci **kanonického modelu** v důkazu úplnosti.)

7.4 Korektnost a úplnost

Stejně jako ve výrokové logice:

dokazatelnost je totéž, co platnost

- $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ (korektnost) “co jsme dokázali, platí”
- $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ (úplnost) “co platí, lze dokázat”

(Důkazy mají stejnou strukturu, liší se jen v implementačních detailech pomocných lemmat.)

Korektnost: pomocné lemma

Model \mathcal{A} se shoduje s položkou P , pokud $P = T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = F\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$, a s větví V , shoduje-li s každou položkou na V .

Lemma: Shoduje-li se model \mathcal{A} teorie T (v jazyce L) s položkou v kořeni tablu z T , potom lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C (interpretovat symboly $c_i \in C$) tak, že se shoduje s některou větví v tablu.

NB: Stačí interpret. symboly c_i vyskytující se na větvi, ostatní libovolně.

Důkaz: Indukcí podle konstrukce $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ najdeme posloupnost větví $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$ a expanzí \mathcal{A}_i o konstanty na V_i tak, že:

- V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem \mathcal{A}_i
- V_{i+1} je prodloužením V_i a \mathcal{A}_{i+1} je expanzí \mathcal{A}_i

Hledaná větev v τ je $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$, L_C -expanze \mathcal{A} je 'limita' \mathcal{A}_i : vyskytuje-li se $c \in C$ na V_i , interpretuj jako v \mathcal{A}_i , jinak libovolně.

Báze: $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ se shoduje s kořenem, tj. s (jednoprvkovou) V_0 v τ_0 .

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok: Pokud jsme neprodloužili V_i : $V_{i+1} = V_i$, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.

Pokud jsme připojili $T\alpha$ (pro $\alpha \in T$) na konec V_i , definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev, $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový symbol). Protože $\mathcal{A} \models T$, máme i $\mathcal{A}_{i+1} \models \alpha$, tedy se shoduje.

Nechť τ_{i+1} vzniklo připojením atomického tabla pro P na konec V_i .

- **logická spojka:** $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ se shoduje s kořenem atomického tabla, tedy i s některou větví, o tu prodloužíme V_i na V_{i+1}
- **typ “svědek”:** SÚNO $P = T(\exists x)\varphi(x)$: $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$, tedy existuje $a \in A$, že $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$. V_{i+1} je prodloužení V_i o nově přidanou $T\varphi(x/c)$, \mathcal{A}_{i+1} expanze \mathcal{A}_i o konst. $c^A = a$
- **typ “všichni”:** V_{i+1} je prodloužení V_i o atomické tablo. SÚNO nová položka $T\varphi(x/t)$ pro nějaký L_C -term t . Model \mathcal{A}_{i+1} je libovolná expanze \mathcal{A}_i o nové symboly z t . $\mathcal{A}_i \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models (\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1} \models \varphi(x/t)$, tedy se shoduje. \square

Věta o korektnosti [tablo metody ve predikátové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li sentence φ tablo dokazatelná z teorie T , potom je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se [po vhodné interpretaci pomocných symbolů] shodoval s některou větví, ty jsou ale sporné.

Důkaz: Sporem, necht' $T \not\models \varphi$, tj. existuje $\mathcal{A} \in M(T)$, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Protože $T \vdash \varphi$, existuje tablo důkaz φ z T , což je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.

Model \mathcal{A} se shoduje s kořenem $F\varphi$, tedy podle Lemmatu lze interpretovat symboly $c \in C$ tak, že se výsledná L_C -expanze \mathcal{A}' shoduje s nějakou větví V . Všechny větve jsou ale sporné, musela by se shodovat s $T\psi$ a zároveň $F\psi$ pro nějakou L_C -sentenci ψ . \square