NAIL062 V&P Logika: 5. cvičení

Témata: Tablo metoda ve výrokové logice.

Příklad 1. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky:

(a) $(p \to (q \to q))$

(b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$

(c) $\neg(p \lor q) \leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$

(d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Příklad 2. Pomocí tablo metody dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezespornou větev.

(a) $\{\neg q,\ p \lor q\} \models p$

(b) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\} \models s$

(c) $\{p \to r,\ p \lor q,\ \neg s \to \neg q\} \models r \to s$

Příklad 3. Pomocí tablo metody určete všechny modely následujících teorií:

(a) $\{(\neg p \lor q) \to (\neg q \land r)\}$

(b) $\{\neg q \to (\neg p \lor q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$

(c) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\}$

Příklad 4. Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: *"Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad."*
- Na truhle B je nápis: *"V truhle A je smrtonosná past."*

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

(a) Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii T nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných $\mathbb{P}$. (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v $\mathbb{P}$.)

(b) Pomocí tablo metody najděte všechny modely teorie T.

(c) Může Aladin zvolit truhlu tak, aby si byl jistý, že bude obsahovat poklad? Pokud ano, kterou?

Příklad 5. V prezidentských volbách kandidují pan A a pan B.

- Pan A říká: *"Budu zvolen nebo pan B lže."*
- Pan B říká: *"Pan A nebude zvolen nebo lžu."*
- Bude zvolen právě jeden z nich.

(a) Formalizujte naše znalosti jako teorii T v jazyce $\mathbb{P} = \{z_a, z_b, p_a, p_b\}$, kde z_a resp. z_b znamená, že zvolen bude pan A resp. pan B, a p_a resp. p_b znamená, že A resp. B mluví pravdu.

(b) Sestrojte dokončená tabla z teorie T s položkami $\mathrm{F}z_a$ resp. $\mathrm{F}z_b$ v kořeni. Jaký z těchto tabel můžeme učinit závěr?

(c) Uveďte příklad výroku nad $\mathbb{P}$, který je v teorii T nezávislý, anebo zdůvodněte, proč takový výrok neexistuje.

(d) Existuje teorie S nad $\{z_a, z_b\}$ taková, že T je konzervativní extenzí S? Uveďte příklad, nebo zdůvodněte, proč ne.

Příklad 6. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a) $T = \{p_{i+1} \to p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (b) $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí tablo metody najděte všechny modely T, a to tak, že sestrojíte tablo z T s položkou $\mathrm{T}p_0 \to p_1$ v kořeni. Je každý model T kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla? Pokuste se sestrojit také *systematické* tablo.

Příklad 7. Navrhněte vhodná atomická tabla pro Peirceovu spojku $\downarrow$ (NOR), pro Shefferovu spojku $\uparrow$ (NAND), a pro $\oplus$ (XOR).

Příklad 8. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. že pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí

$$T \vdash \varphi \to \psi \text{ právě když } T, \varphi \vdash \psi.$$

Domácí úkol (3 body)**.**

1. Pomocí tablo metody:

   (a) dokažte, že následující výrok je tautologie:

   $$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

   (b) dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezespornou větev:

   $$\{p \to r,\ p \vee q,\ \neg s \to \neg q\} \models r \to s$$

   (c) určete všechny modely:

   $$\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\}$$

2. Navrhněte vhodná atomická tabla pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE). Ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví.