## Kapitola 1

# Tablo metoda v predikátové logice

V této kapitole ukážeme, jak lze zobecnit *metodu analytického tabla* z výrokové na predikátovou logiku.<sup>1</sup> Metoda funguje velmi podobně, musíme si ale poradit *kvantifikátory*.

## 1.1 Neformální úvod

V této sekci tablo metodu neformálně představíme. K formálním definicím se vrátíme později. Začneme dvěma příklady, na kterých ilustruje, jak tablo metoda v predikátové logice funguje, a jak se vypořádá s kvantifikátory.

 $P\check{r}iklad$  1.1.1. Na Obrázku ?? jsou znázorněna dvě tabla. Jsou to tablo důkazy (v logice, tj. z prázdné teorie) sentencí  $(\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$  (vpravo) a  $\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$  (vlevo) jazyka  $L = \langle P \rangle$  (bez rovnosti), kde P je unární relační symbol. Symbol  $c_0$  je pomocný konstantní symbol, který do jazyka při konstrukci tabla přidáváme.

#### Položky

Formule v položkách musí být vždy sentence, neboť potřebujeme, aby měly v daném modelu pravdivostní hodnotu (nezávisle na ohodnocení proměnných). To ale není zásadní omezení, chceme-li dokázat, že formule  $\varphi$  platí v teorii T, můžeme nejprve nahradit formuli  $\varphi$  a všechny axiomy T jejich generálními uzávěry (tj. univerzálně kvantifikujeme všechny volné proměnné). Získáme tak uzavřenou teorii T' a sentenci  $\varphi'$  a platí:  $T' \models \varphi'$  právě když  $T \models \varphi$ .

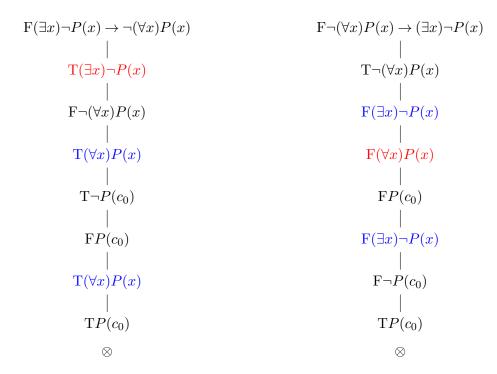
### Kvantifikátory

Redukce položek funguje stejně, použijeme tatáž atomická tabla pro logické spojky (viz Tabulka ??, kde místo výroků jsou  $\varphi$ ,  $\psi$  sentence). Musíme ale přidat 4 nová atomická tabla pro T/F a univerzální/existenční kvantifikátor. Tyto položky dělíme na dva typy:

- typ "svědek": položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a  $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
- typ "všichni": položky tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  a  $F(\exists x)\varphi(x)$

Příklady vidíme v tablech na Obrázku ?? ('svědci' jsou červeně, 'všichni' modře).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Na tomto místě je dobré připomenout si tablo metodu ve výrokové logice, viz Kapitola ??.



Obrázek 1.1: Příklady tabel. Položky typu 'svědek' jsou znázorněny červeně, položky typu 'všichni' modře.

Kvantifikátor nemůžeme pouze odstranit, neboť výsledná formule  $\varphi(x)$  by nebyla sentencí. Místo toho současně s odstraněním kvantifikátoru substituujeme za x nějaký konstantní term, v nové položce tedy bude sentence  $\varphi(x/t)$ . Jaký konstantní term t substituujeme záleží na tom, zda jde o položku typu "svědek" nebo "všichni".

#### Pomocné konstantní symboly

Jazyk L teorie T, ve které dokazujeme, rozšíříme o spočetně mnoho nových (pomocných)  $konstantních symbolů <math>C = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$  (ale budeme psát i  $c, d, \ldots$ ), výsledný rozšířený jazyk označíme  $L_C$ . Konstantní termy v jazyce  $L_C$  tedy existují, i pokud původní jazyk L nemá žádné konstanty. A vždy při konstrukci tabla máme k dispozici nějaký nový, dosud nepoužitý (ani v teorii, ani v konstruovaném tablu) pomocný konstantní symbol  $c \in C$ .

#### Svědci

Při redukci položky typu "svědek" substituujeme za proměnnou jeden z těchto nových, pomocných symbolů, a to takový, který dosud nebyl na dané větvi použit. V případě položky  $T(\exists x)\varphi(x)$  tedy máme  $T\varphi(x/c)$ . Tento konstantní symbol c bude hrát roli (nějakého) prvku, který danou formuli splňuje (resp. vyvrací, jde-li o položku tvaru  $F(\forall x)\varphi(x)$ ). Zde používáme větu o konstantách (Věta  $\ref{totaleq}$ ). Je důležité, že symbol c dosud nebyl na větvi ani v teorii nijak použit. Typicky ale poté použijeme položky typu "všichni", abychom se dozvěděli, co musí o tomto svědku platit.

Na Obrázku ?? vidíme příklad: položka  $T(\exists x) \neg P(x)$  v levém tablu je redukovaná, její redukcí vznikla položka  $T \neg P(c_0)$ ;  $c_0 \in C$  je pomocný symbol, na větvi se dosud nevyskytoval

(a je první takový). Podobně pro položku  $F(\forall x)P(x)$  a  $FP(c_0)$  v pravém tablu.

#### Všichni

Při redukci položky typu "všichni" substituujeme za proměnnou x libovolný konstantní term t rozšířeného jazyka  $L_C$ . Z položky tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  tedy získáme položku  $T\varphi(x/t)$ .

Aby byla bezesporná větev dokončená, budou na ní ale muset být položky  $T\varphi(x/t)$  pro všechny konstantní  $L_C$ -termy t. (Musíme 'použít' vše, co položka  $T(\forall x)\varphi(x)$  'říká'.) A stejně pro položku tvary  $F(\exists x)\varphi(x)$ .

Ve výrokové logice jsme používali konvenci, že při připojování atomických tabel vynecháváme jejich kořeny (jinak bychom opakovali na větvi tutéž položku dvakrát). V predikátové logice použijeme stejnou konvenci, ale s výjimkou položek typu 'svědek'. U těch zapíšeme i kořen připojovaného atomického tabla. Proč to děláme? Abychom si připomněli, že s touto položkou ještě nejsme hotovi, že musíme připojit atomická tabla s jinými konstantními termy.

Na Obrázku ?? v levém tablu není položka  $T(\forall x)P(x)$  redukovaná. Její první výskyt (4. vrchol shora) jsme zredukovali, substituujeme term  $t=c_0$ , máme tedy  $\varphi(x/t)=P(c_0)$ . Připojili jsme atomické tablo v sestávající z téže položky v kořeni  $T(\forall x)P(x)$ , kterou do tabla zapíšeme, a z položky  $TP(c_0)$  pod ní. Zatímco první výskyt položky  $T(\forall x)P(x)$  je tímto redukovaný, druhý výskyt (7. vrchol shora) redukovaný není. Podobně pro položku  $F(\exists x) \neg P(x)$  v pravém tablu.

Tento poněkud technický přístup k definici redukovanosti (výskytů) položek typu 'všichni' se nám bude hodit v definici systematického tabla.

#### Jazyk

Nadále budeme předpokládat, že jazyk L je  $spočetný.^2$  Z toho plyne, že každá L-teorie T má jen spočetně mnoho axiomů, a také že konstantních termů v jazyce  $L_C$  je jen spočetně mnoho. Toto omezení potřebujeme, neboť každé, i nekonečné tablo má jen spočetně mnoho položek, a musíme být schopni použít všechny axiomy dané teorie, a substituovat všechny konstantní termy jazyka  $L_C$ .

Nejprve také budeme předpokládat, že jde o jazyk bez rovnosti, což je jednodušší. Problémem je, že tablo je čistě syntaktický objekt, ale rovnost má speciální sémantický význam, totiž musí být v každém modelu interpretována relací identity. Jak adaptovat metodu pro jazyky s rovností si ukážeme později.

## 1.2 Formální definice

V této sekci definujeme všechny pojmy potřebné pro tablo metodu pro jazyky bez rovnosti. K jazykům s rovností se vrátíme v Sekci ??.

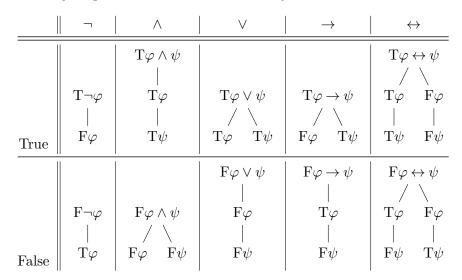
Buď L spočetný jazyk bez rovnosti. Označme jako  $L_C$  rozšíření jazyka L o spočetně mnoho nových pomocných konstantních symbolů  $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Zvolme nějaké očíslování konstantních termů jazyka  $L_C$ , označme tyto termy  $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ .

Mějme nějakou L-teorii T a L-sentenci  $\varphi$ 

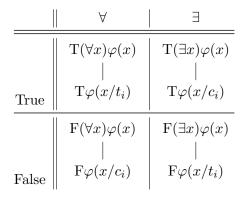
<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Z hlediska výpočetní logiky to není velké omezení.

#### 1.2.1 Atomická tabla

Položka je nápis  $T\varphi$  nebo  $F\varphi$ , kde  $\varphi$  je nějaká  $L_C$ -sentence. Položky tvaru  $T(\exists x)\varphi(x)$  a  $F(\forall x)\varphi(x)$  jsou typu 'svědek', položky tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  a  $F(\exists x)\varphi(x)$  jsou typu 'všichni'  $Atomická\ tabla$  jsou položkami označkované stromy znázorněné v Tabulkách ?? a ??.



Tabulka 1.1: Atomická tabla pro logické spojky;  $\varphi$  a  $\psi$  jsou libovolné  $L_C$ -sentence.



Tabulka 1.2: Atomická tabla pro kvantifikátory;  $\varphi$  je  $L_C$ -sentence, x proměnná,  $t_i$  libovolný konstantní  $L_C$ -term,  $c_i \in C$  je nový pomocný konstantní symbol (který se dosud nevyskytuje na dané větvi konstruovaného tabla).

## 1.2.2 Tablo důkaz

Definice v této části jsou téměř identické odpovídajícím definicím z výrokové logiky. Hlavní technický problém je jak definovat redukovanost položek typu 'všichni' na větvi tabla: chceme aby za proměnnou byly substituovány všechny možné konstantní  $L_C$ -termy  $t_i$ .

**Definice 1.2.1** (Tablo). *Konečné tablo z teorie T* je uspořádaný, položkami označkovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:

• jednoprvkový strom označkovaný libovolnou položkou je tablo z teorie T,

- pro libovolnou položkou P na libovolné větvi V, můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P, přičemž je-li P typu 'svědek', můžeme použít jen pomocný konstantní symbol  $c_i \in C$ , který se na větvi V dosud nevyskytuje (pro položky typu 'všichni' můžeme použít libovolný konstantní  $L_C$ -term  $t_i$ ),
- na konec libovolné větve můžeme připojit položku  $T\alpha$  pro libovolný axiom teorie  $\alpha \in T$ .

Tablo z teorie T je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě vzniklo ve spočetně mnoha krocích. Můžeme ho formálně vyjádřit jako sjednocení  $\tau = \bigcup_{i\geq 0} \tau_i$ , kde  $\tau_i$  jsou konečná tabla z T,  $\tau_0$  je jednoprvkové tablo, a  $\tau_{i+1}$  vzniklo z  $\tau_i$  v jednom kroku.<sup>3</sup>

Tablo pro položku P je tablo, které má položku P v kořeni.

Připomeňme konvenci, že pokud P není typu 'všichni', potom kořen atomického tabla nebudeme zapisovat (neboť vrchol s položkou P už v tablu je).

Cvičení 1.1. Ukažte v jednotlivých krocích jak byla tabla z Obrázku ?? zkonstruována.

**Definice 1.2.2** (Tablo důkaz). Tablo důkaz sentence  $\varphi$  z teorie T je sporné tablo z teorie T s položkou  $F\varphi$  v kořeni. Pokud existuje, je  $\varphi$  (tablo) dokazatelná z T, píšeme  $T \vdash \varphi$ . (Definujme také tablo zamítnutí jako sporné tablo s  $T\varphi$  v kořeni. Pokud existuje, je  $\varphi$  (tablo) zamítnutelná z T, tj. platí  $T \vdash \neg \varphi$ .)

- Tablo je sporné, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je  $sporn\acute{a}$ , pokud obsahuje položky T $\psi$  a F $\psi$  pro nějaký výrok  $\psi$ , jinak je  $beze-sporn\acute{a}$ .
- Tablo je dokončené, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je dokončená, pokud
  - je sporná, nebo
  - je každá položka na této větvi redukovaná a zároveň větev obsahuje položku  $T\alpha$  pro každý axiom  $\alpha \in T$ .
- Položka P je redukovaná na větvi V procházející touto položkou, pokud
  - není typu 'všichni' a při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V, tj. vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla.<sup>4</sup>
  - je typu 'všichni' a všechny její výskyty na V jsou na větvi V redukované.
- Výskyt položky P typu 'všichni' na větvi V je i- $t\acute{y}$ , pokud má na V právě i-1 předků označených touto položkou, a i-tý výskyt je  $redukovan\acute{y}$  na V, pokud
  - položka P má (i+1)-ní výskyt na V, a zároveň
  - na V se vyskytuje položka  $T\varphi(x/t_i)$  (je-li  $P = T(\forall x)\varphi(x)$ ) resp.  $F\varphi(x/t_i)$  (je-li  $P = F(\exists x)\varphi(x)$ ), kde  $t_i$  je i-tý konstantní  $L_C$ -term. (Tj. už jsme za x substituovali term  $t_i$ .)

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Sjednocení proto, že v jednotlivých krocích přidáváme do tabla nové vrcholy,  $\tau_i$  je tedy podstromem  $\tau_{i+1}$ .

<sup>4</sup>Byť podle konvence tento kořen nezapisujeme.

Všimněte si, že je-li položka typu 'všichni' na nějaké větvi redukovaná, musí mít na této větvi nekonečně mnoho výskytů, a museli jsme v nich použít při substituci všechny možnosti, tj. všechny konstantní  $L_C$ -termy.

Cvičení 1.2. Sestrojte tablo důkazy v logice (z prázdné teorie) následujících sentencí:

- (a)  $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$
- (b)  $(\forall x)(\varphi(x) \land \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \land (\forall x)\psi(x))$ , kde  $\varphi(x), \psi(x)$  jsou libovolné formule s jedinou volnou proměnnou x.
- 1.2.3 Systematické tablo
- 1.3 Jazyky s rovností
- 1.3.1 Axiomy rovnosti
- 1.3.2 Kongruence a faktorstruktura
- 1.4 Korektnost a úplnost
- 1.4.1 Věta o korektnosti
- 1.4.2 Kanonický model
- 1.4.3 Věta o úplnosti
- 1.5 Důsledky korektnosti a úplnosti
- 1.5.1 Löwenheim-Skolemova věta
- 1.5.2 Věta o kompaktnosti
- 1.5.3 Aplikace
- 1.6 Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

[TODO]