NAIL062 V&P Logika: 2. sada příkladů – Sémantika, vlastnosti teorií

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmům sémantiky výrokové logiky (pravdivostní hodnota, pravdivostní funkce, model, platnost, tautologie, spornost, nezávislost, splnitelnost, ekvivalence), umí je formálně definovat a uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je množina logických spojek univerzální
- zná terminologii pro výroky v CNF a DNF
- umí převést daný výrok resp. konečnou teorii do CNF a do DNF, a to pomocí množiny modelů i pomocí ekvivalentních úprav
- rozumí terminologii týkající se vlastností teorií (sporná, bezesporná/splnitelná, kompletní, důsledky, T-ekvivalence), umí pojmy formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí je formálně definovat, uvést příklady
- umí v konkrétním případě rozhodnout, zda jde o [jednoduchou, konzervativní] extenzi, a zdůvodnit jak z definice, tak i pomocí sémantického kritéria

Příklady na cvičení

Příklad 1. Uveďte příklad výroku v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, který je (a) pravdivý, (b) sporný, (c) nezávislý, (d) ekvivalentní s $(p \wedge q) \to \neg r$, (e) má za modely právě $\{(1,0,0), (1,0,1), (0,0,1)\}$.

Příklad 2. Jsou tyto množiny logických spojek univerzální? (a) $\{\vee, \to, \leftrightarrow\}$, (b) $\{\vee, \wedge, \to\}$

Příklad 3. Převeďte následující výrok do CNF a DNF. Proveďte to (a) sémanticky (pomocí pravdivostní tabulky), (b) ekvivalentními úpravami:

$$(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r)$$

Příklad 4. Mějme teorii $T = \{p \wedge q, p \to \neg q, q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$.

(a) Rozhodněte, zda je teorie T [konzistentní/splnitelná/kompletní].
(b) Uveďte příklad výroku φ, který je [platný/nesplnitelný/nezávislý] v T
(c) Uveďte příklad extenze T' teorie T (pokud existuje, a pokud možno neekvivalentní s T), která je [jednoduchá / konzervativní/kompletní/konzervativní jednoduchá/kompletní jednoduchá/kompletní konzervativní].
(d) Na příkladech extenzí ukažte, že platí sémantické kritérium.

Příklad 5. Dokažte nebo vyvraťte (nebo uveďte správný vztah), že pro každou teorii T a výroky φ, ψ v jazyce $\mathbb{P}$ platí:

(a) $T \models \varphi$, právě když $T \not\models \neg\varphi$
(b) $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \wedge \psi$
(c) $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \vee \psi$
(d) $T \models \varphi \to \psi$ and $T \models \psi \to \chi$, právě když $T \models \varphi \to \chi$

Další příklady k procvičení

Příklad 6. Mějme teorii $T = \{\neg q \to (\neg p \vee q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$ v jazyce $\{p, q, r\}$.

(a) Uveďte příklad následujícího: výrok pravdivý v T, lživý v T, nezávislý v T, splnitelný v T, a dvojice T-ekvivalentních výroků.
(b) Které z následujících výroků jsou pravdivé, lživé, nezávislé, splnitelné v T? T-ekvivalentní?

$$p,\ \neg q,\ \neg p \vee q,\ p \to r,\ \neg q \to r,\ p \vee q \vee r$$

Příklad 7. Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.
(a) $\{\downarrow\}$ kde $\downarrow$ je Peirce arrow (NOR),
(b) $\{\uparrow\}$ kde $\uparrow$ je Sheffer stroke (NAND),

Příklad 8. Určete množinu modelů dané formule. Využijte toho, že je v DNF resp. v CNF.
(a) $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$
(b) $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$

Příklad 9. Převeďte do CNF a DNF oběma metodami: $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$

Příklad 10. Najděte (co nejkratší) CNF a DNF reprezentace Booleovské funkce $\mathrm{maj}\colon \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$, která vrací převládající hodnotu mezi 3 vstupy.

Příklad 11. Stejné zadání, jako Příklad 4, ale pro teorii $T = \{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee (p \wedge q)\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.

Příklad 12. Dokažte nebo vyvraťte (nebo uveďte správný vztah), že pro libovolné teorie T, S nad $\mathbb{P}$ platí:
(a) $S \subseteq T \Rightarrow \mathrm{Csq}(T) \subseteq \mathrm{Csq}(S)$
(b) $\mathrm{Csq}(S \cup T) = \mathrm{Csq}(S) \cup \mathrm{Csq}(T)$
(c) $\mathrm{Csq}(S \cap T) = \mathrm{Csq}(S) \cap \mathrm{Csq}(T)$

K zamyšlení

Příklad 13. Ukažte, že $\wedge$ a $\vee$ nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že $\{\wedge, \vee\}$ není *univerzální* množina logických spojek.

Příklad 14. Uvažte Booleovský operátor $\mathrm{IFTE}(p, q, r)$ definovaný jako 'if p then q else r'.
(a) Zkonstruujte pravdivostní tabulku.
(b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory $(\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \dots)$ lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.

Příklad 15. Buď $\mathbb{P}$ spočetně nekonečná množina prvovýroků.
(a) Ukažte, že již neplatí, že každou $K \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$ lze axiomatizovat výrokem v CNF i výrokem v DNF.
(b) Uveďte příklad množiny modelů K, kterou nelze axiomatizovat ani výrokem v CNF, ani výrokem v DNF.

Příklad 16. Najděte CNF a DNF reprezentaci n-ární parity, tj. Booleovské funkce $\mathrm{par}\colon \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, která vrací XOR všech vstupních hodnot:

$$\mathrm{par}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n) \bmod 2$$

Zkuste to pro malé hodnoty n.

Příklad 17. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\mathrm{var}(T)$.
(a) Najděte všechny modely T.
(b) Které výroky ve tvaru $p_i \rightarrow p_j$ jsou důsledky T?