

Sedmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Program

- podstruktury, expanze, redukty
- extenze teorií, extenze o definice
- definovatelnost a databázové dotazy
- vztah výrokové a predikátové logiky

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 6.6-6.9 z Kapitoly 6

6.6 Podstruktura, expanze, redukt

- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině B univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty
- B musí být **uzavřená** na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je (indukovaná) podstruktura struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ (v též signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$), značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\text{ar}(R)}$ pro každý relační symbol $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\text{ar}(f)} \times B)$ pro každý funkční symbol $f \in \mathcal{F}$, tj. $f^{\mathcal{B}}$ je restrikce $f^{\mathcal{A}}$ na množinu B , a výstupy jsou všechny z B

speciálně, pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$

Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina $C \subseteq A$ je **uzavřená** na funkci $f : A^n \rightarrow A$, pokud $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$.

Pozorování: Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury \mathcal{A} (včetně konstant). V tom případě je to **restrikce** \mathcal{A} na množinu C , značíme $\mathcal{A} \upharpoonright C$.

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, můžeme psát: $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou obou těchto struktur, platí: $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \upharpoonright \mathbb{N}$
- Množina $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}$ není univerzem podstruktury $\underline{\mathbb{Z}}$ ani $\underline{\mathbb{Q}}$, není uzavřená na násobení.

Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

Pozorování: Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, φ otevřená formule, a $e: \text{Var} \rightarrow B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz: Snadno indukcí dle struktury φ , pro atomickou zřejmé. \square

Důsledek: Otevřená formule platí ve struktuře \mathcal{A} , právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie T je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek: Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme). Podstruktura tělesa \mathbb{Q} na množině \mathbb{Z} , $\mathbb{Q} \upharpoonright \mathbb{Z}$, není těleso. (Je to tzv. okruh.)

Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje X a je uzavřená na všechny funkce \mathcal{A} (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \upharpoonright B$ je **generovaná** X , značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$:

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$ je podstruktura $\underline{\mathbb{N}}$ na množině všech sudých čísel

Pokud \mathcal{A} nemá žádné funkce (ani konstanty), např. graf či uspořádání, potom není čím generovat, a $\mathcal{A}\langle X \rangle = \mathcal{A} \upharpoonright X$.

Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, L -strukturu \mathcal{A} a L' -strukturu \mathcal{A}' na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z L stejná v \mathcal{A} i v \mathcal{A}' , potom:

- \mathcal{A}' je **expanze** \mathcal{A} do L' (**L' -expanze** struktury \mathcal{A})
- \mathcal{A} je **redukt** \mathcal{A}' na L (**L -redukt** struktury \mathcal{A}')

Například:

- Mějme grupu celých čísel $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$. Potom:
 - struktura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ je její redukt
 - struktura $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ (**okruh** celých čísel) je její expanze
- Mějme graf $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$. Potom **expanze** \mathcal{G} o **jména prvků** (z množiny G) je struktura $\langle G, E^{\mathcal{G}}, c_v^{\mathcal{G}} \rangle_{v \in G}$ v jazyce $\langle E, c_v \rangle_{v \in G}$, kde $c_v^{\mathcal{G}} = v$ pro všechny vrcholy $v \in G$.

Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou x je totéž, co splnit formuli, ve které je x nahrazena **novým** konstantním symbolem c
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

Věta (O konstantách): Mějme L -formuli φ s volnými proměnnými x_1, \dots, x_n . Označme jako L' rozšíření L o nové konstantní symboly c_1, \dots, c_n a buď T' stejná teorie jako T , ale v jazyce L' . Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$$

Důkaz: stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukci

\Rightarrow **Víme:** φ platí v každém modelu T . **Chceme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T' . Mějme model $\mathcal{A}' \models T'$ a ohodnocení $e: \text{Var} \rightarrow A'$ a ukažme, že $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

Pokračování důkazu

Buď \mathcal{A} redukt \mathcal{A}' na L ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že \mathcal{A} je model T (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol c). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení e' , speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde x ohodnotíme interpretací c v \mathcal{A}' .

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

⇐ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu T' . **Chceme:** φ platí v každém modelu T . Zvolme $\mathcal{A} \models T$ a ohodnocení $e: \text{Var} \rightarrow A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Buď \mathcal{A}' expanze \mathcal{A} do L' , kde c interpretujeme jako $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$. Dle předpokladu platí $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$ pro všechna ohodnocení e' . Tedy $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$, což znamená $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$ ($e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$), z toho plyne $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$.

Formule φ neobsahuje c (je nový), máme tedy i $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. □

6.7 Estenze teorií

Stejně jako ve výrokové logice, je-li T teorie v jazyce L :

- **extenze:** T' v jazyce $L' \supseteq L$ splňující $\text{Csq}_L(T) \subseteq \text{Csq}_{L'}(T')$
- **jednoduchá:** $L' = L$
- **konzervativní:** $\text{Csq}_L(T) = \text{Csq}_L(T') = \text{Csq}_{L'}(T') \cap \text{Fm}_L$
- **ekvivalentní:** T' extenzí T a T extenzí T' (obě v témž jazyce)

Jsou-li T, T' ve stejném jazyce L :

- T' je extenze T , právě když $M_L(T') \subseteq M_L(T)$
- T' je ekvivalentní s T , právě když $M_L(T') = M_L(T)$

Zvětšíme-li jazyk:

- **ve výrokové logice:** přidáváme/zapomínáme hodnoty pro nové prvovýroky
- **v predikátové logice:** expandujeme/redukujeme modely (přidáváme/zapomínáme nové relace, funkce, konstanty)

Extenze teorie: sémantický popis

Mějme jazyky $L \subseteq L'$, L -teorii T a L' -teorii T' :

- (i) T' je **extenzí** $T \Leftrightarrow L$ -redukt každého modelu T' je model T
- (ii) T' je **konzervativní extenzí** $T \Leftrightarrow T'$ je extenzí T , a každý model T lze expandovat do L' na nějaký model T'

Poznámka: Důkaz (ii) \Rightarrow vynecháme (technický problém: model, který nelze expandovat $\rightsquigarrow L$ -sentence platná v T ale ne v T')

Důkaz: (i) \Rightarrow Buď \mathcal{A}' model T' , \mathcal{A} jeho L -redukt. Protože T' je extenzí, platí v ní, tedy i v \mathcal{A}' , každý axiom $\varphi \in T$. Ten ale obsahuje jen symboly z L , tedy platí i v \mathcal{A} .

(i) \Leftarrow **Mějme:** L -sentenci φ , $T \models \varphi$. **Chceme:** $T' \models \varphi$. Pro lib. model $\mathcal{A}' \in M_{L'}(T')$ víme, že jeho L -redukt \mathcal{A} je modelem T , tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. Z toho plyne i $\mathcal{A}' \models \varphi$ (opět φ je v L).

(ii) \Leftarrow **Mějme:** L -sentenci φ , $T' \models \varphi$. **Chceme:** $T \models \varphi$. Každý $\mathcal{A} \in M_L(T)$ lze expandovat na nějaký $\mathcal{A}' \in M_{L'}(T')$. Víme, že $\mathcal{A}' \models \varphi$, takže i $\mathcal{A} \models \varphi$. Tím jsme dokázali $T \models \varphi$. □

Extenze o definice (neformálně)

- přidáme nový symbol, jehož význam je jednoznačně daný **definující formulí** (jako procedura/funkce v programování)
- pro relační symboly jednoduché, pro funkční symboly musíme navíc zaručit **existenci** a **jednoznačnost** funkční hodnoty

Ukážeme:

- je to konzervativní extenze, dokonce každý model původní teorie lze **jednoznačně** expandovat na model nové teorie
- každou formuli používající nové symboly lze přepsat na formuli v původním jazyce (tak, že jsou v extenzi ekvivalentní)

Definice relačního symbolu

nový n -ární relační symbol R lze definovat lib. formulí $\psi(x_1, \dots, x_n)$

- teorii v jazyce s rovností lze rozšířit o symbol \neq definovaný formulí $\neg x_1 = x_2$; tj. požadujeme, aby: $x_1 \neq x_2 \leftrightarrow \neg x_1 = x_2$
- teorii uspořádání lze rozšířit o $<$ definovaný formulí $x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$; tj. platí: $x_1 < x_2 \leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$
- v aritmetice lze zavést \leq takto: $x_1 \leq x_2 \leftrightarrow (\exists y)(x_1 + y = x_2)$
- v uspořádaném stromu lze zavést unární predikát $\text{Leaf}(x)$:
 $\text{Leaf}(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)(x <_T y)$

Mějme teorii T a formuli $\psi(x_1, \dots, x_n)$ v jazyce L . Označme jako L' rozšíření jazyka L o nový n -ární relační symbol R . **Extenze teorie T o definici R formulí ψ** je L' -teorie:

$$T' = T \cup \{R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)\}$$

Definice relačního symbolu: vlastnosti

Tvrzení:

- (i) T' je konzervativní extenze T .
- (ii) Pro každou L' -formuli φ' existuje L -formule φ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Důkaz: (i) ihned ze sémantického popisu extenzí, neboť zřejmě každý model T lze **jednoznačně** expandovat na model T'

(ii) atomickou podformulí s novým symbolem R , tj. tvaru $R(t_1, \dots, t_n)$, nahradíme formulí

$$\psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$$

kde ψ' je **varianta ψ zaručující substituovatelnost** všech termů (např. přejmenujeme všechny vázané proměnné ψ na zcela nové) \square

Definice funkčního symbolu: příklady

vztah $f(x_1, \dots, x_n) = y$ definujeme formulí $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$; pro každý vstup (x_1, \dots, x_n) musí **existovat jednoznačný** výstup y

1. **Teorie grup**: binární funkční symbol $-_b$ pomocí $+$ a unárního $-$

$$x_1 -_b x_2 = y \leftrightarrow x_1 + (-x_2) = y$$

- zřejmě pro každá x, y **existuje jednoznačné** z splňující definici

2. **Teorie lineárních uspořádání**: binární funkční symbol **min**

$$\min(x_1, x_2) = y \leftrightarrow y \leq x_1 \wedge y \leq x_2 \wedge (\forall z)(z \leq x_1 \wedge z \leq x_2 \rightarrow z \leq y)$$

- existence a jednoznačnost platí díky linearitě ($x \leq y \vee y \leq x$)
- pouze v teorii uspořádání by nešlo o dobrou definici:
 $\min^A(a_1, a_2)$ nemusí existovat

Definice funkčního symbolu: definice

Mějme teorii T a formuli $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ v jazyce L . Označme L' rozšíření L o nový n -ární funkční symbol f . Necht' platí:

- $T \models (\exists y)\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ (existence)
- $T \models \psi(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \dots, x_n, z) \rightarrow y = z$ (jednoznačnost)

Potom **extenze teorie T o definici f formulí ψ** je L' -teorie:

$$T' = T \cup \{f(x_1, \dots, x_n) = y \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, y)\}$$

- ψ definuje v modelu $(n+1)$ -ární relaci, ta **musí být funkcí**
- je-li ψ tvaru $t(x_1, \dots, x_n) = y$ pro term t , vždy to platí

Tvrzení:

- (i) T' je konzervativní extenze T .
- (ii) Pro každou L' -formuli φ' existuje L -formule φ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Důkaz: (i) modely T lze **jednoznačně** expandovat na modely T'

(ii) stačí pro jediný výskyt symbolu f , jinak induktivně (je-li více vnořených výskytů $f(\dots f(\dots) \dots)$, potom od vnitřních k vnějším)

1. nahradíme term $f(t_1, \dots, t_n)$ novou proměnnou z : **výsledek** φ^*
2. φ zkonstruujeme takto: $(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z))$
(kde ψ' je varianta ψ zaručující substituovatelnost)

Ukážeme, že pro libovolný model $\mathcal{A} \models T'$ a ohodnocení e platí:

$$\mathcal{A} \models \varphi'[e] \text{ právě když } \mathcal{A} \models \varphi[e]$$

Označme $a = (f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{A}}[e]$. Díky existenci a jednoznačnosti:

$$\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)[e] \text{ právě když } e(z) = a$$

Máme tedy: $\mathcal{A} \models \varphi'[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$ □

Definice konstantního symbolu

- **speciální případ**: funkční symbol arity 0
- extenze o definici konstantního symbolu c formulí $\psi(y)$:

$$T' = T \cup \{c = y \leftrightarrow \psi(y)\}$$

- musí platit $T \models (\exists y)\psi(y)$ a $T \models \psi(y) \wedge \psi(z) \rightarrow y = z$
- platí stejná tvrzení

1. teorie v jazyce aritmetiky, rozšíříme o definici symbolu 1 formulí $\psi(y)$ tvaru $y = S(0)$, přidáme tedy axiom $1 = y \leftrightarrow y = S(0)$

2. teorie těles, nový symbol $\frac{1}{2}$, definice formulí $y \cdot (1 + 1) = 1$, tj. přidáním $\frac{1}{2} = y \leftrightarrow y \cdot (1 + 1) = 1$?

- není extenze o definici! neplatí existence: v tělese charakteristiky 2, např. \mathbb{Z}_2 , nemá rovnice $y \cdot (1 + 1) = 1$ řešení
- ale v teorii těles charakteristiky různé od 2, tj. přidáme-li axiom $\neg(1 + 1 = 0)$, už ano; např. v \mathbb{Z}_3 máme $\frac{1}{2}^{\mathbb{Z}_3} = 2$

Extenze o definice

L' -teorie T' je **extenzí** L -teorie T **o definice**, pokud vznikla postupnou extenzí o definice relačních a funkčních (vč. konstantních) symbolů.

Tvrzení: (snadno indukcí)

- Každý model T lze jednoznačně expandovat na model T' .
- T' je konzervativní extenze T .
- Pro L' -formuli φ' existuje L -formule φ , že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Příklad: $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$
 $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností, zavedeme $<$ a unární $-$ přidáním axiomů:

$$T' = T \cup \{-x = y \leftrightarrow x + y = 0, \\ x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y)\}$$

Formule $-x < y$ v jazyce $L' = \langle +, -, 0, \leq, < \rangle$ s rovností je v T' ekvivalentní formuli: $(\exists z)((z \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = 0)$

6.8 Definovatelnost ve struktuře

Definovatelné množiny

- formule φ s jednou volnou proměnnou $x \dots$ “vlastnost” prvků
- ve struktuře **definuje** množinu prvků, které vlastnost splňují (tj. prvků a takových, že φ platí při ohodnocení kde $e(x) = a$)
- $\varphi(x, y)$ definuje binární relaci, atp.

Množina **definovaná** $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ **ve struktuře** \mathcal{A} (v témž jazyce):

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)]\}$$

Zkráceně píšeme: $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a})]\}$

- formule $\neg(\exists y)E(x, y)$ definuje **v daném grafu** množinu všech **izolovaných** vrcholů
- $(\exists y)(y \cdot y = x) \wedge \neg(x = 0)$ definuje **v tělese \mathbb{R}** množinu všech kladných reálných čísel
- $x \leq y \wedge \neg(x = y)$ definuje v **uspořádané množině $\langle S, \leq^S \rangle$** relaci **ostrého uspořádání** $<^S$

Definovatelnost s parametry

- vlastnosti prvků relativně k jiným prvkům? nelze čistě syntakticky, ale můžeme dosadit prvky jako **parametry**
- zápis $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$: volné proměnné $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k$

Mějme $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ (kde $|\bar{x}| = n$, $|\bar{y}| = k$), strukturu \mathcal{A} (v témž jazyce), $\bar{b} \in A^k$. Množina **definovaná** $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ **s parametry** \bar{b} **ve struktuře** \mathcal{A} :

$$\varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}$$

Pro $B \subseteq A$ označíme $\text{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ množinu všech množin definovatelných v \mathcal{A} s parametry pocházejícími z B .

Pozorování: $\text{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ je uzavřená na doplněk, průnik, sjednocení, a obsahuje \emptyset a A^n : je to **podalgebra potenční algebry** $\mathcal{P}(A^n)$.

Např. pro $\varphi(x, y) = E(x, y)$ a vrchol $v \in V(\mathcal{G})$ je $\varphi^{\mathcal{G}, v}(x, y)$ množina všech sousedů vrcholu v .

Aplikace: databázové dotazy

- **relační databáze**: jedna nebo více **tabulek**, také **relace**
- řádky tabulky jsou **záznamy (records)**, také **tice (tuples)**
- struktura v čistě relačním jazyce

Movies

title	director	actor
Forrest Gump	R. Zemeckis	T. Hanks
Philadelphia	J. Demme	T. Hanks
Batman Returns	T. Burton	M. Keaton
⋮	⋮	⋮

Program

cinema	title	time
Atlas	Forrest Gump	20:00
Lucerna	Forrest Gump	21:00
Lucerna	Philadelphia	18:30
⋮	⋮	⋮

Příklad SQL dotazu

- SQL dotaz v nejjednodušší formě je formule (pomineme např. **agregační funkce**)
- výsledek je množina definovaná touto formulí (s parametry)

“Kdy a kde můžeme vidět film s Tomem Hanksem?”

```
select Program.cinema, Program.time from Program, Movies where  
Program.title = Movies.title and Movies.actor = 'T. Hanks'
```

- výsledek je množina $\varphi^{\text{Database}, 'T. Hanks'}(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$
- definovaná ve struktuře **Database** = $\langle D, \text{Program}, \text{Movies} \rangle$
- jejíž doména je $D = \{ \text{'Atlas'}, \text{'Lucerna'}, \dots, \text{'M. Keaton'} \}$
- s parametrem **'T. Hanks'**,
- definující formule $\varphi(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$:

$$(\exists y_{\text{title}})(\exists y_{\text{director}})(\text{Program}(x_{\text{cinema}}, y_{\text{title}}, x_{\text{time}}) \wedge \\ \text{Movies}(y_{\text{title}}, y_{\text{director}}, y_{\text{actor}}))$$

6.9 Vztah výrokové a predikátové logiky

- asociativita \wedge a \vee :

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

- komutativita \wedge a \vee :

$$x \wedge y = y \wedge x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

- distributivita \wedge vůči \vee , \vee vůči \wedge :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

- absorpce:

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

- komplementace:

$$x \wedge (-x) = \perp$$

$$x \vee (-x) = \top$$

- netrivialita:

$$\neg(\perp = \top)$$

- dualita: záměnou \wedge s \vee a \perp s \top získáme tytéž axiomy
- nejmenší model: 2-prvková B. algebra $\langle \{0, 1\}, f_{\neg}, f_{\wedge}, f_{\vee}, 0, 1 \rangle$
- konečné modely, až na izomorfismus (f^n je f po složkách):
$$\langle \{0, 1\}^n, f_{\neg}^n, f_{\wedge}^n, f_{\vee}^n, (0, \dots, 0), (1, \dots, 1) \rangle$$
- jsou izomorfní potenčním algebrám $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ pomocí bijekce mezi podmnožinami a charakteristickými vektory

- výrokovou logiku lze 'simulovat' v predikátové logice v teorii Booleových algeber
- výroky jsou **Booleovské termy**, konstanty \perp , \top představují pravdu a lež
- pravdivostní hodnota výroku (při daném pravdivostním ohodnocení) je hodnota termu v 2-prvkové Booleově algebře
- kromě toho, **algebra výroků** daného výrokového jazyka nebo teorie je Booleovou algebrou (i pro nekonečné jazyky)

- máme-li **otevřenou** formuli φ (bez rovnosti), můžeme reprezentovat atomické formule pomocí prvovýroků, a získat tak výrok, který platí, právě když platí φ
- viz Kapitola 8: Rezoluce v predikátové logice, kde se nejprve zbavíme kvantifikátorů pomocí tzv. **Skolemizace**
- výrokovou logiku lze také zavést jako fragment logiky predikátové, pokud povolíme **nulární relace**
- $A^0 = \{\emptyset\}$, tedy na libovolné množině jsou právě dvě nulární relace $R^A \subseteq A^0$: $R^A = \emptyset = 0$ a $R^A = \{\emptyset\} = \{0\} = 1$