

NAIL062 V&P Logika: 3. cvičení

Témata: Počítání výroků až na ekvivalenci (Lindenbaum-Tarského algebra výroků). 2-SAT a implikační graf. Horn-SAT a jednotková propagace. Algoritmus DPLL. Kódování problémů do SAT.

Příklad 1. Necht $|\mathbb{P}| = n$ a mějme výrok $\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}}$ takový, že $|M(\varphi)| = m$. Určete počet až na ekvivalenci:

- (a) výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$,
- (b) teorií nad \mathbb{P} , ve kterých platí φ ,
- (c) úplných teorií nad \mathbb{P} ve kterých platí φ ,
- (d) teorií T nad \mathbb{P} takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná.

Uvažme navíc spornou teorii $\{\varphi, \psi\}$ kde $|M(\psi)| = p$. Spočítejte až na ekvivalenci:

- (e) výroky χ takové, že $\varphi \vee \psi \models \chi$,
- (f) teorie, ve kterých platí $\varphi \vee \psi$.

Příklad 2. Sestrojte implikační graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení.

- (a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$,
- (b) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$,
- (c) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$.

Příklad 3. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$\begin{aligned} &(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge \\ &(\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \end{aligned}$$

Příklad 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, zda je následující CNF formule splnitelná.

- (a) $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \wedge \neg p_2) \wedge (p_2 \wedge \neg p_3) \wedge (p_1 \wedge p_3)$
- (b)

$$\begin{aligned} &(\neg p_1 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_6 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_6 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_4 \wedge \neg p_2) \vee \\ &(p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge p_6 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_6 \wedge \neg p_4) \vee (p_1 \wedge p_5) \vee \\ &(p_1 \wedge p_6) \vee (\neg p_6 \wedge p_3 \wedge \neg p_5) \vee (p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_5) \end{aligned}$$

Příklad 5. Lze šachovnici 4×4 bez dvou protilehlých rohů perfektně pokrýt kostkami domina? Zakódujte tento problém do SAT. Zobecněte na všechna sudá n .

Příklad 6. Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ s $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n v CNF která je splnitelná, právě když to lze. Zkuste nejprve $n = 8$.

Zkuste si doma: Napište skript generující φ_n v DIMACS CNF formátu. Použijte SAT solver k nalezení nejmenšího n pro které takové obarvení neexistuje (tj. každé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici $a < b < c$ takovou, že $a + b = c$).

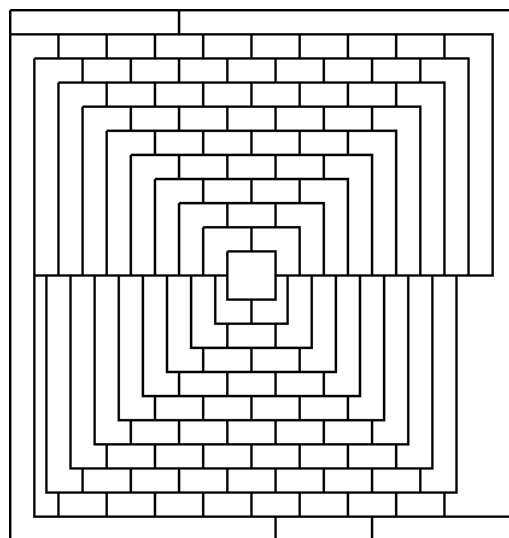
Příklad 7. Zakódujte problém setřídění trojice celých čísel do SAT.

Příklad 8. Věta o čtyřech barvách říká, že následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, že žádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najděte takové obarvení pomocí SAT solveru.

(a) Mapa krajů Česka



(b) Těžší instance



Domácí úkol (3 body). 1. Pomocí algoritmu implikačního grafu najděte všechny modely následující teorie:

$$T = \{p, \neg q \rightarrow \neg r, \neg q \rightarrow \neg s, r \rightarrow p, \neg s \rightarrow \neg p\}$$

2. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely následující teorie:

$$\begin{aligned} &(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge \\ &(\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e) \end{aligned}$$

3. Uvažme následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$$

$$\psi = s \rightarrow q$$

- Určete počet (až na ekvivalenci) výroků χ nad \mathbb{P} takových, že $\varphi \wedge \psi \models \chi$.
- Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad \mathbb{P} takových, že $T \models \varphi \wedge \psi$.
- Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) úplnou teorii T nad \mathbb{P} takovou, že $T \models \varphi \wedge \psi$.