

## NAIL062 V&P Logika: 8. cvičení

**Témata:** Struktury a podstruktury. Extenze teorií, extenze o definice. Definovatelnost ve struktuře.

**Příklad 1.** Uvažme  $\mathbb{Z}_4 = \langle \{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0 \rangle$  kde  $+$  je binární sčítání modulo 4 a  $-$  je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek  $+$  vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

- (a) Je  $\mathbb{Z}_4$  model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
- (b) Určete všechny podstruktury  $\mathbb{Z}_4 \langle a \rangle$  generované nějakým  $a \in \mathbb{Z}_4$ .
- (c) Obsahuje  $\mathbb{Z}_4$  ještě nějaké další podstruktury?
- (d) Je každá podstruktura  $\mathbb{Z}_4$  modelem teorie grup?
- (e) Je každá podstruktura  $\mathbb{Z}_4$  elementárně ekvivalentní  $\mathbb{Z}_4$ ?
- (f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy (tj. grupy, která splňuje  $x + y = y + x$ ) také komutativní grupa?

**Příklad 2.** Buď  $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

- (a) Existuje redukt  $\mathbb{Q}$ , který je modelem teorie grup?
- (b) Lze redukt  $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$  rozšířit na model teorie grup?
- (c) Obsahuje  $\mathbb{Q}$  podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní  $\mathbb{Q}$ ?
- (d) Označme  $Th(\mathbb{Q})$  množinu všech sentencí pravdivých v  $\mathbb{Q}$ . Je  $Th(\mathbb{Q})$  úplná teorie?

**Příklad 3.** Mějme teorii  $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$  v jazyce  $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$  s rovností.

- (a) Je  $T$  (sémanticky) konzistentní?
- (b) Jsou všechny modely  $T$  elementárně ekvivalentní? Tj. je  $T$  (sémanticky) úplná?
- (c) Najděte všechny jednoduché úplné extenze  $T$ .
- (d) Je teorie  $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$  v jazyce  $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$  extenzí  $T$ ? Je  $T'$  jednoduchá extenze  $T$ ? Je  $T'$  konzervativní extenze  $T$ ?

**Příklad 4.** Buď  $T = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$  teorie v jazyce  $L = \langle E \rangle$  s rovností, kde  $E$  je binární relační symbol a  $\varphi$  vyjadřuje, že “existují právě čtyři prvky”.

1. Uvažme rozšíření  $L' = \langle E, c \rangle$  jazyka o nový konstantní symbol  $c$ . Určete počet (až na ekvivalenci) teorií  $T'$  v jazyce  $L'$ , které jsou extenzemi teorie  $T$ .
2. Má  $T$  nějakou *konzervativní* extenzi v jazyce  $L'$ ? Zdůvodněte.

**Příklad 5.** Nechť  $T = \{x = f(f(x)), \varphi, c_1 \neq c_2\}$  je teorie jazyka  $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$  s rovností, kde  $f$  je unární funkční symbol,  $c_1, c_2$  jsou konstantní symboly a axiom  $\varphi$  vyjadřuje, že “existují právě 3 prvky”.

1. Určete, kolik má teorie  $T$  navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich. (3b)

2. Necht  $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, f(c_1) \neq f(c_2)\}$  je teorie stejného jazyka, axiom  $\varphi$  je stejný jako výše. Je  $T'$  extenze  $T$ ? Je  $T$  extenze  $T'$ ? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (2b)

**Příklad 6.** Necht  $T_n = \{c_i \neq c_j | 1 \leq i < j \leq n\}$  označuje teorii jazyka  $L_n = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$  s rovností, kde  $c_1, \dots, c_n$  jsou konstantní symboly.

- Pro dané konečné  $n \geq 1$  určete počet modelů konečné velikosti  $k$  teorie  $T_n$  až na izomorfismus. Určete počet spočetných modelů teorie  $T_n$ .
- Pro jaké dvojice hodnot  $n$  a  $m$  je  $T_n$  extenzí  $T_m$ ? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.

**Příklad 7.** Bud  $T'$  extenze teorie  $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$  v jazyce  $L = \langle +, 0, \leq \rangle$  s rovností o definice  $<$  a unárního  $-$  s axiomy

$$\begin{aligned} -x = y &\leftrightarrow x + y = 0 \\ x < y &\leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y) \end{aligned}$$

Najděte formule v jazyce  $L$ , které jsou ekvivalentní v  $T'$  s následujícími formulemi.

- $x + (-x) = 0$
- $x + (-y) < x$
- $-(x + y) < -x$

**Příklad 8.** Mějme jazyk  $L = \langle F \rangle$  s rovností, kde  $F$  je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

- interval  $(0, \infty)$  v  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$  kde  $\cdot$  je násobení reálných čísel,
- množina  $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$  ve stejné struktuře  $\mathcal{A}$ ,
- množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin  $\mathbb{N}$  v  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$ ,
- množina všech prvočísel v  $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$ .

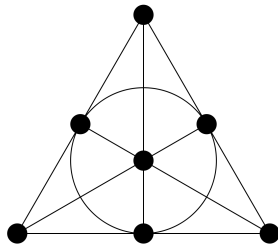
**Příklad 9.** Necht  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \text{abs}^A \rangle$  je struktura jazyka  $L = \langle \text{abs} \rangle$  s rovností, kde  $\text{abs}$  je unární funkční symbol a  $\text{abs}^A$  je funkce absolutní hodnoty v  $\mathbb{Z}$ .

- Nalezněte příklady (i) netriviální (t.j. jiné než  $\emptyset$  a  $\mathbb{Z}$ ) množiny definovatelné v  $\mathcal{A}$  bez parametrů a (ii) množiny nedefinovatelné v  $\mathcal{A}$  bez parametrů. Uveďte zdůvodnění.
- Necht  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, \text{id} \rangle$  je struktura stejného jazyka, kde  $\text{id}$  je identita. Je  $\text{Th}(\mathcal{A})$  extenzí  $\text{Th}(\mathcal{B})$ ? Uveďte zdůvodnění.

**Domácí úkol** (2 body). Necht  $T$  je teorie jazyka  $L = \langle T \rangle$  s rovností, kde  $T$  je ternární relační symbol, s axiomy:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &\rightarrow x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \\ T(x, y, z) &\rightarrow T(y, x, z) \wedge T(y, z, x) \wedge T(z, y, x) \wedge T(z, x, y) \wedge T(x, z, y) \\ x \neq y &\rightarrow (\exists z)(T(x, y, z) \wedge (\forall u)(T(x, y, u) \rightarrow u = z)) \end{aligned}$$

Modely teorie  $T$  jsou tzv. *Steinerovy systémy trojic*, v našem případě uspořádaných. Uvažme model  $\mathcal{F} = \langle \{1, 2, \dots, 7\}, T^F \rangle$  teorie  $T$  na obrázku (tzv. *Fanova rovina*), kde každá “přímka” reprezentuje trojici prvků, jež jsou v relaci  $T^F$  v libovolném pořadí, tedy  $T^F = \{(2, 4, 6), (6, 2, 4), \dots\}$ .



- (a) Nalezněte co nejmenší množinu parametrů  $A$ , která v modelu  $\mathcal{F}$  umožňuje definovat libovolný jeho prvek (formulí jazyka  $L$ ). Pro každý prvek napište příslušnou definující formuli (s dosazenými parametry). Zdůvodněte, proč je  $A$  nejmenší možná.
- (b) Jsou teorie  $T' = T \cup \{f(x, y) = z \leftrightarrow T(x, y, z)\}$  a  $T'' = T \cup \{f(x, y) = z \leftrightarrow T(x, y, z) \vee (x = y \wedge y = z)\}$ , kde  $f$  je nový binární funkční symbol, (korektními) extenzemi teorie  $T$  o definici? Uveďte zdůvodnění.