Čtvrtá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Čtvrtá přednáška

Program

- úvod do tablo metody
- tablo důkaz
- korektnost a úplnost

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 4.1-4.6 z Kapitoly 4

Kapitola 4: Metoda analytického tabla

4.1 Formální dokazovací systémy

Formální dokazovací systém

chceme zjistit, zda výrok platí [$T \models \varphi$], a to čistě syntakticky, aniž bychom se zabývali sémantikou: najít (formální) důkaz [$T \vdash \varphi$]

důkaz je konečný syntaktický objekt vycházející z φ a axiomů T

dokazování lze dělat algoritmicky (pokud máme algoritmický přístup k axiomům T, která může být nekonečná), a lze rychle algoritmicky ověřit, zda je daný objekt opravdu korektní důkaz

- korektnost: "co dokážu, platí" $T \vdash \varphi \;\Rightarrow\; T \models \varphi$
- úplnost: "dokážu vše, co platí" $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash \varphi$

(korektnost je nutná, úplnost ne: rychlý dokazovací systém může být praktický i když není úplný)

ukážeme si: *tablo metodu*, *hilbertovský kalkulus*, *rezoluční metodu*

nutný předpoklad: jazyk musí být spočetný (potom i T je spočetná)

4.2 Úvod do tablo metody

Tablo metoda neformálně

nejprve případ $T = \emptyset$, tedy dokazujeme, že φ platí *v logice*

tablo je strom představující hledání protipříkladu (modelu $v \not\models \varphi$), když všechny větve selžou, máme důkaz (sporem)

labely: položky $\mathrm{T}\psi, \mathrm{F}\psi$ (určují, zda na dané větvi platí výrok ψ)

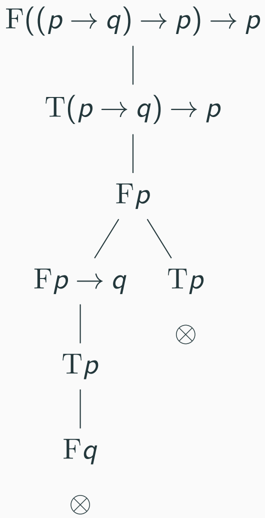
kořen $\mathrm{F}\varphi$, dále rozvíjíme redukcí položek (podle struktury výroků v nich), aby platil invariant:

Každý model, který se *shoduje* s položkou v kořeni (tj. ve kterém neplatí φ), se musí *shodovat* i s některou větví tabla (tj. splňovat všechny požadavky vyjádřené položkami na této větvi).

je-li na větvi $\mathrm{T}\psi$ a zároveň $\mathrm{F}\psi$, potom selhala (je sporná), pokud všechny větve selhaly, je tablo sporné, je to důkaz $T \vdash \varphi$

pokud nějaká větev neselhala a je dokončená (vše na ní zredukované), lze z ní zkonstruovat model, ve kterém φ neplatí

Příklad: tablo důkaz $((p \to q) \to p) \to p$



- důkaz sporem: v kořeni příznak F
- redukujeme položku tvaru $\mathrm{F}\varphi_1 \to \varphi_2$:
- pokud $v \not\models \varphi_1 \to \varphi_2$, nutně $v \models \varphi_1$ a zároveň $v \not\models p$
- proto na větev připojíme položky $\mathrm{T}(p \to q) \to p$ a $\mathrm{F}p$, invariant platí
- redukce položky $\mathrm{T}(p \to q) \to p$: model se shoduje s $\mathrm{F}(p \to q)$ nebo s $\mathrm{T}p$, rozvětvi!
- redukce $\mathrm{F}(p \to q)$: připoj $\mathrm{T}p$ a $\mathrm{F}q$
- všechny větve sporné, protipříklad neexistuje, tedy máme tablo důkaz, píšeme: $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$

Příklad: tablo pro $\mathrm{F}(\neg q \vee p) \rightarrow p$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathrm{F}(\neg q \vee p) \rightarrow p & \\
 & | & \\
 & \mathrm{T}\neg q \vee p & \\
 & | & \\
 & \mathrm{F}p & \\
 / & & \backslash \\
\mathrm{T}\neg q & & \mathrm{T}p \\
| & & \\
\mathrm{F}q & & \otimes \\
\checkmark & &
\end{array}
$$

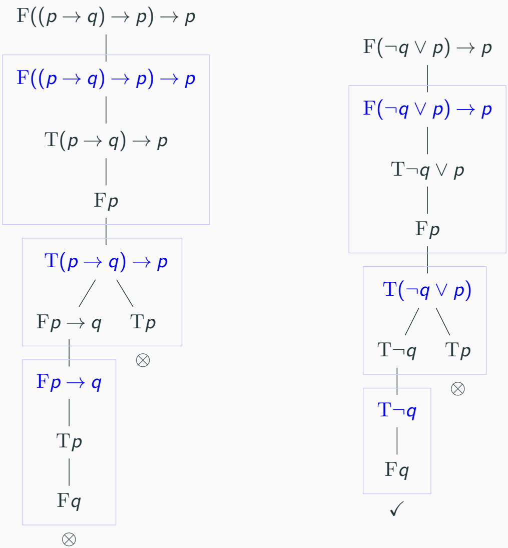
- tablo je dokončené, ale není sporné
- tedy nejde o důkaz
- levá větev dává protipříklad: model $v = (0, 0)$ ve kterém výrok neplatí
- invariant říká, že existuje-li protipříklad, shoduje se s některou větví
- tato větev nemůže být sporná
- tak se dokáže korektnost tablo metody

Poznámky

- Jak redukujeme položky?
  - Připojíme příslušné atomické tablo (viz následující slide) na konec všech bezesporných větví procházejících vrcholem.
- Co když dokazujeme v nějaké teorii T?
  - Připojíme položky $\mathrm{T}\alpha$ pro (všechny) axiomy $\alpha \in T$.
- Co když je T nekonečná?
  - Tablo může být nekonečné.
  - Ale vyjde-li sporné, lze sestrojit jiné, které je konečné a také sporné. ("Existuje-li důkaz, existuje konečný důkaz.")

Atomická tabla

	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
True	$\begin{array}{c} \mathrm{T}\neg\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{T}\varphi\wedge\psi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\vee\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\rightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{F}\varphi & \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\leftrightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{F}\varphi \\ \vert & \vert \\ \mathrm{T}\psi & \mathrm{F}\psi \end{array}$
False	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\neg\varphi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}\varphi\wedge\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{F}\varphi & \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\varphi\vee\psi \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\varphi\rightarrow\psi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}\varphi\leftrightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{F}\varphi \\ \vert & \vert \\ \mathrm{F}\psi & \mathrm{T}\psi \end{array}$



konvence: kořeny atomických tabel (modře) nezakreslujeme

O stromech

- strom je $T \neq \emptyset$ s částečným uspořádáním $<_T$, které má nejmenší prvek (kořen) a množina předků libovolného vrcholu je dobře uspořádaná (každá její neprázdná podmnožina má nejmenší prvek, to zakáže nekonečné klesající řetězce předků)
- větev je maximální lineárně uspořádaná podmnožina T.
- uspořádaný strom má navíc lineární uspořádání $<_L$ množiny synů každého vrcholu (říkáme mu pravolevé, $<_T$ je stromové)
- označkovaný strom má navíc funkci $\mathrm{label}\colon T \to \mathrm{Labels}$

Königovo lemma: Nekonečný, konečně větvící strom má nekonečnou větev.

4.3 Tablo důkaz

Formální definice tabla

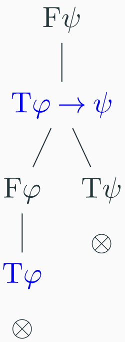
- položka je nápis $\mathrm{T}\varphi$ nebo $\mathrm{F}\varphi$, kde φ je nějaký výrok
- konečné tablo z teorie T je uspořádaný, položkami označkovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
  - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie T
  - pro libovolnou položku P na libovolné větvi V můžeme a konec větve V připojit atomické tablo pro položku P
  - na konec libovolné větve můžeme připojit položku $\mathrm{T}\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$
- tablo z teorie T je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde:
  - τ_i jsou konečná tabla z T
  - τ_0 je jednoprvkové tablo
  - τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku
- tablo pro položku P je tablo, které má položku P v kořeni

Dokončené a sporné tablo

- Tablo je sporné, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je sporná, pokud obsahuje položky $\mathrm{T}\psi$ a $\mathrm{F}\psi$ pro nějaký výrok ψ, jinak je bezesporná.
- Tablo je dokončené, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je dokončená, pokud je sporná, nebo
  - každá její položka je na této větvi redukovaná,
  - a zároveň obsahuje položku $\mathrm{T}\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je redukovaná na větvi V procházející touto položkou, pokud
  - je tvaru $\mathrm{T}p$ resp. $\mathrm{F}p$ pro nějaký prvovýrok $p \in \mathbb{P}$,
  - nebo při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V, tj. vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla (byť ho podle konvence nezakreslujeme).

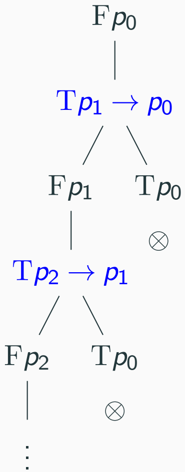
Tablo důkaz a tablo zamítnutí

- tablo důkaz výroku φ z teorie T je sporné tablo z teorie T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni
- pokud existuje, je φ (tablo) dokazatelný z T, píšeme $T \vdash \varphi$
- podobně, tablo zamítnutí je sporné tablo s $\mathrm{T}\varphi$ v kořeni
- existuje-li, je φ (tablo) zamítnutelný z T, tj. platí $T \vdash \neg\varphi$



- tablo důkaz výroku ψ z $T = \{\varphi, \varphi \to \psi\}$
- položky vycházející z axiomů jsou modře
- ukázali jsme tedy $T \vdash \psi$
- φ, ψ jsou libovolné pevně dané výroky
- tím jsme dokázali tzv. větu o dedukci

Příklad: dokončené tablo, které není sporné



- dokončené tablo pro výrok p_0 z teorie $T = \{p_{n+1} \to p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- nejlevější větev je dokončená a bezesporná
- sestává z položek $\mathrm{T}p_{i+1} \to p_i$ a $\mathrm{F}p_i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$
- shoduje se s modelem $v = (0, 0, \dots)$, tj. $v : \mathbb{P} \to \{0, 1\}$ kde $v(p_i) = 0$ pro vš. i
- máme protipříklad ukazující, že $T \not\models p_0$

4.4 Konečnost a systematičnost důkazů

Konečnost a systematičnost důkazů

Dokážeme:

- existuje-li tablo důkaz, existuje i konečný tablo důkaz
- existuje algoritmus, který umí vždy zkonstruovat dokončené tablo, tzv. systematické tablo
- tento algoritmus tedy zkonstruuje tablo důkaz, pokud existuje

  (zde potřebujeme *korektnost* a *úplnost*, ty dokážeme později)

  (pokud tablo důkaz neexistuje, algoritmus se nemusí zastavit)

Dokončení tabla: v čem je problém?

Pro konečnou T je snadné zkonstruovat dokončené tablo:

- na začátku použijeme všechny axiomy
- při redukci položek se výroky v nich zkracují
- stačí nedělat zbytečné kroky

Pro nekonečnou T bychom ale mohli zkonstruovat nekonečné tablo, a přitom:

- nikdy nepoužít některý axiom, nebo
- nikdy se nedostat k redukci některé položky

Myšlenka systematického tabla: na všechny se dostane, střídáme

- přidání následujícího axiomu na všechny bezesporné větve (T je spočetná, axiomy libovolně očíslujeme)
- redukce následující položky (po úrovních, zleva doprava) na všech bezesporných větvích, které jí procházejí

Definice systematického tabla

Systematické tablo z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ pro položku R je tablo $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové tablo s položkou R, a pro každé $i \geq 0$:

- buď P nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející P
- nejprve definujeme τ_i' jako tablo vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející P
- pokud taková položka P neexistuje, potom $\tau_i' = \tau_i$
- tablo τ_{i+1} vznikne z τ_i' připojením $\mathrm{T}\alpha_{i+1}$ na každou bezespornou větev
- to v případě, že $i < |T|$, jinak (je-li T konečná a už jsme použili všechny axiomy) definujeme $\tau_{i+1} = \tau_i'$

Dokončenost systematického tabla

Lemma: Systematické tablo je dokončené.