

NAIL062 V&P Logika: 6. cvičení

Témata: Rezoluce ve výrokové logice. Aplikace věty o kompaktnosti. Hilbertův kalkulus.

Příklad 1. Označme jako φ výrok $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$. Ukažte, že φ je tautologie:

- Převedte $\neg\varphi$ do CNF a zapište výsledný výrok jako formuli S v množinové reprezentaci.
- Najděte rezoluční zamítnutí S .

Příklad 2. Najděte rezoluční zamítnutí následujících výroků:

- $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$
- $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$

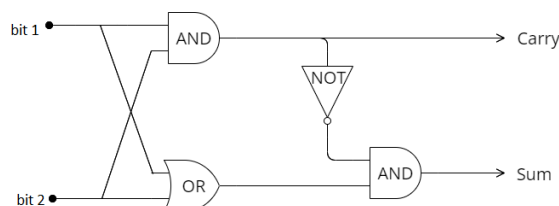
Příklad 3. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$ platí výrok s .

Příklad 4. Nechtě prvovýroky r, s, t reprezentují (po řadě), že “Radka / Sára / Tom je ve škole” a označme $\mathbb{P} = \{r, s, t\}$. Víme, že

- *Není-li Tom ve škole, není tam ani Sára.*
- *Radka bez Sáry do školy nechodí.*
- *Není-li Radka ve škole, je tam Tom.*

- Formalizujte naše znalosti jako teorii T v jazyce \mathbb{P} .
- Rezoluční metodou dokažte, že z T vyplývá, že *Tom je ve škole*: Napište formuli S v množinové reprezentaci, která je nespílitelná, právě když to platí, a najděte rezoluční zamítnutí S . Nakreslete rezoluční strom.
- Určete množinu modelů teorie T .

Příklad 5. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



- Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétně, vyjádřete jej jako výrokovou teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi, s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové proměnné znamenají po řadě “bit 1”, “bit 2”, “carry” a “sum”, a formule φ, ψ neobsahují proměnné c, s .
- Dokažte rezoluční metodou, že $T \models c \rightarrow \neg s$.

Příklad 6. Máme k dispozici MgO , H_2 , O_2 , a C , a můžeme provádět následující reakce:

- $\text{MgO} + \text{H}_2 \rightarrow \text{Mg} + \text{H}_2\text{O}$
- $\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$

- $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{CO}_3$

- (a) Reprezentujte naše možnosti výrokem (nad vhodně zvoleným jazykem) a převedte ho do množinové reprezentace.
- (b) Pomocí rezoluce dokažte, že můžeme získat H_2CO_3 . Lze najít LI-důkaz téhož?

Příklad 7. Celá čísla postihla záhadná nemoc šířící se (v diskrétních krocích) dle následujících pravidel (platících pro všechna čísla ve všech krocích).

- (i) *Zdravé číslo onemocní, právě když je právě jedno číslo nemocné (v předchozím čase).*
- (ii) *Nemocné číslo se uzdraví, právě když je předchozí číslo nemocné (v předchozím čase).*
- (iii) *V čase 0 bylo nemocné číslo 0, ostatní čísla byla zdravá.*
- (a) Napište teorie T_1, T_2, T_3 vyjadřující (po řadě) tvrzení (i), (ii), (iii) nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p_i^t \mid i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}_0\}$, kde prvovýrok p_i^t vyjadřuje, že “číslo i je v čase t nemocné.”
- (b) Převedte axiomy z T_1, T_2, T_3 do CNF a napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nespílitelná, právě když $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \neg p_1^2$, tj.: “Číslo 1 je zdravé v čase 2.” (Stačí převést jen konkrétní axiomy z T_1, T_2, T_3 , ze kterých plyne $\neg p_1^2$, a do S uvést jen příslušné klauzule.)
- (c) Rezolucí dokažte, že S je nespílitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem.

Příklad 8. Najděte rezoluční uzávěry $\mathcal{R}(S)$ pro následující výroky S :

- (a) $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$
- (b) $\{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

Příklad 9. Zkonstruujte *strom dosazení* pro formuli $S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$.

Příklad 10. Dokažte podrobně, že je-li $S = \{C_1, C_2\}$ splnitelná a C je rezolventa C_1 a C_2 , potom je i C splnitelná.

Příklad 11. Dokažte pomocí věty o kompaktnosti a variant tvrzení pro konečné objekty:

- (a) Každý spočetný rovinný graf je obarvitelný čtyřmi barvami.
- (b) Každé spočetné částečné uspořádání lze rozšířit na úplné (lineární) uspořádání.

Příklad 12. V Hilbertově kalkulu dokažte pro libovolné formule následující vztahy:

- (a) $\{\neg p\} \vdash_H p \rightarrow q$
- (b) $\{\neg(\neg p)\} \vdash_H p$
- (c) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_H p \rightarrow r$

Příklad 13. Dokažte korektnost Hilbertova kalkulu:

- Dokažte, že logické axiomy jsou tautologie.
- Dokažte, že modus ponens je korektní, tj. když $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \rightarrow \psi$, tak $T \models \psi$.
- Ukažte, že $T \vdash_H \varphi$ implikuje $T \models \varphi$.

Příklad 14. Vyslovte a dokažte větu o dedukci pro Hilbertův kalkul.

Domácí úkol. Tentokrát žádný není. Místo domácího úkolu se připravte na zápočtový test: procvičte rezoluční metodu a vyřešte vzorový test (na webu).