

NAIL062 V&P Logika: Druhý domácí úkol

Termín odevzdání: 18. 12. v 10:40.

Celkem 10 bodů. Řešení odevzdejte v papírové podobě na cvičení nebo, pokud nebudete moci přijít, emailem před začátkem cvičení. Řešení musí být rozumně čitelné, a v případě odevzdání emailem musí být v jediném PDF souboru a mít bílé pozadí. Je zakázáno o úkolech až do termínu odevzdání jakýmkoliv způsobem komunikovat s kýmkoliv kromě mne. Řešení musí být 100% vaší vlastní prací, a je vaší povinností zajistit, že nikdo nebude mít přístup k vašemu řešení.

Poznámka: Používáte-li tablo metodu, musí řešení obsahovat tablo korektně sestrojené přesně podle definice: nedělejte žádné zkratky, nevynechávejte vrcholy nad rámec konvence z přednášky, apod. Podobně, používáte-li rezoluční metodu, musí řešení obsahovat korektní rezoluční strom. (Rezoluční důkaz zapisovat nemusíte.)

Úkol neobsahuje rezoluci v predikátové logice, protože ji teprve budeme cvičit. V zápočtovém testu se ale velmi pravděpodobně vyskytne.

Příklad 1 (4 body). Uvažte následující tvrzení:

- (i) *Každý docent napsal alespoň jednu učebnici.*
 - (ii) *Každou učebnici napsal nějaký docent.*
 - (iii) *U každého docenta někdo studuje.*
 - (iv) *Každý, kdo studuje u nějakého docenta, přečetl všechny učebnice od tohoto docenta.*
 - (v) *Každou učebnici někdo přečetl.*
- (a) Formalizujte tvrzení (i)–(v) po řadě jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v predikátové logice v jazyce $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$ bez rovnosti, kde N, S, P jsou binární relační symboly ($N(x, y)$ znamená “ x napsal y ”, $S(x, y)$ znamená “ x studuje u y ”, $P(x, y)$ znamená “ x přečetl y ”) a D, U jsou unární relační symboly (“být docentem”, “být učebnicí”). (2b)
- (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni. (3b)
- (c) Je sentence φ_5 pravdivá v teorii T ? Je lživá v T ? Je nezávislá v T ? Zdůvodněte. (1b)
- (d) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Zdůvodněte. (2b)
- (e) Uvažme teorii $T' = T \cup \{D(x), S(x, y), P(x, y)\}$. Kolik má teorie T' dvouprvkových modelů (až na izomorfismus)? Zdůvodněte. (2b)

Příklad 2 (3 body). Známe následující informace o zadávání zakázek:

- (i) *Každý úředník, který je odpovědný za nějakou zakázku a vezme od nějaké společnosti úplatek, je kriminálník.*

- (ii) Zakázku vyhraje pouze společnost, která podplatí všechny úředníky odpovědné za tuto zakázku.
- (iii) Pan Lubor je úředník.
- (iv) Nějaká společnost vyhrála nějakou zakázku, za kterou je pan Lubor odpovědný.

Pomocí rezoluce dokažte, že: (v) Pan Lubor je kriminálník.

- (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle U, Z, S, K, P, V, O, l \rangle$ bez rovnosti, kde U, Z, S a K jsou unární relační symboly a $U(x), Z(x), S(x), K(x)$ znamenají (po řadě) “ x je úředník / zakázka / společnost / kriminálník”, P, V, O jsou binární relační symboly, kde $P(x, y), V(x, y), O(x, y)$ značí (po řadě) “ x podplatil y ”, “ x vyhrál y ” a “ x je odpovědný za y ” a l je konstanta označující pana Lubora.
- (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nebo jejich negací nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nespílitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$.
- (c) Převodem axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci.

Části (d) a (e) nebudou hodnoceny, zkuste si sami až procvičíme rezoluci:

- (d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
- (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T' , která je nespílitelná.

Příklad 3 (2 body). Necht $T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \vee R(y, x), \neg c = d, \varphi, \psi\}$ je teorie jazyka $L = \langle R, P, f, c, d \rangle$ s rovnostmi, kde R, P jsou binární relační symboly, f je binární funkční symbol, c, d jsou konstantní symboly a φ, ψ jsou následující formule:

$$\begin{aligned}\varphi : & P(x, y) \leftrightarrow R(x, y) \wedge \neg x = y \\ \psi : & P(x, y) \rightarrow P(x, f(x, y)) \wedge P(f(x, y), y)\end{aligned}$$

- (a) Najděte expanzi struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ (v jazyce $L' = \langle R \rangle$) do jazyka L na model teorie T .
- (b) Je sentence $(\forall x)R(c, x)$ pravdivá/lživá/nezávislá v T ? Zdůvodněte všechny tři odpovědi.
- (c) Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T nebo zdůvodněte, proč neexistují.
- (d) Necht $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$ je jazyka $L' = \langle R, f, c, d \rangle$. Je teorie T extenzí teorie T' ? Je teorie T konzervativní extenzí teorie T' ? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 4 (1 bod). Necht $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x, y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti. Najděte otevřenou teorii T' ekvisplnitelnou s T . Převeďte T' do CNF a výslednou formuli S запиšte v množinové reprezentaci.