NAIL062 V&P Logika: 8. cvičení

Témata: Struktury a podstruktury. Extenze teorií, extenze o definice. Definovatelné množiny.

Příklad 1. Uvažme $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0,1,2,3\}, +, -, 0\rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

(a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
(b) Určete všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ generované nějakým $a \in \mathbb{Z}_4$.
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ ještě nějaké další podstruktury?
(d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?
(e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}_4}$?
(f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy (tj. grupy, která splňuje $x + y = y + x$) také komutativní grupa?

Příklad 2. Buď $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

(a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
(b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ rozšířit na model teorie grup?
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?
(d) Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ úplná teorie?

Příklad 3. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ s rovností.

(a) Je T (sémanticky) konzistentní?
(b) Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T kompletní?
(c) Najděte všechny jednoduché úplné extenze T.
(d) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchá extenze T? Je T' konzervativní extenze T?

Příklad 4. Buď $T = \{\neg E(x,x), E(x,y) \to E(y,x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(x,z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E\rangle$ s rovností, kde E je binární relační symbol a φ vyjadřuje, že "existují právě čtyři prvky".

(a) Uvažme rozšíření $L' = \langle E, c\rangle$ jazyka o nový konstantní symbol c. Určete počet (až na ekvivalenci) teorií T' v jazyce L', které jsou extenzemi teorie T.
(b) Má T nějakou *konzervativní* extenzi v jazyce L'? Zdůvodněte.

Příklad 5. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi, c_1 \neq c_2\}$ je teorie jazyka $L = \langle f, c_1, c_2\rangle$ s rovností, kde f je unární funkční, c_1, c_2 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjadřuje, že "existují právě 3 prvky".

(a) Určete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich. *(3b)*
(b) Nechť $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, f(c_1) \neq f(c_2)\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T? Je T extenze T'? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

Příklad 6. Nechť $T_n = \{c_i \neq c_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ označuje teorii jazyka $L_n = \langle c_1, \ldots, c_n\rangle$ s rovností, kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou konstantní symboly.

(a) Pro dané konečné $n \geq 1$ určete počet modelů konečné velikosti k teorie T_n až na izomorfismus. Určete počet spočetných modelů teorie T_n.
(b) Pro jaké dvojice hodnot n a m je T_n extenzí T_m? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.

Příklad 7. Buď T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$\begin{aligned} -x = y &\quad\leftrightarrow\quad x + y = 0 \\ x < y &\quad\leftrightarrow\quad x \leq y \;\wedge\; \neg(x = y) \end{aligned}$$

Najděte formule v jazyce L, které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.

(a) $x + (-x) = 0$
(b) $x + (-y) < x$
(c) $-(x + y) < -x$

Příklad 8. Mějme jazyk $L = \langle F \rangle$ s rovností, kde F je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

(a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ kde $\cdot$ je násobení reálných čísel,
(b) množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,
(c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$,
(d) množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$.

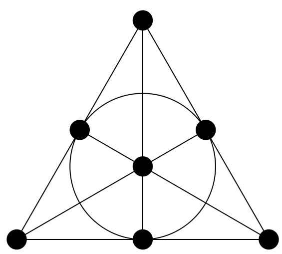
Příklad 9. Nechť $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \mathrm{abs}^A \rangle$ je struktura jazyka $L = \langle \mathrm{abs} \rangle$ s rovností, kde abs je unární funkční symbol a abs^A je funkce absolutní hodnoty v $\mathbb{Z}$.

(a) Nalezněte příklady (*i*) netriviální (t.j. jiné než $\emptyset$ a $\mathbb{Z}$) množiny definovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů a (*ii*) množiny nedefinovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů. Uveďte zdůvodnění.
(b) Nechť $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, \mathrm{id} \rangle$ je struktura stejného jazyka, kde id je identita. Je $Th(\mathcal{A})$ extenzí $Th(\mathcal{B})$? Uveďte zdůvodnění.

Domácí úkol (2 body)**.** Nechť T je teorie jazyka $L = \langle T \rangle$ s rovností, kde T je ternární relační symbol, s axiomy:

$$\begin{aligned} &T(x, y, z) \rightarrow x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \\ &T(x, y, z) \rightarrow T(y, x, z) \wedge T(y, z, x) \wedge T(z, y, x) \wedge T(z, x, y) \wedge T(x, z, y) \\ &\quad x \neq y \rightarrow (\exists z)(T(x, y, z) \wedge (\forall u)(T(x, y, u) \rightarrow u = z)) \end{aligned}$$

Modely teorie T jsou tzv. *Steinerovy systémy trojic*, v našem případě uspořádaných. Uvažme model $\mathcal{F} = \langle \{1, 2, \ldots, 7\}, T^F \rangle$ teorie T na obrázku (tzv. *Fanova rovina*), kde každá "přímka" reprezentuje trojici prvků, jež jsou v relaci T^F v libovolném pořadí, tedy $T^F = \{(2, 4, 6), (6, 2, 4), \ldots\}$.



(a) Nalezněte co nejmenší množinu parametrů A, která v modelu $\mathcal{F}$ umožňuje definovat libovolný jeho prvek (formulí jazyka L). Pro každý prvek napište příslušnou definující formuli (s dosazenými parametry). Zdůvodněte, proč je A nejmenší možná.
(b) Jsou teorie $T' = T \cup \{f(x, y) = z \leftrightarrow T(x, y, z)\}$ a $T'' = T \cup \{f(x, y) = z \leftrightarrow T(x, y, z) \vee (x = y \wedge y = z)\}$, kde f je nový binární funkční symbol, (korektními) extenzemi teorie T o definici? Uveďte zdůvodnění.