

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- zná potřebné pojmy z tablo metody (položka, tablo, tablo důkaz/zamítnutí, dokončená/sporná větev, kanonický model), umí je formálně definovat, uvést příklady
- zná všechna atomická tabla, a umí vytvořit vhodná atomická tabla pro libovolnou logickou spojku
- umí sestrojit dokončené tablo pro danou položku z dané (i nekonečné) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokončenou bezespornou větev tabla
- umí aplikovat tablo metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- zná větu o kompaktnosti, umí ji aplikovat

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

Příklad 1. Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: *“Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad.”*
- Na truhle B je nápis: *“V truhle A je smrtonosná past.”*

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

- Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii T nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných \mathbb{P} . (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v \mathbb{P} .)
- Pokuste se sestrojit tablo důkazy, z teorie T , výroků o významu “Poklad je v truhle A” a “Poklad je v truhle B”.
- Je-li některé z těchto dokončených tabel bezesporné, sestrojte kanonický model pro některou z jeho bezesporných větví.
- Jaký závěr z toho můžeme učinit?

Řešení.

Příklad 2. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a) $T = \{p_{i+1} \rightarrow p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (b) $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí tablo metody najděte všechny modely T . Je každý model T kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla?

Řešení.

Příklad 3. Navrhněte vhodná atomická tabla pro logickou spojku \oplus (XOR) a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví.

Řešení.

Příklad 4. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že každé spočetné částečné uspořádání lze rozšířit na úplné (lineární) uspořádání.

DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Příklad 5. Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při výslechu bylo zjištěno následující:

- Alespoň jeden z vyslýchanych říká pravdu a alespoň jeden lže.*
- Adam říká: “Barbora nebo Cyril lžou”*
- Barbora říká: “Cyril lže”*
- Cyril říká: “Adam nebo Barbora lžou”*

- (a) Zapište tvrzení (i) až (iv) jako výroky φ_1 až φ_4 nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, přičemž a, b, c znamená (po řadě), že “Adam/Barbora/Cyril říká pravdu”.
- (b) Pomocí tablo metody dokažte, že z teorie $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$ plyne, že Adam říká pravdu.
- (c) Je teorie T ekvivalentní s teorií $T' = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$? Zdůvodněte.

Příklad 6. Pomocí tablo metody dokažte, že následující výroky jsou tautologie:

- (a) $(p \rightarrow (q \rightarrow q))$
 (b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$
 (c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
 (d) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Příklad 7. Pomocí tablo metody dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezespornou větev.

- (a) $\{\neg q, p \vee q\} \models p$
 (b) $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$
 (c) $\{p \rightarrow r, p \vee q, \neg s \rightarrow \neg q\} \models r \rightarrow s$

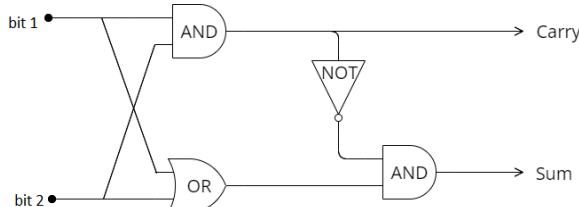
Příklad 8. Pomocí tablo metody určete všechny modely následujících teorií:

- (a) $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$
 (b) $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$
 (c) $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$

Příklad 9. Navrhněte vhodná atomická tabla a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví:

- pro Peirceovu spojku \downarrow (NOR),
- pro Shefferovu spojku \uparrow (NAND),
- pro \oplus (XOR),
- pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE).

Příklad 10. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



- (a) Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétně, vyjádřete jej jako teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi, s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové proměnné znamenají po řadě “bit 1”, “bit 2”, “carry” a “sum”, a formule φ, ψ neobsahují proměnné c, s .
- (b) Dokažte tablo metodou, že $T \models c \rightarrow \neg s$.

Příklad 11. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že každý spočetný rovinný graf je obarvitelný čtyřmi barvami. Můžete využít Větu o čtyřech barvách (pro konečné grafy).

K ZAMYŠLENÍ

Příklad 12. Dokažte přímo (transformací tabel) *větu o dedukci*, tj. že pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí:

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ právě když } T, \varphi \vdash \psi$$

Příklad 13. Mějme dvě neprázdné teorie A, B v témž jazyce. Nechť platí, že každý model teorie A splňuje alespoň jeden axiom teorie B . Ukažte, že existují konečné množiny axiomů $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq A$ a $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq B$ takové, že $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \rightarrow \beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$ je tautologie.