

NAIL062 V&P Logika: 6. cvičení

Témata: Ještě tablo metoda: aplikace a pokročilejší problémy. Ukázka rezoluční metody.

Příklad 1. Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: *“Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad.”*
- Na truhle B je nápis: *“V truhle A je smrtonosná past.”*

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

- (a) Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii T nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných \mathbb{P} . (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v \mathbb{P} .)
- (b) Pomocí tablo metody najděte všechny modely teorie T .
- (c) Může Aladin zvolit truhlu tak, aby si byl jistý, že v ní bude poklad?

Příklad 2. V prezidentských volbách kandidují pan A a pan B.

- Pan A říká: *“Budu zvolen nebo pan B lže.”*
 - Pan B říká: *“Pan A nebude zvolen nebo lžu.”*
 - Bude zvolen právě jeden z nich.
- (a) Formalizujte jako teorii T v jazyce $\mathbb{P} = \{z_a, z_b, p_a, p_b\}$, kde z_a resp. z_b znamená, že zvolen bude pan A resp. pan B, a p_a resp. p_b znamená, že A resp. B mluví pravdu.
 - (b) Sestrojte dokončená tabla z teorie T s položkami Fz_a resp. Fz_b v kořeni. Jaký z těchto tabel můžeme učinit závěr? [Tabla mohou být poměrně velká.]
 - (c) Uveďte příklad výroku nad \mathbb{P} , který je v teorii T nezávislý, anebo zdůvodněte, proč takový výrok neexistuje.
 - (d) Existuje teorie S nad $\{z_a, z_b\}$ taková, že T je konzervativní extenzí S ? Uveďte příklad, nebo zdůvodněte, proč ne.

Příklad 3. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a) $T = \{p_{i+1} \rightarrow p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (b) $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí tablo metody najděte všechny modely T , a to tak, že sestrojíte tablo z T s položkou $Tp_0 \rightarrow p_1$ v kořeni. Je každý model T kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla? Pokuste se sestrojit také *systematické* tablo.

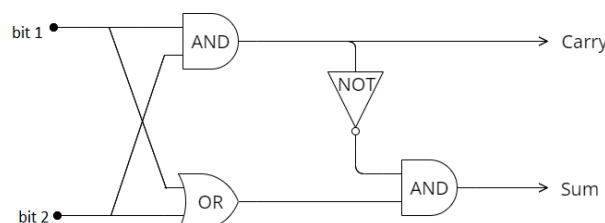
Příklad 4. Navrhněte vhodná atomická tabla a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví:

- pro Peirceovu spojku \downarrow (NOR),
- pro Shefferovu spojku \uparrow (NAND),
- pro \oplus (XOR),
- pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE).

Příklad 5. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. že pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ právě když } T, \varphi \vdash \psi.$$

Příklad 6. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



- Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétně, vyjádřete jej jako výrokovou teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi, s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové proměnné značejí po řadě “bit 1”, “bit 2”, “carry” a “sum”, a formule φ, ψ neobsahují proměnné c, s .
- Dokažte tablo metodou, že $T \models c \rightarrow \neg s$.
- Dokažte totéž rezoluční metodou (připomeňte si ji).

Příklad 7. Celá čísla postihla záhadná nemoc šířící se (v diskretních krocích) dle následujících pravidel (platících pro všechna čísla ve všech krocích).

- Zdravé číslo onemocní, právě když je právě jedno číslo nemocné (v předchozím čase).
 - Nemocné číslo se uzdraví, právě když je předchozí číslo nemocné (v předchozím čase).
 - V čase 0 bylo nemocné číslo 0, ostatní čísla byla zdravá.
- Napište teorie T_1, T_2, T_3 vyjadřující (po řadě) tvrzení (i), (ii), (iii) nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p_i^t \mid i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}_0\}$, kde prvovýrok p_i^t vyjadřuje, že “číslo i je v čase t nemocné.”
 - Převedte axiomy z T_1, T_2, T_3 do CNF a napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \neg p_1^2$, tj.: “Číslo 1 je zdravé v čase 2.” (Stačí převést jen konkrétní axiomy z T_1, T_2, T_3 , ze kterých plyne $\neg p_1^2$, a do S uvést jen příslušné klauzule.)
 - Rezolucí dokažte, že S je nesplnitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem.