# NAIL062 V&P Logika: 8. cvičení

**Témata:** Struktury a podstruktury. Extenze teorií, extenze o definice. Definovatelnost ve struktuře.

**Příklad 1.** Uvažme $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0,1,2,3\}, +, -, 0\rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

(a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ model teorie grup (tj. je to *grupa*)?

(b) Určete všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ generované nějakým $a \in \mathbb{Z}_4$.

(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ ještě nějaké další podstruktury?

(d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?

(e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}_4}$?

(f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy (tj. grupy, která splňuje $x + y = y + x$) také komutativní grupa?

**Příklad 2.** Buď $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

(a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?

(b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ rozšířit na model teorie grup?

(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?

(d) Označmě $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ úplná teorie?

**Příklad 3.** Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ s rovností.

(a) Je $T$ (sémanticky) konzistentní?

(b) Jsou všechny modely $T$ elementárně ekvivalentní? Tj. je $T$ (sémanticky) úplná?

(c) Najděte všechny jednoduché úplné extenze $T$.

(d) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí $T$? Je $T'$ jednoduchá extenze $T$? Je $T'$ konzervativní extenze $T$?

**Příklad 4.** Mějme jazyk $L = \langle F\rangle$ s rovností, kde $F$ je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

(a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot\rangle$ kde $\cdot$ je násobení reálných čísel,

(b) množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,

(c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup\rangle$,

(d) množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot\rangle$.

**Domácí úkol** (2 body)**.**