NAIL062 V&P Logika: 9. cvičení

Témata: Tablo metoda v predikátové logice, jazyky s rovností.

Příklad 1. Uvažme $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0\rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

(a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ model teorie grup (tj. je to *grupa*)?

(b) Určete všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ generované nějakým $a \in \mathbb{Z}_4$.

(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ ještě nějaké další podstruktury?

(d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?

(e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}_4}$?

(f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy (tj. grupy, která splňuje $x + y = y + x$) také komutativní grupa?

Příklad 2. Buď $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

(a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?

(b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ rozšířit na model teorie grup?

(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?

(d) Označmě $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ úplná teorie?

Příklad 3. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ s rovností.

(a) Je T (sémanticky) konzistentní?

(b) Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T kompletní?

(c) Najděte všechny jednoduché úplné extenze T.

(d) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchá extenze T? Je T' konzervativní extenze T?

Příklad 4. Buď $T = \{\neg E(x, x), E(x, y) \rightarrow E(y, x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E\rangle$ s rovností, kde E je binární relační symbol a φ vyjadřuje, že "existují právě čtyři prvky".

(a) Uvažme rozšíření $L' = \langle E, c\rangle$ jazyka o nový konstantní symbol c. Určete počet (až na ekvivalenci) teorií T' v jazyce L', které jsou extenzemi teorie T.

(b) Má T nějakou *konzervativní* extenzi v jazyce L'? Zdůvodněte.

Příklad 5. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi, c_1 \neq c_2\}$ je teorie jazyka $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční, c_1, c_2 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjadřuje, že "existují právě 3 prvky".

(a) Určete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich. *(3b)*

(b) Nechť $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, f(c_1) \neq f(c_2)\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T? Je T extenze T'? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

Příklad 6. Nechť $T_n = \{c_i \neq c_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ označuje teorii jazyka $L_n = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ s rovností, kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou konstantní symboly.

(a) Pro dané konečné $n \geq 1$ určete počet modelů konečné velikosti k teorie T_n až na izomorfismus. Určete počet spočetných modelů teorie T_n.

(b) Pro jaké dvojice hodnot n a m je T_n extenzí T_m? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.

Příklad 7. Buď T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x+y=0), (x+y=0) \wedge (x+z=0) \rightarrow y = z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$\begin{aligned} -x = y \quad &\leftrightarrow \quad x + y = 0 \\ x < y \quad &\leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y) \end{aligned}$$

Najděte formule v jazyce L, které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.

(a) $x + (-x) = 0$

(b) $x + (-y) < x$

(c) $-(x + y) < -x$

Příklad 8. Mějme jazyk $L = \langle F \rangle$ s rovností, kde F je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

(a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ kde $\cdot$ je násobení reálných čísel,

(b) množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,

(c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$,

(d) množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$.

Příklad 9. Nechť $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \mathrm{abs}^A \rangle$ je struktura jazyka $L = \langle \mathrm{abs} \rangle$ s rovností, kde abs je unární funkční symbol a abs^A je funkce absolutní hodnoty v $\mathbb{Z}$.

(a) Nalezněte příklady (i) netriviální (t.j. jiné než $\emptyset$ a $\mathbb{Z}$) množiny definovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů a (ii) množiny nedefinovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů.

(b) Mějme L-strukturu $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, \mathrm{id} \rangle$, kde id je identita. Je $Th(\mathcal{A})$ extenzí $Th(\mathcal{B})$?

Příklad 10. Předpokládejme, že:

- *Všichni viníci jsou lháři.*
- *Alespoň jeden z obviněných je také svědkem.*
- *Žádný svědek nelže.*

Dokažte tablo metodou, že: *Ne všichni obvinění jsou viníci.*

Příklad 11. Uvažte následující tvrzení:

(i) Nula je malé číslo.

(ii) Číslo je malé, právě když je blízko nuly.

(iii) Součet dvou malých čísel je malé číslo.

(iv) Je-li x blízko y, potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.

Chceme dokázat, že platí: *(v) Jsou-li x a y malá čísla, potom $f(x+y)$ je blízko $f(0)$.*

(a) Formalizujte tvrzení po řadě jako sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0 \rangle$ s rovností.

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.

(c) Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$ a zda platí $T \models M(f(0))$.

(d) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie T.

Příklad 12. Nechť $L(x,y)$ reprezentuje *"existuje let z x do y"* a $S(x,y)$ reprezentuje *"existuje spojení z x do y"*. Předpokládejme, že

- Z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x,y) \to L(y,x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x,y) \to S(x,y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x,y) \wedge L(y,z) \to S(x,z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Příklad 13. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že:

(a) $T^* \models x = y \ \rightarrow \ y = x$ (symetrie)

(b) $T^* \models (x = y \ \wedge \ y = z) \ \rightarrow \ x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, na (b) použijte (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

Příklad 14. Buď T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d\rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, f unární funkční symbol, a c, d konstantní symboly:

$$T = \{R(x,x), R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z), R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y, R(f(x),x)\}$$

Označme jako T' generální uzávěr T. Nechť φ a ψ jsou následující formule:

$$\varphi = R(c,d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d)$$
$$\psi = (\exists x)R(x, f(x))$$

(a) Sestrojte tablo důkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Pro zjednodušení můžete kromě axiomů rovnosti v tablu přímo používat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$, což je jejich důsledek.)

(b) Ukažte, že ψ není důsledek teorie T, tím že najdete model T, ve kterém ψ neplatí.

(c) Kolik kompletních jednoduchých extenzí (až na ekvivalenci) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Uveďte dvě.

(d) Nechť S je následující teorie v jazyce $L' = \langle R\rangle$ s rovností. Je T konzervativní extenzí S?

$$S = \{R(x,x), R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z), R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y\}$$

Příklad 15. Ukažme, že platí následující pravidla 'vytýkání' kvantifikátorů. Používáme je při převodu do tzv. *Prenexní normální formy.* V následujících příkladech jsou φ a ψ sentence nebo formule s volnou proměnnou x (což značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$). Najděte tablo důkazy dané formule. Vyzkoušejte několik z nich, zejména poslední dva.

(a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$,
(b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$,
(c) $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$,
(d) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,
(e) $(\varphi \vee (\forall x)\psi(x)) \rightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi(x))$ kde x není volná v φ,
(f) $(\varphi \wedge (\exists x)\psi(x)) \rightarrow (\exists x)(\varphi \wedge \psi(x))$ kde x není volná v φ.
(g) $(\exists x)(\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\exists x)\psi(x))$ kde x není volná v φ,
(h) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \rightarrow (\varphi \wedge (\exists x)\psi(x))$ kde x není volná v φ,
(i) $(\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$ kde x není volná v ψ,

(j) $((\exists x)\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x)(\varphi(x) \to \psi)$ kde x není volná v ψ.

Příklad 16. Dokažte syntakticky, pomocí transformací tabel:

(a) Větu o konstantách: Buď φ formule v jazyce L s volnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$ a T teorie v L. Označme L' extenzi L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a T' teorii T v L'. Potom platí: $T \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\varphi$ právě když $T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$

(b) Větu o dedukci: Pro každou teorii T (v uzavřené formě) a sentence φ, ψ platí: $T \vdash \varphi \to \psi$ právě když $T, \varphi \vdash \psi$

Domácí úkol (3 body)**.** Uvažte následující tvrzení:

(i) Každý docent napsal alespoň jednu učebnici.

(ii) Každou učebnici napsal nějaký docent.

(iii) U každého docenta někdo studuje.

(iv) Každý, kdo studuje u nějakého docenta, přečetl všechny učebnice od tohoto docenta.

(v) Každou učebnici někdo přečetl.

(a) Formalizujte tvrzení (i)–(v) po řadě jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v predikátové logice v jazyce $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$ bez rovnosti, kde N, S, P jsou binární relační symboly ($N(x, y)$ znamená "x napsal y", $S(x, y)$ znamená "x studuje u y", $P(x, y)$ znamená "x přečetl y") a D, U jsou unární relační symboly ("být docentem", "být učebnicí"). *(2b)*

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni. *(3b)*

(c) Je sentence φ_5 pravdivá v teorii T? Je lživá v T? Je nezávislá v T? Zdůvodněte. *(1b)*

(d) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Zdůvodněte. *(2b)*

(e) Uvažme teorii $T' = T \cup \{D(x), S(x, y), P(x, y)\}$. Kolik má teorie T' dvouprvkových modelů (až na izomorfismus)? Zdůvodněte. *(2b)*