NAIL062 V&P Logika: 9. sada příkladů – Příprava na rezoluci v PL

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- umí převádět formule do prenexní normální formy (PNF)
- rozumí pojmu Skolemova varianta, umí skolemizovat danou teorii
- umí převést danou otevřenou teorii do CNF, zapsat v množinové reprezentaci
- zná Herbrandovu větu, umí ji demonstrovat na příkladě, popsat Herbrandův model

Příklady na cvičení

Příklad 1. Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.
(a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x,y) \vee Q(x,y))$
(b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$
(c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$

Příklad 2. Převeďte na ekvisplnitelnou CNF formuli, zapište v množinové reprezentaci.
(a) $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$
(b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x,y)$
(c) $\neg(\exists x)((P(x) \to P(c)) \wedge (P(x) \to P(d)))$
(d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \wedge P(z,y) \to R(x,y))$

Příklad 3. Nechť $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x,y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y,z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti. Najděte otevřenou teorii T' ekvisplnitelnou s T. Převeďte T' do CNF a výslednou formuli S zapište v množinové reprezentaci.

Příklad 4. Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R\rangle$ s rovností, kde:

$$\varphi_1 = \quad (\exists y)R(y,x)$$
$$\varphi_2 = \quad (\exists z)(R(z,x) \wedge R(z,y) \wedge (\forall w)(R(w,x) \wedge R(w,y) \to R(w,z)))$$

(a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T.
(b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, R^A\rangle$, kde $(n,m) \in R^A$ právě když n dělí m. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ L-struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$.

Příklad 5. Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nesplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů (c, d jsou konstantní symboly v daném jazyce).
(a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x),y), \neg Q(x,d), P(c)\}$
(b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x),y), Q(x,d), P(c)\}$
(c) $T = \{P(x,f(x)), \neg P(x,g(x))\}$
(d) $T = \{P(x,f(x)), \neg P(x,g(x)), P(g(x),f(y)) \to P(x,y)\}$

Další příklady k procvičení

Příklad 6. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ obsahuje jeden axiom φ, který není otevřený: $x \neq 0 \ \to \ (\exists y)(x \cdot y = 1)$. Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models \ (x \neq 0 \ \wedge \ x \cdot y = 1 \ \wedge \ x \cdot z = 1) \ \to \ y = z$.
(a) Najděte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.
(b) Uvažme teorii T' vzniklou z T nahrazením φ za φ_S. Platí φ v T'?
(c) Lze každý model T *jednoznačně* rozšířit na model T'?

Nyní uvažme formuli $\psi = x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

(d) Platí v T axiomy existence a jednoznačnosti pro $\psi(x, y)$ a proměnnou y?
(e) Sestrojte extenzi T'' teorie T o definici symbolu f formulí ψ.
(f) Je T'' ekvivalentní teorii T'?
(g) Najděte L-formuli, která je v T''-ekvivalentní s formulí: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Příklad 7. Víme, že platí následující:

- *Je-li cihla na (jiné) cihle, potom není na zemi.*
- *Každá cihla je na (jiné) cihle nebo na zemi.*
- *Žádná cihla není na cihle, která by byla na (jiné) cihle.*

Chceme dokázat rezolucí následující tvrzení: *"Je-li cihla na (jiné) cihle, spodní cihla je na zemi."*. Sestrojte příslušnou CNF formuli S, a pokuste se najít i její rezoluční zamítnutí.

K zamyšlení

Příklad 8. Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, ověřte, že platí:
(a) $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
(b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$