NAIL062 V&P Logika: 4. sada příkladů

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- zná potřebné pojmy z tablo metody (položka, tablo, tablo důkaz/zamítnutí, dokončená/sporná větev, kanonický model), umí je formálně definovat, uvést příklady
- zná všechna atomická tabla, a umí vytvořit vhodná atomická tabla pro libovolnou logickou spojku
- umí sestrojit dokončené tablo pro danou položku z dané (i nekonečné) teorie
- umí popsat kanonický model pro danou dokončenou bezespornou větev tabla
- umí aplikovat tablo metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.)
- zná větu o kompaktnosti, umí ji aplikovat

Příklady na cvičení

Příklad 1. Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: *"Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad."*
- Na truhle B je nápis: *"V truhle A je smrtonosná past."*

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

(a) Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii T nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných $\mathbb{P}$. (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v $\mathbb{P}$.)
(b) Pokuste se sestrojit tablo důkazy, z teorie T, výroků o významu "Poklad je v truhle A" a "Poklad je v truhle B".
(c) Je-li některé z těchto dokončených tabel bezesporné, sestrojte kanonický model pro některou z jeho bezesporných větví.
(d) Jaký závěr z toho můžeme učinit?

Příklad 2. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a) $T = \{p_{i+1} \to p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (b) $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí tablo metody najděte všechny modely T. Je každý model T kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla?

Příklad 3. Navrhněte vhodná atomická tabla pro logickou spojku $\oplus$ (XOR) a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví.

Příklad 4. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že každé spočetné částečné uspořádání lze rozšířit na úplné (lineární) uspořádání.

Další příklady k procvičení

Příklad 5. Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při výslechu bylo zjištěno následující:

(i) *Alespoň jeden z vyslýchaných říká pravdu a alespoň jeden lže.*
(ii) *Adam říká:* "Barbora nebo Cyril lžou"
(iii) *Barbora říká:* "Cyril lže"
(iv) *Cyril říká:* "Adam nebo Barbora lžou"

(a) Zapište tvrzení (i) až (iv) jako výroky φ_1 až φ_4 nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, přičemž a, b, c znamená (po řadě), že *"Adam/Barbora/Cyril říká pravdu"*.
(b) Pomocí tablo metody dokažte, že z teorie $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$ plyne, že Adam říká pravdu.
(c) Je teorie T ekvivalentní s teorií $T' = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$? Zdůvodněte.

Příklad 6. Pomocí tablo metody dokažte, že následující výroky jsou tautologie:

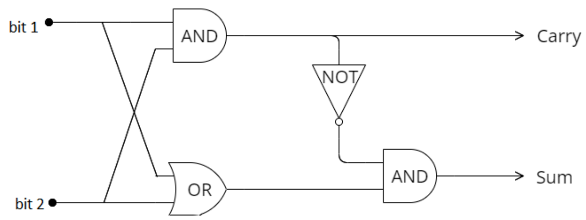
(a) $(p \to (q \to q))$
(b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$
(c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
(d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Příklad 7. Pomocí tablo metody dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezespornou větev.
(a) $\{\neg q,\ p \vee q\} \models p$
(b) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\} \models s$
(c) $\{p \to r,\ p \vee q,\ \neg s \to \neg q\} \models r \to s$

Příklad 8. Pomocí tablo metody určete všechny modely následujících teorií:
(a) $\{(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r)\}$
(b) $\{\neg q \to (\neg p \vee q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$
(c) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\}$

Příklad 9. Navrhněte vhodná atomická tabla a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví:
- pro Peirceovu spojku $\downarrow$ (NOR),
- pro Shefferovu spojku $\uparrow$ (NAND),
- pro $\oplus$ (XOR),
- pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE).

Příklad 10. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



(a) Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétně, vyjádřete jej jako teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi,\ s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové proměnné znamenají po řadě “bit 1”, “bit 2”, “carry” a “sum”, a formule φ, ψ neobsahují proměnné c, s.
(b) Dokažte tablo metodou, že $T \models c \to \neg s$.

Příklad 11. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že každý spočetný rovinný graf je obarvitelný čtyřmi barvami. Můžete využít Větu o čtyřech barvách (pro konečné grafy).

K zamyšlení

Příklad 12. Dokažte přímo (transformací tabel) *větu o dedukci*, tj. že pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí:

$$T \vdash \varphi \to \psi \quad \text{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi$$

Příklad 13. Mějme dvě neprázdné teorie A, B v témž jazyce. Nechť platí, že každý model teorie A splňuje alespoň jeden axiom teorie B. Ukažte, že existují konečné množiny axiomů $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq A$ a $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq B$ takové, že $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \to \beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$ je tautologie.