NAIL062 V&P Logika: 10. sada příkladů – Rezoluční metoda v PL

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu unifikace, umí provádět Unifikační algoritmus
- zná potřebné pojmy z rezoluční metody v predikátové logice (rezoluční pravidlo, rezolventa, rezoluční důkaz/zamítnutí, rezoluční strom), umí je formálně definovat, uvést příklady, vysvětlit rozdíly oproti výrokové logice,
- umí aplikovat rezoluční metodu k řešení daného problému (slovní úlohy, aj.), provést všechny potřebné kroky (převod do PNF, skolemizace, převod do CNF)
- umí sestrojit rezoluční zamítnutí dané (i nekonečné) CNF formule (existuje-li), a také nakreslit příslušný rezoluční strom, včetně uvedení použitých unifikací
- z rezolučního stromu umí sestrojit nesplnitelnou konjunkci základních instancí axiomů
- zná pojem LI-rezoluce, umí najít LI-zamítnutí dané teorie (existuje-li)
- seznámil se s vybranými pojmy z teorie modelů

Příklady na cvičení

Příklad 1. Víme, že platí následující:

- *Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe*
- *Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe.*

Formalizujte ve vhodném jazyce predikátové logiky a dokažte rezolucí, že: *Neexistují žádní holiči.*

Příklad 2. Mějme jazyk $L = \langle <, j, h, s\rangle$ bez rovností, kde j, h, q jsou konstantní symboly značící (po řadě) jablka, hrušky, švestky, dále $<$ je binarní relační symbol a $x < y$ značí, že *"ovoce y je lepší než ovoce x"*. Víme, že:

(i) *Relace "být lepší" je ostré částečné uspořádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní relace).*
(ii) *Hrušky jsou lepší než jablka.*

Chceme rezolucí dokázat následující tvrzení.

(iii)) Jsou-li švestky lepší než hrušky, nejsou jablka lepší než švestky.

Konkrétně:

(a) Tvrzení (i), (ii), (iii) vyjádřete otevřenými formulemi jazyka L.
(b) Pomocí předchozích formulí či jejich negací nalezněte otevřenou teorii T nad L axiomatizovanou klauzulemi, která je nesplnitelná, právě když z (i), (ii) vyplývá (iii). Napište T v množinové reprezentaci.
(c) Rezolucí dokažte, že T není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.*
(d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T, která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (c).*
(e) Je T zamítnutelná LI-rezolucí? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 3. Ukažte, že daná množina klauzulí je zamítnutelná (rezolucí). Popište zamítnutí pomocí rezolučního stromu. V každém kroku rezoluce napište použitou unifikaci a podtrhněte rezolvované literály.

$$
\begin{aligned}
S = \{&\{P(a,x,f(y)), P(a,z,f(h(b))), \neg Q(y,z)\},\\
&\{\neg Q(h(b),w), H(w,a)\},\\
&\{\neg P(a,w,f(h(b))), H(x,a)\},\\
&\{P(a,u,f(h(u))), H(u,a), Q(h(b),b)\},\\
&\{\neg H(v,a)\}\}
\end{aligned}
$$

Další příklady k procvičení

Příklad 4. Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:

(i) Každá ovce byla buď porozena jinou ovcí, nebo byla naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).
(ii) Žádná naklonovaná ovce neporodila.

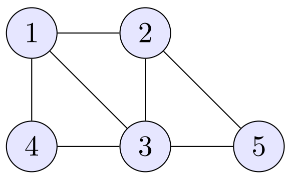
Chceme ukázat rezolucí, že pak: *(iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena.* Konkrétně:

(1) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi φ_1, φ_2, φ_3 v jazyce $L = \langle P, K\rangle$ bez rovnosti, kde P je binární relační symbol, K je unární relační symbol a $P(x,y)$, $K(x)$ značí, že *"ovce x porodila ovci y"* a *"ovce x byla naklonována"*.
(2) S využitím Skolemizace těchto formulí nebo jejich negací sestrojte množinu klauzulí S (může být ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$. Zapište ji v množinové reprezentaci.
(3) Najděte rezoluční zamítnutí S, znázorněte je rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.

Příklad 5. Nechť $T = \{\neg(\exists x)R(x), (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \to P(y,x)), (\forall x)((\exists y)(P(x,y) \wedge P(y,x)) \to R(x)), (\forall x)(\exists y)P(x,y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti.

(a) Skolemizací nalezněte k T otevřenou ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem).
(b) Převeďte T' na ekvivalentní teorii S v CNF. Zapište S v množinové reprezentaci.
(c) Nalezněte rezoluční zamítnutí teorie S. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
(d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů S, která je nesplnitelná.
(e) Má teorie T jednoduchou kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 6. Uvažme následující graf:



(a) Najděte všechny automorfismy.
(b) Které podmnožiny množiny vrcholů V jsou definovatelné? Uveďte definující formule. *(Nápověda: Využijte (a).)*
(c) Které binární relace na V jsou definovatelné?

Příklad 7. Nechť $T = \{\varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle U, c\rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, c je konstantní symbol a axiom φ vyjadřuje *"Existuje alespoň* 5 *prvků, pro které platí $U(x)$."*

(a) Nalezněte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T nebo zdůvodněte, proč neexistují.
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 8. Nechť $T = \{U(x) \to U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$ je teorie v jazyce $L = \langle U, f\rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, f je unární funkční symbol a φ vyjadřuje, že "existují maximálně 4 prvky".
(a) Je teorie T extenzí teorie $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$ v jazyce $L' = \langle U\rangle$? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte.

Příklad 9. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.
(a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu P takovou, že $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$.
(b) Je teorie T' otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

K zamyšlení

Příklad 10. Nechť T je extenze teorie $DeLO^-$ (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom $c \leq d$ v jazyce $L = \langle \leq, c, d\rangle$ s rovností, kde c, d jsou nové konstantní symboly.
(a) Jsou sentence $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$ a $(\forall x)(x \leq d)$ pravdivé / lživé / nezávislé v T? Uveďte zdůvodnění.
(b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T.

Příklad 11. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.
(a) Buď $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S\rangle$, kde $S(r) = r + 1$ pro $r \in \mathbb{R}$. Právě pro která $r \in \mathbb{R}$ je množina $\{r\}$ definovatelná v $\mathcal{R}$ z parametru 0?
(b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.
(c) Je extenze T' teorie T o axiom $S(x) = x$ ω-kategorická teorie? Je T' kompletní?
(d) Pro která $0 < n \in \mathbb{N}$ existuje L-struktura $\mathcal{B}$ velikosti n elementárně ekvivalentní s $\mathcal{R}$? Existuje spočetná struktura $\mathcal{B}$ elementárně ekvivalentní s $\mathcal{R}$?

Příklad 12. Známe následující informace o zadávání zakázek:
(i) Každý úředník, který je odpovědný za nějakou zakázku a vezme od nějaké společnosti úplatek, je kriminálník.
(ii) Zakázku vyhraje pouze společnost, která podplatí všechny úředníky odpovědné za tuto zakázku.
(iii) Pan Lubor je úředník.
(iv) Nějaká společnost vyhrála nějakou zakázku, za kterou je pan Lubor odpovědný.

Pomocí rezoluce dokažte, že: *(v) Pan Lubor je kriminálník.*
(a) Uvedená tvrzení vyjádřete <u>sentencemi</u> $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle U, Z, S, K, P, V, O, l\rangle$ bez rovnosti, kde U, Z, S a K jsou unární relační symboly a $U(x), Z(x), S(x), K(x)$ znamenají (po řadě) "x je úředník / zakázka / společnost / kriminálník", P, V, O jsou binární relační symboly, kde $P(x, y), V(x, y), O(x, y)$ značí (po řadě) "x podplatil y", "x vyhrál y" a "x je odpovědný za y" a l je konstanta označující pana Lubora.

(b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$.
(c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci.
(d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.
(e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T', která je nesplnitelná.