Desátá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Desátá přednáška

Program

- grounding, Herbrandova věta
- unifikace, unifikační algoritmus
- rezoluční pravidlo, rezoluční důkaz

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 8.3-8.5 z Kapitoly 8

8.3 Grounding

Grounding

- základní (ground) instance otevřené φ ve volných proměnných $x_1, \ldots, x_n$ je $\varphi(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$, kde vš. t_i jsou konstantní

  Herbrandova věta říká, že je-li otevřená teorie nesplnitelná, lze to doložit "na konkrétních prvcích": existuje konečně mnoho základních instancí axiomů, jejichž konjunkce je nesplnitelná

- např. pro $T = \{P(x, y) \vee R(x, y), \neg P(c, y), \neg R(x, f(x))\}$ substituujeme konstantní termy $\{x/c, y/f(c)\}$:

  $$(P(c, f(c)) \vee R(c, f(c))) \ \wedge \ \neg P(c, f(c)) \ \wedge \ \neg R(c, f(c))$$

- základní atomické sentence chápeme jako prvovýroky:

  $$(p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$$

- to už snadno zamítneme výrokovou rezolucí
- p_1 znamená "platí $P(c, f(c))$", p_2 znamená "platí $R(c, f(c))$"

Přímá redukce do výrokové logiky

Herbrandova věta + korektnost a úplnost výrokové rezoluce dává následující, neefektivní postup (S' je moc velká, i nekonečná):

1. $S \rightsquigarrow S'$ = množina všech základních instancí klauzulí z S
2. atomické sentence v S' chápeme jako prvovýroky
3. S nesplnitelná $\Leftrightarrow$ S' zamítnutelná 'na úrovni výrokové logiky'

Např. pro $S = \{\{P(x,y), R(x,y)\}, \{\neg P(c,y)\}, \{\neg R(x, f(x))\}\}$

$$S' = \{\{P(c,c), R(c,c)\}, \{P(c,f(c)), R(c,f(c))\}, \{P(f(c),c), R(f(c),c)\}, \dots,$$
$$\{\neg P(c,c)\}, \{\neg P(c,f(c))\}, \{\neg P(c,f(f(c)))\}, \{\neg P(c,f(f(f(c))))\}, \dots,$$
$$\{\neg R(c,f(c))\}, \{\neg R(f(c),f(f(c)))\}, \{\neg R(f(f(c)),f(f(f(c))))\}, \dots\}$$

S' je nesplnitelná obsahuje konečnou nesplnitelnou podmnožinu:

$$\{\{P(c,f(c)), R(c,f(c))\}, \{\neg P(c,f(c))\}, \{\neg R(c,f(c))\}\} \vdash_R \square$$

Efektivnější je hledat vhodné základní instance unifikací [za chvíli]

Herbrandův model

Mějme jazyk $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ s alespoň jedním konstantním symbolem. L-struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ je Herbrandův model, jestliže:

- A je množina všech konst. L-termů (Herbrandovo univerzum)
- pro každý n-ární $f \in \mathcal{F}$ a (konstantní) "t_1", …, "t_n" $\in A$:

$$f^{\mathcal{A}}(\text{“}t_1\text{”}, \ldots, \text{“}t_n\text{”}) = \text{“}f(t_1, \ldots, t_n)\text{”}$$

- speciálně, pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ je $c^{\mathcal{A}} = \text{“}c\text{”}$
- na relační symboly neklademe podmínky

Např. $L = \langle P, f, c \rangle$ (P unární rel., f binární funkční, c konstantní)
Herbrandův model je každá struktura $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle$, kde

- $A = \{\text{“}c\text{”}, \text{“}f(c,c)\text{”}, \text{“}f(c,f(c,c))\text{”}, \text{“}f(f(c,c),c)\text{”} \ldots\}$
- $c^{\mathcal{A}} = \text{“}c\text{”}$
- $f^{\mathcal{A}}(\text{“}c\text{”}, \text{“}c\text{”}) = \text{“}f(c,c)\text{”}$, $f^{\mathcal{A}}(\text{“}c\text{”}, \text{“}f(c,c)\text{”}) = \text{“}f(c,f(c,c))\text{”}$, $f^{\mathcal{A}}(\text{“}f(c,c)\text{”}, \text{“}c\text{”}) = \text{“}f(f(c,c),c)\text{”}$, atd.
- $P^{\mathcal{A}} \subseteq A$ může být libovolná

Herbrandova věta

Věta (Herbrandova): Je-li T otevřená, v jazyce bez rovnosti a s alespoň jedním konstantním symbolem, potom:

- buď má T Herbrandův model, nebo
- existuje konečně mnoho základních instancí axiomů T, jejichž konjunkce je nesplnitelná.

Důkaz: $T_{\text{ground}} =$ množina všech základních instancí axiomů T

Zkonstruujeme "systematické tablo" τ z T_{ground} s $\mathrm{F}\bot$ v kořeni, ale z jazyka L, bez rozšíření o pomocné konstantní symboly na L_C. (Nepotřebujeme je, protože v T_{ground} nejsou kvantifikátory.)

Pokud má τ bezespornou větev, je "kanonický model" (opět bez pomocných symbolů) Herbrandovým modelem T.

Jinak je τ důkaz sporu, T_{ground} (a tedy i T) je nesplnitelná. Tablo τ je konečné, používá jen konečně mnoho $\alpha_{\text{ground}} \in T_{\text{ground}}$, jejich konjunkce už je nesplnitelná. $\square$

Poznámky

- konstatní symbol potřebujeme, aby existovaly vůbec nějaké konstantní termy (ale není-li v L žádný, můžeme ho přidat)
- Herbrandův model je podobný kanonickému, ale nepřidáváme pomocné symboly, a neříkáme nic o relacích
- je-li jazyk s rovností, najdeme Herbrandův model pro T^* (přidané axiomy rovnosti) a faktorizujeme podle $=^A$

Důsledky Herbrandovy věty

Důsledek: Je-li T otevřená v jazyce s konstantním symbolem, potom T má model, právě když má model teorie T_{ground}.

Důkaz: $\Rightarrow$ V modelu T platí i všechny základní instance axiomů. Je tedy i modelem T_{ground}.

$\Leftarrow$ Pokud T nemá model, podle Herbrandovy věty je nějaká konečná podmnožina teorie T_{ground} nesplnitelná. $\square$

Důsledek: Mějme otevřenou $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ v L s konst. symbolem. Potom existuje $m \in \mathbb{N}$ a konstantní L-termy t_{ij} ($i \in [m], j \in [n]$), že sentence $(\exists x_1) \dots (\exists x_n)\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je pravdivá, právě když je následující formule (výroková) tautologie:

$$\varphi(x_1/t_{11}, \dots, x_n/t_{1n}) \vee \dots \vee \varphi(x_1/t_{m1}, \dots, x_n/t_{mn})$$

Důkaz: Je pravdivá, právě když $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\neg\varphi$ neboli $\neg\varphi$ je nesplnitelná. Stačí aplikovat Herbrandovu větu na $T = \{\neg\varphi\}$. $\square$

8.4 Unifikace

8.5 Rezoluční metoda