Pátá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Pátá přednáška

Program

- věta o kompaktnosti
- hilbertovský kalkulus
- rezoluční metoda
- korektnost a úplnost rezoluce
- LI-rezoluce a Horn-SAT

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 4.7-4.8 z Kapitoly 4, Kapitola 5

4.7 Věta o kompaktnosti

Kompaktnost

Věta (O kompaktnosti): Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Důkaz: $\Rightarrow$ Snadné: Model T je zjevně modelem každé její části.

$\Leftarrow$ Nepřímo: buď T sporná, najdeme spornou konečnou $T' \subseteq T$.

Z úplnosti víme, že $T \vdash \bot$, tedy existuje i konečný tablo důkaz τ výroku $\bot$ z T. Konstrukce τ má konečně mnoho kroků, použili jsme tedy jen konečně mnoho axiomů z T. Definujme:

$$T' = \{\alpha \in T \mid \mathrm{T}\alpha \text{ je položka v tablu } \tau\}$$

Tedy τ je tablo jen z teorie T', máme tablo důkaz $T' \vdash \bot$, dle korektnosti je T' sporná. $\square$

Aplikace kompaktnosti

$$\text{vlastnost nekonečného objektu } \mathcal{O}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{vlastnost všech konečných podobjektů } \mathcal{O}'$$

- vlastnost popíšeme pomocí (nekonečné) teorie T
- ke každé konečné $T' \subseteq T$ sestrojíme konečný podobjekt $\mathcal{O}'$
- $\mathcal{O}'$ splňuje danou vlastnost
- to nám dává model T'
- dle Věty o kompaktnosti má i T model
- což ukazuje, že i nekonečný objekt $\mathcal{O}$ splňuje vlastnost

Věta o kompaktnosti má mnoho aplikací (několik z nich uvidíme později), následující příklad chápejte jako ‘šablonu’.

Aplikace kompaktnosti: příklad

Důsledek: Spočetně nekonečný graf je bipartitní, právě když je každý jeho konečný podgraf bipartitní.

Důkaz: $\Rightarrow$ Každý podgraf bipartitního grafu je bipartitní.

$\Leftarrow$ G je bipartitní, právě když je obarvitelný 2 barvami. Mějme jazyk $\mathbb{P} = \{p_v \mid v \in V(G)\}$ (kde p_v je barva v) a uvažme teorii

$$T = \{p_u \to \neg p_v \mid \{u, v\} \in E(G)\}$$

Zřejmě G je bipartitní, právě když T má model. Dle Věty o kompaktnosti stačí ukázat, že každá konečná $T' \subseteq T$ má model.

Buď G' podgraf G indukovaný na vrcholech, o kterých T' mluví:

$$V(G') = \{v \in V(G) \mid p_v \in \mathrm{Var}(T')\}$$

Protože je T' konečná, je G' také konečný, tedy je dle předpokladu 2-obarvitelný. Libovolné 2-obarvení $V(G')$ ale určuje model T'. $\square$

4.8 Hilbertovský kalkulus

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky $\neg$, $\rightarrow$
- schémata logických axiomů (φ, ψ, χ jsou libovolné výroky)
  (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  (ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  (iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- odvozovací pravidlo: tzv. *modus ponens*

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

- hilbertovský důkaz výroku φ z teorie T je *konečná* posloupnost výroků $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$, ve které pro každé $i \leq n$:
  - φ_i je logický axiom, nebo
  - φ_i je axiom teorie ($\varphi_i \in T$), nebo
  - φ_i lze odvodit z předchozích pomocí odvozovacího pravidla
- existuje-li hilbertovský důkaz, píšeme: $T \vdash_H \varphi$

Příklad hilbertovského důkazu

Ukažme, že pro teorii $T = \{\neg\varphi\}$ a pro libovolný výrok ψ platí:

$$T \vdash_H \varphi \rightarrow \psi$$

Hilbertovským důkazem je následující posloupnost výroků:

1. $\neg\varphi$ — *axiom teorie*
2. $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ — *logický axiom (i)*
3. $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ — *modus ponens na 1. a 2.*
4. $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ — *logický axiom (iii)*
5. $\varphi \rightarrow \psi$ — *modus ponens na 3. a 4.*

Korektnost a úplnost

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu ukážeme, že každý výrok φ_i z důkazu (tedy i $\varphi_n = \varphi$) platí v T.

- Je-li φ_i logický axiom, $T \models \varphi_i$ platí protože logické axiomy jsou tautologie.
- Je-li $\varphi_i \in T$, jistě platí $T \models \varphi_i$.
- Získáme-li φ_i pomocí modus ponens z φ_j a $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ (pro nějaká $j, k < i$), víme z indukčního předpokladu, že platí $T \models \varphi_j$ a $T \models \varphi_j \to \varphi_i$. Potom ale platí i $T \models \varphi_i$. (Modus ponens je korektní odvozovací pravidlo) $\square$

Věta (o úplnosti hilbertovského kalkulu): $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash_H \varphi$

Důkaz vynecháme.