

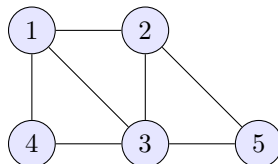
NAIL062 V&P Logika: 1. cvičení

Témata: Syntaxe výrokové logiky (strom výrazu, vytvořující strom, prefixový, infixový a postfixový zápis), sémantika výrokové logiky (Booleovské operátory, pravdivostní tabulka, Vennův diagram, tautologie, modely, důsledky). Univerzálnost logických spojek.

Příklad 1. Uvažme následující tvrzení:

- *Ten, kdo je dobrý běžec a má dobrou kondici, uběhne maraton.*
 - *Ten, kdo nemá štěstí a nemá dobrou kondici, neuběhne maraton.*
 - *Ten, kdo uběhne maraton, je dobrý běžec.*
 - *Budu-li mít štěstí, uběhnu maraton.*
 - *Mám dobrou kondici.*
- (a) Formalizujte tato tvrzení jako teorii T ve výrokové logice v jazyce $L = \langle b, k, m, s \rangle$, kde výrokové proměnné mají po řadě význam “být dobrý běžec”, “mít dobrou kondici”, “uběhnout maraton” a “mít štěstí”.
- (b) Najděte všechny modely teorie T . Pokuste se využít k tomu *tablo*.
- (c) Napište několik různých důsledků teorie T .
- (d) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii T .
- (e) Výrok je v *disjunktivní normální formě (DNF)*, je-li disjunkcí konjunkcí literálů. Najděte DNF teorii ekvivalentní teorii T .

Příklad 2. Uvažme *vrcholová pokrytí* následujícího grafu:



- (a) Formalizujte ve výrokové logice problém, zda graf na obrázku má nejvýše k -prvkové vrcholové pokrytí, pro pevně zvolené k . Označme výslednou teorii jako T_k .
- (b) Ukažte, že T_2 nemá žádné modely, tj. graf nemá 2-prvkové vrcholové pokrytí.
- (c) Najděte všechna 3-prvková vrcholová pokrytí.

Příklad 3. Sestrojte strom výrazu (a vytvořující strom), запиšte v prefixovém, infixovém a postfixovém formátu:

- (a) $(3 + 5) * (-2) + (2 * 3)$
- (b) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
- (c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$

Příklad 4. Sestrojte pravdivostní tabulky a Vennův diagram pro následující výrokové formule. Najděte jejich množiny modelů. Které z nich jsou tautologie?

- (a) $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$

(b) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

(c) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

(d) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Příklad 5. Uveďte příklad výroku v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, který

- (a) je pravdivý,
- (b) je sporný,
- (c) je nezávislý,
- (d) je ekvivalentní s, ale různý od, výroku $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$,
- (e) má za modely právě $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$.

Příklad 6. Ukažte, že \wedge a \vee nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že $\{\wedge, \vee\}$ není *univerzální* množina logických spojek.

Příklad 7. Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

- (a) $\{\downarrow\}$ kde \downarrow je Peirce arrow (NOR),
- (b) $\{\uparrow\}$ kde \uparrow je Sheffer stroke (NAND),
- (c) $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
- (d) $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.

Příklad 8. Uvažte ternární Booleovský operátor $\text{IFTE}(p, q, r)$ definovaný jako “if p then q else r ”.

- (a) Zkonstruuje pravdivostní tabulku.
- (b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory ($\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \dots$) lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.

Domácí úkol (2 body). *Před vypracováním si přečtěte pokyny popsané v podmínkách na zápočet!*

Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při jejich výslechu bylo zjištěno následující:

- Alespoň jeden z vyslýchanych říká pravdu a alespoň jeden lže.
- Adam říká: “Barbora nebo Cyril lžou”
- Barbora říká: “Cyril lže”
- Cyril říká: “Adam nebo Barbora lžou”

- (a) Vyjádřete naše znalosti jako výroky φ_1 až φ_4 nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, přičemž a, b, c znamená (po řadě), že “Adam/Barbora/Cyril říká pravdu”.
- (b) Najděte všechny modely teorie $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$.
- (c) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii T .
- (d) Ukažte (libovolnou metodou), že z teorie T plyne, že: Adam říká pravdu.