Jedenáctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Jedenáctá přednáška

Program

- korektnost rezoluce
- lifting lemma a úplnost rezoluce
- LI-rezoluce a Prolog
- elementární ekvivalence

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 8.6-8.7 z Kapitoly 8, Sekce 9.1 z Kapitoly 9

8.6 Korektnost a úplnost

Korektnost rezolučního kroku

Tvrzení: Mějme klauzule C_1, C_2 a jejich rezolventu C. Platí-li v nějaké struktuře $\mathcal{A}$ klauzule C_1 a C_2, potom v ní platí i C.

Důkaz: Buď $C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}$, $C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$, a $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$, kde $S\sigma = \{A_1\sigma\}$ (a σ je nejobecnější). Klauzule jsou otevřené formule, proto platí i jejich instance:

$$\mathcal{A} \models C_1\sigma \;\text{ a }\; \mathcal{A} \models C_2\sigma$$

Po aplikaci unifikace máme:

$$C_1\sigma = C_1'\sigma \cup \{A_1\sigma\}$$
$$C_2\sigma = C_2'\sigma \cup \{\neg A_1\sigma\}$$

Chceme ukázat, že $\mathcal{A} \models C[e]$ pro lib. ohodnocení e.

- Je-li $\mathcal{A} \models A_1\sigma[e]$, potom $\mathcal{A} \not\models \neg A_1\sigma[e]$ a musí $\mathcal{A} \models C_2'\sigma[e]$. Tedy i $\mathcal{A} \models C[e]$.
- Je-li $\mathcal{A} \not\models A_1\sigma[e]$, musí být $\mathcal{A} \models C_1'\sigma[e]$ a opět $\mathcal{A} \models C[e]$. $\square$

Korektnost rezoluce

Věta (O korektnosti rezoluce): Pokud je CNF formule S rezolucí zamítnutelná, potom je nesplnitelná.

Důkaz: Víme, že $S \vdash_R \square$, vezměme tedy nějaký rezoluční důkaz $\square$ z S. Kdyby existoval model $\mathcal{A} \models S$, díky korektnosti rezolučního pravidla bychom dokázali (indukcí podle délky důkazu) i $\mathcal{A} \models \square$, což ale není možné. $\square$

Lifting lemma

úplnost rezoluce dokážeme převedením na případ výrokové logiky: rezoluční důkaz ‘na úrovni VL’ je možné ‘zvednout’ na úroveň PL

Lifting lemma: Buďte C_1 a C_2 klauzule s disj. množ. proměnných, C_1^* a C_2^* jejich základní instance, C^* rezolventa C_1^* a C_2^*. Potom C_1 a C_2 mají rezolventu C takovou, že C^* je základní instance C.

(důkaz na příštím slidu)

Důsledek: Buď S CNF formule a označme S^* množinu všech jejích základních instancí. Pokud $S^* \vdash_R C^*$ pro nějakou základní klauzuli C^* (‘na úrovni VL’), potom existuje klauzule C a základní substituce σ taková, že $C^* = C\sigma$ a $S \vdash_R C$ (‘na úrovni PL’).

Důkaz: Snadno z Lifting lemmatu indukcí dle délky důkazu. $\square$

Důkaz Lifting lemmatu

Nechť $C_1^* = C_1\tau_1$ a $C_2^* = C_2\tau_2$, τ_1 a τ_2 zákl. substituce nesdílející žádnou proměnnou. Najdeme rezolventu C, že $C^* = C\tau_1\tau_2$.

Buď C^* rezolventa C_1^* a C_2^* přes literál $P(t_1, \dots, t_k)$. Víme, že:

$C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \dots, A_n\}$, kde $\{A_1, \dots, A_n\}\tau_1 = \{P(t_1, \dots, t_k)\}$

$C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\}, \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\}\tau_2 = \{\neg P(t_1, \dots, t_k)\}$

Tedy $(\tau_1\tau_2)$ unifikuje $S = \{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$. Buď σ nejob. unifikace pro S z Unifikačního algoritmu. Zvolme $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$.

$C\tau_1\tau_2 = (C_1'\sigma \cup C_2'\sigma)\tau_1\tau_2 = C_1'\sigma\tau_1\tau_2 \cup C_2'\sigma\tau_1\tau_2 = C_1'\tau_1\tau_2 \cup C_2'\tau_1\tau_2$

$= C_1'\tau_1 \cup C_2'\tau_2 = (C_1 \setminus \{A_1, \dots, A_n\})\tau_1 \cup (C_2 \setminus \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\})\tau_2$

$= (C_1^* \setminus \{P(t_1, \dots, t_k)\}) \cup (C_2^* \setminus \{\neg P(t_1, \dots, t_k)\}) = C^*$

Zde $=$ plyne z vlastnosti ‘navíc’ Unif. algoritmu $(\tau_1\tau_2) = \sigma(\tau_1\tau_2)$, a $=$ z toho, že jde o základní substituce nesdílející proměnnou. □

Úplnost rezoluce

Věta (O úplnosti rezoluce): Je-li CNF formule S nesplnitelná, potom je zamítnutelná rezolucí.

Důkaz: Množina S^* všech základních instancí klauzulí z S je také nesplnitelná (důsledek Herbrandovy věty). Úplnost výrokové rezoluce dává $S^* \vdash_R \square$ ('na úrovni VL').

Z důsledku Lifting lemmatu dostáváme klauzuli C a základní substituci σ takové, že $C\sigma = \square$ a $S \vdash_R C$ ('na úrovni PL').

Ale protože prázdná klauzule $\square$ je instancí C, musí být $C = \square$. Tím jsme našli rezoluční zamítnutí $S \vdash_R \square$. $\square$

8.7 LI-rezoluce

ČÁST III – POKROČILÉ PARTIE

Kapitola 9: Teorie modelů

9.1 Elementární ekvivalence