

# Devátá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

---

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

## Program

- Löwenheim-Skolemova věta
- věta o kompaktnosti
- hilbertovský kalkulus.
- úvod do rezoluce v predikátové logice
- skolemizace

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 7.5-7.6 z Kapitoly 7, Sekce 8.1-8.2 z Kapitoly 8

## 7.5 Důsledky korektnosti a úplnosti

---

$$\vdash = \models$$

Syntaktickou analogií **důsledků** jsou **teorémy**:

$$\text{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$  právě když  $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit '**platnost**' pojmem '**dokazatelnost**'. Např:

- $T$  je **sporná**, je-li v ní dokazatelný spor (tj.  $T \vdash \perp$ )
- $T$  je **kompletní**, je-li pro každou sentenci buď  $T \vdash \varphi$  nebo  $T \vdash \neg\varphi$ , ale ne obojí (jinak by byla sporná)

**Věta (O dedukci):**  $T, \varphi \vdash \psi$  právě když  $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

**Důkaz:** Stačí dokázat:  $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \rightarrow \psi$ . To je snadné.  $\square$

# Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

**Věta (Löwenheim-Skolemova):** Je-li  $L$  spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná  $L$ -teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

**Důkaz:**  $\nV T$  není dokazatelný spor. Dokončené tablo z  $T$  s  $F \perp$  v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je  $L$ -redukt kanonického modelu pro tuto větev.  $\square$

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

**Věta (O kompaktnosti):** Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

**Důkaz:** Model teorie je modelem každé části. Naopak, pokud  $T$  nemá model, je sporná, tedy  $T \vdash \perp$ . Vezměme nějaký **konečný** tablo důkaz  $\perp$  z  $T$ . K jeho konstrukci stačí konečně mnoho axiomů  $T$ , ty tvoří konečnou podteorii  $T' \subseteq T$ , která nemá model.  $\square$

# Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je **standardní model** přirozených čísel
- **teorie struktury**  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ : všechny sentence **pravdivé** v  $\underline{\mathbb{N}}$
- **$n$ -tý numerál**: term  $\underline{n} = S(S(\cdots (S(0) \cdots)))$ , kde  $S$  je  $n$ -krát

Přidáme nový konstantní symbol  $c$  a vyjádříme, že je ostře větší než každý  $n$ -tý numerál:

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část  $T$  má model
- dle věty o kompaktnosti: i  $T$  má model
- říkáme mu **nestandardní model** (označme  $\mathcal{A}$ )
- platí v něm tytéž sentence, které platí ve standardním modelu
- ale zároveň obsahuje prvek  $c^{\mathcal{A}}$ , který je větší než každé  $n \in \mathbb{N}$  (tzn. větší než hodnota termu  $\underline{n}$  v nestandardním modelu  $\mathcal{A}$ )

## 7.6 Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

---

# Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

- používá jen  $\neg$  a  $\rightarrow$ , dokazuje lib. formule (nejen sentence)
  - **schémata log. axiomů** ( $\varphi, \psi, \chi$  formule,  $t$  term,  $x$  proměnná)
    - (i)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
    - (ii)  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
    - (iii)  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
    - (iv)  $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$  je-li  $t$  substituovatelný za  $x$  do  $\varphi$
    - (iiv)  $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$  není-li  $x$  volná ve  $\varphi$
- a navíc **axiomy rovnosti**, je-li jazyk s rovností

- **odvozovací pravidla:**

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{ (modus ponens)}$$

$$\frac{\varphi}{(\forall x)\varphi} \text{ (generalizace)}$$

- **hilbertovský důkaz** formule  $\varphi$  z  $T$  je **konečná** posloupnost  $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ , kde  $\varphi_i$  je **logický axiom** (vč. axiomů rovnosti), **axiom teorie**, nebo lze odvodit z předchozích pomocí pravidel
- existuje-li, píšeme  $T \vdash_H \varphi$



**Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

**Důkaz:** Indukcí dle délky důkazu: každá  $\varphi_i$  (vč.  $\varphi_n = \varphi$ ) platí v  $T$

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v  $T$
- axiomy z  $T$  jistě v  $T$  také platí
- modus ponens i generalizace jsou **korektní** inferenční pravidla:
  - je-li  $T \models \varphi$  a  $T \models \varphi \rightarrow \psi$ , potom  $T \models \psi$
  - je-li  $T \models \varphi$ , potom  $T \models (\forall x)\varphi$  □

**Věta (o úplnosti hilbertovského kalkulu):**  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$

Důkaz vynecháme.

# KAPITOLA 8: REZOLUCE V PREDIKÁTOVÉ LOGICE

---

## 8.1 Úvod

---

# Rezoluce v predikátové logice

$T \models \varphi? \rightsquigarrow T \cup \{\neg\varphi\} \rightsquigarrow$  CNF formule  $S \rightsquigarrow$  rezoluční zamítnutí

(pozor:  $\varphi$  musí být **sentence**!)

- **literál** je **atomická formule**  $R(t_1, \dots, t_n)$  nebo její negace
- **klauzule** je konečná množina literálů, **formule** množina klauzulí
- otevřenou formuli snadno převedeme do CNF, i univerzální kvantifikátor na začátku:  $(\forall x)(P(x) \vee \neg Q(x)) \rightsquigarrow \{P(x), \neg Q(x)\}$
- co s existenčními kvantifikátory? nové symboly pro ‘svědky’  
 $(\exists x)(P(x) \vee \neg Q(x)) \rightsquigarrow \{P(c), \neg Q(c)\}$  “**skolemizace**”
- není ekvivalentní, ale zachovává **[ne]splnitelnost**, to nám stačí
- rezoluční krok? literály nemusí být stejné, stačí **unifikovatelné**  
z klauzulí  $\{P(x), \neg Q(x)\}$  a  $\{Q(f(c))\}$  odvodíme  $\{P(f(c))\}$
- **unifikace** je substituce  $\{x/f(c)\}$

1.  $T = \{(\forall x)P(x), (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))\}, \varphi = (\exists x)Q(x)$

$$\neg\varphi = \neg(\exists x)Q(x) \sim (\forall x)\neg Q(x) \sim \neg Q(x)$$

$T \cup \{\neg\varphi\}$  je **ekvivalentní**  $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(x)\}\}$   
rezoluční zamítnutí: představte si  $p$  místo  $P(x)$ ,  $q$  místo  $Q(x)$

2.  $T = \{(\forall x)(\exists y)R(x, y), R(x, y) \rightarrow Q(x)\}, \varphi = (\exists x)Q(x)$

$$T \cup \{\neg\varphi\} \sim \{(\forall x)(\exists y)R(x, y), \neg R(x, y) \vee Q(x), \neg Q(x)\}$$

formuli  $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$  nahradíme  $R(x, f(x))$ , kde  $f$  je nový unární funkční symbol (reprezentuje **výběr svědka**):

$$S = \{\{R(x, f(x))\}, \{\neg R(x, y), Q(x)\}, \{\neg Q(x)\}\}$$

není ekvivalentní, ale **ekvisplnitelná** (zde obě nesplnitelné), vidíme po **substituci**  $y/f(x)$ , která **unifikuje**  $R(x, f(x))$  a  $R(x, y)$

$$S = \{\{R(x, f(x))\}, \{\neg R(x, y), Q(x)\}, \{\neg Q(x)\}\}$$

- na úrovni výrokové logiky (ground level):

$$\{\{r\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, p\}, \{\neg q\}\}$$

není nesplnitelné! musíme využít, že  $R(x, f(x))$  a  $R(x, y)$  mají 'podobnou strukturu' (jsou **unifikovatelné**)

- klauzule  $\{\neg R(x, y), Q(x)\}$  platí i po provedení libovolné substituce:  $\{\neg R(x/t), Q(x/t)\}$  je důsledek  $S$  pro lib. term  $t$
- představme si 'přidání' všech takto získaných klauzulí do  $S$ : potom už je na ground level nesplnitelné (ale nekonečné)
- **unifikační algoritmus** nám dá správnou substituci  $y/f(x)$
- zahrneme už do **rezolučního pravidla**, tedy **rezolventou** klauzulí  $\{P(c)\}$  a  $\{\neg P(x), Q(x)\}$  bude klauzule  $\{Q(c)\}$ .

- zahrnuje aplikaci unifikace
- lze vybrat **více literálů najednou**, ale musí být unifikovatelné:

např. z  $\{R(x, f(x)), R(g(y), z)\}, \{\neg R(g(c), u), P(u)\}$   
odvodíme rezolventu  $\{P(f(g(c)))\}$  za použití **unifikace**

$$\{x/g(c), y/c, z/f(g(c)), u/f(g(c))\}$$

- budeme vyžadovat disjunktní množiny proměnných v klauzulích; lze přejmenovat, proměnné mají **lokální význam**:

$$\models (\forall x)(\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\forall x)\psi \wedge (\forall x)\chi$$

## 8.2 Skolemizace

---



# Ekvisplnitelná otevřená teorie

- teorie  $T$  v jazyce  $L$  a  $T'$  v (ne nutně stejném) jazyce  $L'$  jsou **ekvisplnitelné**, pokud platí:  $T$  má model  $\Leftrightarrow T'$  má model
- zajímá nás jen [ne]splnitelnost (dokazujeme sporem)
- pro převod do CNF a rezoluci potřebujeme otevřené formule

**Cíl:** Ke každé teorii  $T$  sestrojíme **ekvisplnitelnou, otevřenou**  $T'$ .

1. převod do **prenexní normální formy** (vytkneme kvantifikátory)
2. nahradíme generálními uzávěry (**potřebujeme sentence!**)
3. nahradíme sentence **Skolemovými variantami** (odstranění  $\exists$ )
4. odstraníme zbývající  $\forall$ , máme otevřené formule

# Prenexní normální forma

Formule  $\varphi$  je v **prenexní normální formě (PNF)**, je-li následujícího tvaru, kde  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  a formule  $\varphi'$  je otevřená:

$$(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)\varphi'$$

- $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)$  je **kvantifikátorový prefix**,  $\varphi'$  **otevřené jádro**
- **univerzální** formule: v PNF a všechny kvantifikátory jsou  $\forall$

**Tvrzení:** Ke každé formuli  $\varphi$  existuje **ekvivalentní** formule v PNF.

**Důkaz:** nahrazujeme podformule ekvivalentními s cílem posunout kvantifikátory blíž kořeni  $\text{Tree}(\varphi)$ , dle pravidel z násl. Lemmatu.  $\square$

**Důsledek:** Existuje i ekvivalentní PNF **sentence** (generální uzávěr).

# Pravidla vytýkání kvantifikátorů

**Lemma:** Označme  $\overline{Q}$  opačný kvantifikátor ke  $Q$ . Jsou-li  $\varphi$  a  $\psi$  formule, kde  $x$  není volná v  $\psi$ , potom:

$$\begin{aligned}\neg(Qx)\varphi &\sim (\overline{Q}x)\neg\varphi \\ (Qx)\varphi \wedge \psi &\sim (Qx)(\varphi \wedge \psi) \\ (Qx)\varphi \vee \psi &\sim (Qx)(\varphi \vee \psi) \\ (Qx)\varphi \rightarrow \psi &\sim (\overline{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi) \\ \psi \rightarrow (Qx)\varphi &\sim (Qx)(\psi \rightarrow \varphi)\end{aligned}$$

**Důkaz:** snadno ověříme sémanticky, nebo tablo metodou (potom ale nejsou-li sentence, musíme nahradit generálními uzávěry)  $\square$

**Pozorování:** Nahradíme-li ve  $\varphi$  podformuli  $\psi$  ekvivalentní  $\psi'$ , je i výsledná formule  $\varphi'$  ekvivalentní  $\varphi$ . (Připomeňme:  $\varphi \sim \varphi'$  právě když mají stejné modely, tj.  $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$ )

## Převod do PNF: příklad

$$(\forall z)P(x, z) \wedge P(y, z) \rightarrow \neg(\exists x)P(x, y)$$

$$\sim (\forall u)P(x, u) \wedge P(y, z) \rightarrow (\forall x)\neg P(x, y)$$

$$\sim (\forall u)(P(x, u) \wedge P(y, z)) \rightarrow (\forall v)\neg P(v, y)$$

$$\sim (\exists u)(P(x, u) \wedge P(y, z) \rightarrow (\forall v)\neg P(v, y))$$

$$\sim (\exists u)(\forall v)(P(x, u) \wedge P(y, z) \rightarrow \neg P(v, y))$$

- v prvním kroku přejmenujeme  $z$  na  $u$ , nesmí být volná  $v$   $P(y, z)$
- podobně ve druhém kroku  $x$  na  $v$
- která pravidla používáme? sledujte postup na stromu formule
- chceme-li sentenci:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(P(x, u) \wedge P(y, z) \rightarrow \neg P(v, y))$$

1. proč se při vytýkání z **antecedentu** mění kvantifikátor?

$$\begin{aligned}(Qx)\varphi \rightarrow \psi &\sim \neg(Qx)\varphi \vee \psi \\ &\sim (\overline{Q}x)(\neg\varphi) \vee \psi \\ &\sim (\overline{Q}x)(\neg\varphi \vee \psi) \sim (\overline{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi)\end{aligned}$$

2. proč nesmí být  $x$  volná v  $\psi$ ? neplatilo by, např:

$$(\exists x)P(x) \wedge Q(x) \not\sim (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

musíme přejmenovat vázanou proměnnou  $x$  na novou:

$$(\exists x)P(x) \wedge Q(x) \sim (\exists y)P(y) \wedge Q(x) \sim (\exists y)(P(y) \wedge Q(x))$$

3. PNF není jednoznačná, lze vytýkat v různém pořadí; lepší je nejprve vytknout ty, **ze kterých se nakonec stanou existenční**:

$$(\exists y)(\forall x)\varphi(x, y) \text{ je lepší než } (\forall x)(\exists y)\varphi(x, y)$$

(protože “ $y$  nezávisí na  $x$ ”)

# Skolemova varianta

Je-li PNF sentence **univerzální**, tvaru  $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) \psi(x_1, \dots, x_n)$ , nahradíme otevřeným jádrem  $\psi$ . Jinak musíme provést **skolemizaci**:

Bud'  $\varphi$  **L-sentence** v PNF, všechny vázané proměnné různé. Nechť

- existenční kvantifikátory jsou  $(\exists y_1), \dots, (\exists y_n)$  (v tom pořadí)
- pro každé  $i$  jsou  $(\forall x_1), \dots, (\forall x_{n_i})$  právě všechny univerzální kvantifikátory předcházející  $(\exists y_i)$  v prefixu  $\varphi$

Bud'  $L'$  rozšíření  $L$  o **nové** funkční symboly  $f_1, \dots, f_n$ , kde  $f_i$  je  $n_i$ -ární.

**Skolemova varianta**  $\varphi$  je  $L'$ -sentence  $\varphi_S$  vzniklá **odstraněním**  $(\exists y_i)$  a substitucí termu  $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$  za  $y_i$ , postupně pro  $i = 1, \dots, n$ .

$$\varphi = (\exists y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y_2)(\forall x_3) R(y_1, x_1, x_2, y_2, x_3)$$

$$\varphi_S = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3) R(f_1, x_1, x_2, f_2(x_1, x_2), x_3)$$

- **musí být sentence!** pro  $(\exists y)E(x, y)$  ne  ~~$E(x, c)$~~  ale  $E(x, f(x))$
- **nové symboly!** (jedinou rolí je reprezentovat 'svědky' ve  $\varphi$ )

## Je to konzervativní extenze

**Lemma:** Bud'  $\varphi$   $L$ -sentence  $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\exists y)\psi$ ,  $f$  nový funkční symbol, a  $\varphi'$  sentence  $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\psi(y/f(x_1, \dots, x_n))$ . Potom:

- (i)  $L$ -redukt každého modelu  $\varphi'$  je modelem  $\varphi$ , a
- (ii) každý model  $\varphi$  lze expandovat na model  $\varphi'$ .

**Důkaz:** (i) Bud'  $\mathcal{A}'$  model  $\varphi'$ ,  $\mathcal{A}$  jeho  $L$ -redukt,  $e : \text{Var} \rightarrow \mathcal{A}$ .

$\mathcal{A} \models \varphi[e]$  platí neboť  $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$  pro  $a = (f(x_1, \dots, x_n))^{\mathcal{A}'}[e]$ .

(ii) Protože  $\mathcal{A} \models \varphi$ , existuje funkce  $f^A : A^n \rightarrow A$ , že pro každé ohodnocení  $e$  platí  $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$  pro  $a = f^A(e(x_1), \dots, e(x_n))$ .

To znamená, že expanze o funkci  $f^A$  splňuje  $\varphi'$ . □

- říká, že  $\{\varphi'\}$  je konzervativní extenze  $\{\varphi\}$ , opakovaná aplikace dává **Skolemovu větu** (výsledek skolemizace je otevřená konzervativní extenze, speciálně je ekvivalentní)
- expanze v (ii) není jednoznačná (na rozdíl od extenze o definici nového funkčního symbolu)

## Skolemova věta (shrnutí postupu)

**Věta:** Každá teorie má otevřenou konzervativní extenzi.

**Důkaz** Mějme  $L$ -teorii  $T$ . Axiomy nahradíme generálními uzávěry a převedeme do PNF, máme ekvivalentní  $L$ -teorii  $T'$ . V ní každý axiom nahradíme jeho Skolemovou variantou.

Tím získáme teorii  $T''$  v rozšířeném jazyce  $L'$ . Lemma říká:

- $L$ -redukt každého modelu  $T''$  je model  $T'$
- každý model  $T'$  lze expandovat do  $L'$  na model  $T''$

Neboli  $T''$  je konzervativní extenzí  $T'$ , tedy i  $T$ . Je axiomatizovaná univerzálními sentencemi, odstraníme kvantifikátorové prefixy (vezmeme jádra) a máme ekvivalentní otevřenou teorii  $T'''$ .  $\square$

**Důsledek:** Ke každé teorii můžeme pomocí skolemizace najít ekvivalentní otevřenou teorii. (A tu už snadno převedeme do CNF.)