

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- rozumí souvislosti výroků/teorií až na $[T]$ -ekvivalenci a množin modelů (tzv. algebra výroků), umí aplikovat v konkrétních příkladech
- umí zakódovat daný problém jako instanci problému SAT
- získal praktickou zkušenost s použitím SAT solveru
- rozumí algoritmu pro řešení 2-SAT pomocí implikačního grafu (včetně nalezení všech modelů), umí aplikovat na příkladech
- rozumí algoritmu pro řešení Horn-SAT pomocí jednotkové propagace, umí aplikovat na příkladech
- rozumí algoritmu DPLL a umí jej aplikovat na příkladech

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

Příklad 1. Necht $|\mathbb{P}| = n$ a mějme výrok $\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}}$ takový, že $|M(\varphi)| = k$. Určete počet až na ekvivalenci:

- výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$,
- teorií nad \mathbb{P} , ve kterých platí φ ,
- kompletních teorií nad \mathbb{P} , ve kterých platí φ ,
- teorií T nad \mathbb{P} takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná.

Uvažme navíc spornou teorii $\{\varphi, \psi\}$ kde $|M(\psi)| = p$. Spočítejte až na ekvivalenci:

- výroky χ takové, že $\varphi \vee \psi \models \chi$,
- teorie, ve kterých platí $\varphi \vee \psi$.

Řešení. (a) Podmínku vyjádříme pomocí množin modelů: $M(\varphi) \subseteq M(\psi)$ nebo $M(\psi) \subseteq M(\varphi)$.

Víme, že všech modelů je 2^n , a $|M(\varphi)| = k$. Chceme spočítat, kolik je možných množin $M(\psi)$. Podmínku $M(\varphi) \subseteq M(\psi)$ splňuje $2^{2^n - k}$ množin (tj. tolik je nadmnožin dané k -prvkové množiny uvnitř 2^n -prvkové množiny), podmínku $M(\psi) \subseteq M(\varphi)$ splňuje 2^k množin. Musíme ale být opatrní, abychom případ $M(\psi) = M(\varphi)$ nezapočítali dvakrát. Celkem máme $2^{2^n - k} + 2^k - 1$ možných množin modelů, tedy výroků ψ až na ekvivalenci.

- $T \models \varphi$ právě když $M(T) \subseteq M(\varphi)$, takových množin $M(T)$ je 2^k
- Navíc máme podmínku $|M(T)| = 1$, 1-prvkových podmnožin k -prvkové množiny je k .
- Protože $\{\varphi, \psi\}$ je sporná, víme, že $\emptyset = M(\varphi, \psi) = M(\varphi) \cap M(\psi)$. Počítáme množiny $M(\chi)$ takové, že $M(\varphi \vee \psi) \subseteq M(\chi)$. Díky Lindenbaum-Tarského algebře víme, že $M(\varphi \vee \psi) = M(\varphi) \cup M(\psi)$. Z disjunktnosti máme $|M(\varphi) \cup M(\psi)| = k + p$, snadno spočítáme, že množných množin modelů $M(\chi)$ je $2^{2^n - (k+p)}$.
- $M(T)$ musí být podmnožinou $(k + p)$ -prvkové $M(\varphi \vee \psi)$, je jich tedy 2^{k+p} .

Příklad 2. Sestrojte implikační graf následujícího 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení.

$$(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$$

Řešení. Sestrojíme implikační graf. Zjistíme, že má dvě komponenty silné souvislosti: $C = \{p_1, p_2, \neg p_3, p_4, \neg p_5\}$ a $\bar{C} = \{\neg p_1, \neg p_2, p_3, \neg p_4, p_5\}$, nevede mezi nimi žádná hrana. Po kontrakci komponent tedy máme dvouvrcholový graf \mathcal{G}^* bez hran, ten má dvě topologická uspořádání: (C, \bar{C}) a (\bar{C}, C) , která odpovídají modelům $(0, 0, 1, 0, 1)$ a $(1, 1, 0, 1, 0)$.

Příklad 3. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge \\ (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6)$$

Řešení. Provádíme postupně jednotkovou propagaci přes literály $p_1, p_2, p_3, \neg p_4$, zbývá výrok $\neg p_5 \vee \neg p_6$. Ten stačí ohodnotit tak, aby alespoň jedna z výrokových proměnných p_5, p_6 byla ohodnocená nulou. Modely výroku jsou tedy: $\{(1, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1, 1)\}$

Příklad 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, zda je následující CNF formule splnitelná:

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3)$$

Řešení. Výrok neobsahuje jednotkovou klauzuli ani literál s čistým výskytem, musíme tedy větvit, např. přes p_1 :

- $Z \varphi \wedge p_1$ dostáváme po jednotkové propagaci $\neg p_2 \wedge p_2 \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$, po jednotkové propagaci přes $\neg p_2$ dostáváme $\square \wedge \neg p_3$, což obsahuje prázdnou klauzuli \square , tedy je nespíitelné.
- $Z \varphi \wedge \neg p_1$ dostáváme po jednotkové propagaci $\neg p_2 \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_3$, po jednotkové propagaci přes $\neg p_2$ dostáváme $\neg p_3 \wedge p_3$, po jednotkové propagaci přes $\neg p_3$ dostáváme prázdnou klauzuli \square , tedy opět je nespíitelné.

V obou (všech) větvích výpočtu jsme dokázali nespíitelnost, výrok je tedy nespíitelný.

Příklad 5. Mějme daný orientovaný graf. Chceme zjistit, zda je acyklický, a pokud ano, nalézt nějaké jeho topologické uspořádání. Zakódujte tento problém do SAT.

Řešení. Řešení jen naznačíme. Jako jazyk zvolme $\mathbb{P} = \{p_{uv} \mid u, v \in V\}$, kde p_{uv} bude znamenat, že vrchol u je v topologickém uspořádání (ostrě) před v . To, že jde o ostré uspořádání, vyjádříme pomocí následujících axiomů:

- $\neg p_{vv}$ pro všechna $v \in V$
- $p_{uv} \rightarrow \neg p_{vu}$ pro všechna $u, v \in V$
- $p_{uv} \wedge p_{vw} \rightarrow p_{uw}$ pro všechna $u, v, w \in V$

Zbývá vyjádřit, že všechny grafové hrany vedou v topologickém uspořádání dopředu:

- p_{uv} pro všechny hrany $(u, v) \in E$

Nakonec axiomy výše převedeme do CNF, v množinovém zápisu dostáváme:

$$S = \{\{\neg p_{vv}\}, \{\neg p_{uv}, \neg p_{vu}\}, \{\neg p_{uv}, \neg p_{vw}, \neg p_{uw}\} \mid u, v, w \in V\} \cup \{\{p_{uv}\} \mid (u, v) \in E\}$$

DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Příklad 6. Uvažme následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$$

$$\psi = s \rightarrow q$$

- Určete počet (až na ekvivalenci) výroků χ nad \mathbb{P} takových, že $\varphi \wedge \psi \models \chi$.
- Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad \mathbb{P} takových, že $T \models \varphi \wedge \psi$.
- Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) kompletní teorii T nad \mathbb{P} takovou, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

Příklad 7. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge \\ (\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

Příklad 8. Řešte pomocí implikačního grafu jako v Příkladu 2, a také pomocí algoritmu DPLL jako v Příkladu 4:

- (a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$
 (b) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$

Příklad 9. Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ pro žádná $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n v CNF která je splnitelná, právě když to lze. Zkuste nejprve $n = 8$.

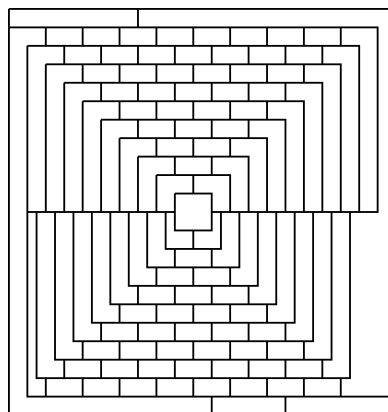
Zkuste si doma: Napište skript generující φ_n v DIMACS CNF formátu. Použijte SAT solver k nalezení nejmenšího n pro které takové obarvení neexistuje (tj. každé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici $a < b < c$ takovou, že $a + b = c$).

Příklad 10. Věta o čtyřech barvách říká, že následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, že žádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najděte takové obarvení pomocí SAT solveru.

(1) Mapa krajů Česka



(2) Těžší instance



K ZAMYŠLENÍ

Příklad 11. Pro danou formuli φ v CNF najděte a 3-CNF formuli φ' takovou, že φ' je splnitelná, právě když φ je splnitelná. Popište efektivní algoritmus konstrukce φ' je-li dána φ (tj. *redukcí* z problému SAT do problému 3-SAT).

Příklad 12. Zakódujte problém setřídění dané n -tice celých čísel do SAT.

Příklad 13. Zakódujte do SAT známou hádanku o farmáři, který potřebuje přepravit přes řeku vlka, kozu, a hlávku zelí.