Šestá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Šestá přednáška

Program

- úvod do predikátové logiky
- syntaxe a sémantika predikátové logiky
- vlastnosti teorií

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 6.1-6.5 z Kapitoly 6

ČÁST II – PREDIKÁTOVÁ LOGIKA

Kapitola 6: Syntaxe a sémantika predikátové logiky

6.1 Úvod

Predikátová logika neformálně

Výroková logika: popis světa pomocí výroků složených z prvovýroků (výrokových proměnných) – bitů informace

Predikátová logika [prvního řádu]:

- základní stavební kámen jsou proměnné reprezentující individua – nedělitelné objekty z nějaké množiny (např. přirozená čísla, vrcholy grafu, stavy mikroprocesoru)
- tato individua mají určité vlastnosti a vzájemné vztahy (relace), kterým říkáme predikáty
  - $\mathrm{Leaf}(x)$ nebo $\mathrm{Edge}(x, y)$ mluvíme-li o grafu
  - $x \leq y$ v přirozených číslech
- a mohou vstupovat do funkcí
  - $\mathrm{lowest\_common\_ancestor}(x, y)$ v zakořeněném stromu
  - $\mathrm{succ}(x)$ nebo $x + y$ v přirozených číslech
- a mohou být konstantami se speciálním významem, např. root v zakořeněném stromu, 0 v tělese.

Syntaxe neformálně

- atomické formule: predikát (včetně rovnosti $=$) o proměnných nebo o termech ('výrazy' složené z funkcí popř. konstant)
- formule jsou složené z atomických formulí pomocí logických spojek, a dvou kvantifikátorů:

$\forall x$ "pro všechna individua (reprezentovaná proměnnou x)"
$\exists x$ "existuje individuum (reprezentované proměnnou x)"

Např. *"Každý, kdo má dítě, je rodič."* lze formalizovat takto:

$$(\forall x)((\exists y)\mathrm{child\_of}(y, x) \rightarrow \mathrm{is\_parent}(x))$$

- $\mathrm{child\_of}(y, x)$ je binární predikát vyjadřující, že individuum reprezentované proměnnou y je dítětem individua reprezentovaného proměnnou x
- $\mathrm{is\_parent}(x)$ je unární predikát vyjadřující, že individuum reprezentované x je rodič

Sémantika neformálně

$$(\forall x)((\exists y)\mathrm{child\_of}(y, x) \to \mathrm{is\_parent}(x))$$

Platnost? Záleží na modelu světa/systému, který nás zajímá:

Model je. . .

- (neprázdná) množina individuí, spolu
- s binární relací interpretující binární relační symbol $\mathrm{child\_of}$, a
- s unární relací (tj. podmnožinou) interpretující unární relační symbol $\mathrm{is\_parent}$

Obecně mohou být relace jakékoliv, snadno sestrojíme model, ve kterém formule neplatí, např.

$$\mathcal{A} = \langle \{0, 1\}, \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \emptyset \rangle$$

Příklad s funkcemi a konstantami

"Je-li $x_1 \leq y_1$ a $x_2 \leq y_2$, potom platí $(y_1 \cdot y_2) - (x_1 \cdot x_2) \geq 0$."

$$\varphi = (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2) \rightarrow ((y_1 \cdot y_2) + (-(x_1 \cdot x_2)) \geq 0)$$

- dva binární relační symboly $(\leq, \geq)$, binární funkční symbol $+$, unární funkční symbol $-$, a konstantní symbol 0
- model, ve kterém φ platí: $\mathbb{N}$ s binárními relacemi $\leq^{\mathbb{N}}, \geq^{\mathbb{N}}$, bin. funkcemi $+^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}$, unární funkcí $-^{\mathbb{N}}$, a konstantou $0^{\mathbb{N}} = 0$
- vezmeme-li ale podobně množinu $\mathbb{Z}$, φ už platit nebude

Poznámky:

- mohli bychom chápat '$-$' jako binární, obvykle ale bývá unární
- pro konstantní symbol 0 používáme (jak je zvykem) stejný symbol, jako pro přirozené číslo 0. Ale pozor, v našem modelu může být symbol 0 interpretován jako jiné číslo, nebo náš model vůbec nemusí sestávat z čísel!

Ještě o syntaxi

$$\varphi = (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2) \rightarrow ((y_1 \cdot y_2) + (-(x_1 \cdot x_2)) \geq 0)$$

- φ nemá žádné kvantifikátory, tj. je otevřená
- x_1, x_2, y_1, y_2 jsou volné proměnné této formule (nejsou vázané žádným kvantifikátorem), píšeme $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$
- sémantiku φ chápeme stejně jako $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\forall y_2)\varphi$
- používáme konvence (infixový zápis, vynechání závorek), jinak:

$$\varphi = ((\leq (x_1, y_1) \wedge \leq (x_2, y_2)) \rightarrow \leq (+(\cdot(y_1, y_2), -(\cdot(x_1, x_2))), 0))$$

- cvičení: definujte strom formule, nakreslete ho pro φ

Termy vs. atomické formule

$$\varphi = (x_1 \leq y_1) \land (x_2 \leq y_2) \to ((y_1 \cdot y_2) + (-(x_1 \cdot x_2)) \geq 0)$$

- výraz $(y_1 \cdot y_2) + (-(x_1 \cdot x_2))$ je term
- výrazy $(x_1 \leq y_1)$, $(x_2 \leq y_2)$ a $((y_1 \cdot y_2) + (-(x_1 \cdot x_2)) \geq 0)$ jsou (všechny) atomické (pod)formule φ

V čem je rozdíl? Máme-li konkrétní model, a konkrétní ohodnocení proměnných individui (prvky) tohoto modelu:

- výsledkem termu (při daném ohodnocení proměnných) je konkrétní individuum z modelu, zatímco
- atomickým formulí lze přiřadit pravdivostní hodnotu (a tedy kombinovat je logickými spojkami)

6.2 Struktury

Signatura

- specifikuje jakého typu bude daná struktura, tj. jaké má relace, funkce (jakých arit) a konstanty, a symboly pro ně
- konstanty lze chápat jako funkce arity 0, tj. funkce bez vstupů

Signatura je dvojice $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$, kde $\mathcal{R}, \mathcal{F}$ jsou disjunktní množiny symbolů (relační a funkční, ty zahrnují konstantní) spolu s danými aritami (tj. danými funkcí $\mathrm{ar}\colon \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N}$) a neobsahující symbol '$=$' (ten je rezervovaný pro rovnost).

- často zapíšeme jen výčtem symbolů, jsou-li arity a zda jsou relační nebo funkční zřejmé
- kromě běžně používaných symbolů typicky používáme:
  - pro relační symboly $P, Q, R, \ldots$
  - pro funkční (nekonstantní) symboly $f, g, h, \ldots$
  - pro konstantní symboly $c, d, a, b, \ldots$

Příklady signatur

- $\langle E \rangle$ signatura grafů: E je binární relační symbol (struktury jsou uspořádané grafy)
- $\langle \leq \rangle$ signatura částečných uspořádání: stejná jako signatura grafů, jen jiný symbol (ne každá struktura v této signatuře je částečné uspořádání! k tomu musí splňovat příslušné axiomy)
- $\langle +, -, 0 \rangle$ signatura grup: $+$ je binární funkční, $-$ unární funkční, 0 konstantní symbol
- $\langle +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ signatura těles: $\cdot$ je binární funkční, 1 konstantní symbol
- $\langle +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ signatura uspořádaných těles: $\leq$ je binární relační symbol
- $\langle -, \wedge, \vee, \bot, \top \rangle$ signatura Booleových algeber: $\wedge, \vee$ jsou binární funkční, $\bot, \top$ jsou konstantní symboly
- $\langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ signatura aritmetiky: S je unární funkční symbol

Struktury

Strukturu dané signatury získáme tak, že:

- zvolíme neprázdnou doménu, a na ní
- zvolíme realizace (také říkáme interpretace) všech relačních a funkčních symbolů (a konstant)
- to znamená konkrétní relace resp. funkce příslušných arit
- realizací konstantního symbolu je zvolený prvek z domény
- na tom, jaké konkrétní symboly jsou v signatuře nezáleží (např. $+$ neznamená, že realizace musí souviset se sčítáním)

Příklady struktur 1/3

- Struktura v prázdné signatuře $\langle\ \rangle$ je libovolná neprázdná množina. (Nemusí být konečná, ani spočetná! Formálně to bude trojice $\langle A, \emptyset, \emptyset \rangle$, ale rozdíl zanedbáme.)
- Struktura v signatuře grafů je $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$, kde $V \neq \emptyset$ a $E \subseteq V^2$, říkáme jí orientovaný graf.
  - je-li E ireflexivní a symetrická, je to jednoduchý graf
  - je-li E reflexivní, tranzitivní, a antisymetrická, jde o částečné uspořádání
  - je-li E reflexivní, tranzitivní, a symetrická, je to ekvivalence
- Struktury v signatuře částečných uspořádání jsou tytéž, jako v signatuře grafů, signatury se liší jen symbolem. (Ne každá struktura v signatuře částečných uspořádání je č. uspořádání!)

Příklady struktur 2/3

Struktury v signatuře grup jsou například následující grupy:

- $\underline{\mathbb{Z}_n} = \langle \mathbb{Z}_n, +, -, 0\rangle$, aditivní grupa celých čísel modulo n (operace jsou modulo n).

  Poznámka: $\underline{\mathbb{Z}_n}$ znamená strukturu, zatímco $\mathbb{Z}_n$ jen její doménu. Často se to ale nerozlišuje a $\mathbb{Z}_n$ se používá i pro strukturu. Podobně $+, -, 0$ jsou jak symboly, tak interpretace.
- $\mathcal{S}_n = \langle \mathrm{Sym}_n, \circ, {}^{-1}, \mathrm{id}\rangle$ je symetrická grupa (grupa všech permutací) na n prvcích.
- $\underline{\mathbb{Q}}^* = \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, {}^{-1}, 1\rangle$ je multiplikativní grupa (nenulových) racionálních čísel. (Interpretací symbolu 0 je číslo 1!)

Všechny tyto struktury splňují axiomy teorie grup, snadno ale najdeme jiné, které axiomy nesplňují, nejsou tedy grupami.

Příklady struktur 3/3

- Struktury $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ a $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ (se standardními operacemi a uspořádáním) jsou v signatuře uspořádaných těles (ale jen první z nich je uspořádané těleso).
- $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), \bar{\ }, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$, tzv. potenční algebra nad množinou X, je struktura v signatuře Booleových algeber. (Booleova algebra je to pokud $X \neq \emptyset$.)
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$, kde $S(x) = x + 1$, a ostatní symboly jsou realizovány standardně, je standardní model aritmetiky.

Definice struktury

Struktura v signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je trojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$, kde

- A je neprázdná množina, říkáme jí doména (také univerzum),
- $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ kde $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^{\mathrm{ar}(R)}$ je interpretace relačního symbolu R,
- $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ kde $f^{\mathcal{A}} \colon A^{\mathrm{ar}(f)} \to A$ je interpretace funkčního symbolu f (speciálně pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{A}} \in A$).

Příklad: rozmyslete si, jak vypadají struktury v signatuře n konstant $\langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$? Popište všechny 5-prvkové v signatuře 3 konstant.

6.3 Syntaxe

Jazyk

Jazyk je daný signaturou a informací, zda je s rovností nebo ne.

Tj. specifikujeme 'typ' modelů a zda můžeme používat symbol '$=$' interpretovaný jako identita prvků z domény; většinou to dovolíme. (Je-li jazyk bez rovnosti, musí mít signatura relační symbol. Proč?)

Do jazyka patří:

- spočetně mnoho proměnných $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (píšeme také $x, y, z, \ldots$; množinu všech proměnných označíme Var)
- relační, funkční a konstantní symboly ze signatury, symbol $=$ jde-li o jazyk s rovností (to jsou 'mimologické' symboly)
- univerzální a existenční kvantifikátory $(\forall x), (\exists x)$ pro každou proměnnou $x \in \mathrm{Var}$ (kvantifikátor '$(\forall x)$' chápeme jako jediný symbol, tj. neobsahuje proměnnou x)
- symboly pro log. spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, závorky $($, $)$, a čárka ','

Jazyk: příklady

- Jazyk $L = \langle\rangle$ s rovností je jazyk čisté rovnosti
- jazyk $L = \langle c_0, c_1, c_2, \ldots\rangle$ s rovností je jazyk spočetně mnoha konstant
- jazyk uspořádání je $\langle\leq\rangle$ s rovností
- jazyk teorie grafů je $\langle E\rangle$ s rovností
- jazyky teorie grup, teorie těles, teorie uspořádaných těles, Booleových algeber, aritmetiky jsou jazyky s rovností odpovídající daným signaturám

Termy

čistě syntaktické ‘výrazy’ z proměnných, konstantních symbolů, funkčních symbolů, závorek a čárek

Termy jazyka L jsou konečné nápisy definované induktivně:

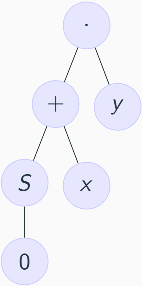
- každá proměnná a každý konstantní symbol z L je term,
- je-li f funkční symbol z L arity n a jsou-li $t_1, \dots, t_n$ termy, potom nápis $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ je také term.

Množinu všech termů jazyka L označíme Term_L.

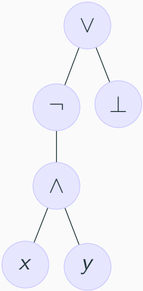
- podterm je podřetězec, který je sám termem
- term bez proměnných je konstantní (ground), např. $((S(0) + S(0)) \cdot S(S(0)))$ v jazyce aritmetiky
- termy nesmí obsahovat prvky struktury, jen symboly z jazyka
- $(1 + 1) \cdot 2$ není term, ledaže rozšíříme jazyk o symboly 1 a 2
- jako lidé můžeme použít infixový zápis, např. $(t_1 + t_2)$ místo $+(t_1, t_2)$, vynechat závorky je-li struktura termu zřejmá

Strom termu

Strom termu t, Tree(t): v listech proměnné nebo konst. symboly, ve vnitřních vrcholech funkční symboly (arita je rovna počtu synů)



(a) $(S(0)+x)\cdot y$ v jazyce aritmetiky



(b) $\neg(x\wedge y)\vee\bot$ v jazyce Booleových algeber

- symboly $\neg, \wedge, \vee$ nejsou logické, ale mimologické ze signatury
- sémantika: proměnné ohodnotíme prvky, konst. a funkční symboly nahradíme interpretacemi, výsledek je prvek z domény

Atomické formule

Termům nelze přiřadit pravdivostní hodnotu, potřebujeme predikát (relační symbol nebo $=$), který mluví o 'vztahu' termů: v dané struktuře při ohodnocení proměnných prvky je buď splněn, nebo ne.

Formule ('tvrzení o strukturách') skládáme z atomických formulí pomocí logických spojek a kvantifikátorů:

Atomická formule jazyka L je nápis $R(t_1, \dots, t_n)$, kde R je n-ární relační symbol z L (včetně $=$ jde-li o jazyk s rovností) a $t_i \in \mathrm{Term}_L$.

- $R(f(f(x)), c, f(d))$ kde R je ternární relační, f unární funkční, c, d konstantní symboly
- infixový zápis $\leq(x, y)$, $=(t_1, t_2)$ píšeme jako $x \leq y$, $t_1 = t_2$
- $(x \cdot x) + (y \cdot y) \leq (x + y) \cdot (x + y)$ v jazyce uspořád. těles
- $x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y$ v jazyce aritmetiky
- $\neg(x \wedge y) \vee \perp = \perp$ v jazyce Booleových algeber

Formule

Formule jazyka L jsou konečné nápisy definované induktivně:

- každá atomická formule jazyka L je formule,
- je-li φ formule, potom $(\neg\varphi)$ je také formule
- jsou-li φ, ψ formule, potom $(\varphi \mathbin{\square} \psi)$ pro $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ jsou také formule
- je-li φ formule a x proměnná, potom $((Qx)\varphi)$ pro $Q \in \{\forall, \exists\}$ jsou také formule

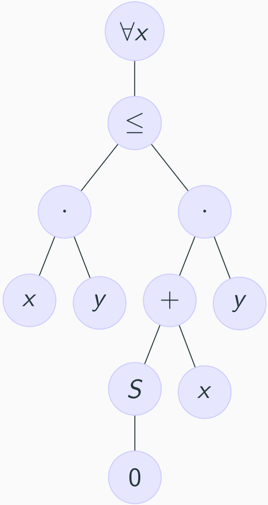
- podformule je podřetězec, který je sám formulí
- při zápisu formulí jako lidé používáme obvyklé konvence
- kvantifikátory mají stejnou prioritu jako $\neg$, vyšší než ostatní logické spojky! místo $((\forall x)\varphi)$ píšeme $(\forall x)\varphi$
- pozor, $(\forall x)\varphi \wedge \psi$ neznamená totéž, co $(\forall x)(\varphi \wedge \psi)$!
- někde uvidíte $\forall x \varphi$ nebo $\forall_x \varphi$, my ale budeme psát jen $(\forall x)\varphi$

Strom formule

Příklad: $(\forall x)(x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y)$

Strom formule, Tree(φ):

- strom atomické formule $R(t_1, \ldots, t_n)$: v kořeni R, připojíme stromy Tree(t_i)
- pro složené formule podobně jako ve výrokové logice
- kvantifikátory mají jediného syna



Volné a vázané proměnné

Význam formule (pravdivostní hodnota) může/nemusí záviset na proměnných v ní: $x \leq 0$ vs. $(\exists x)(x \leq 0)$ vs. $x \leq 0 \vee (\exists x)(x \leq 0)$

- výskyt x ve φ: list Tree(φ) označený x [v (Qx) nemá výskyt!]
- vázaný: součástí podformule začínající (Qx), jinak volný
- x je volná ve φ má-li volný výskyt, vázaná má-li vázaný výskyt
- zápis $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ znamená, že $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny volné proměnné ve formuli φ

Proměnná může být volná i vázaná, např.:

$$\varphi = (\forall x)(\exists y)(x \leq y) \vee x \leq z$$

- první výskyt x je vázaný a druhý volný (nakreslete si strom!)
- y je vázaná a z je volná, můžeme tedy psát $\varphi(x, z)$

Otevřené a uzavřené formule

otevřená formule: nemá žádný kvantifikátor

uzavřená formule (sentence): nemá žádnou volnou proměnnou

- $x + y \leq 0$ je otevřená formule
- $(\forall x)(\forall y)(x + y \leq 0)$ je uzavřená formule neboli sentence
- $(\forall x)(x + y \leq 0)$ není ani otevřená, ani uzavřená
- $(0 + 1 = 1) \wedge (1 + 1 = 0)$ je otevřená i uzavřená
- atomické formule je otevřená, otevřené formule jsou kombinace atomických pomocí logických spojek
- je-li formule otevřená i uzavřená potom nemá žádné proměnné (všechny termy v ní jsou konstantní)
- formule bez vázané proměnné není nutně otevřená! $(\forall x)0 = 1$

Uvidíme, že pravdivostní hodnota závisí jen na ohodnocení volných proměnných; sentence mají ve struktuře pravdiv. hodnotu 0 nebo 1

Instance a varianty: neformálně

- proměnná může hrát různé 'role' ('lokální' vs. 'globální')
- instance: 'dosazení' do 'globální' proměnné (lépe 'nahrazení' proměnné nějakým termem, který ji počítá, čistě syntaktické!)
- varianta: 'přejmenování' 'lokální' proměnné

$$P(x) \land (\forall x)(Q(x) \land (\exists x)R(x))$$

- první výskyt x je volný, 2. je vázaný $(\forall x)$, 3. je vázaný $(\exists x)$
- pokud substituujeme za proměnnou x term $t = 1 + 1$, dostáváme instanci formule φ, kterou označíme $\varphi(x/t)$:
  $$P(1 + 1) \land (\forall x)(Q(x) \land (\exists x)R(x))$$
- přejmenujeme-li kvantifikátory, získáme variantu formule φ:
  $$P(x) \land (\forall y)(Q(y) \land (\exists z)R(z))$$

Kdy a jak to lze, aby instance byla důsledek a varianta ekvivalentní?

Instance

Substituujeme-li do φ za x term t, chceme aby výsledná formule 'říkala o t totéž, co φ o x'. Např. $\varphi(x) = (\exists y)(x + y = 1)$

- říká o x, že 'existuje $x - 1$'
- term $t = 1$ lze: $\varphi(x/t) = (\exists y)(1 + y = 1)$ říká 'existuje 1-1'
- term $t = y$ nelze: $(\exists y)(y + y = 1)$ říká '1 je dělitelné 2'
  problém: obsahuje y, po nahrazení bude nově vázané $(\exists y)$

Term t je substituovatelný za proměnnou x ve formuli φ, pokud po simultánním nahrazení všech volných výskytů x za t nevznikne žádný vázaný výskyt proměnné z t. Potom je vzniklá formule instance φ vzniklá substitucí t za x, $\varphi(x/t)$.

- t není substituovatelný za x do φ, právě když x má volný výskyt v nějaké podformuli φ tvaru $(Qy)\psi$ a y se vyskytuje v t
- speciálně: konstantní termy jsou vždy substituovatelné

Varianta

Substituovat t můžeme vždy do varianty φ, ve které přejmenujeme všechny kvantifikované proměnné na nové (které nejsou v t ani φ)

Má-li formule φ podformuli tvaru $(Qx)\psi$ a je-li y proměnná, že

(i) y je substituovatelná za x do ψ, a

(ii) y nemá volný výskyt v ψ.

Varianta φ vznikne nahrazením $(Qx)\psi$ formulí $(Qy)\psi(x/y)$, říkáme tak i výsledku postupné variace ve více podformulích.

Mějme $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$:

- $(\exists u)(\forall v)(u \leq v)$ je varianta φ
- $(\exists y)(\forall y)(y \leq y)$ není varianta kvůli (i): y není substituovatelná za x do $\psi = (\forall y)(y \leq y)$
- $(\exists x)(\forall x)(x \leq x)$ není varianta kvůli (ii): x má volný výskyt v $\psi = (x \leq y)$

6.4 Sémantika

Sémantika neformálně

- modely jsou struktury dané signatury,
- formule platí ve struktuře, pokud platí při každém ohodnocení volných proměnných prvky z domény,
- hodnoty termů (jsou to prvky z domény) se vyhodnocují podle jejich stromů, kde symboly nahradíme jejich interpretacemi (relacemi, funkcemi, a konstantami z domény),
- z hodnot termů získáme pravdivostní hodnoty atomických formulí: je výsledná *n*-tice v relaci?
- hodnoty složených formulí vyhodnocujeme také podle jejich stromu, přičemž $(\forall x)$ hraje roli 'konjunkce přes všechny prvky' a $(\exists y)$ hraje roli 'disjunkce přes všechny prvky' z domény struktury

Modely jazyka

Model jazyka L, nebo také L-struktura, je libovolná struktura v signatuře jazyka L. Třídu všech modelů jazyka označíme M_L.

- zda je jazyk s rovností nebo bez nehraje roli
- proč třída a ne množina všech modelů M_L? doména je libovolná neprázdná množina, ‘množina všech množin’ neexistuje; třída je ‘soubor’ všech množin splňujících danou vlastnost (popsatelnou v jazyce teorie množin)

Mezi modely jazyka uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ patří:

- částečně uspořádané množiny $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$, $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$
- libovolný orientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$, typicky není částečné uspořádání, tj. nesplňuje axiomy teorie uspořádání
- $\langle \mathbb{C}, R^{\mathbb{C}} \rangle$ kde $(z_1, z_2) \in R^{\mathbb{C}}$ právě když $|z_1| = |z_2|$ (není č. usp.)

Hodnota termu

Mějme term t jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a L-strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}} \rangle$.

Ohodnocení proměnných v množině A je lib. funkce $e : \mathrm{Var} \to A$.

Hodnota termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, značíme $t^{\mathcal{A}}[e]$, je definovaná induktivně:

- $x^{\mathcal{A}}[e] = e(x)$ pro proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,
- $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$, a
- je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ složený term, kde $f \in \mathcal{F}$, potom:

$$t^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e])$$

- závisí pouze na ohodnocení proměnných vyskytujících se v t
- obecně, term t reprezentuje termovou funkci $f_t^{\mathcal{A}} \colon A^k \to A$, kde k je počet proměnných v t
- speciálně, hodnota konstantního termu na ohodnocení nezávisí, konstantní termy reprezentují konstantní funkce

Hodnota termu: příklady

1. Hodnota termu $t = -(x \vee \bot) \wedge y$ v Booleově algebře $\mathcal{A} = \underline{\mathcal{P}(\{0,1,2\})}$ při ohodnocení e ve kterém:

- $e(x) = \{0,1\}$
- $e(y) = \{1,2\}$

$$t^{\mathcal{A}}[e] = \{2\}$$

2. Hodnota termu $x + 1$ ve struktuře $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$ jazyka $L = \langle +, 1 \rangle$ při ohodnocení e ve kterém $e(x) = 2$

$$(x+1)^{\mathcal{N}}[e] = 6$$

Pravdivostní hodnota formule

Buď φ v jazyce L, $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L$, $e : \mathrm{Var} \to A$ ohodnocení proměnných.
Pravdivostní hodnota φ v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$:

- pro atomickou formuli $R(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(R(t_1, \ldots, t_n))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- pro formuli tvaru $(\neg\varphi)$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] = f_{\neg}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]) = 1 - \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$$

- pro formuli tvaru $(\varphi \mathbin{\square} \psi)$ kde $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi \mathbin{\square} \psi)[e] = f_{\square}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], \mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

Pravdivostní hodnota formule: zbytek definice a poznámky

- pro formuli tvaru $(Qx)\varphi$ kde $Q \in \{\forall, \exists\}$:

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

$$\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

  kde $e(x/a)$ je ohodnocení získané z e změnou $e(x)$ na a

Pozorování: Závisí pouze na ohodnocení volných proměnných. Speciálně, pro sentenci nezávisí na ohodnocení.

- Tedy v ohodnocení e nastavíme hodnotu proměnné x postupně na všechny prvky $a \in A$ a požadujeme, aby PH byla rovna 1 vždy (v případě $\forall$) nebo alespoň jednou (v případě $\exists$).[1]
- speciálně, $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(t_1 = t_2)[e] = 1 \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}[e], t_2^{\mathcal{A}}[e]) \in =^{\mathcal{A}}$ (identita na A), tj. $t_1^{\mathcal{A}}[e] = t_2^{\mathcal{A}}[e]$ (obě strany jsou stejný

Příklady

Vezměme si uspořádané těleso $\underline{\mathbb{Q}}$. Potom:

- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}(x \leq 1 \wedge \neg(x \leq 0))[e] = 1$ právě když $e(x) \in (0, 1]$
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\forall x)(x \cdot y = y))[e] = 1$ právě když $e(y) = 0$
- $\mathrm{PH}^{\underline{\mathbb{Q}}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 1$ pro každé ohodnocení e (je to sentence)

Ale pro strukturu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ máme:

- $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)(x \leq 0 \wedge \neg x = 0))[e] = 0$

Platnost ve struktuře

Mějme formuli φ, strukturu $\mathcal{A}$ (ve stejném jazyce), a ohodnocení e.

- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, φ platí v $\mathcal{A}$ při ohodnocení e, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$
- je-li $\mathrm{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 0$, φ neplatí v $\mathcal{A}$ při ohodnoc. e, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- φ je pravdivá (platí) v $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi$, pokud platí při každém ohodnocení $e : \mathit{Var} \to A$
- φ je lživá v $\mathcal{A}$, pokud neplatí při žádném ohodnocení (v tom případě $\mathcal{A} \models \neg\varphi$)
- pozor, lživá není totéž, co není pravdivá (neplatí)! (Platí to ale pro sentence.)
- platnost je klíčový pojem sémantiky a celé logiky

Zřejmé vlastnosti platnosti ve struktuře při ohodnocení

- $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ a $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ nebo $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e]$ právě když platí: jestliže $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ potom $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e]$ právě když platí: $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$
- $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro každé $a \in A$
- $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro nějaké $a \in A$
- je-li term t substituovatelný za proměnnou x do φ, potom:
  $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro $a = t^{\mathcal{A}}[e]$
- je-li ψ varianta φ, potom $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$

(dokažte si snadno z definic, najděte protipříklady)

Zřejmé vlastnosti platnosti ve struktuře

- pokud $\mathcal{A} \models \varphi$, potom $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$; je-li φ sentence, platí i opačná implikace
- $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi$ a $\mathcal{A} \models \psi$
- pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \psi$, potom $\mathcal{A} \models \varphi \vee \psi$; je-li φ sentence, platí i opačná implikace.
- $\mathcal{A} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$
- speciálně, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když v $\mathcal{A}$ platí její generální uzávěr, tj. sentence $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\varphi$

(dokažte si snadno z definic, najděte protipříklady)

6.5 Vlastnosti teorií

Platnost v teorii

- teorie jazyka L je množina L-formulí, její prvky jsou axiomy
- model teorie T je L-struktura, ve které platí všechny axiomy T, tj. $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$
- třída modelů teorie T je:

$$\mathrm{M}_L(T) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L \mid \mathcal{A} \models T\}$$

Je-li T teorie v jazyce L a φ L-formule, potom φ je:

- pravdivá (platí) v T, značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro všechna $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$ (neboli: $\mathrm{M}(T) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$)
- lživá v T, pokud $T \models \neg\varphi$, tj. pokud je lživá v každém modelu T (neboli: $\mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(\varphi) = \emptyset$)
- nezávislá v T, pokud není pravdivá v T ani lživá v T
- je-li $T = \emptyset$ (tj. $\mathrm{M}(T) = \mathrm{M}_L$), píšeme jen $\models \varphi$, a říkáme, že φ je pravdivá (v logice), (logicky) platí, je tautologie, apod.

Další sémantické pojmy o teorii

- T je sporná, pokud v ní platí spor $\perp$ (definujeme jako $R(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg R(x_1, \ldots, x_n)$, kde R je lib. relační symbol)
- T je sporná, právě když v ní platí každá formule (ekvivalentně, nemá žádný model), jinak je bezesporná (neplatí-li v ní spor, má-li alespoň jeden model)
- důsledky T jsou sentence pravdivé v T, množina všech důsledků T v jazyce L je

$$\mathrm{Csq}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je sentence a } T \models \varphi\}$$

Kompletnost v predikátové logice

- T je kompletní, je-li bezesporná a každá sentence je v ní buď pravdivá, nebo lživá. Pozor: neplatí, že má jediný model!
- máme-li jeden model, máme i nekonečně mnoho izomorfních modelů (liší se jen pojmenováním prvků, definujeme později)
- uvažovat jediný model až na izomorfismus ale také nestačí!

Struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (v témž jazyce) jsou elementárně ekvivalentní, píšeme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, pokud v nich platí tytéž sentence.

Pozorování: Teorie je kompletní, právě když má právě jeden model až na elementární ekvivalenci.

Příklad: uspořádané množiny $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

- nejsou izomorfní, $\mathbb{Q}$ je spočetná a $\mathbb{R}$ nespočetná množina, neexistuje dokonce žádná bijekce mezi doménami
- ale $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$: indukcí dle struktury sentence φ lze ukázat $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$; netriviální případ je $\exists$, klíčová je hustota

Platnost pomocí nesplnitelnosti

Otázku platnosti v teorii lze převést na problém existence modelu:

Tvrzení (O nesplnitelnosti a pravdivosti): Je-li T teorie a φ sentence (v témž jazyce), potom: $T \models \varphi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model.

Důkaz: Platí následující ekvivalence:

- $T \cup \{\neg\varphi\}$ nemá model,
- právě když $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu T,
- právě když φ platí v každém modelu T (φ je sentence!). $\square$

NB: Předpoklad, že φ je sentence, je nutný: pro $T = \{P(c)\}$ a formuli $\varphi = P(x)$ je $P(c) \not\models P(x)$ ale $\{P(c), \neg P(x)\}$ nemá model.

Příklady teorií: Teorie grafů

Teorie grafů: $L = \langle E \rangle$ s rovností, axiomy ireflexivity a symetrie

$$T_{\text{graph}} = \{\neg E(x,x), E(x,y) \rightarrow E(y,x)\}$$

Modely: $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$, kde $E^{\mathcal{G}}$ je symetrická ireflexivní relace, tj. jednoduché grafy, hranu $\{x,y\}$ reprezentuje dvojice $(x,y),(y,x)$

- Formule $\neg x = y \rightarrow E(x,y)$ platí v grafu, právě když je úplný. Je tedy nezávislá v T_{graph}.
- Formule $(\exists y_1)(\exists y_2)(\neg y_1 = y_2 \wedge E(x,y_1) \wedge E(x,y_2) \wedge (\forall z)(E(x,z) \rightarrow z = y_1 \vee z = y_2))$ vyjadřuje, že každý vrchol má stupeň právě 2. Platí tedy právě v grafech, které jsou disjunktní sjednocení kružnic, a je nezávislá v teorii T_{graph}.

Příklady teorií: Teorie uspořádání

Teorie uspořádání: v jazyce uspořádání $L = \langle \leq \rangle$ s rovností, axiomy reflexivity, antisymetrie, a tranzitivity

$$T = \{x \leq x,\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y,\ x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z\}$$

Modely: $\langle S, \leq^S \rangle$, kde $\leq^S$ je částečné uspořádání.

Příklad: $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule $x \leq y \vee y \leq x$ (linearita) platí v $\mathcal{A}$, ale neplatí v $\mathcal{B}$: neplatí např. při ohodnocení kde $e(x) = \{0\}$, $e(y) = \{1\}$ (píšeme $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$). Je tedy nezávislá v T.
- Sentence $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ (označme ψ) je pravdivá v $\mathcal{B}$ a lživá v $\mathcal{A}$, píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$. Je také nezávislá v T.
- Formule $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ (označme χ) je pravdivá v T, píšeme $T \models \chi$. Totéž platí pro její generální uzávěr $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\chi$.

Příklady teorií: Algebraické teorie 1/2

Teorie grup: $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, axiomy asociativita $+$, neutralita 0 vůči $+$, a $-x$ je inverzní prvek k x (vůči $+$ a 0)

$$\begin{aligned} T_1 = \{ & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ & 0 + x = x,\ x + 0 = 0, \\ & x + (-x) = 0,\ (-x) + x = 0 \} \end{aligned}$$

Teorie komutativních grup: navíc komutativita $+$

$$T_2 = T_1 \cup \{x + y = y + x\}$$

Teorie okruhů: $L = \langle +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ s rovností, navíc neutralita 1 vůči $\cdot$, asociativita $\cdot$, a (levá i pravá) distributivita $\cdot$ vůči $+$

$$\begin{aligned} T_3 = T_2 \cup \{ & 1 \cdot x = x \cdot 1, \\ & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \\ & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \\ & (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \} \end{aligned}$$

Příklady teorií: Algebraické teorie 2/2

Teorie komutativních okruhů: navíc axiom komutativity $\cdot$:

$$T_4 = T_3 \cup \{x \cdot y = y \cdot x\}$$

Teorie těles je ve stejném jazyce, ale má navíc axiomy existence inverzního prvku k $\cdot$ a netriviality:

$$T_5 = T_4 \cup \{\neg\, x = 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1),\ \neg\, 0 = 1\}$$

Teorie uspořádaných těles je v jazyce $\langle +, -, 0, \cdot, 1, \leq \rangle$ s rovností, sestává z axiomů teorie těles, teorie uspořádání spolu s axiomem linearity, a z následujících axiomů kompatibility uspořádání:

- $x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z)$
- $(0 \leq x \wedge 0 \leq y) \rightarrow 0 \leq x \cdot y$

Modely jsou tělesa s lineárním (totálním) uspořádáním, které je kompatibilní s tělesovými operacemi.