Kapitola 1

Tablo metoda v predikátové logice

V této kapitole ukážeme, jak lze zobecnit *metodu analytického tabla* z výrokové na predikátovou logiku.[1] Metoda funguje velmi podobně, musíme si ale poradit *kvantifikátory*.

1.1 Neformální úvod

V této sekci tablo metodu neformálně představíme. K formálním definicím se vrátíme později. Začneme dvěma příklady, na kterých ilustruje, jak tablo metoda v predikátové logice funguje, a jak se vypořádá s kvantifikátory.

Příklad 1.1.1. Na Obrázku 1.1.1 jsou znázorněna dvě tabla. Jsou to tablo důkazy (v logice, tj. z prázdné teorie) *sentencí* $(\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$ (vpravo) a $\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$ (vlevo) jazyka $L = \langle P \rangle$ (bez rovnosti), kde P je unární relační symbol. Symbol c_0 je *pomocný konstantní symbol*, který do jazyka při konstrukci tabla přidáváme.

Položky

Formule v položkách musí být vždy *sentence*, neboť potřebujeme, aby měly v daném modelu *pravdivostní hodnotu* (nezávisle na ohodnocení proměnných). To ale není zásadní omezení, chceme-li dokázat, že formule φ platí v teorii T, můžeme nejprve nahradit formuli φ a všechny axiomy T jejich *generálními uzávěry* (tj. univerzálně kvantifikujeme všechny volné proměnné). Získáme tak *uzavřenou* teorii T' a sentenci φ' a platí: $T' \models \varphi'$ právě když $T \models \varphi$.

Kvantifikátory

Redukce položek funguje stejně, použijeme tatáž atomická tabla pro logické spojky (viz Tabulka **??**, kde místo výroků jsou φ, ψ sentence). Musíme ale přidat 4 nová atomická tabla pro T/F a univerzální/existenční kvantifikátor. Tyto položky dělíme na dva typy:

- typ "*svědek*": položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
- typ "*všichni*": položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$

Příklady vidíme v tablech na Obrázku 1.1.1 ('svědci' jsou červeně, 'všichni' modře).

[1] Na tomto místě je dobré připomenout si tablo metodu ve výrokové logice, viz Kapitola **??**.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \to \neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}\neg P(c_0) \\
| \\
\mathrm{F}P(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \\
\otimes
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{T}\neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{F}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{F}P(c_0) \\
| \\
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{F}\neg P(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \\
\otimes
\end{array}
$$

Obrázek 1.1: Příklady tabel. Položky typu ‘svědek’ jsou znázorněny červeně, položky typu ‘všichni’ modře.

Kvantifikátor nemůžeme pouze odstranit, neboť výsledná formule $\varphi(x)$ by nebyla sentencí. Místo toho současně s odstraněním kvantifikátoru *substituujeme* za x nějaký *konstantní term*, v nové položce tedy bude *sentence* $\varphi(x/t)$. Jaký konstantní term t substituujeme záleží na tom, zda jde o položku typu “svědek” nebo “všichni”.

Pomocné konstantní symboly

Jazyk L teorie T, ve které dokazujeme, rozšíříme o spočetně mnoho *nových (pomocných) konstantních symbolů* $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ (ale budeme psát i $c, d, \dots$), výsledný rozšířený jazyk označíme L_C. Konstantní termy v jazyce L_C tedy existují, i pokud původní jazyk L nemá žádné konstanty. A vždy při konstrukci tabla máme k dispozici nějaký *nový*, dosud *nepoužitý* (ani v teorii, ani v konstruovaném tablu) pomocný konstantní symbol $c \in C$.

Svědci

Při redukci položky typu “svědek” substituujeme za proměnnou jeden z těchto nových, pomocných symbolů, a to takový, který *dosud nebyl na dané větvi použit.* V případě položky $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/c)$. Tento konstantní symbol c bude hrát roli (nějakého) prvku, který danou formuli splňuje (resp. vyvrací, jde-li o položku tvaru $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$). Zde používáme větu o konstantách (Věta **??**). Je důležité, že symbol c dosud nebyl na větvi ani v teorii nijak použit. Typicky ale poté použijeme položky typu “všichni”, abychom se dozvěděli, co musí *o tomto svědku platit.*

Na Obrázku 1.1.1 vidíme příklad: položka $\mathrm{T}(\exists x)\neg P(x)$ v levém tablu je redukovaná, její redukcí vznikla položka $\mathrm{T}\neg P(c_0)$; $c_0 \in C$ je pomocný symbol, na větvi se dosud nevyskytoval (a je první takový). Podobně pro položku $\mathrm{F}(\forall x)P(x)$ a $\mathrm{F}P(c_0)$ v pravém tablu.

Všichni

Při redukci položky typu "všichni" substituujeme za proměnnou x libovolný *konstantní term* t rozšířeného jazyka L_C. Z položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ tedy získáme položku $\mathrm{T}\varphi(x/t)$.

Aby byla bezesporná větev *dokončená*, budou na ní ale muset být položky $\mathrm{T}\varphi(x/t)$ pro *všechny* konstantní L_C-termy t. (Musíme 'použít' vše, co položka $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ 'říká'.) A stejně pro položku tvary $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$.

Ve výrokové logice jsme používali konvenci, že při připojování atomických tabel vynecháváme jejich kořeny (jinak bychom opakovali na větvi tutéž položku dvakrát). V predikátové logice použijeme stejnou konvenci, ale *s výjimkou položek typu 'svědek'*. U těch zapíšeme i kořen připojovaného atomického tabla. Proč to děláme? Abychom si připomněli, že s touto položkou ještě nejsme hotovi, že musíme připojit atomická tabla s jinými konstantními termy.

Na Obrázku 1.1.1 v levém tablu *není* položka $\mathrm{T}(\forall x)P(x)$ *redukovaná*. Její *první výskyt* (4. vrchol shora) jsme zredukovali, substituujeme term $t = c_0$, máme tedy $\varphi(x/t) = P(c_0)$. Připojili jsme atomické tablo v sestávající z téže položky v kořeni $\mathrm{T}(\forall x)P(x)$, kterou do tabla *zapíšeme*, a z položky $\mathrm{T}P(c_0)$ pod ní. Zatímco *první výskyt* položky $\mathrm{T}(\forall x)P(x)$ je tímto redukovaný, *druhý výskyt* (7. vrchol shora) redukovaný není. Podobně pro položku $\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x)$ v pravém tablu.

Tento poněkud technický přístup k definici *redukovanosti* (výskytů) položek typu 'všichni' se nám bude hodit v definici *systematického tabla*.

Jazyk

Nadále budeme předpokládat, že jazyk L je *spočetný*.[2] Z toho plyne, že každá L-teorie T má jen spočetně mnoho axiomů, a také že konstantních termů v jazyce L_C je jen spočetně mnoho. Toto omezení potřebujeme, neboť každé, i nekonečné tablo má jen spočetně mnoho položek, a musíme být schopni použít všechny axiomy dané teorie, a substituovat všechny konstantní termy jazyka L_C.

Nejprve také budeme předpokládat, že jde o jazyk *bez rovnosti*, což je jednodušší. Problémem je, že *tablo* je čistě syntaktický objekt, ale *rovnost* má speciální sémantický význam, totiž musí být v každém modelu interpretována relací identity. Jak adaptovat metodu pro jazyky s rovností si ukážeme později.

1.2 Formální definice

V této sekci definujeme všechny pojmy potřebné pro tablo metodu pro jazyky bez rovnosti. K jazykům s rovností se vrátíme v Sekci 1.3.

Buď L *spočetný* jazyk bez rovnosti. Označme jako L_C rozšíření jazyka L o spočetně mnoho nových *pomocných* konstantních symbolů $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Zvolme nějaké očíslování konstantních termů jazyka L_C, označme tyto termy $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Mějme nějakou L-teorii T a L-sentenci φ.

[2] Z hlediska výpočetní logiky to není velké omezení.

1.2.1 Atomická tabla

Položka je nápis $\mathrm{T}\varphi$ nebo $\mathrm{F}\varphi$, kde φ je nějaká L_C-sentence. Položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ jsou *typu 'svědek'*, položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ jsou *typu 'všichni'*

Atomická tabla jsou položkami označkované stromy znázorněné v Tabulkách 1.1 a 1.2.

	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
True	$\mathrm{T}\neg\varphi$ | $\mathrm{F}\varphi$	$\mathrm{T}\varphi \wedge \psi$ | $\mathrm{T}\varphi$ | $\mathrm{T}\psi$	$\mathrm{T}\varphi \vee \psi$ / \\ $\mathrm{T}\varphi$ $\mathrm{T}\psi$	$\mathrm{T}\varphi \rightarrow \psi$ / \\ $\mathrm{F}\varphi$ $\mathrm{T}\psi$	$\mathrm{T}\varphi \leftrightarrow \psi$ / \\ $\mathrm{T}\varphi$ $\mathrm{F}\varphi$ | | $\mathrm{T}\psi$ $\mathrm{F}\psi$
False	$\mathrm{F}\neg\varphi$ | $\mathrm{T}\varphi$	$\mathrm{F}\varphi \wedge \psi$ / \\ $\mathrm{F}\varphi$ $\mathrm{F}\psi$	$\mathrm{F}\varphi \vee \psi$ | $\mathrm{F}\varphi$ | $\mathrm{F}\psi$	$\mathrm{F}\varphi \rightarrow \psi$ | $\mathrm{T}\varphi$ | $\mathrm{F}\psi$	$\mathrm{F}\varphi \leftrightarrow \psi$ / \\ $\mathrm{T}\varphi$ $\mathrm{F}\varphi$ | | $\mathrm{F}\psi$ $\mathrm{T}\psi$

Tabulka 1.1: Atomická tabla pro logické spojky; φ a ψ jsou libovolné L_C-sentence.

	$\forall$	$\exists$
True	$\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ | $\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$	$\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ | $\mathrm{T}\varphi(x/c_i)$
False	$\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ | $\mathrm{F}\varphi(x/c_i)$	$\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ | $\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$

Tabulka 1.2: Atomická tabla pro kvantifikátory; φ je L_C-sentence, x proměnná, t_i libovolný konstantní L_C-term, $c_i \in C$ je nový pomocný konstantní symbol (který se dosud nevyskytuje na dané větvi konstruovaného tabla).

1.2.2 Tablo důkaz

Definice v této části jsou téměř identické odpovídajícím definicím z výrokové logiky. Hlavní technický problém je jak definovat redukovanost položek typu 'všichni' na větvi tabla: chceme aby za proměnnou byly substituovány *všechny* možné konstantní L_C-termy t_i.

Definice 1.2.1 (Tablo)**.** *Konečné tablo z teorie T* je uspořádaný, položkami označkovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:

- jednoprvkový strom označkovaný libovolnou položkou je tablo z teorie T,

- pro libovolnou položkou P na libovolné větvi V, můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P, přičemž je-li P typu 'svědek', můžeme použít jen pomocný konstantní symbol $c_i \in C$, který se na větvi V dosud nevyskytuje (pro položky typu 'všichni' můžeme použít libovolný konstantní L_C-term t_i),
- na konec libovolné větve můžeme připojit položku $\mathrm{T}\alpha$ pro libovolný axiom teorie $\alpha \in T$.

Tablo z teorie T je buď konečné, nebo i *nekonečné*: v tom případě vzniklo ve spočetně mnoha krocích. Můžeme ho formálně vyjádřit jako sjednocení $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_i jsou konečná tabla z T, τ_0 je jednoprvkové tablo, a τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku.[3]

Tablo *pro položku* P je tablo, které má položku P v kořeni.

Připomeňme konvenci, že pokud P *není* typu 'všichni', potom kořen atomického tabla nebudeme zapisovat (neboť vrchol s položkou P už v tablu je).

Cvičení 1.1. Ukažte v jednotlivých krocích jak byla tabla z Obrázku 1.1.1 zkonstruována.

Definice 1.2.2 (Tablo důkaz)**.** *Tablo důkaz* sentence φ z teorie T je *sporné* tablo z teorie T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni. Pokud existuje, je φ *(tablo) dokazatelná* z T, píšeme $T \vdash \varphi$. (Definujme také *tablo zamítnutí* jako sporné tablo s $\mathrm{T}\varphi$ v kořeni. Pokud existuje, je φ *(tablo) zamítnutelná* z T, tj. platí $T \vdash \neg\varphi$.)

- Tablo je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je *sporná*, pokud obsahuje položky $\mathrm{T}\psi$ a $\mathrm{F}\psi$ pro nějaký výrok ψ, jinak je *bezesporná*.
- Tablo je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je *dokončená*, pokud
  - je sporná, nebo
  - je každá položka na této větvi *redukovaná* a zároveň větev obsahuje položku $\mathrm{T}\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je *redukovaná* na větvi V procházející touto položkou, pokud
  - není typu 'všichni' a při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V, tj. vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla.[4]
  - je typu 'všichni' a všechny její *výskyty* na V jsou na větvi V *redukované.*
- Výskyt položky P typu 'všichni' na větvi V je *i-tý*, pokud má na V právě $i-1$ předků označených touto položkou, a i-tý výskyt je *redukovaný* na V, pokud
  - položka P má $(i+1)$-ní výskyt na V, a zároveň
  - na V se vyskytuje položka $\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$) resp. $\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$), kde t_i je i-tý konstantní L_C-term.[5]

[3]Sjednocení proto, že v jednotlivých krocích přidáváme do tabla nové vrcholy, τ_i je tedy podstromem τ_{i+1}.
[4]Byť podle konvence tento kořen nezapisujeme.
[5]Tj. (typicky) už jsme za x substituovali term t_i.

Všimněte si, že je-li položka typu 'všichni' na nějaké větvi redukovaná, musí mít na této větvi nekonečně mnoho výskytů, a museli jsme v nich použít při substituci všechny možnosti, tj. všechny konstantní L_C-termy.

Příklad 1.2.3. Jako příklad sestrojme tablo důkazy *v logice* (z prázdné teorie) následujících sentencí:

(a) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$, kde P, Q jsou unární relační symboly.

(b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$, kde $\varphi(x), \psi(x)$ jsou libovolné formule s jedinou volnou proměnnou x.

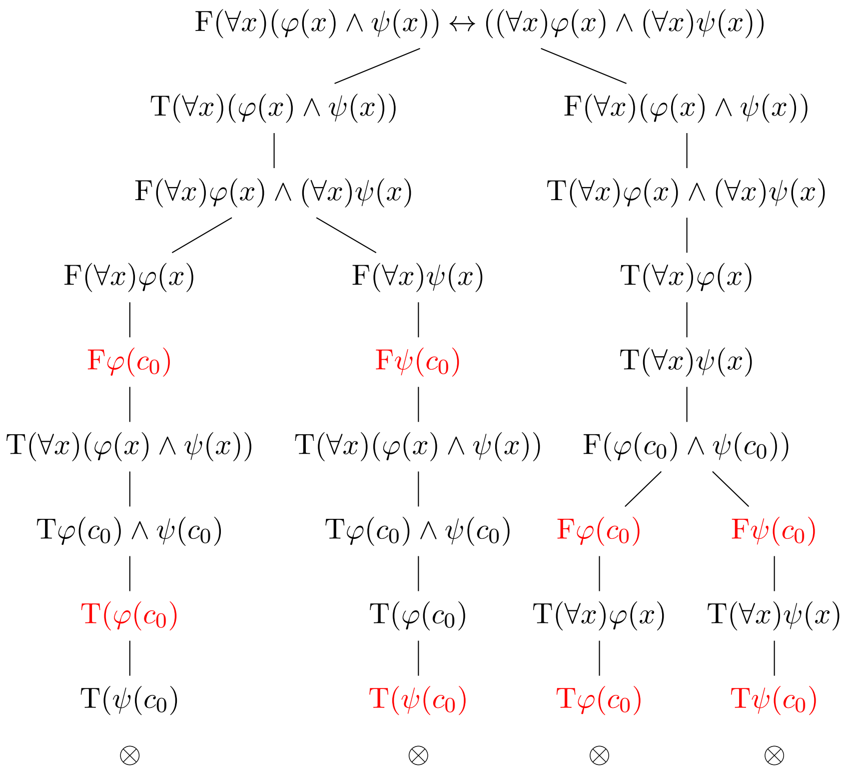
Výsledná tabla jsou na Obrázcích 1.2 a 1.3. Dvojice sporných položek jsou znázorněny červeně. Rozmyslete si, jak byla tabla po krocích zkonstruována.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\
| \\
\mathrm{F}(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{F}(\forall x)Q(x) \\
| \\
\mathrm{F}Q(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)P(x) \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \to Q(c_0) \\
\begin{array}{cc} / & \backslash \\ \mathrm{F}P(c_0) & \mathrm{T}Q(c_0) \\ \otimes & \otimes \end{array}
\end{array}
$$

Obrázek 1.2: Tablo důkaz z Příkladu 1.2.3 (a).

1.2.3 Systematické tablo a konečnost důkazů

V Sekci **??** jsme ukázali, že neprodlužujeme-li sporné větve (což nemusíme dělat), potom sporné tablo, speciálně tablo důkaz, bude vždy konečný. Stejný důkaz funguje i v logice predikátové.



Obrázek 1.3: Tablo důkaz z Příkladu 1.2.3 (b). Konstantu c_0 můžeme použít jako *novou* ve všech třech případech. Stačí, že se zatím nevyskytuje *na dané větvi*.

Důsledek 1.2.4 (Konečnost důkazů)**.** *Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i* konečný *tablo důkaz φ z T.*

Důkaz. Stejný jako ve ve výrokové logice, viz důkaz Důsledku **??**. □

Ve stejné sekci jsme si ukázali konstrukci *systematického tabla.* Tu lze také snadno adaptovat na predikátovou logiku. Musíme zajistit, abychom někdy zredukovali každou položku, použili každý axiom, a nově v predikátové logice také substituovali každý L_C term t_i za proměnnou v položkách typu 'všichni'.

Definice 1.2.5. Mějme položku R a teorii $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$. *Systematické tablo* z teorie T pro položku R je tablo $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové tablo s položkou R, a pro každé $i \geq 0$:

Buď P položka v nejlevějším vrcholu v na co nejmenší úrovni tabla τ_i, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející P (resp. jde-li o položu typu 'všichni', její *výskyt* v tomto vrcholu není redukovaný). Potom τ_i' je tablo vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející v, kde

- je-li P typu 'všichni' a má-li ve vrcholu v k-tý výskyt, potom za proměnnou substituujeme k-tý L_C-term t_k,
- je-li P typu 'svědek', potom na dané větvi V za proměnnou substituujeme $c_i \in C$ s nejmenším možným i (takovým, že na V se c_i dosud nevyskytuje).

Jinak, pokud taková položka P a vrchol v neexistují, tj. všechny položky jsou redukované, definujeme $\tau_i' = \tau_i$.

Tablo τ_{i+1} je potom tablo vzniklé z τ_i' připojením Tα_i na každou bezespornou větev τ_i', pokud $i \leq |T|$. Jinak (je-li T konečná a už jsme použili všechny axiomy) tento krok přeskočíme a definujeme $\tau_{i+1} = \tau_i'$.

Stejně jako ve výrokové logice platí, že systematické tablo je vždy dokončené, a poskytuje konečný důkaz:

Lemma 1.2.6. *Systematické tablo je dokončené.*

Důkaz. Obdobný jako důkaz ve výrokové logice (Lemma **??**). Pro položky typu 'všichni' si všimněte, že k-tý výskyt redukujeme v momentě, kdy na něj při konstrukci narazíme: připojením vrcholu s $(k+1)$-ním výskytem a substitucí k-tého L_C-termu t_k. □

Důsledek 1.2.7 (Systematičnost důkazů)**.** *Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem φ z T.*

Důkaz. Stejný jako důkaz ve výrokové logice (Důsledek 1.2.7). □

1.3 Jazyky s rovností

Nyní si ukážeme, jak aplikovat tablo metodu na jazyky s rovností. Co je to rovnost? V matematice může v různém kontextu znamenat různé relace. Platí $1 + 0 = 0 + 1$? Mluvíme-li o celých číslech, pak ano, ale máme-li na mysli aritmetické výrazy (nebo např. termy v jazyce těles), potom si levá a pravá strana nejsou rovny: jde o jiné výrazy. [6]

Představte si, že máme teorii T v jazyce s rovností obsahujícím konstantní symboly c_1, c_2, unární funkční symbol f a unární relační symbol P. Mějme nějaké dokončené tablo z této teorie, a v něm bezespornou větev, na kterém najdeme položku $\mathrm{T}c_1 = c_2$. Budeme chtít sestrojit *kanonický model* $\mathcal{A}$ pro tuto větev, podobně jako ve výrokové logice. Položka bude znamenat, že v kanonickém modelu platí $c_1^{\mathcal{A}} =^{\mathcal{A}} c_2^{\mathcal{A}}$, tj. $(c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}) \in =^{\mathcal{A}}$. To nám ale nestačí, chceme také, aby platilo také např.:

- $c_2^{\mathcal{A}} =^{\mathcal{A}} c_1^{\mathcal{A}}$,
- $f^{\mathcal{A}}(c_1^{\mathcal{A}}) =^{\mathcal{A}} f^{\mathcal{A}}(c_2^{\mathcal{A}})$,
- $c_1^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$, právě když $c_2^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$.

Obecně tedy chceme, aby relace $=^{\mathcal{A}}$ byla tzv. *kongruencí*,[7] tj. ekvivalencí, která se chová 'dobře' vůči funkcím a relacím struktury $\mathcal{A}$. Toho docílíme tak, že k teorii T přidáme tzv. *axiomy rovnosti*, které tyto vlastnosti vynutí, a tablo sestrojíme z výsledné teorie T^*.

V modelu $\mathcal{A}$ potom bude relace $=^{\mathcal{A}}$ kongruencí. To nám ale nestačí, chceme, aby rovnost byla *identita*, tj. aby $(a, b) \in =^{\mathcal{A}}$ platilo jedině když a a b jsou týmž prvkem univerza. Toho docílíme identifikací všech $=^{\mathcal{A}}$-ekvivalentních prvků do jediného prvku. Této konstrukci se říká *faktorstruktura* podle kongruence $=^{\mathcal{A}}$.[8] Nyní tyto pojmy formalizujeme.

Definice 1.3.1 (Kongruence)**.** Mějme ekvivalenci $\sim$ na množině A, funkci $f\colon A^n \to A$, a relaci $R \subseteq A^n$. Říkáme, že $\sim$ je

- *kongruencí pro funkci* f, pokud pro všechna $x_i, y_i \in A$ taková, že $x_i \sim y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ platí $f(x_1, \ldots, x_n) \sim f(y_1, \ldots, y_n)$,
- *kongruencí pro relaci* f, pokud pro všechna $x_i, y_i \in A$ taková, že $x_i \sim y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ platí $f(x_1, \ldots, x_n) \sim f(y_1, \ldots, y_n)$.

Kongruence struktury $\mathcal{A}$ je ekvivalence $\sim$ na množině A, která je kongruencí pro všechny funkce a relace $\mathcal{A}$.

Definice 1.3.2 (Faktorstruktura)**.** Mějme strukturu $\mathcal{A}$ a její kongruenci $\sim$. *Faktorstruktura (podílová struktura)* $\mathcal{A}$ podle $\sim$ je struktura $\mathcal{A}/_\sim$ v témž jazyce, jejíž univerzum $A/_\sim$ je množina všech rozkladových tříd A podle $\sim$, a jejíž funkce a relace jsou definované *pomocí reprezentantů*, tj:

- $f^{\mathcal{A}/\sim}([x_1]_\sim, \ldots, [x_n]_\sim) = [f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n)]_\sim$, pro každý ($n$-ární) funkční symbol f, a
- $R^{\mathcal{A}/\sim}([x_1]_\sim, \ldots, [x_n]_\sim)$ právě když $R^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n)$, pro každý ($n$-ární) relační symbol R.

Definice 1.3.3 (Axiomy rovnosti)**.** *Axiomy rovnosti* pro jazyk L s rovností jsou následující:

[6] Podobně např. $t_1 = t_2$ v Prologu neznamená, že jde o tentýž term, ale že termy t_1 a t_2 jsou *unifikovatelné*, viz kapitola o rezoluci v predikátové logice.

[7] Název pochází z kongruence modulo n, která je kongruencí v tomto smyslu na množině všech celých čísel, např. splňuje: $a + b \equiv c + d \pmod{n}$ kdykoliv $a \equiv c \pmod{n}$ a $b \equiv d \pmod{n}$.

[8] Stejně jako grupa $\mathbb{Z}_n$ je faktorstrukturou grupy $\mathbb{Z}$ podle $\equiv \pmod{n}$; např. prvek $2 \in \mathbb{Z}_n$ představuje množinu všech celých čísel, jejichž zbytek po dělení n je roven 2.

(i) $x = x$,

(ii) $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$ pro každý n-ární funkční symbol f jazyka L,

(iii) $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$ pro každý n-ární relační symbol R jazyka L *včetně rovnosti.*

Cvičení 1.2. První z axiomů rovnosti znamená reflexivitu relace $=^{\mathcal{A}}$. Kam se poděly symetrie a tranzitivita? Ukažte, že plynou z axiomu (iii) pro symbol rovnosti =.

Z axiomů (i) a (iii) tedy plyne, že relace $=^{\mathcal{A}}$ je ekvivalence na A, a axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že $=^{\mathcal{A}}$ je kongruencí $\mathcal{A}$. V tablo metodě v případě jazyka s rovností implicitně přidáme všechny axiomy rovnosti:

Definice 1.3.4 (Tablo důkaz s rovností)**.** Je-li T teorie v jazyce L s rovností, potom označme jako T^* rozšíření teorie T o generální uzávěry[9] axiomů rovnosti pro jazyk L. *Tablo důkaz* z teorie T je *tablo důkaz* z T^*, podobně pro tablo zamítnutí (a obecně jakékoliv tablo).

Platí následující jednoduché pozorování:

Pozorování 1.3.5. *Jestliže $\mathcal{A} \models T^*$, potom platí i $\mathcal{A}/_{=^{\mathcal{A}}} \models T^*$, a ve struktuře $\mathcal{A}/_{=^{\mathcal{A}}}$ je symbol rovnosti interpretován jako identita. Na druhou stranu, v každém modelu, ve kterém je symbol rovnosti interpretován jako identita, platí axiomy rovnosti.*

Toto pozorování využijeme při konstrukci *kanonického modelu*, který budeme potřebovat v důkazu Věty o úplnosti. Nejprve ale dokážeme Větu o korektnosti.

1.4 Korektnost a úplnost

V této sekci dokážeme, že tablo metoda je i v predikátové logice korektní a úplná. Důkazy obou vět mají stejnou strukturu jako ve výrokové logice, liší se jen v implementačních detailech.

1.4.1 Věta o korektnosti

Model (struktura) $\mathcal{A}$ se *shoduje* s položkou P, pokud $P = \mathrm{T}\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo $P = \mathrm{F}\varphi$ a $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Dále $\mathcal{A}$ se shoduje s větví V, pokud se shoduje s každou položkou na této větvi.

Ukážeme nejprve pomocné lemma analogické Lemmatu 1.4.1:

Lemma 1.4.1. *Shoduje-li se model $\mathcal{A}$ teorie T s položkou v kořeni tabla z teorie T (v jazyce L), potom lze $\mathcal{A}$ expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s některou větví v tablu.*

Všimněte si, že stačí expandovat $\mathcal{A}$ o nové konstanty c^{A} vyskytující se na větvi V. Ostatní konstantní symboly lze interpretovat libovolně.

Důkaz. Mějme tablo $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ z teorie T a model $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T)$ shodující se s kořenem τ, tedy s (jednoprvkovou) větví V_0 v (jednoprvkovém) τ_0.

Indukcí podle i najdeme posloupnost větví V_i a expanzí $\mathcal{A}_i$ modelu $\mathcal{A}$ o konstanty $c^{A} \in C$ vyskytující se na V_i takových, že V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem $\mathcal{A}_i$, V_{i+1} je prodloužením V_i, a $\mathcal{A}_{i+1}$ je expanzí $\mathcal{A}_i$ (mohou si být i rovny). Požadovaná větev tabla τ je

[9] Neboť v tablo metodě potřebujeme *sentence*.

potom $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$. Expanzi modelu $\mathcal{A}$ do jazyka L_C získáme jako 'limitu' expanzí $\mathcal{A}_i$, tj. vyskytuje-li se symbol $c \in C$ na V, vyskytuje se na nějaké z větví V_i a interpretujeme ho stejně jako v $\mathcal{A}_i$ (ostatní pomocné symboly interpretujeme libovolně).

- Pokud τ_{i+1} vzniklo z τ_i bez prodloužení větve V_i, definujeme $V_{i+1} = V_i$ a $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$.
- Pokud τ_{i+1} vzniklo z τ_i připojením položky Tα (pro nějaký axiom $\alpha \in T$) na konec větve V_i, definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev a $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme žádný nový pomocný konstantní symbol). Protože $\mathcal{A}_{i+1}$ je modelem T, platí v něm axiom α, tedy shoduje se i s novou položkou Tα.
- Nechť τ_{i+1} vzniklo z τ_i připojením atomického tabla pro nějakou položku P na konec větve V_i. Protože se model $\mathcal{A}_i$ shoduje s položkou P (která leží na větvi V_i), shoduje se i s kořenem připojeného atomického tabla.
  - Pokud jsme připojili atomické tablo pro logickou spojku, položíme $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ (nepřidali jsme nový pomocný symbol). Protože $\mathcal{A}_{i+1}$ se shoduje s kořenem atomického tabla, shoduje se i s některou z jeho větví (stejně jako ve výrokové logice); definujeme V_{i+1} jako prodloužení V_i o tuto větev.
  - Je-li položka P typu 'svědek': Pokud je $P = \mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$, potom $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$, tedy existuje $a \in A$ takové, že $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$. Větev V_{i+1} definujeme jako prodloužení V_i o nově přidanou položku T$\varphi(x/c)$ a model $\mathcal{A}_{i+1}$ jako expanzi $\mathcal{A}_i$ o konstantu $c^A = a$. Případ $P = \mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ je obdobný.
  - Je-li položka P typu 'všichni', větev V_{i+1} definujeme jako prodloužení V_i o atomické tablo. Nově přidaná položka je T$\varphi(x/t)$ nebo F$\varphi(x/t)$ pro nějaký L_C-term t. Předpokládejme, že jde o první z těchto dvou možností, pro druhou je důkaz analogický. Model $\mathcal{A}_{i+1}$ definujeme jako *libovolnou* expanzi $\mathcal{A}_i$ o nové konstanty vyskytující se v t. Protože $\mathcal{A}_i \models (\forall x)\varphi(x)$, platí i $\mathcal{A}_{i+1} \models (\forall x)\varphi(x)$ a tedy i $\mathcal{A}_{i+1} \models \varphi(x/t)$; model $\mathcal{A}_{i+1}$ se tedy shoduje s větví V_i.

□

Připomeňme stručně myšlenku důkazu Věty o korektnosti: Pokud by existoval důkaz a zároveň protipříklad, protipříklad by se musel shodovat s některou větví důkazu, ty jsou ale všechny sporné. Důkaz je tedy téměř stejný jako ve výrokové logice.

Věta 1.4.2 (O korektnosti). *Je-li výrok φ tablo dokazatelný z teorie T, potom je φ pravdivý v T, tj. $T \vdash \varphi \;\Rightarrow\; T \models \varphi$.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že $T \not\models \varphi$, tj. existuje $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T)$ takový, že $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Protože $T \vdash \varphi$, existuje sporné tablo z T s Fφ v kořeni. Model $\mathcal{A}$ se shoduje s Fφ, tedy podle Lemmatu 1.4.1 lze expandovat do jazyka L_C tak, že se expanze shoduje s nějakou větví V. Všechny větve jsou ale sporné. □

1.4.2 (draft) Věta o úplnosti

[TODO]

Stejně jako ve výrokové logice ukážeme, že *bezesporná* větev v *dokončeném* tablo důkazu poskytuje protipříklad: model teorie T, který se shoduje s položkou Fφ v kořeni tabla, tj.

neplatí v něm φ. Takových modelů může být více, definujeme proto opět jeden konkrétní, *kanonický*.

Model musí mít nějakou doménu. Jak ji získat z tabla, což je čistě sémantický objekt? Využijeme standardní (v matematice) trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické. Konkrétně, za doménu zvolíme množinu všech *konstantních termů* jazyka L_C.[10] Ty chápeme jako konečné řetězce. V následujícím budeme někdy (neformálně) místo termu t psát "t", abychom zdůraznili, že v daném místě chápeme t jako řetězec znaků, a ne např. jako termovou funkci, kterou je třeba vyhodnotit.[11]

Definice 1.4.3 (Kanonický model)**.** Mějme teorii T v jazyce $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ a nechť V je bezesporná větev nějakého dokončeného tabla z teorie T. Potom *kanonický model* pro V je L_C-struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^\mathcal{A} \cup C^\mathcal{A}, \mathcal{R}^\mathcal{A} \rangle$ definovaná následovně:

Je-li jazyk L bez rovnosti, potom:

- Doména A je množina všech konstantních L_C-termů.
- Pro každý n-ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a "s_1", ..., "s_n" z A:

$$(\text{“}s_1\text{”}, \dots, \text{“}s_n\text{”}) \in R^\mathcal{A} \text{ právě když na větvi } V \text{ je položka } \mathrm{T}R(s_1, \dots, s_n)$$

- Pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a "s_1", ..., "s_n" z A:

$$f^\mathcal{A}(\text{“}s_1\text{”}, \dots, \text{“}s_n\text{”}) = \text{“}f(s_1, \dots, s_n)\text{”}$$

  Speciálně, pro konstantní symbol c máme $c^\mathcal{A} = $ "c".

Funkci $f^\mathcal{A}$ tedy interpretujeme jako 'vytvoření' nového termu ze symbolu f a vstupních termů (řetězců).

Nechť je L jazyk s rovností. Připomeňme, že naše tablo je nyní z teorie T^*, tj. z rozšíření T o axiomy rovnosti pro L. Nejprve vytvoříme kanonický model $\mathcal{B}$ pro V jakoby byl L bez rovnosti (jeho doména B je tedy množina všech konstantních L_C-termů). Dále definujeme relaci $=^B$ stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$\text{“}s_1\text{”} =^B \text{“}s_2\text{”} \text{ právě když na větvi } V \text{ je položka } \mathrm{T}s_1 = s_2$$

Kanonický model pro V je potom faktorstruktura $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$.

Jak plyne z diskuze v Sekci 1.3, relace $=^B$ je opravdu kongruence struktury $\mathcal{B}$, definice je tedy korektní, a relace $=^\mathcal{A}$ je identita na A. Všimněte si, že v jazyce bez rovnosti je kanonický model vždy spočetně nekonečný. V jazyce s rovností může ale být konečný, jak uvidíme v následujících příkladech.

[TODO]Příklady

[TODO]Cvičení $x = y \vee y = z \vee x = z$

[10] Tj. termů zbudovaných aplikací funkčních symbolů jazyka L na konstantní symboly jazyka L (má-li nějaké) a pomocné konstantní symboly z C.

[11] Srovnejte aritmetický výraz "1+1" a 1+1=2.

Kanonický model - příklad

Nechť teorie $T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ je jazyka $L = \langle R, f, d\rangle$. Systematické tablo pro $F\neg R(d)$ z T obsahuje jedinou větev V a ta je bezesporná.

Kanonický model $\mathcal{A} = \langle A, R^A, f^A, d^A, c_i^A\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ z V je pro jazyk L_C a platí

$$\begin{aligned} A &= \{d, f(d), f(f(d)), \dots, c_0, f(c_0), f(f(c_0)), \dots, c_1, f(c_1), f(f(c_1)), \dots\}, \\ d^A &= d, \quad c_i^A = c_i \text{ pro } i \in \mathbb{N}, \\ f^A(d) &= \text{“}f(d)\text{”}, \quad f^A(f(d)) = \text{“}f(f(d))\text{”}, \quad f^A(f(f(d))) = \text{“}f(f(f(d)))\text{”}, \ \dots \\ R^A &= \{d, f(d), f(f(d)), \dots, f(c_0), f(f(c_0)), \dots, f(c_1), f(f(c_1)), \dots\}. \end{aligned}$$

Redukt $\mathcal{A}$ na jazyk L je $\mathcal{A}' = \langle A, R^A, f^A, d^A\rangle$.

Kanonický model s rovností - příklad

Nechť $T = \{(\forall x)R(f(x)),\ (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ je nad $L = \langle R, f, d\rangle$ s rovností. Systematické tablo pro $F\neg R(d)$ z T^* obsahuje bezespornou větev V.

V kanonickém modelu $\mathcal{A} = \langle A, R^A, =^A, f^A, d^A, c_i^A\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ z V pro relaci $=^A$ platí

$$s_1 =^A s_2 \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = f(\cdots(f(s_2)\cdots) \text{ nebo } s_2 = f(\cdots(f(s_1)\cdots),$$

kde f je aplikováno $2i$-krát pro nějaké $i \in \mathbb{N}$.

Kanonický model s rovností z V je $\mathcal{B} = (\mathcal{A}/{=^A}) = \langle A/{=^A}, R^B, f^B, d^B, c_i^B\rangle_{i\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} (A/{=^A}) &= \{[d]_{=^A}, [f(d)]_{=^A}, [c_0]_{=^A}, [f(c_0)]_{=^A}, [c_1]_{=^A}, [f(c_1)]_{=^A}, \dots\}, \\ d^B &= [d]_{=^A}, \quad c_i^B = [c_i]_{=^A} \text{ pro } i \in \mathbb{N}, \\ f^B([d]_{=^A}) &= [f(d)]_{=^A}, \quad f^B([f(d)]_{=^A}) = [f(f(d))]_{=^A} = [d]_{=^A}, \ \dots \\ R^B &= (A/{=^A}). \end{aligned}$$

Redukt $\mathcal{B}$ na jazyk L je $\mathcal{B}' = \langle A/{=^A}, R^B, f^B, d^B\rangle$.

Úplnost

Lemma *Kanonický model $\mathcal{A}$ z bezesporné dok. větve V se shoduje s V.*

Důkaz Indukcí dle struktury sentence vyskytující se v položce na V.

- Pro φ atomickou, je-li $T\varphi$ na V, je $\mathcal{A} \models \varphi$ dle (3). Je-li $F\varphi$ na V, není $T\varphi$ na V, neboť V je bezesporná, a tedy $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ dle (3).
- Je-li $T(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $T\varphi$ a $T\psi$ na V, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi$ a $\mathcal{A} \models \psi$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$.
- Je-li $F(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $F\varphi$ nebo $F\psi$ na V, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \neg\psi$, tedy $\mathcal{A} \models \neg(\varphi \wedge \psi)$.

- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech.
- Je-li $T(\forall x)\varphi(x)$ na V, je $T\varphi(x/t)$ na V pro každé $t \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$ pro každé $t \in A$, tedy $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\exists x)\varphi(x)$ na V.
- Je-li $T(\exists x)\varphi(x)$ na V, je $T\varphi(x/c)$ na V pro nějaké $c \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tedy $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\forall x)\varphi(x)$ na V. $\square$

Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve predikátové logice je úplná.

Věta *Pro každou teorii T a sentenci φ, je-li φ pravdivá v T, je φ tablo dokazatelná z T, tj. $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash \varphi$.*

Důkaz Nechť φ je pravdivá v T. Ukážeme, že libovolné dokončené tablo (např. systematické) τ z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni je sporné.

- Kdyby ne, v tablu τ je nějaká bezesporná větev V.
- Dle předchozího lemmatu existuje struktura $\mathcal{A}$ pro jazyk L_C shodující se s větví V, speciálně s položkou $F\varphi$ v kořeni, tj. $\mathcal{A} \models \neg\varphi$.
- Nechť $\mathcal{A}'$ je redukt struktury $\mathcal{A}$ na původní jazyk L. Platí $\mathcal{A}' \models \neg\varphi$.
- Jelikož větev V je dokončená, obsahuje $T\psi$ pro každé $\psi \in T$.
- Tedy $\mathcal{A}'$ je modelem T (neboť $\mathcal{A}'$ se shoduje s $T\psi$ pro každé $\psi \in T$).
- To je ale ve sporu s tím, že φ platí v každém modelu teorie T.

Tedy tablo τ je důkazem φ z T. $\square$

1.5 (draft) Důsledky korektnosti a úplnosti

[TODO]

Zavedeme syntaktické varianty již definovaných sémantických pojmů.

Nechť T je teorie jazyka L. Je-li sentence φ dokazatelná z T, řekneme, že φ je *věta* (*teorém*) teorie T. Množinu vět teorie T označme

$$\mathrm{Thm}^L(T) = \{\varphi \in \mathrm{Fm}_L \mid T \vdash \varphi\}.$$

Řekneme, že teorie T je

- *sporná*, jestliže je v T dokazatelný $\perp$ (spor), jinak je *bezesporná*,

- *kompletní*, jestliže není sporná a každá sentence je v ní dokazatelná či zamítnutelná, tj. $T \vdash \varphi$ či $T \vdash \neg\varphi$.
- *extenze* teorie T' jazyka L', jestliže $L' \subseteq L$ a $\mathrm{Thm}^{L'}(T') \subseteq \mathrm{Thm}^{L}(T)$, o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $L = L'$, a *konzervativní*, pokud $\mathrm{Thm}^{L'}(T') = \mathrm{Thm}^{L}(T) \cap \mathrm{Fm}_{\mathrm{L}'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T', jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T.

Z korektnosti a úplnosti tablo metody vyplývá, že předchozí pojmy se shodují se svými sémantickými variantami.

Důsledek *Pro každou teorii T a sentence φ, ψ jazyka L,*

- *$T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$,*
- $\mathrm{Thm}^{L}(T) = \theta^{L}(T)$*,*
- *T je sporná, právě když je sémanticky sporná, tj. nemá model,*
- *T je kompletní, právě když je sémanticky kompletní, tj. má až na elementární ekvivalenci jediný model,*
- *$T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (Věta o dedukci).*

Poznámka Větu o dedukci lze dokázat přímo, transformací příslušných tabel.

1.5.1 Löwenheim-Skolemova věta

[TODO]

Věta *Každá bezesporná teorie T spočetného jazyka L bez rovnosti má spočetně nekonečný model.*

Důkaz Nechť τ je systematické tablo z T s $F\bot$ v kořeni. Jelikož je dokončené a obsahuje bezespornou větev V, neboť $\bot$ není dokazatelný z T, existuje kanonický model $\mathcal{A}$ z V. Jelikož se $\mathcal{A}$ shoduje s V, jeho redukt na jazyk L je hledaným spočetně nekonečným modelem T. $\square$

Poznámka Jde o slabou verzi tzv. Löwenheim-Skolemovy věty. Ve spočetném jazyce s rovností je kanonický model s rovností spočetný.

Věta *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

Důkaz Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie T nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný $\bot$ systematickým tablem τ. Jelikož je τ konečné, je $\bot$ dokazatelný z nějaké konečné $T' \subseteq T$, tj. T' nemá model. $\square$

1.5.2 Věta o kompaktnosti

[TODO]

1.5.3 Aplikace

[TODO]

Nestandardní model přirozených čísel

Nechť $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je standardní model přirozených čísel.

Označme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ množinu všech pravdivých sentencí v $\underline{\mathbb{N}}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\underline{n}$ term $S(S(\cdots(S(0)\cdots)$, tzv. *n-tý numerál*, kde S je aplikováno n-krát.

Uvažme následující teorii T, kde c je nový konstantní symbol.

$$T = \mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Pozorování Každá konečná část teorie T má model.

Tedy dle věty o kompaktnosti má T model $\mathcal{A}$, jde o nestandardní model přirozených čísel*. Každá sentence z* $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ *v něm platí, ale zároveň obsahuje prvek c^A větší než každé $n \in \mathbb{N}$ (tj. hodnota termu $\underline{n}$ v $\mathcal{A}$).*

1.6 (draft) Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

[TODO]

Hilbertovský kalkul

- základní logické spojky a kvantifikátory: $\neg$, $\rightarrow$, $(\forall x)$ (ostatní odvozené)
- dokazují se libovolné formule (nejen sentence)
- *logické axiomy* (schémata logických axiomů)

(i)	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	
(ii)	$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$	
(iii)	$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	
(iv)	$(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$	je-li t substituovatelný za x do φ
(v)	$(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$	není-li x volná proměnná ve φ

  kde φ, ψ, χ jsou libovolné formule (daného jazyka), t je libovolný term a x je libovolná proměnná.

- je-li jazyk s rovností, mezi logické axiomy patří navíc axiomy rovnosti
- *odvozovací (deduktivní) pravidla*

$$\frac{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad \text{(modus ponens)}, \qquad \frac{\varphi}{(\forall x)\varphi} \quad \text{(generalizace)}$$

Pojem důkazu

Důkaz (*Hilbertova stylu*) formule φ z teorie T je konečná posloupnost $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ formulí taková, že pro každé $i \leq n$

- φ_i je logický axiom nebo $\varphi_i \in T$ (axiom teorie), nebo
- φ_i lze odvodit z předchozích formulí pomocí odvozovacích pravidel.

Formule φ je *dokazatelná* v T, má-li důkaz z T, značíme $T \vdash_H \varphi$.

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, $T \vdash_H \varphi \;\Rightarrow\; T \models \varphi$.*

Důkaz

- Je-li $\varphi \in T$ nebo logický axiom, je $T \models \varphi$ (logické axiomy jsou tautologie),
- jestliže $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \to \psi$, pak $T \models \psi$, *tj. modus ponens je korektní,*
- jestliže $T \models \varphi$, pak $T \models (\forall x)\varphi$, *tj. pravidlo generalizace je korektní,*
- tedy každá formule vyskytující se v důkazu z T platí v T. $\square$

Poznámka Platí i úplnost, tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$ *pro každou teorii T a formuli φ.*