NAIL062 V&P Logika: 7. cvičení

Témata: (Zápočtový test z výrokové logiky.) Syntaxe a sémantika predikátové logiky.

Příklad 1. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

(a) $(\exists x)(\forall y)P(y,z) \vee (y = 0)$

(b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$

(c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

Příklad 2. Označme φ formuli $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které z následujících termů jsou substituovatelné do φ?

(a) term z za proměnnou x, term y za proměnnou x,

(b) term z za proměnnou y, term $2 * y$ za proměnnou y,

(c) term x za proměnnou z, term y za proměnnou z,

Příklad 3. Jsou následující formule variantami formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?

(a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$

(b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$

(c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$

Příklad 4. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a,b,c,d\}, \rhd^A)$ v jazyce s jediným binárním relačním symbolem $\rhd$, kde $\rhd^A = \{(a,c),(b,c),(c,c),(c,d)\}$. Které z následujících formulí jsou pravdivé v $\mathcal{A}$?

(a) $x \rhd y$

(b) $(\exists x)(\forall y)(y \rhd x)$

(c) $(\exists x)(\forall y)((y \rhd x) \to (x \rhd x))$

(d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \rhd z) \wedge (z \rhd y))$

(e) $(\forall x)(\exists y)((x \rhd z) \vee (z \rhd y))$

Příklad 5. Pro každou formuli φ z předchozího příkladu najděte strukturu $\mathcal{B}$ (pokud existuje) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Příklad 6. Jsou následující sentence pravdivé / lživé / nezávislé (v logice)?

(a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$

(b) $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$

(c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$

(d) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$

(e) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

Příklad 7. Dokažte (sémanticky) nebo najděte protipříklad: Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, a sentenci ψ,

(a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$

(b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$

(c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$

(d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

Platí to i pro každou formuli ψ s volnou proměnnou x? A pro každou formuli ψ ve které x není volná?

Příklad 8. Rozhodněte, zda následující platí pro každou formuli φ. Dokažte (sémanticky, z definic) nebo najděte protipříklad.

(a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$

(b) $\models \varphi \to (\forall x)\varphi$

(c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$

(d) $\models \varphi \to (\exists x)\varphi$

Příklad 9. Buď $L = \langle +, -, 0 \rangle$ jazyk teorie grup (s rovností). Teorie grup T sestává z těchto axiomů:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z \\ 0 + x = x &= x + 0 \\ x + (-x) = 0 &= (-x) + x \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T.

(a) $x + y = y + x$

(b) $x + y = x \ \to \ y = 0$

(c) $x + y = 0 \ \to \ y = -x$

(d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

Domácí úkol. Tentokrát žádný není.