

# Kapitola 1

## Tablo metoda v predikátové logice

V této kapitole ukážeme, jak lze zobecnit *metodu analytického tabla* z výrokové na predikátovou logiku.<sup>1</sup> Metoda funguje velmi podobně, musíme si ale poradit *kvantifikátory*.

### 1.1 Neformální úvod

V této sekci tablo metodu neformálně představíme. K formálním definicím se vrátíme později. Začneme dvěma příklady, na kterých ilustruje, jak tablo metoda v predikátové logice funguje, a jak se vypořádá s kvantifikátory.

*Příklad 1.1.1.* Na Obrázku 1.1.1 jsou znázorněna dvě tabla. Jsou to tablo důkazy (v logice, tj. z prázdné teorie) *sentencí*  $(\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$  (vpravo) a  $\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$  (vlevo) jazyka  $L = \langle P \rangle$  (bez rovnosti), kde  $P$  je unární relační symbol. Symbol  $c_0$  je *pomocný konstantní symbol*, který do jazyka při konstrukci tabla přidáváme.

#### Položky

Formule v položkách musí být vždy *sentence*, neboť potřebujeme, aby měly v daném modelu *pravdivostní hodnotu* (nezávisle na ohodnocení proměnných). To ale není zásadní omezení, chceme-li dokázat, že formule  $\varphi$  platí v teorii  $T$ , můžeme nejprve nahradit formuli  $\varphi$  a všechny axiomy  $T$  jejich *generálními uzávěry* (tj. univerzálně kvantifikujeme všechny volné proměnné). Získáme tak *uzavřenou* teorii  $T'$  a sentenci  $\varphi'$  a platí:  $T' \models \varphi'$  právě když  $T \models \varphi$ .

#### Kvantifikátory

Redukce položek funguje stejně, použijeme tatáž atomická tabla pro logické spojky (viz Tabulka ??, kde místo výroků jsou  $\varphi, \psi$  sentence). Musíme ale přidat 4 nová atomická tabla pro T/F a univerzální/existenční kvantifikátor. Tyto položky dělíme na dva typy:

- typ “*svědek*”: položky tvaru  $T(\exists x)\varphi(x)$  a  $F(\forall x)\varphi(x)$
- typ “*všichni*”: položky tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  a  $F(\exists x)\varphi(x)$

Příklady vidíme v tablech na Obrázku 1.1.1 (‘svědci’ jsou červeně, ‘všichni’ modře).

---

<sup>1</sup>Na tomto místě je dobré připomenout si tablo metodu ve výrokové logice, viz Kapitola ??.



Obrázek 1.1: Příklady tabel. Položky typu ‘svědek’ jsou znázorněny červeně, položky typu ‘všichni’ modře.

Kvantifikátor nemůžeme pouze odstranit, neboť výsledná formule  $\varphi(x)$  by nebyla sentencí. Místo toho současně s odstraněním kvantifikátoru *substituujeme* za  $x$  nějaký *konstantní term*, v nové položce tedy bude *sentence*  $\varphi(x/t)$ . Jaký konstantní term  $t$  substituujeme záleží na tom, zda jde o položku typu “svědek” nebo “všichni”.

### Pomocné konstantní symboly

Jazyk  $L$  teorie  $T$ , ve které dokazujeme, rozšíříme o spočetně mnoho *nových* (*pomocných*) *konstantních symbolů*  $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$  (ale budeme psát i  $c, d, \dots$ ), výsledný rozšířený jazyk označíme  $L_C$ . Konstantní termy v jazyce  $L_C$  tedy existují, i pokud původní jazyk  $L$  nemá žádné konstanty. A vždy při konstrukci tabla máme k dispozici nějaký *nový*, dosud *nepoužitý* (ani v teorii, ani v konstruovaném tablu) pomocný konstantní symbol  $c \in C$ .

### Svědci

Při redukci položky typu “svědek” substituujeme za proměnnou jeden z těchto nových, pomocných symbolů, a to takový, který *dosud nebyl na dané větvi použit*. V případě položky  $T(\exists x)\varphi(x)$  tedy máme  $T\varphi(x/c)$ . Tento konstantní symbol  $c$  bude hrát roli (nějakého) prvku, který danou formuli splňuje (resp. vyvrací, jde-li o položku tvaru  $F(\forall x)\varphi(x)$ ). Zde používáme větu o konstantách (Věta ??). Je důležité, že symbol  $c$  dosud nebyl na větvi ani v teorii nijak použit. Typicky ale poté použijeme položky typu “všichni”, abychom se dozvěděli, co musí o tomto svědku platit.

Na Obrázku 1.1.1 vidíme příklad: položka  $T(\exists x)\neg P(x)$  v levém tablu je redukována, její redukcí vznikla položka  $T\neg P(c_0)$ ;  $c_0 \in C$  je pomocný symbol, na větvi se dosud nevyskytoval

(a je první takový). Podobně pro položku  $F(\forall x)P(x)$  a  $FP(c_0)$  v pravém tablu.

## Všichni

Při redukci položky typu “všichni” substituujeme za proměnnou  $x$  libovolný *konstantní term*  $t$  rozšířeného jazyka  $L_C$ . Z položky tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  tedy získáme položku  $T\varphi(x/t)$ .

Aby byla bezesporná větev *dokončená*, budou na ní ale muset být položky  $T\varphi(x/t)$  pro *všechny* konstantní  $L_C$ -termy  $t$ . (Musíme ‘použít’ vše, co položka  $T(\forall x)\varphi(x)$  ‘říká’.) A stejně pro položku tvaru  $F(\exists x)\varphi(x)$ .

Ve výrokové logice jsme používali konvenci, že při připojování atomických tabel vynecháváme jejich kořeny (jinak bychom opakovali na větvi tutéž položku dvakrát). V predikátové logice použijeme stejnou konvenci, ale *s výjimkou položek typu ‘svědek’*. U těch zapíšeme i kořen připojovaného atomického tabla. Proč to děláme? Abychom si připomněli, že s touto položkou ještě nejsme hotovi, že musíme připojit atomická tabla s jinými konstantními termy.

Na Obrázku 1.1.1 v levém tablu *není* položka  $T(\forall x)P(x)$  *redukována*. Její *první výskyt* (4. vrchol shora) jsme zredukovali, substituujeme term  $t = c_0$ , máme tedy  $\varphi(x/t) = P(c_0)$ . Připojili jsme atomické tablo v sestávající z téže položky v kořeni  $T(\forall x)P(x)$ , kterou do tabla *zapíšeme*, a z položky  $TP(c_0)$  pod ní. Zatímco *první výskyt* položky  $T(\forall x)P(x)$  je tímto redukováný, *druhý výskyt* (7. vrchol shora) redukováný není. Podobně pro položku  $F(\exists x)\neg P(x)$  v pravém tablu.

Tento poněkud technický přístup k definici *redukovatosti* (výskytů) položek typu ‘všichni’ se nám bude hodit v definici *systematického tabla*.

## Jazyk

Nadále budeme předpokládat, že jazyk  $L$  je *spočetný*.<sup>2</sup> Z toho plyne, že každá  $L$ -teorie  $T$  má jen spočetně mnoho axiomů, a také že konstantních termů v jazyce  $L_C$  je jen spočetně mnoho. Toto omezení potřebujeme, neboť každé, i nekonečné tablo má jen spočetně mnoho položek, a musíme být schopni použít všechny axiomy dané teorie, a substituovat všechny konstantní termy jazyka  $L_C$ .

Nejprve také budeme předpokládat, že jde o jazyk *bez rovnosti*, což je jednodušší. Problémem je, že *tablo* je čistě syntaktický objekt, ale *rovnost* má speciální sémantický význam, totiž musí být v každém modelu interpretována relací identity. Jak adaptovat metodu pro jazyky s rovností si ukážeme později.

## 1.2 Formální definice

V této sekci definujeme všechny pojmy potřebné pro tablo metodu pro jazyky bez rovnosti. K jazykům s rovností se vrátíme v Sekci 1.3.

Buď  $L$  *spočetný* jazyk bez rovnosti. Označme jako  $L_C$  rozšíření jazyka  $L$  o spočetně mnoho nových *pomocných* konstantních symbolů  $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Zvolme nějaké očíslování konstantních termů jazyka  $L_C$ , označme tyto termy  $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ .

Mějme nějakou  $L$ -teorii  $T$  a  $L$ -sentenci  $\varphi$ .

<sup>2</sup>Z hlediska výpočetní logiky to není velké omezení.

### 1.2.1 Atomická tabla

*Položka* je nápis  $T\varphi$  nebo  $F\varphi$ , kde  $\varphi$  je nějaká  $L_C$ -sentence. Položky tvaru  $T(\exists x)\varphi(x)$  a  $F(\forall x)\varphi(x)$  jsou *typu ‘svědek’*, položky tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  a  $F(\exists x)\varphi(x)$  jsou *typu ‘všichni’*

*Atomická tabla* jsou položkami označované stromy znázorněné v Tabulkách 1.1 a 1.2.

	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
True	$\begin{array}{c} T\neg\varphi \\   \\ F\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} T\varphi \wedge \psi \\   \\ T\varphi \\   \\ T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \vee \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \rightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ F\varphi & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \leftrightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & F\varphi \\   \quad   & \\ T\psi & F\psi \end{array}$
False	$\begin{array}{c} F\neg\varphi \\   \\ T\varphi \end{array}$	$\begin{array}{cc} F\varphi \wedge \psi & \\ / \quad \backslash & \\ F\varphi & F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F\varphi \vee \psi \\   \\ F\varphi \\   \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F\varphi \rightarrow \psi \\   \\ T\varphi \\   \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} F\varphi \leftrightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & F\varphi \\   \quad   & \\ F\psi & T\psi \end{array}$

Tabulka 1.1: Atomická tabla pro logické spojky;  $\varphi$  a  $\psi$  jsou libovolné  $L_C$ -sentence.

	$\forall$	$\exists$
True	$\begin{array}{c} T(\forall x)\varphi(x) \\   \\ T\varphi(x/t_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} T(\exists x)\varphi(x) \\   \\ T\varphi(x/c_i) \end{array}$
False	$\begin{array}{c} F(\forall x)\varphi(x) \\   \\ F\varphi(x/c_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\exists x)\varphi(x) \\   \\ F\varphi(x/t_i) \end{array}$

Tabulka 1.2: Atomická tabla pro kvantifikátory;  $\varphi$  je  $L_C$ -sentence,  $x$  proměnná,  $t_i$  libovolný konstantní  $L_C$ -term,  $c_i \in C$  je nový pomocný konstantní symbol (který se dosud nevyskytuje na dané větvi konstruovaného tabla).

### 1.2.2 Tablo důkaz

Definice v této části jsou téměř identické odpovídajícím definicím z výrokové logiky. Hlavní technický problém je jak definovat redukovanost položek typu ‘všichni’ na větvi tabla: chceme aby za proměnnou byly substituovány *všechny* možné konstantní  $L_C$ -termy  $t_i$ .

**Definice 1.2.1** (Tablo). *Konečné tablo z teorie  $T$*  je uspořádaný, položkami označovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:

- jednoprvkový strom označovaný libovolnou položkou je tablo z teorie  $T$ ,

- pro libovolnou položku  $P$  na libovolné větvi  $V$ , můžeme na konec větve  $V$  připojit atomické tablo pro položku  $P$ , přičemž je-li  $P$  typu ‘svědek’, můžeme použít jen pomocný konstantní symbol  $c_i \in C$ , který se na větvi  $V$  dosud nevyskytuje (pro položky typu ‘všichni’ můžeme použít libovolný konstantní  $L_C$ -term  $t_i$ ),
- na konec libovolné větve můžeme připojit položku  $T\alpha$  pro libovolný axiom teorie  $\alpha \in T$ .

*Tablo z teorie  $T$*  je buď konečné, nebo i *nekonečné*: v tom případě vzniklo ve spočetně mnoha krocích. Můžeme ho formálně vyjádřit jako sjednocení  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ , kde  $\tau_i$  jsou konečná tabla z  $T$ ,  $\tau_0$  je jednoprvkové tablo, a  $\tau_{i+1}$  vzniklo z  $\tau_i$  v jednom kroku.<sup>3</sup>

Tablo *pro položku  $P$*  je tablo, které má položku  $P$  v kořeni.

Připomeňme konvenci, že pokud  $P$  *není* typu ‘všichni’, potom kořen atomického tabla nebudeme zapisovat (neboť vrchol s položkou  $P$  už v tablu je).

*Cvičení 1.1.* Ukažte v jednotlivých krocích jak byla tabla z Obrázku 1.1.1 zkonstruována.

**Definice 1.2.2** (Tablo důkaz). *Tablo důkaz* sentence  $\varphi$  z teorie  $T$  je *sporné* tablo z teorie  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni. Pokud existuje, je  $\varphi$  (tablo) *dokazatelná* z  $T$ , píšeme  $T \vdash \varphi$ . (Definujme také *tablo zamítnutí* jako sporné tablo s  $T\varphi$  v kořeni. Pokud existuje, je  $\varphi$  (tablo) *zamítnutelná* z  $T$ , tj. platí  $T \vdash \neg\varphi$ .)

- Tablo je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je *sporná*, pokud obsahuje položky  $T\psi$  a  $F\psi$  pro nějaký výrok  $\psi$ , jinak je *beze-sporná*.
- Tablo je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je *dokončená*, pokud
  - je sporná, nebo
  - je každá položka na této větvi *redukována* a zároveň větev obsahuje položku  $T\alpha$  pro každý axiom  $\alpha \in T$ .
- Položka  $P$  je *redukována* na větvi  $V$  procházející touto položkou, pokud
  - není typu ‘všichni’ a při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na  $V$ , tj. vyskytuje se na  $V$  jako kořen atomického tabla.<sup>4</sup>
  - je typu ‘všichni’ a všechny její *výskyty* na  $V$  jsou na větvi  $V$  *redukovány*.
- Výskyt položky  $P$  typu ‘všichni’ na větvi  $V$  je  *$i$ -tý*, pokud má na  $V$  právě  $i - 1$  předků označených touto položkou, a  $i$ -tý výskyt je *redukováný* na  $V$ , pokud
  - položka  $P$  má  $(i + 1)$ -ní výskyt na  $V$ , a zároveň
  - na  $V$  se vyskytuje položka  $T\varphi(x/t_i)$  (je-li  $P = T(\forall x)\varphi(x)$ ) resp.  $F\varphi(x/t_i)$  (je-li  $P = F(\exists x)\varphi(x)$ ), kde  $t_i$  je  $i$ -tý konstantní  $L_C$ -term.<sup>5</sup>

<sup>3</sup>Sjednocení proto, že v jednotlivých krocích přidáváme do tabla nové vrcholy,  $\tau_i$  je tedy podstromem  $\tau_{i+1}$ .

<sup>4</sup>Byť podle konvence tento kořen nezapisujeme.

<sup>5</sup>Tj. (typicky) už jsme za  $x$  substituovali term  $t_i$ .

Všimněte si, že je-li položka typu ‘všichni’ na nějaké větvi redukována, musí mít na této větvi nekonečně mnoho výskytů, a museli jsme v nich použít při substituci všechny možnosti, tj. všechny konstantní  $L_C$ -termy.

*Příklad 1.2.3.* Jako příklad sestrojme tablo důkazy v logice (z prázdné teorie) následujících sentencí:

- (a)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$ , kde  $P, Q$  jsou unární relační symboly.
- (b)  $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$ , kde  $\varphi(x), \psi(x)$  jsou libovolné formule s jedinou volnou proměnnou  $x$ .

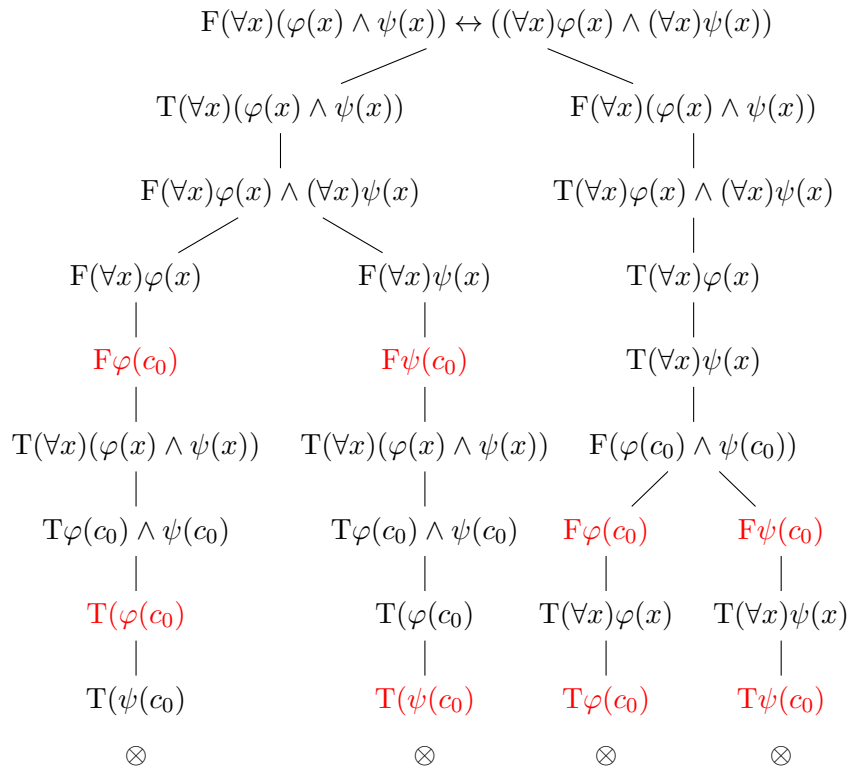
Výsledná tabla jsou na Obrázcích 1.2 a 1.3. Dvojice sporných položek jsou znázorněny červeně. Rozmyslete si, jak byla tabla po krocích zkonstruována.



Obrázek 1.2: Tablo důkaz z Příkladu 1.2.3 (a).

### 1.2.3 Systematické tablo a konečnost důkazů

V Sekci ?? jsme ukázali, že neprodlužujeme-li sporné větve (což nemusíme dělat), potom sporné tablo, speciálně tablo důkaz, bude vždy konečný. Stejný důkaz funguje i v logice predikátové.



Obrázek 1.3: Tablo důkaz z Příkladu 1.2.3 (b). Konstantu  $c_0$  můžeme použít jako *novou* ve všech třech případech. Stačí, že se zatím nevyskytuje *na dané větvi*.

**Důsledek 1.2.4** (Konečnost důkazů). *Pokud  $T \vdash \varphi$ , potom existuje i konečný tablo důkaz  $\varphi$  z  $T$ .*

*Důkaz.* Stejný jako ve výrokové logice, viz důkaz Důsledku ??.

Ve stejné sekci jsme si ukázali konstrukci *systematického tabla*. Tu lze také snadno adaptovat na predikátovou logiku. Musíme zajistit, abychom někdy zredukovali každou položku, použili každý axiom, a nově v predikátové logice také substituovali každý  $L_C$  term  $t_i$  za proměnnou v položkách typu ‘všichni’.

**Definice 1.2.5.** Mějme položku  $R$  a teorii  $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ . *Systematické tablo* z teorie  $T$  pro položku  $R$  je tablo  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ , kde  $\tau_0$  je jednoprvkové tablo s položkou  $R$ , a pro každé  $i \geq 0$ :

Buď  $P$  položka v nejlevějším vrcholu  $v$  na co nejmenší úrovni tabla  $\tau_i$ , která není redukována na nějaké bezesporné větvi procházející  $P$  (resp. jde-li o položku typu ‘všichni’, její výskyt v tomto vrcholu není redukován). Potom  $\tau'_i$  je tablo vzniklé z  $\tau_i$  připojením atomického tabla pro  $P$  na každou bezespornou větev procházející  $v$ , kde

- je-li  $P$  typu ‘všichni’ a má-li ve vrcholu  $v$   $k$ -tý výskyt, potom za proměnnou substituujeme  $k$ -tý  $L_C$ -term  $t_k$ ,
- je-li  $P$  typu ‘svědek’, potom na dané větvi  $V$  za proměnnou substituujeme  $c_i \in C$  s nejmenším možným  $i$  (takovým, že na  $V$  se  $c_i$  dosud nevyskytuje).

Jinak, pokud taková položka  $P$  a vrchol  $v$  neexistují, tj. všechny položky jsou redukovány, definujeme  $\tau'_i = \tau_i$ .

Tablo  $\tau_{i+1}$  je potom tablo vzniklé z  $\tau'_i$  připojením  $T\alpha_i$  na každou bezespornou větev  $\tau'_i$ , pokud  $i \leq |T|$ . Jinak (je-li  $T$  konečná a už jsme použili všechny axiomy) tento krok přeskočíme a definujeme  $\tau_{i+1} = \tau'_i$ .

Stejně jako ve výrokové logice platí, že systematické tablo je vždy dokončené, a poskytuje konečný důkaz:

**Lemma 1.2.6.** *Systematické tablo je dokončené.*

*Důkaz.* Obdobný jako důkaz ve výrokové logice (Lemma ??). Pro položky typu ‘všichni’ si všimněte, že  $k$ -tý výskyt redukuje v momentě, kdy na něj při konstrukci narazíme: připojením vrcholu s  $(k+1)$ -ním výskytem a substitucí  $k$ -tého  $L_C$ -termu  $t_k$ .

**Důsledek 1.2.7** (Systematicčnost důkazů). *Pokud  $T \vdash \varphi$ , potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem  $\varphi$  z  $T$ .*

*Důkaz.* Stejný jako důkaz ve výrokové logice (Důsledek ??).

### 1.3 Jazyky s rovností

Nyní si ukážeme, jak aplikovat tablo metodu na jazyky s rovností. Co je to rovnost? V matematice může v různém kontextu znamenat různé relace. Platí  $1 + 0 = 0 + 1$ ? Mluvíme-li



o celých číslech, pak ano, ale máme-li na mysli aritmetické výrazy (nebo např. termy v jazyce těles), potom si levá a pravá strana nejsou rovny: jde o jiné výrazy.<sup>6</sup>

Představte si, že máme teorii  $T$  v jazyce s rovností obsahujícím konstantní symboly  $c_1, c_2$ , unární funkční symbol  $f$  a unární relační symbol  $P$ . Mějme nějaké dokončené tablo z této teorie, a v něm bezespornou větev, na kterém najdeme položku  $Tc_1 = c_2$ . Budeme chtít sestrojit *kanonický model*  $\mathcal{A}$  pro tuto větev, podobně jako ve výrokové logice. Položka bude znamenat, že v kanonickém modelu platí  $c_1^{\mathcal{A}} =^{\mathcal{A}} c_2^{\mathcal{A}}$ , tj.  $(c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}) \in =^{\mathcal{A}}$ . To nám ale nestačí, chceme také, aby platilo také např.:

- $c_2^{\mathcal{A}} =^{\mathcal{A}} c_1^{\mathcal{A}}$ ,
- $f^{\mathcal{A}}(c_1^{\mathcal{A}}) =^{\mathcal{A}} f^{\mathcal{A}}(c_2^{\mathcal{A}})$ ,
- $c_1^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$ , právě když  $c_2^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$ .

Obecně tedy chceme, aby relace  $=^{\mathcal{A}}$  byla tzv. *kongruencí*,<sup>7</sup> tj. ekvivalencí, která se chová ‘dobře’ vůči funkcím a relacím struktury  $\mathcal{A}$ . Toho docílíme tak, že k teorii  $T$  přidáme tzv. *axiomy rovnosti*, které tyto vlastnosti vynutí, a tablo sestrojíme z výsledné teorie  $T^*$ .

V modelu  $\mathcal{A}$  potom bude relace  $=^{\mathcal{A}}$  kongruencí. To nám ale nestačí, chceme, aby rovnost byla *identita*, tj. aby  $(a, b) \in =^{\mathcal{A}}$  platilo jedině když  $a$  a  $b$  jsou týmž prvkem univerza. Toho docílíme identifikací všech  $=^{\mathcal{A}}$ -ekvivalentních prvků do jediného prvku. Této konstrukci se říká *faktorstruktura* podle kongruence  $=^{\mathcal{A}}$ .<sup>8</sup> Nyní tyto pojmy formalizujeme.

**Definice 1.3.1** (Kongruence). Mějme ekvivalenci  $\sim$  na množině  $A$ , funkci  $f: A^n \rightarrow A$ , a relaci  $R \subseteq A^n$ . Říkáme, že  $\sim$  je

- *kongruencí pro funkci*  $f$ , pokud pro všechna  $x_i, y_i \in A$  taková, že  $x_i \sim y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) platí  $f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n)$ ,
- *kongruencí pro relaci*  $f$ , pokud pro všechna  $x_i, y_i \in A$  taková, že  $x_i \sim y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) platí  $f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n)$ .

*Kongruence struktury*  $\mathcal{A}$  je ekvivalence  $\sim$  na množině  $A$ , která je kongruencí pro všechny funkce a relace  $\mathcal{A}$ .

**Definice 1.3.2** (Faktorstruktura). Mějme strukturu  $\mathcal{A}$  a její kongruenci  $\sim$ . *Faktorstruktura* (*podílová struktura*)  $\mathcal{A}/\sim$  podle  $\sim$  je struktura  $\mathcal{A}/\sim$  v témž jazyce, jejíž univerzum  $A/\sim$  je množina všech rozkladových tříd  $A$  podle  $\sim$ , a jejíž funkce a relace jsou definované *pomocí reprezentantů*, tj:

- $f^{\mathcal{A}/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) = [f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)]_{\sim}$ , pro každý  $(n$ -ární) funkční symbol  $f$ , a
- $R^{\mathcal{A}/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim})$  právě když  $R^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)$ , pro každý  $(n$ -ární) relační symbol  $R$ .

**Definice 1.3.3** (Axiomy rovnosti). *Axiomy rovnosti* pro jazyk  $L$  s rovností jsou následující:

<sup>6</sup>Podobně např.  $t_1 = t_2$  v Prologu neznamená, že jde o tentýž term, ale že termy  $t_1$  a  $t_2$  jsou *unifikovatelné*, viz kapitola o rezoluci v predikátové logice.

<sup>7</sup>Název pochází z kongruence modulo  $n$ , která je kongruencí v tomto smyslu na množině všech celých čísel, např. splňuje:  $a + b \equiv c + d \pmod{n}$  kdykoliv  $a \equiv c \pmod{n}$  a  $b \equiv d \pmod{n}$ .

<sup>8</sup>Stejně jako grupa  $\mathbb{Z}_n$  je faktorstrukturou grupy  $\mathbb{Z}$  podle  $\equiv \pmod{n}$ ; např. prvek  $2 \in \mathbb{Z}_n$  představuje množinu všech celých čísel, jejichž zbytek po dělení  $n$  je roven 2.

- (i)  $x = x$ ,
- (ii)  $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$  pro každý  $n$ -ární funkční symbol  $f$  jazyka  $L$ ,
- (iii)  $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$  pro každý  $n$ -ární relační symbol  $R$  jazyka  $L$  včetně rovnosti.

**Cvičení 1.2.** První z axiomů rovnosti znamená reflexivitu relace  $=^A$ . Kam se poděly symetrie a tranzitivita? Ukažte, že plynou z axiomu (iii) pro symbol rovnosti  $=$ .

Z axiomů (i) a (iii) tedy plyne, že relace  $=^A$  je ekvivalence na  $A$ , a axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že  $=^A$  je kongruencí  $\mathcal{A}$ . V tablo metodě v případě jazyka s rovností implicitně přidáme všechny axiomy rovnosti:

**Definice 1.3.4** (Tablo důkaz s rovností). Je-li  $T$  teorie v jazyce  $L$  s rovností, potom označme jako  $T^*$  rozšíření teorie  $T$  o generální uzávěry<sup>9</sup> axiomů rovnosti pro jazyk  $L$ . *Tablo důkaz* z teorie  $T$  je *tablo důkaz* z  $T^*$ , podobně pro tablo zamítnutí (a obecně jakékoliv tablo).

Platí následující jednoduché pozorování:

**Pozorování 1.3.5.** Jestliže  $\mathcal{A} \models T^*$ , potom platí i  $\mathcal{A}/_{=^A} \models T^*$ , a ve struktuře  $\mathcal{A}/_{=^A}$  je symbol rovnosti interpretován jako identita. Na druhou stranu, v každém modelu, ve kterém je symbol rovnosti interpretován jako identita, platí axiomy rovnosti.

Toto pozorování využijeme při konstrukci *kanonického modelu*, který budeme potřebovat v důkazu Věty o úplnosti. Nejprve ale dokážeme Větu o korektnosti.

## 1.4 Korektnost a úplnost

V této sekci dokážeme, že tablo metoda je i v predikátové logice korektní a úplná. Důkazy obou vět mají stejnou strukturu jako ve výrokové logice, liší se jen v implementačních detailech.

### 1.4.1 Věta o korektnosti

Model (struktura)  $\mathcal{A}$  se *shoduje* s položkou  $P$ , pokud  $P = T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo  $P = F\varphi$  a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ . Dále  $\mathcal{A}$  se shoduje s větví  $V$ , pokud se shoduje s každou položkou na této větvi.

Ukážeme nejprve pomocné lemma analogické Lemmatu 1.4.1:

**Lemma 1.4.1.** *Shoduje-li se model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  s položkou v kořeni tablu z teorie  $T$  (v jazyce  $L$ ), potom lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  tak, že se shoduje s některou větví v tablu.*

Všimněte si, že stačí expandovat  $\mathcal{A}$  o nové konstanty  $c^A$  vyskytující se na větvi  $V$ . Ostatní konstantní symboly lze interpretovat libovolně.

*Důkaz.* Mějme tablo  $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$  z teorie  $T$  a model  $\mathcal{A} \in M_L(T)$  shodující se s kořenem  $\tau$ , tedy s (jednoprvkovou) větví  $V_0$  v (jednoprvkovém)  $\tau_0$ .

Indukcí podle  $i$  najdeme posloupnost větví  $V_i$  a expanzí  $\mathcal{A}_i$  modelu  $\mathcal{A}$  o konstanty  $c^A \in C$  vyskytující se na  $V_i$  takových, že  $V_i$  je větev v tablu  $\tau_i$  shodující se s modelem  $\mathcal{A}_i$ ,  $V_{i+1}$  je prodloužením  $V_i$ , a  $\mathcal{A}_{i+1}$  je expanzí  $\mathcal{A}_i$  (mohou si být i rovny). Požadovaná větev tablu  $\tau$  je

<sup>9</sup>Neboť v tablo metodě potřebujeme *sentence*.

potom  $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$ . Expanzi modelu  $\mathcal{A}$  do jazyka  $L_C$  získáme jako ‘limitu’ expanzí  $\mathcal{A}_i$ , tj. vyskytuje-li se symbol  $c \in C$  na  $V$ , vyskytuje se na nějaké z větví  $V_i$  a interpretujeme ho stejně jako v  $\mathcal{A}_i$  (ostatní pomocné symboly interpretujeme libovolně).

- Pokud  $\tau_{i+1}$  vzniklo z  $\tau_i$  bez prodloužení větve  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1} = V_i$  a  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ .
- Pokud  $\tau_{i+1}$  vzniklo z  $\tau_i$  připojením položky  $T\alpha$  (pro nějaký axiom  $\alpha \in T$ ) na konec větve  $V_i$ , definujeme  $V_{i+1}$  jako tuto prodlouženou větev a  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  (nepřidali jsme žádný nový pomocný konstantní symbol). Protože  $\mathcal{A}_{i+1}$  je modelem  $T$ , platí v něm axiom  $\alpha$ , tedy shoduje se i s novou položkou  $T\alpha$ .
- Nechť  $\tau_{i+1}$  vzniklo z  $\tau_i$  připojením atomického tabla pro nějakou položku  $P$  na konec větve  $V_i$ . Protože se model  $\mathcal{A}_i$  shoduje s položkou  $P$  (která leží na větvi  $V_i$ ), shoduje se i s kořenem připojeného atomického tabla.
  - Pokud jsme připojili atomické tablo pro logickou spojku, položíme  $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$  (nepřidali jsme nový pomocný symbol). Protože  $\mathcal{A}_{i+1}$  se shoduje s kořenem atomického tabla, shoduje se i s některou z jeho větví (stejně jako ve výrokové logice); definujeme  $V_{i+1}$  jako prodloužení  $V_i$  o tuto větev.
  - Je-li položka  $P$  typu ‘svědek’: Pokud je  $P = T(\exists x)\varphi(x)$ , potom  $\mathcal{A}_i \models (\exists x)\varphi(x)$ , tedy existuje  $a \in A$  takové, že  $\mathcal{A}_i \models \varphi(x)[e(x/a)]$ . Větev  $V_{i+1}$  definujeme jako prodloužení  $V_i$  o nově přidanou položku  $T\varphi(x/c)$  a model  $\mathcal{A}_{i+1}$  jako expanzi  $\mathcal{A}_i$  o konstantu  $c^A = a$ . Příklad  $P = F(\forall x)\varphi(x)$  je obdobný.
  - Je-li položka  $P$  typu ‘všichni’, větev  $V_{i+1}$  definujeme jako prodloužení  $V_i$  o atomické tablo. Nově přidaná položka je  $T\varphi(x/t)$  nebo  $F\varphi(x/t)$  pro nějaký  $L_C$ -term  $t$ . Předpokládejme, že jde o první z těchto dvou možností, pro druhou je důkaz analogický. Model  $\mathcal{A}_{i+1}$  definujeme jako *libovolnou* expanzi  $\mathcal{A}_i$  o nové konstanty vyskytující se v  $t$ . Protože  $\mathcal{A}_i \models (\forall x)\varphi(x)$ , platí i  $\mathcal{A}_{i+1} \models (\forall x)\varphi(x)$  a tedy i  $\mathcal{A}_{i+1} \models \varphi(x/t)$ ; model  $\mathcal{A}_{i+1}$  se tedy shoduje s větvi  $V_i$ .

□

Připomeňme stručně myšlenku důkazu Věty o korektnosti: Pokud by existoval důkaz a zároveň protipříklad, protipříklad by se musel shodovat s některou větví důkazu, ty jsou ale všechny sporné. Důkaz je tedy téměř stejný jako ve výrokové logice.

**Věta 1.4.2** (O korektnosti). *Je-li výrok  $\varphi$  tablo dokazatelný z teorie  $T$ , potom je  $\varphi$  pravdivý v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .*

*Důkaz.* Předpokládejme pro spor, že  $T \not\models \varphi$ , tj. existuje  $\mathcal{A} \in M(T)$  takový, že  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ . Protože  $T \vdash \varphi$ , existuje sporné tablo z  $T$  s  $F\varphi$  v kořeni. Model  $\mathcal{A}$  se shoduje s  $F\varphi$ , tedy podle Lemmatu 1.4.1 lze expandovat do jazyka  $L_C$  tak, že se expanze shoduje s nějakou větví  $V$ . Všechny větve jsou ale sporné. □

### 1.4.2 Věta o úplnosti

Stejně jako ve výrokové logice ukážeme, že *bezesporná* větev v *dokončeném* tablo důkazu poskytuje protipříklad: model teorie  $T$ , který se shoduje s položkou  $F\varphi$  v kořeni tabla, tj. neplatí v něm  $\varphi$ . Takových modelů může být více, definujeme proto opět jeden konkrétní, *kanonický*.

Model musí mít nějakou doménu. Jak ji získat z tabla, což je čistě sémantický objekt? Využijeme standardní (v matematice) trik: ze syntaktických objektů uděláme sémantické. Konkrétně, za doménu zvolíme množinu všech *konstantních termů* jazyka  $L_C$ .<sup>10</sup> Ty chápeme jako konečné řetězce. V následujícím budeme někdy (neformálně) místo termu  $t$  psát “ $t$ ”, abychom zdůraznili, že v daném místě chápeme  $t$  jako řetězec znaků, a ne např. jako termovou funkci, kterou je třeba vyhodnotit.<sup>11</sup>

**Definice 1.4.3** (Kanonický model). Mějme teorii  $T$  v jazyce  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$  a nechť  $V$  je bezesporná větev nějakého dokončeného tabla z teorie  $T$ . Potom *kanonický model* pro  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cup C^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \rangle$  definovaná následovně:

Je-li jazyk  $L$  bez rovnosti, potom:

- Doména  $A$  je množina všech konstantních  $L_C$ -termů.
- Pro každý  $n$ -ární relační symbol  $R \in \mathcal{R}$  a “ $s_1$ ”, ..., “ $s_n$ ” z  $A$ :

$$(\text{“}s_1\text{”}, \dots, \text{“}s_n\text{”}) \in R^{\mathcal{A}} \text{ právě když na větvi } V \text{ je položka } TR(s_1, \dots, s_n)$$

- Pro každý  $n$ -ární funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$  a “ $s_1$ ”, ..., “ $s_n$ ” z  $A$ :

$$f^{\mathcal{A}}(\text{“}s_1\text{”}, \dots, \text{“}s_n\text{”}) = \text{“}f(s_1, \dots, s_n)\text{”}$$

Speciálně, pro konstantní symbol  $c$  máme  $c^{\mathcal{A}} = \text{“}c\text{”}$ .

Funkci  $f^{\mathcal{A}}$  tedy interpretujeme jako ‘vytvoření’ nového termu ze symbolu  $f$  a vstupních termů (řetězců).

Nechť je  $L$  jazyk s rovností. Připomeňme, že naše tablo je nyní z teorie  $T^*$ , tj. z rozšíření  $T$  o axiomy rovnosti pro  $L$ . Nejprve vytvoříme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro  $V$  jakoby byl  $L$  bez rovnosti (jeho doména  $B$  je tedy množina všech konstantních  $L_C$ -termů). Dále definujeme relaci  $=^B$  stejně jako pro ostatní relační symboly:

$$\text{“}s_1\text{”} =^B \text{“}s_2\text{”} \text{ právě když na větvi } V \text{ je položka } Ts_1 = s_2$$

*Kanonický model* pro  $V$  je potom faktorstruktura  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B}$ .

Jak plyne z diskuze v Sekci 1.3, relace  $=^B$  je opravdu kongruence struktury  $\mathcal{B}$ , definice je tedy korektní, a relace  $=^{\mathcal{A}}$  je identita na  $A$ . Platí následující jednoduché pozorování:

**Pozorování 1.4.4.** Pro každou formuli  $\varphi$  máme  $\mathcal{B} \models \varphi$  (kde symbol  $=$  je interpretován jako binární relace  $=^B$ ), právě když  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=^B} \models \varphi$  (kde  $=$  je interpretován jako identita).

Všimněte si, že v jazyce bez rovnosti je kanonický model vždy spočetně nekonečný. V jazyce s rovností může ale být konečný, jak uvidíme v následujících příkladech.

*Příklad 1.4.5.* Nejprve si ukažme příklad kanonického modelu v jazyce bez rovnosti. Mějme teorii  $T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  bez rovnosti, kde  $R$  je unární relační,  $f$  unární funkční, a  $d$  konstantní symbol. Najdeme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$ .

<sup>10</sup>Tj. termů zbudovaných aplikací funkčních symbolů jazyka  $L$  na konstantní symboly jazyka  $L$  (má-li nějaké a pomocné konstantní symboly z  $C$ ).

<sup>11</sup>Srovnejte aritmetický výraz “ $1+1$ ” a  $1+1=2$ .

Systematické tablo z  $T$  s položkou  $F \neg R(d)$  v kořeni není sporné, obsahuje jedinou větev  $V$ , která je bezesporná. (Sestrojte si tablo sami!) Kanonický model pro  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$ , jejíž doména je

$$A = \{ "d", "f(d)", "f(f(d))", \dots, "c_0", "f(c_0)", "f(f(c_0))", \dots, "c_1", "f(c_1)", "f(f(c_1))", \dots \}$$

a interpretace symbolů jsou následující:

- $d^{\mathcal{A}} = "d"$ ,
- $c_i^{\mathcal{A}} = "c_i"$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ ,
- $f^{\mathcal{A}}("d") = "f(d)", f^{\mathcal{A}}("f(d)") = "f(f(d))", \dots$
- $R^{\mathcal{A}} = A \setminus C = \{ "d", "f(d)", "f(f(d))", \dots, "f(c_0)", "f(f(c_0))", \dots, "f(c_1)", "f(f(c_1))", \dots \}. \blacksquare$

Redukt kanonického modelu  $\mathcal{A}$  na původní jazyk  $L$  je potom  $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle$ .

*Příklad 1.4.6.* Nyní příklad v jazyce s rovností: Mějme teorii  $T = \{ (\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x))) \}$  v jazyce  $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností. Opět najdeme protipříklad ukazující, že  $T \not\models \neg R(d)$ .

Systematické tablo z teorie  $T^*$  (tj. z  $T$  rozšířené o axiomy rovnosti pro  $L$ ) s položkou  $F \neg R(d)$  v kořeni obsahuje bezespornou větev  $V$ . (Sestrojte si tablo sami!) Nejprve sestrojíme kanonický model  $\mathcal{B}$  pro tuto větev, jako by byl jazyk bez rovnosti:

$$\mathcal{B} = \langle B, R^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}}, d^{\mathcal{B}}, c_0^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{B}}, \dots \rangle$$

kde  $B$  je množina všech konstantních  $L_C$ -termů. Relace  $=^B$  je definovaná, jako by symbol '=' byl 'obyčejným' relačním symbolem v  $L$ . Je to kongruence struktury  $\mathcal{B}$ , a platí pro ni, že  $s_1 =^B s_2$  právě když  $s_1 = f(\dots(f(s_2))\dots)$  nebo  $s_2 = f(\dots(f(s_1))\dots)$  pro sudý počet aplikací  $f$ . Jako reprezentanty jednotlivých tříd tedy můžeme vybrat termy s žádným nebo jedním výskytem symbolu  $f$ :

$$B/_{=B} = \{ ["d"]_{=B}, ["f(d)]_{=B}, ["c_0"]_{=B}, ["f(c_0)]_{=B}, ["c_1"]_{=B}, ["f(c_1)]_{=B}, \dots \}$$

Kanonický model pro větev  $V$  je potom  $L_C$ -struktura

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, c_0^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$$

kde  $A = B/_{=B}$  a interpretace symbolů jsou následující:

- $d^{\mathcal{A}} = ["d"]_{=B}$ ,
- $c_i^{\mathcal{A}} = ["c_i"]_{=B}$  pro všechna  $i \in \mathbb{N}$ ,
- $f^{\mathcal{A}}(["d"]_{=B}) = ["f(d)]_{=B}, f^{\mathcal{A}}(["f(d)]_{=B}) = ["f(f(d))"]_{=B} = ["d"]_{=B}, \dots$
- $R^{\mathcal{A}} = A = B/_{=B}$ .

Redukt kanonického modelu  $\mathcal{A}$  na původní jazyk  $L$  je opět  $\mathcal{A}' = \langle A, R^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle$ .

*Cvičení 1.3.* (a) Sestrojte dokončené tablo s položkou  $T(\forall x)(\forall y)(x = y)$  v kořeni. Sestrojte kanonický model pro (jedinou, bezespornou) větev tohoto tabla.

- (b) Sestrojte dokončené tablo s položkou  $T(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z \vee y = z)$  v kořeni. Sestrojte kanonické modely pro několik bezesporných větví a porovnejte je.

Nyní jsme připraveni dokázat Větu o úplnosti. Použijeme opět následující pomocné lemma, jehož znění je zcela stejné, jako znění Lemmatu ?? a důkaz se liší jen v technických detailech.

**Lemma 1.4.7.** *Kanonický model pro (bezespornou dokončenou) větev  $V$  se shoduje s  $V$ .*

*Důkaz.* Nejprve uvažme jazyky bez rovnosti. Ukážeme indukcí podle struktury sentencí v položkách, že kanonický model  $\mathcal{A}$  se shoduje se všemi položkami  $P$  na větvi  $V$ .

Základ indukce, tj. případ, kdy  $\varphi = R(s_1, \dots, s_n)$  je atomická sentence, je jednoduchý: Je-li na  $V$  položka  $T\varphi$ , potom  $(s_1, \dots, s_n) \in R^{\mathcal{A}}$  plyne přímo z definice kanonického modelu, máme tedy  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Je-li na  $V$  položka  $F\varphi$ , potom na  $V$  není položka  $T\varphi$  ( $V$  je bezesporná),  $(s_1, \dots, s_n) \notin R^{\mathcal{A}}$ , a  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ .

Nyní indukční krok. Rozebereme jen několik případů, ostatní se dokáží obdobně.

Pro logické spojky je důkaz zcela stejný jako ve výrokové logice, například je-li  $P = F\varphi \wedge \psi$ , potom protože je  $P$  na  $V$  redukována, vyskytuje se na  $V$  položka  $F\varphi$  nebo položka  $F\psi$ . Platí tedy  $\mathcal{A} \not\models \varphi$  nebo  $\mathcal{A} \not\models \psi$ , z čehož plyne  $\mathcal{A} \not\models \varphi \wedge \psi$  a  $\mathcal{A}$  se shoduje s  $P$ .

Máme-li položku typu “všichni”, například  $P = T(\forall x)\varphi(x)$  (případ  $P = F(\exists x)\varphi(x)$  je obdobný), potom jsou na  $V$  i položky  $T\varphi(x/t)$  pro každý konstantní  $L_C$ -term, tj. pro každý prvek “ $t$ ”  $\in A$ . Dle indukčního předpokladu je  $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$  pro každé “ $t$ ”  $\in A$ , tedy  $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$ .

Máme-li položku typu “svědek”, například  $P = T(\exists x)\varphi(x)$  (případ  $P = F(\forall x)\varphi(x)$  je obdobný), potom je na  $V$  i položka  $T\varphi(x/c)$  pro nějaké “ $c$ ”  $\in A$ . Dle indukčního předpokladu je  $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$ , tedy i  $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$ .

Je-li jazyk s rovností, máme kanonický model  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/_{=B}$ , důkaz výše platí pro  $\mathcal{B}$ , a zbytek plyne z Pozorování 1.4.4.  $\square$

*Cvičení 1.4.* Ověřte zbývající případy v důkazu Lemmatu 1.4.7.

Důkaz Věty o úplnosti je také analogický její verzi pro výrokovou logiku:

**Věta 1.4.8** (O úplnosti). *Je-li sentence  $\varphi$  pravdivá v teorii  $T$ , potom je tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .*

*Důkaz.* Ukážeme, že libovolné dokončené tablo z  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni je nutně sporné. Důkaz provedeme sporem: kdyby takové tablo nebylo sporné, existovala by v něm bezesporná (dokončená) větev  $V$ . Uvažme kanonický model  $\mathcal{A}$  pro tuto větev, a označme jako  $\mathcal{A}'$  jeho redukt na jazyk  $L$ . Protože je  $V$  dokončená, obsahuje  $T\alpha$  pro všechny axiomy  $\alpha \in T$ . Model  $\mathcal{A}$  se podle Lemmatu 1.4.7 shoduje se všemi položkami na  $V$ , splňuje tedy všechny axiomy a máme i  $\mathcal{A}' \models T$ . Protože se ale  $\mathcal{A}$  shoduje i s položkou  $F\varphi$  v kořeni, platí i  $\mathcal{A}' \not\models \varphi$ , což znamená, že  $\mathcal{A}' \in M_L(T) \setminus M_L(\varphi)$ , tedy  $T \not\models \varphi$ , a to je spor. Tablo tedy muselo být sporné, tj. být tablo důkazem  $\varphi$  z  $T$ .  $\square$

## 1.5 (draft) Důsledky korektnosti a úplnosti

[TODO]

Stejně jako ve výrokové logice, Věty o korektnosti a úplnosti dohromady říkají, že *dokazatelnost* je totéž, co *platnost*. To nám umožňuje obdobně zformulovat syntaktické analogie sémantických pojmů a vlastností.

Analogií důsledků jsou *teorémy* teorie  $T$ :

$$\text{Thm}_{\mathbb{L}}(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

**Důsledek 1.5.1** (Dokazatelnost = platnost). *Pro libovolnou teorii  $T$  a sentence  $\varphi, \psi$  platí:*

- $T \vdash \varphi$  právě když  $T \models \varphi$
- $\text{Thm}_L(T) = \text{Csq}_L(T)$

Platí například:

- Teorie je *sporná*, jestliže je v ní dokazatelný spor (tj.  $T \vdash \perp$ ).
- Teorie je *kompletní*, jestliže pro každou sentenci  $\varphi$  je buď  $T \vdash \varphi$  nebo  $T \not\vdash \varphi$  (ale ne obojí, jinak by byla sporná).
- Věta o dedukci: Pro teorii  $T$  a sentence  $\varphi, \psi$  platí:  $T, \varphi \vdash \psi$  právě když  $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

Na závěr této sekce si ukážeme několik aplikací Vět o úplnosti a korektnosti.

### 1.5.1 Löwenheim-Skolemova věta

[TODO]

**Věta 1.5.2.** *Je-li*

**Věta** *Každá bezesporná teorie  $T$  spočetného jazyka  $L$  bez rovnosti má spočetně nekonečný model.*

*Důkaz* Nechť  $\tau$  je systematické tablo z  $T$  s  $F\perp$  v kořeni. Jelikož je dokončené a obsahuje bezespornou větev  $V$ , neboť  $\perp$  není dokazatelný z  $T$ , existuje kanonický model  $\mathcal{A}$  z  $V$ . Jelikož se  $\mathcal{A}$  shoduje s  $V$ , jeho redukt na jazyk  $L$  je hledaným spočetně nekonečným modelem  $T$ .  $\square$

*Poznámka* *Jde o slabou verzi tzv. Löwenheim-Skolemovy věty. Ve spočetném jazyce s rovností je kanonický model s rovností spočetný.*

**Věta** *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

*Důkaz* Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie  $T$  nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný  $\perp$  systematickým tablem  $\tau$ . Jelikož je  $\tau$  konečné, je  $\perp$  dokazatelný z nějaké konečné  $T' \subseteq T$ , tj.  $T'$  nemá model.  $\square$

### 1.5.2 Věta o kompaktnosti

[TODO]

### 1.5.3 Aplikace

[TODO]

## Nestandardní model přirozených čísel

Nechť  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je standardní model přirozených čísel.

Označme  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$  množinu všech pravdivých sentencí v  $\underline{\mathbb{N}}$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  označme  $\underline{n}$  term  $S(S(\dots(S(0)\dots)))$ , tzv.  $n$ -tý numerál, kde  $S$  je aplikováno  $n$ -krát.

Uvažme následující teorii  $T$ , kde  $c$  je nový konstantní symbol.

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

*Pozorování* Každá konečná část teorie  $T$  má model.

Tedy dle věty o kompaktnosti má  $T$  model  $\mathcal{A}$ , jde o nestandardní model přirozených čísel. Každá sentence  $\varphi \in \text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$  v něm platí, ale zároveň obsahuje prvek  $c^{\mathcal{A}}$  větší než každé  $n \in \mathbb{N}$  (tj. hodnota termu  $\underline{n}$  v  $\mathcal{A}$ ).

## 1.6 (draft) Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

[TODO]

### Hilbertovský kalkul

- základní logické spojky a kvantifikátory:  $\neg, \rightarrow, (\forall x)$  (ostatní odvozené)
- dokazují se libovolné formule (nejen sentence)
- *logické axiomy* (schémata logických axiomů)

- (i)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (ii)  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- (iii)  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (iv)  $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$  je-li  $t$  substituovatelný za  $x$  do  $\varphi$
- (v)  $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$  není-li  $x$  volná proměnná ve  $\varphi$

kde  $\varphi, \psi, \chi$  jsou libovolné formule (daného jazyka),  $t$  je libovolný term a  $x$  je libovolná proměnná.

- je-li jazyk s rovností, mezi logické axiomy patří navíc axiomy rovnosti
- *odvozovací (deduktivní) pravidla*

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad (\text{modus ponens}), \quad \frac{\varphi}{(\forall x)\varphi} \quad (\text{generalizace})$$



## Pojem důkazu

*Důkaz (Hilbertova stylu)* formule  $\varphi$  z teorie  $T$  je konečná posloupnost

$\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$  formulí taková, že pro každé  $i \leq n$

- $\varphi_i$  je logický axiom nebo  $\varphi_i \in T$  (axiom teorie), nebo
- $\varphi_i$  lze odvodit z předchozích formulí pomocí odvozovacích pravidel.

Formule  $\varphi$  je *dokazatelná* v  $T$ , má-li důkaz z  $T$ , značíme  $T \vdash_H \varphi$ .

**Věta** Pro každou teorii  $T$  a formuli  $\varphi$ ,  $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

*Důkaz*

- Je-li  $\varphi \in T$  nebo logický axiom, je  $T \models \varphi$  (logické axiomy jsou tautologie),
- jestliže  $T \models \varphi$  a  $T \models \varphi \rightarrow \psi$ , pak  $T \models \psi$ , tj. *modus ponens* je korektní,
- jestliže  $T \models \varphi$ , pak  $T \models (\forall x)\varphi$ , tj. *pravidlo generalizace* je korektní,
- tedy každá formule vyskytující se v důkazu z  $T$  platí v  $T$ .  $\square$

*Poznámka* Platí i úplnost, tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$  pro každou teorii  $T$  a formuli  $\varphi$ .