NAIL062 V&P Logika: 11. cvičení

Témata: Unifikace. Rezoluce v predikátové logice.

Příklad 1. Víme, že platí následující:

- *Je-li cihla na (jiné) cihle, potom není na zemi.*
- *Každá cihla je na (jiné) cihle nebo na zemi.*
- *Žádná cihla není na cihle, která by byla na (jiné) cihle.*

Vyjádřete tato fakta ve vhodném jazyce logiky prvního řádu a dokažte rezolucí následující tvrzení: *"Je-li cihla na (jiné) cihle, spodní cihla je na zemi."*

Příklad 2. Víme, že platí následující:

- *Každý holič holí všechny, kdo neholí sami sebe*
- *Žádný holič neholí nikoho, kdo holí sám sebe.*

Formalizujte ve vhodném jazyce predikátové logiky a dokažte rezolucí, že: *Neexistují žádní holiči.*

Příklad 3. Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:

(i) Každá ovce byla buď porozena jinou ovcí, nebo byla naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).

(ii) Žádná naklonovaná ovce neporodila.

Chceme ukázat rezolucí, že pak: *(iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena.* Konkrétně:

(a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi φ_1, φ_2, φ_3 v jazyce $L = \langle P, K\rangle$ bez rovnosti, kde P je binární relační symbol, K je unární relační symbol a $P(x, y)$, $K(x)$ značí, že *"ovce x porodila ovci y"* a *"ovce x byla naklonována"*.

(b) S využitím Skolemizace těchto formulí nebo jejich negací sestrojte množinu klauzulí S (může být ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$. Zapište ji v množinové reprezentaci.

(c) Najděte rezoluční zamítnutí S, znázorněte je rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.

Příklad 4. Mějme jazyk $L = \langle <, j, h, s\rangle$ bez rovností, kde j, h, q jsou konstantní symboly značící (po řadě) jablka, hrušky, švestky, dále $<$ je binární relační symbol a $x < y$ značí, že *"ovoce y je lepší než ovoce x"*. Víme, že:

(i) Relace "být lepší" je ostré částečné uspořádání (ireflexivní, asymetrická, tranzitivní relace).

(ii) Hrušky jsou lepší než jablka.

Chceme rezolucí dokázat následující tvrzení.

(iii) Jsou-li švestky lepší než hrušky, nejsou jablka lepší než švestky.

Konkrétně:

(a) Tvrzení (i), (ii), (iii) vyjádřete otevřenými formulemi jazyka L.

(b) Pomocí předchozích formulí či jejich negací nalezněte otevřenou teorii T nad L axiomatizovanou klauzulemi, která je nesplnitelná, právě když z (i), (ii) vyplývá (iii). Napište T v množinové reprezentaci.

(c) Rezolucí dokažte, že T není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.*

(d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T, která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (c).*

(e) Je T zamítnutelná LI-rezolucí? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 5. Nechť $T = \{\neg(\exists x)R(x), (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \to P(y,x)), (\forall x)((\exists y)(P(x,y) \land P(y,x)) \to R(x)), (\forall x)(\exists y)P(x,y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti.

(a) Skolemizací nalezněte k T otevřenou ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem).

(b) Převeďte T' na ekvivalentní teorii S v CNF. Zapište S v množinové reprezentaci.

(c) Nalezněte rezoluční zamítnutí teorie S. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.

(d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů S, která je nesplnitelná.

(e) Má teorie T jednoduchou kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění.

Příklad 6. Ukažte, že daná množina klauzulí je zamítnutelná (rezolucí). Popište zamítnutí pomocí rezolučního stromu. V každém kroku rezoluce napište použitou unifikaci a podtrhněte rezolvované literály.

$$
\begin{aligned}
S = \{&\{P(a,x,f(y)), P(a,z,f(h(b))), \neg Q(y,z)\},\\
&\{\neg Q(h(b),w), H(w,a)\},\\
&\{\neg P(a,w,f(h(b))), H(x,a)\},\\
&\{P(a,u,f(h(u))), H(u,a), Q(h(b),b)\},\\
&\{\neg H(v,a)\}\}
\end{aligned}
$$

Domácí úkol (3 body)**.** Známe následující informace o zadávání zakázek:

(i) Každý úředník, který je odpovědný za nějakou zakázku a vezme od nějaké společnosti úplatek, je kriminálník.

(ii) Zakázku vyhraje pouze společnost, která podplatí všechny úředníky odpovědné za tuto zakázku.

(iii) Pan Lubor je úředník.

(iv) Nějaká společnost vyhrála nějakou zakázku, za kterou je pan Lubor odpovědný.

Pomocí rezoluce dokažte, že: *(v) Pan Lubor je kriminálník.*

(a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle U, Z, S, K, P, V, O, l \rangle$ bez rovnosti, kde U, Z, S a K jsou unární relační symboly a $U(x), Z(x), S(x), K(x)$ znamenají (po řadě) "x je úředník / zakázka / společnost / kriminálník", P, V, O jsou binární relační symboly, kde $P(x,y), V(x,y), O(x,y)$ značí (po řadě) "x podplatil y", "x vyhrál y" a "x je odpovědný za y" a l je konstanta označující pana Lubora.

(b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$.

(c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci.

(d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci.

(e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T', která je nesplnitelná.

Kromě tohoto úkolu se připravte na zápočtový test. Vyřešte vzorový test (na webu).