

Čtvrtá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Program

- úvod do tablo metody
- tablo důkaz
- korektnost a úplnost

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 4.1-4.6 z Kapitoly 4

KAPITOLA 4: METODA ANALYTICKÉHO TABLA

4.1 Formální dokazovací systémy

Formální dokazovací systém

chceme zjistit, zda výrok platí $[T \models \varphi]$, a to čistě syntakticky, aniž bychom se zabývali sémantikou: najít **(formální) důkaz** $[T \vdash \varphi]$

důkaz je konečný syntaktický objekt vycházející z φ a axiomů T
dokazování lze dělat **algoritmicky** (pokud máme algoritmický přístup k axiomům T , která může být nekonečná), a lze rychle algoritmicky **ověřit**, zda je daný objekt opravdu korektní důkaz

- **korektnost**: “co dokážu, platí”

$$T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$$

- **úplnost**: “dokážu vše, co platí”

$$T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$$

(korektnost je nutná, úplnost ne: rychlý dokazovací systém může být praktický i když není úplný)

ukážeme si: *tablo metodu*, *hilbertovský kalkulus*, *rezoluční metodu*

nutný předpoklad: **jazyk musí být spočetný** (potom i T je spočetná)

4.2 Úvod do tablo metody

Tablo metoda neformálně

nejprve případ $T = \emptyset$, tedy dokazujeme, že φ platí v *logice*

tablo je strom představující **hledání protipříkladu** (modelu $v \models \varphi$),
když všechny větve **selžou**, máme důkaz (sporem)

labels: **položky** $T\psi, F\psi$ (určují, zda na dané větvi platí výrok ψ)

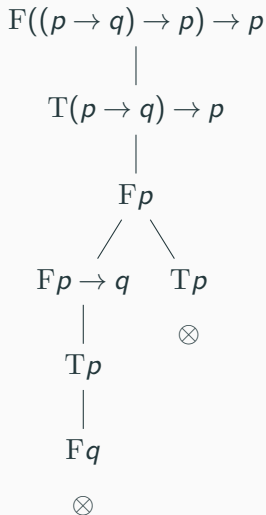
kořen $F\varphi$, dále rozvíjíme **redukci** položek (podle struktury výroků v nich), aby platil **invariant**:

Každý model, který se *shoduje* s položkou v kořeni (tj. ve kterém neplatí φ), se musí *shodovat* i s některou větví tabla (tj. splňovat všechny požadavky vyjádřené položkami na této větvi).

je-li na větvi $T\psi$ a zároveň $F\psi$, potom **selhala** (je **sporná**), pokud všechny větve selhaly, je tablo **sporné**, je to **důkaz** $T \vdash \varphi$

pokud nějaká větev neselhala a je **dokončená** (vše na ní zredukováno), lze z ní zkonstruovat model, ve kterém φ neplatí

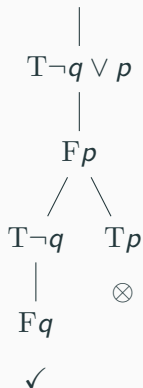
Příklad: tablo důkaz $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$



- **důkaz sporem**: v kořeni příznak F
- redukuje položku tvaru $F\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$:
- pokud $v \not\models \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, nutně $v \models \varphi_1$ a zároveň $v \not\models \varphi_2$
- proto na větev připojíme položky $T(p \rightarrow q) \rightarrow p$ a Fp , invariant platí
- redukce položky $T(p \rightarrow q) \rightarrow p$: model se shoduje s $F(p \rightarrow q)$ nebo s Tp , **rozvětví!**
- redukce $F(p \rightarrow q)$: připoj Tp a Fq
- všechny větve sporné, protipříklad neexistuje, tedy máme tablo důkaz, píšeme: $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

Příklad: tablo pro $F(\neg q \vee p) \rightarrow p$

$$F(\neg q \vee p) \rightarrow p$$



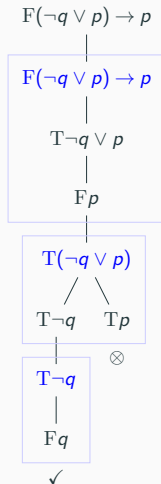
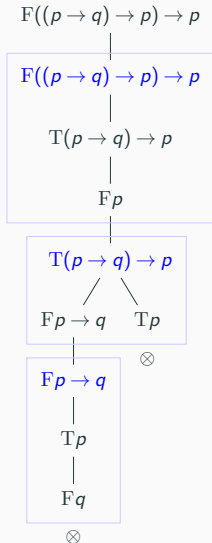
- tablo je dokončené, ale není sporné
- tedy nejde o důkaz
- levá větev dává protipříklad: model $v = (0, 0)$ ve kterém výrok neplatí
- invariant říká, že existuje-li protipříklad, shoduje se s některou větví
- tato větev nemůže být sporná
- tak se dokáže **korektnost** tablo metody

- Jak redukuje položky?
 - Připojíme příslušné **atomické tablo** (viz následující slide) na konec všech bezesporných větví procházejících vrcholem.
- Co když dokazujeme v nějaké teorii T ?
 - Připojíme položky $T\alpha$ pro (všechny) axiomy $\alpha \in T$.
- Co když je T nekonečná?
 - Tablo může být nekonečné.
 - Ale vyjde-li sporné, lze sestavit jiné, které je konečné a také sporné. (“Existuje-li důkaz, existuje konečný důkaz.”)

Atomická tabla

	\neg	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow
True	$\begin{array}{c} T\neg\varphi \\ \\ F\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} T\varphi \wedge \psi \\ \\ T\varphi \\ \\ T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \vee \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \rightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ F\varphi & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T\varphi \leftrightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & F\varphi \\ & \\ T\psi & F\psi \end{array}$
False	$\begin{array}{c} F\neg\varphi \\ \\ T\varphi \end{array}$	$\begin{array}{cc} F\varphi \wedge \psi & \\ / \quad \backslash & \\ F\varphi & F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F\varphi \vee \psi \\ \\ F\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F\varphi \rightarrow \psi \\ \\ T\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} F\varphi \leftrightarrow \psi & \\ / \quad \backslash & \\ T\varphi & F\varphi \\ & \\ F\psi & T\psi \end{array}$

Konstrukce tabel z příkladů



konvence: kořeny atomických tabel (**modře**) nezakresluje

- **strom** je $T \neq \emptyset$ s částečným uspořádáním $<_T$, které má nejmenší prvek (**kořen**) a množina předků libovolného vrcholu je **dobře uspořádaná** (každá její neprázdna podmnožina má nejmenší prvek, to zakáže nekonečné klesající řetězce předků)
- **větev** je maximální lineárně uspořádaná podmnožina T .
- **uspořádaný strom** má navíc lineární uspořádání $<_L$ množiny synů každého vrcholu (říkáme mu **pravolevé**, $<_T$ je **stromové**)
- **označkový strom** má navíc funkci label: $T \rightarrow \text{Labels}$

Königovo lemma: Nekonečný, konečně větvící strom má nekonečnou větev.

4.3 Tablo důkaz

Formální definice tabla

- **položka** je nápis $T\varphi$ nebo $F\varphi$, kde φ je nějaký výrok
- **konečné tablo z teorie T** je uspořádaný, položkami označovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
 - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie T
 - pro libovolnou položku P na libovolné větvi V můžeme a konec větve V připojit atomické tablo pro položku P
 - na konec libovolné větve můžeme připojit položku $T\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$
- **tablo z teorie T** je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde:
 - τ_i jsou konečná tabla z T
 - τ_0 je jednoprvkové tablo
 - τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku
- **tablo pro položku P** je tablo, které má položku P v kořeni

Dokončené a sporné tablo

- Tablo je **sporné**, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je **sporná**, pokud obsahuje položky $T\psi$ a $F\psi$ pro nějaký výrok ψ , jinak je **bezesporná**.
- Tablo je **dokončené**, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je **dokončená**, pokud je sporná, nebo
 - každá její položka je na této větvi **redukována**,
 - a zároveň obsahuje položku $T\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je **redukována** na větvi V procházející touto položkou, pokud
 - je tvaru Tp resp. Fp pro nějaký prvovýrok $p \in \mathbb{P}$,
 - nebo při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V , tj. vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla (byť ho podle konvence nezakresluje).

- **tablo důkaz** výroku φ z teorie T je **sporné** tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni
- pokud existuje, je φ **(tablo) dokazatelný** z T , píšeme $T \vdash \varphi$
- podobně, **tablo zamítnutí** je sporné tablo s $T\varphi$ v kořeni
- existuje-li, je φ **(tablo) zamítnutelný** z T , tj. platí $T \vdash \neg\varphi$

Example

Ukážeme si dva příklady. Tabla jsou znázorněná na Obrázku ??.

- (a) Tablo důkaz výroku ψ z teorie $T = \{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\}$, tj. $T \vdash \psi$ (kde φ, ψ jsou nějaké pevně dané výroky). Tomuto faktu se říká *Věta o dedukci*.
- (b) Dokončené tablo pro výrok p_0 z teorie $T = \{p_{n+1} \rightarrow p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nejlevější větev je bezesporná dokončená. Obsahuje položky $\top p_{i+1} \rightarrow p_i$ a $\text{F} p_i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Shoduje se tedy s modelem $v = (0, 0, \dots)$, tj. $v : \mathbb{P} \rightarrow \{0, 1\}$ kde $v(p_i) = 0$ pro všechna i .

$\text{F}\psi$

$\text{F}p_0$

$\top p_1 \rightarrow p_0$

4.4 Konečnost a systematicčnost důkazů
