NAIL062 V&P Logika: 2. sada příkladů – Sémantika, vlastnosti teorií

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmům sémantiky výrokové logiky (pravdivostní hodnota, pravdivostní funkce, model, platnost, tautologie, spornost, nezávislost, splnitelnost, ekvivalence), umí je formálně definovat a uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je množina logických spojek univerzální
- zná terminologii pro výroky v CNF a DNF
- umí převést daný výrok resp. konečnou teorii do CNF a do DNF, a to pomocí množiny modelů i pomocí ekvivalentních úprav
- rozumí terminologii týkající se vlastností teorií (sporná, bezesporná/splnitelná, kompletní, důsledky, T-ekvivalence), umí pojmy formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmu [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí je formálně definovat, uvést příklady
- umí v konkrétním případě rozhodnout, zda jde o [jednoduchou, konzervativní] extenzi, a zdůvodnit jak z definice, tak i pomocí sémantického kritéria

Příklady na cvičení

Příklad 1. Uveďte příklad výroku v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, který je (a) pravdivý, (b) sporný, (c) nezávislý, (d) ekvivalentní s $(p \wedge q) \to \neg r$, (e) má za modely právě $\{(1,0,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$.

Řešení. *Například: (a)* $p \vee \neg p$*, (b)* $p \wedge \neg p$*, (c)* p*, (d)* $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ *(e)* $(p \vee r) \wedge \neg q$

Příklad 2. Jsou tyto množiny logických spojek univerzální? (a) $\{\vee, \to, \leftrightarrow\}$, (b) $\{\downarrow\}$ kde $\downarrow$ je Peirce arrow (NOR)

Řešení. *(a) Ne, dokažte strukturální indukcí, že každá formule má za model* $(1, \ldots, 1)$.
(b) Ano, využijeme faktu, že $\{\neg, \vee, \wedge\}$ *je univerzální, a vyjádříme:*

- $\neg x \sim x \downarrow x$
- $x \vee y \sim \neg(x \downarrow y) \sim (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
- $x \wedge y \sim \neg(\neg x \vee \neg y) \sim \neg x \downarrow \neg y \sim (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

Příklad 3. Převeďte následující výrok do CNF a DNF. Proveďte to (a) sémanticky (pomocí pravdivostní tabulky), (b) ekvivalentními úpravami:

$$(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r)$$

Řešení. *(a) Nejprve najdeme modely výroku:* $\{(0,0,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$*, každý model popíšeme jednou elementární konjunkcí:*

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

CNF získáme z množiny nemodelů, každá klauzule zakazuje jeden nemodel:

$$\{(0,0,0),(0,1,0),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

(b) $(\neg p \vee q) \to (\neg q \wedge r) \sim \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg q \wedge r) \sim (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge r)$ *je DNF, CNF získáme distribucí, a dále zjednodušíme:* $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \sim (p \vee r) \wedge \neg q$

Příklad 4. Mějme teorii $T = \{p \leftrightarrow q, \neg p \to \neg q, q \vee r\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.

(a) Rozhodněte, zda je teorie T [sporná/splnitelná/kompletní].

(b) Uveďte příklad výroku φ, který je [pravdivý/lživý/nezávislý] v T
(c) Uveďte příklad extenze T' teorie T (pokud existuje, a pokud možno neekvivalentní s T), která je [jednoduchá / konzervativní / kompletní / konzervativní jednoduchá / kompletní jednoduchá / kompletní konzervativní].
(d) Na vašich příkladech extenzí ukažte, že platí sémantické kritérium (tj. tvrzení definující pojem [konzervativní] extenze pomocí expanzí/reduktů modelů).

Řešení. *Budeme potřebovat znát modely:* $\mathrm{M}(T) = \{(0,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

(a) Není sporná, je splnitelná, není kompletní.
(b) V teorii T je pravdivý je např. $p \vee r$, lživý $\neg q \wedge \neg r$, nezávislý $p \vee q$.
(c) Uveďme příklady nebo zdůvodnění neexistence:
   1. *Jednoduchá:* $\{p \wedge q\}$
   2. *Konzervativní:* $T_2 = \{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), p \vee q \vee r, p \vee s\}$ *v jazyce* $\mathbb{P}' = \{p,q,r,s\}$
   3. *Kompletní:* $\{\neg p, \neg q, r, \neg s\}$ *v jazyce* $\mathbb{P}' = \{p,q,r,s\}$
   4. *Konzervativní jednoduchá: musí být ekvivalentní T, např.* $\{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q), p \vee q \vee r\}$
   5. *Kompletní jednoduchá:* $\{p, q, \neg r\}$
   6. *Kompletní konzervativní: neexistuje, nekompletní teorie nemůže mít kompletní konzervativní extenzi (dokažte si).*

(d) Zkonstruujte příslušné množiny modelů a ověřte podmínku, ukážeme jen pro 2.:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}'}(T_2) = \{(0,0,1,1),(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$$

Vidíme, že zúžením modelů T_2 na jazyk $\mathbb{P}$ získáme jen modely T, tedy jde o extenzi, a každý model T lze rozšířit na nějaký model T_2, tedy je extenze konzervativní.

Příklad 5. Dokažte nebo vyvraťte (nebo uveďte správný vztah), že pro každou teorii T a výroky φ, ψ v jazyce $\mathbb{P}$ platí:

(a) $T \models \varphi$, právě když $T \not\models \neg\varphi$
(b) $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \wedge \psi$
(c) $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \vee \psi$
(d) $T \models \varphi \rightarrow \psi$ a $T \models \psi \rightarrow \chi$, právě když $T \models \varphi \rightarrow \chi$

Řešení. *Uvedeme jen správné odpovědi a protipříklady, dokažte si sami (z definic).*

(a) Neplatí, např. pro $T = p \vee q, \varphi = p$. (Je-li T bezesporná, platí $\Rightarrow$.)
(b) Platí.
(c) Neplatí, např. pro $T = p \vee q, \varphi = p, \psi = q$. Platí $\Rightarrow$.
(d) Neplatí, např. pro $T = \{p \rightarrow r\}, \varphi = p, \psi = q, \chi = r$. Platí $\Rightarrow$.

Další příklady k procvičení

Příklad 6. Mějme teorii $T = \{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q),\ \neg p \rightarrow q,\ r \rightarrow q\}$ v jazyce $\{p,q,r\}$.

(a) Uveďte příklad následujícího: výrok pravdivý v T, lživý v T, nezávislý v T, splnitelný v T, a dvojice T-ekvivalentních výroků.
(b) Které z následujících výroků jsou pravdivé, lživé, nezávislé, splnitelné v T? T-ekvivalentní?

$$p,\ \neg q,\ \neg p \vee q,\ p \rightarrow r,\ \neg q \rightarrow r,\ p \vee q \vee r$$

Příklad 7. Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

(a) $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$,
(b) $\{\uparrow\}$ kde $\uparrow$ je Sheffer stroke (NAND),

Příklad 8. Určete množinu modelů dané formule. Využijte toho, že je v DNF resp. v CNF.
(a) $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$
(b) $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$

Příklad 9. Převeďte do CNF a DNF oběma metodami: $(\neg p \to (\neg q \to r)) \to p$

Příklad 10. Najděte (co nejkratší) CNF a DNF reprezentace Booleovské funkce $\mathrm{maj}\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, která vrací převládající hodnotu mezi 3 vstupy.

Příklad 11. Stejné zadání, jako Příklad 4, ale pro teorii $T = \{(p \wedge q) \to r, \neg r \vee (p \wedge q)\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.

Příklad 12. Dokažte nebo vyvraťte (nebo uveďte správný vztah), že pro libovolné teorie T, S nad $\mathbb{P}$ platí:
(a) $S \subseteq T \Rightarrow \mathrm{Csq}(T) \subseteq \mathrm{Csq}(S)$
(b) $\mathrm{Csq}(S \cup T) = \mathrm{Csq}(S) \cup \mathrm{Csq}(T)$
(c) $\mathrm{Csq}(S \cap T) = \mathrm{Csq}(S) \cap \mathrm{Csq}(T)$

K zamyšlení

Příklad 13. Ukažte, že $\wedge$ a $\vee$ nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že $\{\wedge, \vee\}$ není *univerzální* množina logických spojek.

Příklad 14. Uvažte Booleovský operátor $\mathrm{IFTE}(p, q, r)$ definovaný jako 'if p then q else r'.
(a) Zkonstruujte pravdivostní tabulku.
(b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory $(\neg, \to, \wedge, \vee, \dots)$ lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.

Příklad 15. Buď $\mathbb{P}$ spočetně nekonečná množina prvovýroků.
(a) Ukažte, že již neplatí, že každou $K \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$ lze axiomatizovat výrokem v CNF i výrokem v DNF.
(b) Uveďte příklad množiny modelů K, kterou nelze axiomatizovat ani výrokem v CNF, ani výrokem v DNF.

Příklad 16. Najděte CNF a DNF reprezentaci n-ární parity, tj. Booleovské funkce $\mathrm{par}\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, která vrací XOR všech vstupních hodnot:

$$\mathrm{par}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n) \bmod 2$$

Zkuste to pro malé hodnoty n.

Příklad 17. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\mathrm{var}(T)$.
(a) Najděte všechny modely T.
(b) Které výroky ve tvaru $p_i \to p_j$ jsou důsledky T?