NAIL062 V&P Logika: 6. cvičení

Témata: Ještě tablo metoda: aplikace a pokročilejší problémy. Ukázka rezoluční metody.

Příklad 1. Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: *"Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad."*
- Na truhle B je nápis: *"V truhle A je smrtonosná past."*

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

(a) Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii T nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných $\mathbb{P}$. (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v $\mathbb{P}$.)

(b) Pomocí tablo metody najděte všechny modely teorie T.

(c) Může Aladin zvolit truhlu tak, aby si byl jistý, že v ní bude poklad?

Příklad 2. V prezidentských volbách kandidují pan A a pan B.

- Pan A říká: *"Budu zvolen nebo pan B lže."*
- Pan B říká: *"Pan A nebude zvolen nebo lžu."*
- Bude zvolen právě jeden z nich.

(a) Formalizujte jako teorii T v jazyce $\mathbb{P} = \{z_a, z_b, p_a, p_b\}$, kde z_a resp. z_b znamená, že zvolen bude pan A resp. pan B, a p_a resp. p_b znamená, že A resp. B mluví pravdu.

(b) Sestrojte dokončená tabla z teorie T s položkami $\mathrm{F}z_a$ resp. $\mathrm{F}z_b$ v kořeni. Jaký z těchto tabel můžeme učinit závěr? [Tabla mohou být poměrně velká.]

(c) Uveďte příklad výroku nad $\mathbb{P}$, který je v teorii T nezávislý, anebo zdůvodněte, proč takový výrok neexistuje.

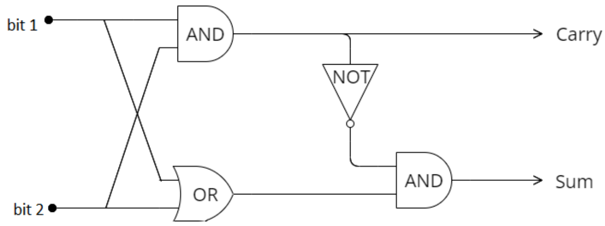
(d) Existuje teorie S nad $\{z_a, z_b\}$ taková, že T je konzervativní extenzí S? Uveďte příklad, nebo zdůvodněte, proč ne.

Příklad 3. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a) $T = \{p_{i+1} \to p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (b) $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí tablo metody najděte všechny modely T, a to tak, že sestrojíte tablo z T s položkou $\mathrm{T}p_0 \to p_1$ v kořeni. Je každý model T kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla? Pokuste se sestrojit také *systematické* tablo.

Příklad 4. Navrhněte vhodná atomická tabla a ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví:

- pro Peirceovu spojku $\downarrow$ (NOR),
- pro Shefferovu spojku $\uparrow$ (NAND),
- pro $\oplus$ (XOR),
- pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE).

Příklad 5. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



(a) Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konkrétně, vyjádřete jej jako výrokovou teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi,\ s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové proměnné znamenají po řadě “bit 1”, “bit 2”, “carry” a “sum”, a formule φ, ψ neobsahují proměnné c, s.

(b) Dokažte tablo metodou, že $T \models c \to \neg s$.

(c) Dokažte totéž rezoluční metodou (připomeňte si ji).

Příklad 6. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. že pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí

$$T \vdash \varphi \to \psi \ \text{ právě když } \ T, \varphi \vdash \psi.$$

Příklad 7. Celá čísla postihla záhadná nemoc šířící se (v diskrétních krocích) dle následujících pravidel (platících pro všechna čísla ve všech krocích).

(i) Zdravé číslo onemocní, právě když je právě jedno číslo nemocné (v předchozím čase).

(ii) Nemocné číslo se uzdraví, právě když je předchozí číslo nemocné (v předchozím čase).

(iii) V čase 0 *bylo nemocné číslo* 0, *ostatní čísla byla zdravá.*

(a) Napište teorie T_1, T_2, T_3 vyjadřující (po řadě) tvrzení $(i), (ii), (iii)$ nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p_i^t \mid i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}_0\}$, kde prvovýrok p_i^t vyjadřuje, že “*číslo i je v čase t nemocné.*”

(b) Převeďte axiomy z T_1, T_2, T_3 do CNF a napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \neg p_1^2$, tj.: “*Číslo* 1 *je zdravé v čase* 2.” (Stačí převést jen konkrétní axiomy z T_1, T_2, T_3, ze kterých plyne $\neg p_1^2$, a do S uvést jen příslušné klauzule.)

(c) Rezolucí dokažte, že S je nesplnitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem.