NAIL062 V&P Logika: 7. sada příkladů – Vlastnosti struktur a teorií

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmu podstruktura, generovaná podstruktura, expanze, redukt umí je najít
- dokáže rozhodnout, zda je teorie otevřená, pomocí kritéria o podstrukturách
- rozumí pojmu expanze a redukt struktury, umí je formálně definovat, uvést příklady
- rozumí pojmům [jednoduchá, konzervativní] extenze, umí zformulovat definice, i příslušné sémantické kritérium (jak pro expanze, tak i pro redukty), aplikovat na příkladě
- rozumí pojmu extenze o definice, umí ho formálně definovat, uvést příklady
- umí rozhodnout, zda je daná teorie extenzí o definice, sestrojit extenzi o danou definici
- rozumí pojmu definovatelnosti ve struktuře, umí najít definovatelné podmnožiny/relace

Příklady na cvičení

Příklad 1. Uvažme $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0\rangle$ kde $+$ je binární sčítání modulo 4 a $-$ je unární funkce, která vrací *inverzní* prvek $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

(a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ model teorie grup (tj. je to *grupa*)?
(b) Určete všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ generované nějakým $a \in \mathbb{Z}_4$.
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ ještě nějaké další podstruktury?
(d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?
(e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Z}_4}$?
(f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy (tj. grupy, která splňuje $x + y = y + x$) také komutativní grupa?

Příklad 2. Buď $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ těleso racionálních čísel se standardními operacemi.

(a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
(b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ rozšířit na model teorie grup?
(c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní $\underline{\mathbb{Q}}$?
(d) Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ úplná teorie?

Příklad 3. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ s rovností.

(a) Je T konzistentní?
(b) Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T kompletní?
(c) Najděte všechny jednoduché úplné extenze T.
(d) Je teorie $T' = T \cup \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ v jazyce $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchá extenze T? Je T' konzervativní extenze T?

Další příklady k procvičení

Příklad 4. Buď $T = \{\neg E(x, x), E(x, y) \to E(y, x), (\exists x)(\exists y)(\exists z)(E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \neg(x = y \vee y = z \vee x = z)), \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle E\rangle$ s rovností, kde E je binární relační symbol a φ vyjadřuje, že "existují právě čtyři prvky".

(a) Uvažme rozšíření $L' = \langle E, c\rangle$ jazyka o nový konstantní symbol c. Určete počet (až na ekvivalenci) teorií T' v jazyce L', které jsou extenzemi teorie T.
(b) Má T nějakou *konzervativní* extenzi v jazyce L'? Zdůvodněte.

K zamyšlení

Příklad 5. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi, c_1 \neq c_2\}$ je teorie jazyka $L = \langle f, c_1, c_2 \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční, c_1, c_2 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjadřuje, že "existují právě 3 prvky".

(1) Určete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich. *(3b)*

(2) Nechť $T' = \{x = f(f(x)), \varphi, f(c_1) \neq f(c_2)\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T? Je T extenze T'? Pokud ano, jde o konzervativní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

Příklad 6. Nechť $T_n = \{c_i \neq c_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ označuje teorii jazyka $L_n = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ s rovností, kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou konstantní symboly.

(1) Pro dané konečné $n \geq 1$ určete počet modelů konečné velikosti k teorie T_n až na izomorfismus.

(2) Určete počet spočetných modelů teorie T_n až na izomorfismus.

(3) Pro jaké dvojice hodnot n a m je T_n extenzí T_m? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.