

Druhá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Program

- sémantika výrokové logiky
- normální formy
- vlastnosti a důsledky teorií
- extenze teorií

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 2.2-2.4 z Kapitoly 2

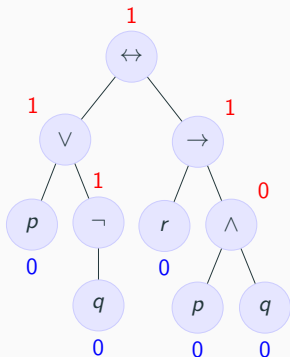
2.2 Sémantika výrokové logiky

Pravdivostní hodnota: příklad

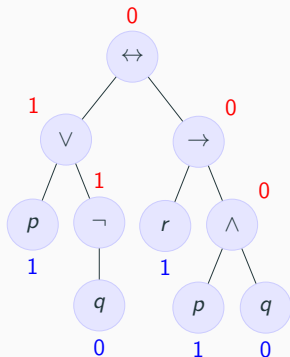
pravdivostní ohodnocení **výrokových proměnných** jednoznačně určuje pravdivostní hodnotu výroku (vyhodnoť od listů ke kořeni)

$$\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q)))$$

(a) φ **platí** při ohodnocení
 $p = 0, q = 0, r = 0$



(b) φ **neplatí** při ohodnocení
 $p = 1, q = 0, r = 1$



Sémantika logických spojek

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \quad f_{\neg}(x) = 1 - x$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad f_{\wedge}(x, y) = \min(x, y)$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad f_{\vee}(x, y) = \max(x, y)$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad f_{\rightarrow}(x, y)$$

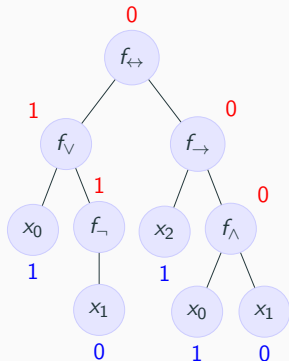
$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad f_{\leftrightarrow}(x, y)$$

Výroky a booleovské funkce

sémantika logických spojek je daná booleovskými funkcemi, každý výrok určuje *složenou* booleovskou funkci, tzv. **pravdivostní funkci**

např. $\varphi = ((p \vee (\neg q)) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q)))$ v jazyce $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$

$$f_{\varphi, \mathbb{P}'}(x_0, x_1, x_2, x_3) = f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(x_0, f_{\neg}(x_1)), f_{\rightarrow}(x_2, f_{\wedge}(x_0, x_1)))$$



pravdivostní hodnota φ při ohodnocení

$p = 1, q = 0, r = 1, s = 1$:

$$\begin{aligned} f_{\varphi, \mathbb{P}'}(1, 0, 1, 1) &= f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(1, f_{\neg}(0)), f_{\rightarrow}(1, f_{\wedge}(1, 0))) \\ &= f_{\leftrightarrow}(f_{\vee}(1, 1), f_{\rightarrow}(1, 0)) \\ &= f_{\leftrightarrow}(1, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pravdivostní funkce formálně

Pravdivostní funkce výroku φ v *konečném* jazyce \mathbb{P} je funkce $f_{\varphi, \mathbb{P}}: \{0, 1\}^{|\mathbb{P}|} \rightarrow \{0, 1\}$ definovaná induktivně:

- je-li φ i -tý prvvýrok z \mathbb{P} : $f_{\varphi, \mathbb{P}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_i$
- je-li $\varphi = (\neg\varphi')$: $f_{\varphi, \mathbb{P}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = f_{\neg}(f_{\varphi', \mathbb{P}}(x_0, \dots, x_{n-1}))$
- je-li $(\varphi' \square \varphi'')$ kde $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$: $f_{\varphi, \mathbb{P}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = f_{\square}(f_{\varphi', \mathbb{P}}(x_0, \dots, x_{n-1}), f_{\varphi'', \mathbb{P}}(x_0, \dots, x_{n-1}))$

Poznámka: Pravdivostní funkce $f_{\varphi, \mathbb{P}}$ závisí pouze na proměnných odpovídajících prvvýrokům z $\text{Var}(\varphi) \subseteq \mathbb{P}$.

Je-li výrok v *nekonečném* jazyce \mathbb{P} , můžeme se omezit na jazyk $\text{Var}(\varphi)$ (který je konečný) a uvažovat pravdivostní funkci nad ním.

Pravdivostní ohodnocení reprezentuje 'reálný svět' (systém) v námi zvoleném 'formálním světě', proto mu také říkáme **model**

Model jazyka \mathbb{P} : libovolné pravdivostní ohodnocení $v: \mathbb{P} \rightarrow \{0, 1\}$

Množina všech modelů: $M_{\mathbb{P}} = \{v \mid v: \mathbb{P} \rightarrow \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^{\mathbb{P}}$

$\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, ohodnocení p je pravda, q nepravda, a r pravda:
formálně $v = \{(p, 1), (q, 0), (r, 1)\}$ ale píšeme¹ jen $v = (1, 0, 1)$

$$M_{\mathbb{P}} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

¹Formálně ztotožňujeme $\{0, 1\}^{\mathbb{P}}$ s $\{0, 1\}^{|\mathbb{P}|}$, množina \mathbb{P} je uspořádaná.

výrok platí v modelu, pokud je jeho pravdivostní hodnota rovna 1

Výrok φ v jazyce \mathbb{P} , model $v \in M_{\mathbb{P}}$. Pokud $f_{\varphi, \mathbb{P}}(v) = 1$, potom říkáme, že φ **platí** v modelu v , v je **modelem** φ , a píšeme $v \models \varphi$.

Množina všech modelů resp. *nemodelů* φ :

$$M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in M_{\mathbb{P}} \mid v \models \varphi\} = f_{\varphi, \mathbb{P}}^{-1}[1]$$
$$\overline{M_{\mathbb{P}}(\varphi)} = M_{\mathbb{P}} \setminus M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in M_{\mathbb{P}} \mid v \not\models \varphi\} = f_{\varphi, \mathbb{P}}^{-1}[0]$$

Je-li jazyk zřejmý z kontextu, můžeme vynechat, ale jinak ne!

$$M_{\{p, q\}}(p \rightarrow q) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

$$M_{\{p, q, r\}}(p \rightarrow q) = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

Platnost teorie, model teorie

Teorie T **platí** v modelu v , pokud každý axiom $\varphi \in T$ platí ve v .
Podobně jako pro výrok: v je **modelem** T , $v \models T$, $v \in M_{\mathbb{P}}(T)$.

Někdy píšeme $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi)$ místo $M_{\mathbb{P}}(T \cup \{\varphi\})$, $M_{\mathbb{P}}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ místo $M_{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$.

Všimněte si:

- $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = M_{\mathbb{P}}(T) \cap M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- $M_{\mathbb{P}}(T) = \bigcap_{\varphi \in T} M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- $M_{\mathbb{P}}(\varphi_1) \supseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi_1, \varphi_2) \supseteq \dots \supseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$

Najděme modely $T = \{p \vee q \vee r, q \rightarrow r, \neg r\}$ (v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$):

$$M_{\mathbb{P}}(r) = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$$

$$M_{\mathbb{P}}(r, q \rightarrow r) = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}$$

$$M_{\mathbb{P}}(T) = \{(1, 0, 0)\}$$

Další sémantické pojmy

- výrok φ (nad \mathbb{P}) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**, $\models \varphi$, pokud platí v každém modelu, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$
(*Být lživý není totéž, co nebýt pravdivý!*)
- **nezávislý**, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v nějakém jiném modelu, tj. není pravdivý ani lživý, $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}$
- **splnitelný**, pokud má nějaký model, tj. není lživý, $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \neq \emptyset$

výroky φ, ψ (ve stejném jazyce) jsou **(logicky) ekvivalentní**, $\varphi \sim \psi$, pokud mají stejné modely, tj. $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}(\psi)$

- pravdivé jsou např.: \top , $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
- lživé: \perp , $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$
- nezávislé a také splnitelné: p , $p \wedge q$
- ekvivalentní: $p \sim p \vee p$, $p \rightarrow q \sim \neg p \vee q$, $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q) \sim \top$

Sémantické pojmy vzhledem k teorii

relativně k dané teorii T (omezíme se na její modely)

- **pravdivý/platí v T** , **důsledek T** , $T \models \varphi$ je-li $M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- **lživý/sporný v T** pokud $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \cap M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \emptyset$.
- **nezávislý v T** pokud $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T)$,
- **splnitelný v T , konzistentní s T** pokud $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \neq \emptyset$ (platí v alespoň jednom modelu T)
- φ a ψ jsou **ekvivalentní v T** , **T -ekvivalentní**, $\varphi \sim_T \psi$ platí-li v týchž modelech T , tj. $\varphi \sim_T \psi \Leftrightarrow M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = M_{\mathbb{P}}(T, \psi)$

např. pro $T = \{p \vee q, \neg r\}$:

- výroky $q \vee p$, $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ jsou pravdivé v T
- výrok $\neg p \vee \neg q \vee r$ je v T lživý
- výroky $p \leftrightarrow q$, $p \wedge q$ jsou v T nezávislé, a také splnitelné
- platí $p \sim_T p \vee r$ (ale $p \not\sim p \vee r$)

Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek
- ekvivalentně: každá množina modelů nad konečným jazykem je množinou modelů nějakého výroku

Tvrzení $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální.

[Důkaz na příštím slidu.]

Další zajímavé logické spojky:

- **Shefferova spojka** (NAND, \uparrow) $p \uparrow q \sim \neg(p \wedge q),$
- **Pierceova spojka** (NOR, \downarrow) $p \downarrow q \sim \neg(p \vee q),$
- **Exclusive-OR** (XOR, \oplus) $p \oplus q \sim (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

např. $\{\uparrow\}$ je univerzální, $\{\wedge, \vee\}$ není

Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, resp. $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

Pro jediný model: $\varphi_v = \text{'musím být model } v'$

- příklad: $v = (1, 0, 1, 0) \rightsquigarrow \varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$
- obecně: $v = (v_1, \dots, v_n)$, použijeme značení $p^1 = p$, $p^0 = \neg p$

$$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \dots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{i=1}^n p_i^{v(p_i)} = \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

Pro více modelů: $\varphi_M = \text{'musím být alespoň jeden z modelů z } M'$

$$\varphi_M = \bigvee_{v \in M} \varphi_v = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

Zřejmě $M(\varphi_M) = M$ neboli $f_{\varphi_M, \mathbb{P}} = f$, a φ_M používá jen $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Protože $p \wedge q \sim \neg(p \rightarrow \neg q)$ a $p \vee q \sim \neg p \rightarrow q$, mohli bychom φ_M ekvivalentně vyjádřit i pomocí $\{\neg, \rightarrow\}$. \square

2.3 Normální formy

- **literál** je prvvýrok nebo jeho negace, $\bar{\ell}$ je **opačný literál** k ℓ (pro *pozitivní* $\ell = p$ je $\bar{\ell} = \neg p$, pro *negativní* $\ell = \neg p$ je $\bar{\ell} = p$)
- **klauzule** je disjunkce literálů $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$ (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je \perp)
- výrok je v **konjunktivní normální formě (CNF)** je-li konjunkcí klauzulí (prázdný CNF výrok je \top)
- **elementární konjunkce** je konjunkce literálů $E = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$ (*jednotková el. konjunkce* je samotný literál, *prázdná* je \top)
- výrok je v **disjunktivní normální formě (DNF)** je-li disjunkcí elementárních konjunkcí (prázdný DNF výrok je \perp)

například:

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$ je v CNF
- $\neg p \vee (p \wedge q)$ je v DNF
- φ_v je v CNF i DNF, φ_M je v DNF

zaměníme-li $0 \leftrightarrow 1$, negace zůstává stejná, \wedge se stává \vee a naopak

- φ nad $\{\neg, \wedge, \vee\}$, zaměníme-li \wedge, \vee a znegujeme-li prvovýroky:
duální $\psi \sim \neg\varphi$, modely φ jsou nemodely ψ , $f_\psi(\neg x) = \neg f_\varphi(x)$
- CNF a DNF jsou duální pojmy
- *pravdivost* je duální k *nesplnitelnosti*

Pozorování: Výrok v CNF je **pravdivý**, právě když každá klauzule má dvojici opačných literálů.

Duálně: Výrok v DNF je **nesplnitelný**, pokud každá elementární konjunkce má dvojici opačných literálů.

Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

jeho modely jsou $M = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

najdeme DNF a CNF výroky se stejnými modely, tj. ekvivalentní φ

DNF sestojíme tak, že pro každý model přidáme elementární konjunkci vynucující právě tento model:

$$\varphi_{\text{DNF}} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

při konstrukci CNF potřebujeme **nemodely** φ :

$$\overline{M} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$$

každá klauzule zakáže jeden nemodel:

$$\varphi_{\text{CNF}} = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

Převod do normální formy: sémanticky

Tvrzení: Bud' \mathbb{P} konečný, $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$ libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$, že $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$.

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

Důkaz: $\varphi_{\text{DNF}} = \varphi_M$ říká 'jsem jeden z modelů z M '

φ_{CNF} říká 'nejsem žádný z nemodelů z M ', je duální k $\varphi'_{\text{DNF}} = \varphi_{\overline{M}}$ pro doplněk M , nebo přímo: modely klauzule $C_v = \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$ jsou $M_C = M_{\mathbb{P}} \setminus \{v\}$, tedy každá klauzule zakazuje jeden nemodel \square

Důsledek: Každý výrok (v libovolném, i nekonečném jazyce \mathbb{P}) je ekvivalentní nějakému výroku v CNF a nějakému výroku v DNF.

Důkaz: použijeme konečný jazyk $\mathbb{P}' = \text{Var}(\varphi)$, $M = M_{\mathbb{P}'}(\varphi)$ \square

Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

Pozorování: Nahradíme-li podvýrok ψ výroku φ ekvivalentním ψ' , výsledný výrok φ' je také ekvivalentní φ .

Postup úprav:

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí \neg, \wedge, \vee
2. přesuň negace dolů (k listům) ve stromu výroku pomocí de Morganových pravidel, odstraň dvojité negace
3. přesuň dolů disjunkce (pro CNF) resp. konjunkce (pro DNF) pomocí distributivity \wedge a \vee
4. případně zjednoduš (odstranění duplicit, tautologií apod.)

Důkaz, že funguje: indukcí dle struktury výroku

Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

mějme opět výrok $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

- přepsat ekvivalence a implikace

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow (q \vee \neg r) &\sim (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg r) \rightarrow p) \\ &\sim (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee p) \end{aligned}$$

- negace dolů

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee p)$$

- do CNF (+ seřadíme prvovýroky v klauzulích)

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)$$

- do DNF (+ zjednodušení)

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$$

- Implikace a ekvivalence:

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

- Negace:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$\neg\neg\varphi \sim \varphi$$

- Konjunkce (převod do DNF):

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$(\varphi \vee \psi) \wedge \chi \sim (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$$

- Disjunkce (převod do CNF):

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \sim (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$$

2.4 Vlastnosti a důsledky teorií

Vlastnosti teorií

- **sporná**: $T \models \perp$, ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
- **bezesporná** (**splnitelná**): není sporná, tj. má model
- **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
- **ekvivalence teorií**: $T \sim T'$ právě když $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$
(různé *axiomatizace* týchž vlastností)

- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ je sporná
- $T_2 = \{p \vee q, r\}$ je bezesporná, ale není kompletní, např. $p \wedge q$ je v ní nezávislý: platí v modelu $(1, 1, 1)$, neplatí v $(1, 0, 1)$
- $T_2 \cup \{\neg p\}$ je kompletní, jediným modelem je $(0, 1, 1)$.
- ekvivalentní teorie: $\{p \rightarrow q, r\} \sim \{(\neg p \vee q) \wedge r\}$

Důsledky teorií

je-li T v jazyce \mathbb{P} , množina všech důsledků teorie T v jazyce \mathbb{P}' :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

pokud $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$

Tvrzení: Jsou-li T, T' teorie a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ výroky v jazyce \mathbb{P} :

- (i) $T \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$
- (ii) $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T))$
- (iii) pokud $T \subseteq T'$, potom $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T')$
- (iv) $\varphi \in \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$ právě když $\models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$

Důkaz: snadný, použijte následující:

- $M(\text{Csq}(T)) = M(T)$
- je-li $T \subseteq T'$ potom $M(T) \supseteq M(T')$
- $\models \psi \rightarrow \varphi$ právě když $M(\psi) \subseteq M(\varphi)$

□

Extenze teorie T je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v T

- dodatečné požadavky o systému: **jednoduchá extenze**
- přidání nových částí k systému (a v původním platí totéž, co předtím): **konzervativní extenze**

Úvodní příklad o barvení grafů:

- T_3 (úplná obarvení s hranovou podmínkou) je jednoduchou extenzí teorie T_1 (částečná obarvení bez ohledu na hrany)
- T'_3 (přidání nového vrcholu) je konzervativní, ale ne jednoduchou extenzí T_3
- T'_3 je extenze T_1 , která není ani jednoduchá, ani konzervativní

Extenze teorií: formálně

Bud' T v jazyce \mathbb{P} . **Extenze** teorie T je libovolná teorie T' v jazyce $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$ splňující $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$,

- **jednoduchá**: $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**: $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$
“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”

1. T' je jednoduchá extenze T , právě když $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ a $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$.
2. T' je extenze T , právě když $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$. Tj. **restrikce** modelů T' na \mathbb{P} musí být modely T : $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
3. T' je konzervativní extenze T , je-li to extenze a navíc každý model T lze **expandovat** na model T' (tj. *každý* model T získáme restrikcí *nějakého* modelu T' na jazyk \mathbb{P}): $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} = M_{\mathbb{P}}(T)$
4. T' je extenze T a zároveň T je extenze T' , právě když $T \sim T'$.
5. **Kompletní jednoduché extenze** T **odpovídají modelům** T (jednoznačně až na ekvivalenci).

Extenze teorií: příklad

- mějme $T = \{p \rightarrow q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$, teorie $T_1 = \{p \wedge q\}$ v jazyce \mathbb{P} je jednoduchá extenze $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- T_1 je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze T jsou: T_1 , $T_2 = \{\neg p, q\}$, a $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$
- teorie $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$ v $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$ je extenze $T: \mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}'$ a $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$, restrikce modelů T' na \mathbb{P} jsou $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- protože dokonce $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} = M_{\mathbb{P}}(T)$, každý model T lze rozšířit na model T' , T' je konzervativní extenze T
- každý výrok v jazyce \mathbb{P} platí v T , právě když platí v T' , ale výrok $p \rightarrow r$ je novým důsledkem: platí v T' ale ne v T
- teorie $T'' = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, \neg r \vee p\}$ v jazyce \mathbb{P}' je extenze T , ale ne konzervativní, neboť v ní platí $p \leftrightarrow q$, což neplatí v T (nebo proto, že model $(0, 1)$ teorie T nelze rozšířit na model teorie T'')