Kapitola 1

Teorie modelů

V této kapitole se trochu vzdálíme typickým aplikacím logiky v informatice[1] a nahlédneme o úroveň abstrakce výše, do oblasti *matematické* logiky. *Teorie modelů* se snaží popsat vztah mezi obecnými vlastnostmi teorií (predikátové logiky) a tříd jejich modelů. Nevyhneme se práci s nekonečnými teoriemi a s nekonečnými strukturami. Jde jen o ukázku několika vybraných výsledků, které jsou pro nás dostupné. Ani se nepokusíme obsáhnout všechny hlavní oblasti teorie modelů, která je velmi bohatá a hluboká. Do této kapitoly jsme také přidali materiál týkající se vlastností modelů, který se nehodil jinam.

1.1 Elementární ekvivalence

Nejprve se podíváme na několik vlastností souvisejících s pojmem *elementární ekvivalence.* Připomeňme, že L-struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou *elementárně ekvivalentní* ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L-sentence.

V teorii modelů nás často zajímá, jaké vlastnosti (sentence) platí v dané, konkrétní struktuře:

Definice 1.1.1 (Teorie struktury)**.** Mějme L-strukturu $\mathcal{A}$. *Teorie struktury* $\mathcal{A}$, značíme $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je množina všech L-sentencí platných v $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Příklad 1.1.2. Jako důležitý příklad vezměme *standardní model aritmetiky*, strukturu $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$. Teorii $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ říkáme *aritmetika přirozených čísel.* V následující kapitole si ukážeme, že je *(algoritmicky) nerozhodnutelná.*[2]

Několik jednoduchých vlastností teorie struktury shrneme v následujícím pozorování:

Pozorování 1.1.3. *Nechť $\mathcal{A}$ je L-struktura a T je L-teorie.*

(i) Teorie $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je kompletní.

(ii) Je-li $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T)$, potom $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je (kompletní) jednoduchá extenze teorie T.

[1] Například použití rezoluce k řešení otázky, zda v dané konečné teorii T platí daná sentence φ.

[2] Teorie T je *(algoritmicky) rozhodnutelná*, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní sentenci φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$.

(iii) Pokud $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T)$ a T je kompletní, potom je $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ ekvivalentní s T, v tom případě $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Csq}_L(T)$.

Pomocí pojmu *teorie struktury* můžeme také vyjádřit elementární ekvivalenci, pro L-struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ platí:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \text{ právě když } \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B}).$$

Příklad 1.1.4. Podívejme se standardní uspořádání reálných, racionálních, a celých čísel, tj. na struktury $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$. Jak jsme již zmínili v Příkladu **??**, není těžké ukázat, že $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ (pomocí *hustoty* těchto uspořádání). Struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ale elementárně ekvivalentní nejsou: V $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ má každý prvek bezprostředního následníka, což v $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ neplatí. Pro následující sentenci φ tedy máme $\varphi \in \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle)$ ale $\varphi \notin \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle)$:

$$\varphi = (\forall x)(\exists y)(x \leq y \land \neg x = y \land (\forall z)(x \leq z \rightarrow z = x \lor y \leq z)$$

1.1.1 Kompletní jednoduché extenze

Máme-li teorii T, zajímá nás, jak vypadají její modely. Připomeňme, že:

- Teorie je *kompletní*, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci.[3]
- Modely teorie T až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají kompletním jednoduchým extenzím T.

Kompletní jednoduché extenze L-teorie T jsou tedy tvaru $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ pro $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T)$, a (jak jsme už zmínili výše) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ právě když $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$. Místo hledání všech modelů tedy stačí najít všechny kompletní jednoduché extenze.

Tvrzení 1.1.5. *Pokud lze* efektivně (algoritmicky) popsat *všechny kompletní jednoduché extenze*[4] efektivně dané *teorie T,*[5] *potom je T* (algoritmicky) rozhodnutelná.

Důkaz. Pro danou sentenci φ buď $T \vdash \varphi$, nebo existuje protipříklad $\mathcal{A} \not\models \varphi$, tedy kompletní jednoduchá extenze T_i teorie T taková, že $T_i \not\vdash \varphi$. Z kompletnosti ale plyne, že $T_i \vdash \neg\varphi$. Náš algoritmus bude paralelně konstruovat tablo důkaz φ z T a tablo důkaz $\neg\varphi$ ze všech kompletních jednoduchých extenzí $T_1, T_2, \ldots$ teorie T.[6] Víme, že alespoň jedno z paralelně konstruovaných tabel je sporné, a můžeme předpokládat, že konečné (neprodlužujeme-li sporné větve tabla), tedy algoritmus ho po konečně mnoha krocích zkonstruuje. □

Schopnost efektivně popsat všechny kompletní jednoduché extenze je poměrně vzácná, a vyžaduje silné předpoklady. Přesto to lze provést u mnoha důležitých teorií. Uveďme jeden příklad: *teorii hustého lineárního uspořádání (dense linear order).*

---

[3] Tedy všechny její modely jsou elementárně ekvivalentní.

[4] Představte si algoritmus, který pro daná vstupní i, j odpoví j-tý axiom i-té kompletní jednoduché extenze (v nějakém pevném očíslování); takový algoritmus ne vždy existuje!

[5] T může být nekonečná, ale musí existovat algoritmus, který generuje všechny axiomy T.

[6] Nevadí, že je jich nekonečně mnoho, můžeme využít tzv. *dovetailing*: Provedeme 1. krok konstrukce 1. tabla, potom 2. krok 1. tabla a 1. krok 2. tabla, 3. krok 1. tabla, 2. krok 2. tabla, 1. krok 3. tabla, atd.

Příklad: DeLO*

Teorie *hustého lineárního uspořádání (DeLO*)* je extenze teorie uspořádání o následující axiomy:

- axiom *linearity* (někdy se mu říká také *dichotomie*):

$$x \leq y \vee y \leq x$$

- axiom *hustoty*

$$x \leq y \wedge \neg\, x = y \rightarrow (\exists z)(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg\, z = x \wedge \neg\, z = y)$$

Někdy se přidává i axiom *netriviality* $(\exists x)(\exists y)(\neg\, x = y)$ zakazující jednoprvkový model. Tato teorie není kompletní, umíme ale popsat všechny její kompletní jednoduché extenze:

Tvrzení 1.1.6. *Mějme sentence $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ a $\psi = (\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ vyjadřující existenci minimálního resp. maximálního prvku. Následující čtyři teorie jsou právě všechny kompletní jednoduché extenze teorie DeLO*:*

- $\mathrm{DeLO} = \mathrm{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}$
- $\mathrm{DeLO}^+ = \mathrm{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}$
- $\mathrm{DeLO}^- = \mathrm{DeLO}^* \cup \{\varphi, \neg\psi\}$
- $\mathrm{DeLO}^\pm = \mathrm{DeLO}^* \cup \{\varphi, \psi\}$

Stačí ukázat, že tyto čtyři teorie jsou kompletní. Potom už je zřejmé, že žádná další kompletní jednoduchá extenze DeLO* nemůže existovat. Jak vysvětlíme v Sekci 1.3, jejich kompletnost plyne z faktu, že jsou *ω-kategorické*, tj. mají jediný spočetný model až na elementární ekvivalenci.

Z Tvrzení 1.1.5 potom plyne rozhodnutelnost:

Důsledek 1.1.7. *Teorie DeLO* je (algoritmicky) rozhodnutelná.*

1.1.2 Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty

V Sekci **??** jsme dokázali tzv. Löwenheim-Skolemovu větu, konkrétně její variantu pro jazyky bez rovnosti:

Věta (Löwenheim-Skolemova)**.** *Je-li L spočetný jazyk bez rovnosti, potom každá bezesporná L-teorie má spočetně nekonečný model.*

Tato věta má následující jednoduchý důsledek:

Důsledek 1.1.8. *Je-li L spočetný jazyk bez rovnosti, potom ke každé L-struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.*

Důkaz. Mějme L-strukturu $\mathcal{A}$. Teorie $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je bezesporná (má model $\mathcal{A}$), tedy dle Löwenheim-Skolemovy má spočetně nekonečný model $\mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A})$. To ale znamená, že $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$. □

V jazyce bez rovnosti tedy nemůžeme vyjádřit například ‘model má právě 42 prvků’.

V důkazu Löwenheim-Skolemovy věty jsme sestrojený model získali jako kanonický model pro bezespornou větev tabla z T pro položku F$\perp$. Stejným způsobem se dokáže následující verze pro jazyky s rovností, stačí faktorizovat dle relace $=^A$:

Věta (Löwenheim-Skolemova s rovností). *Je-li L spočetný jazyk s rovností, potom každá bezesporná L-teorie má spočetný model (tj. konečný, nebo spočetně nekonečný).*

I tato verze má snadný důsledek pro konkrétní struktury:

Důsledek 1.1.9. *Je-li L spočetný jazyk s rovností, potom ke každé* nekonečné *L-struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.*

Důkaz. Mějme nekonečnou L-strukturu $\mathcal{A}$. Stejně jako v důkazu Důsledku 1.1.8 najdeme spočetně nekonečnou strukturu $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$. Protože v $\mathcal{A}$ neplatí pro žádné $n \in \mathbb{N}$ sentence vyjadřující ‘existuje nejvýše n prvků’ (což lze pomocí rovnosti snadno zapsat), neplatí tato sentence ani v $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ tedy nemůže být konečná struktura. $\square$

Tento důsledek použijeme, abychom ukázali, že existuje spočetné těleso, které je algebraicky uzavřené:

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

Těleso $\mathcal{A}$ je *algebraicky uzavřené*, pokud každý polynom nenulového stupně v něm má kořen. Těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ není algebraicky uzavřené, neboť $x^2 + 1$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen, stejně tak těleso $\mathbb{Q}$ (v něm nemá kořen ani $x^2 - 2$). Těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ algebraicky uzavřené je, je ale nespočetné.

Algebraickou uzavřenost lze vyjádřit pomocí následujících sentencí ψ_n, pro každé $n > 0$:

$$(\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0 = 0$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \ \cdots \ \cdot y$ (kde $\cdot$ je aplikováno $(k-1)$-krát).

Důsledek 1.1.10. *Existuje spočetné algebraicky uzavřené těleso.*

Důkaz. Dle Důsledku 1.1.9 existuje spočetně nekonečná struktura $\mathcal{A}$ elementárně ekvivalentní tělesu $\mathbb{C}$. Protože $\mathbb{C}$ je těleso a splňuje sentence ψ_n pro všechna $n > 0$, je i $\mathcal{A}$ algebraicky uzavřené těleso. $\square$

1.2 Izomorfismus struktur

[TODO]

Izomorfismus struktur

Nechť $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou struktury jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- Bijekce $h\colon A \to B$ je *izomorfismus* struktur $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, pokud platí zároveň

  (i) $h(f^A(a_1, \dots, a_n)) = f^B(h(a_1), \dots, h(a_n))$
  pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a každé $a_1, \dots, a_n \in A$,

  (ii) $R^A(a_1, \dots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad R^B(h(a_1), \dots, h(a_n))$
  pro každý n-ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a každé $a_1, \dots, a_n \in A$.

- $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou *izomorfní* (via h), psáno $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$), pokud existuje izomorfismus h struktur $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Říkáme rovněž, že $\mathcal{A}$ je *izomorfní s* $\mathcal{B}$.

- *Automorfismus* struktury $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ s $\mathcal{A}$.

Např. potenční algebra $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ *s* $X = n$ *je izomorfní s Booleovou algebrou* $\underline{^n2} = \langle {}^n2, -_n, \wedge_n, \vee_n, 0_n, 1_n \rangle$ *via* $h : A \mapsto \chi_A$*, kde* χ_A *je charakteristická funkce množiny* $A \subseteq X$.

Izomorfismus a sémantika

Uvidíme, že izomorfismus zachovává sémantiku.

Tvrzení *Nechť* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *jsou struktury jazyka* $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$*. Bijekce* $h\colon A \to B$ *je izomorfismus* $\mathcal{A}$ *a* $\mathcal{B}$*, právě když platí zároveň*

(i) $h(t^A[e]) = t^B[e \circ h]$ *pro každý term* t *a* $e\colon \mathrm{Var} \to A$,

(ii) $\mathcal{A} \models \varphi[e] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$ *pro každou formuli* φ *a* $e\colon \mathrm{Var} \to A$.

Důkaz $(\Rightarrow)$ Indukcí dle struktury termu t, respektive formule φ.
$(\Leftarrow)$ Dosazením termu $f(x_1, \dots, x_n)$ do (i) či atomické formule $R(x_1, \dots, x_n)$ do (ii) pro ohodnocení $e(x_i) = a_i$ máme, že h vyhovuje def. izomorfismu. $\square$

Důsledek *Pro každé struktury* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *stejného jazyka,*

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

Poznámka Obrácená implikace obecně neplatí, např. $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$*, ale* $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\simeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$*, neboť* $|\mathbb{Q}| = \omega$ *a* $|\mathbb{R}| = 2^\omega$.

Konečné modely s rovností

Tvrzení *Pro každé konečné struktury* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *stejného jazyka s rovností,*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}.$$

Důkaz Je $|A| = |B|$, neboť lze vyjádřit *"existuje právě n prvků"*.

- Nechť $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do jazyka $L' = L \cup \{c_a\}_{a \in A}$ o jména prvků z A.
- Ukážeme, že $\mathcal{B}$ lze expandovat na $\mathcal{B}'$ do jazyka L' tak, že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$. Pak zřejmě $h\colon a \mapsto c_a^{B'}$ je izomorfismus $\mathcal{A}'$ s $\mathcal{B}'$ a tedy i izomorfismus $\mathcal{A}$ s $\mathcal{B}$.

- Stačí ukázat, že pro každé $c_a^{A'} = a \in A$ existuje $b \in B$ t.ž. $\langle \mathcal{A}, a\rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b\rangle$.
- Označme Ω množinu formulí $\varphi(x)$ t.ž. $\langle \mathcal{A}, a\rangle \models \varphi(x/c_a)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$.
- Jelikož je A konečné, existuje konečně formulí $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každé $\varphi \in \Omega$ je $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$ pro nějaké i.
- Jelikož $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \models (\exists x) \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i$, existuje $b \in B$ t.ž. $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i[e(x/b)]$.
- Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ je $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b\rangle \models \varphi(x/c_a)$. $\square$

Důsledek *Má-li kompletní teorie jazyka s rovností konečný model, jsou všechny její modely izomorfní.*

1.2.1 Definovatelnost a automorfismy

[TODO]

Připomeňme si pojem definovatelné množiny, viz Sekce **??**.

Definovatelnost a automorfismy

Ukážeme, že definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy.

Tvrzení *Nechť $D \subseteq A^n$ je množina definovatelná ve struktuře $\mathcal{A}$ z parametrů $\overline{b}$ a h je automorfismus $\mathcal{A}$, který je identický na $\overline{b}$. Pak $h[D] = D$.*

Důkaz Nechť $D = \varphi^{\mathcal{A},\overline{b}}(\overline{x}, \overline{y})$. Pak pro každé $\overline{a} \in A^{|\overline{x}|}$

$$\begin{aligned} \overline{a} \in D \;&\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})] \\ &\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h(\overline{a}), \overline{y}/h(\overline{b}))] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h(\overline{a}), \overline{y}/\overline{b})] \;\Leftrightarrow\; h(\overline{a}) \in D. \quad \square \end{aligned}$$

Např. graf $\mathcal{G}$ má právě jeden netriv. automorfismus h zachovávající vrchol 0.

`files/5cyklus.pdf`

Navíc množiny $\{0\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$ jsou definovatelné z parametru 0. *Tedy*

$$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{0,1,4\}, \{0,2,3\}, \{1,4,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}.$$

1.3 Kategorické teorie

[TODO]

- *Izomorfní spektrum* teorie T je počet $I(\kappa, T)$ navzájem neizomorfních modelů teorie T pro každou kardinalitu κ.
- Teorie T je *κ-kategorická*, pokud má až na izomorfismus právě jeden model kardinality κ, tj. $I(\kappa, T) = 1$.

Tvrzení *Teorie DeLO* (tj. “bez konců”) *je ω-kategorická.*

Důkaz Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models DeLO$ s $A = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $B = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Indukcí dle n lze nalézt prosté parciální funkce $h_n \subseteq h_{n+1} \subset A \times B$ zachovávající uspořádání tak, že $\{a_i\}_{i<n} \subseteq \mathrm{dom}(h_n)$ a $\{b_i\}_{i<n} \subseteq \mathrm{rng}(h_n)$. Pak $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \cup h_n$. □

Obdobně dostaneme, že např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\mathcal{A} \restriction (0,1]$, $\mathcal{A} \restriction [0,1)$, $\mathcal{A} \restriction [0,1]$ jsou až na izomorfismus všechny spočetné modely teorie $DeLO^*$. Pak

$$I(\kappa, DeLO^*) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \kappa \in \mathbb{N}, \\ 4 & \text{pro } \kappa = \omega. \end{cases}$$

1.3.1 ω-kategoricita a úplnost

[TODO]

Věta *Nechť jazyk L je spočetný.*

(*i*) *Je-li teorie T jazyka L bez rovnosti ω-kategorická, je kompletní.*

(*ii*) *Je-li teorie T jazyka L s rovností ω-kategorická a bez konečného modelu, je kompletní.*

Důkaz Každý model teorie T je elementárně ekvivalentní s nějakým spočetně nekonečným modelem T, ale ten je až na izomorfismus jediný. Tedy všechny modely T jsou elementárně ekvivalentní, tj. T je kompletní. □

Např. teorie $DeLO$, $DeLO^+$, $DeLO^-$, $DeLO^\pm$ jsou kompletní a jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie $DeLO^*$.

Poznámka Obdobné kritérium platí i pro vyšší kardinality než ω.

1.4 Axiomatizovatelnost

[TODO]

1.4.1 Axiomatizovatelnost

Axiomatizovatelnost

Zajímá nás, zda se daná část světa dá “dobře” popsat.

Nechť $K \subseteq M(L)$ je třída struktur jazyka L. Řekneme, že K je

- *axiomatizovatelná*, pokud existuje teorie T jazyka L s $M(T) = K$,
- *konečně axiomatizovatelná*, pokud je axiomatizovatelná konečnou teorií,
- *otevřeně axiomatizovatelná*, pokud je axiomatizovatelná otevřenou teorií,

- teorie T je konečně (otevřeně) axiomatizovatelná, pokud $M(T)$ je konečně (respektive otevřeně) axiomatizovatelná.

Pozorování *Je-li K axiomatizovatelná, je uzavřená na elem. ekvivalenci.*

Například

a) lineární uspořádání jsou konečně i otevřeně axiomatizovatelná,

b) tělesa jsou konečně axiomatizovatelná, ale ne otevřeně,

c) nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně.

Důsledek kompaktnosti

Věta *Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n-prvkový model, má i nekonečný model.*

Důkaz V jazyce bez rovnosti je to zřejmé, uvažme jazyk s rovností.

- Označme $T' = T \cup \{c_i \neq c_j \mid \text{pro } i \neq j\}$ extenzi teorie T v rozšířeném jazyce o spočetně nekonečně mnoho nových konstantních symbolů c_i.
- Dle předpokladu má každá konečná část teorie T' model.
- Tedy dle věty o kompaktnosti má T' model, ten je nutně nekonečný.
- Jeho redukt na původní jazyk je hledaný nekonečný model teorie T. □

Důsledek *Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n-prvkový model, není třída všech jejích konečných modelů axiomatizovatelná.*

Např. nelze axiomatizovat konečné grupy, konečná tělesa, atd. Avšak třída nekonečných modelů teorie T jazyka s rovností je axiomatizovatelná.

1.4.2 Konečná axiomatizovatelnost

[TODO]

Konečná axiomatizovatelnost

Věta *Nechť $K \subseteq M(L)$ a $\overline{K} = M(L) \setminus K$, kde L je jazyk. Pak K je konečně axiomatizovatelná, právě když K i $\overline{K}$ jsou axiomatizovatelné.*

Důkaz ($\Rightarrow$) Je-li T konečná axiomatizace K v uzavřeném tvaru, pak teorie s jediným axiomem $\bigvee_{\varphi \in T} \neg\varphi$ axiomatizuje $\overline{K}$. Nyní dokažme ($\Leftarrow$).

- Nechť T, S jsou teorie jazyka L takové, že $M(T) = K$, $M(S) = \overline{K}$.

- Pak $M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = \emptyset$ a dle věty o kompaktnosti existují konečné $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ takové, že $\emptyset = M(T' \cup S') = M(T') \cap M(S')$.
- Jelikož
$$M(T) \subseteq M(T') \subseteq \overline{M(S')} \subseteq \overline{M(S)} = M(T),$$
je $M(T) = M(T')$, tj. konečná T' axiomatizuje K. $\square$

Konečná axiomatizovatelnost - příklad

Nechť T je teorie těles. Řekneme, že těleso $\mathcal{A} = \langle A, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ je

- *charakteristiky* 0, neexistuje-li žádné $p \in \mathbb{N}^+$ takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ značí term $1 + 1 + \cdots + 1$ ($+$ aplikováno $(p-1)$-krát).
- *charakteristiky* p, kde p je prvočíslo, je-li p je nejmenší t.ž. $\mathcal{A} \models p1 = 0$.
- Třída těles charakteristiky p pro p prvočíslo je konečně axiomatizována teorií $T \cup \{p1 = 0\}$.
- Třída těles charakteristiky 0 je axiomatizována (nekonečnou) teorií $T' = T \cup \{p1 \neq 0 \mid p \in \mathbb{N}^+\}$.

Tvrzení *Třída K těles charakteristiky* 0 *není konečně axiomatizovatelná.*

Důkaz Stačí dokázat, že $\overline{K}$ není axiomatizovatelná. Kdyby $M(S) = \overline{K}$, tak $S' = S \cup T'$ má model $\mathcal{B}$, neboť každá konečná $S^* \subseteq S'$ má model (těleso prvočíselné charakteristiky větší než jakékoliv p vyskytující se v axiomech S^*). Pak ale $\mathcal{B} \in M(S) = \overline{K}$ a zároveň $\mathcal{B} \in M(T') = K$, což není možné. $\square$

1.4.3 Otevřená axiomatizovatelnost

[TODO]

Věta *Je-li teorie T otevřeně axiomatizovatelná, pak každá podstruktura modelu T je rovněž modelem T.*

Důkaz Nechť T' je otevřená axiomatika $M(T)$, $\mathcal{A} \models T'$ a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Víme, že pro každé $\varphi \in T'$ je $\mathcal{B} \models \varphi$, neboť φ je otevřená. Tedy $\mathcal{B}$ je modelem T'. $\square$

Poznámka Platí i obrácená implikace, tj. je-li každá podstruktura modelu teorie T rovněž modelem T, pak T je otevřeně axiomatizovatelná.

Např. teorie DeLO není otevřeně axiomatizovatelná, neboť např. konečná podstruktura modelu DeLO není modelem DeLO.

Např. nejvýše n-prvkové grupy pro pevné $n > 1$ jsou otevřeně axiomatizovány
$$T \cup \{ \bigvee_{\substack{i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i = x_j \},$$
kde T je (otevřená) teorie grup.