Dvanáctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

Dvanáctá přednáška

Program

- izomorfismus a konečné modely
- definovatelnost a automorfismy
- ω-kategoricita a úplnost
- axiomatizovatelnost
- rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost
- aritmetické teorie
- nerozhodnutelnost predikátové logiky
- Gödelovy věty o neúplnosti

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 9.2-9.4 z Kapitoly 9, Kapitola 10

9.2 Izomorfismus struktur

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h\colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý (n-ární) $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \text{ právě když } R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

Existuje-li, jsou izomorfní ('via h'), $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (nebo $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$).
Automorfismus $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$.

- tj. liší se jen 'pojmenováním prvků'
- relace 'být izomorfní' je ekvivalence
- např. potenční algebra $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$, $|X| = n$, je izomorfní s $\underline{2^n} = \langle \{0,1\}^n, -_n, \wedge_n, \vee_n, (0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1) \rangle$ (operace po složkách) via $h(A) = \chi_A$ (charakt. vektor $A \subseteq X$)

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h \colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$ je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \dots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu $\square$

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Důkaz: pro každou sentenci φ máme z (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ $\square$

Naopak obecně ne, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\simeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ Platí ale:

Tvrzení: Jsou-li $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ konečné v jazyce s rovností, potom

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

Důsledek Pokud má kompletní teorie v jazyce s rovností konečný model, potom jsou všechny její modely izomorfní.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.
Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Ukážeme, že $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}$ tak, že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.
Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.

Buď Ω množina 'vlastností prvku a', tj. formulí $\varphi(x)$ splňujících $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Protože je A konečná, existuje konečně mnoho $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každou $\varphi \in \Omega$ existuje i takové, že $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$. Potom i $\mathcal{B} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$.

Protože v $\mathcal{A}$ platí sentence $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i$ (je splněna díky $a \in A$) a $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, máme i $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i$. Neboli existuje $b \in B$ takové, že $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i[e(x/b)]$. Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ platí $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$, z toho $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$. $\square$

Definovatelnost a automorfismy

definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy (např. automorfismus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

Tvrzení: Je-li $D \subseteq A^n$ definovatelná v $\mathcal{A}$, potom pro každý automorfismus $h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ platí $h[D] = D$ (kde $h[D]$ značí $\{(h(\overline{a}) \mid \overline{a} \in D\}$). Je-li definovatelná s parametry $\overline{b}$, platí to pro automorfismy identické na $\overline{b}$ (tj. $h(\overline{b}) = \overline{b}$ neboli $h(b_i) = b_i$ pro všechna i).

Důkaz: Ukážeme jen verzi s parametry. Nechť $D = \varphi^{\mathcal{A},\overline{b}}(\overline{x}, \overline{y})$. Potom pro každé $\overline{a} \in A^n$ platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned}
\overline{a} \in D \;&\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h(\overline{a}), \overline{y}/h(\overline{b}))] \\
&\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h(\overline{a}), \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow\; h(\overline{a}) \in D.
\end{aligned}$$

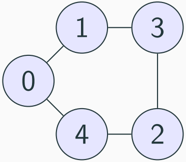
$\square$

Příklad

Množiny definovatelné s parametrem 0, $\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$?

Jediný netriviální automorfismus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i) \bmod 5$, orbity $\{0\}$, $\{1, 4\}$, a $\{2, 3\}$.



Tyto množiny jsou definovatelné:

- $\{0\}$ formulí $x = y$, tj. $(x = y)^{\mathcal{G}, \{0\}} = \{0\}$
- $\{1, 4\}$ lze definovat pomocí $E(x, y)$
- $\{2, 3\}$ formulí $\neg E(x, y) \wedge \neg x = y$

$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$ je podalgebra $\underline{\mathcal{P}(V(\mathcal{G}))}$, tedy uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik, obsahuje $\emptyset$ a $V(\mathcal{G})$. Podalgebra generovaná $\{\{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ už ale obsahuje všechny podmnožiny zachovávající automorfismus h. Dostáváme:

$$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\},$$
$$\{1, 4, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

9.3 ω-kategorické teorie

ω-kategorické teorie

Izomorfní spektrum T je počet modelů T kardinality κ až na $\simeq$.
T je κ-kategorická pokud $I(\kappa, T) = 1$, ω-kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

Tvrzení: Teorie DeLO je ω-kategorická.

Důkaz: Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ spočetně nekonečné modely, $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Z hustoty najdeme indukcí $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \dots$ prosté parciální fce z A do B zach. usp., $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \operatorname{dom} h_n$, $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq \operatorname{rng} h_n$. Potom $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} h_n$. □

Důsledek: Izomorfní spektrum teorie DeLO*:

- $I(\kappa, DeLO^*) = 0$ pro $\kappa \in \mathbb{N}$
- $I(\omega, DeLO^*) = 4$

Spočetné modely až na izomorfismus jsou například:

$$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \simeq \mathbb{Q} \restriction (0,1),\ \mathbb{Q} \restriction (0,1],\ \mathbb{Q} \restriction [0,1),\ \mathbb{Q} \restriction [0,1]$$

Důkaz: Husté uspořádání nemůže být konečné. Izomorfismus zobrazí minimum na minimum a maximum na maximum. □

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Důkaz: (i) Důsledek L.-S. věty bez rovnosti říká, že každý model je elementárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému, ten je ale až na izomorfismus jediný.

(ii) Důsledek L.-S. věty s rovností podobně říká, že všechny nekonečné modely jsou elementárně ekvivalentní. Mohla by mít elementárně neekvivalentní konečné modely, to jsme ale zakázali. $\square$

Důsledek: DeLO, DeLO$^+$, DeLO$^-$, a DeLO$^\pm$ jsou kompletní, jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) kompletní jedn. extenze $DeLO^*$.

Analogické kritérium platí i pro kardinality κ větší než ω.

9.4 Axiomatizovatelnost

Axiomatizovatelnost

Třída struktur $K \subseteq \mathrm{M}_L$ je:

- axiomatizovatelná, existuje-li teorie T taková, že $\mathrm{M}_L(T) = K$
- konečně/otevřeně axiomatiz., je-li ax. konečnou/otevřenou T
- teorie T' je konečně/otevřeně axiomatizovatelná, platí-li to o třídě jejích modelů $K = \mathrm{M}_L(T')$

Pozorování: Je-li K axiomatizovatelná, musí být uzavřená na $\equiv$.

Například, jak ukážeme:

- grafy a částečná uspořádání jsou konečně i otevřeně ax.
- tělesa jsou konečně, ale ne otevřeně axiomatizovatelná
- nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně
- konečné grafy nejsou axiomatizovatelné

Neaxiomatizovatelnost konečných modelů

Věta: Má-li T libovolně velké konečné modely, má i nekonečný model. Potom není třída jejích konečných modelů axiomatizovatelná.

Důkaz: Je-li jazyk bez rovnosti, vezmeme kanonický model pro bezespornou větev v tablu z T pro $\mathrm{F}\bot$ (T je bezesporná).

Je-li jazyk s rovností, přidáme spočetně mnoho nových konst. symbolů c_i a vezmeme extenzi: $T' = T \cup \{\neg c_i = c_j \mid i \neq j \in \mathbb{N}\}$

Každá konečná část T' má model: buď k největší, že c_k je v této konečné části: lib. $\geq (k+1)$-prvkový model,21 interpretuj $c_0, \ldots, c_k$ jako různé prvky.

Věta o kompaktnosti dává model T', ten je nekonečný, redukt na původní jazyk (zapomenutí $c_i^{\mathcal{A}}$) je nekonečný model T. $\square$

- např. konečné grafy nejsou axiomatizovatelné
- nekonečné modely teorie jsou vždy axiomatizovatelné, máme-li rovnost: stačí přidat 'existuje alespoň n prvků' pro vš. $n \in \mathbb{N}$

Konečná axiomatizovatelnost

Věta (O konečné axiomatizovatelnosti): $K \subseteq \mathrm{M}_L$ je konečně axiomatizovatelná, právě když K i $\overline{K} = \mathrm{M}_L \setminus K$ jsou axiomatizovatelné.

Důkaz: $\Rightarrow$ Je-li K axiomatizovatelná sentencemi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (vezmi gen. uzávěry), potom $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$ axiomatizuje $\overline{K}$.

$\Leftarrow$ Buď $K = \mathrm{M}(T)$ a $\overline{K} = \mathrm{M}(S)$. Potom $T \cup S$ je sporná, neboť:

$$\mathrm{M}(T \cup S) = \mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(S) = K \cap \overline{K} = \emptyset$$

Věta o kompaktnosti dává konečné $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ takové, že:

$$\emptyset = \mathrm{M}(T' \cup S') = \mathrm{M}(T') \cap \mathrm{M}(S')$$

Nyní si všimněme, že platí:

$$\mathrm{M}(T) \subseteq \mathrm{M}(T') \subseteq \overline{\mathrm{M}(S')} \subseteq \overline{\mathrm{M}(S)} = \mathrm{M}(T)$$

Tím jsme dokázali, že $M(T) = M(T')$, neboli T' je konečná axiomatizace K. $\square$

Tělesa charakteristiky 0 nejsou konečně axiomatizovatelná

Buď T teorie těles. Těleso $\mathcal{A} = \langle A, +, -, 0, \cdot, 1\rangle$ je

- charakteristiky p, je-li p nejmenší prvočíslo takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ je term $1 + 1 + \cdots + 1$ (s p jedničkami),
- charakteristiky 0, pokud není charakteristiky p pro žádné p.
- Tělesa charakteristiky p jsou konečně axiomatizovatelná:
$$T_p = T \cup \{p1 = 0\}$$
- Tělesa char. 0 jsou axiomatizovatelná, ale ne konečně:
$$T_0 = T \cup \{\neg\, p1 = 0 \mid p \text{ prvočíslo}\}$$

Tvrzení: Třída K těles char. 0 není konečně axiomatizovatelná.

Důkaz: Stačí ukázat, že $\overline{K}$ (tělesa nenulové char. a netělesa) není axiomatizovatelná. Sporem: $\overline{K} = \mathrm{M}(S)$. Potom $S' = S \cup T_0$ má model, neboť každá konečná část má model: těleso charakteristiky větší než jakékoliv p z axiomu T_0 tvaru $\neg\, p1 = 0$. Je-li $\mathcal{A}$ je model S', potom $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(S) = \overline{K}$. Zároveň ale $\mathcal{A} \in \mathrm{M}(T_0) = K$, spor. $\square$

Otevřená axiomatizovatelnost

Tvrzení: Je-li T otevřeně axiomatizovatelná, potom je každá podstruktura modelu T také modelem T.

Důkaz: Buď T' otevřená axiomatizace T, $\mathcal{A}$ model T', $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Pro každou $\varphi \in T'$ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ (φ je otevřená), tedy i $\mathcal{B} \models T'$. $\square$

Poznámka: Platí i obráceně, je-li každá podstruktura modelu také model, potom je otevřeně axiomatizovatelná. (Důkaz neuvedeme.)

- DeLO není otevřeně axiomatizovatelná, např. žádná konečná podstruktura modelu DeLO není hustá
- teorie těles není otevřeně axiomatizovatelná, podstruktura $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ není těleso, nemá inverzní prvek k 2 vůči násobení
- pro dané $n \in \mathbb{N}$ jsou nejvýše n-prvkové grupy otevřeně axiomatizovatelné (i jejich podgrupy jsou nejvýše n-prvkové); k (otevřené) teorii grup stačí přidat: $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} x_i = x_j$

Kapitola 10:
Nerozhodnutelnost a neúplnost

Nerozhodnutelnost a neúplnost

Jak lze s teoriemi pracovat algoritmicky?

+ zlatý hřeb přednášky: Gödelovy věty o neúplnosti (1931)

- ukazují limity formálního přístupu
- zastavily program formalizace matematiky
- pojem algoritmu budeme chápat jen intuitivně
- technické podrobnosti důkazů vynecháme

Typicky potřebujeme spočetný jazyk.

10.1 Rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

Rekurzivní axiomatizace

- v dokazování povolujeme nekonečné teorie, jak jsou zadané?
- pro ověření že daný důkaz (např. tablo, rezoluční zamítnutí) je korektní potřebujeme algoritmický přístup ke všem axiomům
- mohli bychom požadovat enumerátor pro T, tj. algoritmus, který vypisuje axiomy z T, a každý axiom někdy vypíše
- ale kdyby byl v důkazu chybný axiom, nikdy bychom se to nedozvěděli: stále bychom čekali, zda ho enumerátor vypíše
- proto požadujeme silnější vlastnost:

T je rekurzivně axiomatizovaná, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ doběhne a odpoví, zda $\varphi \in T$.

(ekvivalentní enumerátoru vypisujícímu axiomy v lexikograf. pořadí)

Rozhodnutelnost

Můžeme v dané teorii 'algoritmicky rozhodovat pravdu'?

- T je rozhodnutelná, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní formuli φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$,
- T je částečně rozhodnutelná, existuje-li algoritmus, který:
  - pokud $T \models \varphi$, doběhne a odpoví "ano"
  - pokud $T \not\models \varphi$, buď nedoběhne, nebo doběhne a odpoví "ne"

Tvrzení: Je-li T je rekurzivně axiomatizovaná, potom:
(i) T je část. rozhod. (ii) je-li navíc kompletní, je rozhodnutelná

Důkaz: (i) Algoritmus konstruuje systematické tablo z T pro $\mathrm{F}\varphi$; stačí enumerátor pro T, nebo postupně generovat vš. sentence a testovat, jsou-li v T. Je-li $T \models \varphi$, konstrukce skončí, ověříme, že je tablo sporné. (Jinak skončit nemusí.)

(ii) Víme, že buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$. Paralelně konstruujeme tablo pro $\mathrm{F}\varphi$ a pro $\mathrm{T}\varphi$ (důkaz a zamítnutí φ z T). Jedna z konstrukcí po konečně mnoha krocích skončí. $\square$

Rekurzivně spočetná kompletace

T má rekurzivně spočetnou kompletaci, je-li (nějaká) množina až na $\sim$ všech jednoduchých kompletních extenzí T rekurzivně spočetná, tj. existuje algoritmus, který pro vstup (i, j) vypíše i-tý axiom j-té extenze (v nějakém uspořádání), nebo odpoví, že už neexistuje.

Tvrzení: Je-li T rekurzivně axiomatizovaná a má rekurzivně spočetnou kompletaci, potom je rozhodnutelná.

Důkaz: Buď $T \vdash \varphi$, nebo existuje protipříklad $\mathcal{A} \not\models \varphi$, tj. kompl. jedn. extenze T_i, že $T_i \not\vdash \varphi$. Kompletnost T_i dává $T_i \vdash \neg\varphi$.

Algoritmus paralelně konstruuje tablo důkaz φ z T a (postupně) tablo důkazy $\neg\varphi$ ze všech kompletních jedn. extenzí $T_1, T_2, \ldots$. (Je-li jich nekonečně mnoho, uděláme dovetailing: 1. krok 1. tabla, potom 2. krok 1., 1. krok 2., 3. krok 1., 2. krok 2., 1. krok 3., atd.)

Alespoň jedno z tabel je sporné, můžeme předpokládat konečné, algoritmus ho po konečně mnoha krocích zkonstruuje. □

Příklady

Následující teorie jsou rekurzivně axiomatizované a mají rekurzivně spočetnou kompletaci, tedy jsou rozhodnutelné:

(a) Teorie čisté rovnosti

(b) Teorie unárního predikátu ($T = \emptyset$, $L = \langle U \rangle$ s rovností)

(c) Teorie hustých lineárních uspořádání DeLO*

(d) Teorie Booleových algeber (Alfred Tarski 1940),

(e) Teorie algebraicky uzavřených těles (Tarski 1949),

(f) Teorie komutativních grup (Wanda Szmielew 1955).

Rekurzivní axiomatizovatelnost

Kdy lze třídu struktur ‘efektivně (algoritmicky) popsat’?

$K \subseteq \mathrm{M}_L$ je rek. axiomatizovatelná, pokud existuje rek. axiomatizovaná T, že $K = M_L(T)$. T' je rek. axiomatizovatelná, platí-li to pro třídu jejích modelů (tj. je-li ekvivalentní rek. axiomatizované teorii).

(podobně lze definovat rek. spočetnou axiomatizovatelnost)

Tvrzení: Je-li $\mathcal{A}$ konečná struktura v konečném jazyce s rovností, potom je teorie $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ rekurzivně axiomatizovatelná.

(z toho plyne i rozhodnutelnost $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, ale $\mathcal{A} \models \varphi$ lze ověřit přímo)

Důkaz: Buď $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ axiomatizujeme sentencí “existuje právě n prvků $a_1, \ldots, a_n$ splňujících právě ty základní vztahy o funkčních hodnotách a relacích, které platí v $\mathcal{A}$”.

Např. je-li $f^{\mathcal{A}}(a_4, a_2) = a_{17}$, přidej atom. formuli $f(x_{a_4}, x_{a_2}) = x_{a_{17}}$, je-li $(a_3, a_3, a_1) \notin R^{\mathcal{A}}$ přidej $\neg R(x_{a_3}, x_{a_3}, x_{a_1})$. $\square$

Příklady

Pro následující struktury je $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ rekurzivně axiomatizovatelná:

- $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, jde o tzv. teorii diskrétních lineárních uspořádání
- $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, jde o teorii DeLO
- $\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$, teorie následníka s nulou
- $\langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle$, Presburgerova aritmetika
- $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, teorie reálně uzavřených těles, znamená že lze algoritmicky rozhodovat Euklid. geometrii (Tarski, 1949)
- $\langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$, teorie algebraicky uzavřených těles char. 0

Důsledek: Pro struktury výše platí, že $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je rozhodnutelná.

Důkaz: $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je vždy kompletní.

Teorie standardního modelu aritmetiky $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ ale není rekurzivně axiomatizovatelná (viz První Gödelova věta o neúplnosti).

10.2 Aritmetika

Aritmetika

- přirozená čísla hrají důležitou roli v matematice i v aplikacích
- jazyk aritmetiky je $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ s rovností
- standardní model aritmetiky $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ nemá rekurzivně axiomatizovatelnou teorii (První věta o neúplnosti)
- proto používáme rekurzivně axiomatizované teorie, které vlastnosti $\underline{\mathbb{N}}$ popisují částečně; říkáme jim aritmetiky
- představíme dvě: Robinsonovu Q a Peanovu PA

Robinsonova aritmetika Q

$\neg S(x) = 0$	$x \cdot 0 = 0$
$S(x) = S(y) \rightarrow x = y$	$x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
$x + 0 = x$	$\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)(x = S(y))$
$x + S(y) = S(x + y)$	$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$

- velmi slabá, nelze v ní dokázat např. komutativitu ani asociativitu $+$ či $\cdot$, nebo tranzitivitu $\leq$
- ale lze dokázat všechna existenční tvrzení o numerálech pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$, tj. formule v PNF, jen $\exists$, za volné proměnné substituujeme numerály $\underline{n} = S(\dots S(0)\dots)$
- např. pro $\varphi(x, y) = (\exists z)(x + z = y)$ je $Q \vdash \varphi(\underline{1}, \underline{2})$

Tvrzení: Je-li $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ existenční formule, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, pak $Q \vdash \varphi(x_1/\underline{a_1}, \dots, x_n/\underline{a_n})$ právě když $\underline{\mathbb{N}} \models \varphi[e(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)]$

(Důkaz vynecháme.)

Peanova aritmetika *PA*

Extenze Q o schéma indukce, tj. pro každou L-formuli $\varphi(x, \overline{y})$:

$$(\varphi(0, \overline{y}) \wedge (\forall x)(\varphi(x, \overline{y}) \rightarrow \varphi(S(x), \overline{y}))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x, \overline{y})$$

- mnohem lepší aproximace $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$
- dokáže 'základní' vlastnosti (např. komut. a asociativitu $+$)
- stále ale existují sentence platné v $\underline{\mathbb{N}}$ ale nezávislé v *PA* (opět dokážeme v První větě o neúplnosti)

Poznámka: strukturu $\underline{\mathbb{N}}$ lze axiomatizovat (až na $\simeq$) v predikátové logice 2. řádu, extenzí *PA* o tzv. axiom indukce:

$$(\forall X)((X(0) \wedge (\forall x)(X(x) \rightarrow X(S(x)))) \rightarrow (\forall x)X(x))$$

- X reprezentuje (libovolnou) podmnožinu modelu
- použijeme na množinu všech následníků 0
- každý prvek je následník 0 $\Rightarrow$ izomorfismus s $\underline{\mathbb{N}}$

10.3 Nerozhodnutelnost predikátové logiky

Nerozhodnutelnost predikátové logiky

Věta (O nerozhodnutelnosti predikátové logiky): Neexistuje algoritmus, který pro vstupní formuli φ rozhodne, zda je logicky platná.

- tj. zda je formule φ [v lib. jazyce 1. řádu] tautologie ($\models \varphi$)
- neboli $T = \emptyset$ není rozhodnutelná

Nemáme formalismus pro algoritmy (Turingovy stroje), dokážeme redukcí na jiný nerozhodnutelný problém: Hilbertův 10. problém

> *"Najděte algoritmus, který po konečně mnoha krocích určí, zda daná diofantická rovnice s libovolným počtem proměnných a celočíselnými koeficienty má celočíselné řešení."*

diofantická rovnice: $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$, kde p je celočíselný polynom

ukážeme, že existuje redukce 'těžkého' Hilbertova 10. problému na náš problém, tedy i náš problém je 'těžký'

Nerozhodnutelnost Hilbertova desátého problému

Věta (Matiyasevich 1970): Problém existence celočíselného řešení dané diofantické rovnice s celočís. koeficienty je nerozhodnutelný.

(Důkaz neuvedeme.)

Důsledek: Neexistuje algoritmus rozhodující, mají-li dané polynomy $p(x_1, \ldots, x_n), q(x_1, \ldots, x_n)$ s přiroz. koeficienty přirozené řešení, tj.

$$\underline{\mathbb{N}} \models (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\ p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n)$$

Důkaz: Lagrangeova věta o čtyřech čtvercích říká, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet čtyř čtverců (celých čísel). Naopak, každé celé číslo je rozdíl dvou přirozených. Diofantickou rovnici lze tedy transformovat na rovnici z důsledku, a naopak. $\square$

Důkaz nerozhodnutelnosti predikátové logiky

Uvažme φ tvaru $(\exists x_1)\dots(\exists x_n)\ p(x_1,\dots,x_n) = q(x_1,\dots,x_n)$ kde p a q jsou přirozené polynomy. Dle Tvrzení o Robinsonově aritmetice:

$$\underline{\mathbb{N}} \models \varphi \ \Leftrightarrow\ Q \vdash \varphi$$

Buď ψ_Q konjunkce (gen. uzávěrů) axiomů Q (je konečná). Zřejmě:

$$Q \vdash \varphi \ \Leftrightarrow\ \psi_Q \vdash \varphi \ \Leftrightarrow \vdash \psi_Q \to \varphi$$

Dle Věty o úplnosti je to ale ekvivalentní $\models \psi_Q \to \varphi$. Dostáváme:

$$\underline{\mathbb{N}} \models \varphi \ \Leftrightarrow \models \psi_Q \to \varphi$$

Sporem: Pokud bychom měli algoritmus rozhodující logickou platnost, mohli bychom rozhodovat i existenci přirozeného řešení rovnice $p(x_1,\dots,x_n) = q(x_1,\dots,x_n)$, tj. Hilbertův 10. problém. $\square$

10.4 Gödelovy věty

První věta o neúplnosti + důsledek o nekompletnosti

Věta (Gödel 1931): Je-li T bezesporná rekurzivně axiomatizovaná extenze Robinsonovy aritmetiky, potom existuje sentence, která je pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$, ale není dokazatelná v T.

- vlastnosti aritmetiky přir. čísel nelze 'rozumně', efektivně popsat (v logice 1. řádu), takový popis je nutně 'neúplný'
- pravdivost je ve standardním modelu $\underline{\mathbb{N}}$ zatímco dokazatelnost v T (samozřejmě pravdivá v T je v T i dokazatelná)
- bezespornost nutná (sporná teorie dokáže vše)
- bez rekurzivní axiomatizovatelnosti by teorie nebyla 'užitečná'
- extenze Q znamená 'základní aritmetická síla' (různé varianty předpokladu; nelze-li zakódovat přir. čísla s $+, \cdot$ je moc 'slabá'

Důsledek: Splňuje-li teorie T předpoklady První věty o neúplnosti a je-li navíc $\underline{\mathbb{N}}$ modelem T, potom T není kompletní.

Důkaz: Vezměme Gödelovu sentenci φ ($\underline{\mathbb{N}} \models \varphi$, $T \not\vdash \varphi$). Je-li T kompletní, víme $T \vdash \neg\varphi$, z korektnosti $T \models \neg\varphi$, tedy $\underline{\mathbb{N}} \models \neg\varphi$. $\Box$

O důkazu

- Gödelova sentence formalizuje "Nejsem dokazatelná v T"
- převratná důkazová technika, dva hlavní principy:
- aritmetizace syntaxe, zakódování sentencí a jejich dokazatelnosti do přirozených čísel
- self-reference, sentence 'mluví sama o sobě' (o svém kódu)
- všechny technické detaily vynecháme, viz např. V. Švejdar: *Logika – neúplnost, složitost a nutnost*, Academia 2002

Aritmetizace syntaxe a dokazatelnosti

- Gödelovo číslování 'rozumně' kóduje konečné syntaktické objekty (termy, formule, tablo důkazy) do $\mathbb{N}$: lze algoritmicky [de-]kódovat, simulovat 'manipulaci' s objekty na jejich kódech
- pro φ bude $\lceil\varphi\rceil$ příslušný kód, $\underline{\varphi}$ odpovídající $\lceil\varphi\rceil$-tý numerál
- pro danou T máme binární relaci $\mathrm{Proof}_T \subseteq \mathbb{N}^2$ definovanou
  $(n, m) \in \mathrm{Proof}_T \Leftrightarrow n = \lceil\varphi\rceil$, $m = \lceil\tau\rceil$, τ je tablo důkaz φ z T
- je-li T rek. axiomatizovaná, je relace $\mathrm{Proof}_T \subseteq \mathbb{N}^2$ rekurzivní (lze algoritmicky ověřit korektnost tabla, tj. $(n, m) \in \mathrm{Proof}_T$)
- klíčovou technickou částí důkazu První věty je fakt, že relaci Proof_T lze reprezentovat predikátem v Robinsonově aritmetice

Predikát dokazatelnosti

Tvrzení: Je-li T rekurzivně axiomatizovaná extenze Robinsonovy aritmetiky, potom existuje formule $Prf_T(x, y)$ v jazyce aritmetiky, která reprezentuje relaci Proof_T, tj. pro každá $n, m \in \mathbb{N}$:

- je-li $(n, m) \in \mathrm{Proof}_T$, potom $Q \vdash Prf_T(\underline{n}, \underline{m})$
- jinak $Q \vdash \neg Prf_T(\underline{n}, \underline{m})$

(Důkaz vynecháme!)

- formule $Prf_T(x, y)$ vyjadřuje "y je důkaz x v T"
- formule $(\exists y) Prf_T(x, y)$ znamená "x je dokazatelná v T"
- svědek poskytuje kód tablo důkazu, a $\underline{\mathbb{N}}$ splňuje Q, proto:

Pozorování: $T \vdash \varphi$ právě když $\underline{\mathbb{N}} \models (\exists y) Prf_T(\underline{\varphi}, y)$.

Budeme potřebovat následující důsledek (také bez důkazu):

Důsledek: Je-li $T \vdash \varphi$, potom $T \vdash (\exists y) Prf_T(\underline{\varphi}, y)$.

Self-reference

vyjádřili jsme φ je dokazatelná ale chceme já nejsem dokazatelná

přirozené jazyky mají self-referenci: `Tato věta má 22 znaků.`; formální systémy obvykle ne, umožňují ale přímou referenci (mluvit o posloupnostech symbolů):

```
Následující věta má 29 znaků. "Následující věta má 29 znaků."
```

zde není žádná self-reference, pomůžeme si proto trikem zdvojení:

```
Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má 149 znaků. "Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má 149 znaků."
```

přímou referencí a zdvojením tedy získáme self-referenci; podobně program v C, který vypíše svůj kód (34 je ASCII kód uvozovek):

```
main(){char *c="main(){char *c=%c%s%c; printf(c,34,c,34);}";
printf(c,34,c,34);}
```

Věta o pevném bodě

Věta: Je-li T extenzí Robinsonovy aritmetiky, potom pro každou formuli $\varphi(x)$ (v jazyce teorie T) existuje sentence ψ taková, že:

$$T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\underline{\psi})$$

- také “diagonalizační lemma” nebo “self-referenční” lemma
- ψ je self-referenční, říká o sobě: “já splňuji vlastnost φ”
- v důkazu První věty bude $\varphi(x)$ formule $\neg(\exists y)Prf_T(x,y)$
- všimněte si, jak se v důkazu použije přímá reference a zdvojení

Důkaz (myšlenka): Zdvojující funkce $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dekóduje vstup n jako $\varphi(x)$, dosadí numerál $\underline{n}$, znovu zakóduje: pro vš. $\chi(x)$ platí:

$$d(\ulcorner \chi(x) \urcorner) = \ulcorner \chi(\underline{\chi(x)}) \urcorner$$

S využitím T extenze Q se dokáže, že d je v T reprezentovatelná. Pro jednoduchost ať ji reprezentuje term, označíme ho také d (ale ve skutečnosti je to složitá formule).

Pokračování důkazu

Tedy Q, proto i T, dokazuje o numerálech, že d opravdu 'zdvojuje':

$$T \vdash d(\underline{\chi(x)}) = \underline{\chi(\underline{\chi(x)})}$$

Hledaná self-referenční sentence ψ je sentence:

$$\varphi(d(\underline{\varphi(d(x))}))$$

Chceme dokázat, že $T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\underline{\psi})$, neboli:

$$T \vdash \varphi(d(\underline{\varphi(d(x))})) \leftrightarrow \varphi(\underline{\varphi(d(\underline{\varphi(d(x))}))})$$

K tomu stačí $T \vdash d(\underline{\varphi(d(x))}) = \underline{\varphi(d(\underline{\varphi(d(x))}))}$ což máme z reprezentovatelnosti d, kde $\chi(x)$ je $\varphi(d(x))$. $\square$

ψ tedy říká: »Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má vlastnost φ. "Následující věta zapsaná jednou a ještě jednou v uvozovkách má vlastnost φ."« kde v uvozovkách znamená numerál kódu (přímá reference)

Nedefinovatelnost pravdy

Věta: V žádném bezesporném rozšíření Robinsonovy aritmetiky nemůže existovat definice pravdy.

- definice pravdy v aritmetické teorii T je formule $\tau(x)$ taková, že pro každou sentenci ψ platí: $T \vdash \psi \leftrightarrow \tau(\underline{\psi})$
- kdyby existovala, místo dokazování by stačilo spočíst kód $\ulcorner\psi\urcorner$, dosadit numerál $\underline{\psi}$ do τ, a vyhodnotit
- rozcvička pro důkaz Gödelovy První věty o neúplnosti
- důkaz užívá Paradox lháře, vyjádříme "Nejsem pravdivá v T"
- důkaz První věty užívá stejný trik s "Nejsem dokazatelná v T"

Důkaz: Sporem, ať existuje definice pravdy $\tau(x)$. Z Věty o pevném bodě kde $\varphi(x)$ je $\neg\tau(x)$ dostáváme sentenci ψ takovou, že:

$$T \vdash \psi \leftrightarrow \neg\tau(\underline{\psi})$$

Protože $\tau(x)$ je definice pravdy, platí ale i $T \vdash \psi \leftrightarrow \tau(\underline{\psi})$, tedy i $T \vdash \tau(\underline{\psi}) \leftrightarrow \neg\tau(\underline{\psi})$. To by ale znamenalo, že T je sporná. $\square$

Důkaz První věty o neúplnosti

T bezesp. rek. ax. ext. Q. Gödelovu sentenci ($\underline{\mathbb{N}} \models \psi_T$, $T \not\vdash \psi_T$) získáme z Věty o pevném bodě kde $\varphi(x)$ je $\neg(\exists y)\mathit{Prf}_T(x, y)$:

$$T \vdash \psi_T \leftrightarrow \neg(\exists y)\mathit{Prf}_T(\underline{\psi_T}, y)$$

Tedy ψ_T je v T ekvivalentní "ψ_T není dokazatelná v T". Ekvivalence platí i v $\underline{\mathbb{N}}$ (z konstrukce, protože $\underline{\mathbb{N}}$ splňuje Q), a spolu s ekvivalencí z Pozorování o predikátu dokazatelnosti:

$$\underline{\mathbb{N}} \models \psi_T \;\Leftrightarrow\; \underline{\mathbb{N}} \models \neg(\exists y)\mathit{Prf}_T(\underline{\psi_T}, y) \;\Leftrightarrow\; T \not\vdash \psi_T$$

Stačí tedy ukázat nedokazatelnost ψ_T v T. Sporem: ať $T \vdash \psi_T$.

- Self-reference: $T \vdash \neg(\exists y)\mathit{Prf}_T(\underline{\psi_T}, y)$
- Důsledek o predikátu dokazatelnosti: $T \vdash (\exists y)\mathit{Prf}_T(\underline{\psi_T}, y)$

To by ale znamenalo, že T je sporná. $\square$

Důsledky a zesílení

Důsledek (už byl): Je-li T rekurzivně axiomatizovaná extenze Robinsonovy aritmetiky a je-li $\underline{\mathbb{N}}$ model T, potom T není kompletní.

Důkaz: T není sporná, tedy splňuje předpoklady První věty. Víme, že G. sentence splňuje $\underline{\mathbb{N}} \models \psi_T$ a $T \not\vdash \psi_T$. Je-li T kompletní, máme $T \vdash \neg\psi_T$, z korektnosti $T \models \neg\psi_T$, tj. $\underline{\mathbb{N}} \models \neg\psi_T$, spor. $\square$

Důsledek: Teorie $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ není rekurzivně axiomatizovatelná.

Důkaz: $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ je extenze Q, platí v $\underline{\mathbb{N}}$. Kdyby byla rekurzivně axiomatizovatelná, podle Důsledku by [její rekurzivní axiomatizace] nebyla kompletní, ale je. $\square$

Zesílení První věty: předpoklad $\underline{\mathbb{N}} \models T$ v Důsledku je nadbytečný.

Věta (Rosserův trik, 1936): V bezesporné rekurzivně axiomatizované extenzi Robinsonovy aritmetiky existuje nezávislá sentence.

(Bez důkazu.)

Gödelova Druhá věta o neúplnosti

Efektivně daná, dostatečně bohatá T nedokáže svou bezespornost.

- bezespornost vyjádří sentence Con_T: $\neg(\exists y)Prf_T(\underline{0 = S(0)}, y)$
- všimněte si: $\underline{\mathbb{N}} \models Con_T \Leftrightarrow T \not\vdash 0 = S(0)$
- tj. Con_T opravdu vyjadřuje, že "T je bezesporná"

Věta (Gödel, 1931): Je-li T bezesporná rekurzivně axiomatizovaná extenze PA, potom Con_T není dokazatelná v T.

- všimněte si: Con_T je pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$ (neboť T je bezesporná)
- není třeba plná síla PA, stačí slabší předpoklad
- ukážeme si hlavní myšlenku důkazu

Myšlenka důkazu

Gödelova sentence ψ_T vyjadřuje: "Nejsem dokazatelná v T."

V důkazu První věty o neúplnosti jsme ukázali:

"Pokud je T bezesporná, potom ψ_T není dokazatelná v T."

Z toho jednak plyne, že $T \nvdash \psi_T$, neboť T bezesporná je.

Na druhou stranu to lze formulovat jako: "Platí $Con_T \rightarrow \psi_T$."

Je-li T extenze Peanovy aritmetiky, lze důkaz tohoto tvrzení zformalizovat v rámci teorie T, tedy ukázat, že:

$$T \vdash Con_T \rightarrow \psi_T$$

Kdyby platilo $T \vdash Con_T$, dostali bychom i $T \vdash \psi_T$, což je spor. $\square$

Důsledky

Důsledek: PA má model, ve kterém platí $(\exists y)Prf_{PA}(\underline{0 = S(0)}, y)$.

Důkaz: Sentence Con_{PA} není dokazatelná, tedy ani pravdivá v PA. Platí ale v $\underline{\mathbb{N}}$ (neboť PA je bezesporná), což znamená, že je Con_{PA} nezávislá v PA. V nějakém modelu tedy musí platit její negace, která je ekvivalentní $(\exists y)Prf_{PA}(\underline{0 = S(0)}, y)$. $\square$

Poznámka: Musí to být nestandardní model PA, svědek nestandardní prvek (není hodnotou žádného numerálu).

Důsledek: PA má bezespornou rekurzivně axiomatizovanou extenzi, která "dokazuje svou spornost", tj. $T \vdash \neg Con_T$.

Důkaz: $T = PA \cup \{\neg Con_{PA}\}$ je bezesporná, neboť $PA \nvdash Con_{PA}$. Také triviálně $T \vdash \neg Con_{PA}$, tj. T 'dokazuje spornost' PA. Protože $PA \subseteq T$, platí i $T \vdash \neg Con_T$. $\square$

Poznámka: $\underline{\mathbb{N}}$ nemůže být modelem T.

Bezespornost ZFC

Formalizace matematiky je založena na Zermelově–Fraenkelově teorii množin s axiomem výběru (ZFC). Formálně vzato to není extenze PA, ale můžeme v ní Peanovu aritmetiku 'interpretovat'.

Důsledek: Je-li ZFC bezesporná, není Con_{ZFC} v ZFC dokazatelná.

Pokud by tedy někdo v rámci ZFC dokázal, že je ZFC bezesporná, znamenalo by to, že je ZFC sporná.