CVIČENÍ Z LOGIKY: DOMÁCÍ ÚKOL Č. 2

Úkol odevzdávejte v Moodle. Ponechte si dostatečný čas pro odevzdání, tak aby vám krátkodobé technické potíže s Moodle nezabránily úkol odevzdat. Pozdě odevzdané úkoly nebudou hodnoceny, kromě případů hodných zvláštního zřetele. Odevzdané řešení musí být vaše vlastní, není dovoleno hledat nápovědy ani řešení konzultovat s kýmkoliv kromě mne. Své odpovědi dostatečně podrobně zdůvodněte, uveďte všechny pomocné výpočty apod.

Úkol 1. Pomocí tablo metody dokažte nebo najděte protipříklad k $T \models \varphi$, kde

$$T = \{p \vee q \vee r, r \to (p \vee q), (q \wedge r) \to p, \neg p \vee q \vee r\}$$
$$\varphi = (q \to p) \vee \neg(q \to (p \vee r))$$

Úkol 2. Pomocí tablo metody najděte všechny modely teorie T v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$.

$$T = \{p \to q, q \to r, (\neg p \leftrightarrow s), r \vee \neg s\}$$

Úkol 3. Ukažte, že následující CNF výrok S (v množinové reprezentaci) je nesplnitelný: najděte rezoluční zamítnutí. Nakreslete příslušný rezoluční strom.

$$S = \{\{p, q, \neg r, s\}, \{\neg p, r, s\}, \{\neg q, \neg r\}, \{p, \neg s\}, \{\neg p, \neg r\}, \{r\}\}$$

Úkol 4. Uvažme následující dvě tvrzení o barvení přirozených čísel velikosti nejvýše n <u>dvěma</u> barvami, kde $n \geq 1$ je dané.

(i) *Neexistuje monochromatická (tj. stejně obarvená) trojice různých prvočísel $a, b, c \leq n$ taková, že $a + b = 2c$.*

(ii) *Pokud 3 a 7 jsou obarvena stejně, musí být obarvena stejně i 5 a 11. (5 a 11 ale mohou mít jinou barvu než 3 a 7).*

(a) Ukažte, jak pro dané $n \geq 1$ napsat tvrzení (i) jako výrok φ_n v jazyce $\mathbb{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N} \text{ je prvočíslo}\}$, kde p_i vyjadřuje, že "i je obarveno první barvou". Dále vyjádřete tvrzení (ii) jako výrok ψ v témž jazyce $\mathbb{P}$.
(b) Nechť dále $n = 13$. Pomocí výroků φ_{13} a ψ napište teorii T, která je nesplnitelná, právě když v každém obarvení splňujícím (i) platí také (ii).
(c) Převeďte axiomy T do CNF a napište výslednou teorii v množinové reprezentaci.
(d) Rezolucí dokažte, že $T \cup \{p_3\}$ není splnitelná, tj. navíc předpokládáme, že číslo 3 je obarveno první barvou. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem.

Úkol 5. Nechť $T = \{\neg E(x,x), E(x,y) \to E(y,x), P(x) \leftrightarrow (\exists y)(E(x,y)), \varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle E, P \rangle$ s rovností, kde E je binární relační symbol, P je unární relační symbol, a axiom φ vyjadřuje, že "existují právě tři prvky".

(a) Určete všechny modely teorie T (až na elementární ekvivalenci).
(b) Nechť $\psi = P(x) \wedge E(x,y) \to P(y)$. Je sentence $(\forall x)(\forall y)\psi$ pravdivá/lživá/nezávislá v T? Zdůvodněte.