Devátá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Devátá přednáška

Program

- Löwenheim-Skolemova věta
- věta o kompaktnosti
- hilbertovský kalkulus.
- úvod do rezoluce v predikátové logice
- skolemizace

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 7.5-7.6 z Kapitoly 7, Sekce 8.1-8.2 z Kapitoly 8

7.5 Důsledky korektnosti a úplnosti

$\vdash\ =\ \models$

Syntaktickou analogií důsledků jsou teorémy:

$$\mathrm{Thm}_L(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$
- $\mathrm{Thm}_L(T) = \mathrm{Csq}_L(T)$

Všude můžeme nahradit ‘platnost’ pojmem ‘dokazatelnost’. Např:

- T je sporná, je-li v ní dokazatelný spor (tj. $T \vdash \bot$)
- T je kompletní, je-li pro každou sentenci buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$, ale ne obojí (jinak by byla sporná)

Věta (O dedukci): $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Důkaz: Stačí dokázat: $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \rightarrow \psi$. To je snadné. $\square$

Löwenheim-Skolemova věta & Věta o kompaktnosti

Věta (Löwenheim-Skolemova): Je-li L spočetný bez rovnosti, potom každá bezesporná L-teorie má spočetně nekonečný model.

(Později ukážeme i verzi s rovností, kan. model může být konečný.)

Důkaz: V T není dokazatelný spor. Dokončené tablo z T s $\mathrm{F}\perp$ v kořeni tedy musí obsahovat bezespornou větev. Hledaný model je L-redukt kanonického modelu pro tuto větev. $\square$

Věta o kompaktnosti, vč. důkazu, je stejná jako ve výrokové logice:

Věta (O kompaktnosti): Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Důkaz: Model teorie je modelem každé části. Naopak, pokud T nemá model, je sporná, tedy $T \vdash \perp$. Vezměme nějaký konečný tablo důkaz $\perp$ z T. K jeho konstrukci stačí konečně mnoho axiomů T, ty tvoří konečnou podteorii $T' \subseteq T$, která nemá model. $\square$

Nestandardní model přirozených čísel

- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je standardní model přirozených čísel
- teorie struktury $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$: všechny sentence pravdivé v $\underline{\mathbb{N}}$
- n-tý numerál: term $\underline{n} = S(S(\cdots(S(0)\cdots)))$, kde S je n-krát

Přidáme nový konstantní symbol c a vyjádříme, že je ostře větší než každý n-tý numerál:

$$T = \mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- každá konečná část T má model
- dle věty o kompaktnosti: i T má model
- říkáme mu nestandardní model (označme $\mathcal{A}$)
- platí v něm tytéž sentence, které platí ve standardním modelu
- ale zároveň obsahuje prvek $c^{\mathcal{A}}$, který je větší než každé $n \in \mathbb{N}$ (tzn. větší než hodnota termu $\underline{n}$ v nestandardním modelu $\mathcal{A}$)

7.6 Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

Hilbertovský kalkulus v predikátové logice

- používá jen $\neg$ a $\rightarrow$, dokazuje lib. formule (nejen sentence)
- schémata log. axiomů (φ, ψ, χ formule, t term, x proměnná)
  - (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - (ii) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  - (iii) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - (iv) $(\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$ je-li t substituovatelný za x do φ
  - (iiv) $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$ není-li x volná ve φ

  a navíc **axiomy rovnosti**, je-li jazyk s rovností
- odvozovací pravidla:

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{ (modus ponens)} \qquad \frac{\varphi}{(\forall x)\varphi} \text{ (generalizace)}$$

- hilbertovský důkaz formule φ z T je konečná posloupnost $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$, kde φ_i je logický axiom (vč. axiomů rovnosti), axiom teorie, nebo lze odvodit z předchozích pomocí pravidel
- existuje-li, píšeme $T \vdash_H \varphi$

Korektnost a úplnost

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu: každá φ_i (vč. $\varphi_n = \varphi$) platí v T

- logické axiomy (vč. axiomů rovnosti) jsou tautologie, platí v T
- axiomy z T jistě v T také platí
- modus ponens i generalizace jsou korektní inferenční pravidla:
  - je-li $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \to \psi$, potom $T \models \psi$
  - je-li $T \models \varphi$, potom $T \models (\forall x)\varphi$ $\square$

Věta (o úplnosti hilbertovského kalkulu): $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash_H \varphi$

Důkaz vynecháme.

Kapitola 8: Rezoluce v predikátové logice

8.1 Úvod

8.2 Skolemizace