

## NAIL062 V&P Logika: 5. cvičení

**Témata:** Tablo metoda ve výrokové logice.

**Příklad 1.** Pomocí tablo metody dokažte následující výroky:

- (a)  $(p \rightarrow (q \rightarrow q))$
- (b)  $p \leftrightarrow \neg\neg p$
- (c)  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- (d)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

**Příklad 2.** Pomocí tablo metody dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezspornou větev.

- (a)  $\{\neg q, p \vee q\} \models p$
- (b)  $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$
- (c)  $\{p \rightarrow r, p \vee q, \neg s \rightarrow \neg q\} \models r \rightarrow s$

**Příklad 3.** Pomocí tablo metody určete všechny modely následujících teorií:

- (a)  $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$
- (b)  $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$
- (c)  $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$

**Příklad 4.** Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtonosnou past.

- Na truhle A je nápis: “*Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad.*”
- Na truhle B je nápis: “*V truhle A je smrtonosná past.*”

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

- (a) Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii  $T$  nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných  $\mathbb{P}$ . (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v  $\mathbb{P}$ .)
- (b) Pomocí tablo metody najděte všechny modely teorie  $T$ .
- (c) Může Aladin zvolit truhlu tak, aby si byl jistý, že bude obsahovat poklad? Pokud ano, kterou?

**Příklad 5.** V prezidentských volbách kandidují pan A a pan B.

- Pan A říká: “*Budu zvolen nebo pan B lže.*”
  - Pan B říká: “*Pan A nebude zvolen nebo lže.*”
  - Bude zvolen právě jeden z nich.
- (a) Formalizujte naše znalosti jako teorii  $T$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{z_a, z_b, p_a, p_b\}$ , kde  $z_a$  resp.  $z_b$  znamená, že zvolen bude pan A resp. pan B, a  $p_a$  resp.  $p_b$  znamená, že A resp. B mluví pravdu.
  - (b) Sestrojte dokončená tabla z teorie  $T$  s položkami  $Fz_a$  resp.  $Fz_b$  v kořeni. Jaký z těchto tabel můžeme učinit závěr?

- (c) Uveďte příklad výroku nad  $\mathbb{P}$ , který je v teorii  $T$  nezávislý, anebo zdůvodněte, proč takový výrok neexistuje.
- (d) Existuje teorie  $S$  nad  $\{z_a, z_b\}$  taková, že  $T$  je konzervativní extenzí  $S$ ? Uveďte příklad, nebo zdůvodněte, proč ne.

**Příklad 6.** Uvažme nekonečnou výrokovou teorii (a)  $T = \{p_{i+1} \rightarrow p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  (b)  $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Pomocí tablo metody najděte všechny modely  $T$ , a to tak, že sestrojíte tablo z  $T$  s položkou  $tp_0 \rightarrow p_1$  v kořeni. Je každý model  $T$  kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla? Pokuste se sestrojit také *systematické* tablo.

**Příklad 7.** Navrhněte vhodná atomická tabla pro Peirceovu spojku  $\downarrow$  (NOR), pro Shefferovu spojku  $\uparrow$  (NAND), a pro  $\oplus$  (XOR).

**Příklad 8.** Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. že pro každou teorii  $T$  a výroky  $\varphi, \psi$  platí

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ právě když } T, \varphi \vdash \psi.$$

**Domácí úkol** (3 body).

- Pomocí tablo metody:

- dokažte, že následující výrok je tautologie:

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

- dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezespornou větev:

$$\{p \rightarrow r, p \vee q, \neg s \rightarrow \neg q\} \models r \rightarrow s$$

- určete všechny modely:

$$\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$$

- Navrhněte vhodná atomická tabla pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE). Ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví.