Dvanáctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Dvanáctá přednáška

Program

- izomorfismus a konečné modely
- definovatelnost a automorfismy
- ω-kategoricita a úplnost
- axiomatizovatelnost
- rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 9.2-9.4 z Kapitoly 9, Sekce 10.1 z Kapitoly 10

9.2 Izomorfismus struktur

Definice izomorfismu

Izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (v $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$) je bijekce $h\colon A \to B$ splňující:

- pro každý (n-ární) $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

- speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- pro každý (n-ární) $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$:

$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \text{ právě když } R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

Existuje-li, jsou izomorfní ('via h'), $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (nebo $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$).
Automorfismus $\mathcal{A}$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$.

- tj. liší se jen 'pojmenováním prvků'
- relace 'být izomorfní' je ekvivalence
- např. potenční algebra $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$, $|X| = n$, je izomorfní s $\underline{2}^n = \langle \{0,1\}^n, -_n, \wedge_n, \vee_n, (0, \dots, 0), (1, \dots, 1) \rangle$ (operace po složkách) via $h(A) = \chi_A$ (charakt. vektor $A \subseteq X$)

Izomorfismus zachovává sémantiku & vztah $\simeq$ a $\equiv$

Tvrzení: Bijekce $h\colon A \to B$ je izomorfismus $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, právě když:

(i) pro každý term t a $e : \mathrm{Var} \to A$: $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$

(ii) pro každou φ a $e : \mathrm{Var} \to A$: $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$

Důkaz: $\Rightarrow$ snadno indukcí podle struktury termu resp. formule

$\Leftarrow$ je-li h bijekce splňující (i)&(ii), dosazení $t = f(x_1, \ldots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \ldots, x_n)$ dává vlastnosti z definice izomorfismu $\square$

Důsledek: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Důkaz: pro každou sentenci φ máme z (ii) $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$ $\square$

Naopak obecně ne, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\simeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ Platí ale:

Tvrzení: Jsou-li $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ konečné v jazyce s rovností, potom

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

Důsledek Pokud má kompletní teorie v jazyce s rovností konečný model, potom jsou všechny její modely izomorfní.

Důkaz $\equiv \Rightarrow \simeq$ pro konečné struktury s rovností

Díky $=$ vyjádříme "existuje právě n prvků", z toho plyne $|A| = |B|$.
Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ o jména prvků, v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.
Ukážeme, že $\mathcal{B}$ lze expandovat na L'-strukturu $\mathcal{B}$ tak, že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.
Potom je $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismus $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{B}'$, i pro L-redukty $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje $b \in B$ tak, že expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a splňují $\langle \mathcal{A}, a\rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b\rangle$.

Buď Ω množina 'vlastností prvku a', tj. formulí $\varphi(x)$ splňujících $\langle \mathcal{A}, a\rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Protože je A konečná, existuje konečně mnoho $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každou $\varphi \in \Omega$ existuje i takové, že $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$. Potom i $\mathcal{B} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$.

Protože v $\mathcal{A}$ platí sentence $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$ (je splněna díky $a \in A$) a $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, máme i $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$. Neboli existuje $b \in B$ takové, že $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i[e(x/b)]$. Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ platí $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b\rangle \models \varphi(x/c_a)$, z toho $\langle \mathcal{A}, a\rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b\rangle$. $\square$

Definovatelnost a automorfismy

definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy (např. automorfimus grafu musí zobrazit trojúhelník na trojúhelník):

Tvrzení: Je-li $D \subseteq A^n$ definovatelná v $\mathcal{A}$, potom pro každý automorfismus $h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ platí $h[D] = D$ (kde $h[D]$ značí $\{(h(\overline{a}) \mid \overline{a} \in D\}$). Je-li definovatelná s parametry $\overline{b}$, platí to pro automorfismy identické na $\overline{b}$ (tj. $h(\overline{b}) = \overline{b}$ neboli $h(b_i) = b_i$ pro všechna i).

Důkaz: Ukážeme jen verzi s parametry. Nechť $D = \varphi^{\mathcal{A},\overline{b}}(\overline{x}, \overline{y})$. Potom pro každé $\overline{a} \in A^n$ platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned}
\overline{a} \in D \ &\Leftrightarrow\ \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow\ \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\overline{x}/\overline{a}, \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow\ \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h(\overline{a}), \overline{y}/h(\overline{b}))] \\
&\Leftrightarrow\ \mathcal{A} \models \varphi[e(\overline{x}/h(\overline{a}), \overline{y}/\overline{b})] \\
&\Leftrightarrow\ h(\overline{a}) \in D.
\end{aligned}$$

$\square$

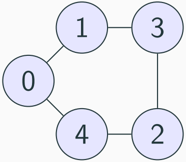
Příklad

Množiny definovatelné s parametrem 0, $\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$?

Jediný netriviální automorfimsus zachovávající 0:

$h(i) = (5 - i) \bmod 5$, orbity $\{0\}$, $\{1, 4\}$, a $\{2, 3\}$.

Tyto množiny jsou definovatelné:



- $\{0\}$ formulí $x = y$, tj. $(x = y)^{\mathcal{G}, \{0\}} = \{0\}$
- $\{1, 4\}$ lze definovat pomocí $E(x, y)$
- $\{2, 3\}$ formulí $\neg E(x, y) \land \neg x = y$

$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$ je podalgebra $\underline{\mathcal{P}(V(\mathcal{G}))}$, tedy uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik, obsahuje $\emptyset$ a $V(\mathcal{G})$. Podalgebra generovaná $\{\{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ už ale obsahuje všechny podmnožiny zachovávající automorfismus h. Dostáváme:

$$\mathrm{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \\ \{1, 4, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

9.3 ω-kategorické teorie

Izomorfní spektrum T je počet modelů T kardinality κ až na $\simeq$.
T je κ-kategorická pokud $I(\kappa, T) = 1$, ω-kategorická má-li jediný spočetně nekonečný model až na izomorfismus.

Tvrzení: Teorie DeLO je ω-kategorická.

Důkaz: Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ spočetně nekonečné modely, $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Z hustoty najdeme indukcí $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \dots$ prosté parciální fce z A do B zach. usp., $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \operatorname{dom} h_n$, $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq \operatorname{rng} h_n$. Potom $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$. $\square$

Důsledek: Izomorfní spektrum teorie DeLO*:

- $I(\kappa, DeLO^*) = 0$ pro $\kappa \in \mathbb{N}$
- $I(\omega, DeLO^*) = 4$

Spočetné modely až na izomorfismus jsou například:

$$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \simeq \mathbb{Q} \restriction (0,1),\ \mathbb{Q} \restriction (0,1],\ \mathbb{Q} \restriction [0,1),\ \mathbb{Q} \restriction [0,1]$$

Důkaz: Husté uspořádání nemůže být konečné. Izomorfismus zobrazí minimum na minimum a maximum na maximum. $\square$

ω-kategorické kritérium kompletnosti

Věta: Buď T ω-kategorická ve spočetném jazyce L. Je-li

(i) L bez rovnosti, nebo

(ii) L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je T kompletní.

Důkaz: (i) Důsledek L.-S. věty bez rovnosti říká, že každý model je elemntárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému, ten je ale až na izomorfismus jediný.

(ii) Důsledek L.-S. věty s rovností podobně říká, že všechny nekonečné modely jsou elementárně ekvivalentní. Mohla by mít elementárně neekvivalentní konečné modely, to jsme ale zakázali. $\square$

Důsledek: DeLO, DeLO$^+$, DeLO$^-$, a DeLO$^\pm$ jsou kompletní, jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) kompletní jedn. extenze $DeLO^*$.

Analogické kritérium platí i pro kardinality κ větší než ω.

9.4 Axiomatizovatelnost

Axiomatizovatelnost

Neaxiomatizovatelnost konečných modelů

Konečná axiomatizovatelnost

Příklad: tělesa charakteristiky 0

Otevřená axiomatizovatelnost

Kapitola 10: Nerozhodnutelnost a neúplnost

Nerozhodnutelnost a neúplnost

10.1 Rekurzivní axiomatizace a rozhodnutelnost

Rekurzivní axiomatizace

Rozhodnutelnost

Rekurzivně spočetná kompletace

Rekurzivní axiomatizovatelnost