NAIL062 V&P Logika: 3. sada příkladů – Algebra výroků, Problém SAT

Výukové cíle: Po absolvování cvičení student

- rozumí souvislosti výroků/teorií až na [T-]ekvivalenci a množin modelů (tzv. algebra výroků), umí aplikovat v konkrétních příkladech
- umí zakódovat daný problém jako instanci problému SAT
- získal praktickou zkušenost s použitím SAT solveru
- rozumí algoritmu pro řešení 2-SAT pomocí implikačního grafu (včetně nalezení všech modelů), umí aplikovat na příkladě
- rozumí algoritmu pro řešení Horn-SAT pomocí jednotkové propagace , umí aplikovat na příkladě
- rozumí algoritmu DPLL a umí jej aplikovat na příkladě

Příklady na cvičení

Příklad 1. Nechť $|\mathbb{P}| = n$ a mějme výrok $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ takový, že $|M(\varphi)| = k$. Určete počet až na ekvivalenci:

(a) výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$,
(b) teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,
(c) kompletních teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,
(d) teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná.

Uvažme navíc spornou teorii $\{\varphi, \psi\}$ kde $|M(\psi)| = p$. Spočtěte až na ekvivalenci:

(e) výroky χ takové, že $\varphi \vee \psi \models \chi$,
(f) teorie, ve kterých platí $\varphi \vee \psi$.

Řešení. *(a) Podmínku vyjádříme pomocí množin modelů:* $\mathrm{M}(\varphi) \subseteq \mathrm{M}(\psi)$ *nebo* $\mathrm{M}(\psi) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$. *Víme, že všech modelů je* 2^n*, a* $|\mathrm{M}(\varphi)| = k$*. Chceme spočítat, kolik je možných množin* $\mathrm{M}(\psi)$*. Podmínku* $\mathrm{M}(\varphi) \subseteq \mathrm{M}(\psi)$ *splňuje* 2^{2^n-k} *množin (tj. tolik je nadmnožin dané k-prvkové množiny uvnitř* 2^n*-prvkové množiny), podmínku* $\mathrm{M}(\psi) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$ *splňuje* 2^k *množin. Musíme ale být opatrní, abychom případ* $\mathrm{M}(\psi) = \mathrm{M}(\varphi)$ *nezapočítali dvakrát. Celkem máme* $2^{2^n-k} + 2^k - 1$ *možných množin modelů, tedy výroků* ψ *až na ekvivalenci.*

(b) $T \models \varphi$ *právě když* $\mathrm{M}(T) \subseteq \mathrm{M}(\varphi)$*, takových množin* $\mathrm{M}(T)$ *je* 2^k

(c) Navíc máme podmínku $|\mathrm{M}(T)| = 1$*, 1-prvkových podmnožin k-prvkové množiny je k.*

(d) Přeloženo do řeči modelů, podmínka říká, že $\mathrm{M}(T \cup \{\varphi\}) \neq \emptyset$*. Máme* $\mathrm{M}(T \cup \{\varphi\}) = \mathrm{M}(T, \varphi) = \mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(\varphi)$ *(jde o modely, ve kterých platí zároveň T a* φ*). Počítáme tedy kolik možných množin* $\mathrm{M}(T)$ *má neprázdný průnik s k-prvkovou množinou* $\mathrm{M}(\varphi)$*. To lze vyjádřit např. jako* $(2^k - 1) \cdot (2^{2^n-k})$*, kde* $2^k - 1$ *je počet možných (neprázdných) "průniků"* $\mathrm{M}(T) \cap \mathrm{M}(\varphi)$*, a* 2^{2^n-k} *znamená, že pro modely, ve kterých neplatí* φ*, si můžeme libovolně zvolit, zda budou v naší množině.*

(e) Protože $\{\varphi, \psi\}$ *je sporná, víme, že* $\emptyset = \mathrm{M}(\varphi, \psi) = \mathrm{M}(\varphi) \cap \mathrm{M}(\psi)$*. Počítáme množiny* $\mathrm{M}(\chi)$ *takové, že* $\mathrm{M}(\varphi \vee \psi) \subseteq \mathrm{M}(\chi)$*. Díky Lindenbaum-Tarského algebře víme, že* $\mathrm{M}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{M}(\varphi) \cup \mathrm{M}(\psi)$*. Z disjunktnosti máme* $|\mathrm{M}(\varphi) \cup \mathrm{M}(\psi)| = k + p$*, snadno spočítáme, že množných množin modelů* $\mathrm{M}(\chi)$ *je* $2^{2^n-(k+p)}$*.*

(f) $\mathrm{M}(T)$ *musí být podmnožinou* $(k+p)$*-prvkové* $\mathrm{M}(\varphi \vee \psi)$*, je jich tedy* 2^{k+p}*.*

Příklad 2. Sestrojte implikační graf následujícího 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení.

$$(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$$

Řešení. *Sestrojíme implikační graf. Zjistíme, že má dvě komponenty silné souvislosti:* $C = \{p_1, p_2, \neg p_3, p_4, \neg p_5\}$ *a* $\overline{C} = \{\neg p_1, \neg p_2, p_3, \neg p_4, p_5\}$*, nevede mezi nimi žádná hrana. Po kontrakci komponent tedy máme dvouvrcholový graf* $\mathcal{G}^*$ *bez hran, ten má dvě topologická uspořádání:* $(C, \overline{C})$ *a* $(\overline{C}, C)$*, která odpovídají modelům* $(0,0,1,0,1)$ *a* $(1,1,0,1,0)$*.*

Příklad 3. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge$$
$$(p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6)$$

Řešení. *Provádíme postupně jednotkovou propagaci přes literály* $p_1, p_2, p_3, \neg p_4$*, zbývá výrok* $\neg p_5 \vee \neg p_6$*. Ten stačí ohodnotit tak, aby alespoň jedna z výrokových proměnných* p_5, p_6 *byla ohodnocená nulou. Modely výroku jsou tedy:* $\{(1,1,1,0,0,1), (1,1,1,0,1,0), (1,1,1,0,1,1)\}$

Příklad 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, zda je následující CNF formule splnitelná:

$$(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3)$$

Řešení. *Výrok neobsahuje jednotkovou klauzuli ani literál s čistým výskytem, musíme tedy větvit, např. přes* p_1*:*

- *Z* $\varphi \wedge p_1$ *dostáváme po jednotkové propagaci* $\neg p_2 \wedge p_2 \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$*, po jednotkové propagaci přes* $\neg p_2$ *dostáváme* $\square \wedge \neg p_3$*, což obsahuje prázdnou klauzuli* $\square$*, tedy je nesplnitelné.*
- *Z* $\varphi \wedge \neg p_1$ *dostáváme po jednotkové propagaci* $\neg p_2 \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_3$*, po jednotkové propagaci přes* $\neg p_2$ *dostáváme* $\neg p_3 \wedge p_3$*, po jednotkové propagaci přes* $\neg p_3$ *dostáváme prázdnou klauzuli* $\square$*, tedy opět je nesplnitelné.*

V obou (všech) větvích výpočtu jsme dokázali nesplnitelnost, výrok je tedy nesplnitelný.

Příklad 5. Mějme daný orientovaný graf. Chceme zjistit, zda je acyklický, a pokud ano, nalézt nějaké jeho topologické uspořádání. Zakódujte tento problém do SAT.

Řešení. *Řešení jen naznačíme. Jako jazyk zvolme* $\mathbb{P} = \{p_{uv} \mid u, v \in V\}$*, kde* p_{uv} *bude znamenat, že vrchol* u *je v topologickém uspořádání (ostře) před* v*. To, že jde o ostré uspořádání, vyjádříme pomocí následujících axiomů:*

- $\neg p_{vv}$ *pro všechna* $v \in V$
- $p_{uv} \rightarrow \neg p_{vu}$ *pro všechna* $u, v \in V$
- $p_{uv} \wedge p_{vw} \rightarrow p_{uw}$ *pro všechna* $u, v, w \in V$

Zbývá vyjádřit, že všechny grafové hrany vedou v topologickém uspořádání dopředu:

- p_{uv} *pro všechny hrany* $(u, v) \in E$

Nakonec axiomy výše převedeme do CNF, v množinovém zápisu dostáváme:

$$S = \{\{\neg p_{vv}\}, \{\neg p_{uv}, \neg p_{vu}\}, \{\neg p_{uv}, \neg p_{vw}, \neg p_{uw}\} \mid u, v, w \in V\} \cup \{\{p_{uv}\} \mid (u, v) \in E\}$$

Další příklady k procvičení

Příklad 6. Uvažme následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$$
$$\psi = s \rightarrow q$$

(a) Určete počet (až na ekvivalenci) výroků χ nad $\mathbb{P}$ takových, že $\varphi \wedge \psi \models \chi$.

(b) Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \models \varphi \wedge \psi$.
(c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) kompletní teorii T nad $\mathbb{P}$ takovou, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

Příklad 7. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge$$
$$(\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

Příklad 8. Řešte pomocí implikačního grafu jako v Příkladu 2, a také pomocí algoritmu DPLL jako v Příkladu 4:
(a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$
(b) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$

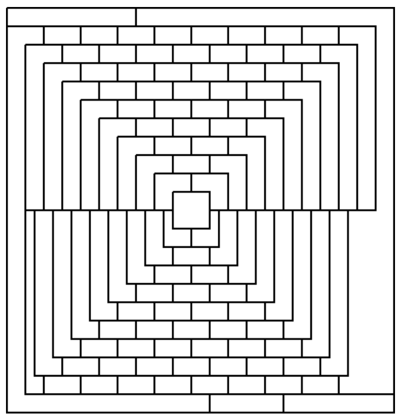
Příklad 9. Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ pro žádná $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n v CNF která je splnitelná, právě když to lze. Zkuste nejprve $n = 8$.

Zkuste si doma: Napište skript generující φ_n v DIMACS CNF formátu. Použijte SAT solver k nalezení nejmenšího n pro které takové obarvení neexistuje (tj. každé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici $a < b < c$ takovou, že $a + b = c$).

Příklad 10. Věta o čtyřech barvách říká, že následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, že žádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najděte takové obarvení pomocí SAT solveru.

(1) Mapa krajů Česka

(2) Těžší instance



K zamyšlení

Příklad 11. Pro danou formuli φ v CNF najděte a 3-CNF formuli φ' takovou, že φ' je splnitelná, právě když φ je splnitelná. Popište efektivní algoritmus konstrukce φ' je-li dána φ (tj. *redukci* z problému SAT do problému 3-SAT).

Příklad 12. Zakódujte problém setřídění dané n-tice celých čísel do SAT.

Příklad 13. Zakódujte do SAT známou hádanku o farmáři, který potřebuje přepravit přes řeku vlka, kozu, a hlávku zelí.