NAIL062 V&P Logika: 3. cvičení

Témata: Počítání výroků až na ekvivalenci (Lindenbaum-Tarského algebra). 2-SAT a implikační graf. Horn-SAT a jednotková propagace. Algoritmus DPLL. Kódování problémů do SAT.

Příklad 1. Nechť $|\mathbb{P}| = n$ a mějme výrok $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ takový, že $|M(\varphi)| = m$. Určete počet až na ekvivalenci:

(a) výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$,

(b) teorií nad $\mathbb{P}$, ve kterých platí φ,

(c) úplných teorií nad $\mathbb{P}$ ve kterých platí φ,

(d) teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná.

Uvažme navíc spornou teorii $\{\varphi, \psi\}$ kde $|M(\psi)| = p$. Spočtěte až na ekvivalenci:

(e) výroky χ takové, že $\varphi \vee \psi \models \chi$,

(f) teorie, ve kterých platí $\varphi \vee \psi$.

Příklad 2. Sestrojte implikační graf daného 2-CNF výroku. Je splnitelný? Pokud ano, najděte nějaké řešení.

(a) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_1)$,

(b) $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_5 \vee p_1)$,

(c) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1 \wedge \neg p_7$.

Příklad 3. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge \\ (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6)$$

Příklad 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, zda je následující CNF formule splnitelná.

(a)

$$(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \wedge \neg p_2) \wedge (p_2 \wedge \neg p_3) \wedge (p_1 \wedge p_3)$$

(b)

$$(\neg p_1 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_6 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_6 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_4 \wedge \neg p_2) \vee \\ (p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge p_6 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_6 \wedge \neg p_4) \vee (p_1 \wedge p_5) \vee \\ (p_1 \wedge p_6) \vee (\neg p_6 \wedge p_3 \wedge \neg p_5) \vee (p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_5)$$

Příklad 5. Lze šachovnici 4×4 bez dvou protilehlých rohů perfektně pokrýt kostkami domina? Zakódujte tento problém do SAT. Zobecněte na všechna sudá n.

Příklad 6. Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ s $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n v CNF která je splnitelná, právě když to lze. Zkuste nejprve $n = 8$.

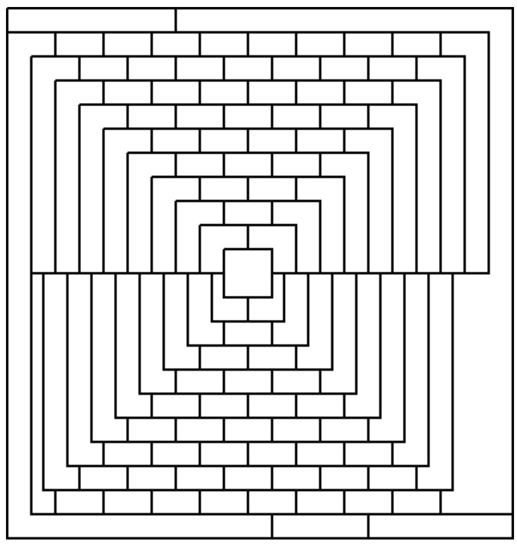
Zkuste si doma: Napište skript generující φ_n v DIMACS CNF formátu. Použijte SAT solver k nalezení nejmenšího n pro které takové obarvení neexistuje (tj. každé 2-obarvení obsahuje monochromatickou trojici $a < b < c$ takovou, že $a + b = c$).

Příklad 7. Zakódujte problém setřídění trojice celých čísel do SAT.

Příklad 8. Věta o čtyřech barvách říká, že následující mapy lze obarvit 4 barvami tak, že žádné dva sousedící regiony nemají stejnou barvu. Najděte takové obarvení pomocí SAT solveru.

(a) Mapa krajů Česka

(b) Těžší instance



Domácí úkol (3 body)**.**

1. Pomocí algoritmu implikačního grafu najděte všechny modely následující teorie:

$$T = \{p, \neg q \to \neg r, \neg q \to \neg s, r \to p, \neg s \to \neg p\}$$

2. Pomocí algoritmu jednotkové propagace najděte všechny modely následující teorie:

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge$$
$$(\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

3. Uvažme následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \to (p \wedge r)$$
$$\psi = s \to q$$

   (a) Určete počet (až na ekvivalenci) výroků χ nad $\mathbb{P}$ takových, že $\varphi \wedge \psi \models \chi$.

   (b) Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

   (c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) úplnou teorii T nad $\mathbb{P}$ takovou, že $T \models \varphi \wedge \psi$.