

NAIL062 V&P Logika: 11. cvičení

Témata: Aplikace Věty o kompaktnosti. Ještě tablo metoda. Převod do PNF. Skolemizace. Herbrandova věta.

Příklad 1. Buď L jazyk s rovností obsahující binární relační symbol \leq a T L -teorie, která má nekonečný model a platí v ní axiomy lineárního uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že T má model s *nekonečným klesajícím řetězcem*. (Z toho plyne, že *dobré uspořádání*, tj. lineární a každá neprázdná podmnožina má nejmenší prvek, není definovatelné v logice prvního řádu.)

Příklad 2. Dokažte syntakticky, pomocí transformací tabel:

- (a) *Větu o konstantách:* Buď φ L -formule s volnými proměnnými x_1, \dots, x_n a T L -teorie. Označme L' extenzi L o nové konstantní symboly c_1, \dots, c_n a T' teorii T v L' . Potom platí: $T \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n) \varphi$ právě když $T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$
- (b) *Větu o dedukci:* Pro každou (uzavřenou) teorii T a sentence φ, ψ platí: $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ právě když $T, \varphi \vdash \psi$

Příklad 3. Ukažme, že platí následující pravidla, kde φ a ψ jsou sentence nebo formule s volnou proměnnou x (značíme $\varphi(x), \psi(x)$). Najděte tablo důkazy dané formule. (Viz převod do PNF, stejně lze dokázat i ostatní pravidla o vytýkání kvantifikátorů.)

- (a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$,
- (b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$,
- (c) $(\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$ kde x není volná v ψ ,
- (d) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$ kde x není volná v ψ .

Příklad 4. Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

- (a) $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$
- (b) $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$
- (c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y)$

Příklad 5. Převeďte na ekvisplnitelnou CNF formuli, запиšte v množinové reprezentaci.

- (a) $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- (b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- (c) $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(c)) \wedge (P(x) \rightarrow P(d)))$
- (d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$

Příklad 6. Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, ověřte, že platí:

- (a) $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
- (b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$

Příklad 7. Necht $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R \rangle$ s rovností, kde:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= (\exists y)R(y, x) \\ \varphi_2 &= (\exists z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \wedge (\forall w)(R(w, x) \wedge R(w, y) \rightarrow R(w, z)))\end{aligned}$$

- (a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvivalentní s T . (2b)
- (b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, R^A \rangle$, kde $(n, m) \in R^A$ právě když n dělí m . Nalezněte expanzi \mathcal{A}' L -struktury \mathcal{A} do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. (2b)

Příklad 8. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ obsahuje jeden axiom φ , který není otevřený: $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1)$. Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models (x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z$.

- (a) Najděte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f .
- (b) Uvažme teorii T' vzniklou z T nahrazením φ za φ_S . Platí φ v T' ?
- (c) Lze každý model T *jednoznačně* rozšířit na model T' ?

Nyní uvažme formuli $\psi = x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

- (d) Platí v T axiomy existence a jednoznačnosti pro $\psi(x, y)$ a proměnnou y ?
- (e) Sestrojte extenzi T'' teorie T o definici symbolu f formulí ψ .
- (f) Je T'' ekvivalentní teorii T' ?
- (g) Najděte L -formuli, která je v T'' -ekvivalentní s formulí: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Příklad 9. Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nesplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů (a, b jsou konstantní symboly v daném jazyce).

- (a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$
- (b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$
- (c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
- (d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$