NAIL062 V&P Logika: 9. cvičení

Témata: Tablo metoda v predikátové logice, jazyky s rovností.

Příklad 1. Předpokládejme, že:

- *Všichni viníci jsou lháři.*
- *Alespoň jeden z obviněných je také svědkem.*
- *Žádný svědek nelže.*

Dokažte tablo metodou, že: *Ne všichni obvinění jsou viníci.*

Příklad 2. Uvažte následující tvrzení:

(i) *Nula je malé číslo.*

(ii) *Číslo je malé, právě když je blízko nuly.*

(iii) *Součet dvou malých čísel je malé číslo.*

(iv) *Je-li x blízko y, potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.*

Chceme dokázat, že platí: *(v) Jsou-li x a y malá čísla, potom $f(x+y)$ je blízko $f(0)$.*

(a) Formalizujte tvrzení po řadě jako sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0 \rangle$ s rovností.

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.

(c) Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$ a zda platí $T \models M(f(0))$.

(d) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie T.

Příklad 3. Nechť $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z x do y"*. Předpokládejme, že

- Z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Příklad 4. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že:

(a) $T^* \models x = y \ \rightarrow \ y = x$ (symetrie)

(b) $T^* \models (x = y \ \wedge \ y = z) \ \rightarrow \ x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$,
na (b) použijte (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

Příklad 5. Buď T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d \rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, f unární funkční symbol, a c, d konstantní symboly:

$$T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, R(f(x), x)\}$$

Označme jako T' generální uzávěr T. Nechť φ a ψ jsou následující formule:

$$\varphi = R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d)$$
$$\psi = (\exists x)R(x, f(x))$$

(a) Sestrojte tablo důkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Pro zjednodušení můžete kromě axiomů rovnosti v tablu přímo používat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$, což je jejich důsledek.)

(b) Ukažte, že ψ není důsledek teorie T, tím že najdete model T, ve kterém ψ neplatí.

(c) Kolik kompletních jednoduchých extenzí (až na ekvivalenci) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Uveďte dvě.

(d) Nechť S je následující teorie v jazyce $L' = \langle R \rangle$ s rovností. Je T konzervativní extenzí S?

$$S = \{R(x,x), R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z), R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y\}$$

Příklad 6. Ukažme, že platí následující pravidla 'vytýkání' kvantifikátorů. Používáme je při převodu do tzv. *Prenexní normální formy.* V následujících příkladech jsou φ a ψ sentence nebo formule s volnou proměnnou x (což značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$). Najděte tablo důkazy dané formule. Vyzkoušejte několik z nich, zejména poslední dva.

(a) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$,
(b) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$,
(c) $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$,
(d) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,
(e) $(\varphi \vee (\forall x)\psi(x)) \rightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi(x))$ kde x není volná v φ,
(f) $(\varphi \wedge (\exists x)\psi(x)) \rightarrow (\exists x)(\varphi \wedge \psi(x))$ kde x není volná v φ.
(g) $(\exists x)(\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\exists x)\psi(x))$ kde x není volná v φ,
(h) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \rightarrow (\varphi \wedge (\exists x)\psi(x))$ kde x není volná v φ,
(i) $(\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$ kde x není volná v ψ,
(j) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$ kde x není volná v ψ.

Příklad 7. Dokažte syntakticky, pomocí transformací tabel:

(a) Větu o konstantách: Buď φ formule v jazyce L s volnými proměnnými $x_1, \dots, x_n$ a T teorie v L. Označme L' extenzi L o nové konstantní symboly $c_1, \dots, c_n$ a T' teorii T v L'. Potom platí: $T \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n)\varphi$ právě když $T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$

(b) Větu o dedukci: Pro každou teorii T (v uzavřené formě) a sentence φ, ψ platí: $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ právě když $T, \varphi \vdash \psi$

Domácí úkol (3 body)**.** Uvažte následující tvrzení:

(i) Každý docent napsal alespoň jednu učebnici.

(ii) Každou učebnici napsal nějaký docent.

(iii) U každého docenta někdo studuje.

(iv) Každý, kdo studuje u nějakého docenta, přečetl všechny učebnice od tohoto docenta.

(v) Každou učebnici někdo přečetl.

(a) Formalizujte tvrzení (i)–(v) po řadě jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v predikátové logice v jazyce $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$ bez rovnosti, kde N, S, P jsou binární relační symboly ($N(x,y)$ znamená "x napsal y", $S(x,y)$ znamená "x studuje u y", $P(x,y)$ znamená "x přečetl y") a D, U jsou unární relační symboly ("být docentem", "být učebnicí"). *(2b)*

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni. *(3b)*

(c) Je sentence φ_5 pravdivá v teorii T? Je lživá v T? Je nezávislá v T? Zdůvodněte. *(1b)*

(d) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Zdůvodněte. *(2b)*

(e) Uvažme teorii $T' = T \cup \{D(x), S(x,y), P(x,y)\}$. Kolik má teorie T' dvouprvkových modelů (až na izomorfismus)? Zdůvodněte. *(2b)*