

NAIL062 V&P Logika: 10. cvičení

Témata: Extenze o definice. Definovatelné množiny. Tablo metoda v predikátové logice, jazyky s rovností.

Příklad 1. Buď T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$\begin{aligned} -x = y &\leftrightarrow x + y = 0 \\ x < y &\leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y) \end{aligned}$$

Najděte formule v jazyce L , které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.

$$(a) \ x + (-x) = 0 \qquad (b) \ x + (-y) < x \qquad (c) \ -(x + y) < -x$$

Příklad 2. Mějme jazyk $L = \langle F \rangle$ s rovností, kde F je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

- (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ kde \cdot je násobení reálných čísel,
- (b) množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře \mathcal{A} ,
- (c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin \mathbb{N} v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$,
- (d) množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$.

Příklad 3. Předpokládejme, že:

- *Všichni viníci jsou lháři.*
- *Alespoň jeden z obviněných je také svědkem.*
- *Žádný svědek nelže.*

Dokažte tablo metodou, že: *Ne všichni obvinění jsou viníci.*

Příklad 4. Uvažte následující tvrzení:

- (i) *Nula je malé číslo.*
- (ii) *Číslo je malé, právě když je blízko nuly.*
- (iii) *Součet dvou malých čísel je malé číslo.*
- (iv) *Je-li x blízko y , potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.*

Chceme dokázat, že platí: (v) *Jsou-li x a y malá čísla, potom $f(x + y)$ je blízko $f(0)$.*

- (a) Formalizujte jako sentence $\varphi_1, \dots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0 \rangle$ bez rovnosti.

- (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.
- (c) Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$, a zda platí $T \models M(f(0))$.
- (d) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie T .

Příklad 5. Nechť $L(x, y)$ reprezentuje “*existuje let z x do y* ” a $S(x, y)$ reprezentuje “*existuje spojení z x do y* ”. Předpokládejme, že

- Z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Příklad 6. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že:

- (a) $T^* \models x = y \rightarrow y = x$ (symetrie)
- (b) $T^* \models (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, na (b) použijte (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

Příklad 7. Buď T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d \rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, f unární funkční symbol, a c, d konstantní symboly:

$$T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, R(f(x), x)\}$$

Označme jako T' generální uzávěr T . Nechť φ a ψ jsou následující formule:

$$\begin{aligned}\varphi &= R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d) \\ \psi &= (\exists x)R(x, f(x))\end{aligned}$$

- (a) Sestrojte tablo důkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Tablo může vyjít poměrně velké. Pro zjednodušení můžete kromě axiomů rovnosti v tablu přímo používat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$, což je jejich důsledek.)
- (b) Ukažte, že ψ není důsledek teorie T , tím že najdete model T , ve kterém ψ neplatí.
- (c) Kolik kompletních jednoduchých extenzí (až na ekvivalenci) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Uveďte dvě.
- (d) Buď S následující teorie v jazyce $L' = \langle R \rangle$ s rovností. Je T konzervativní extenzí S ?

$$S = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y\}$$