Třináctá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Třináctá přednáška

Program

- aritmetické teorie
- nerozhodnutelnost predikátové logiky
- Gödelovy věty o neúplnosti

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 10.2-10.4 z Kapitoly 10

10.2 Aritmetika

Aritmetika

- přirozená čísla hrají důležitou roli v matematice i v aplikacích
- jazyk aritmetiky je $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ s rovností
- standardní model aritmetiky $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ nemá rekurzivně axiomatizovatelnou teorii (První věta o neúplnosti)
- proto používáme rekurzivně axiomatizované teorie, které vlastnosti $\underline{\mathbb{N}}$ popisují částečně; říkáme jim aritmetiky
- představíme dvě: Robinsonovu Q a Peanovu PA

Robinsonova aritmetika Q

$\neg S(x) = 0$	$x \cdot 0 = 0$
$S(x) = S(y) \rightarrow x = y$	$x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
$x + 0 = x$	$\neg x = 0 \rightarrow (\exists y)(x = S(y))$
$x + S(y) = S(x + y)$	$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$

- velmi slabá, nelze v ní dokázat např. komutativitu ani asociativitu $+$ či $\cdot$, nebo tranzitivitu $\leq$
- ale lze dokázat všechna existenční tvrzení o numerálech pravdivá v $\underline{\mathbb{N}}$, tj. formule v PNF, jen $\exists$, za volné proměnné substituujeme numerály $\underline{n} = S(\ldots S(0)\ldots)$
- např. pro $\varphi(x, y) = (\exists z)(x + z = y)$ je $Q \vdash \varphi(\underline{1}, \underline{2})$

Tvrzení: Je-li $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ existenční formule, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, pak $Q \vdash \varphi(x_1/\underline{a_1}, \ldots, x_n/\underline{a_n})$ právě když $\underline{\mathbb{N}} \models \varphi[e(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)]$

(Důkaz vynecháme.)

Peanova aritmetika *PA*

Extenze Q o schéma indukce, tj. pro každou L-formuli $\varphi(x, \overline{y})$:

$$(\varphi(0, \overline{y}) \wedge (\forall x)(\varphi(x, \overline{y}) \rightarrow \varphi(S(x), \overline{y}))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x, \overline{y})$$

- mnohem lepší aproximace $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$
- dokáže 'základní' vlastnosti (např. komut. a asociativitu $+$)
- stále ale existují sentence platné v $\underline{\mathbb{N}}$ ale nezávislé v *PA* (opět dokážeme v První větě o neúplnosti)

Poznámka: strukturu $\underline{\mathbb{N}}$ lze axiomatizovat (až na $\simeq$) v predikátové logice 2. řádu, extenzí *PA* o tzv. axiom indukce:

$$(\forall X)((X(0) \wedge (\forall x)(X(x) \rightarrow X(S(x)))) \rightarrow (\forall x)X(x))$$

- X reprezentuje (libovolnou) podmnožinu modelu
- použijeme na množinu všech následníků 0
- každý prvek je následník 0 $\Rightarrow$ izomorfismus s $\underline{\mathbb{N}}$

10.3 Nerozhodnutelnost predikátové logiky

Nerozhodnutelnost predikátové logiky

Věta (O nerozhodnutelnosti predikátové logiky): Neexistuje algoritmus, který pro vstupní formuli φ rozhodne, zda je logicky platná.

- tj. zda je formule φ [v lib. jazyce 1. řádu] tautologie ($\models \varphi$)
- neboli $T = \emptyset$ není rozhodnutelná

Hilbertův desátý problém

Důkaz nerozhodnutelnosti

10.4 Gödelovy věty

První věta o neúplnosti

Aritmetizace dokazatelnosti

Self-reference

Věta o pevném bodě

Nedefinovatelnost pravdy

Důkaz První věty o neúplnosti

Důsledky První věty o neúplnosti

Druhá věta o neúplnosti

Důsledky Druhé věty o neúplnosti