

Desátá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Program

- grounding, Herbrandova věta
- unifikace, unifikační algoritmus
- rezoluční pravidlo, rezoluční důkaz

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 8.3-8.5 z Kapitoly 8

8.3 Grounding

- **základní (ground) instance** otevřené φ ve volných proměnných x_1, \dots, x_n je $\varphi(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$, kde vš. t_i jsou konstantní

Herbrandova věta říká, že je-li **otevřená** teorie **nesplnitelná**, lze to doložit “na konkrétních prvcích”: existuje konečně mnoho **základních instancí** axiomů, jejichž konjunkce je nesplnitelná

- např. pro $T = \{P(x, y) \vee R(x, y), \neg P(c, y), \neg R(x, f(x))\}$ substituujeme **konstantní** termy $\{x/c, y/f(c)\}$:

$$(P(c, f(c)) \vee R(c, f(c))) \wedge \neg P(c, f(c)) \wedge \neg R(c, f(c))$$

- základní atomické sentence chápeme jako prvovýroky:

$$(p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$$

- to už snadno zamítneme výrokovou rezolucí
- p_1 znamená “platí $P(c, f(c))$ ”, p_2 znamená “platí $R(c, f(c))$ ”

Přímá redukce do výrokové logiky

Herbrandova věta + korektnost a úplnost výrokové rezoluce dává následující, neefektivní postup (S' je moc velká, i nekonečná):

1. $S \rightsquigarrow S' =$ množina všech základních instancí klauzulí z S
2. atomické sentence v S' chápeme jako prvovýroky
3. S nesplnitelná $\Leftrightarrow S'$ zamítnutelná 'na úrovni výrokové logiky'

Např. pro $S = \{\{P(x, y), R(x, y)\}, \{\neg P(c, y)\}, \{\neg R(x, f(x))\}\}$
 $S' = \{\{P(c, c), R(c, c)\}, \{P(c, f(c)), R(c, f(c))\}, \{P(f(c), c), R(f(c), c)\}, \dots,$
 $\{\neg P(c, c)\}, \{\neg P(c, f(c))\}, \{\neg P(c, f(f(c)))\}, \{\neg P(c, f(f(f(c))))\}, \dots,$
 $\{\neg R(c, f(c))\}, \{\neg R(f(c), f(f(c)))\}, \{\neg R(f(f(c)), f(f(f(c))))\}, \dots\}$

S' je nesplnitelná obsahuje konečnou nesplnitelnou podmnožinu:

$$\{\{P(c, f(c)), R(c, f(c))\}, \{\neg P(c, f(c))\}, \{\neg R(c, f(c))\}\} \vdash_R \square$$

Efektivnější je hledat vhodné základní instance **unifikací** [za chvíli]

Herbrandův model

Mějme jazyk $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ s alespoň jedním konstantním symbolem. L -struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ je **Herbrandův model**, jestliže:

- A je množina všech konst. L -termů (**Herbrandovo univerzum**)
- pro každý n -ární $f \in \mathcal{F}$ a (konstantní) $"t_1", \dots, "t_n" \in A$:
$$f^{\mathcal{A}}("t_1", \dots, "t_n") = "f(t_1, \dots, t_n)"$$
- speciálně, pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ je $c^{\mathcal{A}} = "c"$
- na relační symboly neklademe podmínky

Např. $L = \langle P, f, c \rangle$ (P unární rel., f binární funkční, c konstantní) **Herbrandův model** je každá struktura $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle$, kde

- $A = \{ "c", "f(c, c)", "f(c, f(c, c))", "f(f(c, c), c)" \dots \}$
- $c^{\mathcal{A}} = "c"$
- $f^{\mathcal{A}}("c", "c") = "f(c, c)", f^{\mathcal{A}}("c", "f(c, c)") = "f(c, f(c, c))",$
 $f^{\mathcal{A}}("f(c, c)", "c") = "f(f(c, c), c)",$ atd.
- $P^{\mathcal{A}} \subseteq A$ může být libovolná

Herbrandova věta

Věta (Herbrandova): Je-li T otevřená, v jazyce bez rovnosti a s alespoň jedním konstantním symbolem, potom:

- buď má T Herbrandův model, nebo
- existuje konečně mnoho základních instancí axiomů T , jejichž konjunkce je nesplnitelná.

Důkaz: T_{ground} = množina všech základních instancí axiomů T

Zkonstruujeme “systematické tablo” τ z T_{ground} s $F \perp$ v kořeni, ale z jazyka L , bez rozšíření o pomocné konstantní symboly na L_C . (Nepotřebujeme je, protože v T_{ground} nejsou kvantifikátory.)

Pokud má τ bezespornou větev, je “kanonický model” (opět bez pomocných symbolů) Herbrandovým modelem T .

Jinak je τ důkaz sporu, T_{ground} (a tedy i T) je nesplnitelná. Tablo τ je konečné, používá jen konečně mnoho $\alpha_{\text{ground}} \in T_{\text{ground}}$, jejich konjunkce už je nesplnitelná. □

- konstatní symbol potřebujeme, aby existovaly vůbec nějaké konstantní termy (ale není-li v L žádný, můžeme ho přidat)
- Herbrandův model je podobný kanonickému, ale nepřidáváme pomocné symboly, a neříkáme nic o relacích
- je-li jazyk s rovností, najdeme Herbrandův model pro T^* (přidané axiomy rovnosti) a faktorizujeme podle $=^A$

Důsledky Herbrandovy věty

Důsledek: Mějme otevřenou $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ v L s konst. symbolem. Potom existuje $m \in \mathbb{N}$ a konstantní L -termy t_{ij} ($i \in [m], j \in [n]$), že sentence $(\exists x_1) \dots (\exists x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n)$ je pravdivá, právě když je následující formule (výroková) tautologie:

$$\varphi(x_1/t_{11}, \dots, x_n/t_{1n}) \vee \dots \vee \varphi(x_1/t_{m1}, \dots, x_n/t_{mn})$$

Důkaz: Je **pravdivá**, právě když $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) \neg \varphi$ neboli $\neg \varphi$ je **nesplnitelná**. Stačí aplikovat Herbrandovu větu na $T = \{\neg \varphi\}$. \square

Důsledek: Je-li T otevřená v jazyce s konstantním symbolem, potom T má model, právě když má model teorie T_{ground} .

Důkaz: \Rightarrow V modelu T platí i všechny základní instance axiomů. Je tedy i modelem T_{ground} .

\Leftarrow Pokud T nemá model, podle Herbrandovy věty je nějaká konečná podmnožina teorie T_{ground} nesplnitelná. \square

8.4 Unifikace

8.5 Rezoluční metoda
