NAIL062 V&P Logika: 10. cvičení

Témata: Extenze o definice. Definovatelné množiny. Tablo metoda v predikátové logice, jazyky s rovností.

Příklad 1. Buď T' extenze teorie $T = \{(\exists y)(x+y=0), (x+y=0)\wedge(x+z=0) \to y=z\}$ v jazyce $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ s axiomy

$$\begin{aligned} -x = y &\quad\leftrightarrow\quad x + y = 0 \\ x < y &\quad\leftrightarrow\quad x \leq y \ \wedge\ \neg(x = y) \end{aligned}$$

Najděte formule v jazyce L, které jsou ekvivalentní v T' s následujícími formulemi.

(a) $x + (-x) = 0$ (b) $x + (-y) < x$ (c) $-(x + y) < -x$

Příklad 2. Mějme jazyk $L = \langle F \rangle$ s rovností, kde F je binární funkční symbol. Najděte formule definující následující množiny (bez parametrů):

(a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ kde $\cdot$ je násobení reálných čísel,

(b) množina $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,

(c) množina všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$,

(d) množina všech prvočísel v $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot \rangle$.

Příklad 3. Předpokládejme, že:

- *Všichni viníci jsou lháři.*
- *Alespoň jeden z obviněných je také svědkem.*
- *Žádný svědek nelže.*

Dokažte tablo metodou, že: *Ne všichni obvinění jsou viníci.*

Příklad 4. Uvažte následující tvrzení:

(i) *Nula je malé číslo.*

(ii) *Číslo je malé, právě když je blízko nuly.*

(iii) *Součet dvou malých čísel je malé číslo.*

(iv) *Je-li x blízko y, potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.*

Chceme dokázat, že platí: *(v) Jsou-li x a y malá čísla, potom $f(x + y)$ je blízko $f(0)$.*

(a) Formalizujte jako sentence $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0 \rangle$ s rovností.

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni.

(c) Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$ a zda platí $T \models M(f(0))$.

(d) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie T.

Příklad 5. Nechť $L(x, y)$ reprezentuje *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ reprezentuje *"existuje spojení z x do y"*. Předpokládejme, že

- Z Prahy lze letět do Bratislavy, Londýna a New Yorku, a z New Yorku do Paříže,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to L(y, x))$,
- $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to S(x, y))$,
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \to S(x, z))$.

Dokažte tablo metodou, že existuje spojení z Bratislavy do Paříže.

Příklad 6. Mějme teorii T^* s axiomy rovnosti. Pomocí tablo metody ukažte, že:

(a) $T^* \models x = y \ \to \ y = x$ (symetrie)

(b) $T^* \models (x = y \ \wedge \ y = z) \ \to \ x = z$ (tranzitivita)

Hint: Pro (a) použijte axiom rovnosti (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, na (b) použijte (iii) pro $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

Příklad 7. Buď T následující teorie v jazyce $L = \langle R, f, c, d\rangle$ s rovností, kde R je binární relační symbol, f unární funkční symbol, a c, d konstantní symboly:

$$T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \to x = y, R(f(x), x)\}$$

Označme jako T' generální uzávěr T. Nechť φ a ψ jsou následující formule:

$$\varphi = R(c, d) \wedge (\forall x)(x = c \vee x = d)$$
$$\psi = (\exists x)R(x, f(x))$$

(a) Sestrojte tablo důkaz formule ψ z teorie $T' \cup \{\varphi\}$. (Tablo může vyjít poměrně velké. Pro zjednodušení můžete kromě axiomů rovnosti v tablu přímo používat axiom $(\forall x)(\forall y)(x = y \to y = x)$, což je jejich důsledek.)

(b) Ukažte, že ψ není důsledek teorie T, tím že najdete model T, ve kterém ψ neplatí.

(c) Kolik kompletních jednoduchých extenzí (až na ekvivalenci) má teorie $T \cup \{\varphi\}$? Uveďte dvě.

(d) Nechť S je následující teorie v jazyce $L' = \langle R\rangle$ s rovností. Je T konzervativní extenzí S?

$$S = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z), R(x, y) \wedge R(y, x) \to x = y\}$$