NAIL062 V&P Logika: 3. cvičení

Témata: Syntaxe a sémantika výrokové logiky. Převod do CNF a DNF. Univerzálnost logických spojek.

Příklad 1. Ukažte, že $\wedge$ a $\vee$ nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že $\{\wedge, \vee\}$ není *univerzální* množina logických spojek.

Příklad 2. Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

(a) $\{\downarrow\}$ kde $\downarrow$ je Peirce arrow (NOR),

(b) $\{\uparrow\}$ kde $\uparrow$ je Sheffer stroke (NAND),

(c) $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

(d) $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.

Příklad 3. Uvažte ternární Booleovský operátor IFTE(p, q, r) definovaný jako 'if p then q else r'.

(a) Zkonstruujte pravdivostní tabulku.

(b) Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory $(\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \dots)$ lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.

Příklad 4. Mějme teorii $T = \{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q),\ \neg p \rightarrow q,\ r \rightarrow q\}$ v jazyce $\{p, q, r, s\}$.

(a) Uveďte příklad následujícího: výrok pravdivý v T, lživý v T, nezávislý v T, splnitelný v T, a dvojice T-ekvivalentních výroků.

(b) Které z následujících výroků jsou pravdivé, lživé, nezávislé, splnitelné v T? T-ekvivalentní?

$$p,\ \neg q,\ \neg p \vee q,\ p \rightarrow r,\ \neg q \rightarrow r,\ p \vee q \vee r \vee s$$

Příklad 5. Určete množinu modelů dané formule. Využijte toho, že je v DNF resp. v CNF.

(a) $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge p_3)$

(b) $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_3)$

(c) $(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) \vee (p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) \vee (\neg p_3) \vee (p_2 \wedge p_4) \vee (p_1 \wedge p_3 \wedge p_5) \vee (p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_2)$

(d) $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_3) \wedge (p_2 \vee p_4) \wedge (p_1 \vee p_3 \vee p_5) \wedge (p_3 \vee \neg p_4 \vee p_2)$

Příklad 6. Převeďte následující výroky do CNF a DNF (I) tabulkou (určením modelů), (II) ekvivalentními úpravami.

(a) $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$,

(b) $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$,

Příklad 7. Pro danou formuli φ v CNF najděte a 3-CNF formuli φ' takovou, že φ' je splnitelná, právě když φ je splnitelná. Popište efektivní algoritmus konstrukce φ' je-li dána φ (tj. redukci z problému SAT do problému 3-SAT).

Příklad 8. Najděte (co nejkratší) CNF a DNF reprezentace Booleovské funkce maj : ${}^3 2 \to 2$, která vrací převládající hodnotu mezi 3 vstupy.

Příklad 9. Uměli byste nalézt CNF a DNF reprezentace n-ární parity, tj. Booleovské funkce par : ${}^n 2 \to 2$ definované pomocí $\mathrm{par}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n) \bmod 2$, která vrací XOR všech vstupních hodnot? Zkuste to pro malé hodnoty n.

Příklad 10. Buď $\mathbb{P}$ spočetně nekonečná množina prvovýroků. Ukažte, že již neplatí, že každou $K \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{P}}$ lze axiomatizovat výrokem v CNF i výrokem v DNF. Najděte množinu modelů K, kterou nelze axiomatizovat ani výrokem v CNF, ani výrokem v DNF.

Příklad 11. Uvažte následující dvě teorie:

(I) $T = \{p \wedge q, p \to \neg q, q\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q\}$

(II) $T = \{(p \wedge q) \to r, \neg r \vee (p \wedge q)\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$

(a) Rozhodněte, zda je teorie T [konzistentní/splnitelná/kompletní]. (konzistentní=bezesporná, kompletní=úplná)

(b) Uveďte příklad výroku φ, který je [platný/nesplnitelný/nezávislý] v T

(c) Uveďte příklad extenze T' teorie T (pokud existuje, a pokud možno neekvivalentní s T), která je [jednoduchá / konzervativní/kompletní/konzervativní jednoduchá/kompletní jednoduchá/kompletní konzervativní].

Příklad 12. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii $T = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\mathrm{var}(T)$.

(a) Které výroky ve tvaru $p_i \to p_j$ jsou důsledky T?

(b) Určete všechny modely T.

Příklad 13. Dokažte nebo vyvraťte (nebo uveďte správný vztah), že pro každou teorii T a výroky φ, ψ v jazyce $\mathbb{P}$ platí:

(a) $T \models \varphi$, právě když $T \not\models \neg\varphi$

(b) $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \wedge \psi$

(c) $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \vee \psi$

(d) $T \models \varphi \to \psi$ and $T \models \psi \to \chi$, právě když $T \models \varphi \to \chi$

Příklad 14. Dokažte nebo vyvraťte (nebo uveďte správný vztah), že pro libovolné teorie T, S nad $\mathbb{P}$ platí:

(a) $S \subseteq T \Rightarrow \mathrm{Csq}(T) \subseteq \mathrm{Csq}(S)$

(b) $\mathrm{Csq}(S \cup T) = \mathrm{Csq}(S) \cup \mathrm{Csq}(T)$

(c) $\mathrm{Csq}(S \cap T) = \mathrm{Csq}(S) \cap \mathrm{Csq}(T)$

Domácí úkol (2 body)**.**

1. Převeďte následující výrok do CNF a DNF:

$$((p \to \neg q) \to \neg r) \to \neg p.$$

   (a) tabulkou (určením modelů),

   (b) ekvivalentními úpravami (pokuste se najít co nejkratší CNF a DNF ekvivalenty).

2. Uvažte teorii $S = \{p_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\mathrm{var}(S)$.

   (a) Které výroky ve tvaru $p_i \to p_j$ jsou důsledky S?

   (b) Které výroky ve tvaru $p_i \to (p_j \vee q_j)$ jsou důsledky S?

   (c) Určete všechny modely S.