Osmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Osmá přednáška

Program

- tablo metoda v predikátové logice
- jazyky s rovností
- korektnost a úplnost, kanonický model

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 7.1-7.4 z Kapitoly 7

Kapitola 7: Tablo metoda v predikátové logice

7.1 Neformální úvod

Úvodní příklady: dva tablo důkazy

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x) \to \neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\color{red}{\mathrm{T}(\exists x)\neg P(x)} \\
| \\
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\color{blue}{\mathrm{T}(\forall x)P(x)} \\
| \\
\mathrm{T}\neg P(c_0) \\
| \\
\mathrm{F}P(c_0) \\
| \\
\color{blue}{\mathrm{T}(\forall x)P(x)} \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \\
\otimes
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\mathrm{F}\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)\neg P(x) \\
| \\
\mathrm{T}\neg(\forall x)P(x) \\
| \\
\color{blue}{\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x)} \\
| \\
\color{red}{\mathrm{F}(\forall x)P(x)} \\
| \\
\mathrm{F}P(c_0) \\
| \\
\color{blue}{\mathrm{F}(\exists x)\neg P(x)} \\
| \\
\mathrm{F}\neg P(c_0) \\
| \\
\mathrm{T}P(c_0) \\
\otimes
\end{array}
$$

Tablo metoda v predikátové logici

- opět vždy předpokládáme, že jazyk L je spočetný (nejprve bez rovnosti, později metodu rozšíříme pro rovnost)
- v položkách musí být sentence: pravdivostní hodnota nesmí záviset na ohodnocení (ale můžeme vzít generální uzávěry)
- redukce položek: stejná atomická tabla pro logické spojky (kde φ, ψ jsou sentence), ale čtyři nové případy pro kvantifikátory:
  - typ “svědek”: položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
  - typ “všichni”: položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$
- kvantifikátor nelze odstranit, $\varphi(x)$ by typicky nebyla sentence
- místo toho za x substituujeme konstantní term t: $\varphi(x/t)$
- jaký? podle typu položky (“svědek” vs. “všichni”)

Redukce položek s kvantifikátorem

- jazyk L rozšíříme o spočetně mnoho nových (pomocných) konstantních symbolů $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$, označíme L_C
- vždy máme k dispozici nový, dosud nepoužitý symbol $c \in C$
- **typ "svědek":** dosadíme nový $c \in C$ (dosud na větvi není)
  - pro $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/c)$
  - c hraje roli prvku, který položku 'splňuje'
- **typ "všichni":** substituujeme libovolný konstantní L_C-term
  - pro $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ tedy máme $\mathrm{T}\varphi(x/t)$
  - bezesporná větev je dokončená jen pokud dosadíme všechny t ('použijeme vše, co víme')
- **konvence:** kořeny atomických tabel nekreslíme kromě položek typu "všichni" (po jednom dosazení ještě nejsme hotovi!)
- **typický postup:** nejprve zredukujeme položky typu "svědek", poté zjistíme, co 'o svědcích říkají' položky typu "všichni"

7.2 Formální definice

Jazyk, položky, atomická tabla

- buď L spočetný jazyk bez rovnosti.
- označme L_C rozšíření L o spočetně mnoho nových pomocných konstantních symbolů $C = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- zvolme očíslování konstantních L_C-termů: $\{t_i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- mějme nějakou L-teorii T a L-sentenci φ
- položka je nápis $\mathrm{T}\varphi$ nebo $\mathrm{F}\varphi$, kde φ je L_C-sentence
- položky tvaru $\mathrm{T}(\exists x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$ jsou typu "svědek"
- položky tvaru $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$ a $\mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$ jsou typu "všichni"
- atomická tabla jsou násl. položkami označkované stromy:

Atomická tabla pro kvantifikátory

φ je libovolná L_C-sentence, x proměnná, t_i konstantní L_C-term, $c_i \in C$ je nový pomocný konstantní symbol (při konstrukci tabla nesměl dosud být na dané větvi)

	$\forall$	$\exists$
True	$\begin{array}{c} \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x) \\ \mid \\ \mathrm{T}\varphi(x/t_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{T}(\exists x)\varphi(x) \\ \mid \\ \mathrm{T}\varphi(x/c_i) \end{array}$
False	$\begin{array}{c} \mathrm{F}(\forall x)\varphi(x) \\ \mid \\ \mathrm{F}\varphi(x/c_i) \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{F}(\exists x)\varphi(x) \\ \mid \\ \mathrm{F}\varphi(x/t_i) \end{array}$

Atomická tabla pro logické spojky

φ a ψ jsou libovolné L_C-sentence

	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
True	$\begin{array}{c} \mathrm{T}\neg\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{T}\varphi\wedge\psi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\vee\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\rightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{F}\varphi & \mathrm{T}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{T}\varphi\leftrightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{F}\varphi \\ \vert & \vert \\ \mathrm{T}\psi & \mathrm{F}\psi \end{array}$
False	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\neg\varphi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}\varphi\wedge\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{F}\varphi & \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\varphi\vee\psi \\ \vert \\ \mathrm{F}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} \mathrm{F}\varphi\rightarrow\psi \\ \vert \\ \mathrm{T}\varphi \\ \vert \\ \mathrm{F}\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}\varphi\leftrightarrow\psi} \\ / & \backslash \\ \mathrm{T}\varphi & \mathrm{F}\varphi \\ \vert & \vert \\ \mathrm{F}\psi & \mathrm{T}\psi \end{array}$

Formální definice tabla

- konečné tablo z teorie T je uspoř., položkami označ. strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
  - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie T
  - pro libovolnou položku P na libovolné větvi V můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P
    je-li P typu "svědek", můžeme použít jen $c_i \in C$, který dosud na V není (pro typ "všichni" lze použít lib. konst. L_C-term t_i)
  - na konec libovolné větve můžeme připojit položku $\mathrm{T}\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$
- tablo z teorie T je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde:
  - τ_i jsou konečná tabla z T
  - τ_0 je jednoprvkové tablo
  - τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku
- tablo pro položku P je tablo, které má položku P v kořeni

konvence: kořen atom. tabla nezapisujeme není-li P typu "všichni"

Dokončené a sporné tablo

- Tablo je sporné, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je sporná, pokud obsahuje položky $\mathrm{T}\psi$ a $\mathrm{F}\psi$ pro nějakou sentenci ψ, jinak je bezesporná.
- Tablo je dokončené, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je dokončená, pokud je sporná, nebo
  - každá její položka je na této větvi redukovaná,
  - a zároveň obsahuje položku $\mathrm{T}\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je redukovaná na větvi V procházející P, pokud
  - je tvaru $\mathrm{T}\psi$ resp. $\mathrm{F}\psi$ pro atomickou sentenci, nebo
  - není typu "všichni" a vyskytuje se na V jako kořen atomického tabla (tj., typicky, již došlo k jejímu rozvoji na V), nebo
  - je typu "všichni" a všechny její výskyty na větvi V jsou na V redukované.

Kdy je výskyt položky typu "všichni" redukovaný?

Výskyt položky P typu "všichni" na V je i-tý, má-li právě $i-1$ předků označených P, a i-tý výskyt je redukovaný na V, pokud

- P má $(i+1)$-ní výskyt na V, a zároveň
- na V je položka $\mathrm{T}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$) resp. $\mathrm{F}\varphi(x/t_i)$ (je-li $P = \mathrm{F}(\exists x)\varphi(x)$), kde t_i je i-tý konstantní L_C-term (tj., typicky, už jsme za x substituovali t_i)

NB: je-li položka typu "všichni" na V redukovaná, má na V nekonečně výskytů, a dosadili jsme všechny konstantní L_C-termy

Tablo důkaz a tablo zamítnutí

- tablo důkaz sentence φ z teorie T je sporné tablo z teorie T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni
- pokud existuje, je φ (tablo) dokazatelný z T, píšeme $T \vdash \varphi$
- podobně, tablo zamítnutí je sporné tablo s $\mathrm{T}\varphi$ v kořeni
- existuje-li, je φ (tablo) zamítnutelný z T, tj. platí $T \vdash \neg\varphi$

Příklad: tablo důkaz (v logice)

$$\mathrm{F}(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

$$\mathrm{F}(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)P(x)$$

$$\mathrm{F}(\forall x)Q(x)$$

$$\mathrm{F}Q(c_0)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)P(x)$$

$$\mathrm{T}P(c_0)$$

$$\mathrm{T}(\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

$$\mathrm{T}P(c_0) \to Q(c_0)$$

$$\begin{array}{cc} \diagup & \diagdown \\ \mathrm{F}P(c_0) & \mathrm{T}Q(c_0) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

Ještě příklad (φ, ψ jsou formule s jedinou volnou proměnnou x)

- $\mathrm{F}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
  - $\mathrm{T}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
    - $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$
      - $\mathrm{F}(\forall x)\varphi(x)$
        - $\mathrm{F}\varphi(c_0)$
        - $\mathrm{T}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
        - $\mathrm{T}\varphi(c_0) \wedge \psi(c_0)$
        - $\mathrm{T}\varphi(c_0)$
        - $\mathrm{T}\psi(c_0)$
        - $\otimes$
      - $\mathrm{F}(\forall x)\psi(x)$
        - $\mathrm{F}\psi(c_0)$
        - $\mathrm{T}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
        - $\mathrm{T}\varphi(c_0) \wedge \psi(c_0)$
        - $\mathrm{T}\varphi(c_0)$
        - $\mathrm{T}\psi(c_0)$
        - $\otimes$
  - $\mathrm{F}(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
    - $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$
    - $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$
    - $\mathrm{T}(\forall x)\psi(x)$
    - $\mathrm{F}(\varphi(c_0) \wedge \psi(c_0))$
      - $\mathrm{F}\varphi(c_0)$
        - $\mathrm{T}(\forall x)\varphi(x)$
        - $\mathrm{T}\varphi(c_0)$
        - $\otimes$
      - $\mathrm{F}\psi(c_0)$
        - $\mathrm{T}(\forall x)\psi(x)$
        - $\mathrm{T}\psi(c_0)$
        - $\otimes$

(c_0 lze použít jako nový ve všech případech: na dané větvi se dosud nevyskytuje)

Systematické tablo

musí někdy zredukovat každou položku, použít každý axiom, a nově ve všech položkách typu "všichni" dosadit každý L_C term t_i

Systematické tablo z $T = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ pro položku R je $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové s položkou R, a pro $i \geq 0$:

- buď P nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející P (resp. je-li typu "všichni", její výskyt není redukovaný)
- nejprve definujeme τ_i' vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející P, kde je-li P typu "všichni" a má-li ve vrcholu k-tý výskyt, dosadíme k-tý L_C-term t_k, je-li typu "svědek", substituujeme $c_i \in C$ s nejmenším i, které na větvi zatím není
- pokud taková položka P neexistuje, potom $\tau_i' = \tau_i$
- τ_{i+1} vznikne z τ_i' připojením $\mathrm{T}\alpha_{i+1}$ na vš. bezesporné větve (pokud už jsme použili všechny axiomy, definujeme $\tau_{i+1} = \tau_i'$)

Konečnost a systematičnost důkazů

Lemma: Systematické tablo je dokončené.

Důkaz: k-tý výskyt položky typu "všichni" redukujeme když na něj narazíme: připojíme $(k+1)$-ní výskyt a dosadíme k-tý L_C-term t_k. Zbytek důkazu jako ve výrokové logice. □

Neprodlužujeme-li sporné větve (což nemusíme), je sporné tablo vždy konečné. Důkaz stejný jako ve výrokové logice:

Důsledek (Konečnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i konečný tablo důkaz φ z T.

Stejně jako ve výrokové logice z důkazu plyne:

Důsledek (Systematičnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem φ z T.

7.3 Jazyky s rovností

7.4 Korektnost a úplnost