

Kapitola 1

Teorie modelů

V této kapitole se trochu vzdálíme typickým aplikacím logiky v informatice¹ a nahlédneme o úroveň abstrakce výše, do oblasti *matematické logiky*. *Teorie modelů* se snaží popsat vztah mezi obecnými vlastnostmi teorií (predikátové logiky) a tříd jejich modelů. Nevyhneme se práci s nekonečnými teoriemi a s nekonečnými strukturami. Jde jen o ukázkou několika vybraných výsledků, které jsou pro nás dostupné. Ani se nepokusíme obsáhnout všechny hlavní oblasti teorie modelů, která je velmi bohatá a hluboká. Do této kapitoly jsme také přidali materiál týkající se vlastností modelů, který se nehodil jinam.

1.1 Elementární ekvivalence

Nejprve se podíváme na několik vlastností souvisejících s pojmem *elementární ekvivalence*. Připomeňme, že L -struktury \mathcal{A} a \mathcal{B} jsou *elementárně ekvivalentní* ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L -sentence.

V teorii modelů nás často zajímá, jaké vlastnosti (sentence) platí v dané, konkrétní struktuře:

Definice 1.1.1 (Teorie struktury). Mějme L -strukturu \mathcal{A} . *Teorie struktury* \mathcal{A} , značíme $\text{Th}(\mathcal{A})$ je množina všech L -sentencí platných v \mathcal{A} :

$$\text{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Příklad 1.1.2. Jako důležitý příklad vezměme *standardní model aritmetiky*, strukturu $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$. Teorii $\text{Th}(\mathbb{N})$ říkáme *aritmetika přirozených čísel*. V následující kapitole si ukážeme, že je (algoritmicky) nerozhodnutelná.²

Několik jednoduchých vlastností teorie struktury shrneme v následujícím pozorování:

Pozorování 1.1.3. *Nechť \mathcal{A} je L -struktura a T je L -teorie.*

(i) *Teorie $\text{Th}(\mathcal{A})$ je kompletní.*

(ii) *Je-li $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_L(T)$, potom $\text{Th}(\mathcal{A})$ je (kompletní) jednoduchá extenze teorie T .*

¹Například použití rezoluce k řešení otázky, zda v dané konečné teorii T platí daná sentence φ .

²Teorie T je (algoritmicky) rozhodnutelná, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní sentenci φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$.

(iii) Pokud $\mathcal{A} \in M_L(T)$ a T je kompletní, potom je $\text{Th}(\mathcal{A})$ ekvivalentní s T , v tom případě $\text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Csq}_L(T)$.

Pomocí pojmu *teorie struktury* můžeme také vyjádřit elementární ekvivalenci, pro L -struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} platí:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \text{ právě když } \text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B}).$$

Příklad 1.1.4. Podívejme se standardní uspořádání reálných, racionálních, a celých čísel, tj. na struktury $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$. Jak jsme již zmínili v Příkladu ??, není těžké ukázat, že $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ (pomocí *hustoty* těchto uspořádání). Struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ale elementárně ekvivalentní nejsou: V $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ má každý prvek bezprostředního následníka, což v $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ neplatí. Pro následující sentenci φ tedy máme $\varphi \in \text{Th}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle)$ ale $\varphi \notin \text{Th}(\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle)$:

$$\varphi = (\forall x)(\exists y)(x \leq y \wedge \neg x = y \wedge (\forall z)(x \leq z \rightarrow z = x \vee y \leq z))$$

1.1.1 Kompletní jednoduché extenze

Máme-li teorii T , zajímá nás, jak vypadají její modely. Připomeňme, že:

- Teorie je *kompletní*, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci.³
- Modely teorie T až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají kompletním jednoduchým extenzím T .

Kompletní jednoduché extenze L -teorie T jsou tedy tvaru $\text{Th}(\mathcal{A})$ pro $\mathcal{A} \in M_L(T)$, a (jak jsme už zmínili výše) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ právě když $\text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B})$. Místo hledání všech modelů tedy stačí najít všechny kompletní jednoduché extenze.

Tvrzení 1.1.5. *Pokud lze efektivně (algoritmicky) popsat všechny kompletní jednoduché extenze⁴ efektivně dané teorie T ,⁵ potom je T (algoritmicky) rozhodnutelná.*

Důkaz. Pro danou sentenci φ buď $T \vdash \varphi$, nebo existuje protipříklad $\mathcal{A} \not\models \varphi$, tedy kompletní jednoduchá extenze T_i teorie T taková, že $T_i \not\models \varphi$. Z kompletnosti ale plyne, že $T_i \vdash \neg\varphi$. Náš algoritmus bude paralelně konstruovat tablo důkaz φ z T a tablo důkaz $\neg\varphi$ ze všech kompletních jednoduchých extenzí T_1, T_2, \dots teorie T .⁶ Víme, že alespoň jedno z paralelně konstruovaných tabel je sporné, a můžeme předpokládat, že konečné (neprodlužujeme-li sporné větve tabla), tedy algoritmus ho po konečně mnoha krocích zkonstruuje. \square

Schopnost efektivně popsat všechny kompletní jednoduché extenze je poměrně vzácná, a vyžaduje silné předpoklady. Přesto to lze provést u mnoha důležitých teorií. Uveďme jeden příklad: *teorii hustého lineárního uspořádání (dense linear order)*.

³Tedy všechny její modely jsou elementárně ekvivalentní.

⁴Představte si algoritmus, který pro daná vstupní i, j odpoví j -tý axiom i -té kompletní jednoduché extenze (v nějakém pevném očíslování); takový algoritmus ne vždy existuje!

⁵ T může být nekonečná, ale musí existovat algoritmus, který generuje všechny axiomy T .

⁶Nevadí, že je jich nekonečně mnoho, můžeme využít tzv. *dovetailing*: Provedeme 1. krok konstrukce 1. tabla, potom 2. krok 1. tabla a 1. krok 2. tabla, 3. krok 1. tabla, 2. krok 2. tabla, 1. krok 3. tabla, atd.

Příklad: DeLO*

Teorie *hustého lineárního uspořádání* ($DeLO^*$) je extenze teorie uspořádání o následující axiomy:

- axiom *linearity* (někdy se mu říká také *dichotomie*):

$$x \leq y \vee y \leq x$$

- axiom *hustoty*

$$x \leq y \wedge \neg x = y \rightarrow (\exists z)(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg z = x \wedge \neg z = y)$$

Někdy se přidává i axiom *netriviality* $(\exists x)(\exists y)(\neg x = y)$ zakazující jednoprvkový model. Tato teorie není kompletní, umíme ale popsat všechny její kompletní jednoduché extenze:

Tvrzení 1.1.6. *Mějme sentence $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ a $\psi = (\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ vyjadřující existenci minimálního resp. maximálního prvku. Následující čtyři teorie jsou právě všechny kompletní jednoduché extenze teorie $DeLO^*$:*

- $DeLO = DeLO^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}$
- $DeLO^+ = DeLO^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}$
- $DeLO^- = DeLO^* \cup \{\varphi, \neg\psi\}$
- $DeLO^\pm = DeLO^* \cup \{\varphi, \psi\}$

Stačí ukázat, že tyto čtyři teorie jsou kompletní. Potom už je zřejmé, že žádná další kompletní jednoduchá extenze $DeLO^*$ nemůže existovat. Jak vysvětlíme v Sekci 1.3, jejich kompletnost plyne z faktu, že jsou ω -kategorické, tj. mají jediný spočetný model až na izomorfismus. Viz Důsledek 1.3.5.

Z Tvrzení 1.1.5 potom plyne rozhodnutelnost:

Důsledek 1.1.7. *Teorie $DeLO^*$ je (algoritmicky) rozhodnutelná.*

1.1.2 Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty

V Sekci ?? jsme dokázali tzv. Löwenheim-Skolemovu větu, konkrétně její variantu pro jazyky bez rovnosti:

Věta (Löwenheim-Skolemova). *Je-li L spočetný jazyk bez rovnosti, potom každá bezesporná L -teorie má spočetně nekonečný model.*

Tato věta má následující jednoduchý důsledek:

Důsledek 1.1.8. *Je-li L spočetný jazyk bez rovnosti, potom ke každé L -struktuře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.*

Důkaz. Mějme L -strukturu \mathcal{A} . Teorie $Th(\mathcal{A})$ je bezesporná (má model \mathcal{A}), tedy dle Löwenheim-Skolemovy má spočetně nekonečný model $\mathcal{B} \models Th(\mathcal{A})$. To ale znamená, že $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$. \square

V jazyce bez rovnosti tedy nemůžeme vyjádřit například ‘model má právě 42 prvků’.

V důkazu Löwenheim-Skolemovy věty jsme sestrojený model získali jako kanonický model pro bezespornou větev tabla z T pro položku $F\perp$. Stejným způsobem se dokáže následující verze pro jazyky s rovností, stačí faktorizovat dle relace $=^A$:

Věta (Löwenheim-Skolemova s rovností). *Je-li L spočetný jazyk s rovností, potom každá bezesporná L -teorie má spočetný model (tj. konečný, nebo spočetně nekonečný).*

I tato verze má snadný důsledek pro konkrétní struktury:

Důsledek 1.1.9. *Je-li L spočetný jazyk s rovností, potom ke každé nekonečné L -struktúře existuje elementárně ekvivalentní spočetně nekonečná struktura.*

Důkaz. Mějme nekonečnou L -strukturu \mathcal{A} . Stejně jako v důkazu Důsledku 1.1.8 najdeme spočetně nekonečnou strukturu $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$. Protože v \mathcal{A} neplatí pro žádné $n \in \mathbb{N}$ sentence vyjadřující ‘existuje nejvýše n prvků’ (což lze pomocí rovnosti snadno zapsat), neplatí tato sentence ani v \mathcal{B} , \mathcal{B} tedy nemůže být konečná struktura. \square

Tento důsledek použijeme, abychom ukázali, že existuje spočetné těleso, které je algebraicky uzavřené:

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

Těleso \mathcal{A} je *algebraicky uzavřené*, pokud každý polynom nenulového stupně v něm má kořen. Těleso reálných čísel \mathbb{R} není algebraicky uzavřené, neboť $x^2 + 1$ nemá v \mathbb{R} kořen, stejně tak těleso \mathbb{Q} (v něm nemá kořen ani $x^2 - 2$). Těleso komplexních čísel \mathbb{C} algebraicky uzavřené je, je ale nespočetné.

Algebraickou uzavřenost lze vyjádřit pomocí následujících sentencí ψ_n , pro každé $n > 0$:

$$(\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0 = 0)$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \dots \cdot y$ (kde \cdot je aplikováno $(k - 1)$ -krát).

Důsledek 1.1.10. *Existuje spočetné algebraicky uzavřené těleso.*

Důkaz. Dle Důsledku 1.1.9 existuje spočetně nekonečná struktura \mathcal{A} elementárně ekvivalentní tělesu \mathbb{C} . Protože \mathbb{C} je těleso a splňuje sentence ψ_n pro všechna $n > 0$, je i \mathcal{A} algebraicky uzavřené těleso. \square

1.2 Izomorfismus struktur

[TODO]

Podívejme se blíže na pojem *izomorfismu struktur*, který zobecňuje izomorfismus grafů, vektorových prostorů, apod. Neformálně řečeno, struktury jsou *izomorfní*, pokud se liší jen pojmenováním konkrétních prvků.

Definice 1.2.1. Mějme struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$. *Izomorfismus \mathcal{A} a \mathcal{B} (nebo ‘ \mathcal{A} na \mathcal{B} ’) je bijekce $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ splňující následující vlastnosti:*

- Pro každý (n -ární) funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a pro všechna $a_i \in A$ platí:

$$h(f^A(a_1, \dots, a_n)) = f^B(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

(Speciálně, je-li $c \in \mathcal{F}$ konstantní symbol, platí $h(c^A) = c^B$.)

- Pro každý (n -ární) relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a pro všechna $a_i \in A$ platí:

$$R^A(a_1, \dots, a_n) \text{ právě když } R^B(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

Pokud existuje, říkáme, že \mathcal{A} a \mathcal{B} jsou *izomorfní* (nebo ‘ \mathcal{A} je izomorfní s \mathcal{B} via h ’) a píšeme $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ (nebo $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$). *Automorfismus* \mathcal{A} je izomorfismus \mathcal{A} na \mathcal{A} .

Všimněte si, že relace ‘býti izomorfní’ je ekvivalence. Ukažme si jeden příklad:

Příklad 1.2.2. Je-li $|X| = n$, je potenční algebra $\mathcal{P}(X) = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ izomorfní s Booleovou algebrou $2^n = \langle \{0, 1\}^n, -, \wedge_n, \vee_n, (0, \dots, 0), (1, \dots, 1) \rangle$ (kde operace aplikujeme po složkách) via $h(A) = \chi_A$, kde χ_A je charakteristický vektor podmnožiny $A \subseteq X$.

Nyní ukážeme, že izomorfismus je bijekce ‘zachovávající sémantiku’:

Tvrzení 1.2.3. *Mějme struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$. Bijekce $h: A \rightarrow B$ je izomorfismus \mathcal{A} a \mathcal{B} , právě když platí následující:*

(i) *pro každý L -term t a ohodnocení proměnných $e: \text{Var} \rightarrow A$:*

$$h(t^A[e]) = t^B[e \circ h]$$

(ii) *pro každou L -formuli φ a ohodnocení proměnných $e: \text{Var} \rightarrow A$:*

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ právě když } \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$$

Důkaz. Je-li h izomorfismus, vlastnosti snadno dokážeme indukcí podle struktur termu resp. formule. Naopak, je-li h bijekce splňující (i) a (ii), dosazením $t = f(x_1, \dots, x_n)$ resp. $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$ dostáváme vlastnosti z definice izomorfismu. \square

Jako okamžitý důsledek dostáváme fakt, že izomorfní struktury jsou elementárně ekvivalentní:

Důsledek 1.2.4. *Pokud $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, potom $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.*

Poznámka 1.2.5. Obrácená implikace ale obecně neplatí, například pro uspořádané množiny racionálních a reálných čísel platí $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ ale $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ neboť \mathbb{Q} je spočetná množina zatímco \mathbb{R} není (neexistuje tedy mezi nimi žádná bijekce).

Pro konečné modely ale platí, že izomorfismus je totéž co elementární ekvivalence, máme-li jazyk s rovností, jak dokážeme v následujícím tvrzení:

Tvrzení 1.2.6. *Je-li L jazyk s rovností a \mathcal{A}, \mathcal{B} konečné L -struktury, potom platí:*

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \text{ právě když } \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

Důkaz. Jednu implikaci jsme dokázali v Důsledku 1.2.4. Předpokládejme, že $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ a ukažme, že existuje izomorfismus \mathcal{A} na \mathcal{B} . Protože je jazyk s rovností, můžeme vyjádřit sentenci, že ‘existuje právě n prvků’. Z toho plyne, že $|A| = |B|$.

Označme jako \mathcal{A}' expanzi \mathcal{A} o jména prvků z A ; jde o strukturu v jazyce $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$. Ukážeme, že \mathcal{B} lze expandovat na L' -strukturu \mathcal{B}' tak, že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$. Potom, jak lze snadno ověřit, je zobrazení $h(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ izomorfismem \mathcal{A}' na \mathcal{B}' , a tedy i izomorfismem jejich L -reduktů a $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Stačí ukázat, že pro každé $c_a^{\mathcal{A}'} = a \in A$ existuje prvek $b \in B$ takový, že pro expanze o interpretaci konstantního symbolu c_a platí $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$. Označme jako Ω množinu formulí $\varphi(x)$ takových, že $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, neboli $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Protože je A konečná množina, existuje konečně mnoho formulí $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ takových, že pro každou formuli $\varphi \in \Omega$ existuje i takové, že $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$. Potom i $\mathcal{B} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$ (neboť $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, stačí vzít generální uzávěr této formule, což je sentence).

Protože v \mathcal{A} platí sentence $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$ (je splněna díky prvku $a \in A$) a $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, máme i $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$. Jinými slovy, existuje $b \in B$ takové, že $\mathcal{B} \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i[e(x/b)]$. Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ platí $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$, což jsme chtěli dokázat. \square

Důsledek 1.2.7. *Pokud má kompletní teorie v jazyce s rovností konečný model, potom jsou všechny její modely izomorfní.*

1.2.1 Definovatelnost a automorfismy

Připomeňme si pojem definovatelné množiny, viz Sekce ???. Ukážeme si užitečnou vlastnost definovatelných množin: jsou uzavřené (‘invariantní’) na automorfismy dané struktury.

Nikoho nepřekvapí, že při automorfismu se musí izolovaný vrchol daného grafu zobrazit na izolovaný vrchol, vrchol stupně 4 na vrchol stejného stupně, nebo třeba trojice vrcholů, která tvoří trojúhelník, na trojúhelník. To nám může pomoci například při hledání automorfismů.

Tvrzení 1.2.8. *Je-li $D \subseteq A^n$ definovatelná ve struktuře \mathcal{A} , potom pro každý automorfismus $h \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ platí $h[D] = D$ (kde $h[D]$ značí $\{h(\bar{a}) \mid \bar{a} \in D\}$).*

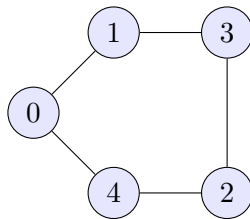
Je-li D definovatelná s parametry \bar{b} , platí totéž pro automorfismy identické na \bar{b} , tj. takové, že $h(\bar{b}) = \bar{b}$ (neboli $h(b_i) = b_i$ pro všechna i).

Důkaz. Ukážeme jen verzi s parametry. Necht' $D = \varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$. Potom pro každé $\bar{a} \in A^n$ platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned} \bar{a} \in D &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/h(\bar{b}))] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow h(\bar{a}) \in D. \end{aligned}$$

\square

Příklad 1.2.9. Uvažme následující graf \mathcal{G} . Najdeme všechny množiny definovatelné z \mathcal{G} s parametrem 0, tj. množinu $\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$.



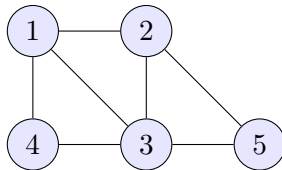
Tento graf má jediný netriviální automorfismus zachovávající vrchol 0: $h(i) = 5 - i$. Jeho *orbity* jsou $\{0\}$, $\{1, 4\}$, a $\{2, 3\}$. Tyto množiny jsou definovatelné:

- $\{0\}$ je definované formulí $x = y$, tj. $(x = y)^{\mathcal{G}, \{0\}} = \{0\}$,
- $\{1, 4\}$ lze definovat pomocí formule $E(x, y)$, a
- $\{2, 3\}$ formulí $\neg E(x, y) \wedge \neg x = y$.

Množina $\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\})$ je podalgebra potenční algebry $\mathcal{P}(V(\mathcal{G}))$, musí tedy být uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik, a obsahovat \emptyset a $V(\mathcal{G})$. Podalgebra generovaná $\{\{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ už ale obsahuje všechny podmnožiny zachovávající automorfismus h . Dostáváme:

$$\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 4, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

Cvičení 1.1. Uvažme následující graf. Najděte všechny automorfismy. Určete, které podmnožiny jsou definovatelné, uveďte definující formule. Které binární relace jsou definovatelné?



1.3 ω -kategorické teorie

Nyní se podíváme na teorie, které mají jediný spočetně nekonečný model (až na izomorfismus), říkáme jim ω -kategorické.⁷

Definice 1.3.1 (Izomorfní spektrum, κ -kategoricita). *Izomorfní spektrum* teorie T je počet $I(\kappa, T)$ modelů T kardinality κ až na izomorfismus, pro každou kardinalitu κ (včetně *transfinitních*). Teorie T je κ -kategorická, pokud $I(\kappa, T) = 1$.

Nadále nás bude zajímat jen případ $\kappa = \omega$, totiž teorie s jediným spočetně nekonečným modelem (až na izomorfismus). Jako příklad uveďme teorii hustého lineárního uspořádání bez konců:

Tvrzení 1.3.2. *Teorie DeLO je ω -kategorická.*

⁷Symbol ω se používá pro nejmenší nekonečné *ordinální* číslo, jinými slovy, pro množinu všech přirozených čísel.

Důkaz. Vezměme dva spočetně nekonečné modely \mathcal{A}, \mathcal{B} a očísľujme jejich prvky: $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Indukcí podle n lze díky hustotě nalézt posloupnost $h_0 \subseteq h_1 \subseteq h_2 \subseteq \dots$ prostých (parciálních) funkcí z A do B , takových, že $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subseteq \text{dom } h_n$, $\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subseteq \text{rng } h_n$,⁸ a zachovávají uspořádání⁹ Potom $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$. \square

Důsledek 1.3.3. *Izomorfní spektrum teorie DeLO^* je následující:*

$$I(\kappa, \text{DeLO}^*) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \kappa \in \mathbb{N}, \\ 4 & \text{pro } \kappa = \omega. \end{cases}$$

Spočetné modely až na izomorfismus jsou například:

$$\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \simeq \mathbb{Q} \upharpoonright (0, 1), \mathbb{Q} \upharpoonright (0, 1], \mathbb{Q} \upharpoonright [0, 1), \mathbb{Q} \upharpoonright [0, 1]$$

Důkaz. Husté uspořádání jistě nemůže být konečné. Izomorfismus musí zobrazit nejmenší prvek na nejmenší prvek, a největší na největší. \square

Pojem ω -kategoricity lze chápat jako zeslabení pojmu *kompletnosti*. Platí následující užitečné kritérium:

Věta 1.3.4 (ω -kategorické kritérium kompletnosti). *Mějme ω -kategorickou teorii T ve spočetném jazyce L . Je-li*

- L bez rovnosti, nebo
- L s rovností a T nemá konečné modely,

potom je teorie T kompletní.

Důkaz. Pro jazyk bez rovnosti víme z Důsledku 1.1.8 Löwenheim-Skolemovy věty, že každý model je elementárně ekvivalentní nějakému spočetně nekonečnému modelu. Ten je ale až na izomorfismus jediný, takže všechny modely jsou elementárně ekvivalentní, což je sémantická definice kompletnosti.

Máme-li jazyk s rovností, použijeme podobně Důsledek 1.1.9 a dostaneme, že všechny nekonečné modely jsou elementárně ekvivalentní. Mohly by existovat elementárně neekvivalentní konečné modely, to jsme ale zakázali. \square

Důsledek 1.3.5. *Teorie DeLO , DeLO^+ , DeLO^- , a DeLO^\pm jsou kompletní. Jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) kompletní jednoduché extenze teorie DeLO^* .*

Poznámka 1.3.6. Analogické kritérium platí i pro kardinality κ větší než ω .

1.4 Axiomatizovatelnost

Na závěr této kapitoly se podíváme, za jakých okolností lze ‘popsat’ (*axiomatizovat*) třídu modelů respektive teorii. Zajímat nás bude také kdy si vystačíme s konečně mnoha axiomy, a kdy to lze pomocí otevřených axiomů (kterých může být i nekonečně mnoho). Srovnajte s Tvzením ?? z výrokové logiky.

⁸Zde dom značí *doménu* a rng značí *obor hodnot* (‘range’) funkce.

⁹Tj. je-li $a_i, a_j \in \text{dom } h_n$, potom $a_i \leq^A a_j$ právě když $h(a_i) \leq^B h(a_j)$.

Definice 1.4.1 (Axiomatizovatelnost). Mějme třídu struktur $K \subseteq M_L$ v nějakém jazyce L . Říkáme, že K je

- *axiomatizovatelná*, pokud existuje L -teorie T taková, že $M_L(T) = K$,
- *konečně axiomatizovatelná*, pokud je axiomatizovatelná konečnou teorií, a
- *otevřeně axiomatizovatelná*, pokud je axiomatizovatelná otevřenou teorií.

O L -teorii T' říkáme, že je *konečně* resp. *otevřeně axiomatizovatelná*, pokud to platí o třídě modelů $K = M_L(T')$.

Příklad 1.4.2. Uveďme několik příkladů:

- grafy nebo částečná uspořádání jsou konečně i otevřeně axiomatizovatelné,
- tělesa jsou konečně, ale ne otevřeně axiomatizovatelná,
- nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně,
- konečné grafy nejsou axiomatizovatelné.

Proč tomu tak je ukážeme níže.

Začněme jednoduchým faktem:

Pozorování 1.4.3. *Je-li K axiomatizovatelná, musí být uzavřená na elementární ekvivalenci.*

Z věty o kompaktnosti snadno získáme následující tvrzení, pomocí kterého lze ukázat neaxiomatizovatelnost např. konečných grafů, konečných grup, konečných těles.

Věta 1.4.4. *Pokud má teorie libovolně velké konečné modely, potom má i nekonečný model. V tom případě není třída všech jejích konečných modelů axiomatizovatelná.*

Důkaz. Je-li jazyk bez rovnosti, stačí vzít kanonický model pro některou bezespornou větev v tablu z T pro položku $F \perp$ (T je bezesporná, neboť má model(y), tedy tablo není sporné).

Mějme jazyk s rovností a označme jako T' následující extenzi teorie T do jazyka rozšířeného o spočetně mnoho nových konstantních symbolů c_i :

$$T' = T \cup \{\neg c_i = c_j \mid i \neq j \in \mathbb{N}\}$$

Každá konečná část teorie T' má model: nechť k je největší takové, že symbol c_k se vyskytuje v T' . Potom stačí vzít libovolný alespoň $(k+1)$ -prvkový model T a interpretovat konstanty c_0, \dots, c_k jako navzájem různé prvky tohoto modelu.

Dle věty o kompaktnosti má potom i T' model. Ten je nutně nekonečný. Jeho redukt na původní jazyk (zapomenutí konstant c_i^A) je nekonečným modelem T . \square

Poznámka 1.4.5. Třída všech *nekonečných* modelů teorie ale je vždy axiomatizovatelná, máme-li jazyk s rovností: stačí k teorii přidat pro každé $n \in \mathbb{N}$ axiom vyjadřující ‘existuje alespoň n prvků’.

1.4.1 Konečná axiomatizovatelnost

Ukážeme následující kritérium konečné axiomatizovatelnosti: jak třída struktur K tak i \overline{K} musí být axiomatizovatelné.

Věta 1.4.6. *[O konečné axiomatizovatelnosti] Mějme třídu struktur $K \subseteq M_L$ a uvažme také její doplněk $\overline{K} = M_L \setminus K$. Potom K je konečně axiomatizovatelná, právě když K i \overline{K} jsou axiomatizovatelné.*

Důkaz. Je-li K konečně axiomatizovatelná, potom je axiomatizovatelná i konečně mnoha sentencemi $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (nahradíme formule jejich generálními uzávěry). Jako axiomatizaci \overline{K} stačí vzít sentenci $\psi = \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$. Zřejmě platí $M(\psi) = \overline{K}$.

Naopak, nechť T a S jsou teorie takové, že $M(T) = K$ a $M(S) = \overline{K}$. Uvažme teorii $T \cup S$. Tato teorie je sporná, neboť:

$$M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = K \cap \overline{K} = \emptyset$$

Podle věty o kompaktnosti¹⁰ existují konečné podteorie $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ takové, že

$$\emptyset = M(T' \cup S') = M(T') \cap M(S')$$

. Nyní si všimněme, že platí

$$M(T) \subseteq M(T') \subseteq \overline{M(S')} \subseteq \overline{M(S)} = M(T)$$

tím jsme dokázali, že $M(T) = M(T')$, tj. teorie T' je hledanou konečnou axiomatizací K . \square

Jako aplikaci si dokážeme, že tělesa charakteristiky 0 nejsou konečně axiomatizovatelná.

Příklad: tělesa charakteristiky 0

Nechť T je teorie těles. Charakteristika tělesa je nejmenší počet jedniček, které je třeba sečíst, abychom dostali nulu (v tom případě musí být charakteristika prvočíslo—dokažte si!), nebo, pokud nikdy nedostaneme sčítáním jedniček nulu, říkáme že je charakteristika 0. Trochu formálněji:

Definice 1.4.7 (Charakteristika tělesa). Říkáme, že těleso $\mathcal{A} = \langle A, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ je

- *charakteristiky p* , je-li p nejmenší prvočíslo takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ označuje term $1 + 1 + \dots + 1$ s p jedničkami, nebo
- *charakteristiky 0*, pokud není charakteristiky p pro žádné prvočíslo p .

Nechť T je teorie těles. Potom třída těles charakteristiky p je konečně axiomatizována teorií $T \cup \{p1 = 0\}$. Třída těles charakteristiky 0 je axiomatizována následující (nekonečnou) teorií:

$$T' = T \cup \{\neg p1 = 0 \mid p \text{ je prvočíslo}\}$$

Konečná axiomatizace ale neexistuje.

Tvrzení 1.4.8. *Třída K těles charakteristiky 0 není konečně axiomatizovatelná.*

¹⁰Vidíte, jak je užitečná!

Důkaz. Díky Větě 1.4.6 stačí ukázat, že \overline{K} (tělesa nenulové charakteristiky) není axiomatizovatelná, což dokážeme sporem. Nechť existuje teorie S taková, že $M(S) = \overline{K}$. Potom teorie $S' = S \cup T'$ má model, neboť každá její konečná část má model: stačí vzít těleso prvočíselné charakteristiky větší než jakékoliv p z axiomu T' tvaru $\neg p1 = 0$. Nechť \mathcal{A} je model S' . Potom je i $\mathcal{A} \in M(S) = \overline{K}$. Zároveň je ale $\mathcal{A} \in M(T') = K$, což je spor. \square

1.4.2 Otevřená axiomatizovatelnost

Pro otevřenou axiomatizovatelnost existuje jednoduché sémantické kritérium: třída jejích modelů být uzavřená na podstruktury. Platí dokonce ekvivalence, dokážeme ale jen jednu implikaci (důkaz druhé je obtížnější).

Věta 1.4.9. *Pokud je teorie T otevřeně axiomatizovatelná, potom je každá podstruktura modelu T také modelem T .*

Poznámka 1.4.10. Platí i obrácená implikace: Je-li každá podstruktura modelu T také modelem, potom je T otevřeně axiomatizovatelná. Důkaz zde ale neuvedeme.

Důkaz. Nechť T' je otevřená axiomatizace T . Mějme model $\mathcal{A} \models T'$ a podstrukturu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Pro každou formuli $\varphi \in T'$ platí $\mathcal{B} \models \varphi$ (neboť φ je otevřená), tedy i $\mathcal{B} \models T'$. \square

Příklad 1.4.11. Uvedme několik příkladů:

- Teorie DeLO není otevřeně axiomatizovatelná, například žádná konečná podstruktura modelu DeLO nemůže být hustá.
- Teorie těles není otevřeně axiomatizovatelná, podstruktura $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ tělesa celých čísel není tělesem, v \mathbb{Z} neexistuje inverzní prvek vůči násobení k číslu 2.
- Pro dané $n \in \mathbb{N}$ jsou nejvýše n -prvkové grupy otevřeně axiomatizovatelné (podgrupy jsou jistě také nejvýše n -prvkové). Jako otevřenou axiomatizaci lze vzít následující extenzi (otevřené) teorie grup T :

$$T \cup \left\{ \bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} x_i = x_j \right\}$$