

# Sedmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

---

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

## Program

- podstruktury, expanze, redukty
- extenze teorií, extenze o definice
- definovatelnost a databázové dotazy
- vztah výrokové a predikátové logiky

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 6.6-6.9 z Kapitoly 6

## **6.6 Podstruktura, expanze, redukt**

---

- **podstruktura** zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině  $B$  univerza vytvoříme strukturu, která “zdědí” relace, funkce a konstanty
- $B$  musí být **uzavřená** na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura  $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$  je **(indukovaná) podstruktura** struktury  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  (v též signatuře  $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ ), značíme  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\text{ar}(R)}$  pro každý relační symbol  $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\text{ar}(f)} \times B)$  pro každý funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$ , tj.  $f^{\mathcal{B}}$  je restrikce  $f^{\mathcal{A}}$  na množinu  $B$ , a výstupy jsou všechny z  $B$

speciálně, pro konstantní symbol  $c \in \mathcal{F}$  máme  $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$

## Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina  $C \subseteq A$  je **uzavřená** na funkci  $f : A^n \rightarrow A$ , pokud  $f(x_1, \dots, x_n) \in C$  pro všechna  $x_i \in C$ .

**Pozorování:** Množina  $\emptyset \neq C \subseteq A$  je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury  $\mathcal{A}$  (včetně konstant). V tom případě je to **restrikce**  $\mathcal{A}$  na množinu  $C$ , značíme  $\mathcal{A} \upharpoonright C$ .

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$  je podstrukturou  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ , můžeme psát:  $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$  je podstrukturou obou těchto struktur, platí:  $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \upharpoonright \mathbb{N}$
- Množina  $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}$  není univerzem podstruktury  $\underline{\mathbb{Z}}$  ani  $\underline{\mathbb{Q}}$ , není uzavřená na násobení.

# Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\varphi$  otevřená formule, a  $e: \text{Var} \rightarrow B$ , potom platí:  $\mathcal{B} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury  $\varphi$ , pro atomickou zřejmé.  $\square$

**Důsledek:** Otevřená formule platí ve struktuře  $\mathcal{A}$ , právě když platí v každé podstruktuře  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

Teorie  $T$  je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

**Důsledek:** Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme). Podstruktura tělesa  $\mathbb{Q}$  na množině  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q} \upharpoonright \mathbb{Z}$ , není těleso. (Je to tzv. okruh.)

# Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza **není** uzavřená? Vezmeme její **uzávěr**.

Mějme  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$  a  $\emptyset \neq X \subseteq A$ . Buď  $B \subseteq A$  nejmenší podmnožina, která obsahuje  $X$  a je uzavřená na všechny funkce  $\mathcal{A}$  (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura  $\mathcal{A} \upharpoonright B$  je **generovaná**  $X$ , značíme ji  $\mathcal{A}\langle X \rangle$ .

Např. pro  $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ ,  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ :

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$  je podstruktura  $\underline{\mathbb{N}}$  na množině všech sudých čísel

Pokud  $\mathcal{A}$  nemá žádné funkce (ani konstanty), např. graf či uspořádání, potom není čím generovat, a  $\mathcal{A}\langle X \rangle = \mathcal{A} \upharpoonright X$ .

# Expanze a redukt

Mějme  $L \subseteq L'$ ,  $L$ -strukturu  $\mathcal{A}$  a  $L'$ -strukturu  $\mathcal{A}'$  na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z  $L$  stejná v  $\mathcal{A}$  i v  $\mathcal{A}'$ , potom:

- $\mathcal{A}'$  je **expanze**  $\mathcal{A}$  do  $L'$  ( **$L'$ -expanze** struktury  $\mathcal{A}$ )
- $\mathcal{A}$  je **redukt**  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ( **$L$ -redukt** struktury  $\mathcal{A}'$ )

Například:

- Mějme grupu celých čísel  $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ . Potom:
  - struktura  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  je její redukt
  - struktura  $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$  (**okruh** celých čísel) je její expanze
- Mějme graf  $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$ . Potom **expanze**  $\mathcal{G}$  o **jména prvků** (z množiny  $G$ ) je struktura  $\langle G, E^{\mathcal{G}}, c_v^{\mathcal{G}} \rangle_{v \in G}$  v jazyce  $\langle E, c_v \rangle_{v \in G}$ , kde  $c_v^{\mathcal{G}} = v$  pro všechny vrcholy  $v \in G$ .



## Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou  $x$  je totéž, co splnit formuli, ve které je  $x$  nahrazena **novým** konstantním symbolem  $c$
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

**Věta (O konstantách):** Mějme  $L$ -formuli  $\varphi$  s volnými proměnnými  $x_1, \dots, x_n$ . Označme jako  $L'$  rozšíření  $L$  o nové konstantní symboly  $c_1, \dots, c_n$  a buď  $T'$  stejná teorie jako  $T$ , ale v jazyce  $L'$ . Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$$

**Důkaz:** stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukci

⇒ **Víme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . **Chceme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . Mějme model  $\mathcal{A}' \models T'$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A'$  a ukažme, že  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

## Pokračování důkazu

Buď  $\mathcal{A}$  redukt  $\mathcal{A}'$  na  $L$  ('zapomeneme' konstantu  $c^{\mathcal{A}'}$ ). Všimněte si, že  $\mathcal{A}$  je model  $T$  (axiomy  $T = T'$  neobsahují nový symbol  $c$ ). Dle předpokladu  $\mathcal{A} \models \varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e']$  pro libovolné ohodnocení  $e'$ , speciálně pro  $e(x/c^{\mathcal{A}'})$  kde  $x$  ohodnotíme interpretací  $c$  v  $\mathcal{A}'$ .

Máme  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$ , což ale znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ .

⇐ **Víme:**  $\varphi(x/c)$  platí v každém modelu  $T'$ . **Chceme:**  $\varphi$  platí v každém modelu  $T$ . Zvolme  $\mathcal{A} \models T$  a ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A$  a ukažme, že  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ .

Buď  $\mathcal{A}'$  expanze  $\mathcal{A}$  do  $L'$ , kde  $c$  interpretujeme jako  $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$ . Dle předpokladu platí  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$  pro všechna ohodnocení  $e'$ . Tedy  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$ , což znamená  $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$  ( $e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$ ), z toho plyne  $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$ .

Formule  $\varphi$  neobsahuje  $c$  (je nový), máme tedy i  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ . □

## 6.7 Estenze teorií

---















## 6.8 Definovatelnost ve struktuře

---







## 6.9 Vztah výrokové a predikátové logiky

---



