NAIL062 V&P Logika: 6. cvičení

Témata: Rezoluce ve výrokové logice. Aplikace věty o kompaktnosti. Hilbertův kalkulus.

Příklad 1. Označme jako φ výrok $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$. Ukažte, že φ je tautologie:

(a) Převeďte $\neg\varphi$ do CNF a zapište výsledný výrok jako formuli S v množinové reprezentaci.

(b) Najděte rezoluční zamítnutí S.

Příklad 2. Najděte rezoluční zamítnutí následujících výroků:

(a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$

(b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$

Příklad 3. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$ platí výrok s.

Příklad 4. Nechť prvovýroky r, s, t reprezentují (po řadě), že *"Radka / Sára / Tom je ve škole"* a označme $\mathbb{P} = \{r, s, t\}$. Víme, že

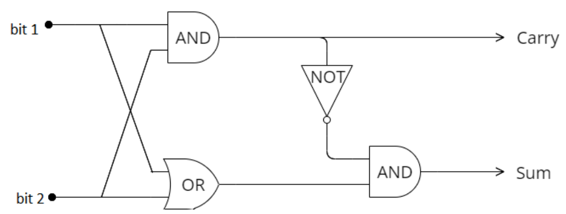
- *Není-li Tom ve škole, není tam ani Sára.*
- *Radka bez Sáry do školy nechodí.*
- *Není-li Radka ve škole, je tam Tom.*

(a) Formalizujte naše znalosti jako teorii T v jazyce $\mathbb{P}$.

(b) Rezoluční metodou dokažte, že z T vyplývá, že *Tom je ve škole*: Napište formuli S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když to platí, a najděte rezoluční zamítnutí S. Nakreslete rezoluční strom.

(c) Určete množinu modelů teorie T.

Příklad 5. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



(a) Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konktrétně, vyjádřete jej jako výrokovou teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi,\ s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové proměnné znamenají po řadě "bit 1", "bit 2", "carry" a "sum", a formule φ, ψ neobsahují proměnné c, s.

(b) Dokažte rezoluční metodou, že $T \models c \rightarrow \neg s$.

Příklad 6. Máme k dispozici MgO, H_2, O_2, a C, a můžeme provádět následující reakce:

- $MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$
- $C + O_2 \rightarrow CO_2$

- $CO_2 + H_2O \;\rightarrow\; H_2CO_3$

(a) Reprezentujte naše možnosti výrokem (nad vhodně zvoleným jazykem) a převeďte ho do množinové reprezentace.

(b) Pomocí rezoluce dokažte, že můžeme získat H_2CO_3. Lze najít LI-důkaz téhož?

Příklad 7. Celá čísla postihla záhadná nemoc šířící se (v diskrétních krocích) dle následujících pravidel (platících pro všechna čísla ve všech krocích).

(i) Zdravé číslo onemocní, právě když je právě jedno číslo nemocné (v předchozím čase).

(ii) Nemocné číslo se uzdraví, právě když je předchozí číslo nemocné (v předchozím čase).

(iii) V čase 0 *bylo nemocné číslo* 0*, ostatní čísla byla zdravá.*

(a) Napište teorie T_1, T_2, T_3 vyjadřující (po řadě) tvrzení $(i), (ii), (iii)$ nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p_i^t \mid i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}_0\}$, kde prvovýrok p_i^t vyjadřuje, že "*číslo i je v čase t nemocné.*"

(b) Převeďte axiomy z T_1, T_2, T_3 do CNF a napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models \neg p_1^2$, tj.: "*Číslo* 1 *je zdravé v čase* 2." (Stačí převést jen konkrétní axiomy z T_1, T_2, T_3, ze kterých plyne $\neg p_1^2$, a do S uvést jen příslušné klauzule.)

(c) Rezolucí dokažte, že S je nesplnitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem.

Příklad 8. Najděte rezoluční uzávěry $\mathcal{R}(S)$ pro následující výroky S:

(a) $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$

(b) $\{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$

Příklad 9. Zkonstruujte *strom dosazení* pro formuli $S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$.

Příklad 10. Dokažte podrobně, že je-li $S = \{C_1, C_2\}$ splnitelná a C je rezolventa C_1 a C_2, potom je i C splnitelná.

Příklad 11. Dokažte pomocí věty o kompaktnosti a variant tvrzení pro konečné objekty:

(a) Každý spočetný rovinný graf je obarvitelný čtyřmi barvami.

(b) Každé spočetné částečné uspořádání lze rozšířit na úplné (lineární) uspořádání.

Příklad 12. V Hilbertově kalkulu dokažte pro libovolné formule následující vztahy:

(a) $\{\neg p\} \vdash_H p \rightarrow q$

(b) $\{\neg(\neg p)\} \vdash_H p$

(c) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_H p \rightarrow r$

Příklad 13. Dokažte korektnost Hilbertova kalkulu:

- Dokažte, že logické axiomy jsou tautologie.
- Dokažte, že modus ponens je korektní, tj. když $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \rightarrow \psi$, tak $T \models \psi$.
- Ukažte, že $T \vdash_H \varphi$ implikuje $T \models \varphi$.

Příklad 14. Vyslovte a dokažte větu o dedukci pro Hilbertův kalkul.

Domácí úkol. Tentokrát žádný není. Místo domácího úkolu se připravte na zápočtový test: procvičte rezoluční metodu a vyřešte vzorový test (na webu).