

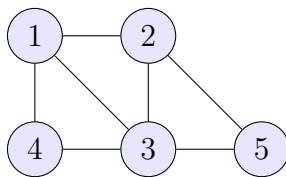
## NAIL062 V&P Logika: 13. cvičení

**Témata:** (Zápočtový test z predikátové logiky.) Vybraná témata z teorie modelů.

**Příklad 1.** Buď  $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x, S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$  teorie v jazyce  $L = \langle S \rangle$  s rovností, kde  $S$  je unární funkční symbol.

- (a) Buď  $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S \rangle$ , kde  $S(r) = r + 1$  pro  $r \in \mathbb{R}$ . Právě pro která  $r \in \mathbb{R}$  je množina  $\{r\}$  definovatelná v  $\mathcal{R}$  z parametru 0?
- (b) Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.
- (c) Je extenze  $T'$  teorie  $T$  o axiom  $S(x) = x$   $\omega$ -kategorická teorie? Je  $T'$  kompletní?
- (d) Pro která  $0 < n \in \mathbb{N}$  existuje  $L$ -struktura  $\mathcal{B}$  velikosti  $n$  elementárně ekvivalentní s  $\mathcal{R}$ ? Existuje spočetná struktura  $\mathcal{B}$  elementárně ekvivalentní s  $\mathcal{R}$ ?

**Příklad 2.** Uvažme následující graf:



- (a) Najděte všechny automorfismy.
- (b) Které podmnožiny množiny vrcholů  $V$  jsou definovatelné? Uveďte definující formule. (Nápověda: Využijte (a).)
- (c) Které binární relace na  $V$  jsou definovatelné?

**Příklad 3.** Nechť  $T = \{U(x) \rightarrow U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$  je teorie v jazyce  $L = \langle U, f \rangle$  s rovností, kde  $U$  je unární relační symbol,  $f$  je unární funkční symbol a  $\varphi$  vyjadřuje, že “existují maximálně 4 prvky”.

- (a) Je teorie  $T$  extenzí teorie  $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$  v jazyce  $L' = \langle U \rangle$ ? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte.
- (b) Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte.

**Příklad 4.** Nechť  $T = \{\varphi\}$  je teorie jazyka  $L = \langle U, c \rangle$  s rovností, kde  $U$  je unární relační symbol,  $c$  je konstantní symbol a axiom  $\varphi$  vyjadřuje “Existuje alespoň 5 prvků, pro které platí  $U(x)$ .”

- (a) Nalezněte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie  $T$  nebo zdůvodněte, proč neexistují.
- (b) Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění.

**Příklad 5.** Buď  $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x, S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$  teorie v jazyce  $L = \langle S \rangle$  s rovností, kde  $S$  je unární funkční symbol.

- (a) Nalezněte extenzi  $T'$  teorie  $T$  o definici nového unárního funkčního symbolu  $P$  takovou, že  $T' \models S(S(x)) = y \leftrightarrow P(P(y)) = x$ . (2b)
- (b) Je teorie  $T'$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)

**Příklad 6.** Nechť  $T$  je extenze teorie  $DeLO^-$  (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) o nový axiom  $c \leq d$  v jazyce  $L = \langle \leq, c, d \rangle$  s rovností, kde  $c, d$  jsou nové konstantní symboly.

- (a) Jsou sentence  $(\exists x)(x \leq d \wedge x \neq d)$  a  $(\forall x)(x \leq d)$  pravdivé / lživé / nezávislé v  $T$ ? Uveďte zdůvodnění.
- (b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie  $T$ .