

# Druhá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

---

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

## Program

- sémantika výrokové logiky (pokračování)
- normální formy
- vlastnosti a důsledky teorií
- extenze teorií
- algebra výroků

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 2.2.5-2.5 z Kapitoly 2

## Další sémantické pojmy

- výrok  $\varphi$  (nad  $\mathbb{P}$ ) je **pravdivý, tautologie, platí (v logice)**,  $\models \varphi$ , pokud platí v každém modelu,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$

## Další sémantické pojmy

- výrok  $\varphi$  (nad  $\mathbb{P}$ ) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**,  $\models \varphi$ , pokud platí v každém modelu,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$

## Další sémantické pojmy

- výrok  $\varphi$  (nad  $\mathbb{P}$ ) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**,  $\models \varphi$ , pokud platí v každém modelu,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$   
(Být **lživý** není totéž, co nebýt **pravdivý**!)

## Další sémantické pojmy

- výrok  $\varphi$  (nad  $\mathbb{P}$ ) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**,  $\models \varphi$ , pokud platí v každém modelu,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$   
(*Být lživý není totéž, co nebýt pravdivý!*)
- **nezávislý**, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v nějakém jiném modelu, tj. není pravdivý ani lživý,  $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}$

## Další sémantické pojmy

- výrok  $\varphi$  (nad  $\mathbb{P}$ ) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**,  $\models \varphi$ , pokud platí v každém modelu,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$   
(*Být lživý není totéž, co nebýt pravdivý!*)
- **nezávislý**, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v nějakém jiném modelu, tj. není pravdivý ani lživý,  $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}$
- **splnitelný**, pokud má nějaký model, tj. není lživý,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \neq \emptyset$

## Další sémantické pojmy

- výrok  $\varphi$  (nad  $\mathbb{P}$ ) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**,  $\models \varphi$ , pokud platí v každém modelu,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$   
(*Být lživý není totéž, co nebýt pravdivý!*)
- **nezávislý**, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v nějakém jiném modelu, tj. není pravdivý ani lživý,  $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}$
- **splnitelný**, pokud má nějaký model, tj. není lživý,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \neq \emptyset$

výroky  $\varphi, \psi$  (ve stejném jazyce) jsou **(logicky) ekvivalentní**,  $\varphi \sim \psi$ , pokud mají stejné modely, tj.  $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}(\psi)$



## Další sémantické pojmy

- výrok  $\varphi$  (nad  $\mathbb{P}$ ) je **pravdivý**, **tautologie**, **platí (v logice)**,  $\models \varphi$ , pokud platí v každém modelu,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}$
- **lživý**, **sporný**, pokud nemá žádný model,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) = \emptyset$   
(*Být lživý není totéž, co nebýt pravdivý!*)
- **nezávislý**, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v nějakém jiném modelu, tj. není pravdivý ani lživý,  $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(\varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}$
- **splnitelný**, pokud má nějaký model, tj. není lživý,  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \neq \emptyset$

výroky  $\varphi, \psi$  (ve stejném jazyce) jsou **(logicky) ekvivalentní**,  $\varphi \sim \psi$ , pokud mají stejné modely, tj.  $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow M_{\mathbb{P}}(\varphi) = M_{\mathbb{P}}(\psi)$

- pravdivé:  $\top$ ,  $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
- lživé:  $\perp$ ,  $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$
- nezávislé, splnitelné:  $p$ ,  $p \wedge q$
- ekvivalentní:  $p \rightarrow q \sim \neg p \vee q$ ,  $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q) \sim \top$

# Sémantické pojmy vzhledem k teorii

relativně k dané teorii  $T$  (omezíme se na její modely):

- pravdivý/platí v  $T$ , důsledek  $T$ ,  $T \models \varphi$  je-li  $M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- lživý/sporný v  $T$  pokud  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \cap M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \emptyset$ .
- nezávislý v  $T$  pokud  $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T)$ ,
- splnitelný v  $T$ , konzistentní s  $T$  pokud  $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \neq \emptyset$

relativně k dané teorii  $T$  (omezíme se na její modely):

- pravdivý/platí v  $T$ , důsledek  $T$ ,  $T \models \varphi$  je-li  $M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- lživý/sporný v  $T$  pokud  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \cap M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \emptyset$ .
- nezávislý v  $T$  pokud  $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T)$ ,
- splnitelný v  $T$ , konzistentní s  $T$  pokud  $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \neq \emptyset$
- $\varphi$  a  $\psi$  jsou ekvivalentní v  $T$ ,  $T$ -ekvivalentní,  $\varphi \sim_T \psi$  platí-li v týchž modelech  $T$ , tj.  $\varphi \sim_T \psi \Leftrightarrow M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = M_{\mathbb{P}}(T, \psi)$

# Sémantické pojmy vzhledem k teorii

relativně k dané teorii  $T$  (omezíme se na její modely):

- **pravdivý/platí v  $T$** , **důsledek  $T$** ,  $T \models \varphi$  je-li  $M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)$
- **lživý/sporný v  $T$**  pokud  $M_{\mathbb{P}}(\varphi) \cap M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = \emptyset$ .
- **nezávislý v  $T$**  pokud  $\emptyset \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \subsetneq M_{\mathbb{P}}(T)$ ,
- **splnitelný v  $T$** , **konzistentní s  $T$**  pokud  $M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) \neq \emptyset$
- $\varphi$  a  $\psi$  jsou **ekvivalentní v  $T$** ,  **$T$ -ekvivalentní**,  $\varphi \sim_T \psi$  platí-li v týchž modelech  $T$ , tj.  $\varphi \sim_T \psi \Leftrightarrow M_{\mathbb{P}}(T, \varphi) = M_{\mathbb{P}}(T, \psi)$

např.  $T = \{p \vee q, \neg r\}$ :

- $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$  je v  $T$  pravdivý
- $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$  je v  $T$  lživý
- $p \leftrightarrow q, p \wedge q$  jsou v  $T$  nezávislé, splnitelné
- platí  $p \sim_T p \vee r$  (ale  $p \not\sim_T p \vee r$ )

# Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek

# Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek
- ekvivalentně: každá množina modelů nad konečným jazykem je množinou modelů nějakého výroku

# Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek
- ekvivalentně: každá množina modelů nad konečným jazykem je množinou modelů nějakého výroku

**Tvrzení:**  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  a  $\{\neg, \rightarrow\}$  jsou univerzální.

[Důkaz na příštím slidu.]

# Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek
- ekvivalentně: každá množina modelů nad konečným jazykem je množinou modelů nějakého výroku

**Tvrzení:**  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  a  $\{\neg, \rightarrow\}$  jsou univerzální.

[Důkaz na příštím slidu.]

Další zajímavé logické spojky:

- **Shefferova spojka** (NAND,  $\uparrow$ )  $p \uparrow q \sim \neg(p \wedge q),$
- **Pierceova spojka** (NOR,  $\downarrow$ )  $p \downarrow q \sim \neg(p \vee q),$
- **Exclusive-OR** (XOR,  $\oplus$ )  $p \oplus q \sim (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$



# Univerzálnost logických spojek

množina logických spojek je **univerzální**, pokud:

- každá booleovská funkce je pravdivostní funkcí nějakého výroku vybudovaného z těchto spojek
- ekvivalentně: každá množina modelů nad konečným jazykem je množinou modelů nějakého výroku

**Tvrzení:**  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  a  $\{\neg, \rightarrow\}$  jsou univerzální.

[Důkaz na příštím slidu.]

Další zajímavé logické spojky:

- **Shefferova spojka** (NAND,  $\uparrow$ )  $p \uparrow q \sim \neg(p \wedge q),$
- **Pierceova spojka** (NOR,  $\downarrow$ )  $p \downarrow q \sim \neg(p \vee q),$
- **Exclusive-OR** (XOR,  $\oplus$ )  $p \oplus q \sim (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

např.  $\{\uparrow\}$  je univerzální,  $\{\wedge, \vee\}$  není

## Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

## Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , resp.  $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

## Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , resp.  $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

**Pro jediný model:**  $\varphi_v =$  'musím být model  $v$ '

## Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , resp.  $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

**Pro jediný model:**  $\varphi_v =$  'musím být model  $v$ '

- příklad:  $v = (1, 0, 1, 0) \rightsquigarrow \varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$
- obecně:  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , použijeme značení  $p^1 = p$ ,  $p^0 = \neg p$

$$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \dots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{i=1}^n p_i^{v(p_i)} = \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

## Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , resp.  $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

**Pro jediný model:**  $\varphi_v =$  'musím být model  $v$ '

- příklad:  $v = (1, 0, 1, 0) \rightsquigarrow \varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$
- obecně:  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , použijeme značení  $p^1 = p$ ,  $p^0 = \neg p$

$$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \dots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{i=1}^n p_i^{v(p_i)} = \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

**Pro více modelů:** 'musím být alespoň jeden z modelů z  $M$ '

## Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , resp.  $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

**Pro jediný model:**  $\varphi_v = \text{'musím být model } v\text{'}$

- příklad:  $v = (1, 0, 1, 0) \rightsquigarrow \varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$
- obecně:  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , použijeme značení  $p^1 = p$ ,  $p^0 = \neg p$

$$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \dots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{i=1}^n p_i^{v(p_i)} = \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

**Pro více modelů:**  $\text{'musím být alespoň jeden z modelů z } M\text{'}$

$$\varphi_M = \bigvee_{v \in M} \varphi_v = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

## Důkaz, že $\{\neg, \wedge, \vee\}$ a $\{\neg, \rightarrow\}$ jsou univerzální

Mějme  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , resp.  $M = f^{-1}[1] \subseteq \{0, 1\}^n$

**Pro jediný model:**  $\varphi_v = \text{'musím být model } v\text{'}$

- příklad:  $v = (1, 0, 1, 0) \rightsquigarrow \varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$
- obecně:  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , použijeme značení  $p^1 = p$ ,  $p^0 = \neg p$

$$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \dots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{i=1}^n p_i^{v(p_i)} = \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

**Pro více modelů:**  $\text{'musím být alespoň jeden z modelů z } M\text{'}$

$$\varphi_M = \bigvee_{v \in M} \varphi_v = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

Zřejmě  $M(\varphi_M) = M$  neboli  $f_{\varphi_M, \mathbb{P}} = f$ , a  $\varphi_M$  používá jen  $\{\neg, \wedge, \vee\}$ . Protože  $p \wedge q \sim \neg(p \rightarrow \neg q)$  a  $p \vee q \sim \neg p \rightarrow q$ , mohli bychom  $\varphi_M$  ekvivalentně vyjádřit i pomocí  $\{\neg, \rightarrow\}$ .  $\square$



## 2.3 Normální formy

---



- **literál** je prvovýrok nebo jeho negace,  $\bar{\ell}$  je **opačný literál** k  $\ell$   
(pro *pozitivní*  $\ell = p$  je  $\bar{\ell} = \neg p$ , pro *negativní*  $\ell = \neg p$  je  $\bar{\ell} = p$ )

- **literál** je prvovýrok nebo jeho negace,  $\bar{\ell}$  je **opačný literál** k  $\ell$   
(pro *pozitivní*  $\ell = p$  je  $\bar{\ell} = \neg p$ , pro *negativní*  $\ell = \neg p$  je  $\bar{\ell} = p$ )
- **klauzule** je disjunkce literálů  $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$  (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je  $\perp$ )

- **literál** je prvvýrok nebo jeho negace,  $\bar{\ell}$  je **opačný literál** k  $\ell$  (pro *pozitivní*  $\ell = p$  je  $\bar{\ell} = \neg p$ , pro *negativní*  $\ell = \neg p$  je  $\bar{\ell} = p$ )
- **klauzule** je disjunkce literálů  $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$  (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je  $\perp$ )
- výrok je v **konjunktivní normální formě (CNF)** je-li konjunkcí klauzulí (prázdný CNF výrok je  $\top$ )

- **literál** je prvvýrok nebo jeho negace,  $\bar{\ell}$  je **opačný literál** k  $\ell$  (pro *pozitivní*  $\ell = p$  je  $\bar{\ell} = \neg p$ , pro *negativní*  $\ell = \neg p$  je  $\bar{\ell} = p$ )
- **klauzule** je disjunkce literálů  $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$  (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je  $\perp$ )
- výrok je v **konjunktivní normální formě (CNF)** je-li konjunkcí klauzulí (prázdný CNF výrok je  $\top$ )
- **elementární konjunkce** je konjunkce literálů  $E = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$  (*jednotková el. konjunkce* je samotný literál, *prázdná* je  $\top$ )

- **literál** je prvvýrok nebo jeho negace,  $\bar{\ell}$  je **opačný literál** k  $\ell$  (pro *pozitivní*  $\ell = p$  je  $\bar{\ell} = \neg p$ , pro *negativní*  $\ell = \neg p$  je  $\bar{\ell} = p$ )
- **klauzule** je disjunkce literálů  $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$  (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je  $\perp$ )
- výrok je v **konjunktivní normální formě (CNF)** je-li konjunkcí klauzulí (prázdný CNF výrok je  $\top$ )
- **elementární konjunkce** je konjunkce literálů  $E = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$  (*jednotková el. konjunkce* je samotný literál, *prázdná* je  $\top$ )
- výrok je v **disjunktivní normální formě (DNF)** je-li disjunkcí elementárních konjunkcí (prázdný DNF výrok je  $\perp$ )

- **literál** je prvvýrok nebo jeho negace,  $\bar{\ell}$  je **opačný literál** k  $\ell$  (pro *pozitivní*  $\ell = p$  je  $\bar{\ell} = \neg p$ , pro *negativní*  $\ell = \neg p$  je  $\bar{\ell} = p$ )
- **klauzule** je disjunkce literálů  $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$  (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je  $\perp$ )
- výrok je v **konjunktivní normální formě (CNF)** je-li konjunkcí klauzulí (prázdný CNF výrok je  $\top$ )
- **elementární konjunkce** je konjunkce literálů  $E = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$  (*jednotková el. konjunkce* je samotný literál, *prázdná* je  $\top$ )
- výrok je v **disjunktivní normální formě (DNF)** je-li disjunkcí elementárních konjunkcí (prázdný DNF výrok je  $\perp$ )



# CNF a DNF

- **literál** je prvovýrok nebo jeho negace,  $\bar{\ell}$  je **opačný literál** k  $\ell$  (pro *pozitivní*  $\ell = p$  je  $\bar{\ell} = \neg p$ , pro *negativní*  $\ell = \neg p$  je  $\bar{\ell} = p$ )
- **klauzule** je disjunkce literálů  $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_n$  (*jednotková klauzule* je samotný literál, *prázdná klauzule* je  $\perp$ )
- výrok je v **konjunktivní normální formě (CNF)** je-li konjunkcí klauzulí (prázdný CNF výrok je  $\top$ )
- **elementární konjunkce** je konjunkce literálů  $E = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$  (*jednotková el. konjunkce* je samotný literál, *prázdná* je  $\top$ )
- výrok je v **disjunktivní normální formě (DNF)** je-li disjunkcí elementárních konjunkcí (prázdný DNF výrok je  $\perp$ )

například:

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p$  je v CNF
- $\neg p \vee (p \wedge q)$  je v DNF
- $\varphi_v$  je v CNF i DNF,  $\varphi_M$  je v DNF

zaměníme-li  $0 \leftrightarrow 1$ , negace zůstává stejná,  $z \wedge$  se stává  $\vee$  a naopak

zaměníme-li  $0 \leftrightarrow 1$ , negace zůstává stejná,  $\wedge$  se stává  $\vee$  a naopak

- $\varphi$  nad  $\{\neg, \wedge, \vee\}$ , zaměníme-li  $\wedge, \vee$  a znegujeme-li prvovýroky:  
duální  $\psi \sim \neg\varphi$ , modely  $\varphi$  jsou nemodely  $\psi$ ,  $f_\psi(\neg x) = \neg f_\varphi(x)$
- CNF a DNF jsou duální pojmy
- *pravdivost* je duální k *nesplnitelnosti*

zaměníme-li  $0 \leftrightarrow 1$ , negace zůstává stejná,  $\wedge$  se stává  $\vee$  a naopak

- $\varphi$  nad  $\{\neg, \wedge, \vee\}$ , zaměníme-li  $\wedge, \vee$  a znegujeme-li prvovýroky: **duální**  $\psi \sim \neg\varphi$ , modely  $\varphi$  jsou nemodely  $\psi$ ,  $f_\psi(\neg x) = \neg f_\varphi(x)$
- CNF a DNF jsou duální pojmy
- *pravdivost* je duální k *nesplnitelnosti*

**Pozorování:** Výrok v CNF je **pravdivý**, právě když každá klauzule má dvojici opačných literálů.

zaměníme-li  $0 \leftrightarrow 1$ , negace zůstává stejná,  $\wedge$  se stává  $\vee$  a naopak

- $\varphi$  nad  $\{\neg, \wedge, \vee\}$ , zaměníme-li  $\wedge, \vee$  a znegujeme-li prvovýroky:  
**duální**  $\psi \sim \neg\varphi$ , modely  $\varphi$  jsou nemodely  $\psi$ ,  $f_\psi(\neg x) = \neg f_\varphi(x)$
- CNF a DNF jsou duální pojmy
- *pravdivost* je duální k *nesplnitelnosti*

**Pozorování:** Výrok v CNF je **pravdivý**, právě když každá klauzule má dvojici opačných literálů.

**Duálně:** Výrok v DNF je **nesplnitelný**, pokud každá elementární konjunkce má dvojici opačných literálů.

## Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok  $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

jeho modely jsou  $M = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

najdeme DNF a CNF výroky se stejnými modely, tj. ekvivalentní  $\varphi$

## Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok  $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

jeho modely jsou  $M = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

najdeme DNF a CNF výroky se stejnými modely, tj. ekvivalentní  $\varphi$

**konstrukce DNF:** každý model popsáný jednou elem. konjunkcí

$$\varphi_{\text{DNF}} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

## Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok  $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

jeho modely jsou  $M = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

najdeme DNF a CNF výroky se stejnými modely, tj. ekvivalentní  $\varphi$

**konstrukce DNF:** každý model popsáný jednou elem. konjunkcí

$$\varphi_{\text{DNF}} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

**konstrukce CNF:** potřebujeme nemodely

$$\overline{M} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$$



## Převod do normální formy: sémanticky (příklad)

mějme výrok  $\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$

jeho modely jsou  $M = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

najdeme DNF a CNF výroky se stejnými modely, tj. ekvivalentní  $\varphi$

**konstrukce DNF:** každý model popsáný jednou elem. konjunkcí

$$\varphi_{\text{DNF}} = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

**konstrukce CNF:** potřebujeme nemodely

$$\overline{M} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$$

každá klauzule zakáže jeden nemodel:

$$\varphi_{\text{CNF}} = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

## Převod do normální formy: sémanticky

**Tvrzení:** Bud'  $\mathbb{P}$  konečný,  $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$  libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky  $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$ , že  $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$ .

## Převod do normální formy: sémanticky

**Tvrzení:** Buď  $\mathbb{P}$  konečný,  $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$  libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky  $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$ , že  $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$ .

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

## Převod do normální formy: sémanticky

**Tvrzení:** Buď  $\mathbb{P}$  konečný,  $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$  libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky  $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$ , že  $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$ .

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

**Důkaz:**  $\varphi_{\text{DNF}} = \varphi_M$  říká 'jsem jeden z modelů z  $M$ '

## Převod do normální formy: sémanticky

**Tvrzení:** Buď  $\mathbb{P}$  konečný,  $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$  libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky  $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$ , že  $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$ .

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

**Důkaz:**  $\varphi_{\text{DNF}} = \varphi_M$  říká 'jsem jeden z modelů z  $M$ '

$\varphi_{\text{CNF}}$  říká 'nejsem žádný z nemodelů z  $M$ ', je duální k  $\varphi'_{\text{DNF}} = \varphi_{\overline{M}}$  pro doplněk  $M$ , nebo přímo: modely klauzule  $C_v = \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$  jsou  $M_C = M_{\mathbb{P}} \setminus \{v\}$ , tedy každá klauzule zakáže jeden nemodel  $\square$

## Převod do normální formy: sémanticky

**Tvrzení:** Buď  $\mathbb{P}$  konečný,  $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$  libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky  $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$ , že  $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$ .

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

**Důkaz:**  $\varphi_{\text{DNF}} = \varphi_M$  říká 'jsem jeden z modelů z  $M$ '

$\varphi_{\text{CNF}}$  říká 'nejsem žádný z nemodelů z  $M$ ', je duální k  $\varphi'_{\text{DNF}} = \varphi_{\overline{M}}$  pro doplněk  $M$ , nebo přímo: modely klauzule  $C_v = \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$  jsou  $M_C = M_{\mathbb{P}} \setminus \{v\}$ , tedy každá klauzule zakáže jeden nemodel  $\square$

**Důsledek:** Každý výrok (v libovolném, i nekonečném jazyce  $\mathbb{P}$ ) je ekvivalentní nějakému výroku v CNF a nějakému výroku v DNF.

## Převod do normální formy: sémanticky

**Tvrzení:** Bud'  $\mathbb{P}$  konečný,  $M \subseteq M_{\mathbb{P}}$  libovolná. Potom existují DNF a CNF výroky  $\varphi_{\text{DNF}}, \varphi_{\text{CNF}}$ , že  $M = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{DNF}}) = M_{\mathbb{P}}(\varphi_{\text{CNF}})$ .

$$\varphi_{\text{DNF}} = \bigvee_{v \in M} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}$$

$$\varphi_{\text{CNF}} = \bigwedge_{v \in \overline{M}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}} = \bigwedge_{v \notin M} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$$

**Důkaz:**  $\varphi_{\text{DNF}} = \varphi_M$  říká 'jsem jeden z modelů z  $M$ '

$\varphi_{\text{CNF}}$  říká 'nejsem žádný z nemodelů z  $M$ ', je duální k  $\varphi'_{\text{DNF}} = \varphi_{\overline{M}}$  pro doplněk  $M$ , nebo přímo: modely klauzule  $C_v = \bigvee_{p \in \mathbb{P}} p^{1-v(p)}$  jsou  $M_C = M_{\mathbb{P}} \setminus \{v\}$ , tedy každá klauzule zakáže jeden nemodel  $\square$

**Důsledek:** Každý výrok (v libovolném, i nekonečném jazyce  $\mathbb{P}$ ) je ekvivalentní nějakému výroku v CNF a nějakému výroku v DNF.

**Důkaz:** použijeme konečný jazyk  $\mathbb{P}' = \text{Var}(\varphi)$ ,  $M = M_{\mathbb{P}'}(\varphi)$   $\square$

## Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí ekvivalentních úprav.



## Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí ekvivalentních úprav.

**Pozorování:** Nahradíme-li podvýrok  $\psi$  výroku  $\varphi$  ekvivalentním  $\psi'$ , výsledný výrok  $\varphi'$  je také ekvivalentní  $\varphi$ .

## Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

**Pozorování:** Nahradíme-li podvýrok  $\psi$  výroku  $\varphi$  ekvivalentním  $\psi'$ , výsledný výrok  $\varphi'$  je také ekvivalentní  $\varphi$ .

**Postup úprav:**

## Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

**Pozorování:** Nahradíme-li podvýrok  $\psi$  výroku  $\varphi$  ekvivalentním  $\psi'$ , výsledný výrok  $\varphi'$  je také ekvivalentní  $\varphi$ .

**Postup úprav:**

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí  $\neg, \wedge, \vee$

## Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

**Pozorování:** Nahradíme-li podvýrok  $\psi$  výroku  $\varphi$  ekvivalentním  $\psi'$ , výsledný výrok  $\varphi'$  je také ekvivalentní  $\varphi$ .

### Postup úprav:

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí  $\neg, \wedge, \vee$
2. přesuň negace dolů (k listům) ve stromu výroku pomocí de Morganových pravidel, odstraň dvojité negace

## Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

**Pozorování:** Nahradíme-li podvýrok  $\psi$  výroku  $\varphi$  ekvivalentním  $\psi'$ , výsledný výrok  $\varphi'$  je také ekvivalentní  $\varphi$ .

### Postup úprav:

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí  $\neg, \wedge, \vee$
2. přesuň negace dolů (k listům) ve stromu výroku pomocí de Morganových pravidel, odstraň dvojité negace
3. přesuň dolů disjunkce (pro CNF) resp. konjunkce (pro DNF) pomocí distributivity  $\wedge$  a  $\vee$

## Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

**Pozorování:** Nahradíme-li podvýrok  $\psi$  výroku  $\varphi$  ekvivalentním  $\psi'$ , výsledný výrok  $\varphi'$  je také ekvivalentní  $\varphi$ .

### Postup úprav:

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí  $\neg, \wedge, \vee$
2. přesuň negace dolů (k listům) ve stromu výroku pomocí de Morganových pravidel, odstraň dvojité negace
3. přesuň dolů disjunkce (pro CNF) resp. konjunkce (pro DNF) pomocí distributivity  $\wedge$  a  $\vee$
4. případně zjednoduš (odstranění duplicit, tautologií apod.)

## Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

**Pozorování:** Nahradíme-li podvýrok  $\psi$  výroku  $\varphi$  ekvivalentním  $\psi'$ , výsledný výrok  $\varphi'$  je také ekvivalentní  $\varphi$ .

### Postup úprav:

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí  $\neg, \wedge, \vee$
2. přesuň negace dolů (k listům) ve stromu výroku pomocí de Morganových pravidel, odstraň dvojité negace
3. přesuň dolů disjunkce (pro CNF) resp. konjunkce (pro DNF) pomocí distributivity  $\wedge$  a  $\vee$
4. případně zjednoduš (odstranění duplicit, tautologií apod.)

## Převod do normální formy: syntakticky

Hledat všechny modely je neefektivní, lze i syntakticky pomocí **ekvivalentních úprav**.

**Pozorování:** Nahradíme-li podvýrok  $\psi$  výroku  $\varphi$  ekvivalentním  $\psi'$ , výsledný výrok  $\varphi'$  je také ekvivalentní  $\varphi$ .

### Postup úprav:

1. přepiš ekvivalenci a implikaci pomocí  $\neg, \wedge, \vee$
2. přesuň negace dolů (k listům) ve stromu výroku pomocí de Morganových pravidel, odstraň dvojité negace
3. přesuň dolů disjunkce (pro CNF) resp. konjunkce (pro DNF) pomocí distributivity  $\wedge$  a  $\vee$
4. případně zjednoduš (odstranění duplicit, tautologií apod.)

Důkaz, že funguje: indukcí dle struktury výroku



## Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

$$\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$$

## Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

$$\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$$

- přepsat ekvivalence a implikace

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow (q \vee \neg r) &\sim (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg r) \rightarrow p) \\ &\sim (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee p) \end{aligned}$$

## Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

$$\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$$

- přepsat ekvivalence a implikace

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow (q \vee \neg r) &\sim (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg r) \rightarrow p) \\ &\sim (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee p) \end{aligned}$$

- negace dolů

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee p)$$

## Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

$$\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$$

- přepsat ekvivalence a implikace

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow (q \vee \neg r) &\sim (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg r) \rightarrow p) \\ &\sim (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee p) \end{aligned}$$

- negace dolů

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee p)$$

- do CNF (+ seřadíme prvovýroky v klauzulích)

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)$$

## Převod do normální formy: syntakticky (příklad)

$$\varphi = p \leftrightarrow (q \vee \neg r)$$

- přepsat ekvivalence a implikace

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow (q \vee \neg r) &\sim (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \wedge ((q \vee \neg r) \rightarrow p) \\ &\sim (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg(q \vee \neg r) \vee p) \end{aligned}$$

- negace dolů

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee p)$$

- do CNF (+ seřadíme prvovýroky v klauzulích)

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)$$

- do DNF (+ zjednodušení)

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$$

- Implikace a ekvivalence:

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg \varphi \vee \psi) \wedge (\neg \psi \vee \varphi)$$

- Negace:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\neg \neg \varphi \sim \varphi$$

- Konjunkce (převod do DNF):

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$(\varphi \vee \psi) \wedge \chi \sim (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$$

- Disjunkce (převod do CNF):

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \sim (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$$

## 2.4 Vlastnosti a důsledky teorií

---

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše



- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
- **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
- **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model
- **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
- **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model
- **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
- **ekvivalence teorií**:  $T \sim T'$  právě když  $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$   
(různé axiomatizace týchž vlastností)

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
- **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model
- **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
- **ekvivalence teorií**:  $T \sim T'$  právě když  $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$   
(různé axiomatizace týchž vlastností)

# Vlastnosti teorií

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
  - **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model
  - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
  - **ekvivalence teorií**:  $T \sim T'$  právě když  $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$   
(různé axiomatizace týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$  je sporná

# Vlastnosti teorií

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
  - **bezesporná** (**splnitelná**): není sporná, tj. má model
  - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
  - **ekvivalence teorií**:  $T \sim T'$  právě když  $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$   
(různé axiomatizace týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$  je sporná
  - $T_2 = \{p \vee q, r\}$  je bezesporná, ale není kompletní

# Vlastnosti teorií

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
  - **bezesporná** (**splnitelná**): není sporná, tj. má model
  - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
  - **ekvivalence teorií**:  $T \sim T'$  právě když  $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$   
(různé axiomatizace týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$  je sporná
  - $T_2 = \{p \vee q, r\}$  je bezesporná, ale není kompletní

# Vlastnosti teorií

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
  - **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model
  - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
  - **ekvivalence teorií**:  $T \sim T'$  právě když  $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$  (různé axiomatizace týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$  je sporná
  - $T_2 = \{p \vee q, r\}$  je bezesporná, ale není kompletní, např.  $p \wedge q$  je v ní nezávislý



# Vlastnosti teorií

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
  - **bezesporná (splnitelná)**: není sporná, tj. má model
  - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
  - **ekvivalence teorií**:  $T \sim T'$  právě když  $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$   
(různé axiomatizace týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$  je sporná
  - $T_2 = \{p \vee q, r\}$  je bezesporná, ale není kompletní, např.  $p \wedge q$  je v ní nezávislý: platí v modelu  $(1, 1, 1)$ , neplatí v  $(1, 0, 1)$

# Vlastnosti teorií

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
  - **bezesporná** (**splnitelná**): není sporná, tj. má model
  - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: právě jeden model
  - **ekvivalence teorií**:  $T \sim T'$  právě když  $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$  (různé axiomatizace týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$  je sporná
  - $T_2 = \{p \vee q, r\}$  je bezesporná, ale není kompletní, např.  $p \wedge q$  je v ní nezávislý: platí v modelu  $(1, 1, 1)$ , neplatí v  $(1, 0, 1)$
  - $T_2 \cup \{\neg p\}$  je kompletní, jediným modelem je  $(0, 1, 1)$ .

# Vlastnosti teorií

- **sporná**:  $T \models \perp$ , ekvivalentně: nemá model, platí v ní vše
  - **bezesporná** (**splnitelná**): není sporná, tj. má model
  - **kompletní**: bezesporná + každý výrok je v ní pravdivý nebo lživý (nemá nezávislé výroky), ekvivalentně: **právě jeden model**
  - **ekvivalence teorií**:  $T \sim T'$  právě když  $M_{\mathbb{P}}(T) = M_{\mathbb{P}}(T')$   
(různé *axiomatizace* týchž vlastností)
- $T_1 = \{p, p \rightarrow q, \neg q\}$  je sporná
  - $T_2 = \{p \vee q, r\}$  je bezesporná, ale není kompletní, např.  $p \wedge q$  je v ní nezávislý: platí v modelu  $(1, 1, 1)$ , neplatí v  $(1, 0, 1)$
  - $T_2 \cup \{\neg p\}$  je kompletní, jediným modelem je  $(0, 1, 1)$ .
  - ekvivalentní teorie:  $\{p \rightarrow q, r\} \sim \{(\neg p \vee q) \wedge r\}$

## Důsledky teorií

Bud'  $T$  teorie v jazyce  $\mathbb{P}$ . Množina všech důsledků  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}'$ :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

## Důsledky teorií

Bud'  $T$  teorie v jazyce  $\mathbb{P}$ . Množina všech důsledků  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}'$ :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

pokud  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ :  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$

# Důsledky teorií

Bud'  $T$  teorie v jazyce  $\mathbb{P}$ . Množina všech důsledků  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}'$ :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

pokud  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ :  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$

**Tvrzení:** Jsou-li  $T, T'$  teorie a  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  výroky v jazyce  $\mathbb{P}$ :

- (i)  $T \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$
- (ii)  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T))$
- (iii) pokud  $T \subseteq T'$ , potom  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T')$

# Důsledky teorií

Bud'  $T$  teorie v jazyce  $\mathbb{P}$ . Množina všech důsledků  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}'$ :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

pokud  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ :  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$

**Tvrzení:** Jsou-li  $T, T'$  teorie a  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  výroky v jazyce  $\mathbb{P}$ :

- (i)  $T \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$
- (ii)  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T))$
- (iii) pokud  $T \subseteq T'$ , potom  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T')$
- (iv)  $\varphi \in \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$  právě když  $\models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$

# Důsledky teorií

Bud'  $T$  teorie v jazyce  $\mathbb{P}$ . Množina všech důsledků  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}'$ :

$$\text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}'} \mid T \models \varphi\}$$

pokud  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$ :  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid M_{\mathbb{P}}(T) \subseteq M_{\mathbb{P}}(\varphi)\}$

**Tvrzení:** Jsou-li  $T, T'$  teorie a  $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  výroky v jazyce  $\mathbb{P}$ :

- (i)  $T \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$
- (ii)  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T))$
- (iii) pokud  $T \subseteq T'$ , potom  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T')$
- (iv)  $\varphi \in \text{Csq}_{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$  právě když  $\models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$

**Důkaz:** snadný, použijte následující:

- $M(\text{Csq}(T)) = M(T)$
- je-li  $T \subseteq T'$  potom  $M(T) \supseteq M(T')$
- $\models \psi \rightarrow \varphi$  právě když  $M(\psi) \subseteq M(\varphi)$

□



**Extenze** teorie  $T$  je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v  $T$

Extenze teorie  $T$  je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v  $T$

- dodatečné požadavky o systému: jednoduchá extenze

**Extenze** teorie  $T$  je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v  $T$

- dodatečné požadavky o systému: **jednoduchá extenze**
- přidání nových částí k systému (a v původním platí totéž, co předtím): **konzervativní extenze**

**Extenze** teorie  $T$  je jakákoliv teorie, která splňuje vše, co platí v  $T$

- dodatečné požadavky o systému: **jednoduchá extenze**
- přidání nových částí k systému (a v původním platí totéž, co předtím): **konzervativní extenze**

Úvodní příklad o barvení grafů:

- $T_3$  (úplná obarvení s hranovou podmínkou) je jednoduchou extenzí teorie  $T_1$  (částečná obarvení bez ohledu na hrany)
- $T'_3$  (přidání nového vrcholu) je konzervativní, ale ne jednoduchou extenzí  $T_3$
- $T'_3$  je extenze  $T_1$ , která není ani jednoduchá, ani konzervativní

## Extenze teorií: formálně

Bud'  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ . **Extenze** teorie  $T$  je libovolná teorie  $T'$  v jazyce  $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$  splňující  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$ ,

## Extenze teorií: formálně

Bud'  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ . **Extenze** teorie  $T$  je libovolná teorie  $T'$  v jazyce  $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$  splňující  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$ ,

- **jednoduchá**:  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$

## Extenze teorií: formálně

Bud'  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ . **Extenze** teorie  $T$  je libovolná teorie  $T'$  v jazyce  $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$  splňující  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$ ,

- **jednoduchá**:  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**:  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

*“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”*

## Extenze teorií: formálně

Bud'  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ . **Extenze** teorie  $T$  je libovolná teorie  $T'$  v jazyce  $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$  splňující  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$ ,

- **jednoduchá**:  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**:  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

*“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”*

### Pozorování:

1.  $T'$  je jednoduchá extenze  $T$ , právě když  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$  a  $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$



## Extenze teorií: formálně

Bud'  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ . **Extenze** teorie  $T$  je libovolná teorie  $T'$  v jazyce  $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$  splňující  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$ ,

- **jednoduchá**:  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**:  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

*“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”*

### Pozorování:

1.  $T'$  je jednoduchá extenze  $T$ , právě když  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$  a  $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
2.  $T'$  je extenze  $T$ , právě když  $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$ . Tj. **restrikce** modelů  $T'$  na  $\mathbb{P}$  musí být modely  $T$ :  $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$

## Extenze teorií: formálně

Bud'  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ . **Extenze** teorie  $T$  je libovolná teorie  $T'$  v jazyce  $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$  splňující  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$ ,

- **jednoduchá**:  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**:  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

*“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”*

### Pozorování:

1.  $T'$  je jednoduchá extenze  $T$ , právě když  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$  a  $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
2.  $T'$  je extenze  $T$ , právě když  $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$ . Tj. **restrikce** modelů  $T'$  na  $\mathbb{P}$  musí být modely  $T$ :  $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
3.  $T'$  je konzervativní extenze  $T$ , je-li to extenze a navíc každý model  $T$  lze **expandovat** na model  $T'$  (tj. každý model  $T$  získáme restrikcí nějakého modelu  $T'$  na jazyk  $\mathbb{P}$ ):  $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} = M_{\mathbb{P}}(T)$

## Extenze teorií: formálně

Buď  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ . **Extenze** teorie  $T$  je libovolná teorie  $T'$  v jazyce  $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$  splňující  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$ ,

- **jednoduchá**:  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**:  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

*“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”*

### Pozorování:

1.  $T'$  je jednoduchá extenze  $T$ , právě když  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$  a  $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
2.  $T'$  je extenze  $T$ , právě když  $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$ . Tj. **restrikce** modelů  $T'$  na  $\mathbb{P}$  musí být modely  $T$ :  $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
3.  $T'$  je konzervativní extenze  $T$ , je-li to extenze a navíc každý model  $T$  lze **expandovat** na model  $T'$  (tj. každý model  $T$  získáme restrikcí nějakého modelu  $T'$  na jazyk  $\mathbb{P}$ ):  $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} = M_{\mathbb{P}}(T)$
4.  $T'$  je extenze  $T$  a zároveň  $T$  je extenze  $T'$ , právě když  $T \sim T'$

## Extenze teorií: formálně

Buď  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ . **Extenze** teorie  $T$  je libovolná teorie  $T'$  v jazyce  $\mathbb{P}' \supseteq \mathbb{P}$  splňující  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) \subseteq \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T')$ ,

- **jednoduchá**:  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$
- **konzervativní**:  $\text{Csq}_{\mathbb{P}}(T) = \text{Csq}_{\mathbb{P}}(T') = \text{Csq}_{\mathbb{P}'}(T') \cap \text{VF}_{\mathbb{P}}$

*“nové důsledky musí obsahovat nové prvovýroky”*

### Pozorování:

1.  $T'$  je jednoduchá extenze  $T$ , právě když  $\mathbb{P}' = \mathbb{P}$  a  $M_{\mathbb{P}}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
2.  $T'$  je extenze  $T$ , právě když  $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$ . Tj. **restrikce** modelů  $T'$  na  $\mathbb{P}$  musí být modely  $T$ :  $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
3.  $T'$  je konzervativní extenze  $T$ , je-li to extenze a navíc každý model  $T$  lze **expandovat** na model  $T'$  (tj. *každý* model  $T$  získáme restrikcí *nějakého* modelu  $T'$  na jazyk  $\mathbb{P}$ ):  $\{v \upharpoonright_{\mathbb{P}} \mid v \in M_{\mathbb{P}'}(T')\} = M_{\mathbb{P}}(T)$
4.  $T'$  je extenze  $T$  a zároveň  $T$  je extenze  $T'$ , právě když  $T \sim T'$
5. **Kompletní jednoduché extenze**  $T$  odpovídají modelům  $T$  (až na  $\sim$ )

## Extenze teorií: příklad

- mějme  $T = \{p \rightarrow q\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q\}$ , teorie  $T_1 = \{p \wedge q\}$  v jazyce  $\mathbb{P}$  je jednoduchá extenze  $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$

## Extenze teorií: příklad

- mějme  $T = \{p \rightarrow q\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q\}$ , teorie  $T_1 = \{p \wedge q\}$  v jazyce  $\mathbb{P}$  je jednoduchá extenze  $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- $T_1$  je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze  $T$  jsou:  $T_1$ ,  $T_2 = \{\neg p, q\}$ , a  $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$

## Extenze teorií: příklad

- mějme  $T = \{p \rightarrow q\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q\}$ , teorie  $T_1 = \{p \wedge q\}$  v jazyce  $\mathbb{P}$  je jednoduchá extenze  $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- $T_1$  je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze  $T$  jsou:  $T_1$ ,  $T_2 = \{\neg p, q\}$ , a  $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$
- teorie  $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$  v  $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$  je extenzí teorie  $T$ :  $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}'$  a  $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$ , restrikce modelů  $T'$  na  $\mathbb{P}$  jsou  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$

## Extenze teorií: příklad

- mějme  $T = \{p \rightarrow q\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q\}$ , teorie  $T_1 = \{p \wedge q\}$  v jazyce  $\mathbb{P}$  je jednoduchá extenze  $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- $T_1$  je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze  $T$  jsou:  $T_1$ ,  $T_2 = \{\neg p, q\}$ , a  $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$
- teorie  $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$  v  $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$  je extenzí teorie  $T$ :  $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}'$  a  $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$ , restrikce modelů  $T'$  na  $\mathbb{P}$  jsou  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- protože dokonce  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} = M_{\mathbb{P}}(T)$ , každý model  $T$  lze rozšířit na model  $T'$ ,  $T'$  je konzervativní extenze  $T$



## Extenze teorií: příklad

- mějme  $T = \{p \rightarrow q\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q\}$ , teorie  $T_1 = \{p \wedge q\}$  v jazyce  $\mathbb{P}$  je **jednoduchá** extenze  $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- $T_1$  je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze  $T$  jsou:  $T_1$ ,  $T_2 = \{\neg p, q\}$ , a  $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$
- teorie  $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$  v  $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$  je extenzí teorie  $T$ :  $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}'$  a  $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$ , restrikce modelů  $T'$  na  $\mathbb{P}$  jsou  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- protože dokonce  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} = M_{\mathbb{P}}(T)$ , každý model  $T$  lze rozšířit na model  $T'$ ,  $T'$  je **konzervativní** extenze  $T$
- každý výrok v jazyce  $\mathbb{P}$  platí v  $T$ , právě když platí v  $T'$ , ale výrok  $p \rightarrow r$  je novým důsledkem: platí v  $T'$  ale ne v  $T$

## Extenze teorií: příklad

- mějme  $T = \{p \rightarrow q\}$  v jazyce  $\mathbb{P} = \{p, q\}$ , teorie  $T_1 = \{p \wedge q\}$  v jazyce  $\mathbb{P}$  je **jednoduchá** extenze  $T: M_{\mathbb{P}}(T_1) \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- $T_1$  je kompletní, až na ekvivalenci všechny jednoduché kompletní extenze  $T$  jsou:  $T_1$ ,  $T_2 = \{\neg p, q\}$ , a  $T_3 = \{\neg p, \neg q\}$
- teorie  $T' = \{p \leftrightarrow (q \wedge r)\}$  v  $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$  je extenzí teorie  $T$ :  $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}'$  a  $M_{\mathbb{P}'}(T') \subseteq M_{\mathbb{P}'}(T)$ , restrikce modelů  $T'$  na  $\mathbb{P}$  jsou  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq M_{\mathbb{P}}(T)$
- protože dokonce  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} = M_{\mathbb{P}}(T)$ , každý model  $T$  lze rozšířit na model  $T'$ ,  $T'$  je **konzervativní** extenze  $T$
- každý výrok v jazyce  $\mathbb{P}$  platí v  $T$ , právě když platí v  $T'$ , ale výrok  $p \rightarrow r$  je novým důsledkem: platí v  $T'$  ale ne v  $T$
- teorie  $T'' = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, \neg r \vee p\}$  v jazyce  $\mathbb{P}'$  je extenze  $T$ , ale **není konzervativní**, neboť v ní platí  $p \leftrightarrow q$ , což neplatí v  $T$  (nebo proto, že model  $(0, 1)$  teorie  $T$  nelze rozšířit na model teorie  $T''$ )

## 2.5 Algebra výroků

---

## Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ ? Nekonečně mnoho. Až na ekvivalenci? Tolik, kolik je možných množin modelů:  $2^{2^3} = 256$ .

## Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ ? Nekonečně mnoho. Až na ekvivalenci? Tolik, kolik je možných množin modelů:  $2^{2^3} = 256$ .

Výroky až na ekvivalenci studujeme pomocí jejich množin modelů.

## Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ ? Nekonečně mnoho. **Až na ekvivalenci?** Tolik, kolik je možných množin modelů:  $2^{2^3} = 256$ .

Výroky až na ekvivalenci studujeme pomocí jejich množin modelů.

Ekvivalenční třídy:  $\forall \mathbb{P} / \sim$ , např.  $[p \rightarrow q]_{\sim} = \{p \rightarrow q, \neg p \vee q, \dots\}$

# Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ ? Nekonečně mnoho. **Až na ekvivalenci?** Tolik, kolik je možných množin modelů:  $2^{2^3} = 256$ .

**Výroky až na ekvivalenci studujeme pomocí jejich množin modelů.**

Ekvivalenční třídy:  $\mathcal{V}_{\mathbb{P}} / \sim$ , např.  $[p \rightarrow q]_{\sim} = \{p \rightarrow q, \neg p \vee q, \dots\}$

Přiřazení modelů:  $h : \mathcal{V}_{\mathbb{P}} / \sim \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$  definované  $h([\varphi]_{\sim}) = \mathcal{M}(\varphi)$   
(je dobře definované, prosté, pro konečný jazyk bijekce)

# Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ ? Nekonečně mnoho. **Až na ekvivalenci?** Tolik, kolik je možných množin modelů:  $2^{2^3} = 256$ .

Výroky až na ekvivalenci studujeme pomocí jejich množin modelů.

Ekvivalenční třídy:  ${}^{\mathcal{V}\mathbb{F}_{\mathbb{P}}}/\sim$ , např.  $[p \rightarrow q]_{\sim} = \{p \rightarrow q, \neg p \vee q, \dots\}$

Přiřazení modelů:  $h : {}^{\mathcal{V}\mathbb{F}_{\mathbb{P}}}/\sim \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$  definované  $h([\varphi]_{\sim}) = M(\varphi)$   
(je dobře definované, prosté, pro konečný jazyk bijekce)

Na  ${}^{\mathcal{V}\mathbb{F}_{\mathbb{P}}}/\sim$  zavedeme operace  $\neg, \wedge, \vee$  **pomocí reprezentantů**:

$$\neg[\varphi]_{\sim} = [\neg\varphi]_{\sim}$$

$$[\varphi]_{\sim} \wedge [\psi]_{\sim} = [\varphi \wedge \psi]_{\sim}$$

$$[\varphi]_{\sim} \vee [\psi]_{\sim} = [\varphi \vee \psi]_{\sim}$$



# Výroky až na ekvivalenci

Kolik existuje výroků nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ ? Nekonečně mnoho. **Až na ekvivalenci?** Tolik, kolik je možných množin modelů:  $2^{2^3} = 256$ .

Výroky až na ekvivalenci studujeme pomocí jejich množin modelů.

Ekvivalenční třídy:  ${}^{\mathcal{V}\mathbb{P}}/\sim$ , např.  $[p \rightarrow q]_{\sim} = \{p \rightarrow q, \neg p \vee q, \dots\}$

Přiřazení modelů:  $h : {}^{\mathcal{V}\mathbb{P}}/\sim \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}_{\mathbb{P}})$  definované  $h([\varphi]_{\sim}) = \mathcal{M}(\varphi)$   
(je dobře definované, prosté, pro konečný jazyk bijekce)

Na  ${}^{\mathcal{V}\mathbb{P}}/\sim$  zavedeme operace  $\neg, \wedge, \vee$  **pomocí reprezentantů**:

$$\neg[\varphi]_{\sim} = [\neg\varphi]_{\sim}$$

$$[\varphi]_{\sim} \wedge [\psi]_{\sim} = [\varphi \wedge \psi]_{\sim}$$

$$[\varphi]_{\sim} \vee [\psi]_{\sim} = [\varphi \vee \psi]_{\sim}$$

přidáme konstanty  $\perp = [\perp]_{\sim}, \top = [\top]_{\sim}$ , máme *Booleovu algebru*:  
**algebru výroků** jazyka  $\mathbb{P}$ ; totéž relativně k teorii  $T$  (**použijeme  $\sim_T$** )

Algebra výroků jazyka  $\mathbb{P}$  resp. teorie  $T$ :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

# Algebra výroků

Algebra výroků jazyka  $\mathbb{P}$  resp. teorie  $T$ :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathcal{V}_{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathcal{V}_{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

přiřazení modelů  $h$  je prosté zobrazení algebry výroků jazyka do **potenční algebry**  $\mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}) = \langle \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}); \neg, \cap, \cup, \emptyset, \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \rangle$  **zachovávající** operace a konstanty:  $h(\perp) = \emptyset$ ,  $h(\top) = \mathbf{M}_{\mathbb{P}}$ , a

$$h(\neg[\varphi]_{\sim}) = \overline{h([\varphi]_{\sim})} = \overline{\mathbf{M}(\varphi)} = \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \setminus \mathbf{M}(\varphi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \wedge [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cap h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cap \mathbf{M}(\psi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \vee [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cup h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cup \mathbf{M}(\psi)$$

tj. je to **homomorfismus** Booleových algeber, a nad konečným jazykem bijekce, tzv. **izomorfismus**; stejně pro algebru výroků teorie

Algebra výroků jazyka  $\mathbb{P}$  resp. teorie  $T$ :

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}} = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim; \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$$

$$\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T) = \langle \mathbf{VF}_{\mathbb{P}} / \sim_T; \neg_T, \wedge_T, \vee_T, \perp_T, \top_T \rangle$$

přiřazení modelů  $h$  je prosté zobrazení algebry výroků jazyka do **potenční algebry**  $\mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}) = \langle \mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}); \neg, \cap, \cup, \emptyset, \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \rangle$  **zachovávající** operace a konstanty:  $h(\perp) = \emptyset$ ,  $h(\top) = \mathbf{M}_{\mathbb{P}}$ , a

$$h(\neg[\varphi]_{\sim}) = \overline{h([\varphi]_{\sim})} = \overline{\mathbf{M}(\varphi)} = \mathbf{M}_{\mathbb{P}} \setminus \mathbf{M}(\varphi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \wedge [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cap h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cap \mathbf{M}(\psi)$$

$$h([\varphi]_{\sim} \vee [\psi]_{\sim}) = h([\varphi]_{\sim}) \cup h([\psi]_{\sim}) = \mathbf{M}(\varphi) \cup \mathbf{M}(\psi)$$

tj. je to **homomorfismus** Booleových algeber, a nad konečným jazykem bijekce, tzv. **izomorfismus**; stejně pro algebru výroků teorie

**Důsledek:** Pro bezespornou teorii  $T$  nad *konečným jazykem*  $\mathbb{P}$  je algebra výroků  $\mathbf{AV}_{\mathbb{P}}(T)$  izomorfní potenční algebře  $\mathcal{P}(\mathbf{M}_{\mathbb{P}}(\mathbf{T}))$  prostřednictvím zobrazení  $h([\varphi]_{\sim_T}) = \mathbf{M}(T, \varphi)$ .

## Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje až na ekvivalenci:

## Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje až na ekvivalenci:

- $2^{2^n}$  výroků (resp. teorií),

## Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje až na ekvivalenci:

- $2^{2^n}$  výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$  výroků pravdivých (resp. lživých) v  $T$ ,

## Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje **až na ekvivalenci**:

- $2^{2^n}$  výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$  výroků pravdivých (resp. lživých) v  $T$ ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$  výroků nezávislých v  $T$ ,



## Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje až na ekvivalenci:

- $2^{2^n}$  výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$  výroků pravdivých (resp. lživých) v  $T$ ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$  výroků nezávislých v  $T$ ,
- $2^k$  jednoduchých extenzí teorie  $T$  (z toho 1 sporná),

## Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje **až na ekvivalenci**:

- $2^{2^n}$  výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n-k}$  výroků pravdivých (resp. lživých) v  $T$ ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n-k}$  výroků nezávislých v  $T$ ,
- $2^k$  jednoduchých extenzí teorie  $T$  (z toho 1 sporná),
- $k$  kompletních jednoduchých extenzí  $T$ .

# Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje až na ekvivalenci:

- $2^{2^n}$  výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$  výroků pravdivých (resp. lživých) v  $T$ ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$  výroků nezávislých v  $T$ ,
- $2^k$  jednoduchých extenzí teorie  $T$  (z toho 1 sporná),
- $k$  kompletních jednoduchých extenzí  $T$ .

Dále až na  $T$ -ekvivalenci existuje:

# Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje **až na ekvivalenci**:

- $2^{2^n}$  výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n-k}$  výroků pravdivých (resp. lživých) v  $T$ ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n-k}$  výroků nezávislých v  $T$ ,
- $2^k$  jednoduchých extenzí teorie  $T$  (z toho 1 sporná),
- $k$  kompletních jednoduchých extenzí  $T$ .

Dále **až na  $T$ -ekvivalenci** existuje:

- $2^k$  výroků,

# Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje **až na ekvivalenci**:

- $2^{2^n}$  výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$  výroků pravdivých (resp. lživých) v  $T$ ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$  výroků nezávislých v  $T$ ,
- $2^k$  jednoduchých extenzí teorie  $T$  (z toho 1 sporná),
- $k$  kompletních jednoduchých extenzí  $T$ .

Dále **až na  $T$ -ekvivalenci** existuje:

- $2^k$  výroků,
- 1 výrok pravdivý v  $T$ , 1 lživý v  $T$ ,

# Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje **až na ekvivalenci**:

- $2^{2^n}$  výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$  výroků pravdivých (resp. lživých) v  $T$ ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$  výroků nezávislých v  $T$ ,
- $2^k$  jednoduchých extenzí teorie  $T$  (z toho 1 sporná),
- $k$  kompletních jednoduchých extenzí  $T$ .

Dále **až na  $T$ -ekvivalenci** existuje:

- $2^k$  výroků,
- 1 výrok pravdivý v  $T$ , 1 lživý v  $T$ ,
- $2^k - 2$  výroků nezávislých v  $T$ .

## Počítání až na ekvivalenci

**Tvrzení:** Mějme  $n$ -prvkový jazyk  $\mathbb{P}$  a bezespornou teorii  $T$  mající právě  $k$  modelů. Potom v jazyce  $\mathbb{P}$  existuje **až na ekvivalenci**:

- $2^{2^n}$  výroků (resp. teorií),
- $2^{2^n - k}$  výroků pravdivých (resp. lživých) v  $T$ ,
- $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - k}$  výroků nezávislých v  $T$ ,
- $2^k$  jednoduchých extenzí teorie  $T$  (z toho 1 sporná),
- $k$  kompletních jednoduchých extenzí  $T$ .

Dále **až na  $T$ -ekvivalenci** existuje:

- $2^k$  výroků,
- 1 výrok pravdivý v  $T$ , 1 lživý v  $T$ ,
- $2^k - 2$  výroků nezávislých v  $T$ .

**Důkaz:** stačí spočítat možné množiny modelů

