

**Výukové cíle:** Po absolvování cvičení student

- rozumí pojmům syntaxe výrokové logiky (jazyk, prvovýrok, výrok, strom výroku, podvýrok, teorie), umí je formálně definovat a uvést příklady
- rozumí pojmům model, důsledek teorie, umí je formálně definovat a uvést příklady
- umí formalizovat daný systém (slovní/výpočetní úlohu, apod.) ve výrokové logice
- umí najít modely dané teorie
- umí rozhodnout, zda je daný výrok důsledkem dané teorie
- má zkušenost s použitím (s pomocí instruktora) tablo metody a rezoluční metody k důkazu vlastností daného systému (např. k řešení slovní úlohy)

### PŘÍKLADY NA CVIČENÍ

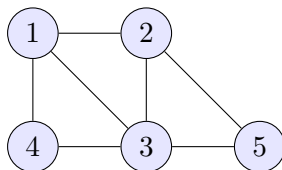
**Příklad 1.** Ztratili jsme se v labyrintu a před námi jsou troje dveře: červené, modré, a zelené. Víme, že za právě jedněmi dveřmi je cesta ven, za ostatními je drak. Na dveřích jsou nápisy:

- Červené dveře: “*Cesta ven je za těmito dveřmi.*”
- Modré dveře: “*Cesta ven není za těmito dveřmi.*”
- Zelené dveře: “*Cesta ven není za modrými dveřmi.*”

Víme, že alespoň jeden z nápisů je pravdivý a alespoň jeden je lživý. Kudy vede cesta ven?

- Zvolte vhodný jazyk (množinu prvovýroků)  $\mathbb{P}$ .
- Formalizujte všechny znalosti jako teorii  $T$  v jazyce  $\mathbb{P}$ . (Pozor: Axiomy nejsou nápisy na dveřích, ty nemusí být pravdivé.)
- Najděte všechny modely teorie  $T$ .
- Formalizujte tvrzení “Cesta ven je za červenými/modrými/zelenými dveřmi” jako výroky  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  nad  $\mathbb{P}$ . Je některý z těchto výroků důsledkem  $T$ ?
- Vyzkoušejte si použití tablo metody: Zkonstruuje tablo z teorie  $T$  s položkou  $F\varphi_i$  v kořeni, budou všechny větve sporné? (Pokuste se vymyslet správné kroky konstrukce tabla, inspirujte se příkladem z přednášky.)
- Vyzkoušejte si použití rezoluční metody: Převeďte axiomy teorie  $T$ , a také výrok  $\neg\varphi_i$ , do konjunktivní normální formy (CNF). Pokuste se sestavit rezoluční zamítnutí, zakreslete ho ve formě rezolučního stromu. (Pozor: Nezapomeňte znegovat dokazovaný výrok  $\varphi_i$ .)

**Příklad 2.** Uvažme *vrcholové pokrytí* (vertex cover) následujícího grafu:



Chceme pro dané  $k > 0$  zjistit, zda má tento graf nejvýše  $k$ -prvkové vrcholové pokrytí.

- Zvolte vhodný jazyk (množinu prvovýroků)  $\mathbb{P}$ .
- Formalizujte ve výrokové logice problém, zda graf na obrázku má nejvýše  $k$ -prvkové vrcholové pokrytí, pro pevně zvolené  $k$ . Označme výslednou teorii jako  $VC_k$ .
- Ukažte, že  $VC_2$  nemá žádné modely, tj. graf nemá 2-prvkové vrcholové pokrytí.
- Uměli byste k tomu využít tablo metodu? Rozmyslete si postup.
- Uměli byste k tomu využít rezoluční metodu? Rozmyslete si postup.
- Najděte všechna 3-prvková vrcholová pokrytí.

## DALŠÍ PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

**Příklad 3.** Uvažme následující tvrzení:

- (i) *Ten, kdo je dobrý běžec a má dobrou kondici, uběhne maraton.*
- (ii) *Ten, kdo nemá štěstí a nemá dobrou kondici, neuběhne maraton.*
- (iii) *Ten, kdo uběhne maraton, je dobrý běžec.*
- (iv) *Budu-li mít štěstí, uběhnu maraton.*
- (v) *Mám dobrou kondici.*

Podobně jako v prvním příkladu popište situaci pomocí výrokové logiky:

- (a) Formalizujte tato tvrzení jako teorii  $T$  nad vhodnou množinou prvovýroků.
- (b) Najděte všechny modely teorie  $T$ .
- (c) Pokuste se využít k hledání modelů také *tablo metodu*.
- (d) Napište několik různých důsledků teorie  $T$ .
- (e) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii  $T$ .

**Příklad 4.** Mějme tři bratry, každý z nich buď vždy říká pravdu anebo vždy lže.

- (i) Nejstarší říká: *“Oba mí bratři jsou lháři.”*
- (ii) Prostřední říká: *“Nejmłodší je lhář.”*
- (iii) Nejmladší říká: *“Nejstarší je lhář.”*

Pomocí výrokové logiky ukažte, že nejmladší bratr je pravdomluvný.

**Příklad 5.** Mějme pevně dané Sudoku. Popište, jak vytvořit teorii (ve výrokové logice), jejíž modely jednoznačně odpovídají validním řešením.

**Příklad 6.** Formalizujte následující tvrzení ve výrokové logice:

- (a) *Králíci v oblasti nebyli pozorováni a procházení po cestě je bezpečné, ale borůvky podél cesty jsou zralé.*
- (b) *Pokud jsou borůvky podél cesty zralé, pak je procházení po cestě bezpečné pouze tehdy, pokud králíci nebyli v oblasti pozorováni.*
- (c) *Procházet se podél cesty není bezpečné, ale v oblasti nebyli pozorováni králíci a borůvky podél cesty jsou zralé.*
- (d) *Aby bylo procházení po cestě bezpečné, je nezbytné, ale nedostačující, aby borůvky podél cesty nebyly zralé a králíci nebyli v oblasti pozorováni.*
- (e) *Procházení po cestě není bezpečné, kdykoli jsou borůvky podél cesty jsou zralé a v oblasti byli pozorováni králíci.*

**Příklad 7.** Formalizujte následující vlastnosti matematických objektů ve výrokové logice:

- (a) Pro pevně daný (konečný) graf  $G$ , že má perfektní párování.
- (b) Pro pevně danou částečně uspořádanou množinu, že je totálně (lineárně) uspořádaná.
- (c) Pro pevně danou částečně uspořádanou množinu, že má nejmenší prvek.

**Příklad 8.** Pro následující výroky nakreslete strom výroku, a najděte množinu modelů:

- (a)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
- (b)  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$

## K ZAMYŠLENÍ

**Příklad 9.** Připomeňte si definici *stromu výroku*.

- (a) Dokažte podrobně, že každý výrok má jednoznačně určený strom.
- (b) Platilo by to, i kdybychom v definici výroku nahradili symboly ‘(’, ‘)’ symbolem ‘|’?
- (c) Co by se stalo, pokud bychom závorky vůbec nepsali?