[2 body] *Před vypracováním si přečtěte pokyny popsané v podmínkách na zápočet!*

Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při jejich výslechu bylo zjištěno následující:

- *Alespoň jeden z vyslýchaných říká pravdu a alespoň jeden lže.*
- *Adam říká: "Barbora nebo Cyril lžou"*
- *Barbora říká: "Cyril lže"*
- *Cyril říká: "Adam nebo Barbora lžou"*

(1) Vyjádřete naše znalosti jako výroky φ_1 až φ_4 nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$, přičemž a, b, c znamená (po řadě), že *"Adam/Barbora/Cyril říká pravdu"*.
(2) Najděte všechny modely teorie $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$.
(3) Najděte CNF teorii ekvivalentní teorii T.
(4) Ukažte (libovolnou metodou), že z teorie T plyne, že: *Adam říká pravdu.*

CVIČENÍ Z LOGIKY: DOMÁCÍ ÚKOL Č. 1

Úkol odevzdávejte v Moodle. Ponechte si dostatečný čas pro odevzdání, tak aby vám krátkodobé technické potíže s Moodle nezabránily úkol odevzdat. Pozdě odevzdané úkoly nebudou hodnoceny, kromě případů hodných zvláštního zřetele. Odevzdané řešení musí být vaše vlastní, není dovoleno hledat nápovědy ani řešení konzultovat s kýmkoliv kromě mne. Své odpovědi dostatečně podrobně zdůvodněte, uveďte všechny pomocné výpočty apod.

Úkol 1. Převeďte následující výrok do CNF a do DNF. (Uveďte celý postup, ne jen odpověď.)

$$((p \to \neg q) \to \neg r) \vee \neg p.$$

Úkol 2. Rozhodněte, zda je následující 2-CNF výrok splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení. Nakreslete příslušný implikační graf, a graf silně souvislých komponent v topologickém uspořádání.

$$(a \vee c) \wedge (a \vee \neg d) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (b \vee \neg e) \wedge (\neg c \vee \neg e) \wedge (\neg a \vee \neg f) \wedge$$
$$\wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee f) \wedge (c \vee \neg f) \wedge \neg f$$

Úkol 3. Rozhodněte, zda je následující výrok v Hornově tvaru splnitelný. Pokud ano, najděte nějaké splňující ohodnocení. (Uveďte celý postup, ne jen odpověď.)

$$(\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge d \wedge (\neg a \vee \neg c \vee e) \wedge$$
$$\wedge (\neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg e) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg e)$$

Úkol 4. Uvažme následující výroky φ a ψ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$:

$$\varphi = (\neg p \vee q) \to (p \wedge r)$$
$$\psi = s \to q$$

(a) Určete počet (až na ekvivalenci) výroků χ nad $\mathbb{P}$ takových, že $\varphi \wedge \psi \models \chi$.
(b) Určete počet (až na ekvivalenci) úplných teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \models \varphi \wedge \psi$.
(c) Najděte nějakou axiomatizaci pro každou (až na ekvivalenci) úplnou teorii T nad $\mathbb{P}$ takovou, že $T \models \varphi \wedge \psi$.

Úkol 5. Uvažme následující tvrzení:

(*i*) *Ten, kdo je dobrý běžec a má dobrou kondici, uběhne maraton.*
(*ii*) *Ten, kdo nemá štěstí a nemá dobrou kondici, neuběhne maraton.*
(*iii*) *Ten, kdo uběhne maraton, je dobrý běžec.*
(*iv*) *Budu-li mít štěstí, uběhnu maraton.*
(*v*) *Mám dobrou kondici.*

(a) Přeložte tvrzení (i) až (v) po řadě do výroků φ_1 až φ_5 v jazyce $L = \langle b, k, m, s \rangle$, kde výrokové proměnné mají po řadě význam "být dobrý běžec", "mít dobrou kondici", "uběhnout maraton" a "mít štěstí".

(b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_5\}$ s položkou $F(k \wedge \neg k)$ v kořeni. Sestrojte kanonický model pro nejlevější bezespornou větev tohoto tabla.
(c) Najděte příklad výroků v jazyce L, které jsou T-ekvivalentní, ale ne logicky ekvivalentní.
(d) Určete počet navzájem neekvivalentních jednoduchých extenzí teorie T.