# Sedmá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

# Sedmá přednáška

## Program

- podstruktury, expanze, redukty
- extenze teorií, extenze o definice
- definovatelnost a databázové dotazy
- vztah výrokové a predikátové logiky

## Materiály

**Zápisky z přednášky**, Sekce 6.6-6.9 z Kapitoly 6

# 6.6 Podstruktura, expanze, redukt

# Podstruktura

- podstruktura zobecňuje podgrupu, podprostor vektorového prostoru, (indukovaný) podgraf: na podmnožině $B$ univerza vytvoříme strukturu, která "zdědí" relace, funkce a konstanty
- $B$ musí být uzavřená na všechny funkce (vč. konstant)

Struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}} \rangle$ je (indukovaná) podstruktura struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ (v též signatuře $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$), značíme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, jestliže:

- $\emptyset \neq B \subseteq A$
- $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^{\mathrm{ar(R)}}$ pro každý relační symbol $R \in \mathcal{R}$
- $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \cap (B^{\mathrm{ar(f)}} \times B)$ pro každý funkční symbol $f \in \mathcal{F}$, tj. $f^{\mathcal{B}}$ je restrikce $f^{\mathcal{A}}$ na množinu $B$, a výstupy jsou všechny z $B$

speciálně, pro konstantní symbol $c \in \mathcal{F}$ máme $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}} \in B$

# Restrikce na podmnožinu, příklady

Množina $C \subseteq A$ je uzavřená na funkci $f : A^n \to A$, pokud $f(x_1, \ldots, x_n) \in C$ pro všechna $x_i \in C$.

**Pozorování:** Množina $\emptyset \neq C \subseteq A$ je univerzem podstruktury, právě když je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant). V tom případě je to restrikce $\mathcal{A}$ na množinu $C$, značíme $\mathcal{A} \restriction C$.

- $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, můžeme psát: $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z}$
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou obou těchto struktur, platí: $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \restriction \mathbb{N}$
- Množina $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}$ není univerzem podstruktury $\underline{\mathbb{Z}}$ ani $\underline{\mathbb{Q}}$, není uzavřená na násobení.

# Platnost v podstruktuře (pro otevřené formule je zachována)

**Pozorování:** Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $\varphi$ otevřená formule, a $e\colon \mathrm{Var} \to B$, potom platí: $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

**Důkaz:** Snadno indukcí dle struktury $\varphi$, pro atomickou zřejmé. $\square$

**Důsledek:** Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Teorie $T$ je otevřená, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

**Důsledek:** Modely otevřené teorie jsou uzavřené na podstruktury, tj. každá podstruktura modelu této teorie je také její model.

- Teorie grafů je otevřená. Podstruktura grafu je také graf: (indukovaný) podgraf. Stejně podgrupy, Booleovy podalgebry.
- Teorie těles není otevřená. Později ukážeme, že ani otevřeně axiomatizovatelná (kvantifikátoru v axiomu o existenci inverzního prvku se nezbavíme). Podstruktura tělesa $\mathbb{Q}$ na množině $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \restriction \mathbb{Z}$, není těleso. (Je to tzv. okruh.)

# Generovaná podstruktura (zobecníme lineární obal vektorů)

Co když podmnožina univerza není uzavřená? Vezmeme její uzávěr.

Mějme $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \rangle$ a $\emptyset \neq X \subseteq A$. Buď $B \subseteq A$ nejmenší podmnožina, která obsahuje $X$ a je uzavřená na všechny funkce $\mathcal{A}$ (tj. obsahuje i všechny konstanty). Potom podstruktura $\mathcal{A} \restriction B$ je generovaná $X$, značíme ji $\mathcal{A}\langle X \rangle$.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$:

- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$
- $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$ je podstruktura $\underline{\mathbb{N}}$ na množině všech sudých čísel

Pokud $\mathcal{A}$ nemá žádné funkce (ani konstanty), např. graf či uspořádání, potom není čím generovat, a $\mathcal{A}\langle X \rangle = \mathcal{A} \restriction X$.

# Expanze a redukt

Mějme $L \subseteq L'$, $L$-strukturu $\mathcal{A}$ a $L'$-strukturu $\mathcal{A}'$ na stejné doméně. Je-li interpretace každého symbolu z $L$ stejná v $\mathcal{A}$ i v $\mathcal{A}'$, potom:

- $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ do $L'$ ($L'$-expanze struktury $\mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na $L$ ($L$-redukt struktury $\mathcal{A}'$)

Například:

- Mějme grupu celých čísel $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$. Potom:
  - struktura $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ je její redukt
  - struktura $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1 \rangle$ (okruh celých čísel) je její expanze
- Mějme graf $\mathcal{G} = \langle G, E^{\mathcal{G}} \rangle$. Potom expanze $\mathcal{G}$ o jména prvků (z množiny G) je struktura $\langle G, E^G, c_v^{\mathcal{G}} \rangle_{v \in G}$ v jazyce $\langle E, c_v \rangle_{v \in G}$, kde $c_v^{\mathcal{G}} = v$ pro všechny vrcholy $v \in G$.

# Věta o konstantách

- splnit formuli s volnou proměnnou $x$ je totéž, co splnit formuli, ve které je $x$ nahrazena novým konstantním symbolem $c$
- proč: nový symbol lze v modelu interpretovat každým prvkem
- podobný trik využijeme v tablo metodě

**Věta (O konstantách):** Mějme $L$-formuli $\varphi$ s volnými proměnnými $x_1, \dots, x_n$. Označme jako $L'$ rozšíření $L$ o nové konstantní symboly $c_1, \dots, c_n$ a buď $T'$ stejná teorie jako $T$, ale v jazyce $L'$. Potom:

$$T \models \varphi \text{ právě když } T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)$$

**Důkaz:** stačí ukázat pro jednu volnou proměnnou, rozšířit indukcí

$\Rightarrow$ **Víme:** $\varphi$ platí v každém modelu $T$. **Chceme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu $T'$. Mějme model $\mathcal{A}' \models T'$ a ohodnocení $e\colon \text{Var} \to A'$ a ukažme, že $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

# Pokračování důkazu

Buď $\mathcal{A}$ redukt $\mathcal{A}'$ na $L$ ('zapomeneme' konstantu $c^{\mathcal{A}'}$). Všimněte si, že $\mathcal{A}$ je model $T$ (axiomy $T = T'$ neobsahují nový symbol $c$). Dle předpokladu $\mathcal{A} \models \varphi$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e']$ pro libovolné ohodnocení $e'$, speciálně pro $e(x/c^{\mathcal{A}'})$ kde $x$ ohodnotíme interpretací $c$ v $\mathcal{A}'$.

Máme $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})]$, což ale znamená $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$.

$\Leftarrow$ **Víme:** $\varphi(x/c)$ platí v každém modelu $T'$. **Chceme:** $\varphi$ platí v každém modelu $T$. Zvolme $\mathcal{A} \models T$ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to A$ a ukažme, že $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Buď $\mathcal{A}'$ expanze $\mathcal{A}$ do $L'$, kde $c$ interpretujeme jako $c^{\mathcal{A}'} = e(x)$. Dle předpokladu platí $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e']$ pro všechna ohodnocení $e'$. Tedy $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e]$, což znamená $\mathcal{A}' \models \varphi[e]$ ( $e = e(x/c^{\mathcal{A}'})$ , z toho plyne $\mathcal{A}' \models \varphi(x/c)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e(x/c^{\mathcal{A}'})] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi[e]$ ).

Formule $\varphi$ neobsahuje $c$ (je nový), máme tedy i $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. $\square$

# 6.7 Extenze teorií

# Extenze teorie

Stejně jako ve výrokové logice, je-li $T$ teorie v jazyce $L$:

- extenze: $T'$ v jazyce $L' \supseteq L$ splňující $\mathrm{Csq}_L(T) \subseteq \mathrm{Csq}_{L'}(T')$
- jednoduchá: $L' = L$
- konzervativní: $\mathrm{Csq}_L(T) = \mathrm{Csq}_L(T') = \mathrm{Csq}_{L'}(T') \cap \mathrm{Fm}_L$
- ekvivalentní: $T'$ extenzí $T$ a $T$ extenzí $T'$ (obě v témž jazyce)

Jsou-li $T$, $T'$ ve stejném jazyce $L$:

- $T'$ je extenze $T$, právě když $\mathrm{M}_L(T') \subseteq \mathrm{M}_L(T)$
- $T'$ je ekvivalentní s $T$, právě když $\mathrm{M}_L(T') = \mathrm{M}_L(T)$

Zvětšíme-li jazyk:

- ve výrokové logice: přidáváme/zapomínáme hodnoty pro nové prvovýroky
- v predikátové logice: expandujeme/redukujeme modely (přidáváme/zapomínáme nové relace, funkce, konstanty)

# Extenze teorie: sémantický popis

Mějme jazyky $L \subseteq L'$, $L$-teorii $T$ a $L'$-teorii $T'$:

(i) $T'$ je extenzí $T$ $\Leftrightarrow$ $L$-redukt každého modelu $T'$ je model $T$

(ii) $T'$ je konzervativní extenzí $T$ $\Leftrightarrow$ $T'$ je extenzí $T$, a každý model $T$ lze expandovat do $L'$ na nějaký model $T'$

**Poznámka:** Důkaz (ii) $\Leftarrow$ vynecháme (technický problém: model, který nelze expandovat $\rightsquigarrow$ $L$-sentence platná v $T$ ale ne v $T'$)

**Důkaz:** (i) $\Rightarrow$ Buď $\mathcal{A}'$ model $T'$, $\mathcal{A}$ jeho $L$-redukt. Protože $T'$ je extenzí, platí v ní, tedy i v $\mathcal{A}'$, každý axiom $\varphi \in T$. Ten ale obsahuje jen symboly z $L$, tedy platí i v $\mathcal{A}$.

(i) $\Leftarrow$ **Mějme:** $L$-sentenci $\varphi$, $T \models \varphi$. **Chceme:** $T' \models \varphi$. Pro lib. model $\mathcal{A}' \in \mathrm{M}_{L'}(T')$ víme, že jeho $L$-redukt $\mathcal{A}$ je modelem $T$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. Z toho plyne i $\mathcal{A}' \models \varphi$ (opět $\varphi$ je v $L$).

(ii) $\Leftarrow$ **Mějme:** $L$-sentenci $\varphi$, $T' \models \varphi$. **Chceme:** $T \models \varphi$. Každý $\mathcal{A} \in \mathrm{M}_L(T)$ lze expandovat na nějaký $\mathcal{A}' \in \mathrm{M}_{L'}(T')$. Víme, že $\mathcal{A}' \models \varphi$, takže i $\mathcal{A} \models \varphi$. Tím jsme dokázali $T \models \varphi$. $\square$

# Extenze o definice (neformálně)

- přidáme nový symbol, jehož význam je jednoznačně daný definující formulí (jako procedura/funkce v programování)
- pro relační symboly jednoduché, pro funkční symboly musíme navíc zaručit existenci a jednoznačnost funkční hodnoty

Ukážeme:

- je to konzervativní extenze, dokonce každý model původní teorie lze jednoznačně expandovat na model nové teorie
- každou formuli používající nové symboly lze přepsat na formuli v původním jazyce (tak, že jsou v extenzi ekvivalentní)

# Definice relačního symbolu

nový $n$-ární relační symbol $R$ lze definovat lib. formulí $\psi(x_1, \dots, x_n)$

- teorii v jazyce s rovností lze rozšířit o symbol $\neq$ definovaný formulí $\neg x_1 = x_2$; tj. požadujeme, aby: $x_1 \neq x_2 \leftrightarrow \neg x_1 = x_2$
- teorii uspořádání lze rozšířit o $<$ definovaný formulí $x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$; tj. platí: $x_1 < x_2 \leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge \neg x_1 = x_2$
- v aritmetice lze zavést $\leq$ takto: $x_1 \leq x_2 \leftrightarrow (\exists y)(x_1 + y = x_2)$
- v uspořádaném stromu lze zavést unární predikát $\mathrm{Leaf}(x)$: $\mathrm{Leaf}(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)(x <_T y)$

Mějme teorii $T$ a formuli $\psi(x_1, \dots, x_n)$ v jazyce $L$. Označme jako $L'$ rozšíření jazyka $L$ o nový $n$-ární relační symbol $R$. Extenze teorie $T$ o definici $R$ formulí $\psi$ je $L'$-teorie:

$$T' = T \cup \{R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)\}$$

# Definice relačního symbolu: vlastnosti

**Tvrzení:**

(i) $T'$ je konzervativní extenze $T$.

(ii) Pro každou $L'$-formuli $\varphi'$ existuje $L$-formule $\varphi$ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

**Důkaz:** (i) ihned ze sémantického popisu extenzí, neboť zřejmě každý model $T$ lze jednoznačně expandovat na model $T'$

(ii) atomickou podformuli s novým symbolem $R$, tj. tvaru $R(t_1, \ldots, t_n)$, nahradíme formulí

$$\psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$$

kde $\psi'$ je varianta $\psi$ zaručující substituovatelnost všech termů (např. přejmenujeme všechny vázané proměnné $\psi$ na zcela nové) $\square$

# Definice funkčního symbolu: příklady

vztah $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ definujeme formulí $\psi(x_1, \ldots, x_n)$; pro každý vstup $(x_1, \ldots, x_n)$ musí existovat jednoznačný výstup $y$

1. Teorie grup: binární funkční symbol $-_b$ pomocí $+$ a unárního $-$

$$x_1 -_b x_2 = y \;\leftrightarrow\; x_1 + (-x_2) = y$$

- zřejmě pro každá $x, y$ existuje jednoznačné $z$ splňující definici

2. Teorie lineárních uspořádání: binární funkční symbol min

$$\min(x_1, x_2) = y \leftrightarrow y \leq x_1 \wedge y \leq x_2 \wedge (\forall z)(z \leq x_1 \wedge z \leq x_2 \rightarrow z \leq y)$$

- existence a jednoznačnost platí díky linearitě $(x \leq y \vee y \leq x)$
- pouze v teorii uspořádání by nešlo o dobrou definici: $\min^{\mathcal{A}}(a_1, a_2)$ nemusí existovat

# Definice funkčního symbolu: definice

Mějme teorii $T$ a formuli $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ v jazyce $L$. Označme $L'$ rozšíření $L$ o nový $n$-ární funkční symbol $f$. Nechť platí:

- $T \models (\exists y)\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ (existence)
- $T \models \psi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \ldots, x_n, z) \rightarrow y = z$ (jednoznačnost)

Potom extenze teorie $T$ o definici $f$ formulí $\psi$ je $L'$-teorie:

$$T' = T \cup \{f(x_1, \ldots, x_n) = y \ \leftrightarrow \ \psi(x_1, \ldots, x_n, y)\}$$

- $\psi$ definuje v modelu $(n+1)$-ární relaci, ta musí být funkcí
- je-li $\psi$ tvaru $t(x_1, \ldots, x_n) = y$ pro term $t$, vždy to platí

**Tvrzení:**

(i) $T'$ je konzervativní extenze $T$.

(ii) Pro každou $L'$-formuli $\varphi'$ existuje $L$-formule $\varphi$ taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

**Důkaz:** (i) modely $T$ lze jednoznačně expandovat na modely $T'$

# Pokračování důkazu

(ii) stačí pro jediný výskyt symbolu $f$, jinak induktivně (je-li více vnořených výskytů $f(\dots f(\dots)\dots)$, potom od vnitřních k vnějším)

1. nahradíme term $f(t_1, \dots, t_n)$ novou proměnnou $z$: výsledek $\varphi^*$
2. $\varphi$ zkonstruujeme takto: $(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z))$
   (kde $\psi'$ je varianta $\psi$ zaručující substituovatelnost)

Ukážeme, že pro libovolný model $\mathcal{A} \models T'$ a ohodnocení $e$ platí:

$$\mathcal{A} \models \varphi'[e] \text{ právě když } \mathcal{A} \models \varphi[e]$$

Označme $a = (f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{A}}[e]$. Díky existenci a jednoznačnosti:

$$\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)[e] \text{ právě když } e(z) = a$$

Máme tedy: $\mathcal{A} \models \varphi'[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e]$ $\square$

# Definice konstantního symbolu

- speciální případ: funkční symbol arity 0
- extenze o definici konstantního symbolu $c$ formulí $\psi(y)$:

$$T' = T \cup \{c = y \leftrightarrow \psi(y)\}$$

- musí platit $T \models (\exists y)\psi(y)$ a $T \models \psi(y) \wedge \psi(z) \to y = z$
- platí stejná tvrzení

1. teorie v jazyce aritmetiky, rozšíříme o definici symbolu 1 formulí $\psi(y)$ tvaru $y = S(0)$, přidáme tedy axiom $1 = y \leftrightarrow y = S(0)$

2. teorie těles, nový symbol $\frac{1}{2}$, definice formulí $y \cdot (1+1) = 1$, tj. přidáním $\frac{1}{2} = y \leftrightarrow y \cdot (1+1) = 1$ ?

- není extenze o definici! neplatí existence: v tělese charakteristiky 2, např. $\mathbb{Z}_2$, nemá rovnice $y \cdot (1+1) = 1$ řešení
- ale v teorii těles charakteristiky různé od 2, tj. přidáme-li axiom $\neg(1+1=0)$, už ano; např. v $\mathbb{Z}_3$ máme $\frac{1}{2}^{\mathbb{Z}_3} = 2$

# Extenze o definice

$L'$-teorie $T'$ je extenzí $L$-teorie $T$ o definice, pokud vznikla postupnou extenzí o definice relačních a funkčních (vč. konstantních) symbolů.

**Tvrzení:** (snadno indukcí)

- Každý model $T$ lze jednoznačně expandovat na model $T'$.
- $T'$ je konzervativní extenze $T$.
- Pro $L'$-formuli $\varphi'$ existuje $L$-formule $\varphi$, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Příklad: $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$
$L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností, zavedeme $<$ a unární $-$ přidáním axiomů:

$$
\begin{aligned}
T' = T \cup \{-x = y \ &\leftrightarrow \ x + y = 0, \\
x < y \ &\leftrightarrow \ x \leq y \wedge \neg(x = y)\}
\end{aligned}
$$

Formule $-x < y$ v jazyce $L' = \langle +, -, 0, \leq, < \rangle$ s rovností je v $T'$ ekvivalentní formuli: $(\exists z)((z \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = 0)$

# 6.8 Definovatelnost ve struktuře

# Definovatelné množiny

- formule $\varphi$ s jednou volnou proměnnou $x$ ... "vlastnost" prvků
- ve struktuře definuje množinu prvků, které vlastnost splňují (tj. prvků $a$ takových, že $\varphi$ platí při ohodnocení kde $e(x) = a$)
- $\varphi(x, y)$ definuje binární relaci, atp.

Množina definovaná $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ve struktuře $\mathcal{A}$ (v témž jazyce):

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)]\}$$

Zkráceně píšeme: $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a})]\}$

- formule $\neg(\exists y)E(x, y)$ definuje v daném grafu množinu všech izolovaných vrcholů
- $(\exists y)(y \cdot y = x) \land \neg(x = 0)$ definuje v tělese $\mathbb{R}$ množinu všech kladných reálných čísel
- $x \leq y \land \neg(x = y)$ definuje v uspořádané množině $\langle S, \leq^S \rangle$ relaci ostrého uspořádání $<^S$

# Definovatelnost s parametry

- vlastnosti prvků relativně k jiným prvkům? nelze čistě syntakticky, ale můžeme dosadit prvky jako parametry
- zápis $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$: volné proměnné $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k$

Mějme $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ (kde $|\bar{x}| = n$, $|\bar{y}| = k$), strukturu $\mathcal{A}$ (v témž jazyce), $\bar{b} \in A^k$. Množina definovaná $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ s parametry $\bar{b}$ ve struktuře $\mathcal{A}$:

$$\varphi^{\mathcal{A},\bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}$$

Pro $B \subseteq A$ označíme $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ množinu všech množin definovatelných v $\mathcal{A}$ s parametry pocházejícími z $B$.

**Pozorování:** $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ je uzavřená na doplněk, průnik, sjednocení, a obsahuje $\emptyset$ a $A^n$: je to podalgebra potenční algebry $\mathcal{P}(A^n)$.

Např. pro $\varphi(x, y) = E(x, y)$ a vrchol $v \in V(\mathcal{G})$ je $\varphi^{\mathcal{G},v}(x, y)$ množina všech sousedů vrcholu $v$.

# Aplikace: databázové dotazy

- relační databáze: jedna nebo více tabulek, také relace
- řádky tabulky jsou záznamy (records), také tice (tuples)
- struktura v čistě relačním jazyce

**Movies**

| title | director | actor |
|---|---|---|
| Forrest Gump | R. Zemeckis | T. Hanks |
| Philadelphia | J. Demme | T. Hanks |
| Batman Returns | T. Burton | M. Keaton |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

**Program**

| cinema | title | time |
|---|---|---|
| Atlas | Forrest Gump | 20:00 |
| Lucerna | Forrest Gump | 21:00 |
| Lucerna | Philadelphia | 18:30 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

# Příklad SQL dotazu

- SQL dotaz v nejjednodušší formě je formule (pomineme např. agregační funkce)
- výsledek je množina definovaná touto formulí (s parametry)

"Kdy a kde můžeme vidět film s Tomem Hanksem?"

```
select Program.cinema, Program.time from Program, Movies where
Program.title = Movies.title and Movies.actor = 'T. Hanks'
```

- výsledek je množina $\varphi^{\text{Database},\text{'T. Hanks'}}(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$
- definovaná ve struktuře Database $= \langle D, \mathrm{Program}, \mathrm{Movies}\rangle$
- jejíž doména je $D = \{\texttt{'Atlas'}, \texttt{'Lucerna'}, \ldots, \texttt{'M. Keaton'}\}$
- s parametrem `'T. Hanks'`,
- definující formule $\varphi(x_{\text{cinema}}, x_{\text{time}}, y_{\text{actor}})$:

$$(\exists y_{\text{title}})(\exists y_{\text{director}})(\mathrm{Program}(x_{\text{cinema}}, y_{\text{title}}, x_{\text{time}}) \wedge \mathrm{Movies}(y_{\text{title}}, y_{\text{director}}, y_{\text{actor}}))$$

# 6.9 Vztah výrokové a predikátové logiky

## Teorie Booleových algeber $L = \langle -, \wedge, \vee, \bot, \top \rangle$ s rovností

- asociativita $\wedge$ a $\vee$:
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
- komutativita $\wedge$ a $\vee$:
$$x \wedge y = y \wedge x$$
$$x \vee y = y \vee x$$
- distributivita $\wedge$ vůči $\vee$, $\vee$ vůči $\wedge$:
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
- absorpce:
$$x \wedge (x \vee y) = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x$$
- komplementace:
$$x \wedge (-x) = \bot$$
$$x \vee (-x) = \top$$
- netrivialita:
$$\neg(\bot = \top)$$

- dualita: záměnou $\wedge$ s $\vee$ a $\bot$ s $\top$ získáme tytéž axiomy
- nejmenší model: 2-prvková B. algebra $\langle \{0, 1\}, f_\neg, f_\wedge, f_\vee, 0, 1 \rangle$
- konečné modely, až na izomorfismus ($f^n$ je $f$ po složkách):
$$\langle \{0, 1\}^n, f_\neg^n, f_\wedge^n, f_\vee^n, (0, \dots, 0), (1, \dots, 1) \rangle$$
- jsou izomorfní potenčním algebrám $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ pomocí bijekce mezi podmnožinami a charakteristickými vektory

## Vztah výrokové a predikátové logiky

- výrokovou logiku lze ‘simulovat’ v predikátové logice v teorii Booleových algeber
- výroky jsou Booleovské termy, konstanty $\perp, \top$ představují pravdu a lež
- pravdivostní hodnota výroku (při daném pravdivostním ohodnocení) je hodnota termu v 2-prvkové Booleově algebře
- kromě toho, algebra výroků daného výrokového jazyka nebo teorie je Booleovou algebrou (i pro nekonečné jazyky)

## Na druhou stranu. . .

- máme-li otevřenou formuli $\varphi$ (bez rovnosti), můžeme reprezentovat atomické výroky pomocí prvovýroků, a získat tak výrok, který platí, právě když platí $\varphi$
- viz Kapitola 8: Rezoluce v predikátové logice, kde se nejprve zbavíme kvantifikátorů pomocí tzv. Skolemizace
- výrokovou logiku lze také zavést jako fragment logiky predikátové, pokud povolíme nulární relace
- $A^0 = \{\emptyset\}$, tedy na libovolné množině jsou právě dvě nulární relace $R^A \subseteq A^0$: $R^A = \emptyset = 0$ a $R^A = \{\emptyset\} = \{0\} = 1$