Čtvrtá přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2024

Čtvrtá přednáška

Program

- tablo důkaz
- korektnost a úplnost
- věta o kompaktnosti

Materiály

Zápisky z přednášky, Sekce 4.3-4.7 z Kapitoly 4 (Sekci 4.8 zatím přeskočíme)

4.3 Tablo důkaz

Formální definice tabla

- položka je nápis $\mathrm{T}\varphi$ nebo $\mathrm{F}\varphi$, kde φ je nějaký výrok
- konečné tablo z teorie T je uspořádaný, položkami označkovaný strom zkonstruovaný aplikací konečně mnoha následujících pravidel:
  - jednoprvkový strom s libovolnou položkou je tablo z teorie T
  - pro libovolnou položku P na libovolné větvi V můžeme na konec větve V připojit atomické tablo pro položku P
  - na konec libovolné větve můžeme připojit položku $\mathrm{T}\alpha$ pro libovolný axiom $\alpha \in T$
- tablo z teorie T je buď konečné, nebo i nekonečné: v tom případě je spočetné a definujeme ho jako $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde:
  - τ_i jsou konečná tabla z T
  - τ_0 je jednoprvkové tablo
  - τ_{i+1} vzniklo z τ_i v jednom kroku
- tablo pro položku P je tablo, které má položku P v kořeni

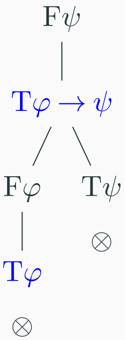
Dokončené a sporné tablo

- Tablo je sporné, pokud je každá jeho větev sporná.
- Větev je sporná, pokud obsahuje položky $\mathrm{T}\psi$ a $\mathrm{F}\psi$ pro nějaký výrok ψ, jinak je bezesporná.
- Tablo je dokončené, pokud je každá jeho větev dokončená.
- Větev je dokončená, pokud je sporná, nebo
  - každá její položka je na této větvi redukovaná,
  - a zároveň obsahuje položku $\mathrm{T}\alpha$ pro každý axiom $\alpha \in T$.
- Položka P je redukovaná na větvi V procházející touto položkou, pokud
  - je tvaru $\mathrm{T}p$ resp. $\mathrm{F}p$ pro nějaký prvovýrok $p \in \mathbb{P}$,
  - nebo se vyskytuje na V jako kořen atomického tabla (byť ho podle konvence nezakreslujeme), tj., typicky, při konstrukci tabla již došlo k jejímu rozvoji na V.

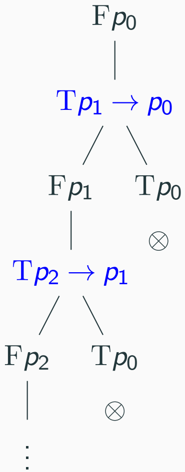
Tablo důkaz a tablo zamítnutí

- tablo důkaz výroku φ z teorie T je sporné tablo z teorie T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni
- pokud existuje, je φ (tablo) dokazatelný z T, píšeme $T \vdash \varphi$
- podobně, tablo zamítnutí je sporné tablo s $\mathrm{T}\varphi$ v kořeni
- existuje-li, je φ (tablo) zamítnutelný z T, tj. platí $T \vdash \neg\varphi$

Příklad: tablo důkaz



- tablo důkaz výroku ψ z $T = \{\varphi, \varphi \to \psi\}$
- položky vycházející z axiomů jsou modře
- ukázali jsme tedy $T \vdash \psi$
- φ, ψ jsou libovolné pevně dané výroky
- tím jsme dokázali tzv. větu o dedukci



- dokončené tablo pro výrok p_0 z teorie $T = \{p_{n+1} \to p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- nejlevější větev je dokončená a bezesporná
- sestává z položek $\mathrm{T}p_{i+1} \to p_i$ a $\mathrm{F}p_i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$
- shoduje se s modelem $v = (0, 0, \dots)$, tj. $v : \mathbb{P} \to \{0, 1\}$ kde $v(p_i) = 0$ pro vš. i
- máme protipříklad ukazující, že $T \not\models p_0$

4.4 Konečnost a systematičnost důkazů

Konečnost a systematičnost důkazů

Dokážeme:

- existuje-li tablo důkaz, existuje i konečný tablo důkaz
- existuje algoritmus, který umí vždy zkonstruovat dokončené tablo, tzv. systematické tablo
- tento algoritmus tedy zkonstruuje tablo důkaz, pokud existuje

  (zde potřebujeme *korektnost* a *úplnost*, ty dokážeme později)

  (pokud tablo důkaz neexistuje, algoritmus se nemusí zastavit)

Dokončení tabla: v čem je problém?

Pro konečnou T je snadné zkonstruovat dokončené tablo:

- na začátku použijeme všechny axiomy
- při redukci položek se výroky v nich zkracují
- stačí nedělat zbytečné kroky

Pro nekonečnou T bychom ale mohli zkonstruovat nekonečné tablo, a přitom:

- nikdy nepoužít některý axiom, nebo
- nikdy se nedostat k redukci některé položky

Myšlenka systematického tabla: na všechny se dostane, střídáme

- redukce následující položky (po úrovních, zleva doprava) na všech bezesporných větvích, které jí procházejí
- přidání následujícího axiomu na všechny bezesporné větve (T je spočetná, axiomy libovolně očíslujeme)

Definice systematického tabla

Systematické tablo z teorie $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ pro položku R je tablo $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$, kde τ_0 je jednoprvkové tablo s položkou R, a pro každé $i \geq 0$:

- buď P nejlevější položka v co nejmenší úrovni, která není redukovaná na nějaké bezesporné větvi procházející P
- nejprve definujeme τ_i' jako tablo vzniklé z τ_i připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev procházející P
- pokud taková položka P neexistuje, potom $\tau_i' = \tau_i$
- tablo τ_{i+1} vznikne z τ_i' připojením $\mathrm{T}\alpha_{i+1}$ na každou bezespornou větev
- to v případě, že $i < |T|$, jinak (je-li T konečná a už jsme použili všechny axiomy) definujeme $\tau_{i+1} = \tau_i'$

Dokončenost systematického tabla

Lemma: Systematické tablo je dokončené.

Důkaz: Jsou všechny větve dokončené?

- Sporné větve jsou dokončené z definice.
- Bezesporná větev:
  - obsahuje $\mathrm{T}\alpha_i$ pro všechna i (připojeno v i-tém kroku)
  - každá položka je na ní zredukovaná (leží-li v hloubce d, dostali jsme se k ní nejdéle v kroku $i = 2^{d+1} - 1$)
- Tedy i všechny bezesporné větve jsou dokončené. $\square$

Konečnost sporu

Věta (Konečnost sporu): Je-li $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ sporné tablo, potom existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že τ_n je sporné konečné tablo.

Důkaz: Buď S množina všech vrcholů, nad kterými (ve stromovém uspořádání) není spor, tj. dvojice položek $\mathrm{T}\psi$, $\mathrm{F}\psi$.

- Kdyby byla S nekonečná: Podle Königova lemmatu pro podstrom τ na množině S máme nekonečnou, bezespornou větev v S. To ale dává i bezespornou větev v τ, což je spor.
- Množina S je tedy konečná, celá leží v hloubce $\leq d$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$. Každý vrchol na úrovni $d + 1$ už má nad sebou spor.
- Zvolme n tak, že τ_n už obsahuje všechny vrcholy τ z prvních $d + 1$ úrovní. Potom každá větev tabla τ_n je sporná. $\square$

Důsledky konečnosti sporu

Tedy: Pokud neprodlužujeme už sporné větve (např. pro systematické tablo), potom sporné tablo je konečné.

Důsledek (Konečnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom existuje i konečný tablo důkaz φ z T.

Důkaz: Platí $\tau = \tau_n$, neboť sporné tablo už neměníme. □

Důsledek (Systematičnost důkazů): Pokud $T \vdash \varphi$, potom systematické tablo je (konečným) tablo důkazem φ z T.

Důkaz bude až v příští sekci, chybí nám dvě fakta:

- je-li φ dokazatelná z T, potom v T platí (Věta o korektnosti)
- pokud by systematické tablo mělo bezespornou větev, šel by z ní vyrobit protipříklad (to je klíč k důkazu Věty o úplnosti)1

4.5 Korektnost a úplnost

Korektnost a úplnost

Nyní ukážeme, že dokazatelnost je totéž, co platnost, tj. pro každou teorii T a výrok φ:

$$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$$

Rozdělíme na dvě implikace:

- $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{T} \models \varphi$ (korektnost) *"co jsme dokázali, platí"*
- $T \models \varphi \Rightarrow \mathrm{T} \vdash \varphi$ (úplnost) *"co platí, lze dokázat"*

Korektnost: pomocné lemma

Model v se shoduje

- s položkou P, pokud $P = \mathrm{T}\varphi$ a $v \models \varphi$, nebo $P = \mathrm{F}\varphi$ a $v \not\models \varphi$
- s větví V, pokud se shoduje s každou položkou na této větvi

Lemma: Shoduje-li se model teorie T s položkou v kořeni tabla z teorie T, potom se shoduje s některou větví.

Důkaz: Indukcí podle kroků i při konstrukci tabla $\tau = \bigcup_{i \geq 0} \tau_i$ najdeme posloupnost větví $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$ takovou, že:

- V_i je větev v tablu τ_i shodující se s modelem v
- V_{i+1} je prodloužením V_i

Hledaná větev v τ je potom $V = \bigcup_{i \geq 0} V_i$.

Báze indukce: Model v se shoduje s kořenem τ, tj. s (jednoprvkovou) větví V_0 v τ_0.

Pokračování důkazu pomocného lemmatu

Indukční krok:

Pokud τ_{i+1} vzniklo z τ_i bez prodloužení V_i, definujeme $V_{i+1} = V_i$.

Pokud τ_{i+1} vzniklo připojením $\mathrm{T}\alpha$ (pro axiom $\alpha \in T$) na konec V_i, definujeme V_{i+1} jako tuto prodlouženou větev. Protože $v \models T$, máme i $v \models \alpha$, tedy v se shoduje i s novou položkou.

Nechť τ_{i+1} vzniklo připojením atomického tabla pro položku P na konec V_i. Protože se v shoduje s P (která leží na V_i), shoduje se i s kořenem připojeného atomického tabla, a proto se shoduje i s některou z jeho větví. (Ověříme si pro všechna atomická tabla.) Definujeme V_{i+1} jako prodloužení V_i o tuto větev atomického tabla. $\square$

Věta o korektnosti [tablo metody ve výrokové logice]

Věta (O korektnosti): Je-li výrok φ tablo dokazatelný z teorie T, potom je φ pravdivý v T, tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathrm{T} \models \varphi$.

Myšlenka důkazu: Protipříklad by se shodoval s některou z větví tablo důkazu, ty jsou ale všechny sporné.

Důkaz: Sporem, nechť $T \not\models \varphi$, tj. existuje $v \in \mathrm{M}(T)$, že $v \not\models \varphi$.

Protože je $T \vdash \varphi$, existuje tablo důkaz φ z T, což je sporné tablo z T s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni.

Model v se shoduje s kořenem $\mathrm{F}\varphi$, tedy podle Lemmatu se shoduje s nějakou větví V. Všechny větve jsou ale sporné. Takže na V jsou $\mathrm{T}\psi$ a $\mathrm{F}\psi$ (pro nějaký výrok ψ), a model v se s těmito položkami shoduje. Máme $v \models \psi$ a zároveň $v \not\models \psi$, což je spor. $\square$

Úplnost: pomocné lemma

selže-li dokazování, dostaneme bezespornou, dokončenou větev v tablu z T s $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni; ukážeme, že dává protipříklad:

Kanonický model pro bezespornou, dokončenou větev V je model

$$v(p) = \begin{cases} 1 \text{ pokud se na } V \text{ vyskytuje položka } \mathrm{T}p \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

Lemma: Kanonický model pro (bezespornou, dokončenou) větev V se shoduje s V.

(tento model tedy musí splňovat všechny axiomy T, ale protože se shoduje s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni, neplatí v něm výrok φ)

Důkaz pomocného lemmatu

Důkaz: Indukcí podle struktury výroků v položkách. Báze indukce:

- je-li $P = \mathrm{T}p$ pro prvovýrok p, máme $v(p) = 1$, shoduje se
- je-li $P = \mathrm{F}p$, potom na V nemůže být $\mathrm{T}p$ (byla by sporná), máme tedy $v(p) = 0$, shoduje se

Indukční krok: rozebereme dva případy, ostatní jsou obdobné

- $P = \mathrm{T}\varphi \wedge \psi$. Protože je V dokončená, je na ní P redukovaná. To znamená, že se na V vyskytují i položky $\mathrm{T}\varphi$ a $\mathrm{T}\psi$. Podle indukčního předpokladu se s nimi v shoduje: $v \models \varphi$ a $v \models \psi$. Takže platí i $v \models \varphi \wedge \psi$ a v se shoduje s P.
- $P = \mathrm{F}\varphi \wedge \psi$. Protože je P na V redukovaná, vyskytuje se na V položka $\mathrm{F}\varphi$ nebo položka $\mathrm{F}\psi$. Platí tedy $v \not\models \varphi$ nebo $v \not\models \psi$, z čehož plyne $v \not\models \varphi \wedge \psi$ a v se shoduje s P. $\square$

Věta o úplnosti (+ důkaz systematičnosti)

Věta (O úplnosti): Je-li výrok φ pravdivý v teorii T, potom je tablo dokazatelný z T, tj. $T \models \varphi \;\Rightarrow \mathrm{T} \vdash \varphi$.

Důkaz: Ukážeme, že libovolné dokončené (např. systematické) tablo z T s $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni je nutně sporné, tedy je tablo důkazem.

Sporem: Není-li sporné, má bezespornou (dokončenou) větev V, a dle Lemmatu se s ní kanonický model pro V shoduje.

Protože je V dokončená, obsahuje $\mathrm{T}\alpha$ pro všechny axiomy T. Model v tedy splňuje všechny axiomy a máme $v \models T$.

Protože se ale v shoduje i s položkou $\mathrm{F}\varphi$ v kořeni, máme $v \not\models \varphi$, což dává protipříklad, a máme $T \not\models \varphi$, spor. $\square$

Dokázali jsme i Důsledek o systematičnosti důkazů: Z důkazu vidíme, že i systematické tablo pro položku $\mathrm{F}\varphi$ je nutně sporné, a je tedy tablo důkazem. $\square$

4.6 Důsledky korektnosti a úplnosti

$\vdash = \models$

Syntaktickou analogií důsledků jsou teorémy:

$$\mathrm{Thm}_{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \vdash \varphi\}$$

Z korektnosti a úplnosti okamžitě dostáváme:

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$
- $\mathrm{Thm}_{\mathbb{P}}(T) = \mathrm{Csq}_{\mathbb{P}}(T)$

Všude můžeme nahradit 'platnost' pojmem 'dokazatelnost'. Např:

- T je sporná, je-li v ní dokazatelný spor (tj. $T \vdash \bot$)
- T je kompletní, je-li pro každý výrok buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$, ale ne obojí (jinak by byla sporná)

Věta (O dedukci): $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \to \psi$.

Důkaz: Stačí dokázat: $T, \varphi \models \psi \Leftrightarrow T \models \varphi \to \psi$. To je snadné. $\square$

4.7 Věta o kompaktnosti

Kompaktnost

Věta (O kompaktnosti): Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Důkaz: $\Rightarrow$ Snadné: Model T je zjevně modelem každé její části.

$\Leftarrow$ Nepřímo: buď T sporná, najdeme spornou konečnou $T' \subseteq T$.

Z úplnosti víme, že $T \vdash \bot$, tedy existuje i konečný tablo důkaz τ výroku $\bot$ z T. Konstrukce τ má konečně mnoho kroků, použili jsme tedy jen konečně mnoho axiomů z T. Definujme:

$$T' = \{\alpha \in T \mid \mathrm{T}\alpha \text{ je položka v tablu } \tau\}$$

Tedy τ je tablo jen z teorie T', máme tablo důkaz $T' \vdash \bot$, dle korektnosti je T' sporná. $\square$

Aplikace kompaktnosti

vlastnost nekonečného objektu $\mathcal{O}$

$$\Updownarrow$$

vlastnost všech konečných podobjektů $\mathcal{O}'$

- vlastnost popíšeme pomocí (nekonečné) teorie T
- ke každé konečné $T' \subseteq T$ sestrojíme konečný podobjekt $\mathcal{O}'$
- $\mathcal{O}'$ splňuje danou vlastnost
- to nám dává model T'
- dle Věty o kompaktnosti má i T model
- což ukazuje, že i nekonečný objekt $\mathcal{O}$ splňuje vlastnost

Věta o kompaktnosti má mnoho aplikací (několik z nich uvidíme později), následující příklad chápejte jako 'šablonu'.

Aplikace kompaktnosti: příklad

Důsledek: Spočetně nekonečný graf je bipartitní, právě když je každý jeho konečný podgraf bipartitní.

Důkaz: $\Rightarrow$ Každý podgraf bipartitního grafu je bipartitní.

$\Leftarrow$ G je bipartitní, právě když je obarvitelný 2 barvami. Mějme jazyk $\mathbb{P} = \{p_v \mid v \in V(G)\}$ (kde p_v je barva v) a uvažme teorii

$$T = \{p_u \leftrightarrow \neg p_v \mid \{u, v\} \in E(G)\}$$

Zřejmě G je bipartitní, právě když T má model. Dle Věty o kompaktnosti stačí ukázat, že každá konečná $T' \subseteq T$ má model.

Buď G' podgraf G indukovaný na vrcholech, o kterých T' mluví:

$$V(G') = \{v \in V(G) \mid p_v \in \mathrm{Var}(T')\}$$

Protože je T' konečná, je G' také konečný, tedy je dle předpokladu 2-obarvitelný. Libovolné 2-obarvení $V(G')$ ale určuje model T'. $\square$

Zatím přeskočíme: 4.8 Hilbertovský kalkulus

Hilbertovský deduktivní systém

- jiný, původní dokazovací systém
- používá jen logické spojky $\neg$, $\to$
- schémata logických axiomů (φ, ψ, χ jsou libovolné výroky)
  (i) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  (ii) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  (iii) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
- odvozovací pravidlo: tzv. modus ponens

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$

- hilbertovský důkaz výroku φ z teorie T je konečná posloupnost výroků $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$, ve které pro každé $i \leq n$:
  - φ_i je logický axiom, nebo
  - φ_i je axiom teorie ($\varphi_i \in T$), nebo
  - φ_i lze odvodit z předchozích pomocí odvozovacího pravidla
- existuje-li hilbertovský důkaz, píšeme: $T \vdash_H \varphi$

Příklad hilbertovského důkazu

Ukažme, že pro teorii $T = \{\neg\varphi\}$ a pro libovolný výrok ψ platí:

$$T \vdash_H \varphi \to \psi$$

Hilbertovským důkazem je následující posloupnost výroků:

1. $\neg\varphi$ — *axiom teorie*
2. $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ — *logický axiom (i)*
3. $\neg\psi \to \neg\varphi$ — *modus ponens na 1. a 2.*
4. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ — *logický axiom (iii)*
5. $\varphi \to \psi$ — *modus ponens na 3. a 4.*

Korektnost a úplnost

Věta (o korektnosti hilbertovského kalkulu): $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Důkaz: Indukcí dle délky důkazu ukážeme, že každý výrok φ_i z důkazu (tedy i $\varphi_n = \varphi$) platí v T.

- Je-li φ_i logický axiom, $T \models \varphi_i$ platí protože logické axiomy jsou tautologie.
- Je-li $\varphi_i \in T$, jistě platí $T \models \varphi_i$.
- Získáme-li φ_i pomocí modus ponens z φ_j a $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$ (pro nějaká $j, k < i$), víme z indukčního předpokladu, že platí $T \models \varphi_j$ a $T \models \varphi_j \rightarrow \varphi_i$. Potom ale platí i $T \models \varphi_i$. (Modus ponens je korektní odvozovací pravidlo) $\square$

Věta (o úplnosti hilbertovského kalkulu): $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash_H \varphi$

Důkaz vynecháme.