

Kapitola 1

Teorie modelů

V této kapitole se trochu vzdálíme typickým aplikacím logiky v informatice¹ a nahlédneme o úroveň abstrakce výše, do oblasti *matematické logiky*. *Teorie modelů* se snaží popsat vztah mezi obecnými vlastnostmi teorií (predikátové logiky) a tříd jejich modelů. Nevyhneme se práci s nekonečnými teoriemi a s nekonečnými strukturami. Jde jen o ukázkou několika vybraných výsledků, které jsou pro nás dostupné. Ani se nepokusíme obsáhnout všechny hlavní oblasti teorie modelů, která je velmi bohatá a hluboká. Do této kapitoly jsme také přidali materiál týkající se vlastností modelů, který se nehodil jinam.

1.1 Elementární ekvivalence

Nejprve se podíváme na několik vlastností souvisejících s pojmem *elementární ekvivalence*. Připomeňme, že L -struktury \mathcal{A} a \mathcal{B} jsou *elementárně ekvivalentní* ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), pokud v nich platí tytéž L -sentence.

V teorii modelů nás často zajímá, jaké vlastnosti (sentence) platí v dané, konkrétní struktuře:

Definice 1.1.1 (Teorie struktury). Mějme L -strukturu \mathcal{A} . *Teorie struktury* \mathcal{A} , značíme $\text{Th}(\mathcal{A})$ je množina všech L -sentencí platných v \mathcal{A} :

$$\text{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ je } L\text{-sentence a } \mathcal{A} \models \varphi\}$$

Příklad 1.1.2. Jako důležitý příklad vezměme *standardní model aritmetiky*, strukturu $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$. Teorii $\text{Th}(\mathbb{N})$ říkáme *aritmetika přirozených čísel*. V následující kapitole si ukážeme, že je *(algoritmicky) nerozhodnutelná*.²

Několik jednoduchých vlastností teorie struktury shrneme v následujícím pozorování:

Pozorování 1.1.3. *Nechť \mathcal{A} je L -struktura a T je L -teorie.*

- (i) *Teorie $\text{Th}(\mathcal{A})$ je kompletní.*
- (ii) *Je-li $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_L(T)$, potom $\text{Th}(\mathcal{A})$ je (kompletní) jednoduchá extenze teorie T .*

¹Například použití rezoluce k řešení otázky, zda v dané konečné teorii T platí daná sentence φ .

²Teorie T je *(algoritmicky) rozhodnutelná*, pokud existuje algoritmus, který pro každou vstupní sentenci φ doběhne a odpoví, zda $T \models \varphi$.

(iii) Pokud $\mathcal{A} \in M_L(T)$ a T je kompletní, potom je $\text{Th}(\mathcal{A})$ ekvivalentní s T , v tom případě $\text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Csq}_L(T)$.

Pomocí pojmu *teorie struktury* můžeme také vyjádřit elementární ekvivalenci, pro L -struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} platí:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \text{ právě když } \text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B}).$$

Příklad 1.1.4. Podívejme se standardní uspořádání reálných, racionálních, a celých čísel, tj. na struktury $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$. Jak jsme již zmínili v Příkladu ??, není těžké ukázat, že $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ (pomocí *hustoty* těchto uspořádání). Struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ a $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ale elementárně ekvivalentní nejsou: V $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ má každý prvek bezprostředního následníka, což v $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ neplatí. Pro následující sentenci φ tedy máme $\varphi \in \text{Th}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle)$ ale $\varphi \notin \text{Th}(\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle)$:

$$\varphi = (\forall x)(\exists y)(x \leq y \wedge \neg x = y \wedge (\forall z)(x \leq z \rightarrow z = x \vee y \leq z))$$

1.1.1 Kompletní jednoduché extenze

Máme-li teorii T , zajímá nás, jak vypadají její modely. Připomeňme, že:

- Teorie je *kompletní*, právě když má jediný model až na elementární ekvivalenci.³
- Modely teorie T až na elementární ekvivalenci jednoznačně odpovídají kompletním jednoduchým extenzím T .

Kompletní jednoduché extenze L -teorie T jsou tedy tvaru $\text{Th}(\mathcal{A})$ pro $\mathcal{A} \in M_L(T)$, a (jak jsme už zmínili výše) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ právě když $\text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B})$. Místo hledání všech modelů tedy stačí najít všechny kompletní jednoduché extenze.

Tvrzení 1.1.5. *Pokud lze efektivně (algoritmicky) popsat všechny kompletní jednoduché extenze⁴ efektivně dané teorie T ,⁵ potom je T (algoritmicky) rozhodnutelná.*

Důkaz. Pro danou sentenci φ buď $T \vdash \varphi$, nebo existuje protipříklad $\mathcal{A} \not\models \varphi$, tedy kompletní jednoduchá extenze T_i teorie T taková, že $T_i \not\models \varphi$. Z kompletnosti ale plyne, že $T_i \vdash \neg\varphi$. Náš algoritmus bude paralelně konstruovat tablo důkaz φ z T a tablo důkaz $\neg\varphi$ ze všech kompletních jednoduchých extenzí T_1, T_2, \dots teorie T .⁶ Víme, že alespoň jedno z paralelně konstruovaných tabel je sporné, a můžeme předpokládat, že konečné (neprodlužujeme-li sporné větve tabla), tedy algoritmus ho po konečně mnoha krocích zkonstruuje. \square

Schopnost efektivně popsat všechny kompletní jednoduché extenze je poměrně vzácná, a vyžaduje silné předpoklady. Přesto to lze provést u mnoha důležitých teorií. Uveďme jeden příklad: *teorii hustého lineárního uspořádání (dense linear order)*.

³Tedy všechny její modely jsou elementárně ekvivalentní.

⁴Představte si algoritmus, který pro daná vstupní i, j odpoví j -tý axiom i -té kompletní jednoduché extenze (v nějakém pevném očíslování); takový algoritmus ne vždy existuje!

⁵ T může být nekonečná, ale musí existovat algoritmus, který generuje všechny axiomy T .

⁶Nevadí, že je jich nekonečně mnoho, můžeme využít tzv. *dovetailing*: Provedeme 1. krok konstrukce 1. tabla, potom 2. krok 1. tabla a 1. krok 2. tabla, 3. krok 1. tabla, 2. krok 2. tabla, 1. krok 3. tabla, atd.

Příklad: DeLO*

Teorie *hustého lineárního uspořádání* (*DeLO**) je extenze teorie uspořádání o následující axiomy:

- axiom *linearity* (někdy se mu říká také *dichotomie*):

$$x \leq y \vee y \leq x$$

- axiom *hustoty*

$$x \leq y \wedge \neg x = y \rightarrow (\exists z)(x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg z = x \wedge \neg z = y)$$

Někdy se přidává i axiom *netriviality* $(\exists x)(\exists y)(\neg x = y)$ zakazující jednoprvkový model. Tato teorie není kompletní, umíme ale popsat všechny její kompletní jednoduché extenze:

Tvrzení 1.1.6. *Mějme sentence $\varphi = (\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ a $\psi = (\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ vyjadřující existenci minimálního resp. maximálního prvku. Následující čtyři teorie jsou právě všechny kompletní jednoduché extenze teorie DeLO*:*

- $\text{DeLO} = \text{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}$
- $\text{DeLO}^+ = \text{DeLO}^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}$
- $\text{DeLO}^- = \text{DeLO}^* \cup \{\varphi, \neg\psi\}$
- $\text{DeLO}^\pm = \text{DeLO}^* \cup \{\varphi, \psi\}$

Stačí ukázat, že tyto čtyři teorie jsou kompletní. Potom už je zřejmé, že žádná další kompletní jednoduchá extenze DeLO* nemůže existovat. Jak vysvětlíme v Sekci ??, jejich kompletnost plyne z faktu, že jsou ω -kategorické, tj. mají jediný spočetný model až na elementární ekvivalenci.

Z Tvrzení ?? potom plyne rozhodnutelnost:

Důsledek 1.1.7. *Teorie DeLO* je (algoritmicky) rozhodnutelná.*

1.1.2 Důsledky Löwenheim-Skolemovy věty

[TODO]

V Sekci ?? jsme dokázali tzv. Löwenheim-Skolemovu větu, konkrétně její variantu pro jazyky bez rovnosti:

Věta (Löwenheim-Skolemova). *Je-li L spočetný jazyk bez rovnosti, potom každá bezesporná L -teorie má spočetně nekonečný model.*

Pomocí kanonického modelu (s rovností) jsme dříve dokázali následující větu.

Věta *Nechť T je bezesporná teorie spočetného jazyka L . Je-li L bez rovnosti, má T model, který je spočetně nekonečný. Je-li L s rovností, má T model, který je spočetný.*

Důsledek *Ke každé struktuře A spočetného jazyka bez rovnosti existuje*

spočetně nekonečná elementárně ekvivalentní struktura \mathcal{B} .

Důkaz Teorie $\text{Th}(\mathcal{A})$ je bezesporná, neboť má model \mathcal{A} . Dle předchozí věty má spočetně nek. model \mathcal{B} . Jelikož je teorie $\text{Th}(\mathcal{A})$ kompletní, je $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. \square

Důsledek *Ke každé nekonečné struktuře \mathcal{A} spočetného jazyka s rovností existuje spočetně nekonečná elementárně ekvivalentní struktura \mathcal{B} .*

Důkaz Obdobně jako výše. Jelikož v \mathcal{A} neplatí sentence “existuje právě n prvků” pro žádné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, není \mathcal{B} konečná, tedy je nekonečná. \square

1.1.3 Příklad: Spočetné algebraicky uzavřené těleso

[TODO]

Řekneme, že těleso \mathcal{A} je *algebraicky uzavřené*, pokud v něm každý polynom (nenulového stupně) má kořen, tj. pro každé $n \geq 1$ platí

$$\mathcal{A} \models (\forall x_{n-1}) \dots (\forall x_0) (\exists y) (y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + x_1 \cdot y + x_0 = 0)$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \dots \cdot y$ (\cdot aplikováno $(k-1)$ -krát).

Např. těleso $\underline{\mathbb{C}} = \langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je algebraicky uzavřené, zatímco tělesa $\underline{\mathbb{R}}$ a $\underline{\mathbb{Q}}$ nejsou (neboť polynom $x^2 + 1$ v nich nemá kořen).

Důsledek *Existuje spočetné algebraicky uzavřené těleso.*

Důkaz Dle předchozího důsledku existuje spočetná struktura (nekonečná), která je elementárně ekvivalentní s tělesem $\underline{\mathbb{C}}$, tedy je to rovněž algebraicky uzavřené těleso. \square

1.2 Izomorfismus struktur

[TODO]

Izomorfismus struktur

Nechť \mathcal{A}, \mathcal{B} jsou struktury jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- Bijekce $h: A \rightarrow B$ je *izomorfismus* struktur \mathcal{A} a \mathcal{B} , pokud platí zároveň
 - (i) $h(f^A(a_1, \dots, a_n)) = f^B(h(a_1), \dots, h(a_n))$
pro každý n -ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a každé $a_1, \dots, a_n \in A$,
 - (ii) $R^A(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^B(h(a_1), \dots, h(a_n))$
pro každý n -ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a každé $a_1, \dots, a_n \in A$.
- \mathcal{A} a \mathcal{B} jsou *izomorfní* (via h), psáno $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$), pokud existuje izomorfismus h struktur \mathcal{A} a \mathcal{B} . Říkáme rovněž, že \mathcal{A} je *izomorfní s* \mathcal{B} .

- Automorfismus struktury \mathcal{A} je izomorfismus \mathcal{A} s \mathcal{A} .

Např. potenční algebra $\mathcal{P}(X) = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ s $X = n$ je izomorfní s Booleovou algebrou $\underline{n} = \langle {}^n2, -, \wedge_n, \vee_n, 0_n, 1_n \rangle$ via $h: A \mapsto \chi_A$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny $A \subseteq X$.

Izomorfismus a sémantika

Uvidíme, že izomorfismus zachovává sémantiku.

Tvrzení Necht' \mathcal{A}, \mathcal{B} jsou struktury jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. Bijekce $h: A \rightarrow B$ je izomorfismus \mathcal{A} a \mathcal{B} , právě když platí zároveň

- (i) $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$ pro každý term t a $e: \text{Var} \rightarrow A$,
- (ii) $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$ pro každou formuli φ a $e: \text{Var} \rightarrow A$.

Důkaz (\Rightarrow) Indukcí dle struktury termu t , respektive formule φ .

(\Leftarrow) Dosazením termu $f(x_1, \dots, x_n)$ do (i) či atomické formule $R(x_1, \dots, x_n)$ do (ii) pro ohodnocení $e(x_i) = a_i$ máme, že h vyhovuje def. izomorfismu. \square

Důsledek Pro každé struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} stejného jazyka,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

Poznámka Obrácená implikace obecně neplatí, např. $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, ale $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, neboť $|\mathbb{Q}| = \omega$ a $|\mathbb{R}| = 2^\omega$.

Konečné modely s rovností

Tvrzení Pro každé konečné struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} stejného jazyka s rovností,

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}.$$

Důkaz Je $|A| = |B|$, neboť lze vyjádřit “existuje právě n prvků”.

- Necht' \mathcal{A}' je expanze \mathcal{A} do jazyka $L' = L \cup \{c_a\}_{a \in A}$ o jména prvků z A .
- Ukážeme, že \mathcal{B} lze expandovat na \mathcal{B}' do jazyka L' tak, že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$. Pak zřejmě $h: a \mapsto c_a^{\mathcal{B}'}$ je izomorfismus \mathcal{A}' s \mathcal{B}' a tedy i izomorfismus \mathcal{A} s \mathcal{B} .
- Stačí ukázat, že pro každé $c_a^{A'} = a \in A$ existuje $b \in B$ t.ž. $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.
- Označme Ω množinu formulí $\varphi(x)$ t.ž. $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$.
- Jelikož je A konečné, existuje konečně formulí $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každé $\varphi \in \Omega$ je $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi_i$ pro nějaké i .
- Jelikož $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \models (\exists x) \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i$, existuje $b \in B$ t.ž. $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i[e(x/b)]$.
- Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ je $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$. \square

Důsledek Má-li kompletní teorie jazyka s rovností konečný model, jsou všechny její modely izomorfní.

1.2.1 Definovatelnost a automorfismy

[TODO]

Připomeňme si pojem definovatelné množiny, viz Sekce ??.

Definovatelnost a automorfismy

Ukážeme, že definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy.

Tvrzení Necht' $D \subseteq A^n$ je množina definovatelná ve struktuře \mathcal{A} z parametrů \bar{b} a h je automorfismus \mathcal{A} , který je identický na \bar{b} . Pak $h[D] = D$.

Důkaz Necht' $D = \varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$. Pak pro každé $\bar{a} \in A^{|\bar{x}|}$

$$\begin{aligned} \bar{a} \in D &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/h(\bar{b}))] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/\bar{b})] \Leftrightarrow h(\bar{a}) \in D. \quad \square \end{aligned}$$

Např. graf \mathcal{G} má právě jeden netrivi. automorfismus h zachovávající vrchol 0.

`files/5cyklus.pdf`

Navíc množiny $\{0\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ jsou definovatelné z parametru 0. Tedy

$$\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 4, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}.$$

1.3 Kategorie teorie

[TODO]

- *Izomorfní spektrum* teorie T je počet $I(\kappa, T)$ navzájem neizomorfních modelů teorie T pro každou kardinalitu κ .
- Teorie T je κ -kategorická, pokud má až na izomorfismus právě jeden model kardinality κ , tj. $I(\kappa, T) = 1$.

Tvrzení Teorie DeLO (tj. “bez konců”) je ω -kategorická.

Důkaz Necht' $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DeLO}$ s $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $B = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Indukcí dle n lze nalézt prosté parciální funkce $h_n \subseteq h_{n+1} \subset A \times B$ zachovávající uspořádání tak, že $\{a_i\}_{i < n} \subseteq \text{dom}(h_n)$ a $\{b_i\}_{i < n} \subseteq \text{rng}(h_n)$. Pak $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \cup h_n$. \square

Obdobně dostaneme, že např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\mathcal{A} \upharpoonright (0, 1]$, $\mathcal{A} \upharpoonright [0, 1)$, $\mathcal{A} \upharpoonright [0, 1]$ jsou až na izomorfismus všechny spočetné modely teorie DeLO^* . Pak

$$I(\kappa, \text{DeLO}^*) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \kappa \in \mathbb{N}, \\ 4 & \text{pro } \kappa = \omega. \end{cases}$$

1.3.1 ω -kategoricita a úplnost

[TODO]

Věta *Nechť jazyk L je spočetný.*

- (i) *Je-li teorie T jazyka L bez rovnosti ω -kategorická, je kompletní.*
- (ii) *Je-li teorie T jazyka L s rovností ω -kategorická a bez konečného modelu, je kompletní.*

Důkaz Každý model teorie T je elementárně ekvivalentní s nějakým spočetně nekonečným modelem T , ale ten je až na izomorfismus jediný.

Tedy všechny modely T jsou elementárně ekvivalentní, tj. T je kompletní. \square

Např. teorie $DeLO$, $DeLO^+$, $DeLO^-$, $DeLO^\pm$ jsou kompletní a jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie $DeLO^$.*

Poznámka Obdobné kritérium platí i pro vyšší kardinality než ω .

1.4 Axiomatizovatelnost

[TODO]

1.4.1 Axiomatizovatelnost

Axiomatizovatelnost

Zajímá nás, zda se daná část světa dá “dobře” popsat.

Nechť $K \subseteq M(L)$ je třída struktur jazyka L . Řekneme, že K je

- *axiomatizovatelná*, pokud existuje teorie T jazyka L s $M(T) = K$,
- *konečně axiomatizovatelná*, pokud je axiomatizovatelná konečnou teorií,
- *otevřeně axiomatizovatelná*, pokud je axiomatizovatelná otevřenou teorií,
- *teorie T je konečně (otevřeně) axiomatizovatelná*, pokud $M(T)$ je konečně (respektive otevřeně) axiomatizovatelná.

Pozorování *Je-li K axiomatizovatelná, je uzavřená na elem. ekvivalenci.*

Například

- a) *lineární uspořádání jsou konečně i otevřeně axiomatizovatelná,*
- b) *tělesa jsou konečně axiomatizovatelná, ale ne otevřeně,*
- c) *nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně.*

Důsledek kompaktnosti

Věta Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n -prvkový model, má i nekonečný model.

Důkaz V jazyce bez rovnosti je to zřejmé, uvažme jazyk s rovností.

- Označme $T' = T \cup \{c_i \neq c_j \mid \text{pro } i \neq j\}$ extenzi teorie T v rozšířeném jazyce o spočetně nekonečně mnoho nových konstantních symbolů c_i .
- Dle předpokladu má každá konečná část teorie T' model.
- Tedy dle věty o kompaktnosti má T' model, ten je nutně nekonečný.
- Jeho redukt na původní jazyk je hledaný nekonečný model teorie T . \square

Důsledek Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n -prvkový model, není třída všech jejích konečných modelů axiomatizovatelná.

Např. nelze axiomatizovat konečné grupy, konečná tělesa, atd. Avšak třída nekonečných modelů teorie T jazyka s rovností je axiomatizovatelná.

1.4.2 Konečná axiomatizovatelnost

[TODO]

Konečná axiomatizovatelnost

Věta Nechť $K \subseteq M(L)$ a $\overline{K} = M(L) \setminus K$, kde L je jazyk. Pak K je konečně axiomatizovatelná, právě když K i \overline{K} jsou axiomatizovatelné.

Důkaz (\Rightarrow) Je-li T konečná axiomatizace K v uzavřeném tvaru, pak teorie s jediným axiomem $\bigvee_{\varphi \in T} \neg \varphi$ axiomatizuje \overline{K} . Nyní dokažme (\Leftarrow) .

- Nechť T, S jsou teorie jazyka L takové, že $M(T) = K, M(S) = \overline{K}$.
- Pak $M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = \emptyset$ a dle věty o kompaktnosti existují konečné $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ takové, že $\emptyset = M(T' \cup S') = M(T') \cap M(S')$.
- Jelikož

$$M(T) \subseteq M(T') \subseteq \overline{M(S')} \subseteq \overline{M(S)} = M(T),$$

je $M(T) = M(T')$, tj. konečná T' axiomatizuje K . \square

Konečná axiomatizovatelnost - příklad

Nechť T je teorie těles. Řekneme, že těleso $\mathcal{A} = \langle A, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je

- *charakteristiky 0*, neexistuje-li žádné $p \in \mathbb{N}^+$ takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ značí term $1 + 1 + \dots + 1$ (+ aplikováno $(p - 1)$ -krát).
- *charakteristiky p* , kde p je prvočíslo, je-li p je nejmenší t.ž. $\mathcal{A} \models p1 = 0$.
- Třída těles charakteristiky p pro p prvočíslo je konečně axiomatizována teorií $T \cup \{p1 = 0\}$.
- Třída těles charakteristiky 0 je axiomatizována (nekonečnou) teorií $T' = T \cup \{p1 \neq 0 \mid p \in \mathbb{N}^+\}$.

Tvrzení Třída K těles charakteristiky 0 není konečně axiomatizovatelná.

Důkaz Stačí dokázat, že \overline{K} není axiomatizovatelná. Kdyby $M(S) = \overline{K}$, tak $S' = S \cup T'$ má model \mathcal{B} , neboť každá konečná $S^* \subseteq S'$ má model (těleso prvočíselné charakteristiky větší než jakékoliv p vyskytující se v axiomech S^*). Pak ale $\mathcal{B} \in M(S) = \overline{K}$ a zároveň $\mathcal{B} \in M(T') = K$, což není možné. \square

1.4.3 Otevřená axiomatizovatelnost

[TODO]

Věta Je-li teorie T otevřeně axiomatizovatelná, pak každá podstruktura modelu T je rovněž modelem T .

Důkaz Nechť T' je otevřená axiomatika $M(T)$, $\mathcal{A} \models T'$ a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Víme, že pro každé $\varphi \in T'$ je $\mathcal{B} \models \varphi$, neboť φ je otevřená. Tedy \mathcal{B} je modelem T' . \square

Poznámka Platí i obrácená implikace, tj. je-li každá podstruktura modelu teorie T rovněž modelem T , pak T je otevřeně axiomatizovatelná.

Např. teorie DeLO není otevřeně axiomatizovatelná, neboť např. konečná podstruktura modelu DeLO není modelem DeLO.

Např. nejvýše n -prvkové grupy pro pevné $n > 1$ jsou otevřeně axiomatizovány

$$T \cup \left\{ \bigvee_{\substack{i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i = x_j \right\},$$

kde T je (otevřená) teorie grup.