

NAIL062 V&P Logika: 3. cvičení

Témata: Syntaxe a sémantika výrokové logiky. Převod do CNF a DNF. Univerzálnost logických spojek.

Příklad 1. Mějme teorii $T = \{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$ v jazyce $\{p, q, r\}$.

- (a) Uveďte příklad následujícího: výrok pravdivý v T , lživý v T , nezávislý v T , splnitelný v T , a dvojice T -ekvivalentních výroků.
- (b) Které z následujících výroků jsou pravdivé, lživé, nezávislé, splnitelné v T ? T -ekvivalentní?

$$p, \neg q, \neg p \vee q, p \rightarrow r, \neg q \rightarrow r, p \vee q \vee r$$

Příklad 2. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\text{var}(T)$.

- (a) Které výroky ve tvaru $p_i \rightarrow p_j$ jsou důsledky T ?
- (b) Určete všechny modely T .

Příklad 3. Určete množinu modelů dané formule. Využijte toho, že je v DNF resp. v CNF.

- (a) $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$
- (b) $(\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$
- (c) $(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) \vee (p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) \vee (\neg p_3) \vee (p_2 \wedge p_4) \vee (p_1 \wedge p_3 \wedge p_5)$
- (d) $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_3) \wedge (p_2 \vee p_4) \wedge (p_1 \vee p_3 \vee p_5)$

Příklad 4. Převeďte následující výroky do CNF a DNF

- (a) $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r),$
- (b) $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p,$

Proveďte to:

- (I) sémanticky (pomocí pravdivostní tabulky),
- (II) ekvivalentními úpravami.

Příklad 5. Najděte (co nejkratší) CNF a DNF reprezentace Booleovské funkce $\text{maj}: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$, která vrací převládající hodnotu mezi 3 vstupy.

Příklad 6. Najděte CNF a DNF reprezentaci n -ární parity, tj. Booleovské funkce $\text{par}: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, která vrací XOR všech vstupních hodnot:

$$\text{par}(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n) \bmod 2$$

Zkuste to pro malé hodnoty n .

Příklad 7. Buď \mathbb{P} spočetně nekonečná množina prvovýroků.

- Ukažte, že již neplatí, že každou $K \subseteq \mathbb{M}_{\mathbb{P}}$ lze axiomatizovat výrokem v CNF i výrokem v DNF.
- Uveďte příklad množiny modelů K , kterou nelze axiomatizovat ani výrokem v CNF, ani výrokem v DNF.

Příklad 8. Ukažte, že \wedge a \vee nestačí k definování všech Booleovských operátorů, tj. že $\{\wedge, \vee\}$ není *univerzální* množina logických spojek.

Příklad 9. Jsou následující množiny logických spojek univerzální? Zdůvodněte.

- $\{\downarrow\}$ kde \downarrow je Peirce arrow (NOR),
- $\{\uparrow\}$ kde \uparrow je Sheffer stroke (NAND),
- $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
- $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.

Příklad 10. Uvažte ternární Booleovský operátor $\text{IFTE}(p, q, r)$ definovaný jako ‘if p then q else r ’.

- Zkonstruuje pravdivostní tabulku.
- Ukažte, že všechny základní Booleovské operátory ($\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \dots$) lze vyjádřit pomocí IFTE a konstant TRUE a FALSE.