ˇe
áí
ů

*NAIL062 V&P Logika: 10. cvičení

Témata: Aplikace Věty o kompaktnosti. Převod do PNF. Skolemizace. Herbrandova věta.

Příklad 1 *Buď L jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T teorie v tomto jazyce taková, že T má nekonč*

Příklad 2 *Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.*
$(\forall y)((\exists x)P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x,y) \vee Q(x,y))$
$(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$
$\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$

Příklad 3 *Převeďte na ekvisplnitelnou CNF formuli, zapište v množinové reprezentaci.*
$(\forall y)(\exists x)P(x,y)$
$\neg(\forall y)(\exists x)P(x,y)$
$\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$
$(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \wedge P(z,y) \rightarrow R(x,y))$

Příklad 4 *Ověřte následující. (Tj. Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli.)*
$\models (\forall x)P(x,f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$
$\not\models (\forall x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\forall x)P(x,f(x))$

Příklad 5 *Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R \rangle$ s rovností, kde:* $\varphi_1 = \quad (\exists y)R(y,x)$
$\varphi_2 = \quad (\exists z)(R(z,x) \wedge R(z,y) \wedge (\forall w)(R(w,x) \wedge R(w,y) \rightarrow R(w,z)))$
Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T. (2b)
Buď $\mathcal{A} = \langle N \cup \{0\}, R^A \rangle$, kde $(n,m) \in R^A$ právě když n dělí m. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ L-struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' takovo

Příklad 6 *Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ je teorie v jazyce $L = \langle <, f, g, h \rangle$ s rovností, kde:* $\varphi_1 = \quad (\forall u)(\exists v)(\forall x)(v < x \rightarrow u <$
$\varphi_2 = \quad (\exists u)(\forall v)(\exists x)(v < x \wedge \neg u < g(x))$
$\varphi_3 = \quad (\exists u)(\forall x)\neg u < h(x)$
Pomocí skolemizace sestrojte otevřenou teorii T' ekvisplnitelnou s T.
Buď $\mathcal{A} = \langle R, <, \mathrm{id}, \mathrm{tg}', \sin \rangle$, kde $<$ má svůj obvyklý význam na R, $\mathrm{id}(r) = r$ pro všechna $r \in R$, $\mathrm{tg}'(k\pi/2) = 0$ pro $k \in Z$,

Příklad 7 *Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ obsahuje jeden axiom φ, který není otevřený: $x \neq 0 \ \rightarrow \ (\exists y)(x \cdot y = 1$*
Najděte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.
Uvažme teorii T' vzniklou z T nahrazením φ za φ_S. Platí φ v T'?
Lze každý model T jednoznačně *rozšířit na model T'?*
Nyní uvažme formuli $\psi = x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.
Platí v T axiomy existence a jednoznačnosti pro $\psi(x,y)$ a proměnnou y?
Sestrojte extenzi T'' teorie T o definici symbolu f formulí ψ.
Je T'' ekvivalentní teorii T'?
Najděte L-formuli, která je v T''-ekvivalentní s formulí: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Příklad 8 *Popište Herbrandovo univerzum a uveďte příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky:*
$L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$ kde P, Q jsou relační symboly, P unární a Q binární, f je unární funkční symbol, a a, b jsou konstant
$L = \langle P, f, g, a \rangle$ kde P je binární relační symbol, f, g jsou unární funkční symboly, a symbol a je konstantní.

Příklad 9 *Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nesplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiom*
$T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x,b), P(a)\}$
$T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x,b), P(a)\}$
$T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
$T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x,y)\}$

[2 body]

[label=0.]Nechť $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x,y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y,z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti. Najd
$\psi: \quad P(x,y) \rightarrow P(x, f(x,y)) \wedge P(f(x,y), y)$
Nalezněte expanzi struktury $\langle Q, \leq \rangle$ do jazyka L na model teorie T.
Je sentence $(\forall x)R(c,x)$ pravdivá/lživá/nezávislá v T? Zdůvodněte všechny tři odpovědi.
Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T nebo zdůvodněte, proč neexistují.
Nechť $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$ je jazyka $L' = \langle R, f, c, d \rangle$. Je teorie T konzervativní extenzí teorie T'? Uveďte zdůvodnění.