NAIL062 V&P Logika: 10. cvičení

Témata: Aplikace Věty o kompaktnosti. Převod do PNF. Skolemizace. Herbrandova věta.

Příklad 1. Buď L jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T teorie v tomto jazyce taková, že T má nekončený model a platí v ní axiomy lineárního uspořádání T. Pomocí věty o kompaktnosti ukažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*; tj. že existují prvky c_i pro každé $i \in \mathbb{N}$ v A takové, že: $\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0$. (Z toho plyne, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v logice prvního řádu.)

Příklad 2. Převeďte následující formule do PNF. Poté najděte jejich Skolemovy varianty.

(a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \to Q(y,z)) \land (\exists y)((\forall x)R(x,y) \lor Q(x,y))$

(b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$

(c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \land (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$

Příklad 3. Převeďte na ekvisplnitelnou CNF formuli, zapište v množinové reprezentaci.

(a) $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

(b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x,y)$

(c) $\neg(\exists x)((P(x) \to P(a)) \land (P(x) \to P(b)))$

(d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \land P(z,y) \to R(x,y))$

Příklad 4. Ověřte následující. (Tj. Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli.)

(a) $\models (\forall x)P(x,f(x)) \to (\forall x)(\exists y)P(x,y)$

(b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\forall x)P(x,f(x))$

Příklad 5. Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R \rangle$ s rovností, kde:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\exists y)R(y,x) \\ \varphi_2 &= (\exists z)(R(z,x) \land R(z,y) \land (\forall w)(R(w,x) \land R(w,y) \to R(w,z))) \end{aligned}$$

(a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T. *(2b)*

(b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \cup \{0\}, R^A \rangle$, kde $(n,m) \in R^A$ právě když n dělí m. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ L-struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. *(2b)*

Příklad 6. Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ je teorie v jazyce $L = \langle <, f, g, h \rangle$ s rovností, kde:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\forall u)(\exists v)(\forall x)(v < x \to u < f(x)) \\ \varphi_2 &= (\exists u)(\forall v)(\exists x)(v < x \land \neg u < g(x)) \\ \varphi_3 &= (\exists u)(\forall x)\neg u < h(x) \end{aligned}$$

(a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřenou teorii T' ekvisplnitelnou s T.

(b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, <, \mathrm{id}, \mathrm{tg}', \sin \rangle$, kde $<$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$, $\mathrm{id}(r) = r$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tg}'(k\pi/2) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{tg}'(r) = \mathrm{tg}(r)$ (tg je funkce tangens) pro $r \neq k\pi/2$ s $k \in \mathbb{Z}$ a sin je funkce sinus. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$.

Příklad 7. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ obsahuje jeden axiom φ, který není otevřený: $x \neq 0 \ \rightarrow \ (\exists y)(x \cdot y = 1)$. Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models \ (x \neq 0 \ \wedge \ x \cdot y = 1 \ \wedge \ x \cdot z = 1) \ \rightarrow \ y = z$.

(a) Najděte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.

(b) Uvažme teorii T' vzniklou z T nahrazením φ za φ_S. Platí φ v T'?

(c) Lze každý model T *jednoznačně* rozšířit na model T'?

Nyní uvažme formuli $\psi = x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

(d) Platí v T axiomy existence a jednoznačnosti pro $\psi(x, y)$ a proměnnou y?

(e) Sestrojte extenzi T'' teorie T o definici symbolu f formulí ψ.

(f) Je T'' ekvivalentní teorii T'?

(g) Najděte L-formuli, která je v T''-ekvivalentní s formulí: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Příklad 8. Popište Herbrandovo univerzum a uveďte příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky:

(a) $L = \langle P, Q, f, a, b\rangle$ kde P, Q jsou relační symboly, P unární a Q binární, f je unární funkční symbol, a a, b jsou konstantní symboly.

(b) $L = \langle P, f, g, a\rangle$ kde P je binární relační symbol, f, g jsou unární funkční symboly, a symbol a je konstantní.

Příklad 9. Sestrojte Herbrandův model dané teorie, nebo najděte nesplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů (a, b jsou konstantní symboly v daném jazyce).

(a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$

(b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$

(c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$

(d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$

Domácí úkol (2 body)**.**

1. Nechť $T = \{(\exists x)R(x), (\exists y)\neg P(x, y), (\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti. Najděte otevřenou teorii T' ekvisplnitelnou s T. Převeďte T' do CNF a výslednou formuli S zapište v množinové reprezentaci.

2. Nechť $T = \{R(x, x),\ R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y,\ R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z),\ R(x, y) \vee R(y, x), c \neq d, \varphi, \psi\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R, f, c, d\rangle$ s rovností a φ, ψ jsou

$$\begin{aligned} \varphi: &\quad P(x, y) \leftrightarrow R(x, y) \wedge x \neq y \\ \psi: &\quad P(x, y) \rightarrow P(x, f(x, y)) \wedge P(f(x, y), y) \end{aligned}$$

   (a) Nalezněte expanzi struktury $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ do jazyka L na model teorie T.

   (b) Je sentence $(\forall x)R(c, x)$ pravdivá/lživá/nezávislá v T? Zdůvodněte všechny tři odpovědi.

   (c) Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze T nebo zdůvodněte, proč neexistují.

   (d) Nechť $T' = T \setminus \{\varphi, \psi\}$ je jazyka $L' = \langle R, f, c, d\rangle$. Je teorie T konzervativní extenzí teorie T'? Uveďte zdůvodnění.