

NAIL062 V&P Logika: 5. cvičení

Témata: Tablo metoda ve výrokové logice.

Příklad 1. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky:

- (a) $(p \rightarrow (q \rightarrow q))$
- (b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$
- (c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- (d) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Příklad 2. Pomocí tablo metody dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezespornou větev.

- (a) $\{\neg q, p \vee q\} \models p$
- (b) $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$
- (c) $\{p \rightarrow r, p \vee q, \neg s \rightarrow \neg q\} \models r \rightarrow s$

Příklad 3. Pomocí tablo metody určete všechny modely následujících teorií:

- (a) $\{(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$
- (b) $\{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$
- (c) $\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$

Příklad 4. Aladin našel v jeskyni dvě truhly, A a B. Ví, že každá truhla obsahuje buď poklad, nebo smrtelnou past.

- Na truhle A je nápis: “Alespoň jedna z těchto dvou truhel obsahuje poklad.”
- Na truhle B je nápis: “V truhle A je smrtelná past.”

Aladin ví, že buď jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba lživé.

- (a) Vyjádřete Aladinovy informace jako teorii T nad vhodně zvolenou množinou výrokových proměnných \mathbb{P} . (Vysvětlete význam jednotlivých výrokových proměnných v \mathbb{P} .)
- (b) Pomocí tablo metody najděte všechny modely teorie T .
- (c) Může Aladin zvolit truhlu tak, aby si byl jistý, že bude obsahovat poklad? Pokud ano, kterou?

Příklad 5. V prezidentských volbách kandidují pan A a pan B.

- *Pan A říká: “Budu zvolen nebo pan B lže.”*
- *Pan B říká: “Pan A nebude zvolen nebo lže.”*
- (a) Formalizujte naše znalosti jako teorii T v jazyce $\mathbb{P} = \{a, b\}$, kde a resp. b znamená, že zvolen bude pan A resp. pan B.
- (b) Sestrojte dokončená tabla z teorie T s položkami Fa resp. Fb v kořeni. Jaký z těchto tabel můžeme učinit závěr?

- (c) Uveďte příklad výroku nad \mathbb{P} , který je v teorii T nezávislý, anebo zdůvodněte, proč takový výrok neexistuje.
- (d) Existuje teorie S nad $\{a, b\}$ taková, že T je konzervativní extenzí S ? Uveďte příklad, nebo zdůvodněte, proč ne.

Příklad 6. Uvažme nekonečnou výrokovou teorii $T = \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí tablo metody najděte všechny modely T , a to tak, že sestrojíte *systematické* tablo z T s položkou $\top p_0 \rightarrow p_1$ v kořeni. Je každý model T kanonickým modelem pro některou z větví tohoto tabla?

Příklad 7. Navrhněte vhodná atomická tabla pro Peirceovu spojku \downarrow (NOR), pro Shefferovu spojku \uparrow (NAND), a pro \oplus (XOR).

Příklad 8. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. že pro každou teorii T a výroky φ, ψ platí

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ právě když } T, \varphi \vdash \psi.$$

Domácí úkol (3 body). 1. Pomocí tablo metody:

- (a) dokažte, že následující výrok je tautologie:

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

- (b) dokažte nebo najděte protipříklad ve formě *kanonického* modelu pro bezespornou větev:

$$\{p \rightarrow r, p \vee q, \neg s \rightarrow \neg q\} \models r \rightarrow s$$

- (c) určete všechny modely:

$$\{q \rightarrow p, r \rightarrow q, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$$

2. Navrhněte vhodná atomická tabla pro ternární operátor “if p then q else r” (IFTE). Ukažte, že souhlasí-li model s kořenem vašich atomických tabel, souhlasí i s některou větví.