První přednáška

NAIL062 Výroková a predikátová logika

Jakub Bulín (KTIML MFF UK)

Zimní semestr 2023

Cesta k jistému úspěchu u zkoušky[1]

- Studujte průběžně (každý týden), a průběžně také testujte své znalosti: umíte sami napsat(!) definici, větu, důkaz?
- Před každou přednáškou alespoň zběžně projděte příslušné sekce v **Zápiscích z přednášky**. Ty obsahují vše, co po vás bude vyžadováno. Snažte se pochopit smysl definic a tvrzení.
- Po každé přednášce si skripta podrobně přečtěte. Pokud něčemu nebudete rozumět, využijte konzultačních hodin.
- Snažte se zúčastnit všech přednášek, pokud nemůžete, včas se materiál doučte, případně využijte konzultačních hodin.
- Ujistěte se, že rozumíte nejen myšlenkám, ale umíte pracovat i s formalizmem: ten je neoddělitelnou součástí logiky.
- Stejnou pozornost věnujte i přípravě na cvičení.

[1] Podrobnosti o zkoušce včas upřesníme. Základní formát i většina otázek ale pravděpodobně zůstanou stejné, viz **loňské informace o zkouškách**.

První přednáška

Program

- úvod do logiky
- neformální představení výrokové a predikátové logiky
- syntaxe výrokové logiky

Materiály

Zápisky z přednášky: Kapitola 1 a Sekce 2.1 z Kapitoly 2

Kapitola 1: Úvod do logiky

Co je logika?

Dvě definice:

1. soubor principů, které jsou základem uspořádání prvků nějakého systému (např. počítačového programu, elektronického zařízení, komunikačního protokolu)
2. věda o uvažování prováděném podle striktních pravidel zachovávajících platnost

V informatice obojí: daný systém nejprve *formálně popíšeme*, a poté o něm *formálně uvažujeme* (automaticky!), tj. odvozujeme platné inference za použití nějakého dokazovacího systému

Historie a aplikace logiky

Filozofie → Matematika → Teoretická informatika →

Aplikovaná informatika

- logic programming
- discrete optimization (SAT solving, scheduling, planning)
- database theory
- verification (software, hardware, protocol)
- automated reasoning and proving
- knowledge-based representation
- artificial intelligence

1.1 Výroková logika

Příklad ze života: Hledání pokladu

Při hledání pokladu jsme narazili na rozcestí dvou chodeb. Víme, že na konci každé chodby je buď poklad, nebo drak, ale ne obojí. Trpaslík nám řekl, že: *"Alespoň jedna z těch dvou chodeb vede k pokladu"*, a že *"První chodba vede k drakovi."* Je známo, že trpaslíci buď vždy mluví pravdu, nebo vždy lžou. Kterou cestou se máme vydat?

Výroky neformálně

Výrok je tvrzení, kterému lze přiřadit pravdivostní hodnotu:

pravdivý (*True*, 1), nebo lživý (*False*, 0)

Prvovýroky (atomické výroky, výrokové proměnné) zkombinované pomocí logických spojek a závorek do složených výroků:

"(Trpaslík lže,) *právě když* (druhá chodba vede k drakovi.)"

- $\neg$ "neplatí X", *negace*
- $\wedge$ "X a Y", *konjunkce*
- $\vee$ "X nebo Y", *disjunkce* (není exkluzivní)
- $\rightarrow$ "pokud X, potom Y", *implikace* (čistě logická)
- $\leftrightarrow$ "X, právě když Y", *ekvivalence*

Formalizace ve výrokové logice

Volba množiny prvovýroků: bity informace popisující daný systém

$p_1 =$ "*Poklad je v první chodbě.*"
$p_2 =$ "*Poklad je ve druhé chodbě.*"

Co nejmenší, např. hodnota $t =$ "*Trpaslík mluví pravdu.*" je jednoznačně určená hodnotami $\mathbb{P} = \{p_1, p_2\}$.

- *Poklad nebo drak, ale ne obojí*: zakódované do volby $\mathbb{P}$ (přítomnost draka je absence pokladu)
- "*První chodba vede k drakovi.*" $\Leftrightarrow \neg p_1$
- "*Alespoň jedna z chodeb vede k pokladu.*" $\Leftrightarrow p_1 \vee p_2$
- *Trpaslík buď mluví pravdu, nebo lže*:

$$\varphi = (\neg p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge \neg(p_1 \vee p_2))$$

Teorie $T = \{\varphi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{p_1, p_2\}$, φ je axiom T.

Modely a důsledky

Lze určit, kde je poklad? Je p_1 nebo p_2 důsledkem φ resp. T?

"Svět", ve kterém je např. v první chodbě poklad a ve druhé drak, popíšeme pomocí pravdivostního ohodnocení $p_1 = 1, p_2 = 0$, neboli modelu $v = (1, 0)$ jazyka $\mathbb{P}$. Celkem máme 4 "světy" a modely:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}.$$

Je "svět" popsaný modelem $v = (1, 0)$ *konzistentní* s tím, co víme, tj. platí v modelu v výrok φ resp. teorie T? Vyhodnotíme podle stromové struktury φ:

$v(p_1) = 1,\ v(p_2) = 0,\ v(\neg p_1) = 0,\ v(p_1 \vee p_2) = 1,\ \ldots,\ v(\varphi) = 0$

Množina modelů výroku φ (resp. *modelů teorie* T):

$$\mathrm{M}_{\mathbb{P}}(\varphi) = \mathrm{M}_{\mathbb{P}}(T) = \{(0,1)\}.$$

V každém modelu teorie T platí výrok p_2, neboli p_2 je důsledek T.

Dokazovací systémy