Л Е К Ц № 10.

Түүврийн тоон үзүүлэлтүүд, Тархалтын үл мэдэгдэх параметрийн цэгэн үнэлэлт, тэдгээрийн чанар. Цэгэн үнэлэлт байгуулах ХИУХБ арга

1. Түүврийн тоон үзүүлэлтүүд.

Түүврийн дундаж

Ямар нэг санамсаргүй хэмжигдэхүүний ажиглагдсан утгуудаар зохиогдсон n хэмжээст түүвэр $x_1, x_2, \ldots, x_n$ өгөгдсөн байг.
Бүх ажиглагдсан утгуудын арифметик дундажийг тууврийн дундаж гэнэ.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{10.1}$$

Хэрэв вариацын цуваа нь $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_k$ вариантуудыг $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$ давтамжуудтайгаар авдаг бол түүврийн дундаж нь

$$\overline{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \ldots + x_km_k}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_im_i, \qquad n = \sum_{i=1}^{k} m_i \tag{10.2}$$

хэлбэртэй болно. (10.2) томъёогоор тодорхойлогдох арифметик дундажийг жигнэсэн дундаж, m_i-г жин гэж нэрлэнэ. Хэрэв интервалын вариацын цуваа өгөгдсөн бол x_i-интервалын дундаж, m_i-харгалзах интервалын давтамж байна. (10.2) томъёог

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_im_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i\frac{m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i\widehat{p_i}$$

хэлбэртэй бичиж болно.
Арифметик дундажийн үндсэн чанаруудыг авч үзье.

1. Хоёр түүврийн алгебр нийлбэрийн арифметик дундаж нь түүвэр тус бүрийн арифметик дундажуудын алгебр нийлбэртэй тэнцүү.
$$\overline{X \pm Y} = \overline{X} \pm \overline{Y}$$
2. Үл огтолцох харгалзан $n_1,\ n_2$ хэмжээстэй $X,\ Y$ түүврүүдийн нэгдлийг Z гэвэл түүний арифметик дундаж нь
$$\overline{Z} = \frac{\overline{X}n_1 + \overline{Y}n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{байна.}$$
3. Тогтмол тооны арифметик дундаж нь өөртэйгөө тэнцүү. $\overline{C} = C$
4. Хэрэв $Z = CX$ бол $\overline{Z} = C\overline{X}$
5. $x_i - \overline{X}$ хазайлтын арифметик дундаж нь тэгтэй тэнцүү.
6. Хэрэв $Z = X \pm C$ бол $\overline{Z} = \overline{X} \pm C$ байна.
7. Түүврийн бүх давтамжийг дурын тогтмол тоо дахин өөрчилөхөд арифметик дундаж нь өөрчлөгдөхгүй.

Түүврийн дисперс

Санамсаргүй хэмжигдэхүүний дисперс нь санамсаргүй хэмжигдэхүүний утга математик дундажаасаа хазайх хазайлтаар тодорхойлогддог бол түүврийн дисперс нь түүврийн вариантууд түүврийн дундажаасаа хазайх хазйлтаар тодорхойлогдоно.

X санамсаргүй хэмжигдэхүүний утгуудын түүврийн дундажаасаа хазайх хазайлтын арифметик дундажийг уг түүврийн дисперс гэнэ.

$$\widehat{D}X = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}. \tag{10.3}$$

Хэрэв дискрет вариацын цуваа

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k
m	m_1	m_2	m_3	$\dots$	m_k

өгөгдсөн бол түүврийн дисперс нь

$$\widehat{D}X = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X})^2 m_i}{n}, \quad n = \sum_{i=1}^{k} m_i \quad \text{болно.}$$

$\widehat{p}_i = m_i/n$ тэнцэтгэлийг ашиглавал түүврийн дисперс нь

$$\widehat{D}X = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 \widehat{p}_i \quad \text{болно.} \tag{10.4}$$

Түүврийн дисперсээс квадрат язгуур гаргасан хэмжигдэхүүнийг түүврийн дундаж квадрат хазайлт гэнэ.

$$\widehat{\sigma}_X = \sqrt{\widehat{D}X} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}} \tag{10.5}$$

$$\widehat{\sigma}_X = \sqrt{\widehat{D}X} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X})^2 m_i}{n}}$$

Түүврийн дисперсийн чанаруудыг авч үзье.

1. Тогтмол тооны дисперс нь тэгтэй тэнцүү байна.

$$\widehat{D}C = 0$$

2. Түүврийн авах утгуудыг нэг ижиг тоогоор өөрчилөхөд түүврийн дисперс ба дундаж квадрат хазайлт нь өөрчлөгдөхгүй.

$$\widehat{D}(X \pm C) = \widehat{D}X, \quad \widehat{\sigma}_{X \pm C} = \widehat{\sigma}_X$$

3. Тогтмол үржигдэхүүний квадрат нь дисперсийн тэмдэгийн өмнө гарна.

$$\widehat{D}(CX) = C^2 \widehat{D}X, \quad \widehat{\sigma}_{CX} = |C| \widehat{\sigma}_X$$

4. Түүврийн вариантуудын давтамжуудыг нэг ижил тоо дахин өөрчилөхөд түүний дисперс болон дундаж квадрат хазайлт өөрчлөгдөхгүй.

5. Түүврийн дисперс нь түүврийн утгуудын квадратын арифметик дундаж ба түүврийн дундажийн квадратын ялгавартай тэнцүү.

$$\widehat{D}X = \overline{X^2} - (\overline{X}^2)$$

Түүврийн анхны ба төвийн моментууд. Асимметр. Эксцесс

$$\widehat{\nu}_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^k m_i}{\sum\limits_{i=1}^{i} m_i}, \quad \sum_{i=1}^{l} m_i = n. \tag{10.6}$$

хэмжигдэхүүнийг түүврийн k эрэмбийн анхны момент гэнэ.
Тодорхойлолтooос түүврийн тэг эрэмбийн анхны момент нь

$$\widehat{\nu}_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^0 m_i}{\sum\limits_{i=1}^{i} m_i} = 1$$

нэгдүгээр эрэмбийн анхны момент нь

$$\widehat{\nu}_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{i} m_i} = \overline{X}.$$

$$\widehat{\mu}_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} (x_i - \overline{X})^k m_i}{\sum\limits_{i=1}^{i} m_i} \tag{10.7}$$

хэмжигдэхүүнийг түүврийн k эрэмбийн төвийн момент гэнэ. Түүврийн тэг болон нэгдүгээр эрэмбийн төвийн моментуудыг олбол

$$\widehat{\mu}_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} (x_i - \overline{X})^0 m_i}{\sum\limits_{i=1}^{l} m_i} = 1$$

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} (x_i - \overline{X}) m_i}{\sum\limits_{i=1}^{l} m_i} = 0$$

хоёрдугаар эрэмбийн төвийн момент нь

$$\widehat{\mu}_2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} (x_i - \overline{X})6 - m_i}{\sum\limits_{i=1}^{l} m_i} = \widehat{\sigma}_X^2$$

Түүврийн анхны ба төвийн моментийн холбоог илэрхийлбэл

$$\widehat{\mu}_2 = \widehat{\nu}_2 - \widehat{nu}_1^2$$

$$\widehat{\mu}_3 = \widehat{\nu}_3 - 3\widehat{nu}_1 \widehat{\nu}_2 + 2\widehat{nu}_1^3$$

$$\widehat{\mu}_4 = \widehat{\nu}_4 - 4\widehat{nu}_1 \widehat{\nu}_3 + 6\widehat{nu}_1^2 \widehat{\nu}_2 - 3\widehat{\nu}_1^4$$

Түүврийн анхны ба төвийн моментууд нь санамсаргүй хэмжигдэхүүний анхны ба төвийн моменттэй ижил чанаруудтай байна.

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{mu_3}}{\widehat{\sigma}_X^3} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\nu}(x_i - \overline{X})^3 m_i}{\widehat{\sigma}_X^3 \sum\limits_{i=1}^{\nu} m_i} \tag{10.8}$$

хэмжигдэхүүнийг түүврийн асимметрийн коэффициент гэнэ.

$$\widehat{E} = \frac{\widehat{\mu}_4}{\widehat{\sigma}_X^4} - 3 \tag{10.9}$$

хэмжигдэхүүнийг эксцессийн коэффициент гэнэ.

2.Тархалтын үл мэдэгдэх параметрийн цэгэн үнэлэлт

Их тооны хуульд үндэслэн, мэдэгдэхгүй байгаа онолын тархалтын функцийн оронд ажиглагдсан утгуудын тусламжтайгаар байгуулсан туршилтын тархалтын функц авч болох боловч практикт ихэвчлэн онолын тархалтын $F(x)$ функцийн аналитик хэлбэр мэдэгдээд хэд хэдэн үл мэдэгдэх параметрүүдийг агуулсан байдаг. Өөрөөр хэлбэл онолын тархалтын функц нь:

$$F(x) = F(x, a_1, a_2, \; \dots \;, a_k)$$

хэлбэртэй байна. Ийнхүү эх олонлогийн онолын тархалтын функц $F(x)$ -ийг олох асуудал $a_1, a_2, \; \dots \;, a_k$ параметрүүдийг үнэлэх асуудалд шилжинэ. Үнэлэх гэдэг нь ажиглалтын түүврийн утгуудаар эх олонлогийн тархалтын параметрүүдийг яг тодорхойлж буй хэрэг биш харин түүний үнэлэлт гэж нэрлэгдэх ойролцоо утгыг олохыг хэлнэ.

Бид ξ санамсаргүй хэмжигдэхүүн дээр ажиглалт хийсэн гэж үзье. Нэг удаагийн ажиглалтын утгууд $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нь n хэмжээст нэг түүвэр болох бөгөөд тус бүр n хэмжээстэй түүврүүдийн олонлог авч үзье. i-р түүврийн тусламжтай олсон a_i параметрийн үнэлэлтийг $\overline{a}_i$ гэвэл түүврийн бүрэлдэхүүн санамсаргүй учраас $\overline{a}_i$ өөрөө санамсаргүй хэмжигдэхүүн байна.

Эх олонлогийн n хэмжээст түүврийн санамсаргүй шинж чанарыг тусгахын тулд ажиглалтын утга бүрийг санамсаргүй хэмжигдэхүүн мэт үзнэ. Өөрөөр хэлбэл, түүврийн утгууд x_i бүр нь эх олонлогтой нэг ижил тархалттай үл хамаарах санамсаргүй хэмжигдэхүүн байна.

Тэгвэл эх олонлогийн a_i параметрүүдийн үнэлэлт $\overline{a}_i$ нь түүврийн утгуудаас хамаарсан функц болно.

$$\overline{a}_i = \overline{a}_i(x_1, \, x_2, \, \dots \,, x_n)$$

Одоо санамсаргүй хэмжигдэхүүн ξ-ийн тархалтын функцийн ямар нэг параметр $a = a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-г үнэлье. Аливаа параметрийн үнэлэлтийг хазайлтгүй, эрчимтэй, зохимжтой гэж ангилна. a параметрийн үнэлэлт $\overline{a}$ -ийн хувьд

$$E(\overline{a}) = a \tag{10.10}$$

нөхцөл биелэгдэж байвал $\overline{a}$ үнэлэлтийг *хазайлтгүй үнэлэлт* гэнэ.

Эсрэг тохиолдолд ($E(\overline{a}) < a, \; E(\overline{a}) > a$) *хазайлттай үнэлэлт* гэнэ. Параметрийн үнэлэлт хазайлтгүй байна гэдэг нь уг параметрийг үнэлэхэд санамсаргүй биш (хүн ба багажнаас хамаарсан) байнгын алдаа гараагүй болохыг илэрхийлнэ.

$\overline{a}$ үнэлэлт a параметрийн хазайлтгүй үнэлэлт байхын тулд $\overline{a}$ -н утга түүврээс түүвэрт шилжихэд түүний математик дундаж нь a -ийн орчинд хэлбэлзэх ёстой. Үүнийг илэрхийлэх хэмжигдэхүүн нь

$$D\overline{a} = E(\overline{a} - a)^2$$

юм. Эндээс хазайлтгүй үнэлэлт ч гэсэн үнэлж байгаа параметрийн жинхэнэ утгаас янз бүрээр сарнина. Үүнтэй уялдан эх олонлогийн янз бүрийн түүврүүдийн хувьд a параметрийн бүх боломжит хазайлтгүй үнэлэлтүүдийн дотроос хамгийн бага дисперстэй үнэлэлтийг *эрчимтэй үнэлэлт* гэнэ. Тухайлбал,

$$E(\overline{a}_1 - a)^2 < E(\overline{a}_2 - a)^2$$

бол $\overline{a}_1$-г $\overline{a_2}$ -оос эрчимтэй гэнэ. Үнэлэлт эрчимтэй байна гэдэг нь тухайн үнэлгээ хамгийн бага санамсаргүй алдаатай байна гэсэн үг юм. Үнэлэлт бүрийн хувьд эрчимтэй үнэлэлт оршин байх албагүй.
Хэрэв a параметрийн $\overline{a}$ үнэлэлт нь их тооны хуульд захирагдаж байвал $\overline{a}$ -г *зохимжтой үнэлэлт* гэнэ. Өөрөөр хэлбэл зохимжтой үнэлэлтийн хувьд

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{a}-a|<\epsilon)=1. \tag{10.11}$$

нөхцөл биелнэ гэсэн үг.
Энэ нь түүврийн хэмжээ хүрэлцээтэй их байхад үл мэдэгдэх параметрийг үнэлэхэд гарах алдаа багасахыг илэрхийлж байна.
Эдгээр үнэлгээнүүд нь үл мэдэгдэх параметр a -г зөвхөн ганц $\overline{a}$ тоогоор үнэлж байгаа учраас **цэгэн үнэлэлт** гэж нэрлэгдэнэ.

Хэрэв a нь $F(x,a)$ тархалтын функцтэй санамсаргүй хэмжигдэхүүний математик дундаж эсвэл дисперс бол туршилтын үр дүнгээр олсон түүврийн дундаж $\overline{X}$ ба түүврийн дисперс S^2 -ийг параметрийн үнэлэлт болгон сонгож авна.
Жишээ болгож түүврийн дундаж нь эх олонлогийн математик дундажийн цэгэн үнэлэлт болохыг харуулъя.

1. Зохимжтой үнэлэлт болох нь.
Теорем. ξ санамсаргүй хэмжигдэхүүний туршилтын ажиглалтын утгууд $X_1, X_2, \ldots, X_n$ нь хос хосоороо үл хамаарах санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд бөгөөд $EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = E\xi$ нөхцлийг хангадаг, $DX_1,\ DX_2, \ldots, DX_n$дисперсүүд нь төгслөг утгатай бол $\overline{X}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ түүврийн дундаж нь ξ санамсаргүй хэмжигдэхүүний математик дундажийн зохимжтой үнэлэлт болно.
Баталгаа. Теоремын нөхцөл ёсоор Чебышевын теорем биелнэ. Ө.х. $\forall\epsilon>0$ тооны хувьд

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}-\sum_{n=1}^{n}\frac{EX_i}{n}\right|<\epsilon\right)=1$$

биелнэ.
Энд $EX_1 = EX_2 = \cdots = EX_n = EX$ нөхцлийг тооцвол

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - EX\right|<\epsilon\right)=1$$

гэж бичиж болно.
Эндээс $\overline{X}_n$ түүврийн дундаж нь EX математик дундажийн *зохимжтой үнэлэлт* болно.
2. Хазайлтгүй үнэлэлт болох нь.
Теорем. Хэрэв тэнцэтгэл биелж байвал түүврийн дундаж нь математик дундажийн хазайлтгүй үнэлэлт болно.

Баталгаа. Хэрвээ $EX_1 = EX_2 = \cdots = EX_n = E\xi$ нөхцөл биелж байвал дурын бэхлэгдсэн n тооны хувьд дараахь тэнцэтгэл биелнэ.

$$E\overline{X}_n = E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Exi=E\xi$$

Эндээс $EX_1 = EX_2 = \cdots = EX_n = E\xi$ нөхцөл биелж байхад $E\overline{X} = E\xi$ тэнцэтгэл биелж байгаа тул $\overline{X}_n$ нь $E\xi$ математик дундажийн *хазайлтгүй үнэлэлт* болно.
3. Эрчимтэй үнэлэлт болох нь. Теорем. ξ санамсаргүй хэмжигдэхүүн нь $\xi = N(a,\sigma),\ (a=E\xi,\ \sigma = \sqrt{D\xi})$ нормаль тархалттай ба түүний үл хамаарах туршилтын үр дүнд $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ утгууд ажиглагдсан байг. Хэрэв

$$DX_1 = DX_2 = \ldots = DX_n = D\xi \text{ ба } EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = E\xi$$

нөхцөл биелж байвал $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X}{n}$ нь $E\xi$ математик дундажийн хазалтгүй эрчимтэй үнэлэлт болно.
Баталгаа. $D\overline{X}$ дисперсийг олъё.

$$D\overline{X} = D\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D\xi = \frac{nD\xi}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Эндээс теоремын нөхцөл хангах $\overline{X}$ дундаж нь $E\xi$ математик дундажийн хазайлтгүй эрчимтэй үнэлэлт болно. ($\frac{\sigma^2}{n}$ нь нормаль тархалтын дисперсийн хамгийн бага хилтэй давхцана.)
Түүврийн дундаж

$$\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

нь эх олонлогийн математик дундажийн хазайлтгүй зохимжтой үнэлэлт болдог бол харин түүврийн дисперс

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\xi - \overline{X}\right)^2$$

нь эх олонлогийн дисперсийн хазайлттай боловч зохимжтой үнэлэлт болно гэдгийг харж болно. Хэрвээ түүврийн дисперсийн оронд

$$\widehat{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

үнэлэлтийг авбал эх олонлогийн дисперсийн хазайлтгүй, зохимжтой үнэлэлт болох ба түүнийг түүврийн засварласан дисперс гэнэ.
$\frac{n}{n-1}$ -коэффициентийг Бесселийн засвар гэнэ. Мөн эх олонлогийн дундаж $E\xi$ мэдэгдэж байхад

$$S_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - E\xi\right)^2$$

үнэлэлт нь эх олонлогийн дисперсийн хазайлтгүй зохимжтой үнэлэлт болно. Эх олонлог зөвхөн нормаль тархалттай байхад $\overline{X},\ S_*^2$ үнэлэлтүүд эрчимтэй байна.
3. Хамгийн их үнэний хувь бүхий арга.
Тархалтын үл мэдэгдэх параметрийн үнэлэлтийг олох практикт өргөн хэрэглэгддэг аргуудын нэг бол хамгийн их үнэний хувь бүхий арга юм. Энэ аргын үндсэн санаа нь хэмжээст санамсаргүй түүврийн утгуудаар хамгийн их үнэний хувь бүхий гэж нэрлэгдэх функцийн утга хамгийн их байхаар тархалтын үл мэдэгдэх параметрүүдийг олоход оршино. Санамсаргүй хэмжигдэхүүн ξ -ийн онолын тархалтын нягт $f(x,\, a)$ хэлбэртэй байг. a -үл мэдэгдэх параметр. Түүнчлэн n хэмжээст түүврийн утгууд $x_1, x_2, \ldots, x_n$ -мэдэгдэж байг.
$\forall\epsilon > 0$ тоо авч $\left(x_i - \frac{\epsilon}{2},\ x_i + \frac{\epsilon}{2}\right),\ i = 1, 2, \ldots, n$ гэсэн x_i цэгийн $\frac{\epsilon}{2}$ радиустай орчнуудыг байгуулъя.
Тэгвэл санамсаргүй хэмжигдэхүүн $\left(x_i - \frac{\epsilon}{2},\ x_i + \frac{\epsilon}{2}\right)$ завсраас утгаа авах магадлал нь ойролцоогоор $f(x,a) \cdot \epsilon$ болно.
Хэрэв n удаа ажиглалт хийсэн бол i -р ажиглалтын үр дүн i -р завсарт байх үзэгдлүүд зэрэг явагдах магадлал буюу хамтын тархалтын нягт нь

$$P(x_1,\, x_2, \ldots, x_n, a) = f(x_1, a) \cdot f(x_2, a) \cdot \ldots \cdot f(x_n, a) \cdot \epsilon^n \tag{10.12}$$

болно.

Энэ функц экстремумтай байх зайлшгүй нөхцөл нь

$$\frac{\partial P(x_1, x_2, \ldots, x_n, a)}{\partial a} = 0$$

бөгөөд a цэг дээр максимумтай байх хүрэлцээтэй нөхцлийн бичвэл

$$\frac{\partial^2 P(x_1, x_2, \dots, x_n, a)}{\partial a^2} < 0$$

байна.
Хэрэв хэд хэдэн цэг дээр максимумтай бол тэдгээр дотроос функц хамгийн их утгатай байлгах утгыг сонгоно.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a) = \ln \frac{P(x_1, x_2, \dots, x_n, a)}{\epsilon^n} = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, a) \tag{10.13}$$

томъёогоор тодорхойлогдох функцийг хамгийн их үнэний хувь бүхий функц гэнэ.

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial(\ln P)}{\partial a} = \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial a}, \quad (P > 0)$$

нөхцөл биелэгдэх учраас $P(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$ ба $L(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$ функцүүд нэг ижил максимумын цэгүүдтэй байна. Ерөнхий тохиолдолд $L(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$ функц $a_1, a_2, \dots, a_k$ гэсэн k параметрээс хамаарч болох бөгөөд энэ тохиолдолд экстремум орших нөхцлийг бичвэл

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_k)}{\partial a_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

болно. Хэрэв ξ нь x_i утгуудыг $p_i(a) \quad i = 1, 2, \dots, n$ магадлалтай хүлээж авах дискрет санамсаргүй хэмжигдэхүүн бол хамгийн их үнэний хувь бүхий функц

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a) = p_1^{q_1}(a) p_2^{q_2}(a) \cdot \dots \cdot p_k^{q_k}(a) \tag{10.14}$$

хэлбэртэй болно. Үүнд,q_i -түүвэр дэх x_i утгын давтамж $(i = 1, 2, \dots, k)$
Жишээ 10.1 ξ дискрет санамсаргүй хэмжигдэхүүн нь Пуассоны тархалттай байг. Уг санамсаргүй хэмжигдэхүүний магадлал нь

$$P(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda},\ x = 0, 1, 2, \dots$$

энэ хуулийн үл мэдэгдэх параметр λ - ийг хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар үнэлье. Хамгийн их үнэний хувь бүхий функцийг бичвэл

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a) = \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda \cdot e^{\lambda x}) = n \cdot \ln \lambda - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

байна. Үүнийг λ -р дифференциалчилбал

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X}} \quad \text{буюу} \quad \overline{X} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{байна.}$$

Өөрөөр хэлбэл түүврийн дундажийн урвуу нь λ параметрийн хамгийн оновчтой үнэлэлт болно.