Линейное программирование

Задача, в которой требуется минимизировать/максимизировать лин. форму:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \min\,(\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \le b_j\,,\ \ j=\overline{1,m}\ ,\ \text{или}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i = b_j\,,\ \ j=\overline{(m+1),p}\,,$$

$$x_i > 0,\ i=\overline{1,n},$$

называется задачей ЛП в *произвольной* форме записи.

Задача в матричной форме вида:
$$\left.\begin{aligned} \bar{c}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} &\to \min(\max) \\ A \cdot \bar{x} &\le \bar{b}, \\ \bar{x} &\ge \bar{0}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

называется *симметричной* формой записи задачи ЛП.

Задача линейного программирования вида
$$\left.\begin{aligned} \bar{c}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x} &\to \min(\max) \\ A \cdot \bar{x} &= \bar{b}, \\ \bar{x} &\ge \bar{0}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

называется *канонической формой* записи задачи линейного программирования.

Любую задачу ЛП можно привести к канонической форме.

Если система ограничений задана в форме $A \cdot \bar{x} \le \bar{b}$,
то можно, введя дополнительные переменные, привести ее к виду

$$A \cdot \bar{x} + E \cdot \bar{y} = \bar{b},\ \ \bar{x} \ge 0,\ \ \bar{y} \ge 0,\quad \text{где } \bar{y} = [x_{n+1},\ldots,x_{n+m}]^{\mathrm{T}}.$$

Рассмотрим задачу с ограничениями $A \cdot \bar{x} \le \bar{b}$. Эту систему ограничений можно представить в виде системы

$$\left.\begin{aligned} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{2,n} \cdot x_n + x_{n+2} &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{m,n} \cdot x_n + x_{n+m} &= b_m \end{aligned}\right\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix},\ \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \ldots \\ a_{m,1} \end{bmatrix},\ldots,\ \bar{A}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \ldots \\ a_{m,n} \end{bmatrix},\ \bar{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix},\ldots,\ \bar{A}_{n+m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix},\ \bar{A}_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Тогда задачу линейного программирования можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \min\,(\max)$$

$$x_1 \cdot \overline{A}_1 + x_2 \cdot \overline{A}_2 + \ldots + x_n \cdot \overline{A}_n + x_{n+1} \cdot \overline{A}_{n+1} + \ldots + x_{n+m} \cdot \overline{A}_{n+m} = A_0,$$

$$\overline{x} \geq \overline{0}.$$

Векторы $\overline{A}_i$ называются векторами условий, а сама задача линейного программирования называется расширенной по отношению к исходной. Пусть D и D_1 - допустимые множества решений исходной и расширенной задач соответственно.

Тогда любой точке множества D_1 соответствует единственная точка множества D и наоборот. В общем случае, допустимое множество D исходной задачи есть проекция множества D_1 расширенной задачи на подпространство исходных переменных.

$\overline{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^{\mathrm{T}}$, удовлетв. ограничениям задачи ЛП, называется **планом**.

Решением задачи линейного программирования называется ее план, минимизирующий (или максимизирующий) линейную форму.

Введем понятие базисного решения. Из матрицы расширенной задачи $A_p = [\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_{n+m}]$ выберем m линейно независимых векторов-столбцов, которые обозначим как матрицу $B_{m\times m}$, а через $D_{m\times n}$ обозначим матрицу из оставшихся столбцов. Тогда $A_p = [B, D]$, и ограничения расширенной задачи линейного программирования можно записать в виде:

$$A_p \cdot \overline{x} = B \cdot \overline{x}_B + D \cdot \overline{x}_D = \overline{A}_0. \quad (3)$$

Очевидно, что столбцы матрицы B образуют базис m-мерного пространства. Поэтому вектор $\overline{A}_0$ и любой столбец матрицы D можно представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы B.

Умножим (3) на B^{-1} слева и найдем отсюда $\overline{x}_B$:

$$B^{-1} \cdot B \cdot \overline{x}_B + B^{-1} \cdot D \cdot \overline{x}_D = B^{-1} \cdot \overline{A}_0, \quad (4)$$

$$\overline{x}_B = B^{-1} \cdot \overline{A}_0 - B^{-1} \cdot D \cdot \overline{x}_D. \quad (5)$$

Придавая $\overline{x}_D$ различные значения, будем получать различные решения $\overline{x}_B$.

Если положить $\overline{x}_D = \overline{0}$, то $\overline{x}_B = B^{-1} \cdot \overline{A}_0$. (6)

Решение (6) – ***базисное решение*** системы из m уравнений с m+n неизвестными.

Если полученное решение содержит только положительные компоненты, то оно называется ***базисным допустимым***.

Особенность допустимых базисных решений состоит в том, что они являются крайними точками допустимого множества D_1 расширенной задачи.

Если среди компонент $\overline{x}_B$ нет нулевых, то базисное допустимое решение называется ***невырожденным***.

План $\overline{x}$ задачи линейного программирования будем называть **опорным**, если векторы условий $\overline{A}_i$ с положительными коэффициентами линейно независимы.

То есть опорный план – это базисное допустимое решение расширенной системы, угловая точка многогранника решений.

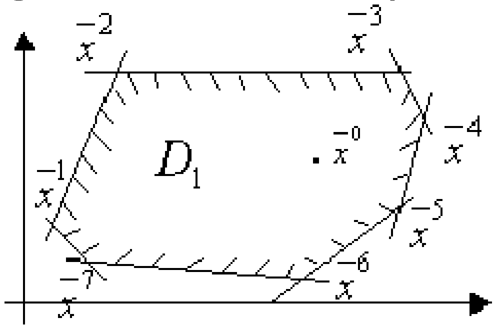
Опорное решение называется **невырожденным**, если оно содержит m положительных компонент (по числу ограничений).

Невырожденный опорный план образуется пересечением n гиперплоскостей из образующих допустимую область. В случае вырожденности в угловой точке многогранника решений пересекается более n гиперплоскостей.

<u>**Теорема 1:**</u> (основная теорема линейного программирования):

1) Линейная форма $z = \bar{c}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{x}$ достигает своего минимума в угловой точке многогранника решений.
2) Если она принимает минимальное решение более чем в одной угловой точке, то она достигает того же самого значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих угловых точек.

<u>**Лемма:**</u> Если D - замкнутое, ограниченное, выпуклое множество, имеющее конечное число крайних (угловых) точек, то любая точка $\bar{x} \in D$ может быть представлена в виде выпуклой комбинации крайних точек D.



1) Пусть $\bar{x}^0$ - некоторая внутренняя точка. Многогранник ограниченный замкнутый, имеет конечное число угловых точек. D - допустимое множество.

Предположим, что точка $\bar{x}^0$ является оптимальной точкой, то есть $z\left(\bar{x}^0\right) \le z\left(\bar{x}\right)$, $\forall \bar{x} \in D$. Предположим, что точка $\bar{x}^0$ не является угловой. Тогда на основании леммы точку $\bar{x}^0$ можно выразить через угловые точки многогранника $\bar{x}^i$, т.е.

$$\bar{x}^0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \bar{x}^i, \ \ \forall \alpha_i \ge 0, \ \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

Так как функция $z\left(\bar{x}\right)$ линейна, то

$$z\left(\bar{x}^0\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot z\left(\bar{x}^i\right). \qquad (*)$$

Выберем среди точек $\bar{x}^i$ ту, в которой линейная форма $z\left(\bar{x}\right)$ принимает наименьшее значение. Пусть это будет точка $\bar{x}^k$. Обозначим минимальное значение функции в угловой точке через z^*:

$$z^* = z(\bar{x}^k) = \min_{1 \le i \le p} \left\{ z(\bar{x}^1), z(\bar{x}^2), \ldots, z(\bar{x}^p) \right\}.$$

Подставим данное значение функции в линейную форму (*) вместо $z\left(\bar{x}^i\right)$ и получим:

$$z\left(\bar{x}^0\right) \geq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot z^* = z^* \cdot \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = z^* .$$

Так как $\bar{x}^0$ - оптимальная точка, то получили противоречие: $z\left(\bar{x}^0\right) \geq z^*$ (!). Следовательно, $z\left(\bar{x}^0\right) = z\left(\bar{x}^k\right)$, $\bar{x}^0 = \bar{x}^k$ - угловая точка.

2) Предположим, что линейная форма $z\left(\bar{x}\right)$ принимает минимальное значение более чем в одной угловой точке, например, в угловых точках $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^q$ $z\left(\bar{x}^1\right) = z\left(\bar{x}^2\right) = \ldots = z\left(\bar{x}^q\right) = z^*$. Тогда если $\bar{x}$ является выпуклой комбинацией этих точек, то есть

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \cdot \bar{x}^i, \ \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1 \text{ и } \forall i \ \alpha_i \geq 0,$$

то $$z\left(\bar{x}\right) = z\left(\sum_{i=1}^{a} \alpha_i \cdot \bar{x}^i\right) = z^* \cdot \sum_{i=1}^{a} \alpha_i = z^* .$$

То есть, если минимальное значение достигается более чем в одной угловой точке, то того же самого значения линейная форма достигает в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих угловых точек

<u>Теорема 2:</u> Если известно, что системы векторов условий $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m$, $(m \leq n)$ линейно независима и такова, что

$$x_1 \cdot \bar{A}_1 + \ldots + x_m \cdot \bar{A}_m = \bar{A}_0,$$

где все $x_j > 0$, то точка $\bar{x} = \left[x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0\right]^{\mathrm{T}}$ является угловой точкой многогранника решений.

<u>Теорема 3:</u> Если вектор $\bar{x}$ является угловой точкой многогранника решений, то векторы условий, соответствующие положительным компонентам вектора $\bar{x}$, являются линейно независимыми.

<u>Следствия:</u> 1) Угловая точка многогранника решений имеет не более m положительных компонент вектора $\bar{x}$.

2) Каждой угловой точке многогранника решений соответствует m линейно независимых векторов из данной системы: $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$.

Симплекс метод, или **метод последовательного уточнения оценок.**

Пусть имеем следующую задачу:

$$Q(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \min, \tag{1}$$

с системой ограничений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \end{cases}. \tag{2}$$

Разрешим эту систему относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{1,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + a'_{1,n} \cdot x_n + b'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = a'_{m,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + a'_{m,n} \cdot x_n + b'_m \end{cases}. \tag{3}$$

Векторы условий, соответствующие $x_1, \ldots, x_m$, образуют базис. Переменные $x_1, \ldots, x_m$ назовем базисными переменными. Остальные переменные задачи – небазисные.

Целевую функцию можно выразить через небазисные переменные:

$$Q(\bar{x}) = c'_{m+1} \cdot x_{m+1} + c'_{m+2} \cdot x_{m+2} \ldots + c'_n \cdot x_n + c'_0 \to \min.$$

Если приравнять небазисные переменные нулю –

$$x_{m+1} = 0,\ x_{m+2} = 0,\ \ldots;\ x_n = 0,$$

то соответствующие базисные переменные примут значения

$$x_1 = b'_1;\ x_2 = b'_2;\ \ldots;\ x_m = b'_m.$$

Вектор $\bar{x}$ с такими компонентами представляет собой угловую точку многогранника решений (допустимую) при условии, что $b'_i \geq 0$ (опорный план). Теперь необходимо перейти к другой угловой точке с меньшим значением целевой функции. Для этого следует выбрать некоторую небазисную переменную и некоторую базисную так, чтобы после того, как мы “поменяем их местами”, значение целевой функции уменьшилось. Такой направленный перебор в конце концов приведет нас к решению задачи.

<u>Пример 1:</u>

$$Q(\bar{x}) = x_4 - x_5 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

Выберем в качестве базисных следующие переменные $\{x_1, x_2, x_3\}$ и разрешим систему относительно этих переменных. Система ограничений примет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5 \end{array}\right\}.$$

Переменные $\{x_4, x_5\}$ являются небазисными. Если взять $x_4 = 0$ и $x_5 = 0$, то получим угловую точку (опорный план)

$$\bar{x}^1 = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

которому соответствует $Q(\bar{x}^1) = 0$.

Значение целевой функции можно уменьшить за счет увеличения x_5. При увеличении x_5 величина x_1 также увеличивается, а x_2 и x_3 – уменьшаются. Причем величина x_2 раньше может стать отрицательной. Поэтому, вводя в базис переменную x_5, одновременно x_2 исключаем из базиса. В результате после очевидных преобразований получим следующие выражения для новой системы базисных переменных и целевой функции:

$$\left.\begin{array}{l} x_5 = 2 - x_2 + 2x_4 \\ x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4 \end{array}\right\}$$

$$Q(\bar{x}) = -2 - x_4 + x_2 \to \min.$$

Соответствующий опорный план $\bar{x}^2 = [5 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2]^{\mathrm{T}}$ и $Q(\bar{x}^2) = -2$.

Целевую функцию можно уменьшить за счет увеличения x_4. Увеличение x_4 приводит к уменьшению только x_3. Поэтому вводим в базис переменную x_4, а x_3 исключаем из базиса. В результате получим следующие выражения для новой системы базисных переменных и целевой функции:

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_1 = \frac{28}{5} - \frac{7}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_5 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \end{array}\right\}$$

$$Q(\bar{x}) = -\frac{11}{5} + \frac{4}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \to \min.$$

Соответствующий опорный план $\bar{x}^3 = \left[\frac{28}{5} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{12}{5}\right]^{\mathrm{T}}$ и значение целевой функции $Q(\bar{x}^3) = -\frac{11}{5}$. Так как все коэффициенты при небазисных переменных в целевой функции неотрицательны, то нельзя уменьшить целевую функцию за счет увеличения x_2 или x_3, следовательно, полученный план $\overline{x}^3$ является оптимальным.

Пример 2: Пусть имеем задачу

$$Q(\overline{x}) = -x_1 - x_2 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2 \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2 \\ \overline{x} &\geq 0 \end{aligned}\right\}.$$

Переменные $\{x_3, x_4\}$ - базисные, а $\{x_1, x_2\}$ - небазисные переменные. Опорный план $\overline{x}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]^{\mathrm{T}}$, $Q(\overline{x}^0) = 0$.

Теперь вводим в базис переменную x_1, а x_4 исключаем из базиса. В результате получим следующие выражения для базисных переменных и целевой функции:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 + 2x_2 - x_4 \\ x_3 &= 3 + x_2 - x_4 \end{aligned}\right\}$$

$$Q(\overline{x}) = -2 - 3x_2 + x_4.$$

Опорный план $\overline{x}^1 = [2 \quad 0 \quad 3 \quad 0]^{\mathrm{T}}$, значение целевой функции $Q(\overline{x}^1) = -2$.
Теперь можно заметить, что при увеличении x_2 значения переменных x_1 и x_3 также возрастают, то есть при $x_2 \to \infty$ в допустимой области $Q(\overline{x}) \to -\infty$ (задача не имеет решения).
Замечание: В процессе поиска допустимого плана может быть выявлена противоречивость системы ограничений.

Алгоритм симплекс метода

Формализованный алгоритм симплекс метода состоит из двух основных этапов: 1) построение опорного плана; 2) построение оптимального плана.

Проиллюстрируем алгоритм на рассмотренном ранее примере:

$$Q(\overline{x}) = x_4 - x_5 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

$$\overline{x} \geq \overline{0}.$$

В случае базисных переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$ начальная симплексная таблица для данного примера будет выглядеть следующим образом:

	$-x_4$	$-x_5$	1
$x_1 =$	1	-2	1
$x_2 =$	-2	1	2
$x_3 =$	3	1	3
$Q(\overline{x}) =$	-1	1	0

Она уже соответствует опорному плану $\overline{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ (столбец свободных членов).

Построение оптимального плана. Для того чтобы опорный план был оптимален, при минимизации целевой функции необходимо, чтобы коэффициенты в строке целевой функции были неположительными (в случае максимизации – неотрицательными). Т.е. при поиске минимума мы должны освободиться от положительных коэффициентов в строке $Q(\overline{x})$.

Выбор разрешающего элемента. Если при поиске минимума в строке целевой функции есть коэффициенты больше нуля, то выбираем столбец с положительным коэффициентом в строке целевой функции в качестве разрешающего. Пусть это столбец с номером l.

Для выбора разрешающей строки (разрешающего элемента) среди положительных коэффициентов разрешающего столбца выбираем тот (строку), для которого отношение коэффициента в столбце свободных членов к коэффициенту в разрешающем столбце минимально:

$$\frac{b_r}{a_{rl}} = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \,\middle|\, a_{il} \geq 0 \right\}.$$

a_{rl} – разрешающий (направляющий) элемент, строка r – разрешающая.

Для перехода к следующей симплексной таблице (следующему опорному плану с меньшим значением целевой функции) делается шаг модифицированного жорданова исключения с разрешающим элементом a_{rl}.

Если в разрешающем столбце нет положительных коэффициентов, то целевая функция неограничена снизу (при максимизации – неограничена сверху).

Шаг модифицированного жорданова исключения над симплексной таблицей.

1. На месте разрешающего элемента ставится 1 и делится на разрешающий элемент.
2. Остальные элементы разрешающего столбца меняют знак на противоположный и делятся на разрешающий элемент.
3. Остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.
4. Все остальные элементы симплексной таблицы вычисляются по следующей формуле:

$$a_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rl} - a_{rj} \cdot a_{il}}{a_{rl}} = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{il}}{a_{rl}}.$$

Построение опорного плана. Пусть необходимо решить задачу:

$$Q(\overline{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \\ a_{m+1,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{m+1,n} \cdot x_n \le b_{m+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m+p,1} \cdot x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{m+p,n} \cdot x_n \le b_{m+p} \end{cases}.$$

Введем дополнительные переменные, чтобы преобразовать ограничения-неравенства к равенствам. В ограничениях-равенствах дополнительные переменные должны быть нулевыми. Тогда система ограничений принимает вид:

$$\begin{cases} 0 = b_1 - a_{1,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots - a_{1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m - a_{m,1} \cdot x_1 - \ldots\ldots\ldots - a_{m,n} \cdot x_n \\ x_{n+1} = b_{m+1} - a_{m+1,1} \cdot x_1 - \ldots - a_{m+1,n} \cdot x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+p} = b_{m+p} - a_{m+p,1} \cdot x_1 - \ldots. - a_{m+p,n} \cdot x_n \end{cases},$$

где $x_{n+i} \ge 0 \quad \forall i = \overline{1, p}$.

В качестве базисных переменных будем брать систему дополнительно введенных переменных. Тогда симплексная таблица для преобразованной задачи будет иметь следующий вид:

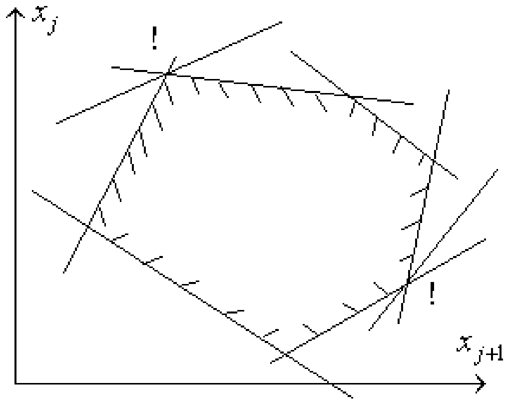
	$-x_1$	$-x_2$	….	$-x_S$	….	$-x_n$	1
0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	….	$a_{1,S}$	….	$a_{1,n}$	b_1
….	….	….	….	….	….	….	….
0	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	….	$a_{m,S}$	….	$a_{m,n}$	b_m
x_{m+1}	$a_{m+1,1}$	$a_{m+1,2}$	….	$a_{m+1,s}$	….	$a_{m+1,n}$	b_{m+1}
….	….	….	….	….	….	….	…
x_{m+p}	$a_{m+p,1}$	$a_{m+p,2}$	….	$a_{m+p,S}$	….	$a_{m+p,n}$	b_{m+p}
$Q(\overline{x})$	$-c_1$	$-c_2$	….	$-c_S$	….	$-c_n$	0

Правила выбора разрешающего элемента при поиске опорного плана.

1. При условии отсутствия “0-строк” (ограничений-равенств) и “свободных” переменных (т.е. переменных, на которые не наложено требование неотрицательности).
   - Если в столбце свободных членов симплексной таблицы нет отрицательных элементов, то опорный план найден.
   - Есть отрицательные элементы в столбце свободных членов, например $b_i < 0$. В такой строке ищем отрицательный коэффициент a_{il}, и этим самым определяем разрешающий столбец l. Если не найдем отрицательный a_{il}, *то система ограничений несовместна* (противоречива).
   - В качестве разрешающей выбираем строку, которой соответствует минимальное отношение: $\frac{b_r}{a_{rl}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \middle| \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}$, где r - номер разрешающей строки. Таким образом, a_{rl} - разрешающий элемент.
   - После того, как разрешающий элемент найден, делаем шаг модифицированного жорданова исключения с направляющим элементом a_{rl} и переходим к следующей симплексной таблице.
2. В случае присутствия ограничений-равенств и “свободных” переменных поступают следующим образом.
   - Выбирают разрешающий элемент в “0-строке” и делают шаг модифицированного жорданова исключения, после чего вычеркивают этот разрешающий столбец. Данную последовательность действий продолжают до тех пор, пока в симплексной таблице остается хотя бы одна “0-строка” (при этом таблица сокращается).
   - Если же присутствуют и свободные переменные, то необходимо данные переменные сделать базисными. И после того, как свободная переменная станет базисной, в процессе определения разрешающего элемента при поиске опорного и оптимального планов данная строка не учитывается (но преобразуется).

Вырожденность в задачах линейного программирования

Рассматривая симплекс-метод, мы предполагали, что задача линейного программирования является невырожденной, т.е. каждый опорный план содержит ровно m положительных компонент, где m – число ограничений в задаче. В вырожденном опорном плане число положительных компонент оказывается меньше числа ограничений: некоторые базисные переменные, соответствующие данному опорному плану, принимают нулевые значения. Используя геометрическую интерпретацию для простейшего случая, когда $n-m=2$ (число небазисных переменных равно 2), легко отличить вырожденную задачу от невырожденной. В вырожденной задаче в одной вершине многогранника условий пересекается более двух прямых, описываемых уравнениями вида $x_i = 0$. Это значит, что одна или несколько сторон многоугольника условий стягиваются в точку.



Аналогично при $n - m = 3$ в вырожденной задаче в одной вершине пересекается более 3-х плоскостей $x_i = 0$.

В предположении о невырожденности задачи находилось только одно значение $\theta = \min\limits_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \middle| \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}$, по которому определялся индекс выводимого из базиса вектора условий (выводимой из числа базисных переменной). В вырожденной задаче $\min\limits_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \middle| \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}$ может достигаться на нескольких индексах сразу (для нескольких строк). В этом случае в находимом опорном плане несколько базисных переменных будут нулевыми.

Если задача линейного программирования оказывается вырожденной, то при плохом выборе вектора условий, выводимого из базиса, может возникнуть бесконечное движение по базисам одного и того же опорного плана. Один из приемов борьбы с вырожденностью состоит в преобразовании задачи путем “незначительного” изменения вектора правых частей системы ограничений на величины ε_i, таким образом, чтобы задача стала невырожденной, и, в то же время, чтобы это изменение не повлияло реально на оптимальный план задачи.

Чаще реализуемые алгоритмы включают в себя некоторые простые правила, снижающие вероятность возникновения зацикливания или его преодоления.

Пусть переменную x_j необходимо сделать базисной. Рассмотрим множество индексов E_0, состоящее из тех i, для которых достигается $\theta_0 = \min\limits_i \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \middle| \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}$. Множество индексов i, для которых выполняется данное условие обозначим через E_0. Если E_0 состоит из одного элемента, то из базиса исключается вектор условий A_i (переменная x_i делается небазисной).

Если E_0 состоит более чем из одного элемента, то составляется множество E_1, которое состоит из $i \in E_0$, на которых достигается $\theta_1 = \min\limits_{i \in E_0} \left\{ \frac{a_{i1}}{a_{il}} \right\}$. Если E_1 состоит из одного индекса k, то из базиса выводится переменная x_k. В противном случае составляется множество E_2 и т.д.

Практически правилом надо пользоваться, если зацикливание уже обнаружено.