AlgèbreII

Nadia Hmida

Avril 2021

Propriétés 0.1

1. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$
2. $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4 < u, v >$ *d'où*
   $\|a\|^2 - \|b\|^2 = < a+b, a-b >$
   $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ *(Loi du parallélogramme)*
3. $| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$ *Inégalité de Cauchy-Schwartz*
4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *Inégalité de Minkowski*

Preuve

1. $\|u+v\|^2 = < u+v, u+v > = < u, u > + < u, v > + < v, u > + < v, v > = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$

Propriétés 0.1

1. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$
2. $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4 < u, v >$ *d'où*
   $\|a\|^2 - \|b\|^2 = < a+b, a-b >$
   $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ *(Loi du parallélogramme)*
3. $| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$ *Inégalité de Cauchy-Schwartz*
4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *Inégalité de Minkowski*

Preuve

1. $\|u+v\|^2 = < u+v, u+v > = < u, u > + < u, v > + < v, u > + < v, v > = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$
2. On pose $a = u + v$ et $b = u - v$

Propriétés 0.1

1. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$
2. $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4 < u, v >$ *d'où*
   $\|a\|^2 - \|b\|^2 =< a+b, a-b >$
   $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ *(Loi du parallélogramme)*
3. $| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$ *Inégalité de Cauchy-Schwartz*
4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *Inégalité de Minkowski*

Preuve

1. $\|u+v\|^2 =< u+v, u+v >=< u, u > + < u, v > + < v, u > + < v, v >= \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$
2. On pose $a = u + v$ et $b = u - v$
3. Inégalité de Cauchy-Schwartz

Propriétés 0.1

1. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$
2. $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4 < u, v >$ *d'où*
   $\|a\|^2 - \|b\|^2 = < a+b, a-b >$
   $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ *(Loi du parallélogramme)*
3. $| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$ *Inégalité de Cauchy-Schwartz*
4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *Inégalité de Minkowski*

Preuve

1. $\|u+v\|^2 = < u+v, u+v > = < u, u > + < u, v > + < v, u > + < v, v > = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$
2. On pose $a = u+v$ et $b = u-v$
3. Inégalité de Cauchy-Schwartz
4. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$

Orthogonalité

Définition 0.1

Soit $(E, <,>)$ *un espace euclidien et soit* $(u, v) \in E^2$.
On dit que u *et* v *sont orthogonaux si* $< u, v >= 0$

Proposition 0.1

: Théorème de Pythagore
u *et* v *sont orthogonaux si et seulement si*
$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Preuve :
$\|u + v\|^2 =$

Orthogonalité

Définition 0.1

Soit $(E, <, >)$ *un espace euclidien et soit* $(u, v) \in E^2$.
On dit que u *et* v *sont orthogonaux si* $< u, v >= 0$

Proposition 0.1

: Théorème de Pythagore
u *et* v *sont orthogonaux si et seulement si*
$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Preuve :
$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ ssi
$< u, v >= 0$

Base orthonormée

Proposition 0.2

Soit $(E, <, >)$ *un espace euclidien de dimension finie* n *et soient* $u_1, \cdots, u_p$ p*-vecteurs de* E*, non nuls et deux à deux orthogonaux.*
Alors $(u_1, \cdots, u_p)$ *est une famille libre*

Base orthonormée

Proposition 0.2

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien de dimension finie n et soient $u_1, \cdots, u_p$ p-vecteurs de E, non nuls et deux à deux orthogonaux.
Alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre

Preuve :
Soit $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ alors pour tout $1 \leq k \leq p$,

Base orthonormée

Proposition 0.2

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien de dimension finie n et soient $u_1, \cdots, u_p$ p-vecteurs de E, non nuls et deux à deux orthogonaux.
Alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre

Preuve :
Soit $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ alors pour tout $1 \leq k \leq p$,on a :
$< \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p, u_k >=$

Base orthonormée

Proposition 0.2

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension finie n et soient $u_1, \cdots, u_p$ p-vecteurs de E, non nuls et deux à deux orthogonaux.
Alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre

Preuve :
Soit $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ alors pour tout $1 \leq k \leq p$,on a :
$< \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p, u_k >= 0 \Rightarrow$

Base orthonormée

Proposition 0.2

Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien de dimension finie n et soient $u_1,\cdots,u_p$ p-vecteurs de E, non nuls et deux à deux orthogonaux.
Alors $(u_1,\cdots,u_p)$ est une famille libre

Preuve :
Soit $\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_p u_p=0$ alors pour tout $1\leq k\leq p$,on a :
$<\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_p u_p,u_k>=0 \Rightarrow \sum_{1\leq i\leq p}\alpha_i<u_i,u_k>=0$
Or les vecteurs sont deux à deux orthogonaux donc

Base orthonormée

Proposition 0.2

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension finie n et soient $u_1, \cdots, u_p$ p-vecteurs de E, non nuls et deux à deux orthogonaux.
Alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre

Preuve :
Soit $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ alors pour tout $1 \leq k \leq p$,on a :
$< \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p, u_k >= 0 \Rightarrow \sum_{1 \leq i \leq p} \alpha_i < u_i, u_k >= 0$
Or les vecteurs sont deux à deux orthogonaux donc
$\alpha_k < u_k, u_k >=$

Base orthonormée

Proposition 0.2

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien de dimension finie n et soient $u_1, \cdots, u_p$ p-vecteurs de E, non nuls et deux à deux orthogonaux.
Alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre

Preuve :
Soit $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ alors pour tout $1 \leq k \leq p$,on a :
$< \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p, u_k >= 0 \Rightarrow \sum_{1 \leq i \leq p} \alpha_i < u_i, u_k >= 0$
Or les vecteurs sont deux à deux orthogonaux donc
$\alpha_k < u_k, u_k >= \alpha_k \|u_k\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$ pour tout $1 \leq k \leq p$
car

Base orthonormée

Proposition 0.2

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension finie n et soient $u_1, \cdots, u_p$ p-vecteurs de E, non nuls et deux à deux orthogonaux.
Alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre

Preuve :
Soit $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ alors pour tout $1 \leq k \leq p$,on a :
$< \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p, u_k >= 0 \Rightarrow \sum_{1 \leq i \leq p} \alpha_i < u_i, u_k >= 0$
Or les vecteurs sont deux à deux orthogonaux donc
$\alpha_k < u_k, u_k >= \alpha_k \|u_k\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$ pour tout $1 \leq k \leq p$
car$u_k \neq 0$ donc $\|u_k\| \neq 0$

Définition 0.2

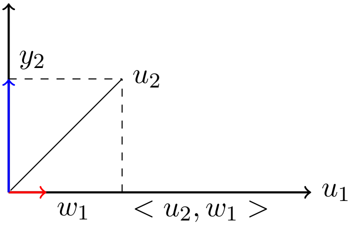
Soit $(E, <, >)$ *un espace euclidien de dimension finie* n*. On appelle base orthonormée de* E*, toute famille* $(u_1, \cdots, u_n)$ *de vecteurs de* E*, unitaires et deux à deux orthogonaux.*

c-à-d $< u_i, u_j >= \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$ *pour tout* $1 \leq i, j \leq n$

En effet $(u_1, \cdots, u_n)$ *est libre car les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et* $dim E = n =$*nombre de vecteurs*

Existence de base orthonormée :

Algorithme de Gram-Schmidt
Tout espace Euclidien admet des bases orthonormées. Pour celà, on dispose d'un algorithme qui transforme une base quelconque en une base orthonormée appellé Alogorithme de Gram-Schmidt :
Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une base quelconque de E



1. Soit $w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$
2. Soit $y_2 = u_2 - < u_2, w_1 > w_1$ alors $< y_2, w_1 >=< u_2, w_1 > - < u_2, w_1 > < w_1, w_1 >= 0$ car

Exemples 0.1

1. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel.*

Exemples 0.1

1. $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel.*
2. *Soit* $E = \mathbb{R}_2[X]$ *muni du produit scalaire* $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)dX$.
   La base canonique $(1, X, X^2)$ *n'est pas orthonogonale car* $< 1, X^2 >= \int_{-1}^{1} X^2 dX = \frac{2}{3} \neq 0$.

Exemples 0.1

1. $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel.*

2. *Soit* $E = \mathbb{R}_2[X]$ *muni du produit scalaire* $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)dX$*.*
   La base canonique $(1, X, X^2)$ *n'est pas orthonogonale car* $< 1, X^2 >= \int_{-1}^{1} X^2 dX = \frac{2}{3} \neq 0$.
   $< 1, 1 >= \int_{-1}^{1} dX = 2 \Rightarrow w_1 =$

Exemples 0.1

1. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel.*

2. *Soit* $E = \mathbb{R}_2[X]$ *muni du produit scalaire* $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)dX$.
   La base canonique $(1, X, X^2)$ *n'est pas orthonogonale car* $< 1, X^2 >= \int_{-1}^{1} X^2 dX = \frac{2}{3} \neq 0$.
   $< 1, 1 >= \int_{-1}^{1} dX = 2 \Rightarrow w_1 = \frac{1}{2}$
   $y_2 = X - < X, \frac{1}{2} > \frac{1}{2} = X - \int_{-1}^{1} \frac{X}{2} dX = X$ *car*
   $< X, \frac{1}{2} >= 0$
   et $< X, X >=$

Exemples 0.1

1. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel.*

2. *Soit* $E = \mathbb{R}_2[X]$ *muni du produit scalaire*
   $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)dX.$
   La base canonique $(1, X, X^2)$ *n'est pas orthonogonale car*
   $< 1, X^2 >= \int_{-1}^{1} X^2 dX = \frac{2}{3} \neq 0.$
   $< 1, 1 >= \int_{-1}^{1} dX = 2 \Rightarrow w_1 = \frac{1}{2}$
   $y_2 = X - < X, \frac{1}{2} > \frac{1}{2} = X - \int_{-1}^{1} \frac{X}{2} dX = X$ *car*
   $< X, \frac{1}{2} >= 0$
   et $< X, X >= \frac{2}{3}$ *donc* $w_2 =$

Exemples 0.1

1. $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel.*
2. *Soit* $E = \mathbb{R}_2[X]$ *muni du produit scalaire* $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)dX$.
   La base canonique $(1, X, X^2)$ *n'est pas orthonogonale car* $< 1, X^2 >= \int_{-1}^{1} X^2 dX = \frac{2}{3} \neq 0.$
   $< 1, 1 >= \int_{-1}^{1} dX = 2 \Rightarrow w_1 = \frac{1}{2}$
   $y_2 = X - < X, \frac{1}{2} > \frac{1}{2} = X - \int_{-1}^{1} \frac{X}{2} dX = X$ *car*
   $< X, \frac{1}{2} >= 0$
   et $< X, X >= \frac{2}{3}$ *donc* $w_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} X$
   $y_3 = X^2 - < X^2, \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - < X^2, \sqrt{\frac{3}{2}} X > \sqrt{\frac{3}{2}} X = X^2 - \frac{1}{6}$
   et $< y_3, y_3 >= \frac{8}{45}$ *donc* $w_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} (X^2 - \frac{1}{6})$

Remarque 0.1

Soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ *une base quelconque de* E *et* $\mathfrak{B}' = (w_1, \cdots, w_n)$ *la base orthonormée associée. Alors la matrice de passage* $\mathfrak{B}$ *vers* $\mathfrak{B}'$ *est triangulaire car* w_k *ne dépend que de* $u_1, \cdots, u_k$

Produit scalaire sur une base orthonormée

Soit $(E, <, >)$ un espace Euclidien de dimension n et soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de E.
Soit X et Y deux vecteurs de E alors

$$X = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i u_i$$

et

$$Y = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i u_i$$

On a alors

$$< X, Y >= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \sum_{1 \leq j \leq n} y_j < u_i, u_j >=$$

Produit scalaire sur une base orthonormée

Soit $(E, <,>)$ un espace Euclidien de dimension n et soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de E.
Soit X et Y deux vecteurs de E alors

$$X = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i u_i$$

et

$$Y = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i u_i$$

On a alors

$$< X, Y >= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \sum_{1 \leq j \leq n} y_j < u_i, u_j >= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i$$

car

Produit scalaire sur une base orthonormée

Soit $(E, <,>)$ un espace Euclidien de dimension n et soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de E.
Soit X et Y deux vecteurs de E alors

$$X = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i u_i$$

et

$$Y = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i u_i$$

On a alors

$$< X, Y >= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \sum_{1 \leq j \leq n} y_j < u_i, u_j >= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i$$

car $< u_i, u_i >= 1$ et $< u_i, u_j >= 0$

De plus, $A = mat_{\mathfrak{B}}(<, >) =$

De plus, $A = mat_{\mathfrak{B}}(<, >) = I_n$.

De plus, $A = mat_{\mathfrak{B}}(<,>) = I_n$.
D'autre part, si

$$X = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i u_i$$

alors $x_i =$

De plus, $A = mat_{\mathfrak{B}}(<,>) = I_n$.
D'autre part, si

$$X = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i u_i$$

alors $x_i = \ < X, u_i >$

De plus, $A = mat_{\mathfrak{B}}(<,>) = I_n$.
D'autre part, si

$$X = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i u_i$$

alors $x_i = \ < X, u_i >$donc

$$X = \sum_{1 \leq i \leq n} < X, u_i > u_i$$

Les matrices orthogonales

Définition 0.3

On appelle matrice orthogonale, toute matrice carré P inversible telle que

$$P^{-1} = {}^tP$$

Proposition 0.3

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien de dimension finie n et soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormée de E.
Une base $\mathfrak{B}'$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$ est orthogonale.

Preuve :

Soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une b.o.n de E et $\mathfrak{B}' = (u'_1, \cdots, u'_n)$ une autre base de E.
Soit $P = P_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} = (a_{ij})$ alors

$$u'_i =$$

Preuve :

Soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une b.o.n de E et $\mathfrak{B}' = (u'_1, \cdots, u'_n)$ une autre base de E.
Soit $P = P_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} = (a_{ij})$ alors

$$u'_i = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ki} u_k$$

Donc

$$\|u'_i\|^2 =< u'_i, u'_i >=$$

Preuve :

Soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une b.o.n de E et $\mathfrak{B}' = (u'_1, \cdots, u'_n)$ une autre base de E.
Soit $P = P_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} = (a_{ij})$ alors

$$u'_i = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ki} u_k$$

Donc

$$\|u'_i\|^2 = < u'_i, u'_i > = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ki}^2$$

et

$$< u'_i, u'_j > =$$

Preuve :

Soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une b.o.n de E et $\mathfrak{B}' = (u'_1, \cdots, u'_n)$ une autre base de E.
Soit $P = P_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} = (a_{ij})$ alors

$$u'_i = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ki} u_k$$

Donc

$$\|u'_i\|^2 = < u'_i, u'_i > = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ki}^2$$

et

$$< u'_i, u'_j > = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ki} a_{kj} \quad i \neq j$$

D'autre part ;

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} \sum_{1\leq k\leq n} a_{k1}^2 & \sum_{1\leq k\leq n} a_{k1}a_{k2} & \cdots & \sum_{1\leq k\leq n} a_{k1}a_{kn} \\ \vdots & & & \\ \sum_{1\leq k\leq n} a_{kn}a_{k1} & & & \sum_{1\leq k\leq n} a_{kn}^2 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} \|u_1'\|^2 & < u_1', u_2' > & \cdots & < u_1', u_n' > \\ \vdots & & & \\ < u_n', u_1' > & & & \|u_n'\|^2 \end{pmatrix} $$

Donc
$(u_1', \cdots, u_n')$ est une base orthonormée de $E \Leftrightarrow < u_i', u_i' >= 1$ et
$< u_i', u_j' >= 0$
$\Leftrightarrow {}^tPP = I_n$

Exemple 0.1

Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ *alors* ${}^tAA = I_3$ *donc les vecteurs*

$$c_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}, \; c_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{-4}{9} \end{pmatrix}, \; c_3 = \begin{pmatrix} \frac{-4}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$

L'othogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E, <, >)$ un espace Euclidien

Définition 0.4

Soit F une partie de E
On appelle orthogonal de F et on note

$$F^{\perp} = \{v \in E; < u, v >= 0 \text{ pour tout } u \in F\}$$

Remarque 0.2

Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une base de F alors

$$v \in F^{\perp} \Leftrightarrow < v, u_i >= 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p$$

Proposition 0.4

Soit$(E, <,>)$ *un espace Euclidien*
Si F *est un sous-espace vectoriel de* E *alors* $F^\perp$ *est aussi un sous-espace vectoriel de* E
et on a :

$$F \oplus F^\perp = E$$

Preuve :

1. $0 \in F^\perp$ car $< u, 0 >= 0$ pour tout $u \in E$ en particulier pour tout $u \in F$ donc $F^\perp \neq \emptyset$
2. Soient v_1 et $v_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
   Pour tout $u \in F$, on a :
   $< u, v_1 + \lambda v_2 >=< u, v_1 > +\lambda < u, v_2 >= 0$ donc
   $v_1 + \lambda v_2 \in F^\perp$

3. si $u \in F \cap F^{\perp}$ alors $< u, u >= 0$ d'où $u = 0$ Donc F et $F^{\perp}$ sont en somme directe
$\Rightarrow dimF + dimF^{\perp} \leq dimE \Rightarrow dimF^{\perp} \leq n - p$
4. Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une base orthonormée de F alors il existe $(u_{p+1}, \cdots, u_n)$ tels que $(u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_n)$ une base de E. En appliquant Gram-Schmidt, on obtient $(u_1, \cdots, u_p, w_{p+1}, \cdots, w_n)$ une base orthonormée de E avec $< w_k, u_i >= 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$ et $p + 1 \leq k \leq n$ donc $w_k \in F^{\perp}$ pour tout $p + 1 \leq k \leq n$
Or $(w_{p+1}, \cdots, w_n)$ est libre donc $dimF^{\perp} \geq n - p$ d'où l'égalité

Propriétés 0.2

1. $\{0\}^{\perp} = E \ et \ E^{\perp} = \{0\}$
2. $si \ F \subset G \ alors \ G^{\perp} \subset F^{\perp}$
3. $(F^{\perp})^{\perp} = F$
4. $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$

Preuve :

1. $dim\{0\} = 0$ donc $dim\{0\}^{\perp} = dimE$ donc $\{0\}^{\perp} = E$
   $E^{\perp} = (\{0\}^{\perp})^{\perp} = \{0\}$
2. $u \in G^{\perp} \Rightarrow \ quad\forall v \in G; \quad < u, v >= 0$ or $F \subset G$ donc
   $\forall v \in F; \quad < u, v >= 0$ donc $u \in F^{\perp}$
3. $dim(F^{\perp})^{\perp} = dimF$ donc il suffit de montrer une inclusion
   $u \in F$ donc $< u, v >= 0$ pour tout $v \in F^{\perp}$ donc $u \in (F^{\perp})^{\perp}$
   d'où $F \subset (F^{\perp})^{\perp} = F$
4. $F \subset F + G \Rightarrow (F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$ et
   $G \subset F + G \Rightarrow (F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$

donc
$(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$
inversement ;
si $u \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$ alors $\forall x \in F$ et $y \in G$ alors
$< u, x >=< u, y >= 0$ alors $< u, x+y >= 0$
donc $u \in (F+G)^{\perp}$

Exemple 0.2

Déterminer, dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, l'orthogonal du plan P d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + z + 2t = 0 \end{cases}$$

On a : $P = Vect(u_1 = (-1, -1, 1, 0), u_2 = (4, -2, 0, 1))$ *donc* $dim P = 2 \Rightarrow dim P^{\perp} = 2$

$$u = (x, y, z, t) \in P^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} < u, u_1 >= 0 \\ < u, u_2 >= 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 4x - 2y + t = 0 \end{cases}$$

Donc $P^{\perp} = Vect((1, 0, 1, -4), (0, 1, 1, 2))$