AlgèbreII

Nadia Hmida

Avril 2021

Proposition 0.1

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$

p *est une projection* $\Leftrightarrow$ p *est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 ou 1*

Proposition 0.1

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$
p est une projection $\Leftrightarrow$ p est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 ou 1

Preuve :
" $\Rightarrow$ " Soit M une matrice de p
On a $pop = p \Rightarrow M^2 = M \Rightarrow M(M - I) = 0 \Rightarrow X^2 - X$ est le polynome minimal de M donc 0 et 1 sont des valeurs propres de M

Proposition 0.1

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$
p est une projection $\Leftrightarrow$ *p est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 ou 1*

Preuve :
" $\Rightarrow$ " Soit M une matrice de p
On a $pop = p \Rightarrow M^2 = M \Rightarrow M(M - I) = 0 \Rightarrow X^2 - X$ est le polynome minimal de M donc 0 et 1 sont des valeurs propres de M($p \neq 0$ et $p \neq id$)

Proposition 0.1

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$
p est une projection $\Leftrightarrow$ *p est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 ou 1*

Preuve :
" $\Rightarrow$ " Soit M une matrice de p
On a $pop = p \Rightarrow M^2 = M \Rightarrow M(M - I) = 0 \Rightarrow X^2 - X$ est le polynome minimal de M donc 0 et 1 sont des valeurs propres de $M(\ p \neq 0$ et $p \neq id)$
Soient E_0 et E_1 leurs espaces propres associés. on a alors
$E_0 \oplus E_1 = E$

Proposition 0.1

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$
p *est une projection* $\Leftrightarrow$ p *est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 ou 1*

Preuve :
" $\Rightarrow$ " Soit M une matrice de p
On a $pop = p \Rightarrow M^2 = M \Rightarrow M(M - I) = 0 \Rightarrow X^2 - X$ est le polynome minimal de M donc 0 et 1 sont des valeurs propres de M($p \neq 0$ et $p \neq id$)
Soient E_0 et E_1 leurs espaces propres associés. on a alors $E_0 \oplus E_1 = E$(lemme des Noyaux)

Proposition 0.1

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$
p est une projection $\Leftrightarrow$ *p est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 ou 1*

Preuve :
" $\Rightarrow$ " Soit M une matrice de p
On a $pop = p \Rightarrow M^2 = M \Rightarrow M(M - I) = 0 \Rightarrow X^2 - X$ est le polynome minimal de M donc 0 et 1 sont des valeurs propres de M($p \neq 0$ et $p \neq id$)
Soient E_0 et E_1 leurs espaces propres associés. on a alors
$E_0 \oplus E_1 = E$(lemme des Noyaux)
$\Rightarrow$ p est diagonalisable

" $\Leftarrow$ "

Soit p un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres 0 et 1 donc $E_0 \oplus E_1 = E$

" $\Leftarrow$ "

Soit p un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres 0 et 1 donc $E_0 \oplus E_1 = E$

d'où pour tout $u \in E$ il existe $u_0 \in E_0$ et $u_1 \in E_1$ tel que $u = u_0 + u_1$ avec $p(u_1) = u_1$ et $p(u_0) = 0$

" $\Leftarrow$ "
Soit p un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres 0 et 1 donc $E_0 \oplus E_1 = E$
d'où pour tout $u \in E$ il existe $u_0 \in E_0$ et $u_1 \in E_1$ tel que
$u = u_0 + u_1$ avec $p(u_1) = u_1$ et $p(u_0) = 0$
$p(u) = p(u_0) + p(u_1) = 0 + u_1$ et $p(p(u)) = p(u_1) = u_1 = p(u)$
donc p est une projection sur E_1 parallèlement à E_0

Proposition 0.2

Soit $p \in \mathfrak{L}(E)$ *une projection.*

$$p \text{ est une projection orthogonale} \Leftrightarrow \begin{array}{c} p \text{ est symetrique} \\ (< p(x), y >=< x, p(y) >) \end{array}$$

Proposition 0.2

Soit $p \in \mathfrak{L}(E)$ *une projection.*

$$p \text{ est une projection orthogonale} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} p \text{ est symetrique} \\ (< p(x), y >=< x, p(y) >) \end{array}$$

Preuve :

$" \Rightarrow "$

$< p(x), y >=< p(x), y - p(y) + p(y) >$

$=< p(x), y - p(y) > + < p(x), p(y) >$

$=< p(x), p(y) >$ car

Proposition 0.2

Soit $p \in \mathfrak{L}(E)$ *une projection.*

$$p \text{ est une projection orthogonale} \Leftrightarrow \begin{array}{c} p \text{ est symetrique} \\ (< p(x), y >=< x, p(y) >) \end{array}$$

Preuve :

$" \Rightarrow "$

$< p(x), y >=< p(x), y - p(y) + p(y) >$

$=< p(x), y - p(y) > + < p(x), p(y) >$

$=< p(x), p(y) >$ car $p(x) \in F$ et $y - p(y) \in F^{\perp}$

Proposition 0.2

Soit $p \in \mathfrak{L}(E)$ une projection.

$$p \text{ est une projection orthogonale} \Leftrightarrow p \text{ est symetrique } (< p(x), y >=< x, p(y) >)$$

Preuve :

" $\Rightarrow$ "

$< p(x), y >=< p(x), y - p(y) + p(y) >$

$=< p(x), y - p(y) > + < p(x), p(y) >$

$=< p(x), p(y) >$ car $p(x) \in F$ et $y - p(y) \in F^{\perp}$

de même $< x, p(y) >=< p(x), p(y) >$

Proposition 0.2

Soit $p \in \mathfrak{L}(E)$ *une projection.*

$$p \text{ est une projection orthogonale} \Leftrightarrow \begin{array}{c} p \text{ est symetrique} \\ (< p(x), y >=< x, p(y) >) \end{array}$$

Preuve :

$" \Rightarrow "$

$< p(x), y >=< p(x), y - p(y) + p(y) >$

$=< p(x), y - p(y) > + < p(x), p(y) >$

$=< p(x), p(y) >$ car $p(x) \in F$ et $y - p(y) \in F^{\perp}$

de même $< x, p(y) >=< p(x), p(y) >$

$" \Leftarrow "$

Soit p est projection sur F parallèlement à G donc $F = Imp$ et $G = kerp$. Donc il suffit de montrer que

$" \Leftarrow "$

Soit p est projection sur F parallèlement à G donc $F = Imp$ et $G = kerp$. Donc il suffit de montrer que$Imp = Kerp^{\perp}$

Soient $x \in Kerp$ et $y = p(u) \in Imp$

$< x, y >=< x, p(u) >=< p(x), u >$ car p est symétrique. Or $p(x) = 0$ donc $< x, y >= 0$ donc $y \in$

$" \Leftarrow "$

Soit p est projection sur F parallèlement à G donc $F = Imp$ et $G = kerp$. Donc il suffit de montrer que$Imp = Kerp^{\perp}$

Soient $x \in Kerp$ et $y = p(u) \in Imp$

$< x, y >=< x, p(u) >=< p(x), u >$ car p est symétrique. Or $p(x) = 0$ donc $< x, y >= 0$ donc $y \in Kerp^{\perp} \Rightarrow$

$" \Leftarrow "$
Soit p est projection sur F parallèlement à G donc $F = Imp$ et $G = kerp$. Donc il suffit de montrer que$Imp = Kerp^{\perp}$
Soient $x \in Kerp$ et $y = p(u) \in Imp$
$<x, y> = <x, p(u)> = <p(x), u>$ car p est symétrique. Or $p(x) = 0$ donc $<x, y> = 0$ donc $y \in Kerp^{\perp} \Rightarrow Imp \subset Kerp^{\perp}$.

$" \Leftarrow "$

Soit p est projection sur F parallèlement à G donc $F = Imp$ et $G = kerp$. Donc il suffit de montrer que$Imp = Kerp^{\perp}$

Soient $x \in Kerp$ et $y = p(u) \in Imp$

$< x, y >=< x, p(u) >=< p(x), u >$ car p est symétrique. Or $p(x) = 0$ donc $< x, y >= 0$ donc $y \in Kerp^{\perp} \Rightarrow Imp \subset Kerp^{\perp}$.

or $dimImp = dimE - dimKerp = dimKerp^{\perp}$ d'où l'égalité

Proposition 0.3

Soit p une projection orthogonale sur F un sous-espace de E alors il existe une base $\mathfrak{B}$ orthonormée de E telle que

$$mat(p, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $r = dimF$

Proposition 0.3

Soit p une projection orthogonale sur F un sous-espace de E alors il existe une base $\mathfrak{B}$ orthonormée de E telle que

$$mat(p, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $r = dimF$

Preuve :

Soient $\mathfrak{B}_1 = (u_1, \cdots, u_r)$ une base orthonormée de F

Proposition 0.3

Soit p une projection orthogonale sur F un sous-espace de E alors il existe une base $\mathfrak{B}$ orthonormée de E telle que

$$mat(p, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $r = dimF$

Preuve :

Soient $\mathfrak{B}_1 = (u_1, \cdots, u_r)$ une base orthonormée de Fet
$\mathfrak{B}_2 = (u_{r+1}, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de $F^{\perp}$

Proposition 0.3

Soit p une projection orthogonale sur F un sous-espace de E alors il existe une base $\mathfrak{B}$ orthonormée de E telle que

$$mat(p, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $r = dimF$

Preuve :
Soient $\mathfrak{B}_1 = (u_1, \cdots, u_r)$ une base orthonormée de Fet
$\mathfrak{B}_2 = (u_{r+1}, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de $F^{\perp}$alors
$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ est une base de E car $E = F \oplus F^{\perp}$
De plus elle est orthonormée

Proposition 0.3

Soit p une projection orthogonale sur F un sous-espace de E alors il existe une base $\mathfrak{B}$ orthonormée de E telle que

$$mat(p, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $r = dim F$

Preuve :

Soient $\mathfrak{B}_1 = (u_1, \cdots, u_r)$ une base orthonormée de Fet
$\mathfrak{B}_2 = (u_{r+1}, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de $F^{\perp}$alors
$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ est une base de E car $E = F \oplus F^{\perp}$
De plus elle est orthonormée
Pour tout $1 \leq i \leq r;\ u_i \in F$ donc $p(u_i) = u_i$ et pour tout
$r + 1 \leq i \leq n;\ p(u_i) = 0$ car $u_i \in F^{\perp}$
$(u = x + y \in F + G \Rightarrow p(u) = x)$

Donc la matrice de p dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Conséquence 0.1

Si $mat(p, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *diagonale donc p est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 et 1*

Conséquence 0.1

Si $mat(p, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *diagonale donc* p *est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 et 1*

De plus $dimE_1 = dimF$ *et* $dimE_0 = dimF^{\perp}$

Proposition 0.4

Soit s une symétrie orthogonale par rapportà F un sous-espace de E alors il existe une base $\mathfrak{B}$ orthonormée de E telle que

$$mat(s, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Avec $r = dimF$

Proposition 0.4

Soit s une symétrie orthogonale par rapportà F un sous-espace de E alors il existe une base $\mathfrak{B}$ orthonormée de E telle que

$$mat(s, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Avec $r = dimF$

Preuve :

Soient $\mathfrak{B}_1 = (u_1, \cdots, u_r)$ une base orthonormée de F et $\mathfrak{B}_2 = (u_{r+1}, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de $F^{\perp}$ alors $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ est une base de E car $E = F \oplus F^{\perp}$

De plus elle est orthonormée

Pour tout $1 \leq i \leq r;\ u_i \in F$ donc $s(u_i) = u_i$ et pour tout $r+1 \leq i \leq n;\ s(u_i) = -u_i$ car $u_i \in F^{\perp}$

Donc la matrice de s dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Conséquence 0.2

Si $mat(s, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$ *diagonale donc* s *est diagonalisable et ses valeurs propres sont -1 et 1*

Conséquence 0.2

Si $mat(s, \mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$ *diagonale donc* s *est diagonalisable et ses valeurs propres sont -1 et 1*

De plus $dim E_1 = dim F$ *et* $dim E_{-1} = dim F^{\perp}$

2. Isométrie

Soit $(E, <,>)$ un espace Euclidien

Définition 0.1

On appelle isométrie sur E tout endomorphisme f de E qui conserve la distance

2. Isométrie

Soit $(E, <, >)$ un espace Euclidien

Définition 0.1

On appelle isométrie sur E tout endomorphisme f de E qui conserve la distance

$$\forall\ u \in E;\ \|f(u)\| = \|u\|$$

2. Isométrie

Soit $(E, <,>)$ un espace Euclidien

Définition 0.1

On appelle isométrie sur E tout endomorphisme f de E qui conserve la distance

$$\forall\ u \in E;\ \ \|f(u)\| = \|u\|$$

Remarque 0.1

Une isométrie est injective car
$f(u) = 0 \Rightarrow \|f(u)\| = 0 \Rightarrow \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow$

2. Isométrie

Soit $(E, <,>)$ un espace Euclidien

Définition 0.1

On appelle isométrie sur E tout endomorphisme f de E qui conserve la distance

$$\forall\ u \in E;\ \ \|f(u)\| = \|u\|$$

Remarque 0.1

Une isométrie est injective car

$f(u) = 0 \Rightarrow \|f(u)\| = 0 \Rightarrow \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow ker f = \{0\}$

2. Isométrie

Soit $(E, <,>)$ un espace Euclidien

Définition 0.1

On appelle isométrie sur E tout endomorphisme f de E qui conserve la distance

$$\forall\ u \in E;\ \|f(u)\| = \|u\|$$

Remarque 0.1

Une isométrie est injective car
$f(u) = 0 \Rightarrow \|f(u)\| = 0 \Rightarrow \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow ker f = \{0\}$
donc f est bijective sur un espace Euclidien car

2. Isométrie

Soit $(E, <, >)$ un espace Euclidien

Définition 0.1

On appelle isométrie sur E tout endomorphisme f de E qui conserve la distance

$$\forall\ u \in E;\ \|f(u)\| = \|u\|$$

Remarque 0.1

Une isométrie est injective car
$f(u) = 0 \Rightarrow \|f(u)\| = 0 \Rightarrow \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow kerf = \{0\}$
doncf est bijective sur un espace Euclidien caren dimension finie

2. Isométrie

Soit $(E, <,>)$ un espace Euclidien

Définition 0.1

On appelle isométrie sur E tout endomorphisme f de E qui conserve la distance

$$\forall\ u \in E;\ \|f(u)\| = \|u\|$$

Remarque 0.1

Une isométrie est injective car
$f(u) = 0 \Rightarrow \|f(u)\| = 0 \Rightarrow \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow ker f = \{0\}$
donc$f$ est bijective sur un espace Euclidien caren dimension finieDe plus ;$\|f^{-1}(u)\| = \|f(f^{-1}(u))\| = \|u\|$ *donc f^{-1} est aussi une isométrie*

Proposition 0.5

Soit f un endomorphisme de E. les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *f est une isométrie*
2. *Pour tout $(u, v) \in E^2$; $< u, v >=< f(u), f(v) >$*
3. *f transforme une base orthonormée en une base orthonormée*
4. *La matrice de f dans une base orthonormée est orthogonale*

Proposition 0.5

Soit f un endomorphisme de E. les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *f est une isométrie*
2. *Pour tout $(u, v) \in E^2$; $< u, v >=< f(u), f(v) >$*
3. *f transforme une base orthonormée en une base orthonormée*
4. *La matrice de f dans une base orthonormée est orthogonale*

Preuve :

$$"1 \Rightarrow 2" \quad < f(u), f(v) >=$$
$$\frac{1}{2}\left(\|f(u)+f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\|f(u+v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\|u+v)\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) =< u, v >$$

Proposition 0.5

Soit f un endomorphisme de E. les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *f est une isométrie*
2. *Pour tout $(u, v) \in E^2$; $< u, v >=< f(u), f(v) >$*
3. *f transforme une base orthonormée en une base orthonormée*
4. *La matrice de f dans une base orthonormée est orthogonale*

Preuve :

"$1 \Rightarrow 2$" $< f(u), f(v) >=$
$\frac{1}{2}\left(\|f(u)+f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2\right) =$
$\frac{1}{2}\left(\|f(u+v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2\right) =$
$\frac{1}{2}\left(\|u+v)\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) =< u, v >$

"$2 \Rightarrow 3$" Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de E alors $< u_i, u_i >= 1$ et $< u_i, u_j >= 0$ pour $i \neq j$

Alors $< f(u_i), f(u_j) >=< u_i, u_j >= 0$ donc $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est libre donc base de E.

Alors $< f(u_i), f(u_j) >=< u_i, u_j >= 0$ donc $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est libre donc base de E.
De plus $< f(u_i), f(u_i) >=< u_i, u_i >= 1$ donc $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est une base orthonormée de E

Alors $< f(u_i), f(u_j) >=< u_i, u_j >= 0$ donc $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est libre donc base de E.
De plus $< f(u_i), f(u_i) >=< u_i, u_i >= 1$ donc $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est une base orthonormée de E
"$3 \Rightarrow 4$" Soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de E alors $A = mat(f, \mathfrak{B})$ est la matrice de passage de $(u_1, \cdots, u_n)$ vers $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$.

Alors $< f(u_i), f(u_j) >=< u_i, u_j >= 0$ donc $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est libre donc base de E.
De plus $< f(u_i), f(u_i) >=< u_i, u_i >= 1$ donc $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est une base orthonormée de E
"$3 \Rightarrow 4$" Soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de E alors $A = mat(f, \mathfrak{B})$ est la matrice de passage de $(u_1, \cdots, u_n)$ vers $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$.
Donc A est orthogonale car matrice de passage entre deux bases orthonormées

Alors $< f(u_i), f(u_j) >=< u_i, u_j >= 0$ donc $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est libre donc base de E.
De plus $< f(u_i), f(u_i) >=< u_i, u_i >= 1$ donc $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est une base orthonormée de E
"$3 \Rightarrow 4$" Soit $\mathfrak{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de E alors $A = mat(f, \mathfrak{B})$ est la matrice de passage de $(u_1, \cdots, u_n)$ vers $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$.
Donc A est orthogonale car matrice de passage entre deux bases orthonormées
"$4 \Rightarrow 1$" Supposons que f admet une matrice orthogonale A par rapport à une base orthonormée $(u_1, \cdots, u_n)$ alors
$\|f(u)\|^2 =< f(u), f(u) >=< Au, Au >= {}^t(Au)mat_{\mathcal{B}}(<,>)Au = {}^t(Au)I_nAu = {}^tu{}^tAAu = {}^tuu =< u, u >= \|u\|^2$

Conséquence 0.3

1. *Le déterminant d'une isométrie est égal à* ± 1. *En effet, la matrice d'une isométrie par rapport à une base orthonormée étant orthogonale, on a* $det({}^tAA) = det(I_n) = 1$ *donc* $det({}^tA)det(A) = det(A)^2 = 1$

Conséquence 0.3

1. *Le déterminant d'une isométrie est égal à* ± 1. *En effet, la matrice d'une isométrie par rapport à une base orthonormée étant orthogonale, on a* $det({}^tAA) = det(I_n) = 1$ *donc* $det({}^tA)det(A) = det(A)^2 = 1$
2. *Les valeurs propres d'une isométrie sont de module 1. En effet* $f(u) = \lambda u$ *alors*

$$\|u\| = \|f(u)\| = |\lambda|\|u\|$$

Exemple 0.1

On se propose de déterminer toutes les isométries f *de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* A *la matrice de* f *par rapport à la base canonique alors* A *est orthogonale car*

Exemple 0.1

On se propose de déterminer toutes les isométries f *de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* A *la matrice de* f *par rapport à la base canonique alors* A *est orthogonale car* $\mathcal{B}_c$ *est une b.o.n de* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 0.1

On se propose de déterminer toutes les isométries f de $\mathbb{R}^2$. Soit A la matrice de f par rapport à la base canonique alors A est orthogonale car$\mathcal{B}_c$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^2$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *avec* ${}^t AA = I_2$ *donc* $a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1$ *et* $ab + cd = 0$

Exemple 0.1

On se propose de déterminer toutes les isométries f de $\mathbb{R}^2$. Soit A la matrice de f par rapport à la base canonique alors A est orthogonale car$\mathcal{B}_c$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^2$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *avec* ${}^tAA = I_2$ *donc* $a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1$ *et* $ab + cd = 0$

1. *Si A admet une valeur propre double égale à 1 alors $P_A(X) = (X-1)^2$ donc $tr(A) = a + d = 2$ or $\mid a \mid \leq 1$ et $\mid d \mid \leq 1$ donc $a = d = 1$ d'où $b = c = 0$.*
   Donc $A = I_2$ et $f = id$

Exemple 0.1

On se propose de déterminer toutes les isométries f *de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* A *la matrice de* f *par rapport à la base canonique alors* A *est orthogonale car*$\mathcal{B}_c$ *est une b.o.n de* $\mathbb{R}^2$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *avec* ${}^tAA = I_2$ *donc* $a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1$ *et* $ab + cd = 0$

1. *Si* A *admet une valeur propre double égale à 1 alors* $P_A(X) = (X-1)^2$ *donc* $tr(A) = a + d = 2$ *or* $\mid a \mid \leq 1$ *et* $\mid d \mid \leq 1$ *donc* $a = d = 1$ *d'où* $b = c = 0$.
   Donc $A = I_2$ *et* $f = id$
2. *Si* A *admet une valeur propre double égale à -1 alors* $P_A(X) = (X+1)^2$ *donc* $tr(A) = a + d = -2$ *donc* $a = d = -1$ *d'où* $b = c = 0$. *Donc* $A = -I_2$ *et* $f = -id$ *la symétrie par rapport à l'origine*

Exemple 0.1

On se propose de déterminer toutes les isométries f *de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* A *la matrice de* f *par rapport à la base canonique alors* A *est orthogonale car* $\mathcal{B}_c$ *est une b.o.n de* $\mathbb{R}^2$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *avec* ${}^tAA = I_2$ *donc* $a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1$ *et* $ab + cd = 0$

1. *Si* A *admet une valeur propre double égale à 1 alors* $P_A(X) = (X-1)^2$ *donc* $tr(A) = a + d = 2$ *or* $\mid a \mid \leq 1$ *et* $\mid d \mid \leq 1$ *donc* $a = d = 1$ *d'où* $b = c = 0$.
   Donc $A = I_2$ *et* $f = id$
2. *Si* A *admet une valeur propre double égale à -1 alors* $P_A(X) = (X+1)^2$ *donc* $tr(A) = a + d = -2$ *donc* $a = d = -1$ *d'où* $b = c = 0$. *Donc* $A = -I_2$ *et* $f = -id$ *la symétrie par rapport à l'origine*

Exemple 0.2

1.

2.

3. *Si A admet deux valeurs propres 1 et -1 donc A est diagonalisable alors f est une symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}.*

Exemple 0.2

1.
2.
3. *Si A admet deux valeurs propres 1 et -1 donc A est diagonalisable alors* f *est une symétrie par rapport à* E_1 *parallèlement à* E_{-1}*.*
   Soit u *un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et* v *un vecteur propre associé à la valeur propre -1 alors* $<u,v>=<f(u),f(v)>=<u,-v>=-<u,v>$ *donc* $<u,v>=0$*. Donc* f *est la symétrie orthogonale par rapport à la droite* $D=Vect(u)=E_1$

Exemple 0.2

1.

2.

3. *Si A admet deux valeurs propres 1 et -1 donc A est diagonalisable alors* f *est une symétrie par rapport à* E_1 *parallèlement à* E_{-1}.
   Soit u *un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et* v *un vecteur propre associé à la valeur propre -1 alors* $< u, v > = < f(u), f(v) > = < u, -v > = - < u, v >$ *donc* $< u, v > = 0$. *Donc* f *est la symétrie orthogonale par rapport à la droite* $D = Vect(u) = E_1$

4. *Si A admet deux valeurs propres complexes conjugués* $cos\theta \pm i\ sin\theta$ *alors*
   $$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$
   Donc f *est la rotation de centre* O *et d'angle* θ