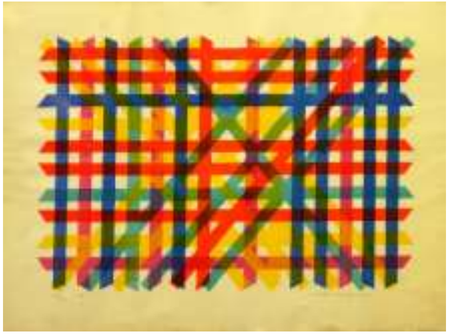
Laboratorio 5 - Formule e quadri

dopolavoro matematico – domenica 13 marzo 2022
a cura di Giovanni I. Giannoli

È bella questa formula? E, nel caso, perché?	$\mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0}$
E questo quadro?	

In che senso si può dire che una formula, o una dimostrazione, o un settore della matematica, sono "belli"?
Perché mai una formula potrebbe apparire più bella di un'altra?
C'è un rapporto, tra la bellezza della matematica (sempre ammesso che qualcosa del genere si possa dire) e la bellezza in generale (quella di un volto, di un panorama o di un quadro)?

Grazie a un esperimento sul campo, il laboratorio si propone di stimolare la riflessione su questi temi, fornendo qualche indicazione sulla letteratura che li ha trattati.

Struttura del Laboratorio

a. Vengono esposti due tabelloni: il primo contiene otto riproduzioni di quadri astratti del Novecento; il secondo contiene otto formule, scelte tra quelle che la letteratura specialistica giudica "belle". I quadri e le formule sono numerati, senza alcun commento; è indicato soltanto l'autore e – per i quadri – l'anno di realizzazione.

b. Il conduttore illustra l'obiettivo del laboratorio, fornendo qualche spunto di riflessione sulla possibile "bellezza" della matematica.

c. Ad ogni partecipante viene consegnato questo foglio esplicativo (che, sul retro, contiene una bibliografia di riferimento) e un questionario, composto da due facciate fronte/retro.

d. Ogni partecipante è invitato a dichiarare la fascia di età e le competenze matematiche, barrando le relative caselle del questionario.

e. Ogni partecipante viene quindi invitato a soffermarsi davanti al tabellone dei quadri, per analizzarli, e indicare nel questionario le proprie preferenze, disponendo i quadri secondo un ordine di "bellezza" decrescente (dal più apprezzato, al meno apprezzato).

f. Se crede di poterne esprimerne il motivo, ogni partecipante viene invitato a motivare la propria scelta, per il quadro giudicato più "bello" e per quello giudicato meno "bello".

g. Ogni partecipante viene quindi invitato a soffermarsi davanti al tabellone delle formule, ad analizzarle, per indicare nel questionario le proprie preferenze, disponendo le formule secondo un ordine di "bellezza" decrescente (dalla più apprezzata, alla meno apprezzata).

h. Qualora riesca ad esprimerne il motivo, ogni partecipante viene invitato a motivare la propria scelta, per la formula giudicata più "bella" e per quella giudicata meno "bella".

i. Indipendentemente dai giudizi di "bellezza" formulati, ogni partecipante viene invitato a tentare un accoppiamento di carattere "estetico" tra uno dei quadri e una delle formule, e a tentarne anche un secondo, tra un altro quadro e un'altra formula. Nel questionario vengono suggeriti alcuni degli elementi (di carattere formale, strutturale, semiotico, eccetera) che potrebbero favorire l'accoppiamento, ma ogni partecipante è libero di lasciarsi guidare da propri criteri, o dal proprio istinto.

j. Alla fine, ogni partecipante è invitato ad esprimere in modo sintetico (se ne è consapevole) i motivi che hanno guidato i suoi accoppiamenti.

k. Alla riconsegna del questionario, ogni partecipante riceve un foglio-ricordo, nel quale sono riportate: su una facciata, le formule oggetto del laboratorio (con una sintetica spiegazione del significato e dell'importanza); sull'altra facciata, le immagini dei quadri oggetto del laboratorio.

l. Per eventuali seminari, conferenze, approfondimenti sull'argomento, i partecipanti sono invitati a trasmettere le proprie richieste all'indirizzo *dopolavoromatematico@gmail.com.*

Chi ne ha trattato (tra altri):

Aharoni R., *Mathematics, Poetry and Beauty*, World Scientific, Singapore 2014.

Biederman I., Vessel E.A., "Perceptual pleasure and the brain", *American Scientist*, 94, 3 (2006): 247-253.

Blåsjö V., "A Definition of Mathematical Beauty and Its History", *Journal of Humanistic Mathematics*, 2, 2 (2012): 93-108.

Cellucci C., "Mathematical beauty, understanding, and discovery", *Foundations of Science*, 20 (2014): 339–355.

Dirac P.A.M., *La bellezza come metodo*, Raffaello Cortina, Milano 2019.

Ghys É., "On the beauty of mathematics", *Inflexions*, 44, 2 (2020): 145-149.

Giaquinto M., "Mathematical Proofs: The Beautiful and the Explanatory", *Journal of Humanistic Mathematics*, 6, 1 (2016): 52-72.

Hossenfelder S., *Sedotti dalla matematica. Come la bellezza ha portato i fisici fuori strada*, Cortina, Milano 2019

Inglis M., Aberdein A., "Beauty Is Not Simplicity: An Analysis of Mathematicians' Proof Appraisals", *Philosophia Mathematica*, 23, 1 (2014):87-109

Johnson S.G.B, Steinerberger S., "The Aesthetics of Mathematical Explanations", *Proc. of 40th Conf. of the Cognitive Science Soc.* (2018): 572-577.

Johnson S.G.B, Steinerberger S., "The Universal Aesthetics of Mathematics", *The Mathematical Intelligencer*, 41 (2019a): 67–70.

Johnson S.G.B, Steinerberger S., "Intuitions about mathematical beauty: A case study in the aesthetic experience of ideas", *Cognition*, 189 (2019b): 242-259.

Lang S., *The Beauty of Doing Mathematics: Three Public Dialogues*, Springer, New York 1985 (trad.it. Bollati Boringhieri, Torino 2015).

Lange M., "Aspects of Mathematical Explanation: Symmetry, Unity and Salience", *Philosophical Review*, 123, 4 (2014): 485-531.

Le Lionnais F., "La beauté en mathématiques", in Id., *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique* [1948], II ed., Blanchard, Paris 1962: 437–465.

Matthew I., Aberdein A., "Beauty is not simplicity: An analysis of mathematicians' proof appraisals", *Philosophia Mathematica*, 23, 3 (2015): 87–109.

Montano U., *Explaining Beauty in Mathematics: An Aesthetic Theory of Mathematics*, Springer, Cham 2014

Pearcy D., *Mathematical Beauty: What is Mathematical Beauty and Can Anyone Experience It?*, John Catt Educational, Melton (Woodbridge) UK 2020

Plotnitsky A., "Mathematics and Aesthetics", in Kelly M. (a cura di), *Encyclopedia of Aesthetics*, Oxford Un. Press, Oxford UK 1998: 3-191

Rota G.-C., "The phenomenology of mathematical beauty", *Synthese*, 111 (1997): 171–182.

Sinclair, N., "The roles of the aesthetic in mathematical enquiry", *Mathematical Thinking and Learning*, 6, 3 (2004): 261–284.

— "Aesthetic considerations in mathematics", *Journal of Humanistic Mathematics*, 1 (2011): 2–31.

Sinclair N., Pimm D., Higginson W. (a cura di), *Mathematics and the Aesthetic: New Approaches to an Ancient Affinity*, Springer, New York NY 2006.

Thagard P.R., "The passionate scientist: Emotion in scientific cognition", in Carruthers P., Stich S.P., Siegal M, (a cura di), *The cognitive basis of science*, Cambridge Un. Press, Cambridge UK 2002: 235-250.

Todd C.S., "Unmasking the Truth Beneath the Beauty: Why the Supposed Aesthetic Judgements Made in Science May Not Be Aesthetic at All", *International Studies in the Philosophy of Science*, 22, 1 (2008): 61-79.

Toth I., *Matematica ed emozioni*, Di Renzo, Roma 2004.

Vessel E.A., Maurer N., Denker A.H., Starr G.G., "Stronger shared taste for natural domains than for artifacts of human culture", *Cognition*, 179 (2018): 121-131.

Wells D., "Which is The Most Beautiful?", *The Mathematical Intelligencer*, 10, 4 (1988): 30-31.

— "Are These the Most Beautiful?", *The Mathematical Intelligencer*, 12, 3 (1990): 37-41.

Zeki S., Romaya J.P., Benincasa D.M.T., Atiyah M.F., "The experience of mathematical beauty and its neural correlates", *Frontiers in Human Neurosciences*, 8 (2014), art. 68

Zeki S., Chén O.Y., Romaya J.P., "The biological basis of mathematical beauty", *Frontiers in Human Neurosciences*, 12 (2018), art. 467.

Formule

dopolavoro matematico – domenica 13 marzo 2022

$a \cdot b = \overline{(\bar{a} + \bar{b})}$ 1 - Teorema di De Morgan	Il teorema vale in algebra booleana, nella logica proposizionale e nella teoria degli insiemi. Indica la relazione che intrattengono tra loro il prodotto, la negazione e la somma booleana (o le operazioni equivalenti, nella logica proposizionale e nella teoria degli insiemi).
$mc\,\Psi(\bar{\boldsymbol{r}}, t) = \; i\,\dfrac{h}{2\pi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(\bar{\boldsymbol{r}}, t)$ 2 - Equazione di Dirac	Esprime la legge fondamentale cui deve sottostare una funzione d'onda relativistica, nella fisica delle "particelle elementari". Ψ indica la funzione d'onda, il cui quadrato fornisce la probabilità di trovare una particella nella posizione $\bar{\boldsymbol{r}}$, al tempo *t; h* è la costante di Planck, *i* l'unità immaginaria, *m* la massa della particella, *c* la velocità della luce. Le γ^{μ} sono matrici particolari, che esprimono le relazioni esistenti tra lo spin della particella ed il campo elettromagnetico; $\partial_{\mu}\Psi$ denota la derivata parziale della funzione d'onda, rispetto alla coordinata μ-esima dello spazio-tempo. Con un'opportuna scelta delle unità di misura e dei simboli, l'equazione può essere espressa nella forma ***i ∂Ψ = mΨ***, che è scolpita sulla tomba di Dirac. Si tratta di una delle formule giudicate tra le più belle, secondo gli esperti.
$e^{ix} = cos\,x + i\;sen\,x$ 3 - Formula di Eulero	Dà conto della profonda relazione che sussiste fra le funzioni trigonometriche e la funzione esponenziale complessa. Per $x = \pi$, dà luogo alla identità $\boldsymbol{e^{i\pi} + 1 = 0}$, che è da molti considerata una delle formule più affascinanti della matematica, perché mette in relazione cinque simboli fondamentali: e, i, π, 1 e 0.
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)$ 4 - *Equazione di Eulero-Lagrange*	Dà conto delle relazioni che sussistono tra le derivate parziali di una data funzione – rispetto alle coordinate nello spazio – e le derivate parziali di quella stessa funzione, rispetto alla variazione di quelle medesime coordinate, rispetto al tempo. Se viene applicata alla "lagrangiana" di un sistema meccanico (una funzione che esprime la differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale), l'equazione equivale alla seconda legge della dinamica.
$\Box A^{\mu} = \mu_0 J^{\mu}$ 5 - Equazioni di Maxwell	Costituiscono le leggi fondamentali dell'interazione elettromagnetica. Qui a sinistra sono scritte in una forma particolarmente compatta (*tensoriale relativistica*), mentre in genere sono espresse nella forma di quattro equazioni differenziali alle derivate parziali, corrispondenti rispettivamente alla "legge di Gauss per l'elettricità", alla "legge di Gauss per il magnetismo", alla "legge di Faraday" e al "teorema di Ampère". Nella formula qui a sinistra, le grandezze A^{μ} rappresentano le componenti del campo vettoriale elettromagnetico, le J^{μ} le componenti vettoriali della densità di corrente, μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto; $\Box = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)$, è il cosiddetto "operatore di d'Alembert", dove *c* è la velocità della luce, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ è la derivata parziale seconda rispetto al tempo, mentre ∇^2 è il cosiddetto *operatore laplaciano*, pari a $\sum_1^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, cioè alla sommatoria delle derivate parziali seconde, rispetto alle coordinate spaziali.
$log_a(b \cdot c) = log_a(b) + log_a(c)$ 6 - Regola di Napier	Esprime una proprietà fondamentale dei logaritmi, che consente di trasformare il logaritmo di un prodotto nella somma dei logaritmi dei suoi fattori. L'introduzione dei logaritmi, l'elaborazione delle loro "tavole" e l'uso di questa regola (a partire dal 1614) consentirono a navigatori, scienziati e ingegneri di eseguire calcoli di alta precisione – per moltiplicazioni a più cifre – limitandosi ad addizionare i valori riportati in specifiche tabelle, pre-calcolate. Anche i "regoli calcolatori" – utilizzati per almeno quattro secoli, prima dell'introduzione delle calcolatrici elettroniche – erano basati su questa regola.
$i\,\dfrac{h}{2\pi}\dfrac{\partial\Psi(\bar{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\bar{\boldsymbol{r}}, t)$ 7 - Equazione di Schrödinger	È l'equazione fondamentale della meccanica quantistica non relativistica, elaborata da Schrödinger e (in altra forma) da Heisenberg, già nel 1925. L'equazione (qui espressa a sinistra nella forma vettoriale di Dirac) disciplina il comportamento dinamico dei sistemi quantum-meccanici. Nell'equazione, il termine Ψ (che in verità è un vettore) indica la funzione d'onda, il cui quadrato fornisce la probabilità di trovare il sistema in uno dei suoi possibili stati. Al primo membro, la derivata parziale di Ψ rispetto al tempo è moltiplicata per l'unità immaginaria i e per la costante di Planck *h*, divisa per *2π*; al secondo membro, il cosiddetto "operatore hamiltoniano" (corrispondente all'energia totale del sistema) agisce sulla medesima funzione d'onda Ψ. Se $V(\bar{\boldsymbol{r}}, t)$ è l'operatore che esprime l'energia potenziale del sistema, e ∇^2 è l'*operatore laplaciano* (si veda qui sopra, alla formula 5), allora l'operatore hamiltoniano ha la forma: $\hat{H} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2 + V(\bar{\boldsymbol{r}}, t)$.
$\displaystyle\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ 8 - Teorema di Torricelli-Barrow	È considerato il "teorema fondamentale del calcolo integrale", perché stabilisce un'importante relazione tra il concetto di integrale e quello di derivata, per funzioni di variabili reali. Dice, in sostanza, che per calcolare l'integrale di una certa funzione, tra due estremi, basta trovare la primitiva di quella funzione, e calcolarne i valori agli estremi.

Quadri

dopolavoro matematico – domenica 13 marzo 2022

1 - Giuseppe Capogrossi - 1962

2 - Robert Delaunay - 1957

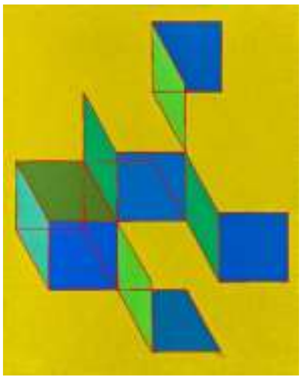
3 - Piero Dorazio - 1968

4 - Lucio Fontana - 1959

5 - Wassily Kandinsky - 1929

6 - Paul Klee - 1937

7 - Kazimir Malevich - 1929



8 - Achille Perilli - 1977

Questionario

dopolavoro matematico – domenica 13 marzo 2022

(barrare le caselle corrispondenti, e compilare i campi testo)

		barrare
Fascia d'età	<11	
	11-18	
	19-26	
	27-65	
	> 65	

		barrare
Competenze matematiche	nessuna	
	da istruzione primaria	
	da istruzione secondaria	
	da istruzione terziaria	
	professionali	

	Indicare il numero d'ordine e il cognome dell'autore	*Classifica soggettiva*
Ordinamento soggettivo di "bellezza" dei **quadri** esposti in copia (il preferito al primo posto, gli altri a seguire)		I
		II
		III
		IV
		V
		VI
		VII
		VIII

Qualora sia consapevole, esprimere il motivo del giudizio sui quadri, per il primo e per l'ultimo classificato:

	Motivo del giudizio (max 20 parole)
Primo classificato	
Ultimo classificato	

	Indicare il numero d'ordine e il cognome dell'autore	*Classifica soggettiva*
Ordinamento soggettivo di "bellezza" delle **formule** (la preferita al primo posto, le altre a seguire)		I
		II
		III
		IV
		V
		VI
		VII
		VIII

Qualora sia consapevole, esprimere il motivo del giudizio sulle formule, per la prima e per l'ultima classificata:

	Motivo del giudizio (max 20 parole)
Prima classificata	
Ultima classificata	

Qualora sia possibile, anche <u>indipendentemente dal giudizio di "bellezza" che se ne è dato</u>, proporre un accoppiamento tra due delle formule e due dei quadri (sulla base di elementi formali, strutturali, semiotici, oppure riferibili alla distribuzione delle parti, alla tensione, all'effetto gestaltico, al "significato" attribuito, eccetera):

Formula *Indicare il numero d'ordine e il cognome dell'autore*	***Quadro*** *Indicare il numero d'ordine e il cognome dell'autore*

Qualora sia consapevole, esprimere sinteticamente il motivo degli accoppiamenti indicati:

	Motivo dell'accoppiamento (max 20 parole)
Primo accoppiamento	
Secondo accoppiamento	